

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS
SUPERIORES DE MONTERREY

CAMPUS CIUDAD DE MÉXICO



PROCESOS DE LÉVY EN FINANZAS Y LA FUNCIÓN DE
DENSIDAD NORMAL INVERSA GAUSSIANA, UN ESTUDIO PARA
MÉXICO

DOCTORADO EN ADMINISTRACIÓN

TESIS PRESENTADA POR

BÁRBARA RUTH TREJO BECERRIL

SEPTIEMBRE 2004

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS
SUPERIORES DE MONTERREY

CAMPUS CIUDAD DE MÉXICO



PROCESOS DE LÉVY EN FINANZAS Y LA FUNCIÓN DE
DENSIDAD NORMAL INVERSA GAUSSIANA, UN ESTUDIO PARA
MÉXICO

DOCTORADO EN ADMINISTRACIÓN

TESIS PRESENTADA POR

BÁRBARA RUTH TREJO BECERRIL

ASESOR

DR. JOSÉ ANTONIO NUÑEZ MORA

SEPTIEMBRE 2004

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS	3
LISTA DE TABLAS	4
ABSTRACT	5
AGRADECIMIENTOS	6
CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN	7
CAPÍTULO 2. MANEJO DE DATOS	10
CAPÍTULO 3. PRUEBA OMNIBUS DE NORMALIDAD MULTIVARIADA PARA OB- SERVACIONES	13
3.1. Casos especiales de la prueba LM_p	14
3.1.1. Ajustando la prueba del multiplicador de Lagrange.	14
CAPÍTULO 4. PRUEBA KOLMOGOROV-SMIRNOV PARA LA FUNCIÓN DE DEN- SIDAD T-STUDENT	18
4.1. La distribución t-Student	18
4.2. Prueba Kolmogorov-Smirnov	19
CAPÍTULO 5. PROCESOS DE LÉVY	23
5.1. Funciones Características	25
5.2. Procesos Poisson Compuesto	31
5.3. Caracterización y existencia de procesos de Lévy.	32
5.3.1. Distribuciones infinitamente divisibles y procesos de Lévy en distribución.	32
5.3.2. Representación de las distribuciones infinitamente divisibles .	37
5.4. Momentos	42
CAPÍTULO 6. DISTRIBUCIÓN NORMAL INVERSA GAUSSIANA	48
CAPÍTULO 7. VALOR EN RIESGO (VAR)	56
CAPÍTULO 8. RESULTADOS	60
CAPÍTULO 9. CONCLUSIONES	69
REFERENCIAS	70

CONTENIDO—*Continued*

APÉNDICE A. GRAFICAS 74

LISTA DE FIGURAS

FIGURE 6.1.	Forma de triángulo de la distribución NIG	49
FIGURE 7.1.	ALFA, comparación de funciones de densidad.	58
FIGURE 7.2.	APASCO, comparación de funciones de densidad.	59

LISTA DE TABLAS

TABLE 2.1.	Series de Datos	11
TABLE 2.2.	Series de Datos (a)	12
TABLE 3.1.	Pruebas de Normalidad	16
TABLE 3.2.	Pruebas de Normalidad (a)	17
TABLE 4.1.	Grados de libertad para la densidad t-student	20
TABLE 4.2.	Grados de libertad para la densidad t-student (a)	21
TABLE 4.3.	Prueba Kolmogorov-Smirnov para la función t-student	22
TABLE 6.1.	Parámetros de la NIG	52
TABLE 6.2.	Parámetros de la NIG (a)	53
TABLE 6.3.	Parámetros invariantes NIG	54
TABLE 6.4.	Parámetros invariantes NIG (a)	55
TABLE 8.1.	Resultados de la NIG, para los índices: IPC y SP 500	61
TABLE 8.2.	Resultados de la NIG, para las acciones ALFA, AMTEL, AMXL, APASCO, ARA, ARCA y CELV	62
TABLE 8.3.	Resultados de la NIG, para las acciones CEMEXCPO, CIEB, COMERCIUBC, CONTAL, DESCB, ELEKTRA y FEMSAUBD	63
TABLE 8.4.	Resultados de la NIG, para las acciones: GCARSO A1, GEOB, GFINBUR, GFNORTE, GISSA B, GMEXICO B y GMODELO	64
TABLE 8.5.	Resultados de la NIG, para las acciones: GSANBOR B, ICA, KIMBER A, PEÑOLES, SAVIA A, SORIANA B y TELECOM A	65
TABLE 8.6.	Resultados de la NIG, para las acciones: TELEVISIA, TELMEX L, TV AZTECA, USCOM B1, VITRO, WALMEX C y WALMEX V	66
TABLE 8.7.	Resultados t-student, para AMTEL y AMXL	67
TABLE 8.8.	Resultados Sesgo y Kurtosis	67
TABLE 8.9.	Resultados Sesgo y Kurtosis 2	68

ABSTRACT

La presente disertación busca mostrar que para el caso de las acciones mexicanas, la función de densidad Normal Inversa Gaussiana (NIG) proporciona un mejor ajuste a las series de rendimientos, que la función de densidad Normal, pues las colas son semi-pesadas. Lo anterior implica que mediante la NIG se puede estimar de manera más realista el Valor en Riesgo (VaR), además de que los rendimientos de las acciones están mejor modelados mediante un proceso de Lévy con función de densidad NIG y no por un movimiento Browniano. La estimación de los parámetros de la NIG y todos los demás programas, se hicieron utilizando los programas: MatLab, GAUSS y WinRATS-32.

AGRADECIMIENTOS

Esta tesis representa la culminación de muchos años de estudio; agradezco a todos mis profesores por todo lo que aprendí de ellos y a mis amigos de la UNAM, del COLMEX y del ITESM.

Muy en especial quiero dar las gracias al Dr. Carlos Urzúa por su apoyo en mis estudios y por supuesto al Dr. José Antonio Núñez y al Dr. Arturo Lorenzo por toda su ayuda y conocimientos compartidos. A mi familia por su apoyo incondicional.

A todos, ¡muchas gracias!

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Durante los últimos años los rendimientos de las acciones se han modelado utilizando herramientas más sofisticadas para explicar su comportamiento, una de ellas y quizá la más importante, son los procesos estocásticos estacionarios continuos, dentro de los cuales el más utilizado y por lo mismo el más conocido es el movimiento Browniano o proceso de Wiener. Desde 1900 con Louis Bachelier [2] esta clase de procesos se comenzó a utilizar para estudiar las finanzas y hasta la fecha estos procesos se utilizan muy frecuentemente en la actualidad, ejemplos de esto es el modelo de Black -Scholes (1973) [18] el cual se utiliza para valuación de derivados y precios de opciones, otras aplicaciones relevantes que se han desarrollado son del área de estructura de tasas de interés, entre estos modelos se encuentran, el de Ho-Lee [25], Cox, Ingersoll and Ross [22], Vasicek [37], etc.

Esta clase de procesos estocásticos continuos tienen dos propiedades muy importantes una de ellas es la *continuidad*, lo cual significa que las trayectorias del movimiento Browniano son continuas en el tiempo, la otra es la *invarianza en la escala*, lo que implica, que las propiedades estadísticas del movimiento Browniano son las mismas en todo el tiempo, por ello es parecido a un fractal, si se amplía cualquier tramo de la trayectoria del proceso, el resultado es el mismo, es decir, que el comportamiento es igual en un año que en una semana, por lo que utilizar el proceso de Wiener para modelar las finanzas, implica asumir que el comportamiento de las series cumplen con estas propiedades.

Desafortunadamente en el caso de las series históricas de los rendimientos de las acciones mexicanas, estas propiedades no se cumplen, pues existen saltos, lo que causa discontinuidades en las trayectorias, además de que el comportamiento de las acciones en una semana es muy diferente al de todo un año y más aún el movimiento Browniano asume que la función de densidad asociada a las variables en estudio es la distribución Normal, lo cual como se demostrará en el primer capítulo de esta tesis no es correcto, por lo que el uso del movimiento Browniano no es el adecuado para el estudio de datos financieros mexicanos. Primero porque estas series no son continuas en el tiempo, existen saltos durante el periodo de estudio, además de que el comportamiento de los rendimientos de las acciones no es el mismo en un mes que en un año y mucho menos siguen una distribución Normal, por lo que es necesario cambiar de proceso estocástico para el estudio de las finanzas en el caso de México.

En los años 30, se comenzó a estudiar una clase de procesos estocásticos estacionarios, llamados procesos de Lévy. Esta clase de procesos es muy amplia ya que

incluye tanto procesos continuos (procesos de Wiener) como procesos discontinuos (con saltos), el comportamiento de las trayectorias de estos procesos depende de la función de densidad que tenga asociada la serie en estudio, pero esta clase de procesos estocásticos sólo tienen asociadas funciones de densidad infinitamente divisibles, entre las cuales se encuentran la t-student, Poisson, Normal, Cauchy, Binomial negativa, Exponencial, Hiperbólica, Normal inversa gaussiana, Hiperbólica generalizada, distribución Γ , distribución δ , etc. [34]

El uso de Procesos de Lévy implica primero decidir cual de todas las funciones de densidad infinitamente divisibles se ajusta mejor a los datos mexicanos, la importancia de saber qué función se ajusta mejor a los datos no es sólo para saber que función se debe utilizar para los procesos de Lévy, también por ejemplo, en el caso de la herramienta de Valor en Riesgo (VaR) paramétrico se debe de conocer la función de densidad asociada a los datos para ser calculado.

En 1977 en la Universidad de Aarhus, Ole Barndorff-Nielsen [5], propuso una nueva clase de funciones de densidad llamada Hiperbólica Generalizada, las cuales tienen colas semi-pesadas, esta función de densidad originalmente surge para modelar el tamaño de los granos de arena que en 1941 Ralph Alger Bagnold [3] proporciono, dicha función de densidad tiene cinco parámetros uno de ellos es λ , que nos dice que tan pesadas son las colas de la función. De esta familia de funciones de densidad las más conocidas son las funciones Hiperbólica y Normal Inversa Gaussiana las cuales se originan cuando λ toma el valor de 1 ó $-1/2$ respectivamente, en un principio se creía que la series de datos financieros seguían una función de densidad Hiperbólica, de hecho en 1994 Eberlein & Keller [23], Bibby & Sørensen [19], Küchler, Neumann, Sørensen y Streller en 1994 [30] hacen estudios utilizando esta función de densidad para modelar datos financieros alemanes y daneses, pero en 1995 Ole Barndorff-Nielsen [9] demostro que la función de densidad Normal Inversa Gaussiana ajustaba mejor las series de datos que Eberlein & Keller habían utilizado. Trabajos posteriores realizados por Rydberg (1995) [33], y Blæsild (1995) mostraron que la función de densidad Normal Inversa Gaussiana era la más apropiada para modelar los datos financieros. Además, los procesos de Lévy que siguen esta distribución son matemáticamente más sencillos que los generados a partir de una distribución Hiperbólica, pues tienen la propiedad de ser cerrados bajo convolución.

Como se demostrará en esta tesis los datos en México no siguen una función de densidad Normal, por lo cual el movimiento Browniano no es el más adecuado para modelar el comportamiento de estos, también se muestra que la función de densidad Normal Inversa Gaussiana nos da un mejor ajuste para las series de rendimientos de las acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores por lo cuál es necesario cambiar de procesos estocásticos continuos a procesos estocásticos con saltos es decir a Procesos de Lévy con funciones de densidad Normal Inversa Gaussiana.

Este trabajo esta formado de las siguientes partes, Capítulo 2. *Manejo de los datos*, Capítulo 3. *Pruebas Omnibus de normalidad*, en el cual se da una breve explicación de la prueba de normalidad Omnibus propuesta por Urzúa en 1997 [36], Capítulo 4. *Prueba Kolmogorov-Smirnov para la función de densidad t-Student*, en el Capítulo 5. *Procesos de Lévy*, se revisan algunos de los resultados más importantes como la descomposición Lévy-Knintchine la cual es fundamental para comenzar con el estudio de esta clase de procesos, también se revisa el teorema g-momento, en el Capítulo 6. *La función de densidad Normal Inversa Gaussiana*, en este se revisan las propiedades de esta función de densidad, en el Capítulo 7. *El Valor en Riesgo*, se da una breve semblanza de esta herramienta y de la importancia que tiene a nivel mundial, por lo que el cálculo de la misma de manera más acertada es de gran utilidad en el área de la regulación financiera, en el Capítulo 8. *Resultados*, se analizan todos los resultados obtenidos en los diferentes capítulos y por último *Conclusiones*.

Capítulo 2

MANEJO DE DATOS

Para este trabajo se tomaron los precios de cierre de 36 acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de valores, además de los índices IPC y S&P500, al ser estas series discretas se pueden representar como $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, donde cada P_i representa el precio de cierre diario de la acción en la observación i .

Es común que para calcular los rendimientos de las acciones se utilice la siguiente fórmula:

$$R_i = (P_i - P_{i-1}) / P_{i-1}, \text{ entonces}$$

$$R_i = \frac{P_i}{P_{i-1}} - 1, \text{ por lo que}$$

$$\frac{P_i}{P_{i-1}} = R_i + 1$$

Pero mucho autores en la literatura de Finanzas prefieren calcular las tasas de crecimiento utilizando la función logaritmo, es decir con capitalización continua, por lo que los rendimientos se definen de la siguiente manera:

$$Z_i = \log P_i - \log P_{i-1}$$

el cual es lo mismo que decir que

$$Z_i = \log \frac{P_i}{P_{i-1}}$$

sustituyendo el valor de $\frac{P_i}{P_{i-1}}$, tenemos que

$$Z_i = \log (R_i + 1)$$

Una de las razones por la cual se utiliza esta manera de calcular el rendimiento es la siguiente, si se quisiera calcular el rendimiento durante n días de una acción se tendría que hacer lo siguiente:

Para el caso discreto,

$$R_{i+k} = (1 + R_i) (1 + R_{i+1}) (1 + R_{i+2}) \cdots (1 + R_{i+k-1})$$

Para el caso continuo,

$$Z_{i+k} = Z_i + Z_{i+1} + \cdots + Z_{i+k-1} = \log P_i - \log P_{i-1} + \log P_{i+1} - \log P_i + \cdots + \log P_{i+k-1} - \log P_{i+k-2}$$

entonces,

$$Z_{i+k} = Z_i + Z_{i+1} + \cdots + Z_{i+k-1} = \log P_{i+k-1} - \log P_{i-1}.$$

Numéricamente la diferencia entre R_i y Z_i no es significativa pues las funciones $\log x$ y $x - 1$ tienen casi los mismo valores cerca de cero.

Otra razón por la cual se elige la capitalización continua para calcular los rendimientos es la siguiente, los datos financieros que se proporcionan son siempre discretos,

Acción	Fecha inicial	Fecha final	No. de datos
ALFA	04-01-1993	22-01-2003	2518
AMTEL	02-05-2002	22-01-2003	184
AMXL	07-02-2001	22-01-2003	489
APASCO	04-01-1993	22-01-2003	2518
ARA	26-09-1996	22-01-2003	1581
ARCA	14-12-2001	22-01-2003	276
CELV	03-01-2001	22-01-2003	513
CEMEX CPO	04-01-1993	22-01-2003	2518
CIEB	02-01-1997	22-01-2003	1515
COMERCI UBC	04-01-1993	22-01-2003	2518
CONTAL	02-01-1997	22-01-2003	1515
DESC B	04-01-1993	22-01-2003	2518
ELEKTRA	02-01-1996	22-01-2003	1768
FEMSA UBD	04-01-1993	22-01-2003	2518
GCARSO A1	04-01-1993	22-01-2003	2518
GEOB	02-01-1997	22-01-2003	1515
GFINBUR	02-01-1996	22-01-2003	1767
GFNORTE	02-01-1997	22-01-2003	1515

TABLA 2.1. Series de Datos

aunque estos se muevan constantemente durante el día, por lo que se podrían modelar como procesos estocásticos continuos. Entonces una serie de precios de cierre diarios correspondería a valores de un proceso estocástico continuo en puntos del tiempo enteros equidistantes. Para los procesos continuos la elección natural para calcular rendimientos sería la capitalización continua, es decir, los log (rendimientos).

Las acciones que se utilizaron en el trabajo se muestran en las tablas 2.1 y 2.2, además del lapso de tiempo que se tomo para cada una de ellas, como se puede observar fue diferente, pues en muchos casos, las acciones no cotizaron, en todas las fechas por lo que la información no existe, la base de los datos se obtuvo de Economática, CETIF, ITESM-CCM.

Acción	Fecha inicial	Fecha final	No. de datos
GISSA B	02-01-1997	22-01-2003	1515
GMEXICO B	15-09-1995	22-01-2003	1839
GMODELO	01-07-1994	22-01-2003	2143
GSANBOR B	21-04-1999	22-01-2003	942
ICA	04-01-1993	22-01-2003	2518
IPC	04-01-1993	03-01-2003	2505
KIMBER A	04-01-1993	22-01-2003	2518
PEÑOLES	04-08-1995	22-01-2003	1868
SAVIA A	29-08-1995	22-01-2003	1851
SORIANA B	02-01-1997	22-01-2003	1515
SP500	04-01-1993	03-01-2003	2446
TELECOM A	26-07-1996	22-01-2003	1624
TELEVISA	04-01-1993	22-01-2003	2518
TELMEX L	04-01-1993	22-01-2003	2518
TVAZTECA	15-08-1997	22-01-2003	1360
USCOM B1	08-07-2002	22-01-2003	137
VITRO	04-01-1993	31-12-2002	2501
WALMEX C	04-01-1993	22-01-2003	2518
WALMEX V	04-01-1993	22-01-2003	2518

TABLA 2.2. Series de Datos (a)

Capítulo 3

PRUEBA OMNIBUS DE NORMALIDAD MULTIVARIADA PARA OBSERVACIONES

En esta sección se revisará brevemente en que consisten las pruebas ómnibus de normalidad multivariada propuestas por Urzúa (1997) [36].

La complejidad de las pruebas de normalidad multivariada complica la obtención del estadístico del multiplicador de Lagrange (LM), sin embargo si se asume que la distribución alternativa para la normal multivariada es la exponencial cuártica, la obtención del estadístico LM es más sencillo.

Asumir que la exponencial cuártica es la distribución alternativa para la Normal multivariada es suficiente, pues (i) es la distribución "más apropiada" cuando se asume que existen momentos más allá del cuarto, y (ii) es cercana a la Normal multivariada, por lo que se puede aproximar a la familia de Pearson multivariada tanto como se necesite. Además de que todos los resultados obtenidos pueden ser extendidos a todas las posibles distribuciones Q-exponenciales.

Notación.

Primero se transforman las observaciones originales de X : Sea \bar{x} y S el vector de medias de una muestra y la matriz de varianzas y covarianzas de la muestra de observaciones $\{x_1, \dots, x_n\}$. Sea G la matriz ortogonal cuyas columnas son eigenvectores estandarizados de S , y D la matriz de eigenvalores. Usando $S^{-1/2} = GD^{-1/2}G'$, se transforman las observaciones en:

$$y_t = S^{-1/2} (x_t - \bar{x}). \quad t = 1, \dots, n.$$

después se define

$$Q_{ijk} = \sum_{t=1}^n y_{ti}y_{tj}y_{tk}/n \quad y \quad R_{ijkq} = \sum_{t=1}^n y_{ti}y_{tj}y_{tk}y_{tq}/n \quad (1)$$

El resultado principal del artículo Urzúa (1997) [36] es el siguiente:

Proposición 1.

Bajo las condiciones mencionadas, el multiplicador de Lagrange para probar normalidad multivariada de observaciones esta dado por

$$LM_p = \mathbf{n} \left[\begin{array}{l} \sum_{i=1}^p Q_{iii}^2/6 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^p Q_{ijj}^2/2 + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i < j < k}}^p Q_{ijk}^2 + \sum_{i=1}^p (R_{iiii} - 3)^2 / 24 + \\ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^p (R_{iijj} - 1)^2 / 4 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^p R_{iijj}^2/6 + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j, i \neq k, j < k}}^p R_{ijk}^2/2 + \\ \sum_{\substack{i,j,k,q=1 \\ i < j < k < q}}^p R_{ijkq}^2 \end{array} \right]$$

donde el estadístico LM se distribuye asintóticamente como una χ_v^2 , con $v = p(p+1)(p+2)(p+7)/24$.

Esta es una prueba ómnibus que involucra todos los posibles terceros y cuartos momentos (puros y mixtos).

3.1 Casos especiales de la prueba LM_p

Esta prueba LM incluye varios casos especiales de pruebas para normalidad multivariada que han sido propuestos en la literatura.

1. El caso univariado LM_1 , la cual puede ser expresada en términos del tercer y cuarto momento estandarizados de las observaciones originales.

Definiendo $\sqrt{b_1} = m_3/m_2^{3/2}$ y $b_2 = m_4/m_2^2$, donde el i -ésimo momento central m_i es igual a $\sum (x_j - \bar{x})^i / n$, por lo que la prueba es la siguiente:

$$LM_1 = n \left[(\sqrt{b_1})^2 / 6 + (b_2 - 3)^2 / 24 \right]^A \sim \chi_2^2.$$

Este estadístico fué propuesto en 1975 por Bowman y Shenton [20], y también por Jarque y Bera en 1980 y 1987 [26], [27] estos autores asumen que bajo la hipótesis nula la media asintótica de $\sqrt{b_1}$ y b_2 son 0 y 3 respectivamente, mientras que sus varianzas asintóticas son $6/n$ y $24/n$, y su covarianza asintótica es cero.

3.1.1 Ajustando la prueba del multiplicador de Lagrange.

Esta subsección presenta unas pruebas más simples utilizando solo algunos elementos de la prueba LM_p .

Caso univariado. Utilizando el resultado de Fisher (1930) [24], es posible calcular exactamente cuales son las medias y las varianzas de $\sqrt{b_1}$ y b_2 bajo la hipótesis nula de normalidad. Como en el caso asintótico, $E\{\sqrt{b_1}\} = 0$, pero la otra media y las otras dos varianzas son exactamente: (Ver Urzúa 1996) [35]

$$\begin{aligned} E\{b_2\} &= 3(n-1)/(n+1) \\ var\{\sqrt{b_1}\} &= 6(n-2)/(n+1)(n+3) \\ var\{b_2\} &= 24n(n-2)(n-3)/(n+1)^2(n+3)(n+5) \end{aligned} \quad (2)$$

Entonces como fué sugerido en Urzúa (1997), se sustituyen los valores asintóticos por los exactos y así se obtiene un nuevo estadístico LM_1 , por lo que la prueba es:

$$ALM_1 = (\sqrt{b_1})^2 / var\{\sqrt{b_1}\} + (b_2 - E\{b_2\})^2 / var\{b_2\} \stackrel{A}{\sim} \chi_2^2.$$

Como fué visto en Urzúa (1996) [35], esta nueva prueba de normalidad es mejor en los caso de pequeños y medianos tamaños de muestras. Además, como también se probó, el poder de este estadístico es mejor que el del estadístico Bowman-Shenton y Jarque-Bera.

Dados estos resultados, se consideraron las contrapartes individuales de la prueba ómnibus univariada ALM_1 . Entonces la prueba ajustada que mide la falta de simetría se define como:

$$ALM_1 = (\sqrt{b_1})^2 / var\{\sqrt{b_1}\} \stackrel{A}{\sim} \chi_2^2.$$

y la prueba ajustada que mide la kurtosis se define como:

$$ALM_1 = (b_2 - E\{b_2\})^2 / var\{b_2\} \stackrel{A}{\sim} \chi_2^2.$$

Caso multivariado Primero se reducen los grados de libertad presentados en la prueba general dada por la proposición 1, es natural enfocarse solo en los terceros y cuartos momentos puros. Utilizando (1) y (2), la prueba omnibus ajustada para normalidad multivariada de observaciones es definida como:

$$ALM_p = \sum_{i=1}^p Q_{iii}^2 / var\{\sqrt{b_1}\} + \sum_{i=1}^p (R_{iiii} - E\{b_2\})^2 / var\{b_2\} \stackrel{A}{\sim} \chi_{2p}^2.$$

Además generalizando el caso univariado, se define la prueba ajustada de falta de simetría como:

$$ALM_{1,p} = \sum_{i=1}^p Q_{iii}^2 / var\{\sqrt{b_1}\} \stackrel{A}{\sim} \chi_p^2.$$

y la prueba ajustada de kurtosis se define como:

Acción	$ALM_{1,p}$	$ALM_{2,p}$	ALM_p
ALFA	58.5433	4074.3760	4132.9192
AMTEL	0.2641	42.7965	43.0607
AMXL	0.5613	95.6484	96.2097
APASCO	84.6127	3765.5927	3850.2054
ARA	45.0576	189282.86	189327.91
ARCA	24.7492	165.5074	190.2567
CELV	69.4568	1351.1671	1420.6238
CEMEX CPO	0.09099	7141.5571	7141.6481
CTEB	0.0993	2482.9367	2483.0360
COMERCI UBC	12.1563	7248.6677	7260.8239
CONTAL	22.3512	644.5754	666.9266
DESC B	12.7455	1383.6403	1396.3858
ELEKTRA	1.2053	1787.1371	1788.3424
FEMSA UBD	39.4788	27379.254	27418.733
GCARSO A1	2590.066	196862.29	199452.36
GEOB	18.1668	5782.1324	5800.2992
GFINBUR	13.5953	2355.3543	2368.9496
GFNORTE	49.0570	1049.6521	1098.7091

TABLA 3.1. Pruebas de Normalidad

$$ALM_{2,p} = \sum_{i=1}^p (R_{iiii} - E\{b_2\}^2 / var\{b_2\}) \stackrel{A}{\sim} \chi_p^2.$$

Para cada uno de los tres estadísticos siguientes, la tabla 1 de [36] reporta los valores críticos en varios niveles de significancia.

Se utilizo el lenguaje de programación GAUSS para realizar las pruebas de normalidad y los resultados se muestran en las tablas 3.1 y 3.2.

Como puede observarse para todos los casos la hipótesis de normalidad fue rechazada, pues los valores de ALM_p son mayores a 17.69, que es el valor crítico más alto que toma dicha prueba..

Acción	$ALM_{1,p}$	$ALM_{2,p}$	ALM_p
GISSA B	0.4960	2274.9553	2275.4513
GMEXICO B	37.9058	540.6847	578.5905
GMODELO	32.7981	741.6843	774.4824
GSANBOR B	122.5225	792.4217	914.9442
ICA	0.9197	16474.852	16475.772
IPC	1.4774	2618.5844	2620.0618
KIMBER A	35.0698	7736.7183	7771.7881
PEÑALES	5.6053	4285.9055	4291.5107
SAVIA A	137.1893	142231.66	142368.84
SORIANA B	6.4062	241.4985	247.9047
SP500	5.8954	1383.8779	1389.7733
TELECOM A	5.9382	453.3578	459.2960
TELEVISA	25.2119	2248.8565	2274.0685
TELMEX L	39.0202	810.7142	849.7343
TVAZTECA	0.3913	1070.9683	1071.3596
USCOM B1	1625.6105	44953.311	46578.922
VITRO	79.3065	5680.9855	5760.2920
WALMEX C	14.4462	1026.3228	1040.7690
WALMEX V	14.2732	2059.5783	2073.8515

TABLA 3.2. Pruebas de Normalidad (a)

Capítulo 4

PRUEBA KOLMOGOROV-SMIRNOV PARA LA FUNCIÓN DE DENSIDAD T-STUDENT

4.1 La distribución t-Student

En un principio se creía que la distribución de los rendimientos era la función Normal, pero como se demostró en el capítulo anterior esto es falso.

Se ha observado que las distribuciones empíricas de los rendimientos tienen una Kurtosis mayor, es decir, que estas distribuciones tienen colas más pesadas a las que predice la distribución Normal, una de las distribuciones con esta propiedad es la función de distribución t-Student, cuya función de densidad es la siguiente:

$$f(x; m, H, v) = \frac{v^{(1/2)v}}{B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}v)} [v + H(x - m)^2]^{-1/2(v+1)} \sqrt{H}$$

donde $B(.,.)$ es la función Beta, la cual expresada en términos de la función Gamma es como sigue:

$$B(a, b) = \Gamma(a) \Gamma(b) / \Gamma(a + b)$$

La distribución t-Student tiene las siguientes propiedades:

- (1) $E(\tilde{x}) = m$, para $v > 1$ y $var(\tilde{x}) = H^{-1}v / (v - 2)$ para $v > 2$
- (2) En general todos los momentos de orden $r < v$ son finitos
- (3) Cuando $v = 1$, la función de densidad t-Student es la función de densidad Cauchy.

Cuando $v \rightarrow \infty$, la función de distribución t-Student converge a la distribución Normal.

Además si una variable aleatoria con función de densidad t-Student con $v > 2$, \tilde{x} , es estandarizada, es decir

$$\frac{\tilde{x} - E(\tilde{x})}{\sqrt{var(\tilde{x})}}$$

Entonces la función de densidad de la variable aleatoria tiene las siguientes propiedades:

- (1) Colas más pesadas que la función de densidad Normal estándar.
- (2) Valores mayores en una vecindad cercana a cero que la función de densidad normal.

Para nuestro estudio vamos a considerar a la función de densidad t-Student estadarizada, por lo cual $m = 0$ y $H = 1$, así que la función de densidad se reduce en la siguiente fórmula:

$$f(x; v) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{v\pi}} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{\frac{v+1}{2}}}$$

4.2 Prueba Kolmogorov-Smirnov

La prueba Kolmogorov-Smirnov compara las distribuciones de dos vectores de datos X_1 y X_2 . La hipótesis nula para esta prueba es que X_1 y X_2 tienen la misma distribución y la hipótesis alternativa asume diferentes funciones de distribución.

Para cada valor de X , la prueba Kolmogorov-Smirnov compara la proporción de X_1 menor o igual que x , con la proporción de X_2 menor o igual que x . Se calcula la diferencia máxima entre todos los valores de X , este estadístico matemáticamente se puede escribir como:

$$\max(|F_1(x) - F_2(x)|)$$

donde, F_1 es la proporción del valor X_1 menor o igual a x y F_2 es la proporción del valor de X_2 menor o igual que x .

La prueba de Kolmogorov-Smirnov en el programa MatLab, regresa el valor de h el cual sólo puede tomar dos valores: uno, si la hipótesis nula se puede rechazar, es decir, que las series comparadas no tienen la misma función de densidad y cero cuando la hipótesis nula no se puede rechazar.

Para realizar esta prueba se comparó cada serie de rendimientos con series de datos que tienen una distribución t-student con ν grados de libertad, el procedimiento se realizó 1000 veces, estos resultados se obtuvieron utilizando MatLab.

El programa regresa el valor de ks , el cual es la suma de todos los valores de h , dividido por 1000, por lo que si ks es cercano a 1 se puede concluir que las series en estudio no siguen la distribución $t - Student$, por el contrario si el valor es cercano a cero, se puede concluir que la función de densidad que siguen los datos es la t-Student. Las pruebas se hicieron con un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$.

Acción	v	<i>No.Iteraciones</i>	<i>Fun.Max.Ver.</i>
ALFA	9	19	3476.75
AMTEL	11	21	257.209
AMXL	12	22	685.781
APASCO	10	22	3476.42
ARA	9	21	2052.98
ARCA	8	20	380.935
CELV	8	20	700.697
CEMEX CPO	9	22	3449.41
CIEB	10	21	2085.11
COMERCI UBC	9	22	3450.6
CONTAL	9	21	2107.82
DESC B	10	22	3498.84
ELEKTRA	9	22	2442.09
FEMSA UBD	8	21	3385.18
GCARSO A1	11	21	3390.81
GEOB	8	20	2055.93
GFINBUR	10	22	2442.45
GFNORTE	10	21	2106.36

TABLA 4.1. Grados de libertad para la densidad t-student

Antes de llevar a cabo dicha prueba se estimó el parámetro v , que son los grados de libertad de la función $t - Student$, este parámetro se calculó para cada serie de datos, utilizando el método de Máxima Verosimilitud, el cual se implementó en MatLab, también se utilizó el programa WinRATS-32 con el método BHHH (Algoritmo de Berndt, Hall, Hall y Hausmann), los resultados que se obtuvieron se presentan en las tablas 4.1 y 4.2.

A continuación se presentan los resultados obtenidos de la prueba Kolmogorov-Smirnov

Acción	v	$F.Max.Vers.$	$No.Iteraciones$
GISSA B	8	20	2072.17
GMEXICO B	11	21	2569.28
GMODELO	12	22	2996.59
GSANBOR B	11	21	1310.47
ICA	9	21	3425.29
IPC	11	21	3477.77
KIMBER A	8	21	3440.83
PEÑOLES	9	20	3556.48
SAVIA A	6	21	3309.1
SORIANA B	14	22	2129.64
SP500	10	21	3404.29
TELECOM A	12	22	2274.84
TELEVISA	11	21	3495.75
TELMEX L	12	22	3524.35
TVAZTECA	11	21	1889.25
USCOM B1	7	19	156.688
VITRO	10	21	3441.77
WALMEX C	11	22	3513.32
WALMEX V	11	21	3500.43

TABLA 4.2. Grados de libertad para la densidad t-student (a)

Acción	KS	Acción	KS
ALFA	1	GISSA B	1
AMTEL	0.0150	GMEXICO B	1
AMXL	0.0770	GMODELO	1
APASCO	1	GSANBOR B	0.8660
ARA	1	ICA	1
ARCA	0.8430	IPC	1
CELV	0.8970	KIMBER A	1
CEMEX CPO	1	PEÑOLES	1
CIEB	1	SAVIA A	1
COMERCI UBC	1	SORIANA B	0.8130
CONTAL	1	SP500	1
DESC B	1	TELECOM A	0.8270
ELEKTRA	1	TELEVISA	1
FEMSA UBD	1	TELMEX L	0.9980
GCARSO A1	1	TVAZTECA	0.9040
GEOB	1	USCOM B1	1
GFINBUR	1	VITRO	1
GFNORTE	0.9960	WALMEX C	1
		WALMEX V	1

TABLA 4.3. Prueba Kolmogorov-Smirnov para la función t-student

Capítulo 5

PROCESOS DE LÉVY

El estudio de los procesos de Lévy con saltos comenzó por los años 30, mientras que el movimiento Browniano comenzó a estudiarse antes por Bachelier, Einstein y Wiener, de hecho el movimiento Browniano o proceso de Wiener es una clase especial de los procesos de Lévy, pues es un proceso que cumple con las propiedades de estos procesos, pero que tiene asociada una función de densidad continua (Normal). Al principio los procesos de Lévy fueron conocidos como procesos con incrementos estacionarios independientes, pero a finales de los años 20's el nombre de procesos de Lévy fue ganando aceptación. La razón por la que sucedió esto, fue debido a que en los años 30's se demostró el resultado central de los procesos de Lévy, **la representación Lévy-Khintchine** la cual caracteriza a todos los procesos aditivos y de Lévy y consiste en decir que la función característica de cualquier función infinitamente divisible puede ser generada como la convolución de dos funciones de densidad: la Normal y la Poisson, además de que la triada que caracteriza (A, γ, ν) esta descomposición es única. Por lo que en este apartado se revisarán solo algunos de los conceptos de procesos de Lévy, para llegar a este resultado que es fundamental para comenzar con el estudio de esta clase de procesos, además se revisará el Teorema g-momento.

Se comenzará enlistando algunas definiciones de conceptos que se utilizarán posteriormente, además de proporcionar algunos lemas, proposiciones y teoremas que son necesarios para demostrar el teorema central de los procesos de Lévy, sólo se demostrarán algunos de los lemas, proposiciones y teoremas que se consideren fundamentales para la demostración del Teorema de la representación de Lévy-Khintchine.

Definición 1. *Un espacio de probabilidad (Ω, F, P) es una tripleta que consta de un conjunto Ω , una familia F de subconjuntos de Ω y una mapeo P que va de F a los \mathbb{R} . y satisface las siguientes condiciones.*

- (1) $\Omega \in F, \emptyset \in F$
- (2) Si $A_n \in F$ para $n = 1, 2, \dots$, entonces $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$ y $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \in F$
- (3) Si $A \in F$, entonces $A^c \in F$
- (4) $0 \leq P[A] \leq 1, P[\Omega] = 1$ y $P[\emptyset] = 0$
- (5) Si $A_n \in F$ para $n = 1, 2, \dots$ y son conjuntos disjuntos, entonces $P[\cup_{n=1}^{\infty} A_n] = \sum_{n=1}^{\infty} P[A_n]$

Definición 2. *Una familia $\{X_t : t \geq 0\}$ de variables aleatorias en \mathbb{R}^d con parámetro $t \in [0, \infty)$ definida en un espacio común de probabilidad es llamada un proceso estocástico.*

Definición 3. Un proceso estocástico $\{X_t\}$ en \mathbb{R}^d es estocásticamente continuo o continuo en probabilidad si para cada $t \geq 0$ y $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{s \rightarrow t} P[|X_s - X_t| > \varepsilon] = 0$$

Definición 4. Un proceso estocástico $\{Y_t\}$ es llamado una modificación de un proceso estocástico $\{X_t\}$, si

$$P[X_t = Y_t] = 1 \quad \text{para } t \in [0, \infty).$$

Definición 5. Proceso de Lévy

Un proceso estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$ en \mathbb{R}^d es un proceso de Lévy, si las siguientes condiciones se satisfacen:

(1) Para cualquier $n \geq 1$ y $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, las variables aleatorias $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son independientes (propiedad de incrementos independientes e idénticamente distribuidos si las diferencias son iguales)

(2) $X_0 = 0$ a.s.

(3) La distribución de $X_{s+t} - X_s$ no depende de s (propiedad de homogeneidad temporal o incrementos estacionarios).

(4) Es estocásticamente continuo.

(5) Existe $\Omega_0 \in F$ con $P[\Omega_0] = 1$ tal que, para cada $\omega \in \Omega_0$, $X_t(\omega)$ es continua por la derecha en $t \geq 0$ y tiene límite por la izquierda en $t > 0$.

Un proceso de Lévy en \mathbb{R}^d es llamado un proceso de Lévy *d-dimensional*.

Si un proceso satisface las condiciones de (1) - (4) decimos que es un **proceso de Lévy en distribución** (Lévy process in law). Definimos un **proceso aditivo** como un proceso estocástico que satisface las condiciones (1), (2), (4) y (5). Y un **proceso aditivo en distribución** es un proceso estocástico que satisface (1), (2) y (4).

Las condiciones de (1) a (3) expresan la propiedad de incrementos estacionarios independientes. Bajo las condiciones (2) y (3), la condición (4) puede ser reemplazada por

$$\lim_{t \downarrow 0} P[|X_t| > \varepsilon] = 0 \quad \text{para } \varepsilon > 0$$

Además cualquier proceso de Lévy en distribución tiene una modificación la cual es un proceso de Lévy. Similarmente cualquier proceso aditivo en distribución tiene

una modificación la cual es un proceso aditivo. Por lo que la condición (5) no es esencial.

Lévy definió un proceso aditivo sin asumir la condición (4) y (5). Pues tales procesos son reducibles a procesos aditivos como se definió arriba.

Teorema 1. (*Kolmogorov's extension*) Suponga que, para cualquier n y $0 \leq t_1 < \dots < t_n$, y sea μ_{t_1, \dots, t_n} una distribución, si $B_1, \dots, B_n \in \mathbf{B}(\mathbb{R}^d)$ y $B_k = \mathbb{R}^d$, entonces

$$\mu_{t_1, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_n) = \mu_{t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_{k-1} \times B_{k+1} \times \dots \times B_n)$$

Entonces, existe una única medida de probabilidad P en F eso tiene a $\{\mu_{t_1, \dots, t_n}\}$ como su sistema de distribuciones de dimensión finita.

Proposición 2. *Convergencia en probabilidad.* Una secuencia de variables aleatorias \mathbb{R}^d -valuadas $\{X_n : n = 1, 2, \dots\}$ se dice que converge estocásticamente o converge en probabilidad, a X si, para cada $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P[|X_n - X| > \varepsilon] = 0$. Esto se denota como

$$X_n \longrightarrow X \text{ en prob.}$$

Definición 6. Una secuencia $\{X_n\}$ se dice que converge casi seguramente (a.s.) a X , denotado como $X_n \longrightarrow X$ a.s., si $P[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)] = 1$.

Corolario 3. Si $\{X_n\}$ converge estocásticamente a X y X' , entonces $X = X'$ a.s.

Proposición 4. (i) Si $X_n \longrightarrow X$ a.s., entonces $X_n \longrightarrow X$ en prob.

(ii) SI $X_n \longrightarrow X$ en prob., entonces una subsecuencia de $\{X_n\}$ converge a.s. a X .

5.1 Funciones Características

La herramienta fundamental para entender los procesos de Lévy son las funciones características o transformadas de Fourier de funciones de densidad, a continuación se proporcionarán algunos de los resultados más importantes de estas funciones y ejemplos.

Definición 7. La función característica $\hat{\mu}(z)$ de una medida de probabilidad en \mathbb{R}^d es:

$$\hat{\mu}(z) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle z, x \rangle} \mu(dx), \quad z \in \mathbb{R}^d$$

La función característica de la función de densidad P_X de una variable aleatoria X en \mathbb{R}^d es denotada por $\hat{P}_X(z)$ y tiene la siguiente forma:

$$\hat{P}_X(z) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle z, x \rangle} P_X(dx) = E[e^{i\langle z, X \rangle}]$$

Definición 8. Una secuencia de medidas de probabilidad μ_n , $n = 1, 2, \dots$, converge a una medida de probabilidad μ , escrito como

$$\mu_n \rightarrow \mu \quad \text{as} \quad n \rightarrow \infty,$$

si, para cada función f continua acotada,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mu_n(dx) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mu(dx) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

Proposición 5. Si $X_n \rightarrow X$ en probabilidad, entonces la distribución de X_n converge a la distribución de X .

Definición 9. La convolución μ de dos distribuciones μ_1 y μ_2 en \mathbb{R}^d , denotada como $\mu = \mu_1 * \mu_2$ es una distribución definida como:

$$\text{Definición 10. } \mu(B) = \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} 1_B(x+y) \mu_1(dx) \mu_2(dy), \quad B \in \mathbf{B}(\mathbb{R}^d)$$

La convolución es una operación conmutativa y asociativa.

La siguiente proposición nos dice las principales propiedades de la función característica, la notación que se utiliza es la siguiente:

$\tilde{\mu}$ es el dual de μ , $\mu^\#$ es la simetrización de μ , si $\tilde{\mu}(B) = \mu(-B)$, $-B = \{-x : x \in B\}$, y $\mu^\# = \mu * \tilde{\mu}$. Cuando $d = 1$, otro nombre del dual de μ es la reflexión de μ . Si μ es idéntica al dual, es llamada simétrica.

Proposición 6. Sean μ, μ_1, μ_2, μ_n distribuciones en \mathbb{R}^d

(i) (Teorema de Bochner)

Para $\widehat{\mu}$ tenemos que $\widehat{\mu}(0) = 1$, $|\widehat{\mu}(z)| \leq 1$ y $\widehat{\mu}(z)$ es uniformemente continua y negativa definida en el sentido de que, para cada $n = 1, 2, \dots$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \widehat{\mu}(z_j - z_k) \xi_j \bar{\xi}_k \geq 0 \quad \text{para } z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}^d, \quad \xi_j, \dots, \xi_n \in \mathbb{C}$$

Inversamente, si una función valuada en los complejos $\varphi(z)$ en \mathbb{R}^d con $\varphi(0) = 1$ es continua en $z = 0$ y negativa definida, entonces $\varphi(z)$ es la función característica de una distribución en \mathbb{R}^d

(ii) si $\widehat{\mu}_1(z) = \widehat{\mu}_2(z)$ para $z \in \mathbb{R}^d$, entonces $\mu_1 = \mu_2$

(iii) si $\mu = \mu_1 * \mu_2$, entonces $\widehat{\mu}(z) = \widehat{\mu}_1(z) \widehat{\mu}_2(z)$. Si X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes en \mathbb{R}^d , entonces

$$\widehat{P}_{x_1+x_2}(z) = \widehat{P}_{X_1}(z) \widehat{P}_{X_2}(z)$$

(iv) Sea $X = (X_j)_{j=1, \dots, n}$ una variable aleatoria \mathbb{R}^{nd} -valuada donde X_1, \dots, X_n son variables aleatorias \mathbb{R}^d -valuadas. Entonces X_1, \dots, X_n son independientes si y solo si

$$\widehat{P}_X(z) = \widehat{P}_{X_1}(z_1) \cdots \widehat{P}_{X_n}(z_n) \quad \text{para } z = (z_j)_{j=1, \dots, n}, \quad z_j \in \mathbb{R}^d$$

(v) Suponga que $\widetilde{\mu}$ es el dual de μ y $\mu^\#$ es la simetrización de μ . Entonces

$$\widehat{\widetilde{\mu}}(z) = \widehat{\mu}(-z) = \overline{\widehat{\mu}(z)} \quad \text{y} \quad \widehat{\mu^\#}(z) = |\widehat{\mu}(z)|^2$$

(vi) si $\mu_n \rightarrow \mu$, entonces $\widehat{\mu}_n(z) \rightarrow \widehat{\mu}(z)$ uniformemente en cualquier conjunto compacto.

(vii) si $\widehat{\mu}_n(z) \rightarrow \widehat{\mu}(z)$ para cada z , entonces $\mu_n \rightarrow \mu$.

(viii) si $\widehat{\mu}_n(z)$ converge a una función $\varphi(z)$ para cada z y $\varphi(z)$ es continua en $z = 0$, entonces $\varphi(z)$ es la función característica de alguna distribución

(ix) Sea n un entero positivo. Si μ tiene un momento absoluto finito de orden n , esto es:

$\int |x|^n \mu(dx) < \infty$, entonces $\widehat{\mu}(z)$ es una función de clase C^n y para cualquier conjunto de enteros no negativos n_1, \dots, n_d que satisfacen $n_1 + n_2 + \dots + n_d \leq n$,

$$\int x_1^{n_1} \dots x_d^{n_d} \mu(dx) = \left[\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial z_1} \right)^{n_1} \dots \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial z_d} \right)^{n_d} \widehat{\mu}(z) \right]_{z=0}$$

(x) Sea n un entero positivo par. Si $\widehat{\mu}(z)$ es de clase C^n en una vecindad en el origen, entonces μ tiene momentos absolutos finitos de orden n .

(xi) Sea $-\infty < a_j < b_j < \infty$ para $j = 1, \dots, d$ y $B = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$. Si B es un conjunto μ -continuity, entonces.

$$\mu(B) = \lim_{c \rightarrow \infty} (2\pi)^d \int_{[-c, c]^d} \widehat{\mu}(z) dz \int_B e^{-i\langle x, z \rangle} dx$$

(xii) Si $\int |\widehat{\mu}(z)| dz < \infty$, entonces μ es absolutamente continuo con respecto a la medida de Lebesgue, tiene una función de densidad $g(x)$ acotada, y

$$g(x) = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, z \rangle} \widehat{\mu}(z) dz$$

Definición 11. Cuando μ es una distribución en $[0, \infty)$, la transformada de Laplace de μ esta definida como:

$$L_\mu(u) = \int_{[0, \infty)} e^{-ux} \mu(dx) \quad \text{para } u \geq 0.$$

Ejemplo 1. Función de distribución Gama con parámetros c, α , si $c = 1$ es la función de distribución esponencial. ($d=1$) para $c > 0$ y $\alpha > 0$,

$$\mu(B) = (\alpha^c / \Gamma(c)) \int_{B \cap (0, \infty)} x^{c-1} e^{-\alpha x} dx$$

(a) Transformada de Laplace o función generadora de momentos

$$L_\mu(u) = \frac{\alpha^c}{\Gamma(c)} \int_0^\infty e^{ux} x^{c-1} e^{-\alpha x} dx$$

$$= \frac{\alpha^c}{\Gamma(c)} \int_0^\infty x^{c-1} e^{-(\alpha-u)x} dx$$

$$\text{sea } y = (\alpha - u)x$$

$$dy = (\alpha - u) dx$$

$$\frac{dy}{\alpha - u} = dx$$

$$\implies \frac{\alpha^c}{\Gamma(c)} \int_0^\infty x^{c-1} e^{-(\alpha-u)x} dx = \frac{\alpha^c}{\Gamma(c)(\alpha-u)} \int_0^\infty \left(\frac{y}{\alpha-u}\right)^{c-1} e^{-y} dy$$

$$= \frac{\alpha^c}{\Gamma(c)(\alpha-u)^c} \int_0^\infty y^{c-1} e^{-y} dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(c)} \left(\frac{\alpha}{\alpha-u}\right)^c \int_0^\infty y^{c-1} e^{-y} dy$$

$$= \left(\frac{\alpha-u}{\alpha}\right)^{-c} = \left(1 - \frac{u}{\alpha}\right)^{-c}$$

$$\implies L_\mu(u) = (1 - u\alpha^{-1})^{-c}$$

(b) Transformada de Fourier o función característica.

$$L_\mu(u) = \frac{\alpha^c}{\Gamma(c)} \int_0^\infty e^{ux} x^{c-1} e^{ixz} dx$$

$$= \frac{\alpha^c}{\Gamma(c)} \int_0^\infty x^{c-1} e^{-(\alpha-iz)x} dx$$

$$\text{sea } y = (\alpha - iz)x$$

$$dy = (\alpha - iz) dx$$

entonces,

$$x = \frac{y}{\alpha - iz}$$

$$dx = \frac{dy}{\alpha - iz}$$

$$\implies \frac{\alpha^c}{\Gamma(c)} \int_0^\infty x^{c-1} e^{-(\alpha-iz)x} dx = \frac{1}{\alpha - iz} \frac{\alpha^c}{\Gamma(c)} \int_0^\infty \left(\frac{y}{\alpha - iz}\right)^{c-1} e^{-y} dy$$

$$= \frac{\alpha^c}{\Gamma(c)(\alpha - iz)^c} \int_0^\infty y^{c-1} e^{-y} dy$$

$$= \frac{\alpha^c}{(\alpha - iz)^c} = \left(\frac{\alpha}{\alpha - iz}\right)^c = \left(\frac{\alpha - iz}{\alpha}\right)^{-c}$$

$$\implies \widehat{\mu}(z) = (1 - iz\alpha^{-1})^{-c}$$

Ejemplo 2. *Función de distribución binomial*

$$n \in \mathbb{Z}^+ \quad 0 < p < 1 \quad q = 1 - p$$

$$\mu \{k\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

(a) *Transformada de Laplace o función generadora de momentos*

$$\begin{aligned} L_\mu(u) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} e^{-uk} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} (pe^{-u})^k \end{aligned}$$

sabemos que:

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} ba^{n-1} + \binom{n}{2} b^2 a^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} b^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^k a^{n-k} \quad \text{expansión binomial.} \end{aligned}$$

$$\text{sea } a = q \quad y \quad b = pe^{-u}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} (pe^{-u})^k &= (q + pe^{-u})^n \\ \implies L_\mu(u) &= (pe^{-u} + q)^n \quad u \geq 0 \end{aligned}$$

(b) *Transformada de Fourier o función característica.*

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(z) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} e^{izk} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} (pe^{iz})^k \end{aligned}$$

utilizando el resultado de la expansión binomial.

$$\text{sea } a = q \quad y \quad b = pe^{iz}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} (pe^{iz})^k &= (q + pe^{iz})^n \\ \implies \hat{\mu}(z) &= (pe^{iz} + q)^n \quad z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ejemplo 3. *Función de distribución Poisson*Sea $c > 0$

$$\mu \{k\} = \frac{e^{-c} c^k}{k!} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

(a) *Transformada de Laplace*

$$\begin{aligned} L_\mu(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{uk} \mu \{k\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{uk} e^{-c} c^k / k! \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{uk-c} \frac{c^k}{k!} \\ &= e^{-c} \sum_{k=0}^{\infty} (ce^u)^k / k! \end{aligned}$$

pero como

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

entonces,

$$e^{-c} \sum_{k=0}^{\infty} (ce^u)^k / k! = e^{-c} e^{ce^u}$$

$$= e^{ce^u - c} = e^{c(e^u - 1)}$$

$$\implies L_{\mu}(u) = \exp(c(e^u - 1)) \quad u \geq 0$$

(b) Transformada de Fourier o función característica.

$$\hat{\mu}(z) = \sum_{k=0}^n e^{-c} \frac{c^k}{k!} e^{izk}$$

$$= e^{-c} \sum_{k=0}^n \frac{(ce^{iz})^k}{k!}$$

$$= e^{-c} e^{ce^{iz}}$$

$$= e^{ce^{iz} - c}$$

$$\implies \hat{\mu}(z) = \exp(c(e^{iz} - 1))$$

Ejemplo 4. Función de distribución normal (Gaussiana)

(a) Transformada de Fourier o función característica.

$$\mu(B) = (2\pi a)^{-\frac{1}{2}} \int_B e^{-(x-\gamma)^2/2a} dx, \quad \text{donde } a > 0 \text{ y } \gamma \in \mathbb{R}$$

$$\hat{\mu}(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{izx} (2\pi a)^{-\frac{1}{2}} e^{-(x-\gamma)^2/2a} dx$$

$$= (2\pi a)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{(izx - (x-\gamma)^2)/2a} dx$$

desarrollando el exponente de la exponencial, tenemos,

$$izx - (x - \gamma)^2 = izx - x^2 + 2x\gamma - \gamma^2$$

entonces

$$\hat{\mu}(z) = (2\pi a)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{izx - (x^2 - 2x\gamma + \gamma^2)/2a} dx$$

$$= (2\pi a)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\gamma^2}{2a}} \int_{\mathbb{R}} e^{izx - (x^2 - 2x\gamma)/2a} dx$$

$$= (2\pi a)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\gamma^2}{2a}} \int_{\mathbb{R}} e^{(2aizx - x^2 + 2x\gamma)/2a} dx$$

desarrollando el exponente y completando cuadrados tenemos que:

$$2aizx - x^2 + 2x\gamma = -x^2 + 2x(az + \gamma)$$

$$= -(x - (az + \gamma))^2 + (az + \gamma)^2$$

entonces,

$$\hat{\mu}(z) = (2\pi a)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\gamma^2}{2a} + \frac{(az + \gamma)^2}{2a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x - (az + \gamma))^2}{2a}} dx$$

pero como

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x - (az + \gamma))^2}{2a}} dx = \sqrt{2\pi a}$$

$$\implies \hat{\mu}(z) = \exp\left(\frac{-a^2 z^2 + 2aiz\gamma}{2a}\right)$$

$$\implies \hat{\mu}(z) = \exp\left(-\frac{1}{2}az^2 + i\gamma z\right)$$

Ejemplo 5. *Función de distribución δ_γ (δ – distribution en γ)*
Es la función de distribución concentrada en un solo punto $\gamma \in \mathbb{R}^d$
 $\implies \hat{\mu}(z) = e^{i\langle \gamma, z \rangle}$

5.2 Procesos Poisson Compuesto

Definición 12. *Un proceso estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$ en \mathbb{R} es un Proceso Poisson con parámetro $c > 0$ si es un proceso de Lévy y para $t > 0$, X_t tiene una distribución Poisson con media ct .*

Teorema 7. *(Construcción) Sea $\{W_n : n = 0, 1, \dots\}$ una caminata aleatoria en \mathbb{R} , definida en un espacio de probabilidad (Ω, F, P) , tal que $T_n = W_n - W_{n-1}$ tiene una distribución exponencial con media $c > 0$. Definimos X_t como:*

$$X_t(\omega) = n \quad \text{si y solo si} \quad W_n(\omega) \leq t < W_{n+1}(\omega)$$

Entonces, $\{X_t\}$ es un proceso Poisson con parámetro c .

Definición 13. *Una distribución μ en \mathbb{R}^d es Poisson compuesta si, para alguna $c > 0$ y para alguna distribución σ en \mathbb{R}^d con $\sigma\{0\} = 0$,*
 $\hat{\mu}(z) = \exp(c(\hat{\sigma}(z) - 1)), \quad z \in \mathbb{R}^d.$

Ejemplo 6. *La distribución Poisson es un proceso Poisson compuesto si $d = 1$ y $\sigma = \delta_1$*

Definición 14. *Sea $c > 0$ y sea σ una distribución en \mathbb{R}^d con $\sigma(\{0\}) = 0$. Un proceso estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$ en \mathbb{R}^d es un proceso Poisson Compuesto asociado con c y σ , si este es un proceso de Lévy y para $t > 0$, X_t tiene una distribución Poisson Compuesta.*

$$E[e^{i\langle z, X(t) \rangle}] = \exp(tc(\hat{\sigma}(z) - 1)), \quad z \in \mathbb{R}^d.$$

La c y σ son únicas y son determinadas por $\{X_t\}$.

Teorema 8. *(Construcción). Sea $\{N_t : t \geq 0\}$ un proceso Poisson con parámetro $c > 0$ y $\{S_n : n = 0, 1, \dots\}$ una caminata aleatoria en \mathbb{R}^d definida en un espacio común de probabilidad (Ω, F, P) . Asumimos que $\{N_t\}$ y $\{S_n\}$ son independientes y $P[S_t = 0] = 0$. Definimos*

$$X_t(\omega) = S_{N_t(\omega)}(\omega)$$

Entonces $\{X_t\}$ es un proceso Poisson compuesto que satisface la definición anterior, donde σ es la distribución de S_1 .

5.3 Caracterización y existencia de procesos de Lévy.

5.3.1 Distribuciones infinitamente divisibles y procesos de Lévy en distribución.

Notación: μ^{n*} o μ^n es la n -ésima convolución de una medida de probabilidad μ con ella misma, esto es:

$$\mu^n = \mu^{n*} = \underbrace{\mu * \cdots * \mu}_n$$

Definición 15. Una medida de probabilidad μ en \mathbb{R}^d es infinitamente divisible si, para cualquier entero n , existe una medida de probabilidad μ_n en \mathbb{R}^d , tal que $\mu = \mu_n^n$.

Como la convolución expresada con funciones características es el producto de las mismas, μ es infinitamente divisible si y solo si, para cada n , la raíz n -ésima de la función característica $\hat{\mu}(z)$ es la función característica de alguna medida de probabilidad.

Ejemplo 7. Demostrar que si $\{X_t\}$ es un proceso de Lévy en \mathbb{R}^d , entonces, para cada t , la distribución de X_t es infinitamente divisible.

Demostración. Sea $t_k = \frac{kt}{n}$. Sea $\mu = P_{X_t}$ y $\mu_n = P_{X(t_k) - X(t_{k-1})}$ la función de densidad de estas diferencias es independiente, por la propiedad de homogeneidad temporal de los procesos de Lévy, entonces $\mu = \mu_n^n$, porque,

$X_{t_0} = X_0 = 0$ por la propiedad (2) de los procesos de Lévy, entonces

$$X_t = X_t - X_{t_0}$$

$$X_t = (X_{t_1} - X_{t_0}) + (X_{t_2} - X_{t_1}) + (X_{t_3} - X_{t_2}) + \cdots + (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$$

por lo que X_t se puede expresar como la suma de n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas o que es lo mismo como la convolución de n -veces una medida de probabilidad, pues,

$$P_{X_t} = P_{X_{t_1} - X_{t_0}} * P_{X_{t_2} - X_{t_1}} * P_{X_{t_3} - X_{t_2}} * \cdots * P_{X_{t_n} - X_{t_{n-1}}}$$

entonces,

$$\mu = \underbrace{\mu_n * \mu_n * \mu_n * \cdots * \mu_n}_{n\text{-veces}}$$

por lo tanto μ es una función de distribución infinitamente divisible. \square

Lema 9. Si μ_1 y μ_2 son infinitamente divisibles, entonces $\mu_1 * \mu_2$ es infinitamente divisible.

Demostración. Como μ_1 y μ_2 son infinitamente divisibles, entonces para cada n existen $\mu_{1,n}$ y $\mu_{2,n}$ tales que

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu_{1,n}^n \text{ y } \mu_2 = \mu_{2,n}^n, \text{ entonces} \\ \mu_1 * \mu_2 &= \mu_{1,n}^n * \mu_{2,n}^n \\ &= \underbrace{\mu_{1,n} * \mu_{1,n} * \cdots * \mu_{1,n}}_{n\text{-veces}} * \underbrace{\mu_{2,n} * \mu_{2,n} * \cdots * \mu_{2,n}}_{n\text{-veces}} \end{aligned}$$

como la convolución es una operación conmutativa y asociativa

$$= \underbrace{(\mu_{1,n} * \mu_{2,n}) * (\mu_{1,n} * \mu_{2,n}) * \cdots * (\mu_{1,n} * \mu_{2,n})}_{n\text{-veces}}$$

entonces,

$$\mu_1 * \mu_2 = (\mu_{1,n} * \mu_{2,n})^n. \quad \square$$

Lema 10. Si μ es infinitamente divisible, entonces $\hat{\mu}(z)$ no tiene ceros, esto es, $\hat{\mu}(z) \neq 0$ para cualquier $z \in \mathbb{R}^d$.

Demostración. Como μ es infinitamente divisible, entonces para cada n existe μ_n , tal que $\hat{\mu}(z) = \hat{\mu}_n(z)^n$.

entonces,

$$\hat{\mu}(z)^{1/n} = \hat{\mu}_n(z), \text{ entonces}$$

$$\left| \hat{\mu}(z)^{1/n} \right| = |\hat{\mu}_n(z)|$$

$$\left| \hat{\mu}(z) \right|^{1/n} = |\hat{\mu}_n(z)|, \text{ elevando al cuadrado}$$

$$\left| \hat{\mu}(z) \right|^{2/n} = |\hat{\mu}_n(z)|^2$$

Utilizando la proposición 6 (v), tenemos que:

$$\left| \hat{\mu}_n(z) \right|^2 = \left| \hat{\mu}(z) \right|^{2/n} \text{ es una función característica, Definimos } \varphi(z) \text{ como}$$

$$\varphi(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \hat{\mu}_n(z) \right|^2 = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\mu}(z) \neq 0 \\ 0 & \text{si } \hat{\mu}(z) = 0 \end{cases}$$

como $\hat{\mu}(z)$ es función característica, entonces $\hat{\mu}(0) = 1$ y $\hat{\mu}(z)$ es continua, por lo que $\varphi(z) = 1$ en una vecindad cerca del origen. utilizando la proposición 6 (viii), entonces $\varphi(z)$ es una función característica. Y como $\varphi(z)$ es continua en \mathbb{R}^d . Entonces $\varphi(z) = 1$ para toda $z \in \mathbb{R}^d$, con lo cual mostramos que $\hat{\mu}(z) \neq 0$ en cualquier punto. \square

Nota: El reverso de este lema no es cierto.

Lema 11. Suponga que $\varphi(z)$ es una función continua de \mathbb{R}^d en \mathbb{C} tal que $\varphi(0) = 1$ y $\varphi(z) \neq 0$ para cualquier z . Entonces, existe una única función continua $f(z)$ de \mathbb{R}^d en \mathbb{C} tal que $f(0) = 0$ y $e^{f(z)} = \varphi(z)$. Para cualquier entero positivo n existe una única función continua $g_n(z)$ de \mathbb{R}^d en \mathbb{C} tal que $g_n(0) = 1$ y $g_n(z)^n = \varphi(z)$. Están relacionados como $g_n(z) = e^{f(z)/n}$.

Los lemas 10 y 11 implican que, si μ es infinitamente divisible, entonces, para cada entero n , una distribución μ_n satisface que $\mu = \mu_n^n$ es única y $\hat{\mu}_n(z) = \hat{\mu}(z)^{1/n}$, es decir, $\mu_n = \mu^{1/n}$. Sin embargo, $\nu_1 * \nu_1 = \nu_2 * \nu_2$ para dos medidas de probabilidad ν_1 y ν_2 no implica que $\nu_1 = \nu_2$.

Lema 12. *Suponga que $\varphi(z)$ y $\varphi_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$, son funciones continuas de \mathbb{R}^d en \mathbb{C} tal que $\varphi(0) = \varphi_n(0) = 1$ y $\varphi(z) \neq 0$ y $\varphi_n(z) \neq 0$ para cualquier z . Si $\varphi_n(z) \rightarrow \varphi(z)$ uniformemente en cualquier conjunto compacto, entonces $\log \varphi_n(z) \rightarrow \log \varphi(z)$ converge uniformemente en cualquier conjunto compacto.*

Lema 13. *Si $\{\mu_k\}$ es una secuencia de distribuciones infinitamente divisibles y $\mu_k \rightarrow \mu$, entonces μ es infinitamente divisible.*

Demostración. Por demostrar que $\hat{\mu}(z) \neq 0$.

Como $\mu_k \rightarrow \mu$ utilizando la proposición 6 (vi) entonces $\hat{\mu}_k(z) \rightarrow \hat{\mu}(z)$,
 $\implies |\hat{\mu}_k(z)|^{2/n} \rightarrow |\hat{\mu}(z)|^{2/n}$ para $n = 1, 2, \dots$ cuando $k \rightarrow \infty$, por la proposición 6 (v) $|\hat{\mu}_k(z)|^{2/n}$ es una función característica y como $|\hat{\mu}(z)|^{2/n}$ es continua utilizando la proposición 6 (viii) esta también es una función característica.

Por la proposición 6 (v) $|\hat{\mu}(z)|^2$ es una función característica, la cual puede ser escrita como:

$|\hat{\mu}(z)|^2 = \left(|\hat{\mu}(z)|^{2/n} \right)^n$, por lo que $|\hat{\mu}(z)|^2$ es la función característica de una función infinitamente divisible, y por el lema 10 $|\hat{\mu}(z)|^2 \neq 0$, por lo cual $\hat{\mu}(z) \neq 0$.

Además como ya sabíamos $\hat{\mu}_k(z) \rightarrow \hat{\mu}(z)$ uniformemente en un conjunto compacto por la proposición 6, entonces utilizando el lema 12 tenemos que $\log \hat{\mu}_k(z) \rightarrow \log \hat{\mu}(z)$ por lo tanto $\hat{\mu}_k(z)^{1/n} \rightarrow \hat{\mu}(z)^{1/n}$ cuando $k \rightarrow \infty$ para cualquier n y como $\hat{\mu}(z)$ es continua entonces $\hat{\mu}_k(z)^{1/n}$ es continua y utilizando de nuevo la proposición 6 viii, esta es la función característica de alguna función de probabilidad, por lo cual μ es infinitamente divisible. \square

Lema 14. *Si μ es infinitamente divisible, entonces, para cada $t \in [0, \infty)$, μ^t existe y es infinitamente divisible.*

Demostración. Sea $\mu^{1/n}$ una función, para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$, la cual es infinitamente divisible, ya que $\hat{\mu}(z)^{1/n} = \left(\hat{\mu}(z)^{1/(np)} \right)^p$ para cualquier p . sea $q = np$, entonces $\left(\hat{\mu}(z)^{1/(np)} \right)^p = \hat{\mu}(z)^{p/q}$, por lo que $\hat{\mu}(z)^{p/q}$ es también infinitamente divisible para cualquier $p, q \in \mathbb{Z}^+$, y como $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$, entonces para cualquier $t \in \mathbb{Q}^+$, μ^t existe y es infinitamente divisible, sólo resta mostrar que para todo t que pertenece a los irracionales, la función de densidad es también infinitamente divisible. Como para

cualquier número irracional t podemos escoger una sucesión r_n de números racionales que convergen a este, entonces $\widehat{\mu}(z)^{r_n} \rightarrow \widehat{\mu}(z)^t$ y por el lema 14 $\widehat{\mu}(z)^t$ es infinitamente divisible. \square

Lema 15. (i) Si $\{X_t : t \geq 0\}$ es un proceso de Lévy en distribución en \mathbb{R}^d , entonces, para cualquier $t \geq 0$, P_{X_t} es infinitamente divisible y, tomando $P_{X_1} = \mu$, tenemos que $P_{X_t} = \mu^t$.

(ii) Reverso, si μ es una distribución infinitamente divisible en \mathbb{R}^d , entonces existe un proceso de Lévy en distribución $\{X_t : t \geq 0\}$ tal que $P_{X_1} = \mu$.

(iii) Si $\{X_t\}$ y $\{X'_t\}$ son procesos de Lévy en distribución en \mathbb{R}^d tal que $P_{X_1} = P_{X'_1}$, entonces $\{X_t\}$ y $\{X'_t\}$ son idénticos en distribución.

Demostración. Sea $\mu = P_{X_1}$

$$\begin{aligned} \mu &= \left(P_{X_{\frac{1}{n}}}\right)^n, \text{ esto es porque} \\ \widehat{\mu} &= \left(\widehat{P}_{X_{\frac{1}{n}}}\right)^n \implies \widehat{\mu}^{\frac{1}{n}} = \widehat{P}_{X_{\frac{1}{n}}} \\ \implies P_{X_{1/n}} &= \mu^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

Este mismo procedimiento se hace para los números racionales y posteriormente para los números irracionales como en la demostración del lema 14 para esto se elige una función $r_n \rightarrow t$, entonces,

$$X_{r_n} \rightarrow X_t \text{ en probabilidad}$$

Recuerdese que convergencia en probabilidad significa que

$$\forall \epsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} P[|X_n - X| > \epsilon] = 0$$

Como la convergencia en probabilidad implica convergencia en distribución

$$\text{Entonces, } P_{X_{r_n}} \rightarrow P_{X_t} \implies \widehat{P}_{X_{r_n}} \rightarrow \widehat{P}_{X_t} = \widehat{\mu}^t$$

por lo tanto $P_{X_t} = \mu^t$

ii) P.d. que μ es infinitamente divisible

$$\mu^{t+s}(z) \Rightarrow \exp[(t+s) \log(\widehat{\mu}(z))] = \exp[\log(\widehat{\mu}(z))^{t+s}] = \widehat{\mu}(z)^{t+s}$$

Ahora μ^0 es una función de densidad, su función característica, sería

$$\widehat{\mu}^0 = 1 = \exp(t \log \widehat{\mu}(z)) \text{ cuando } t = 0$$

$\Rightarrow \mu^0 = \delta_0$ (delta de Dirak, toda la probabilidad esta concentrada en cero)

Esto porque $P_{X_t} = \mu^t \Rightarrow P_{X_0} = \mu^0 = P_0$

Entonces, $\mu^t \rightarrow \delta_0$ cuando $t \downarrow 0$.

Ahora vamos a construir el proceso de Lévy en distribución.

Consideremos Ω, F y $X_t(\omega) = \omega(t)$ En el teorema de Kolmogorov 1 Para cualquier $n \geq 0$ y para cualquier $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, se define

$$\begin{aligned} (1) \quad & \mu_{t_0, \dots, t_n}(B_0 \times \dots \times B_n) \\ &= \int \dots \int \mu^{t_0}(dy_0) 1_{B_0}(y_0) \mu^{t_1-t_0}(dy_1) 1_{B_1}(y_0 + y_1) \times \dots \times \\ & \mu^{t_n-t_{n-1}}(dy_n) 1_{B_n}(y_0 + y_1 + \dots + y_n) \end{aligned}$$

Entonces μ_{t_0, \dots, t_n} se extiende a una medida de probabilidad en $B \left((\mathbb{R}^d)^{n+1} \right)$.

Llamemos a la extensión

$$(2) \quad P [X_{t_0} \in B_0, \dots, X_{t_n} \in B_n] = \mu_{t_0, \dots, t_n} (B_0, \dots, B_n)$$

donde X_t tiene distribución μ^t

P.D. que $\{X_t : t > 0\}$ es un proceso en distribución. Si $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, entonces tenemos que de (1) y (2)

$$E [f (X_{t_0}, \dots, X_{t_n})] \\ = \int \dots \int f (y_0, y_0 + y_1, \dots, y_0 + \dots + y_n) \mu^{t_0} (dy_0) \times \mu^{t_1 - t_0} (dy_1) \dots \mu^{t_n - t_{n-1}} (dy_n)$$

Para cualquier función f , medible y acotada. Sea $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}^d$ y

$$f (x_0, \dots, x_n) = \exp \left(i \sum_{j=1}^n \langle z_j, x_j - x_{j-1} \rangle \right)$$

Entonces

$$E \left[\exp \left(i \sum_{j=1}^n \langle z_j, X_{t_j} - X_{t_{j-1}} \rangle \right) \right] \\ = \int \dots \int \exp \left(i \sum_{j=1}^n \langle z_j, y_j \rangle \right) \mu^{t_1 - t_0} (dy_1) \dots \mu^{t_n - t_{n-1}} (dy_n) \\ = \prod_{j=1}^n \int \exp (i \langle z_j, y_j \rangle) \mu^{t_j - t_{j-1}} (dy_j)$$

Se sigue que

$$E \left[\exp \left(i \sum_{j=1}^n \langle z_j, X_{t_j} - X_{t_{j-1}} \rangle \right) \right] = \int \exp (i \langle z_j, y_j \rangle) \mu^{t_j - t_{j-1}} (dy_j),$$

que muestra que $X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ tiene distribución $\mu^{t_j - t_{j-1}}$ y que

$$E \left[\exp \left(i \sum_{j=1}^n \langle z_j, X_{t_j} - X_{t_{j-1}} \rangle \right) \right] = \prod_{j=1}^n E \left[\exp (i \langle z_j, X_{t_j} - X_{t_{j-1}} \rangle) \right]$$

Por la proposición 6 (iv) $\{X_t\}$ tiene incrementos independientes. Como $X_t \rightarrow 0$ en probabilidad, cuando $t \downarrow 0$. De ahí $P [|X_s - X_t| > \varepsilon] = P [|X_{|s-t|}| > \varepsilon] \xrightarrow[as \ s \rightarrow t]{} 0$. Entonces como se cumplen (1), (2), (3) y (4) de la definición 5, por lo tanto $\{X_t\}$ es un proceso de Lévy en distribución.

(iii) Sea $\{X_t\}$ y $\{X'_t\}$ procesos de Lévy en distribución y $X_1 \stackrel{d}{=} X'_1$. Entonces, por (i), $X_t \stackrel{d}{=} X'_t$. De esto se sigue que $X_{s+t} - X_s \stackrel{d}{=} X'_{s+t} - X'_s$ para cualquier t y s .

De ahí

$$(X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \stackrel{d}{=} (X'_{t_0}, X'_{t_1} - X'_{t_0}, \dots, X'_{t_n} - X'_{t_{n-1}})$$

para $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ por la independencia. Por esta razón $(X_{t_0}, \dots, X_{t_n})$ es una función de $(X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$, obtenemos

$$(X_{t_0}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X'_{t_0}, \dots, X'_{t_n}). \quad \square$$

5.3.2 Representación de las distribuciones infinitamente divisibles

El siguiente teorema de Lévy-Khintchine nos da una representación de las funciones características de cualquier función de distribución infinitamente divisible. Este es un teorema fundamental en la teoría de procesos de Lévy.

Sea $D = \{x : |x| \leq 1\}$, la bola cerrada unitaria.

Teorema 16. (i) Si μ es una distribución infinitamente divisible en \mathbb{R}^d , entonces

$$\hat{\mu}(z) = \exp \left[-\frac{1}{2} \langle z, Az \rangle + i \langle \gamma, z \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i \langle z, x \rangle} - 1 - i \langle z, x \rangle 1_D(x)) \nu(dx) \right], \quad z \in \mathbb{R}^d,$$

donde A es una matriz simétrica no-negativa-definida $d \times d$, ν es una medida en \mathbb{R}^d que satisface

$$\nu(\{0\}) = 0 \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{R}^d} (|x|^2 \wedge 1) \nu(dx) < \infty,$$

$$\text{y } \gamma \in \mathbb{R}^d.$$

(ii) La representación de $\hat{\mu}(z)$ en (i) por A, ν y γ es única.

(iii) (Regreso) si A es una matriz simétrica no-negativa-definida $d \times d$, ν es una medida de probabilidad que satisface la siguiente definición y $\gamma \in \mathbb{R}^d$, entonces existe una distribución μ infinitamente divisible cuya función característica esta dada por (i).

Definición 16. Llamamos (A, ν, γ) de el teorema anterior a la tripleta generadora de μ . La A y la ν son llamados respectivamente, la matriz de covarianza Gaussiana y la medida de Lévy de μ . Cuando $A = 0$, μ es llamada puramente no-Gaussiana.

Corolario 17. Si μ tiene la tripleta generadora (A, ν, γ) , entonces μ^t tiene la tripleta generadora $(tA, t\nu, t\gamma)$.

Corolario 18. El integrando de la integral del lado derecho del teorema 16 es integrable con respecto a ν . porque es acotado fuera de cualquier vecindad de 0 y

Nota 1. $e^{i \langle z, x \rangle} - 1 - i \langle z, x \rangle 1_D(x) = O(|x|^2)$ cuando $|x| \rightarrow 0$ para z fija.

Lema 19. Para cualquier $u \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$

$$e^{iu} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(iu)^k}{k!} + \theta \frac{|u|^n}{n!}$$

con alguna $\theta \in \mathbb{C}$ que satisface que $|\theta| \leq 1$.

Teorema 20. Sea $c(x)$ una función continua y acotada de \mathbb{R}^d en \mathbb{R} , que satisface 17 y 18. Supongamos que μ_n ($n = 1, 2, \dots$) son funciones de distribución infinitamente divisibles en \mathbb{R}^d y que cada $\hat{\mu}_n(z)$ tiene la representación Lévy-Khintchine mediante la tripleta generadora $(A_n, \nu_n, \beta_n)_c$. Sea μ una medida de probabilidad en \mathbb{R}^d . Entonces $\mu_n \rightarrow \mu$ si y solo si μ es infinitamente divisible y $\hat{\mu}(z)$ tiene la representación Lévy-Khintchine mediante la tripleta generadora $(A, \nu, \beta)_c$ con A, ν, β que satisfacen las siguientes tres condiciones:

(1) Si $f \in C_b^1$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \nu_n(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \nu(dx)$$

(2) Las matrices $A_{n,\varepsilon}$ simétricas no-negativas definidas, son:

$$\langle z, A_{n,\varepsilon} z \rangle = \langle z, A_n z \rangle + \int_{|x| \leq \varepsilon} \langle z, x \rangle^2 \nu_n(dx)$$

entonces

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} |\langle z, A_{n,\varepsilon} z \rangle - \langle z, A z \rangle| = 0 \quad \text{para } z \in \mathbb{R}^d.$$

(3) $\beta_n \rightarrow \beta$

Demostración. (Demostración del Teorema 16 (ii)) Supongamos que $\mu(z)$ es expresado como en la fórmula 16 con A, ν y γ . Primero se busca una cota que nos sirva, pero como

(1) $\Rightarrow |e^{i\langle z, x \rangle} - 1 - i\langle z, x \rangle 1_D(x)| \leq \frac{1}{2} |z|^2 |x|^2 1_{\{|x| \leq 1\}}(x) + 2 \cdot 1_{\{|x| > 1\}}(x)$

por el lema 19, como la expresión en corchetes de la fórmula 16 es continua, entonces,

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(sz) &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle sz, Asz \rangle + \langle \gamma, sz \rangle \right\} \times \\ &\quad \exp \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle x, sz \rangle} - 1 - i\langle sz, x \rangle 1_D(x)) \nu(dx) \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} s^2 \langle z, Az \rangle + s \langle \gamma, z \rangle \right\} \times \\ &\quad \exp \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} (e^{is\langle x, z \rangle} - 1 - si\langle z, x \rangle 1_D(x)) \nu(dx) \right\} \end{aligned}$$

para $s \in \mathbb{R}$. Usando el teorema de Lebesgue y (1) tenemos que,

$$s^{-2} \log \hat{\mu}(sz) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \langle z, Az \rangle$$

A esta determinada de manera única por μ . Sea

$\Psi(z) = \log \hat{\mu}(z) + \frac{1}{2} \langle z, Az \rangle$ y $\zeta = [-1, 1]^d$. Se probará que

$$\int (\Psi(z) - \Psi(w+z)) dw = 2^d \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle z, x \rangle} \left(1 - \prod_{j=1}^d \frac{\sin X_j}{X_j} \right) \nu(dx)$$

donde $\frac{\sin X_j}{X_j} = 1$ $X_j = 0$, entonces

$$\Psi(z) - \Psi(w+z) = \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z, x \rangle} - e^{i\langle z+w, x \rangle} + i\langle w, x \rangle 1_D(x)) \nu(dx) - i\langle \gamma, w \rangle$$

esto porque,

$$\begin{aligned} \Psi(z+w) &= \log \hat{\mu}(z+w) + \frac{1}{2} \langle z+w, A(z+w) \rangle \\ &= \log \hat{\mu}(z+w) + \frac{1}{2} \langle z+w, Az + Aw \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \log \hat{\mu}(z+w) + \frac{1}{2} \langle z, Az \rangle + \frac{1}{2} \langle z, Aw \rangle + \frac{1}{2} \langle w, Az \rangle + \frac{1}{2} \langle w, Aw \rangle \\
&\Rightarrow \Psi(z) - \Psi(z+w) \\
&= \log \hat{\mu}(z) - \log \hat{\mu}(z+w) - \frac{1}{2} \langle w, Az \rangle - \frac{1}{2} \langle z, Aw \rangle - \frac{1}{2} \langle w, Aw \rangle \\
&= -\frac{1}{2} \langle z, Az \rangle + i \langle \gamma, z \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z, x \rangle} - 1 - i \langle z, x \rangle 1_D(x)) v(dx) \\
&\quad - \left[-\frac{1}{2} \langle w+z, A(w+z) \rangle + i \langle \gamma, z+w \rangle \right] \\
&\quad - \left[\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle z+w, x \rangle} - 1 - i \langle z+w, x \rangle 1_D(x) v(dx) \right] \\
&= -\frac{1}{2} \langle w, Az \rangle - \frac{1}{2} \langle z, Aw \rangle - \frac{1}{2} \langle w, Aw \rangle \\
&= -i \langle \gamma, w \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z, x \rangle} - e^{i\langle z+w, x \rangle} + i \langle w, x \rangle 1_D(x)) v(dx)
\end{aligned}$$

Ahora vamos a medir la siguiente distancia

$$\begin{aligned}
&|e^{i\langle z, x \rangle} - e^{i\langle z+w, x \rangle} + i \langle w, x \rangle| \\
&= |e^{i\langle z, x \rangle} - e^{i\langle x, x \rangle + i\langle w, x \rangle} + i \langle w, x \rangle| \\
&= |e^{i\langle z, x \rangle} - e^{i\langle z, x \rangle} e^{i\langle w, x \rangle} + i \langle w, x \rangle| \\
&= |e^{i\langle z, x \rangle} [1 - e^{i\langle w, x \rangle}] + i \langle w, x \rangle| \\
&= |e^{i\langle z, x \rangle} [1 - e^{i\langle w, x \rangle} + i \langle w, x \rangle - i \langle w, x \rangle] + i \langle w, x \rangle| \\
&= |e^{i\langle z, x \rangle} [1 - e^{i\langle w, x \rangle} + i \langle w, x \rangle] - i e^{i\langle z, x \rangle} \langle w, x \rangle + i \langle w, x \rangle| \\
&= |e^{i\langle z, x \rangle} [1 - e^{i\langle w, x \rangle} + i \langle w, x \rangle] + i \langle w, x \rangle [1 - e^{i\langle z, x \rangle}]| \\
&\leq |e^{i\langle z, x \rangle} [1 - e^{i\langle w, x \rangle} + i \langle w, x \rangle]| + |i \langle w, x \rangle [1 - e^{i\langle z, x \rangle}]| \\
&= |1 - e^{i\langle w, x \rangle} + i \langle w, x \rangle| + |i \langle w, x \rangle| |1 - e^{i\langle z, x \rangle}| \\
&\leq \frac{1}{2} |w|^2 |x|^2 + |\langle w, x \rangle| |1 - e^{i\langle z, x \rangle}|
\end{aligned}$$

Aplicando

Taylor para $K=1$

$$e^{iu} = \sum_{k=0}^{1-1} \frac{u^k}{k!} + \frac{\theta |u|^n}{n!} = 1 + \theta |u|$$

$$\Rightarrow |1 - e^{i\langle z, x \rangle}| = |\theta| |\langle z, x \rangle| \leq |z| |x| \leq \frac{1}{2} |w|^2 |x|^2 + |w| |x| |z| |x| = \frac{1}{2} |w|^2 |x|^2 + |w| |x|^2 |z|$$

Ahora hay que demostrar que el integrando se porta bien, para después hacer un cambio de variable.

$$\begin{aligned}
&|e^{i\langle z, x \rangle} - e^{i\langle z+w, x \rangle} + i \langle w, x \rangle| \\
&= |e^{i\langle z, x \rangle} [1 - e^{i\langle w, x \rangle} + i \langle w, x \rangle - i \langle w, x \rangle] + i \langle w, x \rangle| \\
&= |e^{i\langle z, x \rangle} [1 - e^{i\langle w, x \rangle} + i \langle w, x \rangle] - i e^{i\langle w, x \rangle} \langle w, x \rangle + i \langle w, x \rangle| \\
&= |e^{i\langle z, x \rangle} [1 - e^{i\langle w, x \rangle} + i \langle w, x \rangle] + i \langle w, x \rangle [1 - e^{i\langle z, x \rangle}]|
\end{aligned}$$

aplicando la desigualdad del triángulo.

$$\leq |e^{i\langle z, w \rangle} [1 - e^{i\langle w, x \rangle} + i \langle w, x \rangle]| + |i \langle w, x \rangle [1 - e^{i\langle z, x \rangle}]|$$

el módulo de un producto es el producto de los módulos y como $|e^{i\langle z, x \rangle}| = 1$

$$\Rightarrow |1 - e^{i\langle w, x \rangle} + i \langle w, x \rangle| + |i \langle w, x \rangle| |1 - e^{i\langle z, x \rangle}|$$

Pues $|i| = 1$

$$= |1 - e^{i\langle w, x \rangle} + i \langle w, x \rangle| + |\langle w, x \rangle| |1 - e^{i\langle z, x \rangle}|$$

$$\Rightarrow \leq \frac{1}{2} |w|^2 |x|^2 + |\langle w, x \rangle| |1 - e^{i\langle z, x \rangle}|$$

por la desigualdad de Swartz-Cauchy.

$$\leq \frac{1}{2} |w|^2 |x|^2 + |w| |x| |z| |x| = \frac{1}{2} |w|^2 |x|^2 + |w| |x|^2 |z|$$

\Rightarrow como esta acotado por el cubo se puede utilizar el Teorema de Foubini (cambio de variables).

$$\int (\Psi(z - \Psi(z + w)) dw$$

$$\stackrel{\zeta}{=} \int \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z, x \rangle} - e^{i\langle z+w, x \rangle} + i \langle w, x \rangle 1_D(x)) v(dx) - \int i \langle \gamma, w \rangle dw$$

Ahora hay que resolver la integral, pero

$$\begin{aligned} e^{i\langle z, x \rangle} - e^{i\langle z+w, x \rangle} &= e^{i\langle z, x \rangle} - e^{i\langle z, x \rangle} e^{i\langle w, x \rangle} \\ &= e^{i\langle z, x \rangle} [1 - e^{i\langle w, x \rangle}] \end{aligned}$$

$$\int \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle z, x \rangle} [1 - e^{i\langle w, x \rangle}] v(dx) dw + \int \int_{\mathbb{R}^d} i \langle w, x \rangle v(dx) dw - \int i \langle \gamma, w \rangle dw$$

Utilizando Foubini

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i\langle z, x \rangle} \int_{\zeta} (1 - e^{i\langle w, x \rangle}) dw \right) v(dx)$$

donde $\zeta = [-1, 1]^d$

$$\int_{[-1, 1]^d} (1 - e^{i\langle w, x \rangle}) dw = \int_{[-1, 1]^d} (1 - e^{i[w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_d x_d]}) dw_1 dw_2 dw_3 \dots dw_d$$

y como

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1 - e^{iwx}) dw &= w \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^{iwx} dw \\ &= 2 - \frac{1}{ix} e^{iwx} \Big|_{-1}^1 = 2 - \frac{1}{ix} [e^{ix} - e^{-ix}] \\ &= 2 - \frac{1}{ix} [2i \operatorname{sen} x] = 2 - \frac{2}{x} \operatorname{sen} x \\ &= 2 \left[1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right] \end{aligned}$$

$$\therefore \int_{\zeta^d} (1 - e^{i\langle w, x \rangle}) dw = 2^d \left[1 - \prod_{i=1}^d \frac{\operatorname{sen} x_i}{x_i} \right]$$

Ahora definimos una nueva medida

$$\rho(dx) = 2^d \left(1 - \prod_{j=1}^d \frac{\operatorname{sen} x_j}{x_j} \right) v(dx)$$

p.d que $\rho(dx)$ es una medida finita

como $v(dx)$ es finita \Rightarrow solo resta demostrar que

$$\left(1 - \prod_{j=1}^d \frac{\operatorname{sen} x_j}{x_j} \right) \text{ es finito.}$$

$$\prod_{j=1}^d \frac{\operatorname{sen} x_j}{x_j} = 1 - \frac{1}{6} |x|^2 + O(|x|^4) \quad (\text{cuando } |x| \rightarrow 0)$$

$$x = (x_1, \dots, x_d) \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}$$

pues utilizando Taylor

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{1}{6} x^2 + O(x^4) \quad |x| \rightarrow 0$$

La transformada de Fourier de F es:

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle z, x \rangle} f \nu(dx)$$

No es la característica pues $\rho(dx)$ no es necesariamente una medida de probabilidad. Por la proposición 6 (ii), ρ esta determinada de manera única por μ . Además $\nu(\{0\}) = 0$, ν esta determinado de manera única por μ . Además γ esta determinado por μ , A y ν por 16.

(Demostración del Teorema 16 (iii)). Dados A, ν y γ , sea $\varphi(z)$ el lado derecho de 16. Es decir,

$$\varphi(z) = \exp \left[-\frac{1}{2} \langle z, Az \rangle - i \langle \gamma, z \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z, x \rangle} - 1 - i \langle z, x \rangle 1_D(x)) \nu(dx) \right], \quad z \in \mathbb{R}^d$$

Sea

$$\varphi_n(z) = \exp \left[-\frac{1}{2} \langle z, Az \rangle - i \langle \gamma, z \rangle + \int_{|x| > \frac{1}{n}} (e^{i\langle z, x \rangle} - 1 - i \langle z, x \rangle 1_D(x)) \nu(dx) \right]$$

Donde $\varphi_n(z)$ es la convolución de una distribución Gaussiana y de una Poisson compuesta, por tanto, es la función característica de una distribución infinitamente divisible.

Cuando $n \rightarrow \infty$ $\varphi_n(z) \rightarrow \varphi(z)$ ($\nu(\{0\}) = 0$)

De la parte (ii), $\varphi(z)$ es continua. Por tanto $\varphi(z)$ es la función característica de una distribución infinitamente divisible puesto que:

1) Si $\hat{\mu}_n(z)$ converge a una función $\varphi(z)$ para toda z y $\varphi(z)$ es continua en $z = 0$, entonces $\varphi(z)$ es la función característica de alguna distribución.

2) Si $\{\mu_k\}$ es una sucesión de distribuciones idénticamente distribuidas (i.d.) y $\mu_k \rightarrow \mu$ entonces μ es i.d.

El siguiente resultado incorpora una parte importante de la demostración de 16 (i). Escribiremos $f \in C_{\#}$ si f es una función continua y acotada de \mathbb{R}^d a \mathbb{R} que vale cero en una vecindad de cero.

Utilizando el Teorema 20, se demostrará el teorema 16 (i).

Tenemos que μ es infinitamente divisible. Sea $\{t_n\}$ una sucesión, tal que $t_n \downarrow 0$. Definamos la distribución μ_n de tal forma que su función característica sea:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_n(z) &= \exp \left[t_n^{-1} (\hat{\mu}(z)^{t_n} - 1) \right] \\ &= \exp \left[t_n^{-1} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} (e^{i\langle z, x \rangle} - 1) \mu^{t_n}(dx) \right] \end{aligned}$$

es decir, la distribución μ_n es Poisson compuesta. Note que

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_n(z) &= \exp \left[t_n^{-1} (e^{t_n \log \hat{\mu}(z)} - 1) \right] \\ &= \exp \left[t_n^{-1} (t_n \log \hat{\mu}(z) + O(t_n^2)) \right] \end{aligned}$$

para cada z cuando $n \rightarrow \infty$

Esto es debido a que

$$e^{t_n \log \hat{\mu}(z)} = 1 + \frac{t_n \log \hat{\mu}(z)}{1!} + \frac{(t_n \log \hat{\mu}(z))^2}{2!} + \dots$$

$$\begin{aligned}
e^{t_n \log \hat{\mu}(z)} - 1 &= \frac{t_n \log \hat{\mu}(z)}{1!} + \frac{(t_n \log \hat{\mu}(z))^2}{2!} + \dots \\
t_n^{-1} (e^{t_n \log \hat{\mu}(z)} - 1) &= t_n^{-1} \left(\frac{t_n \log \hat{\mu}(z)}{1!} + \frac{t_n^2 (\log \hat{\mu}(z))^2}{2!} + \frac{t_n^3 (\log \hat{\mu}(z))^3}{3!} + \dots \right) \\
&= t_n^{-1} (t_n \log \hat{\mu}(z) + O(t_n^2))
\end{aligned}$$

puesto que

$$O(t_n^2) = \frac{t_n^2 (\log \hat{\mu}(z))^2}{2!} + \frac{t_n^3 (\log \hat{\mu}(z))^3}{3!} + \dots$$

Por tanto

$$\hat{\mu}_n(z) \rightarrow e^{\log \hat{\mu}(z)} = \hat{\mu}(z)$$

Pues $t_n^{-1} O(t_n^2) \rightarrow 0$

Puesto que μ_n tiene la representación del Teorema 20.

La representación es:

$$\hat{\mu}(z) = \exp \left[-\frac{1}{2} \langle z, Az \rangle + i \langle \gamma_c, z \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i \langle z, x \rangle} - 1 - i \langle z, x \rangle c(x)) \nu(dx) \right]$$

donde,

$$\gamma_c = \gamma + \int_{\mathbb{R}^d} x (c(x) - 1_D(x)) \nu(dx)$$

$$D = \{x : |x| \leq 1\}$$

□

Note que de la demostración anterior tenemos el resultado de que toda distribución infinitamente divisible es el límite de una secuencia de distribuciones Poisson compuestas.

Teorema 21. *Sea $\{X_t\}$ en \mathbb{R}^d un proceso de Lévy en distribución o un proceso aditivo en distribución. Entonces $\{X_t\}$ tiene una modificación, la cual es respectivamente un proceso de Lévy o aditivo.*

5.4 Momentos

En esta sección se define lo que es un g-momento de una variable aleatoria y se discute lo finitud del g-momento de X_t para un proceso de Lévy $\{X_t\}$.

Definición 17. *Sea $g(x)$ una función medible no-negativa en \mathbb{R}^d . Llamamos a $\int g(x) \mu(dx)$ el g -momento de una medida μ en \mathbb{R}^d . Llamamos $E[g(x)]$ el g -momento de una variable aleatoria X en \mathbb{R}^d .*

Definición 18. *Una función $g(x)$ en \mathbb{R}^d es llamada submultiplicativa si esta es no-negativa y existe una constante $a > 0$ tal que $g(x+y) \leq ag(x)g(y)$ para $x, y \in \mathbb{R}^d$.*

Definición 19. Una función acotada sobre todo conjunto compacto es llamada localmente acotada.

Definición 20. Una función $w(z)$ se dice que es entera si es analítica en todo el plano excepto en $z = \infty$. Ejemplos de esta clase de funciones son: e^z , $\cos(z)$ y $\sin(z)$, puesto que tienen derivadas múltiples en todo el plano excepto en $z = \infty$.

Para demostrar el Teorema g – momento, primero se deben demostrar los siguientes tres lemas.

Lema 22. Si $g(x)$ es submultiplicativa y localmente acotada, entonces

$$g(x) \leq be^{c|x|}$$

para alguna $b > 0$ y $c > 0$.

Demostración. Sea b tal que

$$\sup_{|x| \leq 1} g(x) \leq b \quad \text{esto se puede porque } |x| \leq 1 \text{ es compacto.}$$

Al ser $g(x)$ submultiplicativa, ya existe $a > 0$. Sea b suficientemente grande tal que $ab > 1$.

Si $n - 1 < |x| \leq n$, entonces

$$0 \leq \frac{|x|}{n} \leq 1 \text{ o bien}$$

$$-1 \leq \frac{x}{n} \leq 1 \text{ así que por (5.4)}$$

$$g\left(\frac{x}{n}\right)^n \leq b^n \text{ y}$$

$$a^{n-1}g\left(\frac{x}{n}\right)^n \leq a^{n-1}b^n$$

además como $|x| \geq n - 1$ y $ab > 1$

$$(ab)^{|x|} \geq (ab)^{n-1}$$

y como $b > 0$

$$b(ab)^{|x|} \geq b(ab)^{n-1}$$

, es decir

$$b(ab)^{|x|} \geq a^{n-1}b^n$$

pero como g es submultiplicativa

$$g(x+y) \leq ag(x)g(y)$$

entonces

$$g(x+y+z) \leq ag(x+y)g(z) \leq a^2g(x)g(y)g(z)$$

En particular, si tomamos n veces $\frac{x}{n}$, tenemos,

$$g\left(\frac{x}{n} + \frac{x}{n} + \cdots + \frac{x}{n}\right) \leq a^{n-1} \underbrace{g\left(\frac{x}{n}\right)g\left(\frac{x}{n}\right) \cdots g\left(\frac{x}{n}\right)}_{n\text{-veces}}$$

es decir,

$$g(x) \leq a^{n-1}g\left(\frac{x}{n}\right)^n$$

$$b(ab)^{|x|} = b \exp(c|x|)$$

$$|x| \log(ab) = c|x|$$

entonces, la constante buscada es $\log(ab)$. \square

Lema 23. *Sea μ una distribución infinitamente divisible en \mathbb{R} con medida de Lévy ν apoyada sobre un conjunto acotado. Entonces $\hat{\mu}(z)$ puede ser extendida a una función entera en los \mathbb{C} .*

Demostración. Existe $a > 0$ finito de tal manera que $S_\nu \subset [-a, a]$ (S_ν es acotada). La representación de Lévy se puede escribir

$$\hat{\mu}(z) = \exp \left[-\frac{1}{2}Az^2 + \int_{[-a,a]} (e^{izx} - 1 - izx) \nu(dx) + i\gamma'z \right] \text{ con algún } \gamma' \in \mathbb{R}$$

Esta función puede valuarse en $z \in \mathbb{C}$. Entonces es entera puesto que podemos intercambiar el orden de integración y diferenciación.

Nota. Una función es entera si es analítica en todo \mathbb{C} (diferenciable en \mathbb{C}) \square

Lema 24. *Si μ es una medida de probabilidad en \mathbb{R} y $\hat{\mu}(z)$ se puede extender a una función entera sobre los \mathbb{C} , entonces μ tiene momentos exponenciales finitos, es decir, tiene el $e^{c|x|}$ - momento finito para cada $c > 0$.*

Demostración. De la proposición 6 (x), se sigue que

$$\alpha_n = \int x^n \mu(dx) \text{ y } \beta_n = \int |x|^n \mu(dx)$$

y son finitos para $n \geq 1$

Puesto que $\frac{d^n \hat{\mu}}{dz^n}(0) = z^n \alpha_n$

tenemos

$$\hat{\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} i^n \alpha_n z^n$$

el radio de convergencia del lado derecho es infinito (es entera). Note que

$$\beta_{2k} = \alpha_{2k} \text{ (pues son potencias pares y } x^{2k} = |x|^{2k})$$

también

$$|x|^{2k+1} \leq \frac{1}{2} (x^{2k+2} + x^{2k})$$

así que

$$\int |x|^{2k+1} \mu(dx) \leq \frac{1}{2} (\int x^{2k+2} \mu(dx) + \int x^{2k} \mu(dx))$$

es decir,

$$\beta_{2k+1} \leq \frac{1}{2} (\alpha_{2k+2} + \alpha_{2k})$$

se sigue que

$$\int e^{c|x|} \mu(dx) = \int \left[1 + \frac{c|x|}{1!} + \frac{c^2|x|^2}{2!} + \frac{c^3|x|^3}{3!} \right] \mu(dx)$$

μ es medida de probabilidad

$$= \int \mu(dx) + c \int |x| \mu(dx) + \frac{c^2}{2!} \int |x|^2 \mu(dx) + \dots$$

$$= 1 + \frac{c}{1!} \beta_1 + \frac{c^2}{2!} \beta_2 + \frac{c^3}{3!} \beta_3 + \dots < \infty$$

esto es finito porque

$$\begin{aligned}
& 1 + \frac{c}{1!} |x| \beta_1 + \frac{c^2}{2!} |x|^2 \beta_2 + \frac{c^3}{3!} |x|^3 \beta_3 + \frac{c^4}{4!} |x|^4 \beta_4 \cdots \\
& \leq 1 + \frac{c}{1!} \left(\frac{|x|}{2} \right) (\alpha_2 + \alpha_0) + \frac{c^2}{2!} |x|^2 \alpha_2 + \frac{c^3}{3!} |x|^3 \left(\frac{1}{2} \right) (\alpha_4 + \alpha_2) \\
& \quad + \frac{c^4}{4!} |x|^4 \alpha_4 + \frac{c^5}{5!} |x|^5 \left(\frac{1}{2} \right) (\alpha_6 + \alpha_4)
\end{aligned}$$

aplicando la integral, el lado derecho converge. \square

Teorema 25. (*g - momento*) Sea g una función submultiplicativa, localmente acotada y medible en \mathbb{R}^d . Entonces la finitud del g - momento no es una propiedad distribucional que dependa del tiempo en la clase de procesos de Lévy. Sea $\{X_t\}$ un proceso de Lévy en \mathbb{R}^d con medida de Lévy ν . Entonces, X_t tiene g -momentos finitos para toda $t > 0$ si y sólo si $[\nu]_{\{|x|>1\}}$ tiene g - momento finito.

Demostación. Sea $\nu_0 = [\nu]_{\{|x|\leq 1\}}$ y

$$\nu_1 = [\nu]_{\{|x|>1\}}$$

construimos procesos de Lévy independientes $\{X_t^0\}$ y $\{X_t^1\}$ sobre \mathbb{R}^d tal que

$$\{X_t\} \stackrel{d}{=} \{X_t^0 + X_t^1\} \text{ y } X_t^1 \text{ es Poisson compuesto con medida de Lévy } \nu_1.$$

Sean μ_0 y μ_1 las distribuciones de X_t^0 y X_t^1 respectivamente.

Suponga que X_t tiene g - momento finito para algún $t > 0$. Se sigue que

$$E[g(X_t)] = \int \int g(x+y) \mu_0^t(dx) \mu_1^t(dy)$$

además

$$\int g(x+y) \mu_1^t(dy) < \infty \text{ para algún } x$$

Esto significa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int g(x+y) \nu_1^n(dy) < \infty$$

puesto que

$$g(y) \leq ag(-x)g(x+y) \leq abe^{c|x|}g(x+y) \text{ (Lema 22)}$$

entonces,

$$a^{-1}b^{-1}e^{-c|x|}g(y) \leq g(x+y)$$

así que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} a^{-1}b^{-1}e^{-c|x|} \int g(y) \nu_1^n(dy) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int g(x+y) \nu_1^n(dy) < \infty$$

es decir,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int g(y) \nu_1^n(dy) < \infty$$

En particular cada término es finito, por ejemplo

$$t \int g(y) \nu_1(dy) < \infty, \text{ es decir,}$$

$$\int g(y) \nu_1(dy) < \infty$$

Inversamente suponga que

$$\int g(y) \nu_1(dy) < \infty. \text{ Probemos que } E[g(X_t)] < \infty \text{ para toda } t. \text{ Por ser multi-}$$

plicativa,

$$\int g(y) \nu_1^n(dy) = \int \cdots \int g(y_1 + \cdots + y_n) \nu_1(dy_1) \cdots \nu_1(dy_n)$$

$$\leq a^{n-1} \left(\int g(y) \nu_1(dy) \right)^n$$

así que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int g(y) \nu_1^n(dy) < \infty$$

pues

$$a \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{t^n}{n!} \left(\int g(y) \nu_1 dy \right)^n$$

$$= a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!} \left(\int g(y) \nu_1(dy) \right)^n$$

$$= ae^{at \int g(y) \nu_1(dy)} < \infty$$

Es decir, X_t^1 tiene g -momento finito.

Puesto que

$$E[g(X_t)] \leq abE \left[e^{c|X_t^0|} \right] \underbrace{E[g(X_t^1)]}_{\text{finito}}$$

(Por la definición 18 y el lema 22, $\{X_t\} \stackrel{d}{=} \{X_t^0 + X_t^1\}$)

Sólo falta demostrar que $E \left[e^{c|X_t^0|} \right] < \infty$

Sean $X_j^0(t)$, $1 \leq j \leq d$ las componentes de X_t^0 . Entonces

$$E \left[e^{c|X_t^0|} \right] \leq E \left[\exp \left(c \sum_{j=1}^d |X_j^0(t)| \right) \right]$$

donde,

$$|X_t^0| = \sqrt{X_1^{02} + X_2^{02} + \dots + X_d^{02}}$$

$$|X_1^0| + |X_2^0| + \dots + |X_d^0|$$

$$\exp \left(c \sum_{j=1}^d |X_j^0(t)| \right) = \exp \left(c \left[|X_1^0(t)| + |X_2^0(t)| + \dots + |X_d^0(t)| \right] \right)$$

$$e^{c|X_1^0(t)|} = \begin{cases} e^{cX_1^0(t)} & \text{si } X_1^0(t) \geq 0 \\ e^{-cX_1^0(t)} & \text{si } X_1^0(t) \leq 0 \end{cases}$$

así

$$e^{c|X_1^0(t)|} \leq e^{cX_1^0(t)} + e^{-cX_1^0(t)}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \exp \left(c \left[|X_1^0(t)| + |X_2^0(t)| + \dots + |X_d^0(t)| \right] \right) &\leq \left[e^{cX_1^0(t)} + e^{-cX_1^0(t)} \right] \left[e^{cX_2^0(t)} + e^{-cX_2^0(t)} \right] \dots \left[e^{cX_d^0(t)} + e^{-cX_d^0(t)} \right] \\ &= \prod_{j=1}^d \left(e^{cX_j^0(t)} + e^{-cX_j^0(t)} \right) \end{aligned}$$

y en valor esperado se cumplen las desigualdades, lo cual se escribe como una suma de un número finito de términos de la forma $E \left[\exp X_t^\# \right]$ con $X_t^\#$ siendo una combinación lineal de $X_j^0(t)$, $1 \leq j \leq d$

Puesto que $\{X_t^\#\}$ es un proceso de Lévy sobre \mathbb{R} con medida de Lévy soportada sobre un conjunto acotado, $E[\exp X_t^\#]$ es finito por los lemas 23 y 24.

$$0 \leq E[e^{-cX_j^0(t)}] \leq E[e^{c|X_j^0(t)}] < \infty \quad \square$$

Capítulo 6

DISTRIBUCIÓN NORMAL INVERSA GAUSSIANA

La distribución NIG fue introducida por Barndorff-Nielsen en 1977 [5] con el objetivo de ajustar las series de datos del tamaño de partículas de arena, descubiertas por R. A. Bangnold en 1941 [3], originalmente la función de densidad propuesta para el estudio de estas series fue la Hiperbólica (HYP), se le dio ese nombre porque la gráfica del logaritmo de la función de densidad es una hipérbola, pero ambas funciones HYP y NIG en realidad son casos especiales de la función de distribución Hiperbólica Generalizada(HG).

La función de densidad Hiperbólica Generalizada tiene cinco parámetros, α que representa la forma o la inclinación de la curva de densidad, β el sesgo o simetría, μ es el parámetro de localización, δ es el de escala la cual es comparable a la sigma en la distribución Normal y por último λ que caracteriza las subclases de esta función de densidad y esencialmente dice qué tan pesadas son las colas de la función de densidad. Cuando el valor del parámetro λ es igual a 1 ó $-1/2$ esta distribución es la densidad Hiperbólica en el primer caso y la función de densidad Normal Inversa Gaussiana en el segundo caso. La función de densidad de la HG es la siguiente:

$$d_{HG}(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = \alpha(\lambda, \alpha, \beta, \delta) (\delta^2 + (x - \mu)^2)^{(\lambda - \frac{1}{2})/2} K_{\lambda - \frac{1}{2}} \left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} \right) \exp(\beta(x - \mu))$$

donde,

$$\alpha(\lambda, \alpha, \beta, \delta) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\lambda/2}}{\sqrt{2\pi} \alpha^{\lambda - \frac{1}{2}} K_{\lambda}(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}$$

Es la constante de normalización y K_{ν} es la función de Bessel Modificada de tercer tipo con índice ν , que puede ser representada de la siguiente manera:

$$K_{\nu}(z) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} y^{\nu-1} \exp\left(-\frac{1}{2}z(y + y^{-1})\right) dy$$

El dominio de variación de la función de densidad $HG(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$ está dado por:

$$\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \delta \geq 0, 0 \leq \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

y

$$\delta \geq 0 \quad \alpha > 0 \quad \alpha^2 > \beta^2 \quad \text{si} \quad \lambda > 0$$

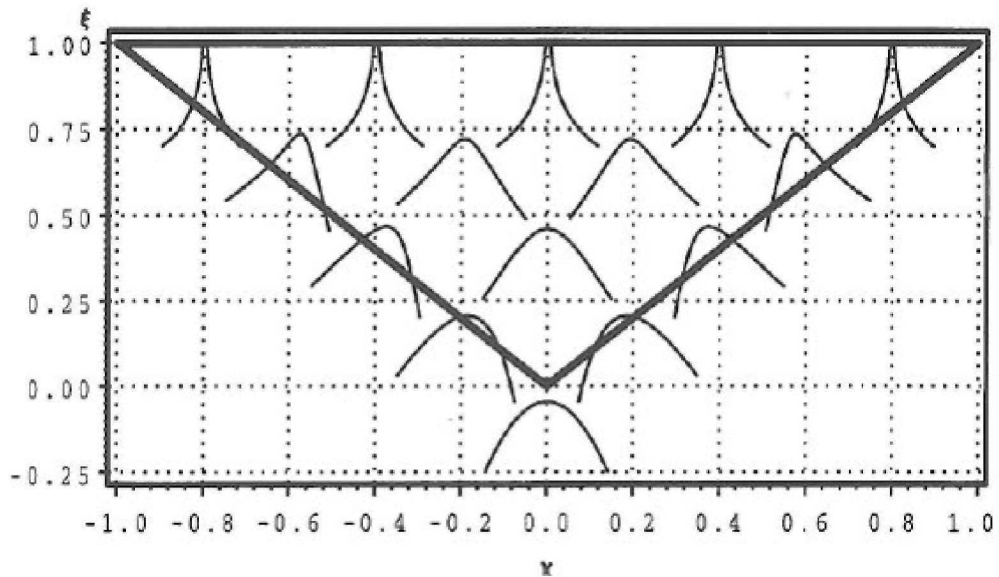


FIGURA 6.1. Forma de triángulo de la distribución NIG

$$\begin{array}{llll} \delta > 0 & \alpha > 0 & \alpha^2 > \beta^2 & \text{si } \lambda = 0 \\ \delta > 0 & \alpha \geq 0 & \alpha^2 \geq \beta^2 & \text{si } \lambda = 0 \end{array}$$

Además si X es una variable aleatoria con función de densidad HG y parámetros $(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$, entonces cualquier transformación de la forma $Y = aX + b$ con $a \neq 0$ es de nuevo una variable con función de densidad HG y parámetros $\tilde{\lambda} = \lambda$, $\tilde{\alpha} = |a|^{-1} \alpha$, $\tilde{\beta} = |a|^{-1} \beta$, $\tilde{\delta} = |a| \delta$ y $\tilde{\mu} = a\mu + b$ de este resultado se deducen dos formas de parametrización que son: invariante en escala y parametrización (χ, ξ) , es decir, que no hay cambios bajo transformaciones afines,

$$\xi = \left(1 + \delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \text{ y } \chi = \frac{\beta}{\alpha} \xi$$

Esto implica que el dominio para (χ, ξ) esta dado por

$$0 \leq |\chi| < \xi < 1$$

Esta parametrización puede ser representada por puntos de un triángulo, por lo cual se le llama forma de triángulo (shape triangle). Ver figura 6.1.

La función de densidad HG también puede ser representada como una mezcla normal media-varianza con la distribución Inversa Gaussiana Generalizada (GIG),

$$GH(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = N(\mu + \beta z, z) \underset{z}{\wedge} GIG(\lambda, \delta^2, \alpha^2 - \beta^2)$$

Donde GH es la función de distribución Hiperbólica Generalizada, N es la distribución Normal y GIG es la distribución Inversa Gaussiana Generalizada, cuya función de densidad es:

$$d_{GIG}(z; \lambda, \chi, \psi) = \frac{\left(\frac{\psi}{\chi}\right)^{\frac{\lambda}{2}}}{2K_{\lambda}(\sqrt{\chi\psi})} z^{\lambda-1} \exp\left(\frac{1}{2}(\chi z^{-1} + \psi z)\right), z > 0$$

el dominio de variación de (λ, χ, ψ) esta dado por

$$\begin{array}{lll} \chi \geq 0 & \psi > 0 & \text{si } \lambda > 0 \\ \chi > 0 & \psi > 0 & \text{si } \lambda = 0 \\ \chi > 0 & \psi \geq 0 & \text{si } \lambda < 0 \end{array}$$

La caracterización de la distribución HG como una mezcla de la normal media-varianza, nos dice que la función generadora de momentos es de la forma:

$$M_{GH}(t) = \exp(t\mu) M_{GIG}\left(\frac{1}{2}(2\beta t + t^2)\right)$$

$$M_{GH}(u) = e^{\mu u} \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - (\beta + u)^2}\right)^{\lambda/2} \frac{K_{\lambda}(\delta\sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2})}{K_{\lambda}(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}$$

Algunos de los casos particulares de la HG son los siguientes:

para $\lambda = 1$ y $\delta > 0$ se obtiene la distribución Hiperbólica

para $\lambda = 1$, $\delta = 0$ y $\beta = \mu = 0$ se obtiene la función de distribución Laplace

para $\lambda < 0$, $\alpha = 0$ y $\beta = \mu = 0$ se obtiene la función de distribución Student.

cuando $\delta \rightarrow \infty$ y $\frac{\delta}{\alpha} \rightarrow \sigma^2$ se obtiene la función de densidad Normal con media $\xi = \mu + \beta\sigma^2$ y varianza σ^2 .

Como se menciono al principio la NIG es un caso particular de la HG, la cual resulta de igualar $\lambda = -\frac{1}{2}$ y cuya función de densidad es como sigue:

$$d_{NIG} = \frac{\alpha}{\pi} \exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(x - \mu)\right) \frac{K_1\left(\alpha\delta\sqrt{1 + \left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}}$$

Esta función de densidad también puede ser expresada en términos de parámetros invariantes, si $\bar{\beta} = \delta\beta$, $\bar{\alpha} = \delta\alpha$, la función de densidad NIG $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \mu, \delta)$ expresada en esos parámetros es:

$$d_{NIG} = \frac{\bar{\alpha}}{\pi\delta} \exp\left(\sqrt{\bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2} + \bar{\beta}\frac{(x-\mu)}{\delta}\right) \frac{K_1\left(\bar{\alpha}\sqrt{1 + \left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}}$$

lo cual significa que si

$$X \sim NIG(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \mu, \delta) \Leftrightarrow \frac{X-\mu}{\delta} \sim NIG(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, 0, 1)$$

La función generadora de momentos de la NIG es:

$$M_{NIG}(t; \alpha, \beta, \mu, \delta) = \exp \left[\delta \left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta - t)^2} \right) + t\mu \right]$$

y con parámetros invariantes la función generadora de momentos es:

$$\bar{M}_{NIG}(t; \alpha, \beta, \mu, \delta) = \exp \left[\bar{\alpha} \left(\sqrt{1 - \bar{\rho}^2} - \sqrt{1 - (\bar{\rho} + \frac{\delta}{2}t)^2} \right) + t\mu \right]$$

donde $\bar{\beta} = \delta\beta$, $\bar{\alpha} = \delta\alpha$ y $\bar{\rho} = \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} = \frac{\beta}{\alpha}$

y los momentos de esta función son:

$$k_1 = \frac{d\bar{M}(t; \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \mu, \delta)}{dt} \Big|_{t=0} = E(x) = \mu + \frac{\delta\bar{\rho}}{\sqrt{1-\bar{\rho}^2}} = \mu + \frac{\delta\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}$$

$$k_2 = \frac{d^2\bar{M}(t; \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \mu, \delta)}{dt^2} \Big|_{t=0} = var(x) = \frac{\delta^2}{\bar{\alpha}(\sqrt{1-\bar{\rho}^2})^3} = \frac{\delta\alpha^2}{(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})^3}$$

$$k_3 = \frac{d^3\bar{M}(t; \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \mu, \delta)}{dt^3} \Big|_{t=0} = 3\delta^3 \frac{\bar{\rho}}{\bar{\alpha}^2(\sqrt{1-\bar{\rho}^2})^5} = \frac{3\delta\beta\alpha^2}{(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})^5}$$

$$k_4 = \frac{d^4\bar{M}(t; \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \mu, \delta)}{dt^4} \Big|_{t=0} = 3\delta^4 \frac{4\bar{\rho}^2 + 1}{\bar{\alpha}^3(\sqrt{1-\bar{\rho}^2})^7} = \frac{3\delta\alpha^2(4\beta^2 + \alpha^2)}{(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})^7}$$

sesgo (skewness)

$$skw(x) = \frac{k_3}{(k_2)^{3/2}} = 3\frac{\beta}{\alpha} \left[\frac{1}{(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})^{1/2}} \right]$$

Kurtosis

$$kts(x) = \frac{k_4}{(k_2)^2} = 3 \left[\frac{1}{\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \left(\frac{4\beta^2}{\alpha^2} + 1 \right) \right]$$

Las propiedades de convolución de la distribución GIG ver Barndorff-Nielsen, Blaesild & Seshardri (1992), implican que la clase NIG es el único miembro de las distribuciones HG el cual es cerrado bajo convolución.

$$NIG(\alpha, \beta, \delta_1, \mu_1) * NIG(\alpha, \beta, \delta_2, \mu_2) = NIG(\alpha, \beta, \delta_1 + \delta_2, \mu_1 + \mu_2)$$

Esto y el hecho de que las colas de la NIG son más flexibles es una de las razones por las cuales se eligió para modelar los logaritmos de los rendimientos de las acciones mexicanas.

Acción	α	β	δ	μ	FV(p)	Iteraciones
ALFA	54.8658	2.9337	0.0079	-0.0002	7856.21	20
AMTEL	79.9552	-5.9196	0.0128	0.0003	551.264	30
AMXL	89.3392	0.5662	0.0105	-0.0003	1544.8	24
APASCO	67.0691	5.9948	0.0082	-0.0004	8008.33	16
ARA	42.4334	5.6377	0.0057	-0.0005	5126.82	18
ARCA	43.2518	5.7545	0.0042	-0.0010	950.141	25
CELV	34.3009	-3.6774	0.0113	-0.0011	1397.04	25
CEMEX CPO	68.0266	7.2753	0.0083	-0.0006	7995.46	21
CIEB	62.0298	5.1901	0.0104	-0.0007	4546.34	21
COMERCI UBC	58.5985	4.7375	0.0080	-0.0006	7899.35	17
CONTAL	40.2680	4.4014	0.0054	-0.0004	4906.7	18
DESC B	53.4661	4.4004	0.0087	-0.0006	7669.41	15
ELEKTRA	55.3598	2.6266	0.0107	-0.0004	5200.54	20
FEMSA UBD	54.5055	5.2386	0.0089	-0.0003	7697.31	15
GCARSO A1	66.4844	-1.6130	0.0091	0.0003	7859.32	20
GEOB	36.5982	0.7044	0.0090	-0.0004	4383.55	17
GFINBUR	64.4978	6.2244	0.0065	-0.0006	5826.37	22
GFNORTE	61.3412	6.3822	0.0118	-0.0009	4431.79	19

TABLA 6.1. Parámetros de la NIG

Además la distribución hiperbólica generalizada es infinitamente divisible (ver Barndorff-Nielsen and Christian Halgreen 1977) [4] por lo que podemos generar un proceso de Lévy. Ver teorema 21.

Para calcular los parámetros de la NIG de cada serie de datos, se utilizó el método de Máxima Verosimilitud, el cual fue implementado en MatLab, y los resultados para cada serie se muestran en las tablas 6.1 y 6.2, además del valor de la función de verosimilitud y el número de iteraciones que fueron necesarias para llegar al resultado.

La función de densidad NIG, también puede ser representada a través de parámetros invariantes, recuérdese que si

$$X \sim NIG(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \mu, \delta) \Leftrightarrow \frac{X-\mu}{\delta} \sim NIG(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, 0, 1)$$

Ver tablas 6.3 y 6.4.

Acción	α	β	δ	μ	FV(p)	Iteraciones
GISSA B	38.6881	1.8219	0.0048	-0.0003	5019.89	20
GMEXICO B	65.6920	7.8765	0.0098	-0.0014	5622.55	21
GMODELO	93.9239	9.5530	0.0088	-0.0005	7011.92	18
GSANBOR B	87.8633	16.8329	0.0101	-0.0021	2971.27	25
ICA	41.7299	2.7385	0.0088	-0.0009	7443.41	17
IPC	119.9357	7.4761	0.0072	-0.0002	8763.67	18
KIMBER A	55.0865	1.6061	0.0055	0.0001	8429.76	17
PEÑOLES	47.1308	6.2126	0.0065	-0.0008	5937.33	21
SAVIA A	13.8006	-0.3776	0.0030	-0.0003	6396.26	25
SORIANA B	91.0704	3.2715	0.0120	-0.0004	4678.83	26
SP500	162.6225	-8.3094	0.0039	0.0003	9727.14	24
TELECOM A	88.7644	6.2540	0.0119	-0.0005	5006.75	28
TELEVISA	77.9115	8.5444	0.0116	-0.0011	7645.05	19
TELMEX L	115,1635	13.5424	0.0093	-0.0007	8383.12	23
TVAZTECA	61.3404	6.1786	0.0144	-0.0019	3824.87	21
USCOM B1	11.8930	8.8632	0.0020	-0.0001	488.464	30
VITRO	58.8386	5.8463	0.0087	-0.0009	7723.77	27
WALMEX C	84.6396	7.1681	0.0097	-0.0006	7998.34	30
WALMEX V	82.2297	6.7431	0.0095	-0.0005	7994.09	22

TABLA 6.2. Parámetros de la NIG (a)

Acción	$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$	δ	μ
ALFA	0.4334	0.0232	0.0079	-0.0002
AMTEL	1.0234	-0.0758	0.0128	0.0003
AMXL	0.9381	0.0059	0.0105	-0.0003
APASCO	0.5499	0.0492	0.0082	-0.0004
ARA	0.2419	0.0321	0.0057	-0.0005
ARCA	0.1817	0.0242	0.0042	-0.0010
CELV	0.3876	-0.0416	0.0113	-0.0011
CEMEX CPO	0.5646	0.0604	0.0083	-0.0006
CIEB	0.6451	0.0540	0.0104	-0.0007
COMERCI UBC	0.4688	0.0379	0.0080	-0.0006
CONTAL	0.2174	0.0238	0.0054	-0.0004
DESC B	0.4652	0.0383	0.0087	-0.0006
ELEKTRA	0.5923	0.0281	0.0107	-0.0004
FEMSA UBD	0.4851	0.0466	0.0089	-0.0003
GCARSO A1	0.6050	-0.0147	0.0091	0.0003
GEOB	0.3294	0.0063	0.0090	-0.0004
GFINBUR	0.4192	0.0405	0.0065	-0.0006
GFNORTE	0.7238	0.0753	0.0118	-0.0009

TABLA 6.3. Parámetros invariantes NIG

Acción	$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$	δ	μ
GISSA B	0.1857	0.0087	0.0048	-0.0003
GMEXICO B	0.6438	0.0772	0.0098	-0.0014
GMODELO	0.8265	0.0841	0.0088	-0.0005
GSANBOR B	0.8874	0.1700	0.0101	-0.0021
ICA	0.3672	0.0241	0.0088	-0.0009
IPC	0.8635	0.0538	0.0072	-0.0002
KIMBER A	0.3030	0.0088	0.0055	0.0001
PEÑALES	0.3064	0.0404	0.0065	-0.0008
SAVIA A	0.0414	-0.0011	0.0030	-0.0003
SORIANA B	1.0928	0.0393	0.0120	-0.0004
SP500	0.6342	-0.0324	0.0039	0.0003
TELECOM A	1.0563	0.0744	0.0119	-0.0005
TELEVISA	0.9038	0.0991	0.0116	-0.0011
TELMEX L	1.0710	0.1259	0.0093	-0.0007
TVAZTECA	0.8833	0.0890	0.0144	-0.0019
USCOM B1	0.0238	0.0177	0.0020	-0.0001
VITRO	0.5119	0.0509	0.0087	-0.0009
WALMEX C	0.8210	0.0695	0.0097	-0.0006
WALMEX V	0.7812	0.0641	0.0095	-0.0005

TABLA 6.4. Parámetros invariantes NIG (a)

Capítulo 7

VALOR EN RIESGO (VaR)

El VaR es un método para calcular y controlar el riesgo de mercado, fácil de entender, *el VaR mide la peor pérdida esperada en un intervalo de tiempo determinado bajo condiciones normales del mercado ante un nivel de confianza dado*

En 1995 en opinión de la International Swaps and Derivatives Association (ISDA), *la medición del riesgo de mercado es significativa para los analistas de estados financieros. La medida que comúnmente consideran apropiada la mayoría de los profesionales líderes, es alguna modalidad del Valor en Riesgo.*

Además la regulación de las instituciones financieras requiere del mantenimiento de niveles mínimos de capital como reservas contra el riesgo financiero, el Comité de Basilea para la supervisión Bancaria (el cual fue creado en 1974 cuando el Herstatt Bank quedó en bancarota y generó una desestabilización en el sistema bancario global), el Banco de la Reserva Federal de Estados Unidos y los reguladores en la Union Europea aceptan al VaR como una medida de riesgo. Un banco incluso ha dado voluntariamente información que facilita el calculo del VaR. En octubre de 1994, J. P. Morgan dio a conocer su sistema "RiskMetrics", el cual proporciona una base de datos que para cuantificar el VaR.

El punto de partida para obtener el VaR es la "llamada posición del portafolio" o el valor de precios de mercado. Dado que los precios de mercado en un futuro son una variable aleatoria, el valor del portafolio lo es también. Por lo que calcular la pérdida máxima de un portafolio a un nivel de confianza dado es factible, si conocemos la función de densidad que dicta el comportamiento de estas variables aleatorias.

El horizonte de tiempo que puede ser elegido para calcular la pérdida máxima varía desde un día hasta un mes y esto afecta a los modelos que se deben utilizar, por ejemplo en un VaR para horizontes de tiempo cortos se utiliza a la función densidad normal con media cero y la varianza muestral de los datos.

El nivel de confianza depende de cada persona, pero en la práctica se utilizan con más frecuencia niveles del 95, 99 y 99.9 por ciento, por ejemplo, Bankers Trust utiliza un nivel del 99 por ciento; Chemical and Chase, un nivel del 97.5 por ciento; Citibank, un nivel de 94.5 por ciento; Bank of America y J.P. Morgan, un nivel del 95 por ciento. Si por ejemplo el nivel de confianza es del 99 por ciento, significa que una de cada 100 veces la pérdida máxima del portafolio rebasará a la pérdida máxima calculada.

Además la precisión de los resultados no es indiferente al nivel de confianza elegido. Se debe tener en cuenta que para la estimación del VaR es muy importante la forma de las colas de la distribución de probabilidad que suponemos rige el comportamiento aleatorio de los precios.

Existen dos formas diferentes de calcular el VaR ya sea de manera paramétrica en donde se supone que los datos siguen una determinada función de densidad o de una manera No paramétrica, en la cual no se supone ninguna función de densidad asociada con los cambios en los rendimientos de las variables, lo único que se considera son los datos históricos y se hace el supuesto de que en futuro este mismo comportamiento en la variable se mantendrá, es decir, habrá estabilidad.

Para el caso del VaR paramétrico supongamos que X_t es la variable aleatoria que representa las pérdidas de un portafolio y cuya función de densidad es conocida, por lo que la obtención del VaR en un tiempo T y a un nivel de significancia α se reduce a encontrar el valor crítico X_{t+T}^* , tal que:

$$P [X_t \leq X_{t+T}^*] = 1 - \alpha$$

Pero el problema deja de ser sencillo cuando desconocemos la función de densidad que rige el comportamiento de la variable aleatoria, por lo que la aplicación de un modelo paramétrico tiene como primera etapa, encontrar la función de densidad más adecuada para la variable aleatoria. Además se debe tener en cuenta que un portafolio esta formado de al menos dos activos, por lo que primero se encuentra la distribución de cada activo para después agregar los riesgos, pero la distribución conjunta tiene un mayor nivel de complejidad en todos los sentidos, desde el proceso para estimar los parámetros, el contraste de los resultados obtenidos y los cálculos numéricos. Es por este motivo que la atención se centra fundamentalmente a la obtención de modelos paramétricos para activos individuales. Una de las razones por la cual la función de densidad más utilizada es la Normal, es que tiene resueltos estos problemas tanto en el caso univariado como en el caso multivariado.

El problema de aceptar que la distribución Normal sea la función que rige los cambios en los rendimientos de los activos introduce un nuevo elemento de riesgo. Se trata del riesgo modelo. Como todo riesgo, expresa la pérdida que se puede producir debido a un comportamiento de los precios en términos diferentes a las pautas establecidas por el modelo. Este riesgo existe tanto en el caso de que el modelo sobrevalore o subvalore los riesgos y como la medida del VaR sirve para tomar decisiones de gestión, tales como la amplitud de las posiciones de negociación, la asignación de recursos de capital o la medición de los rendimientos ajustados al riesgo. El asumir que la distribución asociada a los rendimientos sigue una variable

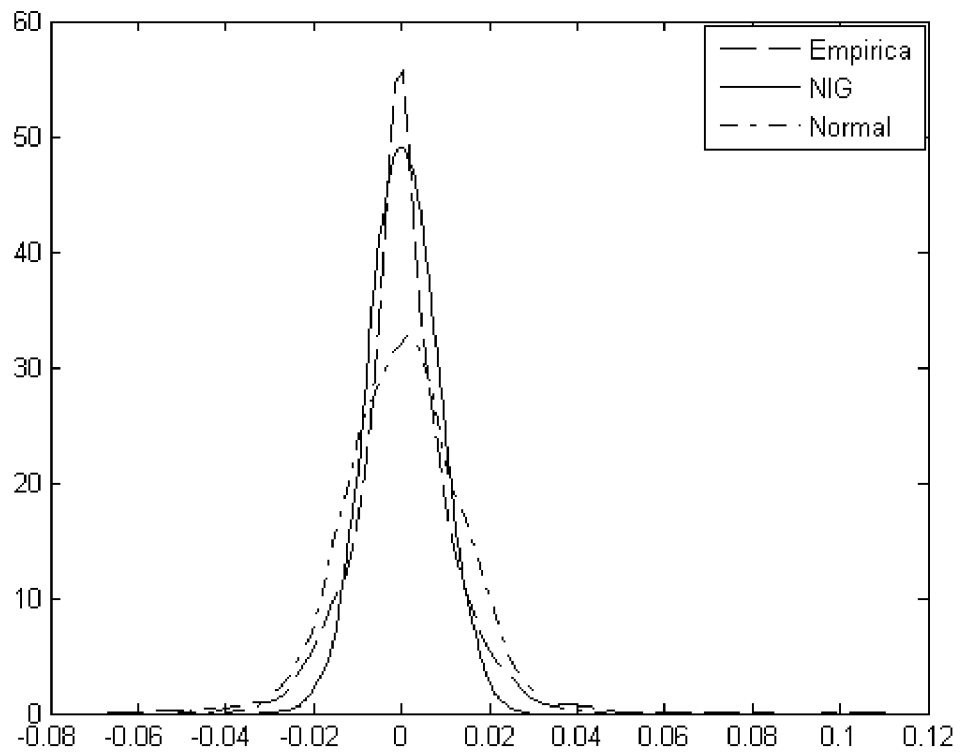


FIGURA 7.1. ALFA, comparación de funciones de densidad.

aleatoria normal, cuando así no lo sea, afectan a las decisiones de gestión en un amplio sentido. Ver figuras 7.1 y 7.2.

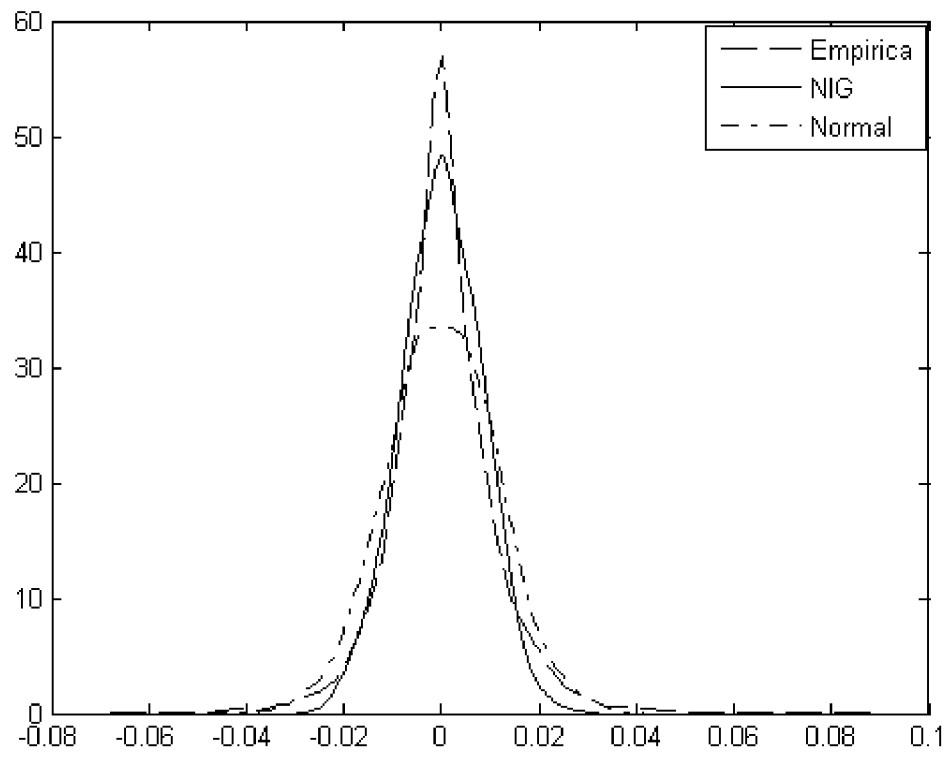


FIGURA 7.2. APASCO, comparación de funciones de densidad.

Capítulo 8

RESULTADOS

Dado que se rechazó la hipótesis nula, de que las series de rendimientos de las acciones tenían asociada a la función de densidad Normal y que en la prueba de Kolmogorov Smirnov, sólo en dos de las acciones (AMTEL y AMXL) se aceptó la hipótesis nula de una distribución t-Student era la función de densidad asociada a estas, se procedió a calcular los parámetros de la NIG para cada una de las series, como se mencionó estos se obtuvieron utilizando el método de Máxima Verosimilitud y los resultados obtenidos se presentaron en el Capítulo 5.

En esta sección se presentan los resultados que se obtuvieron del cálculo de la función de distribución para cada acción utilizando las funciones de distribución NIG y Normal. También se muestran los resultados que se obtienen de la distribución empírica.

En el caso de la función de densidad NIG, la función de distribución se calculó utilizando los valores de los parámetros obtenidos para cada una de ellas, por ejemplo para la acción ALFA se calculó

$$\begin{aligned}
 F_{NIG}(X; 54.8658, 2.9337, 0.0079, -0.0002) &= P(X \leq x) \\
 &= \int_{-\infty}^x \frac{54.8658}{\pi} \exp\left(0.0079\sqrt{54.8658^2 - 2.9337^2} + \beta(s - (-0.0002))\right) \\
 &\quad \frac{K_1\left((54.8658)(0.0079)\sqrt{1 + \left(\frac{s - (-0.0002)}{0.0079}\right)^2}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{s - (-0.0002)}{0.0079}\right)^2}} ds
 \end{aligned}$$

Para la función de distribución Normal los parámetros que se utilizaron fueron la varianza y media muestral.

Los valores que se utilizaron para x fueron: -0.01, -0.05, 0, 0.001, 0.003, 0.005 y 0.01.

Todos los cálculos se realizaron utilizando el programa MatLab y los resultados obtenidos se encuentran en las tablas 8.2, 8.3, 8.4, 8.5, 8.6 y 8.1.

IPC							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.0961	0.2527	0.4889	0.5397	0.6387	0.7291	0.8940
NIG	0.0718	0.2011	0.4928	0.5616	0.6858	0.7829	0.9165
Histograma	0.0687	0.2	0.4982	0.5692	0.6866	0.7784	0.9186
S&P 500							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.0190	0.1468	0.4893	0.5706	0.7216	0.8406	0.9783
NIG	0.0271	0.1079	0.4789	0.5954	0.7828	0.8873	0.9751
Histograma	0.0249	0.1128	0.4755	0.5936	0.7728	0.8876	0.9751

TABLA 8.1. Resultados de la NIG, para los índices: IPC y SP 500

Como puede observarse en todos los casos la función de densidad Normal Inversa Gaussiana, se ajusta mejor a las series de datos, de hecho la diferencia que existe entre el valor del histograma y la NIG es mínima y en algunos casos como en las series de S&P500, IPC, ICA, AMTEL, CEMEX, TELEVISIA, TELMEX, etc. el ajuste es muy bueno, sin embargo en otras series como ARA, ARCA, CONTAL, USCOM B1, el ajuste parece no ser tan bueno, sin embargo, comparando con los resultados de la distribución Normal, el ajuste es superior, por lo que se puede concluir que en todos los casos la NIG nos proporciona un mejor ajuste para las series de rendimientos de acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores.

También se calculo la función de distribución de la t-Student, para las acciones de AMTEL y AMXL, y se comparo con las función de densidad Normal Estandar y el Histograma, para el caso del histograma se estandarizaron los datos, es decir, a cada uno se le resto la media muestral y se dividió entre la desviación estándar muestral, los valores que se tomaron para el calculo fueron: -2, -1, -0.6, -0.3, 0, 0.6 y 1, ver tabla 8.7.

Respecto al sesgo y kurtosis los resultados que se obtuvieron se muestran en las tablas 8.8 y 8.9..

Como se puede observar la NIG ajusta el sesgo y la kurtosis mejor que la distribución normal, aunque en la mayoría de los casos subestima la Kurtosis.

ALFA							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.1943	0.3299	0.4927	0.5263	0.5928	0.6567	0.7954
NIG	0.1309	0.2619	0.4990	0.5510	0.65	0.7312	0.8609
Histograma	0.1390	0.2514	0.5385	0.5715	0.6608	0.7276	0.8531
AMTEL							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.2315	0.3662	0.52	0.5511	0.6123	0.6708	0.7978
NIG	0.1851	0.3225	0.5137	0.5556	0.6341	0.7061	0.8406
Histograma	0.1957	0.337	0.5217	0.5489	0.6358	0.7065	0.8478
AMXL							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.1819	0.3288	0.5087	0.5457	0.6182	0.6868	0.8294
NIG	0.1427	0.2872	0.5124	0.5611	0.6519	0.7307	0.8663
Histograma	0.1309	0.2965	0.5378	0.5706	0.6585	0.73	0.8589
APASCO							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.1795	0.3165	0.4897	0.5257	0.5968	0.6648	0.8098
NIG	0.1212	0.2562	0.4986	0.5520	0.6517	0.7342	0.8653
Histograma	0.1251	0.2609	0.5369	0.5770	0.6596	0.7363	0.8629
ARA							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.2019	0.3338	0.4905	0.5228	0.5869	0.6487	0.7845
NIG	0.1054	0.2303	0.5126	0.5776	0.6894	0.7722	0.8837
Histograma	0.1107	0.2347	0.5705	0.618	0.6882	0.7495	0.8665
ARCA							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.1488	0.3099	0.5197	0.5629	0.6468	0.7290	0.8729
NIG	0.0841	0.2089	0.5699	0.6461	0.7626	0.8348	0.9213
Histograma	0.0942	0.2246	0.6521	0.6957	0.7681	0.8116	0.9094
CELV							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.3369	0.4412	0.5497	0.5713	0.6136	0.6547	0.7489
NIG	0.2482	0.3853	0.5621	0.5974	0.6638	0.7219	0.8286
Histograma	0.2515	0.3879	0.5848	0.6043	0.6667	0.7251	0.8304

TABLA 8.2. Resultados de la NIG, para las acciones ALFA, AMTEL, AMXL, APASCO, ARA, ARCA y CELV

CEMEX	CPO						
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.1824	0.3212	0.4909	0.5261	0.5957	0.6624	0.8053
NIG	0.1226	0.2599	0.5042	0.5571	0.6550	0.7357	0.8649
Histograma	0.1243	0.2669	0.5278	0.5655	0.662	0.7327	0.857
CIEB							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.2182	0.3457	0.4938	0.5242	0.5844	0.6427	0.7725
NIG	0.1604	0.2993	0.5074	0.5511	0.6339	0.7063	0.8355
Histograma	0.1591	0.2957	0.5327	0.569	0.6462	0.703	0.8244
COMERCI	UBC						
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.1978	0.3351	0.4992	0.533	0.5996	0.6634	0.8011
NIG	0.1318	0.2699	0.5136	0.5653	0.6620	0.7410	0.8652
Histograma	0.1334	0.2685	0.5759	0.5921	0.6755	0.7367	0.8503
CONTAL							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.1695	0.3124	0.4912	0.5284	0.6018	0.6718	0.8191
NIG	0.1029	0.2241	0.5103	0.5795	0.6953	0.7789	0.8894
Histograma	0.1215	0.2277	0.5941	0.6403	0.705	0.769	0.8673
DESC B							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.2101	0.3415	0.4958	0.5275	0.5902	0.6507	0.7837
NIG	0.1469	0.2846	0.5100	0.5587	0.6488	0.7242	0.8496
Histograma	0.1557	0.2756	0.577	0.5933	0.6585	0.7252	0.8332
ELEKTRA							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.2355	0.3582	0.4977	0.5262	0.5827	0.6376	0.7610
NIG	0.1724	0.3066	0.5042	0.5462	0.6260	0.6969	0.8260
Histograma	0.1725	0.3043	0.5385	0.5617	0.6295	0.7002	0.8167
FEMSA	UBD						
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.2159	0.3400	0.4846	0.5144	0.5736	0.6312	0.7608
NIG	0.1408	0.2726	0.4913	0.5397	0.6305	0.7076	0.8399
Histograma	0.1354	0.2726	0.5163	0.5457	0.6287	0.7029	0.8443

TABLA 8.3. Resultados de la NIG, para las acciones CEMEXCPO, CIEB, COMERCIUBC, CONTAL, DESCB, ELEKTRA y FEMSAUBD

GCARSO A1							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.2048	0.3390	0.4977	0.5304	0.5948	0.6568	0.7920
NIG	0.1394	0.2700	0.4914	0.5407	0.6365	0.7192	0.8575
Histograma	0.1409	0.2693	0.5175	0.5485	0.6426	0.7196	0.855
GEOB							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.2668	0.3806	0.5059	0.5313	0.5816	0.6306	0.7428
NIG	0.1771	0.3085	0.5143	0.5581	0.6401	0.7113	0.8322
Histograma	0.1809	0.3063	0.5518	0.5789	0.6554	0.7129	0.8205
GFINBUR							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.1556	0.3055	0.4981	0.5382	0.6170	0.6912	0.8421
NIG	0.1023	0.2367	0.5176	0.5802	0.6904	0.7751	0.8936
Histograma	0.1171	0.236	0.5852	0.6208	0.6943	0.7691	0.8919
GFNORTE							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.2296	0.3512	0.4904	0.5190	0.5757	0.6309	0.7556
NIG	0.1764	0.3136	0.5046	0.5445	0.6207	0.6873	0.8148
Histograma	0.1822	0.3149	0.5333	0.565	0.6198	0.687	0.8112
GISSA B							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.1714	0.3185	0.5020	0.5400	0.6145	0.6851	0.8312
NIG	0.0966	0.2121	0.5170	0.5910	0.7148	0.7991	0.904
Histograma	0.105	0.231	0.612	0.638	0.724	0.7842	0.8799
GMEXICO B							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.2107	0.3470	0.5069	0.5396	0.6039	0.6656	0.7991
NIG	0.1576	0.3082	0.5316	0.5768	0.6603	0.7314	0.8525
Histograma	0.1620	0.3051	0.5791	0.5981	0.6661	0.7319	0.8499
GMODELO							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.1423	0.2896	0.4844	0.5255	0.6065	0.6831	0.8396
NIG	0.1055	0.2445	0.4946	0.5499	0.6521	0.7392	0.8772
Histograma	0.1115	0.2445	0.5194	0.566	0.6668	0.7434	0.8675

TABLA 8.4. Resultados de la NIG, para las acciones: GCARSO A1, GEOB, GFINBUR, GFNORTE, GISSA B, GMEXICO B y GMODELO

GSANBOR B							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.1872	0.3311	0.5058	0.5417	0.6123	0.6793	0.8205
NIG	0.1402	0.3009	0.5376	0.5846	0.6703	0.7420	0.8624
Histograma	0.1582	0.3099	0.5796	0.6178	0.6772	0.7516	0.8631
ICA							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.2536	0.3742	0.5087	0.5360	0.5899	0.6422	0.7602
NIG	0.1707	0.3111	0.5283	0.5736	0.6569	0.7268	0.8433
Histograma	0.1751	0.3090	0.5751	0.5913	0.6624	0.7252	0.8388
KIMBERA							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.1484	0.2958	0.4882	0.5287	0.6082	0.6835	0.8375
NIG	0.0911	0.2054	0.4877	0.5589	0.6840	0.7788	0.9006
Histograma	0.0973	0.2049	0.5246	0.577	0.6831	0.7689	0.8908
PEÑOLES							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.1927	0.3309	0.4973	0.5316	0.5993	0.6642	0.8036
NIG	0.1185	0.2542	0.5247	0.5830	0.6856	0.7639	0.8771
Histograma	0.1338	0.2559	0.597	0.6317	0.7002	0.7596	0.8603
SAVIA A							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.2470	0.3712	0.5107	0.5390	0.5949	0.6489	0.7697
NIG	0.082	0.17	0.5332	0.6364	0.7765	0.8489	0.9237
Histograma	0.0956	0.1875	0.6186	0.6682	0.7795	0.8449	0.9146
SORIANA B							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.1894	0.3290	0.4979	0.5328	0.6015	0.6672	0.8078
NIG	0.1531	0.2955	0.5044	0.5480	0.6333	0.7087	0.8455
Histograma	0.1611	0.295	0.5327	0.567	0.6449	0.7155	0.8317
TELECOM A							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.1858	0.3219	0.4875	0.5219	0.5899	0.6553	0.7969
NIG	0.1482	0.2884	0.4961	0.5395	0.6248	0.7003	0.8381
Histograma	0.1466	0.2851	0.519	0.5511	0.6349	0.7094	0.8276

TABLA 8.5. Resultados de la NIG, para las acciones: GSANBOR B, ICA, KIMBERA, SAVIA A, SORIANA B y TELECOM A

TELEVISA							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.2072	0.3393	0.4950	0.5270	0.5903	0.6514	0.7855
NIG	0.1594	0.3040	0.5107	0.5527	0.6343	0.7055	0.8355
Histograma	0.1672	0.3074	0.5199	0.5544	0.6394	0.7125	0.8372
TELMEX L							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.1274	0.2779	0.4842	0.5281	0.6142	0.6950	0.8554
NIG	0.0962	0.2377	0.4952	0.5515	0.6562	0.7442	0.8833
Histograma	0.0965	0.2387	0.5254	0.5568	0.6577	0.7407	0.8868
TVAZTECA							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.2688	0.3841	0.5108	0.5365	0.5872	0.6364	0.7488
NIG	0.2223	0.3612	0.5317	0.5658	0.6304	0.6894	0.8040
Histograma	0.2243	0.3566	0.5603	0.5684	0.6409	0.6882	0.7993
USCOM B1							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.2658	0.3569	0.4569	0.4775	0.5188	0.5598	0.6588
NIG	0.0434	0.1001	0.4927	0.6394	0.8010	0.8678	0.9289
Histograma	0.073	0.1752	0.6642	0.6642	0.7591	0.7810	0.8832
VITRO							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.2083	0.3431	0.5017	0.5342	0.5984	0.6600	0.7941
NIG	0.1443	0.2876	0.5205	0.5694	0.6595	0.7349	0.8566
Histograma	0.1527	0.2827	0.5674	0.5930	0.6705	0.7421	0.8517
WALMEX C							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.1697	0.3122	0.4904	0.5276	0.6008	0.6707	0.8179
NIG	0.1278	0.2702	0.5027	0.5533	0.6469	0.7277	0.8619
Histograma	0.1278	0.2692	0.5326	0.556	0.6493	0.7276	0.857
WALMEX V							
z	-0.01	-0.005	0	0.001	0.003	0.005	0.01
Normal	0.1714	0.3133	0.4903	0.5271	0.5998	0.6692	0.8159
NIG	0.1262	0.2665	0.4995	0.5504	0.6449	0.7265	0.8614
Histograma	0.1275	0.2593	0.5377	0.5659	0.6497	0.7224	0.8463

TABLA 8.6. Resultados de la NIG, para las acciones: TELEVISA, TELMEX L, TV AZTECA, USCOM B1, VITRO, WALMEX C y WALMEX V

AMTEL							
z	-2	-1	-0.6	-0.3	0	0.6	1
Normal	0.0228	0.1587	0.2743	0.3821	0.5	0.7257	0.8413
t-Student	0.0354	0.1694	0.2803	0.3849	0.5	0.7197	0.8306
Histograma	0.0326	0.1196	0.25	0.3533	0.4402	0.7717	0.875
AMXL							
z	-2	-1	-0.6	-0.3	0	0.6	1
Normal	0.0228	0.1587	0.2743	0.3821	0.5	0.7257	0.8413
t-Student	0.0343	0.1685	0.2798	0.3847	0.5	0.7202	0.8315
Histograma	0.0389	0.1227	0.2249	0.3374	0.5112	0.7648	0.8732

TABLA 8.7. Resultados t-student, para AMTEL y AMXL

Acción	Sesgo (NIG)	Kurtosis (NIG)	Sesgo (muestral)	Kurtosis (muestral)
ALFA	0.2438	7.0106	0.3732	9.2108
AMTEL	-0.2199	3.0038	-0.0917	5.2362
AMXL	0.0196	3.1987	0.0826	5.1215
APASCO	0.3623	5.6518	0.4486	8.9707
ARA	0.8141	13.3979	-0.4130	56.3464
ARCA	0.9407	17.8425	0.7278	6.6706
CELV	-0.5181	8.1427	-0.8975	10.8237
CEMEX CPO	0.4282	5.5884	0.0147	11.2235
CIEB	0.3131	4.7974	-0.0198	9.2429
COMERCI UBC	0.3548	6.5884	0.1700	11.2849
CONTAL	0.7053	14.5429	0.2971	6.1758
DESC B	0.3626	6.6468	0.1741	6.6183
ELEKTRA	0.1850	5.1159	0.0639	7.9026
FEMSA UBD	0.4149	6.4426	0.3064	19.1039
GCARSO A1	-0.0936	4.9718	-2.4822	46.1859
GEO B	0.1006	9.1231	-0.2678	12.5195
GFINBUR	0.4482	7.4573	0.2146	8.6287
GFNORTE	0.3679	4.3477	0.4401	7.0537

TABLA 8.8. Resultados Sesgo y Kurtosis

Acción	Sesgo (NIG)	Kurtosis (NIG)	Sesgo (muestral)	Kurtosis (muestral)
GISSA B	0.3280	16.3162	-0.0443	8.9697
GMEXICO B	0.4499	4.9637	0.3513	5.6423
GMODELO C	0.3365	3.7995	0.3027	5.8692
GSANBOR B1	0.6158	3.9501	0.8814	7.4513
ICA	0.3252	8.3281	0.0468	15.4914
IPC	0.2014	3.5350	0.0594	7.9915
KIMBER A	0.1589	9.9397	0.2888	11.5594
PEÑOLES	0.7176	10.5655	0.1340	10.3877
SAVIA A	-0.4035	72.7048	0.6661	45.7670
SORIANA B	0.1031	2.7611	0.1591	4.9423
SP500	-0.1926	4.7858	-0.1201	6.6712
TELECOM A1	0.2059	2.9037	0.1479	5.5728
TELEVISA	0.3471	3.5002	0.2449	7.6136
TELMEX L	0.3421	2.9767	0.3047	5.7691
TVAZTECA	0.3223	3.5522	0.0415	7.3190
USCOM B1	17.7527	609.3639	8.3064	86.9951
VITRO	0.4177	6.1223	0.4358	10.3590
WALMEX C	0.2809	3.7724	0.1854	6.1160
WALMEX V	0.2788	3.9570	0.1843	7.4151

TABLA 8.9. Resultados Sesgo y Kurtosis 2

Capítulo 9

CONCLUSIONES

Después de comparar los resultados obtenidos al evaluar las funciones de distribución Normal Inversa Gaussiana y Normal con la distribución empírica (Histograma) se puede concluir que la función de densidad Normal Inversa Gaussiana se ajusta mejor a la distribución empírica de los rendimientos de las acciones y dado que se rechazó que la función subyacente a las series sea la función Normal, se puede decir que el Movimiento Browniano no es la herramienta adecuada para modelar las series financieras mexicanas.

Sin embargo, los procesos estocásticos estacionarios si pueden ser una alternativa para modelar esta clase de series, si se relaja el supuesto de normalidad.

El hacer esto nos lleva a utilizar procesos de Lévy más generales, con lo cual obtenemos modelos más acertados y eliminamos de esta manera el riesgo de utilizar modelos no adecuados. Como se mencionó desde un principio, esta clase de procesos sólo utiliza funciones de densidad infinitamente divisibles, por lo que la función de densidad que se propone como una alternativa para modelar a las finanzas en México es la función Normal Inversa Gaussiana.

En las tablas de resultados presentadas en la sección anterior, se puede observar que tal sugerencia es acertada, pues si bien la Normal inversa Gaussiana en algunos casos no es muy cercana, sí es mucho mejor que la función Normal.

Aunque los procesos de Lévy con función de densidad Normal Inversa Gaussiana son relativamente nuevos en el área de las finanzas (desde 1996), existen ya muchos trabajos realizados fundamentalmente en Dinamarca y Alemania, sin embargo aún falta mucho por hacer, y aunque esta es una herramienta difícil de entender vale la pena estudiarla, pues de esta manera el mercado financiero sería mas eficiente y exacto.

REFERENCIAS

- [1] Atkinson, A. C. (1982), The Simulation of Generalized Inverse Gaussian and Hyperbolic Random Variables, *SIAM J. SCI. STAT. COMPUT.* Vol. **3**. No. 4, 502-515.
- [2] Bachelier, L. (1900), Théorie de la spéculation, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 17, 21-86
- [3] Bagnold, R. A. (1941), *The Physics of Blown Sands and Deser Dunes*, Methuen, London. (Reprint 1973, published by Chapman and Hall, London)
- [4] Barndorff-Nielsen, O. E. and Halgreen, C. (1977), Infinite divisibility of the hyperbolic and generalized inverse Gaussian distributions, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* **38**, 309-312.
- [5] Barndorff-Nielsen, O. E. (1977), Exponentially decreasing log-size distributions, *Proc Roy Soc. London A* **353**, 401-419.
- [6] Barndorff-Nielsen, O. E. (1978), Hyperbolic Distributions and Distributions on Hyperbolae, *Scand. J. Statist.* **5** (1978), 151-157.
- [7] Barndorff-Nielsen, O. E. and Blæsild, P. (1980), Hyperbolic Distributions and Ramifications: contributions to theory and application, Research Report 68, Department of Theoretical Statistics, Institute of Mathematics, University of Aarhus.
- [8] Barndorff-Nielsen, O. E., Blæsild, P., Jensen, J. I. and Sørensen, M. K. (1983), The Fascination of Sand, Research Report 93, Department of Theoretical Statistics, Institute of Mathematics, University of Aarhus.
- [9] Barndorff-Nielsen, O. E. (1995), Normal \ inverse Gaussian processes and the modelling of stock returns, Research Report 300, Department of Theoretical Statistics, Institute of Mathematics, University of Aarhus.

- [10] Barndorff-Nielsen, O. E. (1996), Probability and Statistics Selfdecomposability, Finance and Turbulence, Research Report 347, Department of Theoretical Statistics, Institute of Mathematics, University of Aarhus.
- [11] Barndorff-Nielsen, O. E. (1997), Normal inverse Gaussian distributions and stochastic volatility modelling, *Scand. J. Statist.* **24**, 1-13.
- [12] Barndorff-Nielsen, O. E. (1998), Processes of normal inverse Gaussian type, *Finance and Stochastics* **2**, 41-68.
- [13] Barndorff-Nielsen, O. E., Mikosch, T., Resnick, S. I. (2001), *Lévy Processes Theory and Applications*, Birkhäuser, United States of America.
- [14] Blæsild, P (1990), The shape cone of the d-dimensional Hyperbolic Distribution, Research Report 208, Department of Theoretical Statistics, Institute of Mathematics, University of Aarhus.
- [15] Blæsild, P. (1990), Hyperbolic Distributions, Cumulants, Skewness and Kurtosis, Research Report 209, Department of Theoretical Statistics, Institute of Mathematics, University of Aarhus.
- [16] Blæsild, P. and Sørensen, M. K. (1992), "hyp" - a computer program for analyzing data by means of the hyperbolic distribution, Research Report 248, Department of Theoretical Statistics, Institute of Mathematics, University of Aarhus.
- [17] Blattberg, R. C., Gonedes, N. J. (1971), A Comparison of the Stable and Student Distributions as Statistical Models for Stock Prices, Research Report, Graduate School of Business, University of Chicago.
- [18] Black, F. and Scholes, M. (1973), The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy* **3**.
- [19] Bibby, B. M. and Sørensen, M. K. (1995), A Hyperbolic Diffusion Model for Stock Prices, Research Report 331, Department of Theoretical Statistics, Institute of Mathematics, University of Aarhus.

- [20] Bowman, K. O. and Shenton L. R. (1975), Omnibus Contours for Departures from Normality Based on $\sqrt{b_1}$ y $\sqrt{b_2}$. *Biometrika* **62**, 243-250.
- [21] Cont, R. and Tankov, P. (2004), *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series, United Kingdom.
- [22] Cox, J. C. Ingersoll, J. E. and Ross, S. A. (385-407), A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica* **53**, 385-407.
- [23] Eberlein, E. and Keller, U. (1995), Hyperbolic Distributions in Finance, *Bernoulli* **1**, 281-299.
- [24] Fisher, R. A. (1930), The Moments of the Distribution for Normal Samples of Measures of Departure from Normality, *Proceedings of the Royal Statistical Society, Series A* **130**, 16-28
- [25] Ho, T. S. Y., Lee, S. B. (1986), Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims, *Journal of Finance* **41**, 1011-1029
- [26] Jarque, C. M. and Bera, A. K. (1980), Efficient Test for Normality, Homoscedasticity and Serial Independence of Residuals. *Economics Letters* **6**, 255-259
- [27] Jarque, C. M. and Bera, A. K. (1987), A Test for Normality of Observations and Regression Residuals, *International Statistical Review* **55**, 163-172
- [28] Jensen, M. B. and Lunde, A. (2001), The NIG-S&ARCH model: A fat tailed, stochastic, and autoregressive conditional heteroskedastic volatility model, Working Paper Series No. 83, Centre for Analytical Finance, School of Business, University of Aarhus.
- [29] Jorion, P. (1997), *Value at Risk*, McGraw-Hill, United States of America.
- [30] Küchler, U., Neumann, K., Sørensen, M. K. and Steller, A. (1994), Stock Return and Hyperbolic Distributions. Discussion Paper No. 23, Sonderforschungsbereich 373, Humboldt Universität zu Berlin.

- [31] Pedersen, A. R. (1994), Uniform Residuals for Discretely Observed Diffusion Processes, Research Report 292, Department of Theoretical Statistics, Institute of Mathematics, University of Aarhus.

- [32] Prause, K. (1997), Modelling Financial Data Using Generalized Hyperbolic Distributions, Working paper 48, Freiburg Center for Data Analysis and Modelling, Institut für Mathematische Stochastik, Universität Freiburg.

- [33] Rydberg, T. H. (1996), Generalized Hyperbolic Diffusions with Applications to Finance, Research Report 342, Department of Theoretical Statistics, Institute of Mathematics, University of Aarhus.

- [34] Sato, K. (1999), Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions, Cambridge University Press, United Kingdom.

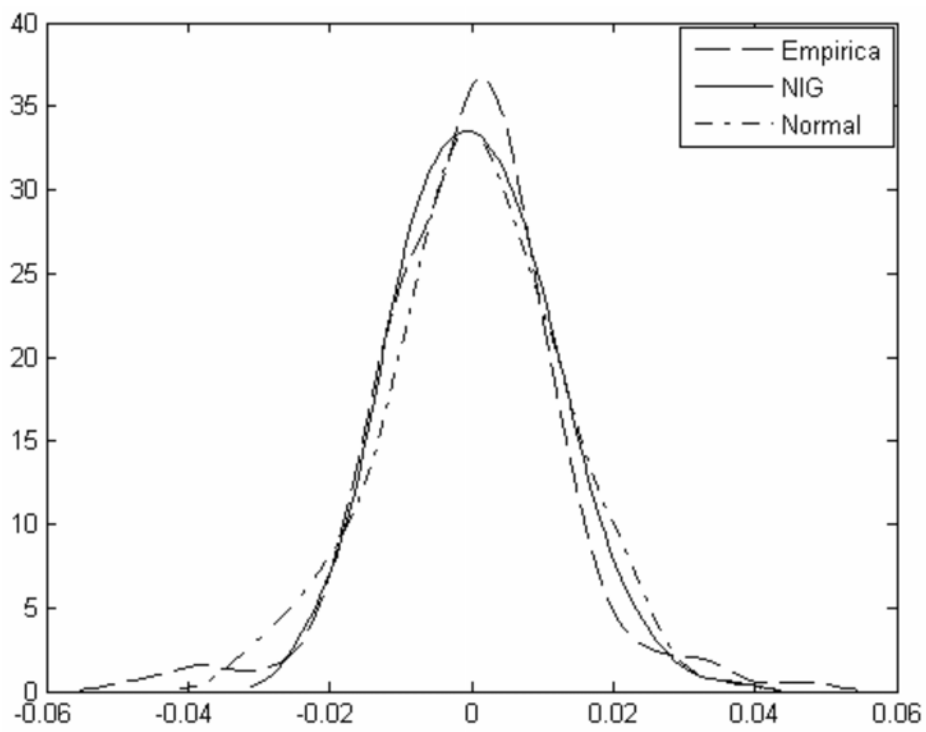
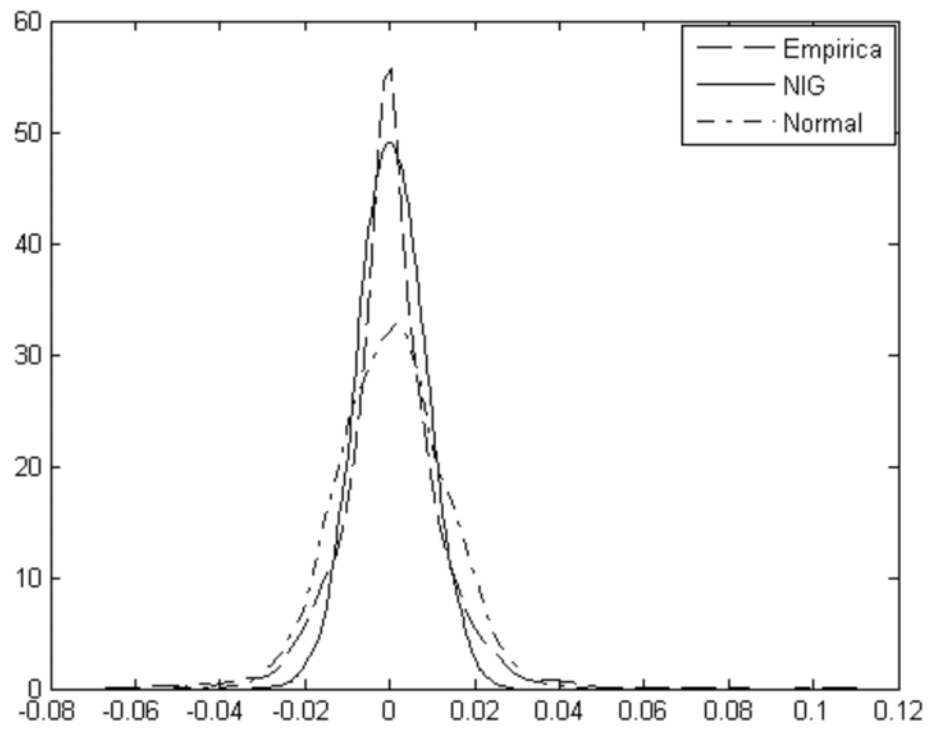
- [35] Urzúa, C. M. (1996), On the correct use of Omnibus test for normality, Economics letters **53**, 247-251

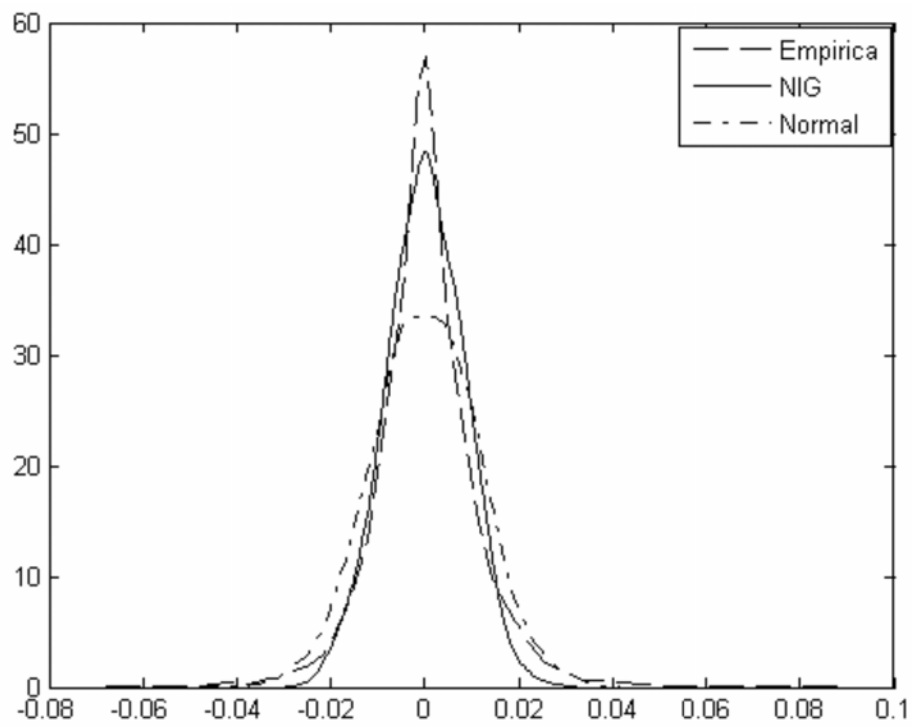
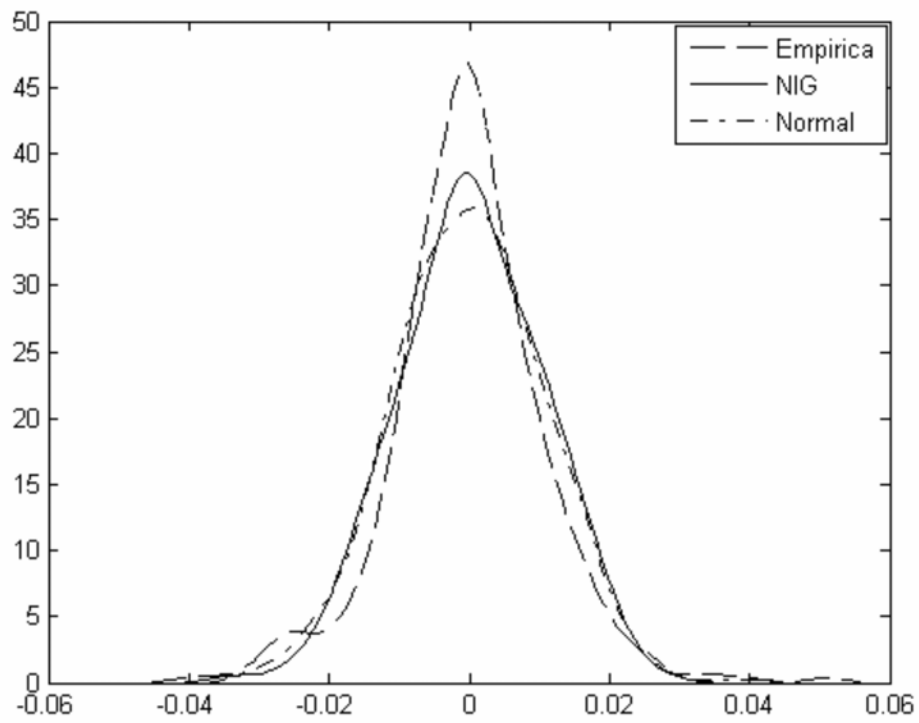
- [36] Urzúa, C. M. (1997), Omnibus test for multivariate normality based on a class of maximum entropy distributions, Advances in Econometrics **12**, 341-358

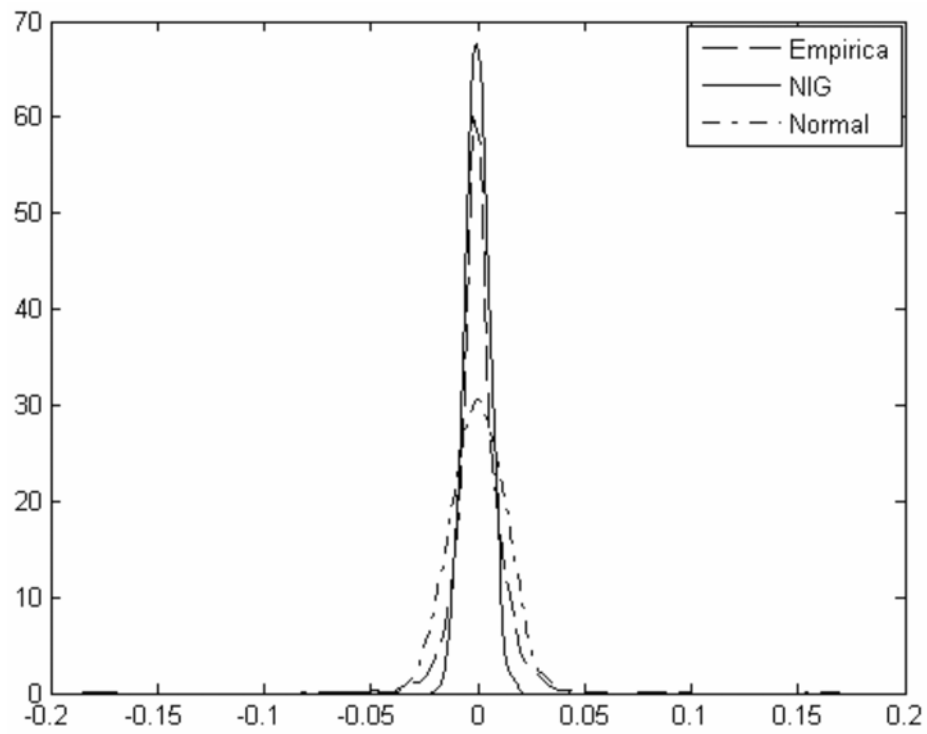
- [37] Vasicek, O. A. (1977), An Equilibrium Characterization of the Term Structure, Journal of Financial Economics **5**, 177-188

- [38] Weron, A. and Weron, R. (1995), Computer simulation of Lévy -stable variances and processes, Research Report 313, Department of Theoretical Statistics, Institute of Mathematics, University of Aarhus.

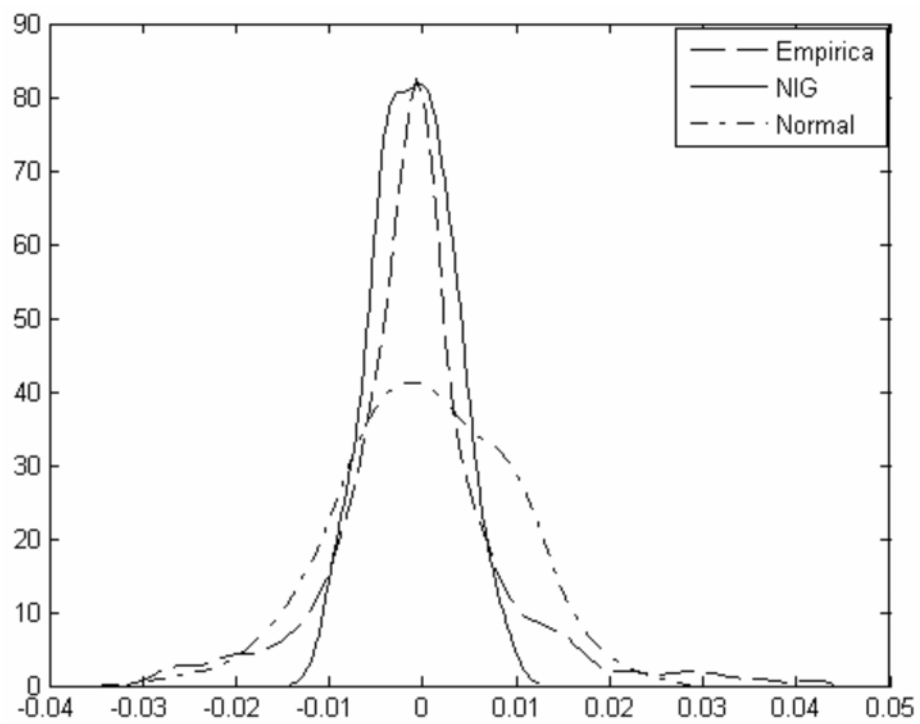
Apéndice A
GRAFICAS



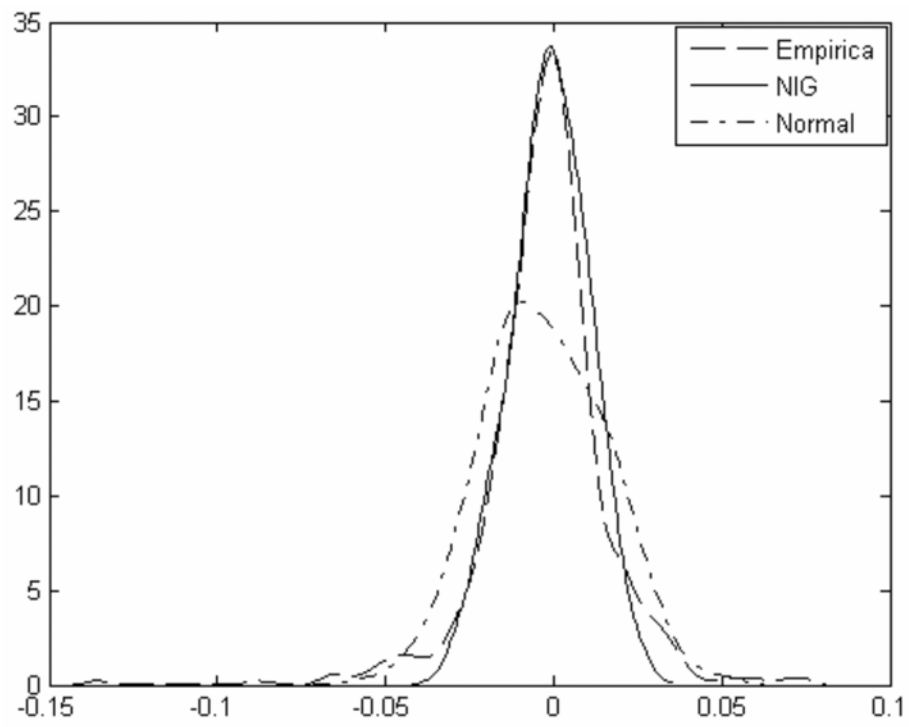




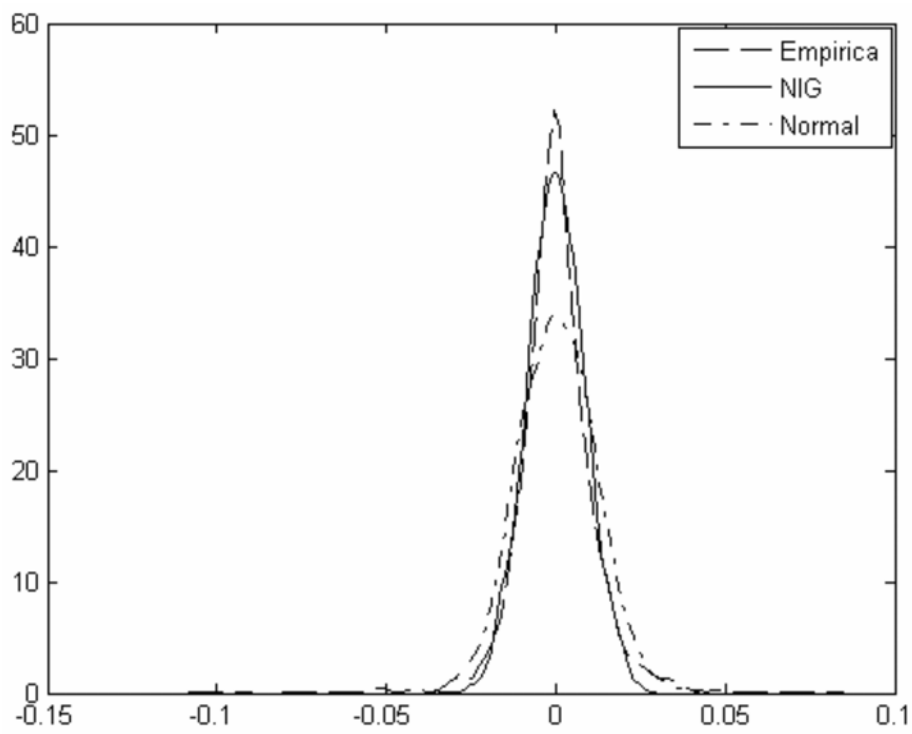
Gráfica ARA



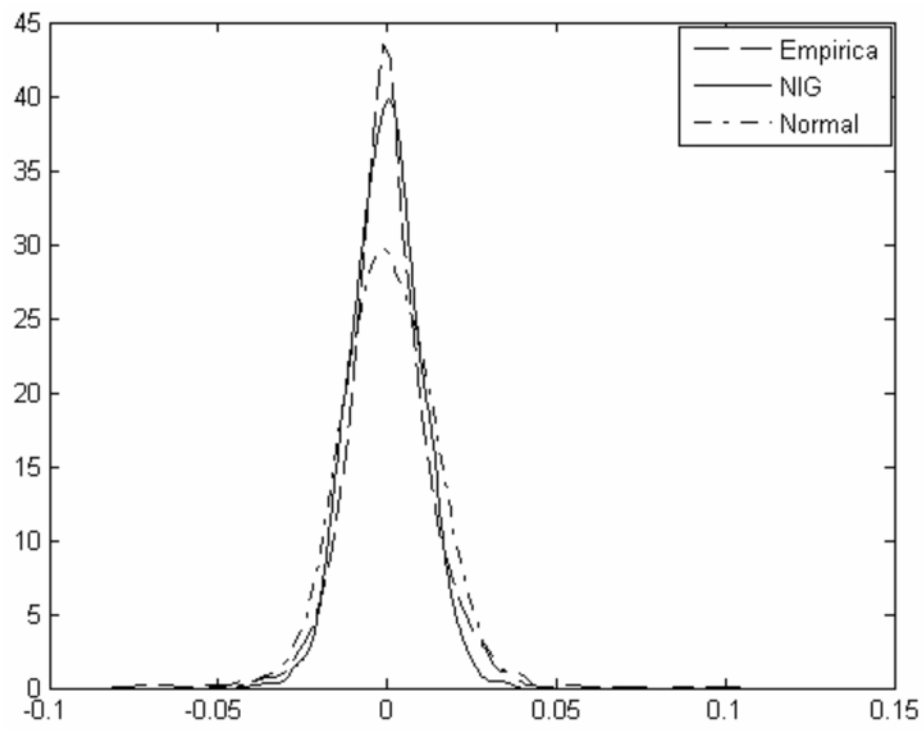
Gráfica ARCA



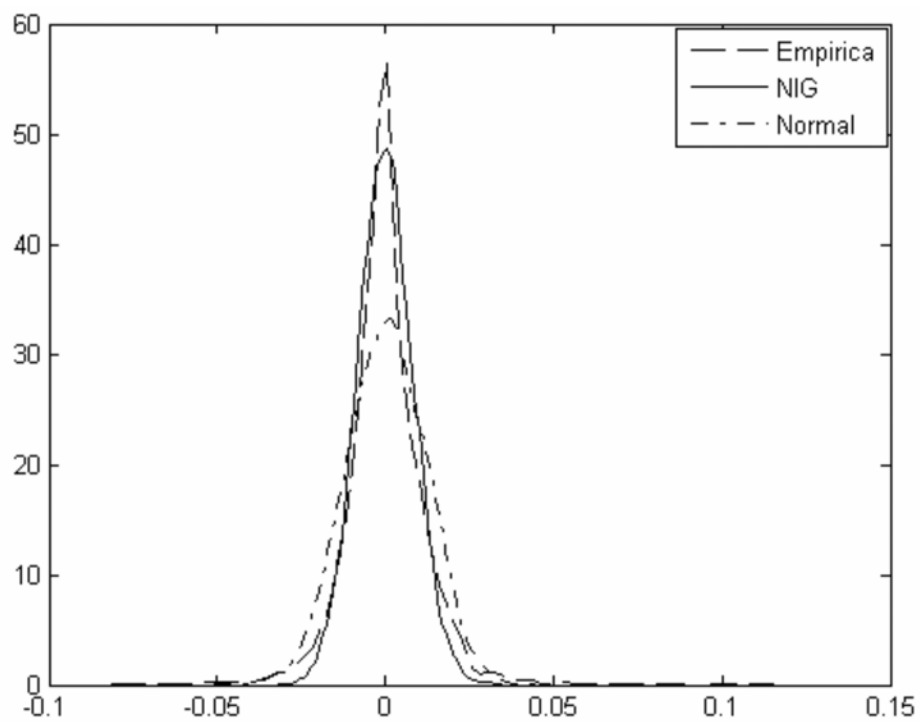
Gráfica CELV



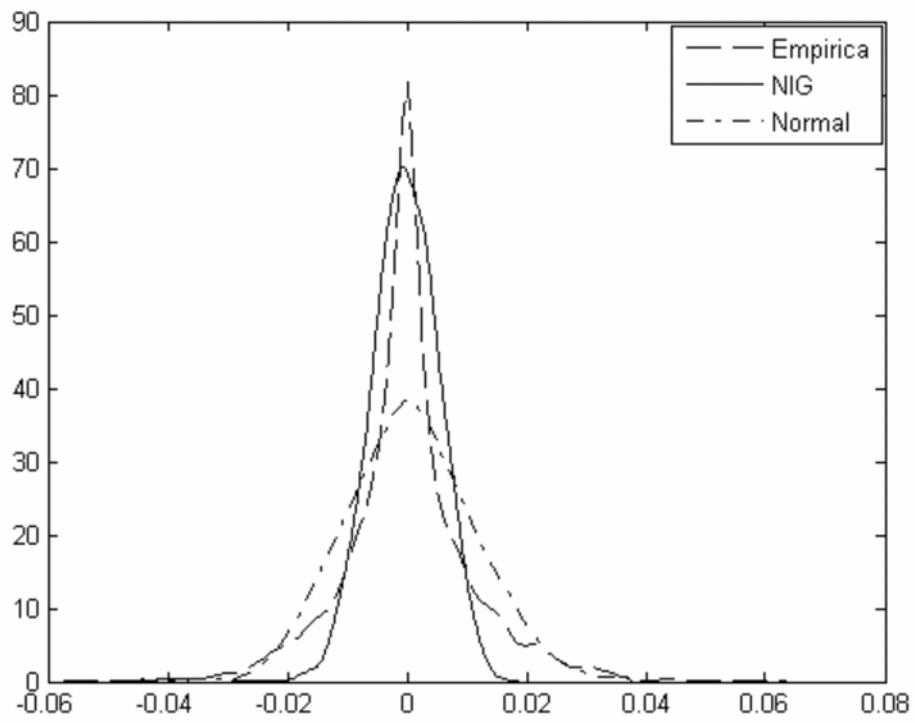
Gráfica CEMEX CPO



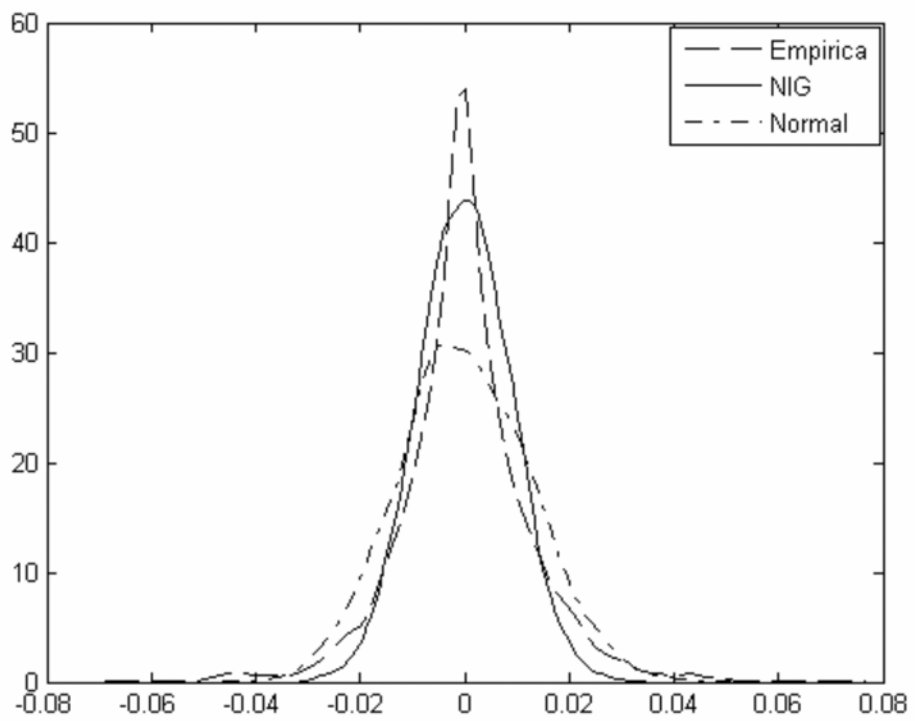
Gráfica CIEB



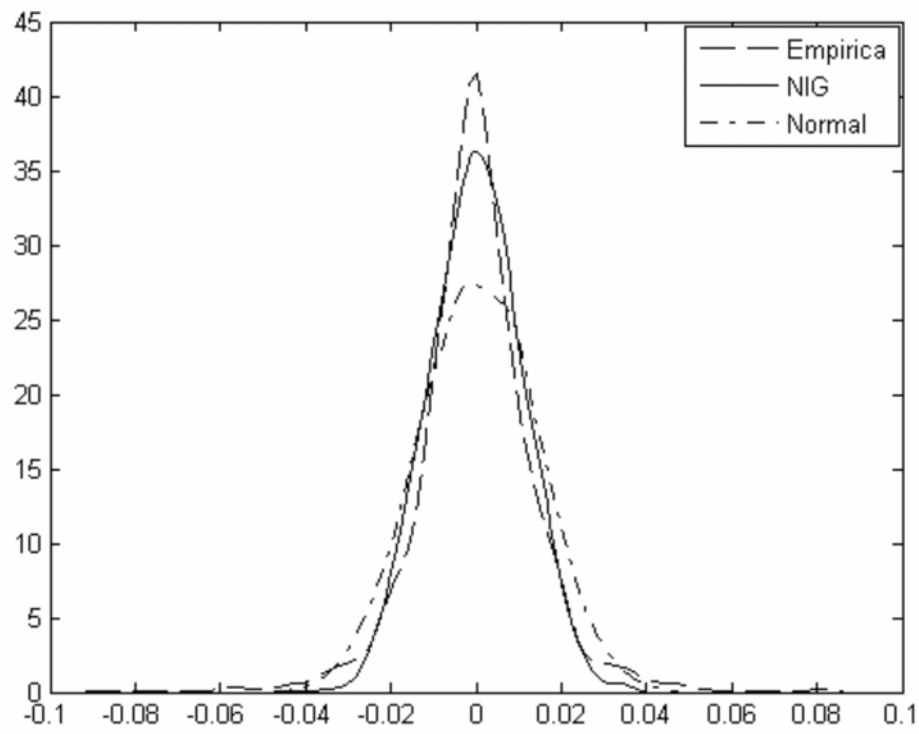
Gráfica COMERCI UBC



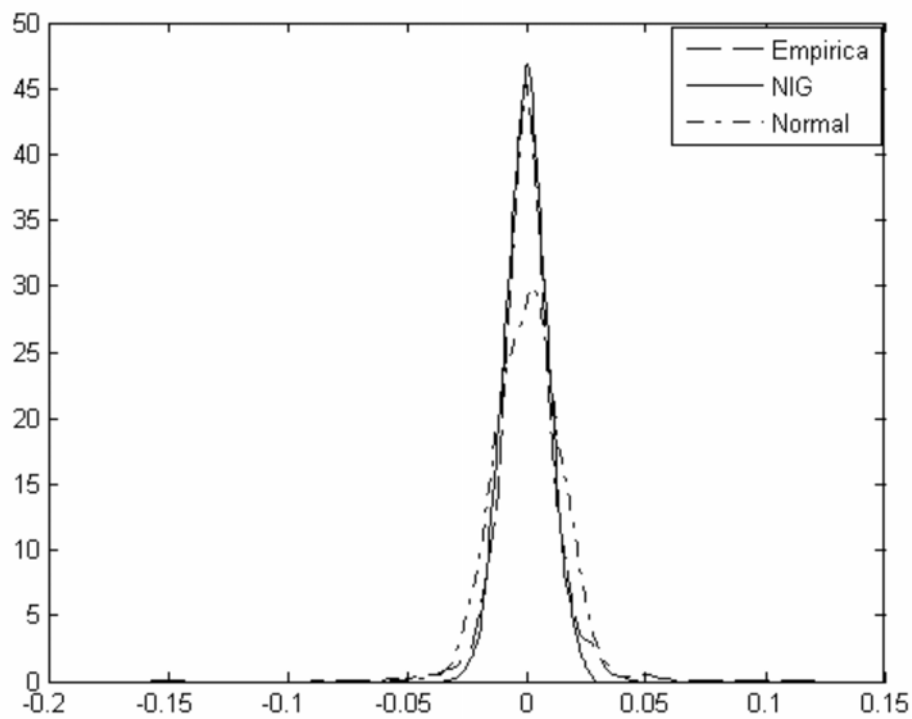
Gráfica CONTAL



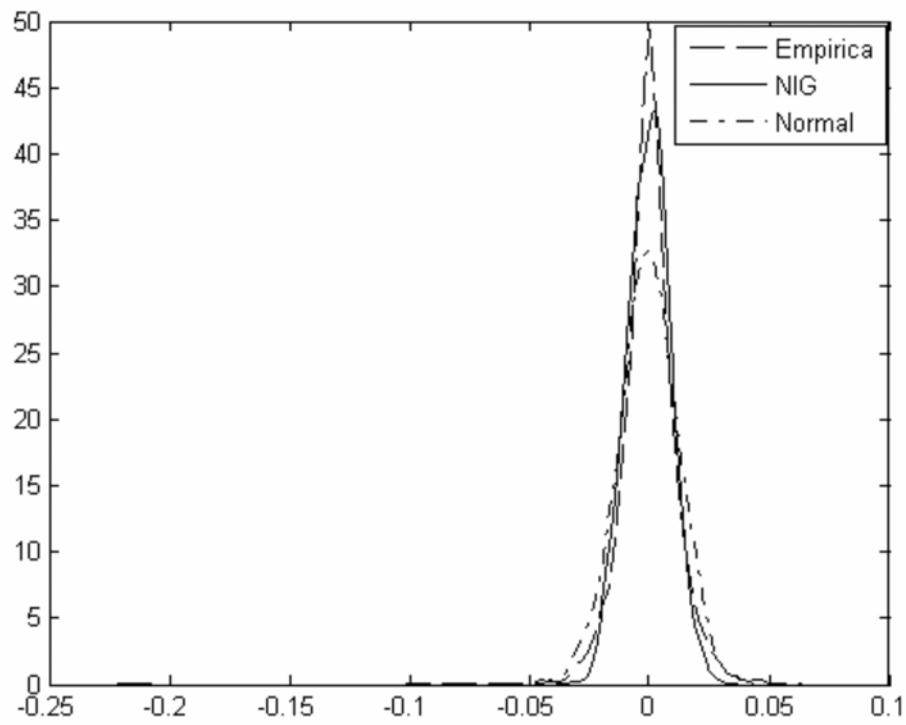
Gráfica DESC B



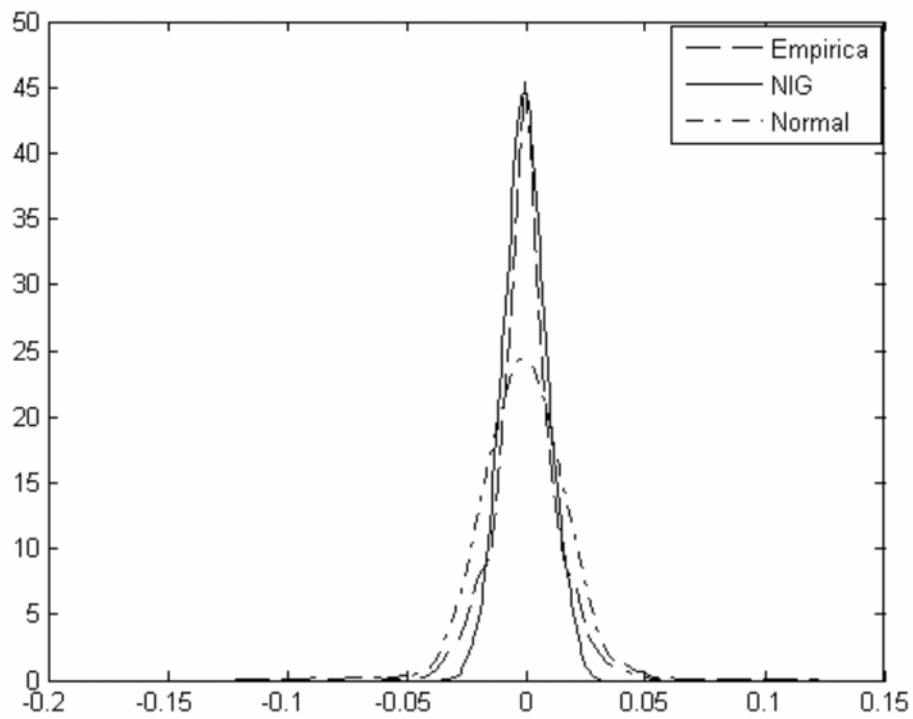
Gráfica ELEKTRA



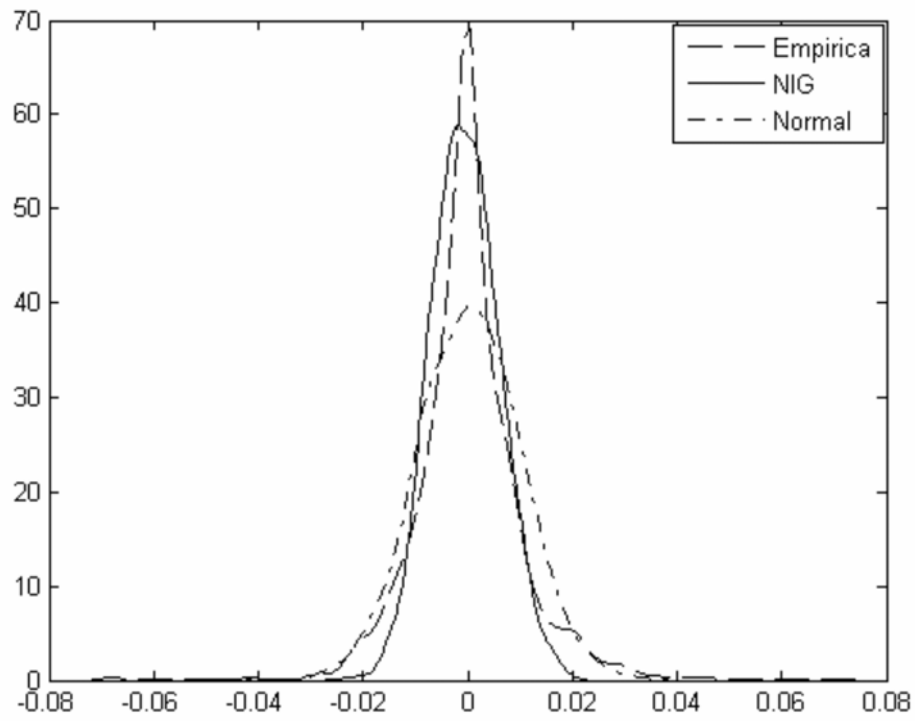
Gráfica FEMSA UBD



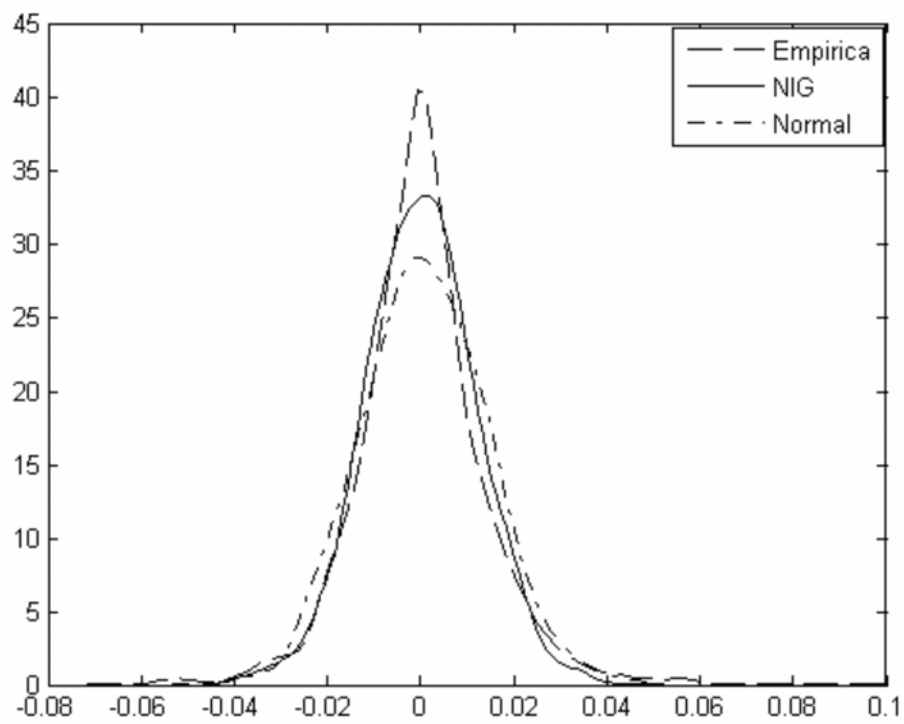
Gráfica GCARSO A1



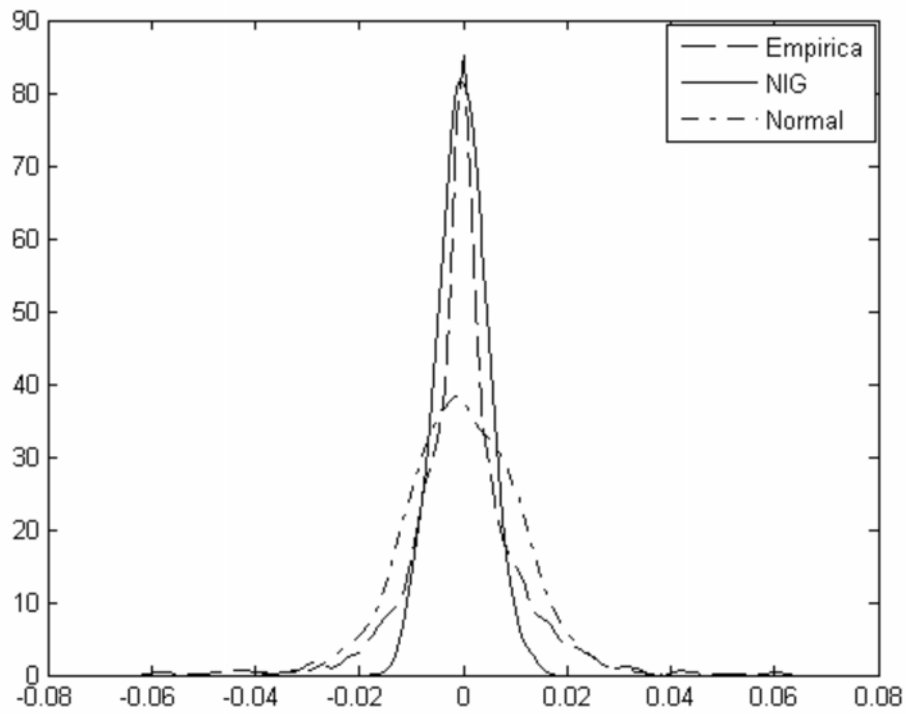
Gráfica GEOB



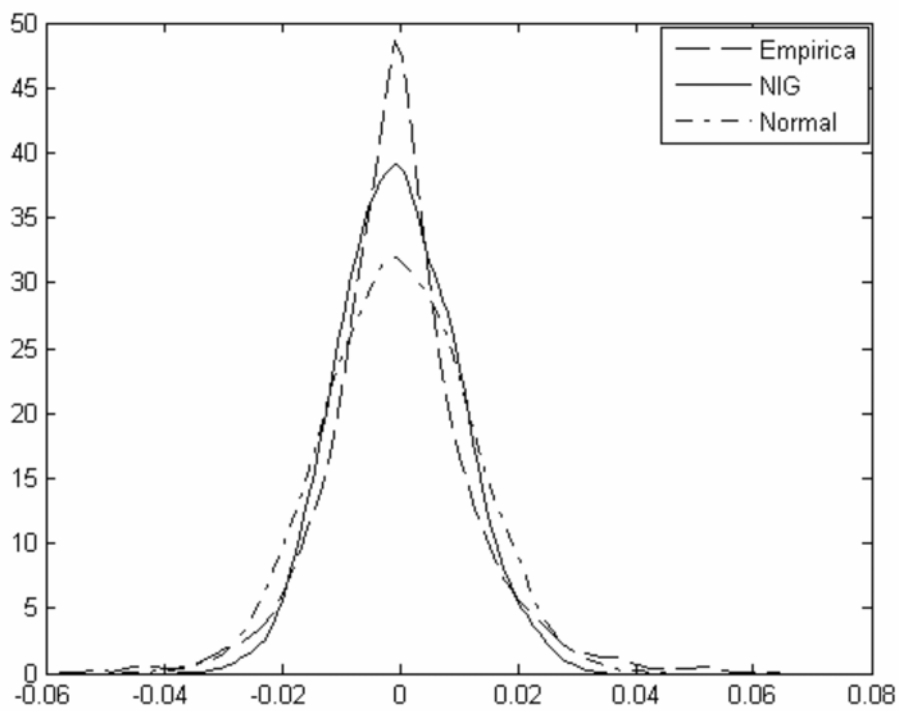
Gráfica GFINBUR



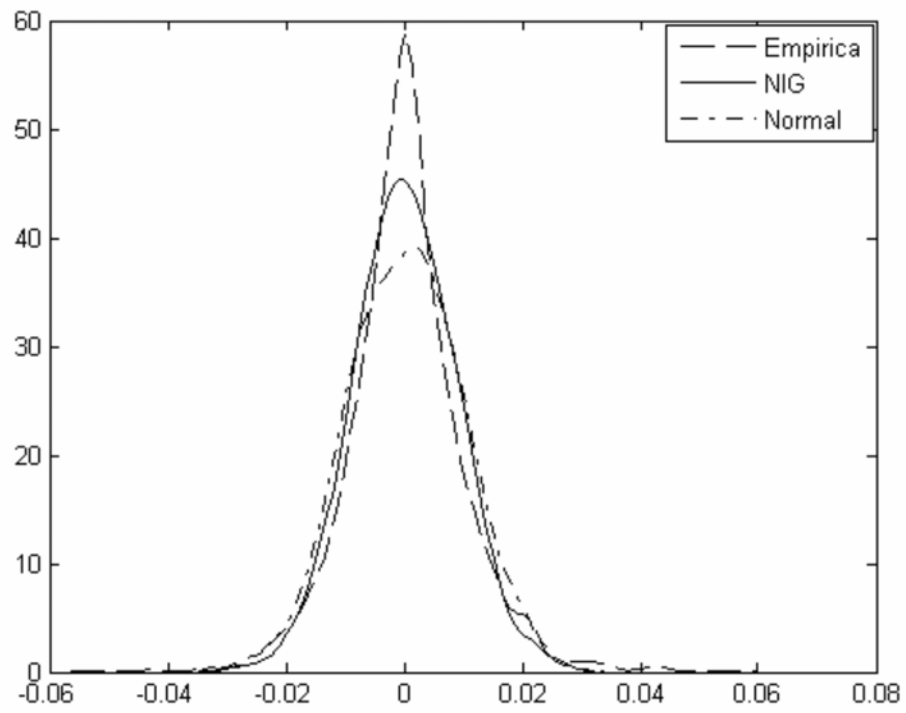
Gráfica GFNORTE



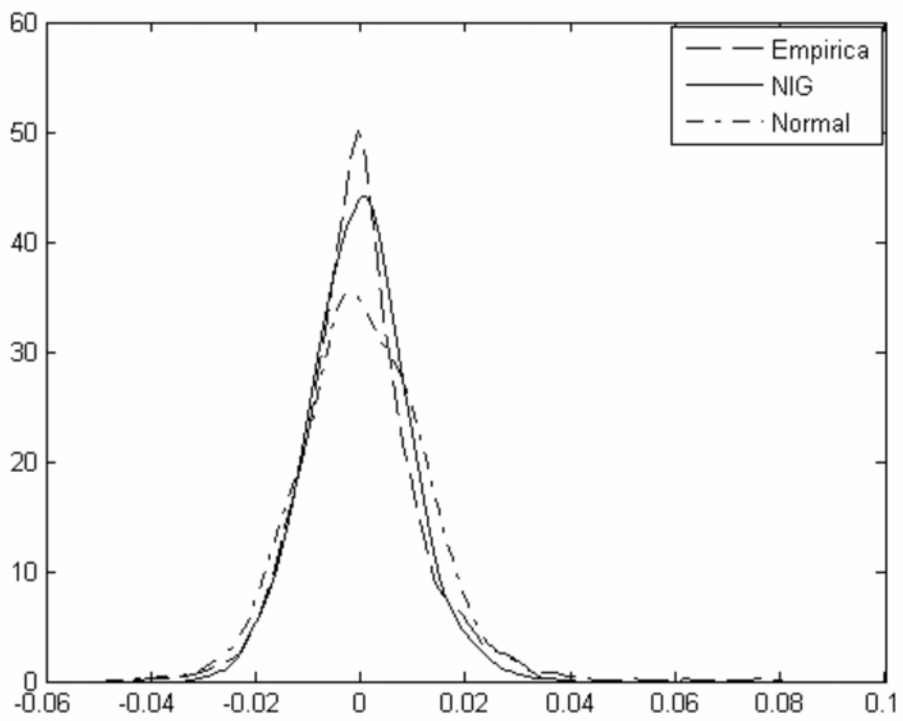
Gráfica GISSA B



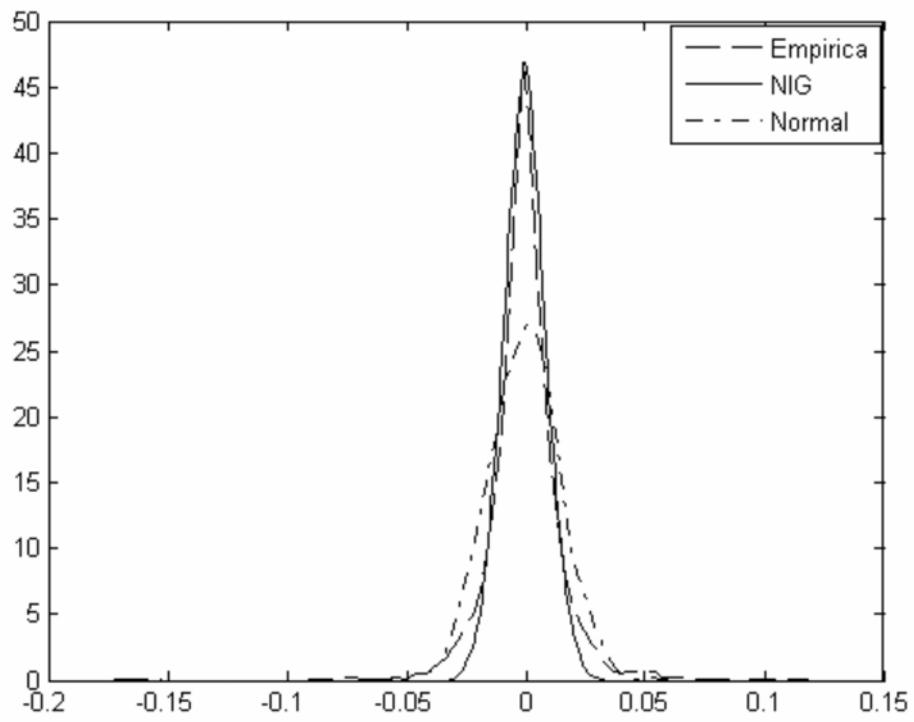
Gráfica GMEXICO B



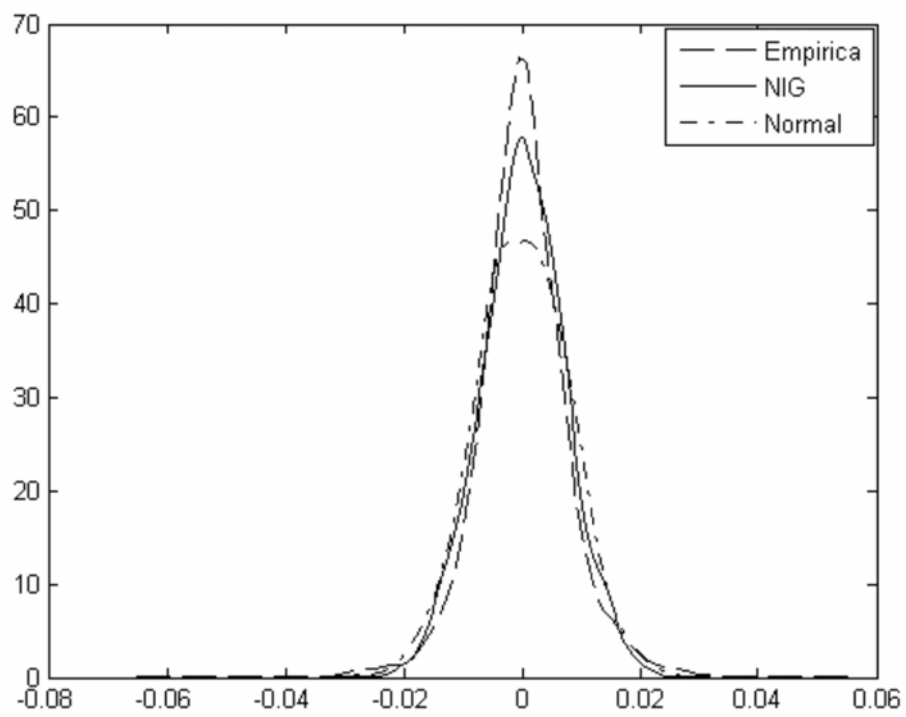
Gráfica GMODELO



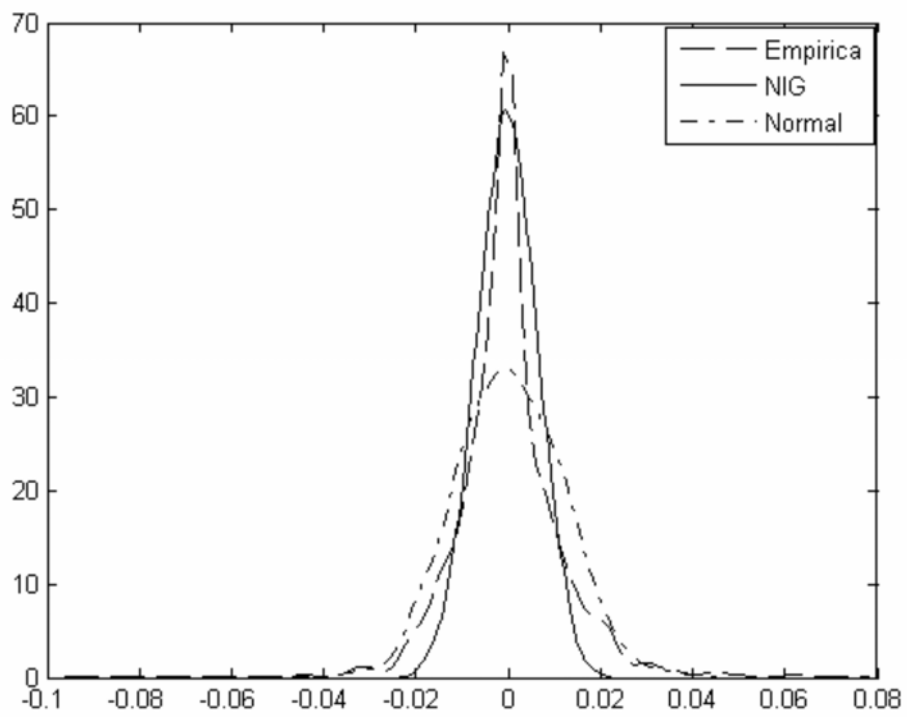
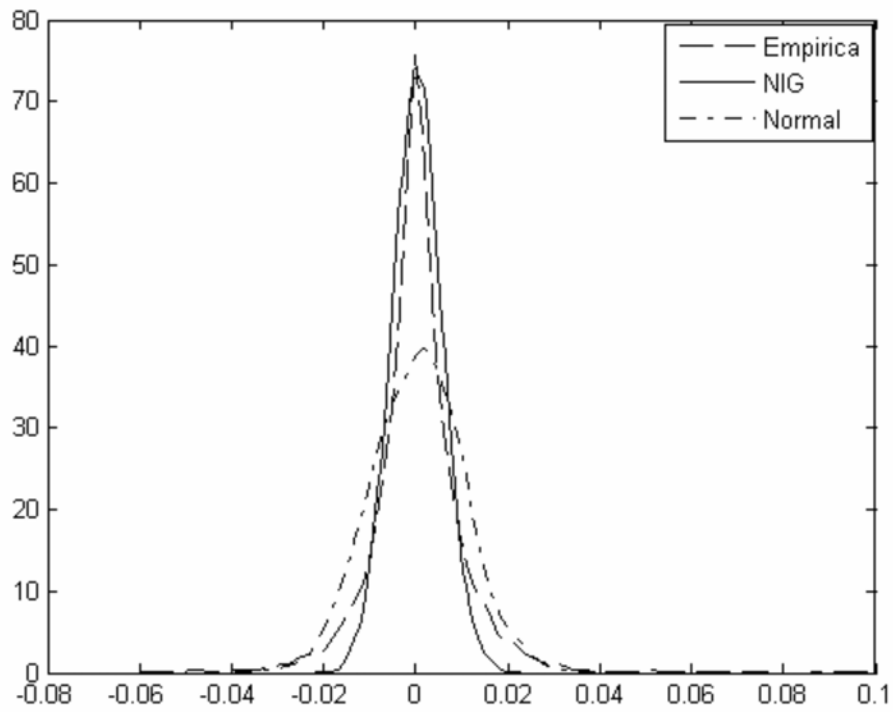
Gráfica GSANBOR B

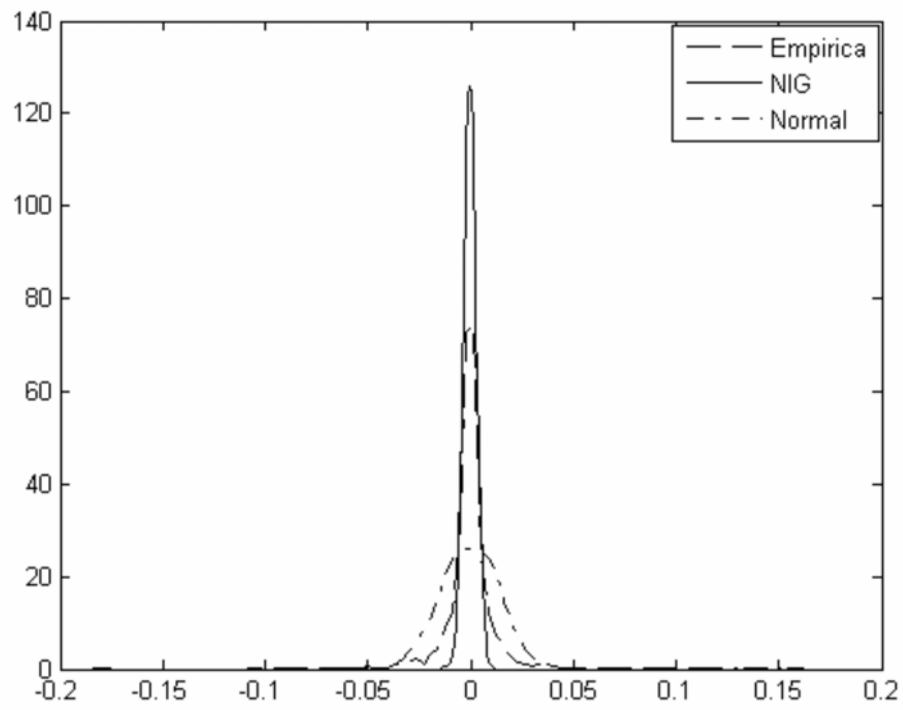


Gráfica ICA

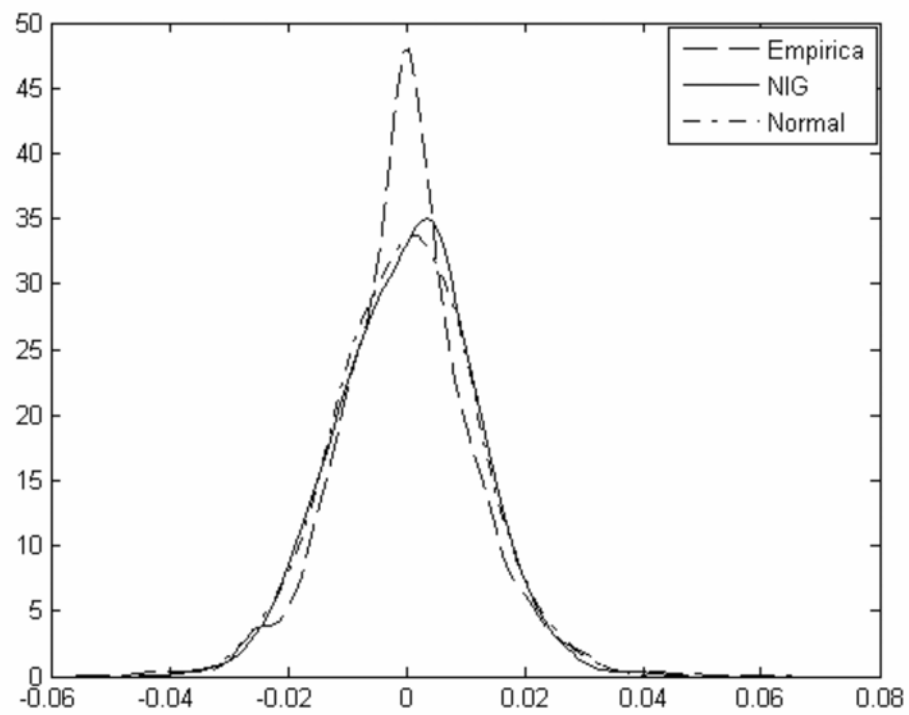


Gráfica IPC

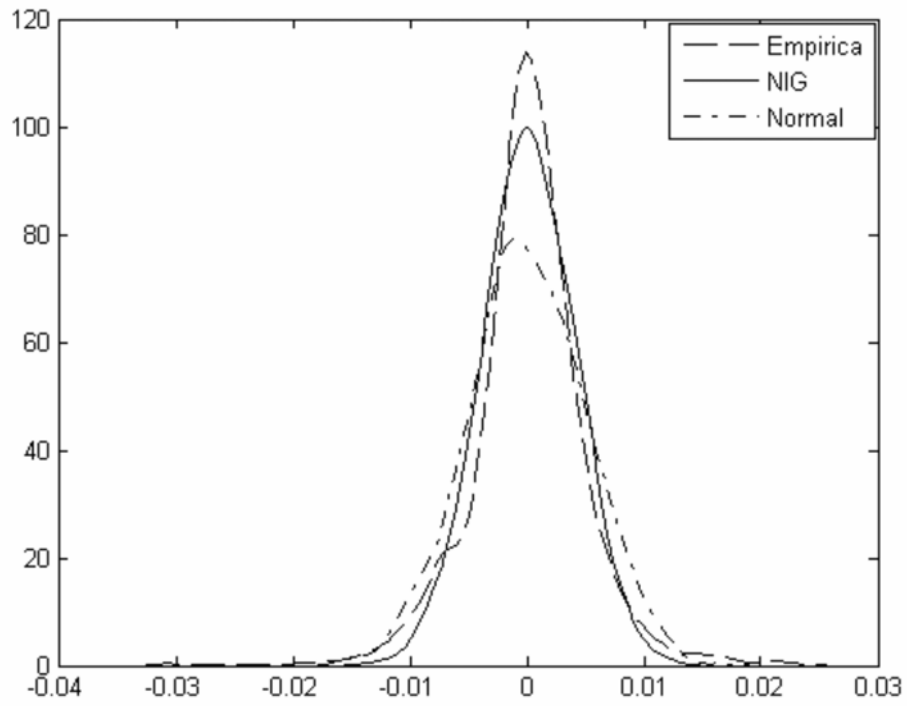




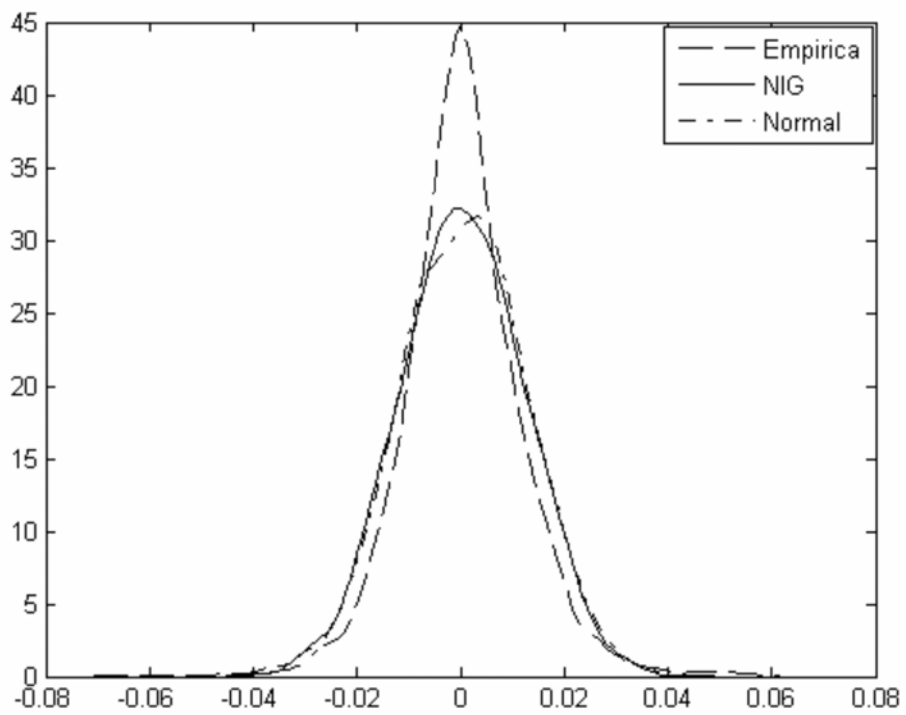
Gráfica SAVIA A



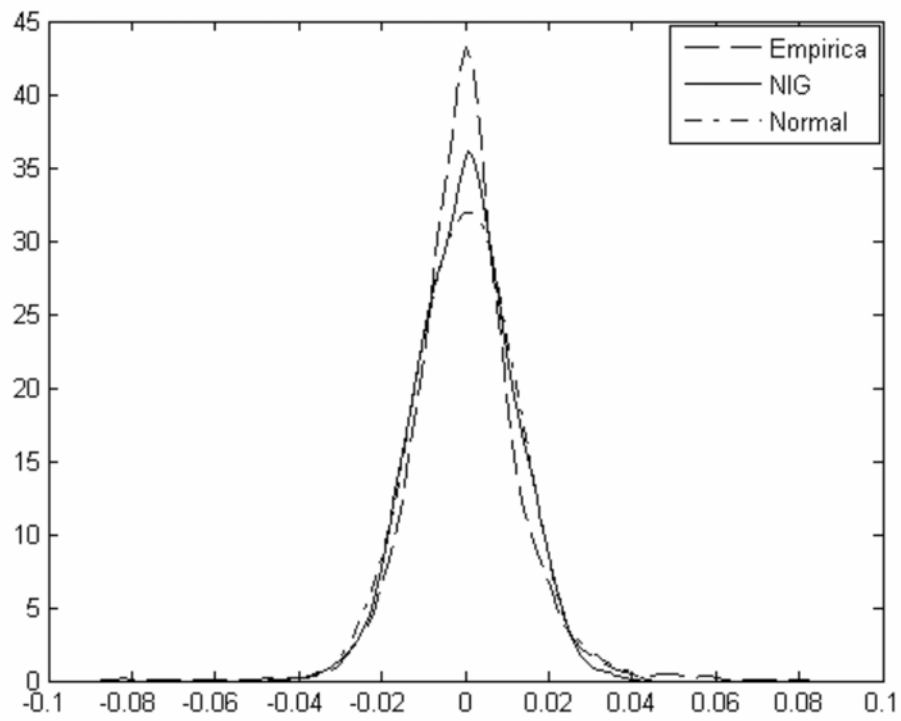
Gráfica SORIANA B



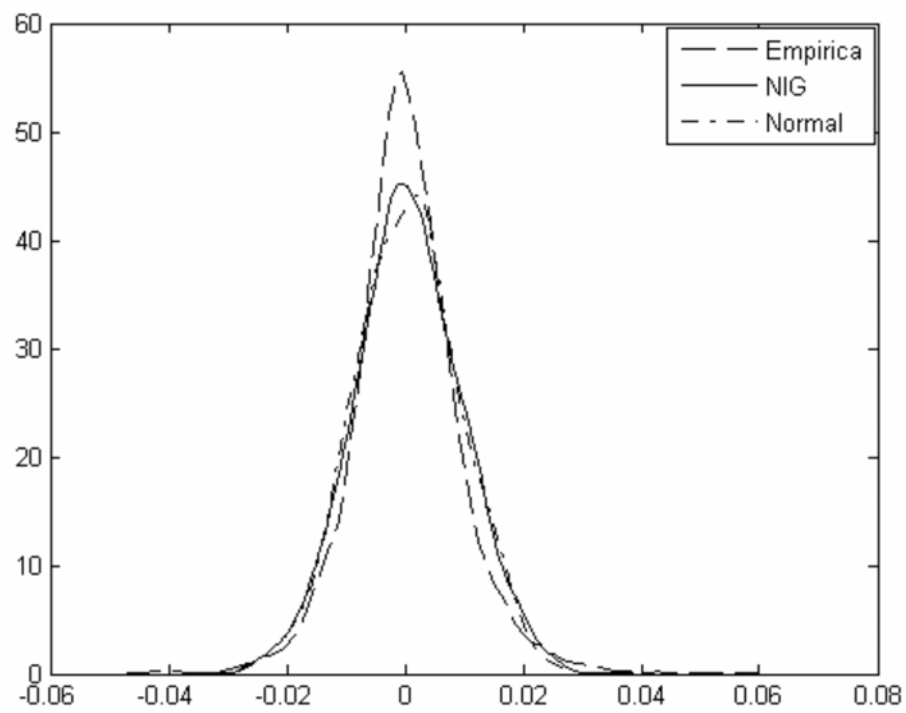
Gráfica SP500



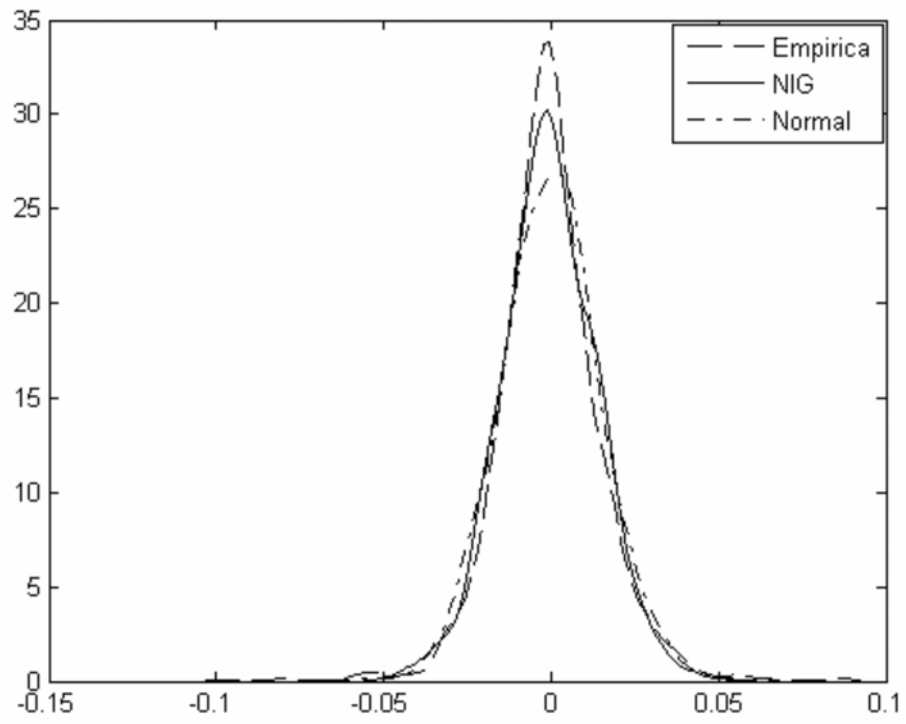
Gráfica TELECOM A



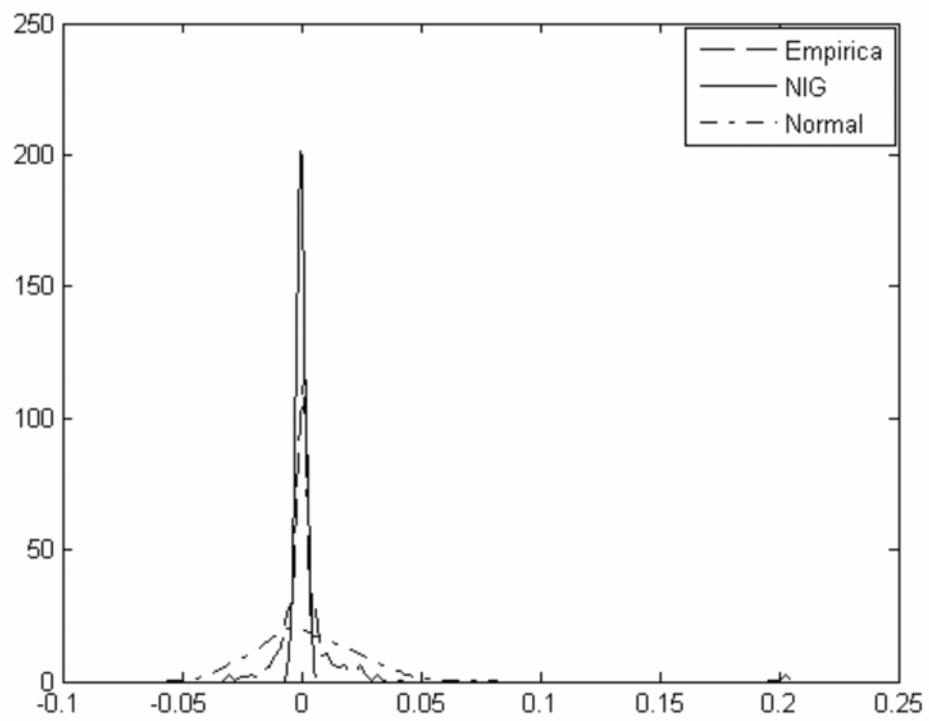
Gráfica TELEVIS A



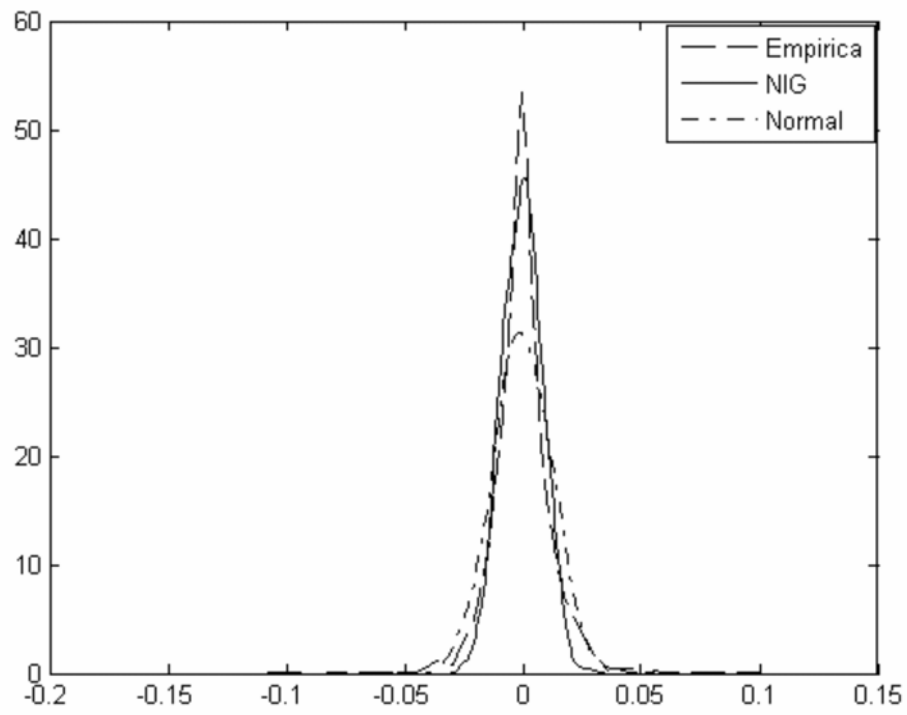
Gráfica TELMEX L



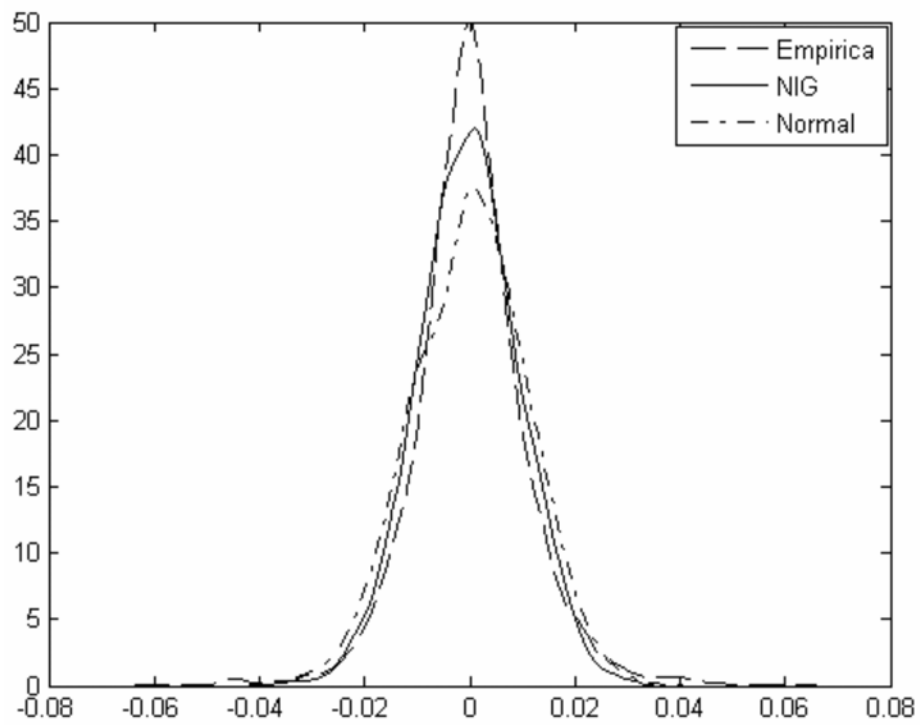
Gráfica TVAZTECA



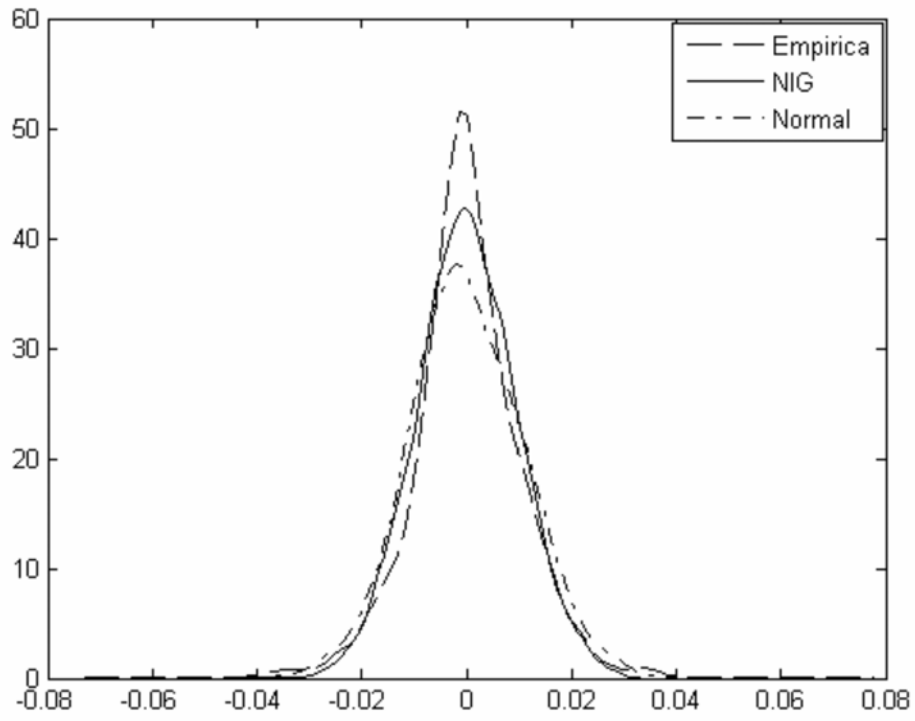
Gráfica USCOM B1



Gráfica VITRO A



Gráfica WALMEX C



Gráfica WALMEX V