



**EDITORIAL
DIGITAL**
TECNOLÓGICO DE MONTERREY

SISTEMAS DE CONTROL EN TIEMPO CONTINUO Y DISCRETO



HUGO GUSTAVO
GONZÁLEZ HERNÁNDEZ

©Editorial Digital Tecnológico de Monterrey



Primera edición

De venta en: Amazon Kindle, Apple Books, Google Books y Amazon.

Fragmento editado, diseñado, publicado y distribuido por el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey.

Se prohíbe la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio sin previo y expreso consentimiento por escrito del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey.

Ave. Eugenio Garza Sada 2501 Sur Col.

Tecnológico C.P. 64849 |

Monterrey, Nuevo León | México.



Acerca de este eBook



SISTEMAS DE CONTROL EN TIEMPO CONTINUO Y DISCRETO

-

HUGO GUSTAVO GONZÁLEZ HERNÁNDEZ

-

D.R. © Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, México 2013.

El Tecnológico de Monterrey presenta su primera colección de eBooks de texto para programas de nivel preparatoria, profesional y posgrado. En cada título, nuestros autores integran conocimientos y habilidades, utilizando diversas tecnologías de apoyo al aprendizaje. El objetivo principal de este sello editorial es el de divulgar el conocimiento y experiencia didáctica de los profesores del Tecnológico de Monterrey a través del uso innovador de la tecnología. Asimismo, apunta a contribuir a la creación de un modelo de publicación que integre en el formato eBook, de manera creativa, las múltiples posibilidades que ofrecen las tecnologías digitales. Con su nueva Editorial Digital, el Tecnológico de Monterrey confirma su vocación emprendedora y su compromiso con la innovación educativa y tecnológica en beneficio del aprendizaje de los estudiantes.

www.ebookstec.com

ebookstec@itesm.mx

Acerca del autor

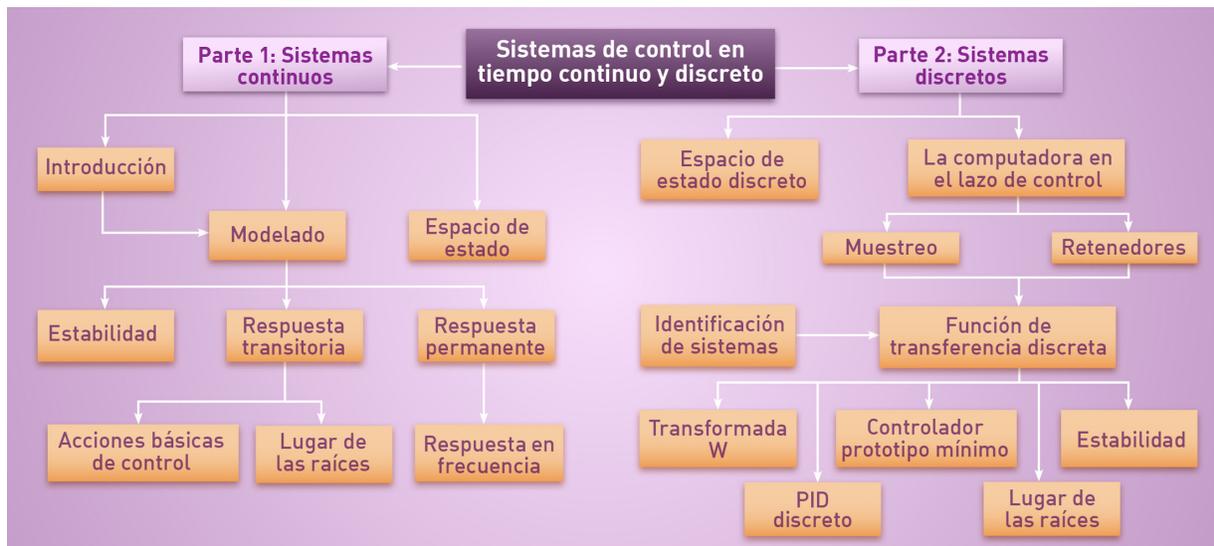
Profesor del Tecnológico de Monterrey, Campus Puebla desde febrero de 2006. Es director del departamento de Electrónica y Ciencias Básicas. Ha tenido a su cargo también la dirección de los departamentos de Ingeniería Mecánica e Industrial, Ingeniería Mecánica y Electrónica y fue director de la carrera de Ingeniería Mecatrónica.

Su labor docente se ha concentrado, desde 1989 hasta la fecha, en el área de sistemas de control, robótica, visión por computadora y matemáticas tanto a nivel licenciatura como en posgrado. Es egresado de la Universidad La Salle de IME, en Noviembre de 1991. Obtuvo el grado de Maestro en ciencias en Control Automático por el CINVESTAV-IPN en 1995. En 2002 obtuvo el grado de Doctor en Ciencias en Mecatrónica también por CINVESTAV-IPN.

Ha sido profesor en la Universidad La Salle en la Ciudad de México, en el CICESE donde hizo una estancia postdoctoral, en al BUAP y en el Tecnológico de Monterrey, Campus Puebla. Fue miembro del Sistema Nacional de Investigadores (SNI) de 1999-2002. Ha publicado y es revisor de artículos para revistas y congresos de la IEEE, IFAC y IASTED. Es miembro de diversas sociedades científicas.



Mapa de contenidos



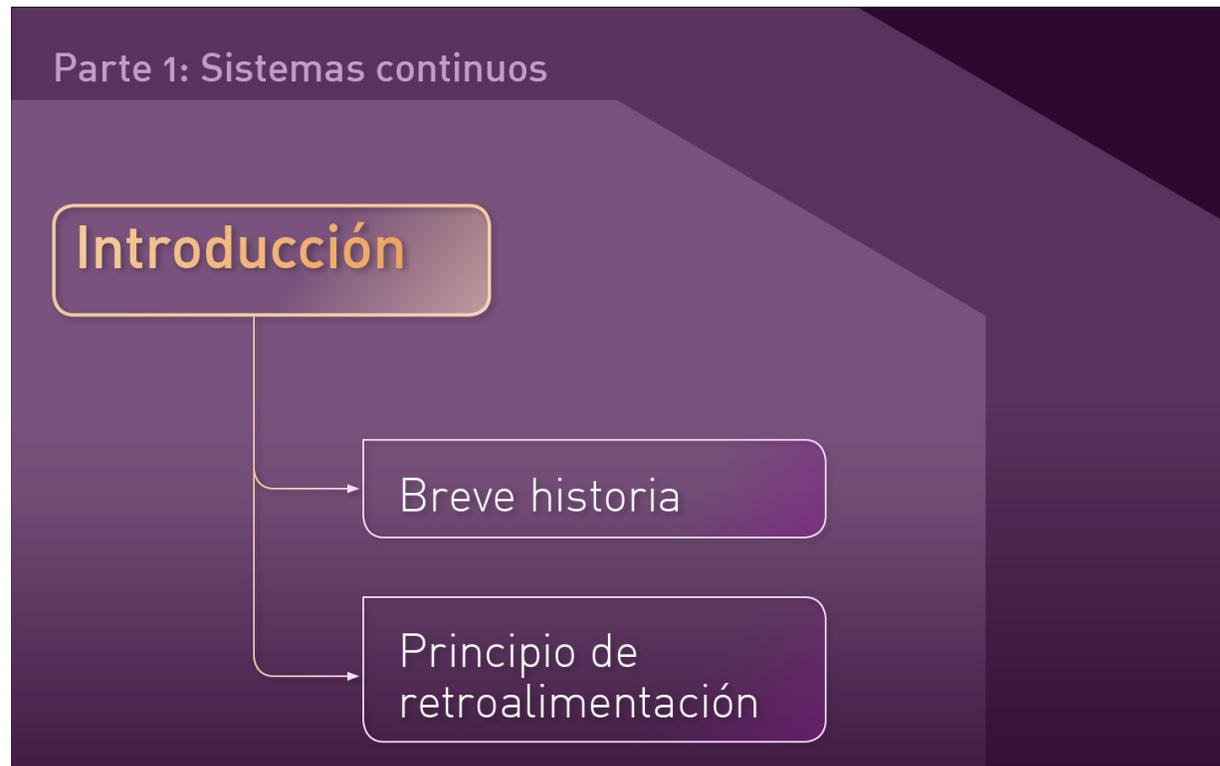
Introducción del eBook

El libro electrónico que se presenta es un compendio sobre la actividad docente a través de los años que el autor lleva impartiendo las materias referentes a control automático. El autor ha plasmado de una manera sencilla los conceptos fundamentales de ingeniería de control, a través de ideas claras y aprovechando la interactividad que ofrece esta versión electrónica. Se complementa con actividades relacionadas con el ejercicio profesional de un ingeniero.

Una ventaja de esta propuesta de eBook es el poder contar con un solo libro de texto, que contemple los temarios de las materias de Ingeniería de control y Control computarizado, utilizando la misma notación y misma metodología para estas materias que no siempre son muy populares.



1. Introducción a los sistemas continuos



Un **sistema de control** es un conjunto de elementos interconectados que trabajan para un mismo fin. Puede ser tan sencillo como regular la temperatura en una pecera de peces tropicales o tan complejo como hacer que camine un robot bípedo.

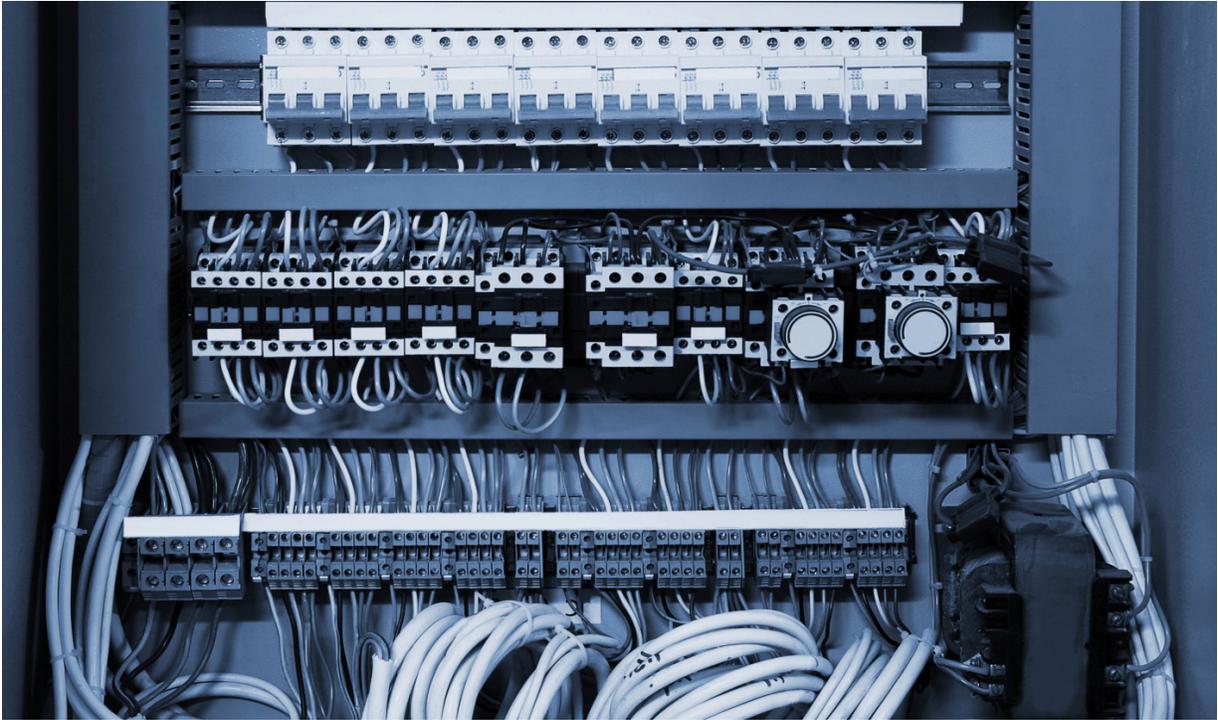
A través de los años, la ingeniería de control ha sido un factor importante para el desarrollo de la tecnología. Siempre que se necesite ajustar una variable física a un valor específico, se está realizando una acción de control. En la vida cotidiana podemos encontrar ejemplos, como el templar la temperatura del agua de la regadera para bañarnos o el simple hecho de caminar. En todos estos procesos existe un componente importante, el control.

En general, un sistema de control es parte de un sistema más grande, particularmente en sistemas de producción en alguna planta industrial. Son muy utilizados cada vez que se requiere una salida específica de una máquina, un proceso o un sistema biológico o químico.

Por esta razón, no es raro encontrar varios sistemas de control formando parte de un proceso de producción o dentro de un sólo dispositivo, dependiendo de la necesidad que se tenga.

Los sistemas de control pueden considerar retroalimentación o no, podemos pensar en la retroalimentación como información que regresa al lugar donde se originó. Al ser información, debe contener algo nuevo, como cuando el alumno pregunta al profesor y éste se da cuenta que ha transmitido de manera correcta/incorrecta una idea. Otro ejemplo es la utilización de este libro, en los ejercicios, el alumno puede tener información sobre su avance. Esto es retroalimentación.

La diferencia entre cualquier sistema de control y uno utilizado para ingeniería (ingeniería de control) es que la retroalimentación y la acción correctiva con respecto a esta información se busca que se realice de manera autónoma, es decir, por el mismo dispositivo, sin tener que recurrir a un humano que efectúe manualmente la corrección.



1.1 Breve historia del control automático

Las raíces del control automático están ligadas estrechamente a las necesidades del hombre, desde los cavernícolas hasta los complejos desarrollos tecnológicos de nuestros días.

Tal vez el primer registro que se tenga documentado de un sistema de control es la clepsidra, usada por los egipcios y mejorada sustancialmente por Platón y Aristóteles. La clepsidra es un reloj que utiliza agua, esto a raíz de la necesidad de medir el tiempo cuando no había sol (relojes solares). Platón utilizó esta idea para desarrollar un despertador para que se levantaran sus alumnos.

La idea era relativamente simple: se tenían dos vasijas, una de ellas arriba y a un lado de la otra, con un pequeño orificio que permitiera salir el agua que se acumulaba en la otra. En la vasija de abajo, se colocaban piezas que flotaban y, a un lado de esta otra, una vasija de cobre. Al subir el agua en la vasija de abajo, los flotadores subían también y finalmente se desbordaban agua y flotadores sobre la vasija de cobre ocasionando un estrépito, suficiente como para despertar a sus alumnos.

Esta estrategia de control consistía en “prender y apagar”; se prende cuando cargamos el agua en la primera vasija y se apaga cuando se desborda la segunda. Este ejemplo sólo toma una secuencia de prendido y apagado; si reutilizamos esta estrategia en un ciclo, tenemos lo que llamamos control on-off (prendido-apagado), el ejemplo más representativo de esta técnica es el termostato.

El termostato consta de un par de láminas de metal con diferente coeficiente de dilatación térmico. En presencia de calor, una de las láminas se dilata más que la otra y esto se puede aprovechar para cerrar o abrir un circuito eléctrico.

Este principio se sigue utilizando actualmente, por ejemplo, en equipos de aire acondicionado; pero, más aún, en los calentadores caseros, en los cuales se puede ajustar la temperatura deseada (de referencia) y una vez que se alcanza esta temperatura, se desactiva la fuente de calor que, por cierto, es una resistencia de bajo ohmaje, como una plancha.

LIGAS DE INTERÉS

[IEEE Control Systems Magazine](#), edición especial historia del control (abril de 2002).

Esta edición especial contiene artículos muy interesantes y detallados sobre la historia del control automático.

Los ejemplos de la utilización de esta estrategia de control son muchos pero mejor avancemos en el tiempo.



Como en muchas otras disciplinas, el desarrollo de la ingeniería de control fue acelerado considerablemente por la segunda guerra mundial.

En esta etapa, la necesidad de tecnología para comunicarse de forma clara era una prioridad. En aquel entonces (como ahora), el que tenía la mejor tecnología era el que llevaba mayor ventaja.

En este punto es importante comentar que, aunque no se tenían demasiados avances en electrónica, la teoría de control había avanzado gracias a las matemáticas. Se pudo utilizar el concepto de función de transferencia, una **transformada de Laplace** que encierra el comportamiento de un sistema que luego puede ser conceptualizado como un bloque.



Tal vez el más importante desarrollo haya sido el poder utilizar la función de transferencia como un elemento en un “lazo” de retroalimentación. Este concepto, aunado con el desarrollo de las computadoras analógicas fue el que realmente disparó la ingeniería de control.

Con el desarrollo de la electrónica, las estrategias de control también fueron evolucionando, aprovechando los nuevos dispositivos que permitían realizar operaciones matemáticas más complejas. Así fue como surgieron las primeras computadoras analógicas.





La historia del control está entrelazada con el desarrollo de las primeras computadoras analógicas. La primera registrada fue el analizador diferencial del MIT, éste se utilizaba para resolver ecuaciones diferenciales electrónicamente. La tecnología del **amplificador operacional**, ahora utilizado casi en cualquier dispositivo electrónico, fue un parte aguas en la historia del control como lo conocemos hoy en día.

Alrededor de los años 50 la simulación de los misiles guiados forzó los límites tanto de la computación analógica como de la digital. Las computadoras digitales no eran lo suficientemente rápidas para poder instrumentar sistemas de control en tiempo real. Es aquí en donde las computadoras analógicas encontraron una fuerte relación con la ingeniería de control.

Las computadoras analógicas permitieron no sólo la simulación de sistemas reales, gracias a su capacidad de resolver ecuaciones diferenciales, sino también el desarrollo de mejores diseños de sistemas de control.

Una de las más populares **estrategias de control**, el **PID**, fue desarrollado en esa década gracias a este tipo de computadoras. Durante varias décadas, los principios de control automático fueron transmitidos a muchos estudiantes, entre ellos, al autor de este libro, utilizando estos dispositivos. Muchas estrategias de control también

fueron desarrolladas utilizándolos.

La **función de transferencia** de un sistema puede ser obtenida solamente si el sistema es lineal, es decir, si el **modelo matemático** del sistema es una ecuación diferencial lineal. Esto representa un problema si el sistema es no lineal. Respondiendo a esta necesidad, surge la llamada teoría de control moderna.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

La teoría de control moderna involucra la utilización de la ecuación de estado del sistema, que no es más que la escritura de las ecuaciones dinámicas del sistema con respecto al tiempo en una forma determinada.

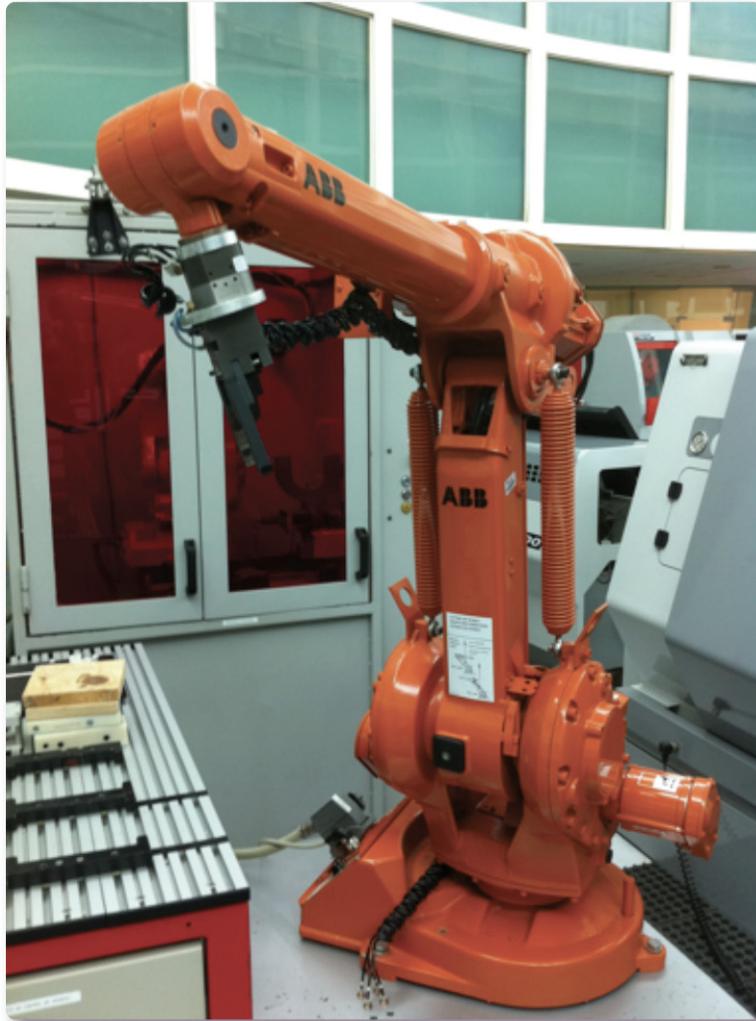
Con las **ecuaciones de estado** se desarrollaron muchas otras técnicas de control pero, sobre todo, fue posible analizar y controlar sistemas de naturaleza no lineal como por ejemplo robots, y otro tipo de sistemas.

Algunas técnicas de control desarrolladas son: control adaptable, control robusto, control óptimo, control por modos deslizantes, control por invariancia e inmersión, control inteligente, y muchas otras.

Gracias a estas técnicas se han podido resolver problemas más complejos que aparecen en ingeniería y en otras disciplinas. En la actualidad tenemos **computadoras digitales** suficientemente rápidas que pueden realizar cálculos en tiempo real y así es posible instrumentar estas técnicas y otras más.

En este tema hemos visto a grandes rasgos una breve historia de cómo se ha desarrollado la teoría de control, siendo ésta una disciplina relativamente nueva que se ha apoyado no sólo de las matemáticas y la física sino que ha ido de la mano con los desarrollos tecnológicos para satisfacer nuestras necesidades.





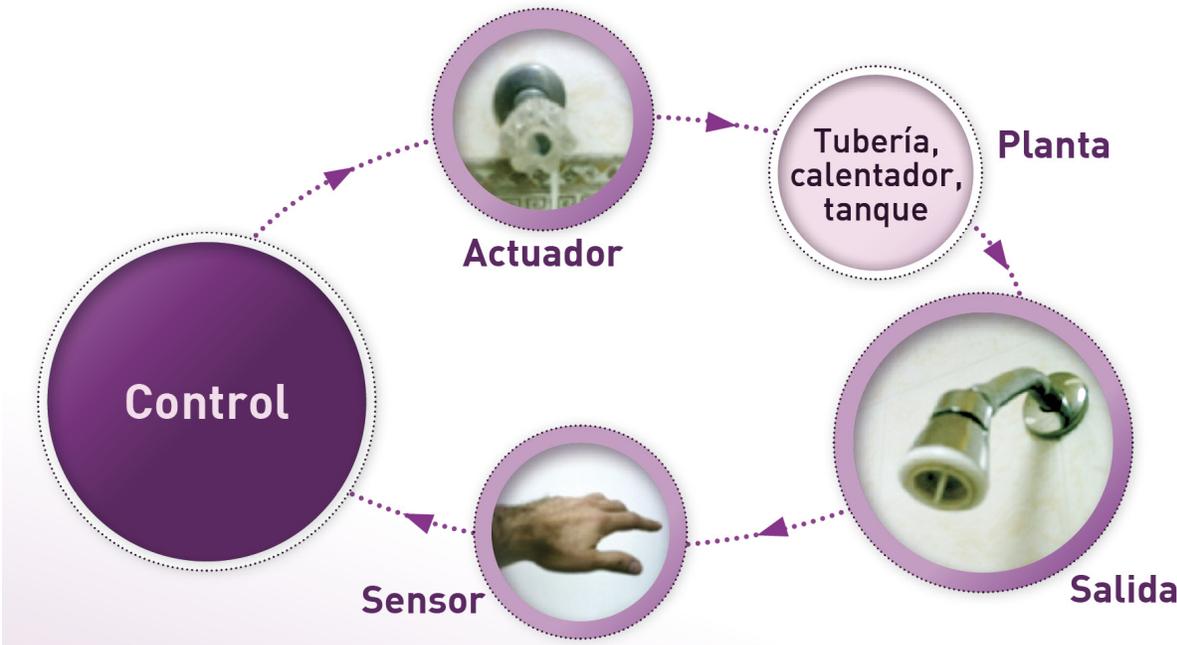
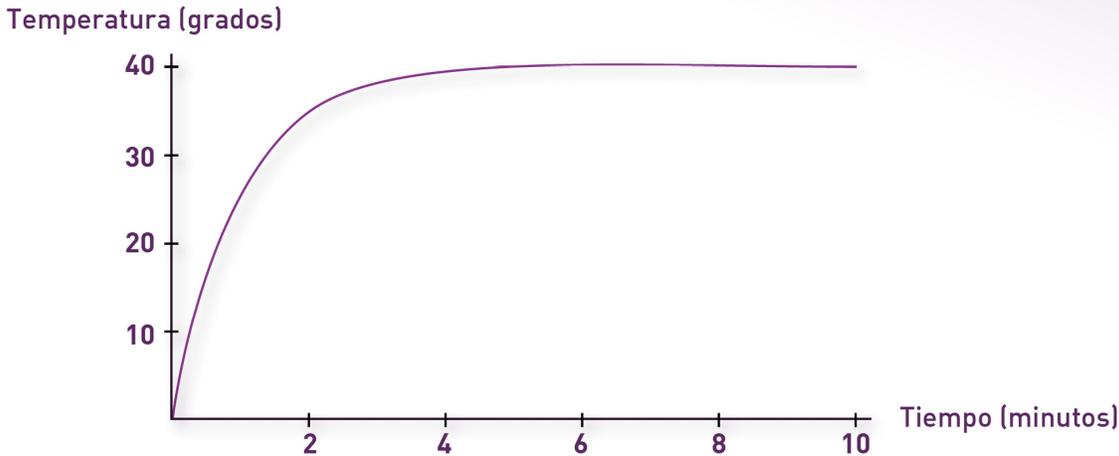
1.2 El principio de retroalimentación

Aunque hay personas que gustan de bañarse con agua fría, a muchos de nosotros no nos hacen entrar a la regadera si el agua no está a cierta temperatura. La temperatura de la regadera es un sistema de control en donde la referencia es precisamente esta temperatura a la que queremos que esté el agua para poder bañarnos a gusto. Podemos considerar que el sistema lo componen: el calentador, las tuberías y las válvulas de caliente/frío.

Cuando abrimos la llave del agua caliente, inicialmente el agua sale a una temperatura que consideramos “fría” (sobre todo en invierno). Si el calentador está encendido, tenemos que esperar un

tiempo para que el agua se caliente; este comportamiento es típico en muchos sistemas lineales. Si dejamos salir el agua (y la almacenamos para no desperdiciarla), ésta se irá calentando poco a poco hasta alcanzar una temperatura máxima. Si graficáramos la temperatura de salida del agua con respecto al tiempo, veríamos algo como esto.

Temperatura del agua de la regadora



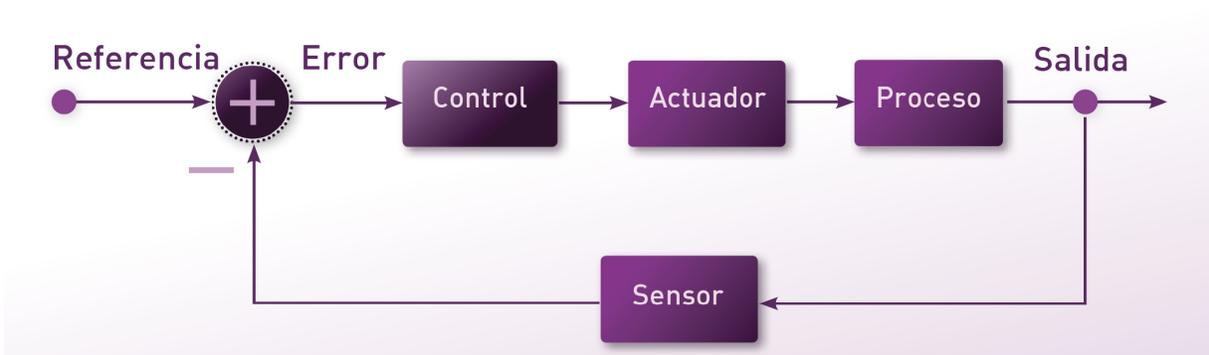
En general, lo que queremos es tener un nivel de temperatura, para eso lo que hacemos es abrir la llave del agua fría y meter la mano para sentir la temperatura del agua. Esperamos un momento más y después volvemos a sentirla, si el agua está a la temperatura deseada entonces dejamos el proceso y nos metemos a bañar. Si no volvemos a repetir: sentimos el agua, comparamos con la temperatura que deseamos y después abrimos o cerramos la llave del agua fría hasta que tengamos esta temperatura deseada.

Este proceso es precisamente lo que conocemos como un sistema de control. La mano funciona como un sensor, es la que se encarga de informarle al proceso el estado de la variable de salida. La información de temperatura es tomada por nuestro sistema nervioso y por medio de impulsos va a nuestro cerebro. Ahí se compara con la temperatura deseada: “está muy fría” o “está muy caliente”. Con base en esta comparación el cerebro toma una decisión. Esta decisión se envía a la otra mano que, junto con la llave del agua, realiza una acción de control: “abre más la llave del agua fría”.

Si modelamos este proceso de una forma gráfica, podríamos considerar una mano como el sensor, la otra mano como el actuador, y nuestro cerebro y sistema nervioso como un comparador (diferencia o resta) y un módulo de toma de decisiones. Este último módulo es precisamente el controlador. Al sistema compuesto por la regadera, calentador, tinaco, tubería, etc., lo llamaremos de ahora en adelante planta o proceso. A estos diagramas con retroalimentación se les conoce como sistemas de lazo cerrado.

En el siguiente capítulo veremos cómo podemos expresar lo que hay adentro de la planta y en capítulos posteriores veremos cómo diseñar acciones de control, es decir el bloque de control. La imagen muestra lo que conocemos como lazo de control con diagramas de bloque.

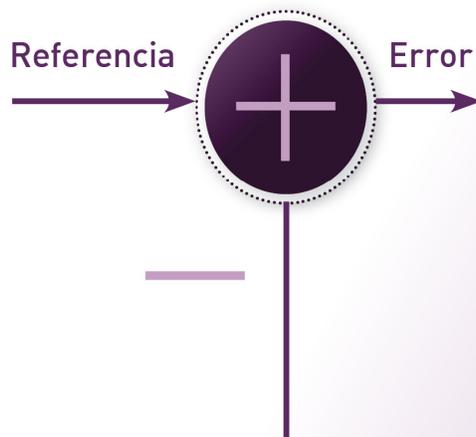
Lazo de control



Estos bloques tienen una estructura básica: contienen una entrada, una salida e información adentro acerca del procesamiento que se le aplica a la entrada para obtener dicha salida. En otro capítulo veremos que estos bloques pueden contener **funciones de transferencia**. Si sólo tenemos un bloque con una entrada y una salida, es decir, sin retroalimentación, entonces se le conoce como sistema de lazo abierto.

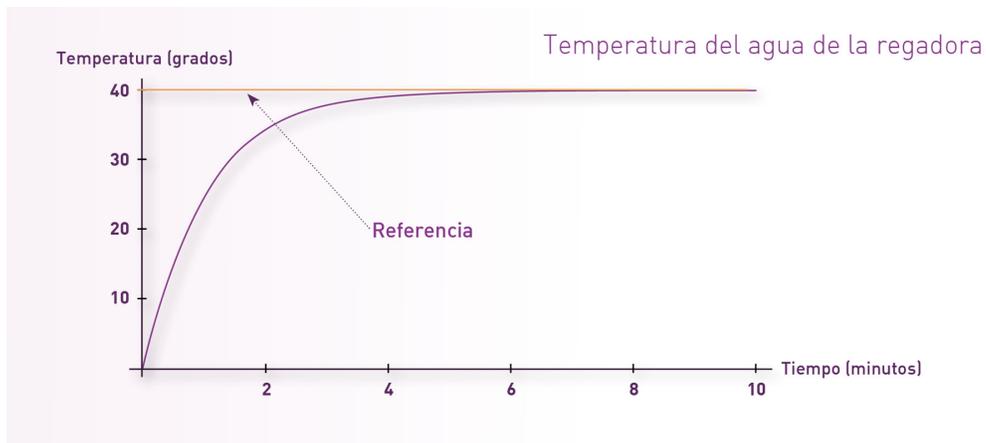


Otro punto importante dentro del diagrama es el punto de suma. Este elemento tiene la suma de la referencia más la entrada negada proporcional a la señal de salida. Esto es, realiza la comparación de la referencia contra el valor de la salida. El resultado de esta comparación es un error que servirá para tomar una decisión.



Es importante también aclarar que las flechas que unen los bloques y el punto de suma representan realmente alambres conduciendo una señal específica. Los bloques representan modelos matemáticos del proceso en cuestión. Estos modelos matemáticos pueden ser representados de diferentes maneras, uno de los más prácticos es la utilización de la función de transferencia, que es simplemente la transformada de Laplace de la **ecuación diferencial** que modela el sistema. Esto implica también que el bloque que contiene el control (elemento de toma de decisiones) es también una ecuación diferencial en el caso general.

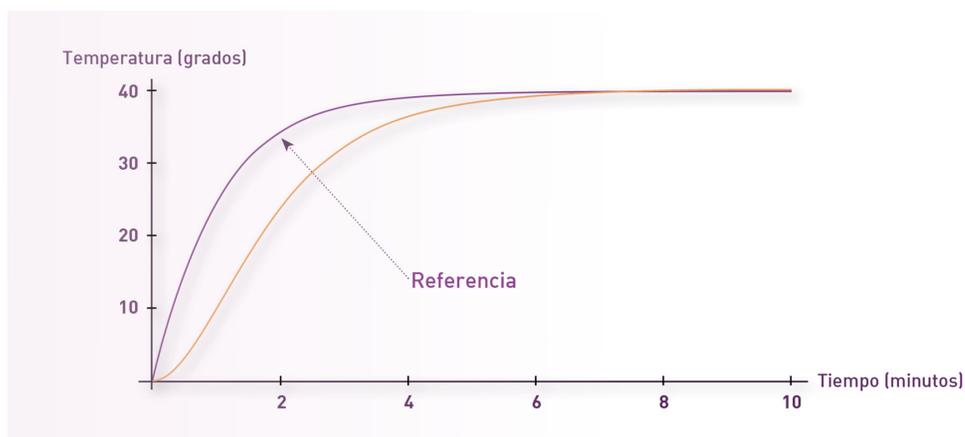
La retroalimentación permite entonces tomar decisiones con respecto al cambio en alguna variable de entrada (accesible) del proceso a fin de cambiar, a su vez el comportamiento de una variable de salida.



Es importante aquí aclarar que el objetivo de control es que la salida se acerque a la referencia tanto como sea posible, es decir, que el error tienda a cero conforme el tiempo avance. No todas las referencias son constantes, es posible que tengamos una referencia variable.

Cuando se tiene una referencia constante, el objetivo de control se llama **regulación**, si la referencia es variable se llama **seguimiento**.

Como puede inferirse de estos conceptos, lo que se requiere del sistema de control es que la salida llegue a la referencia en el menor tiempo posible y con un error que tienda a cero.



En este tema hemos visto cómo el principio de retroalimentación es una herramienta fundamental para poder diseñar sistemas de control, permite comparar la salida actual de un sistema con respecto a lo que se desea y así poder aplicar una corrección.

Conclusión del capítulo 1

Los sistemas de control han contribuido significativamente al desarrollo de la tecnología de automatización a lo largo de los años. A pesar de no ser una disciplina demasiado antigua, su crecimiento aumentó considerablemente desde la segunda guerra mundial. El advenimiento de las computadoras analógicas permitió la instrumentación de algunas técnicas de control con las que, con la llegada de las computadoras digitales y sobre todo con el aumento en la velocidad de procesamiento de estas computadoras, ha sido posible instrumentar algoritmos de control más complejos.

El principio de retroalimentación es una base importante para poder desarrollar sistemas de control, gracias a este mecanismo es posible lograr objetivos de control como regulación o seguimiento, que permiten forzar una variable de salida a tener un valor específico con respecto al tiempo. Se pueden utilizar diagramas de bloque para representar un proceso pero también para representar un sistema de control utilizando el mecanismo de retroalimentación.

Actividades del capítulo 1

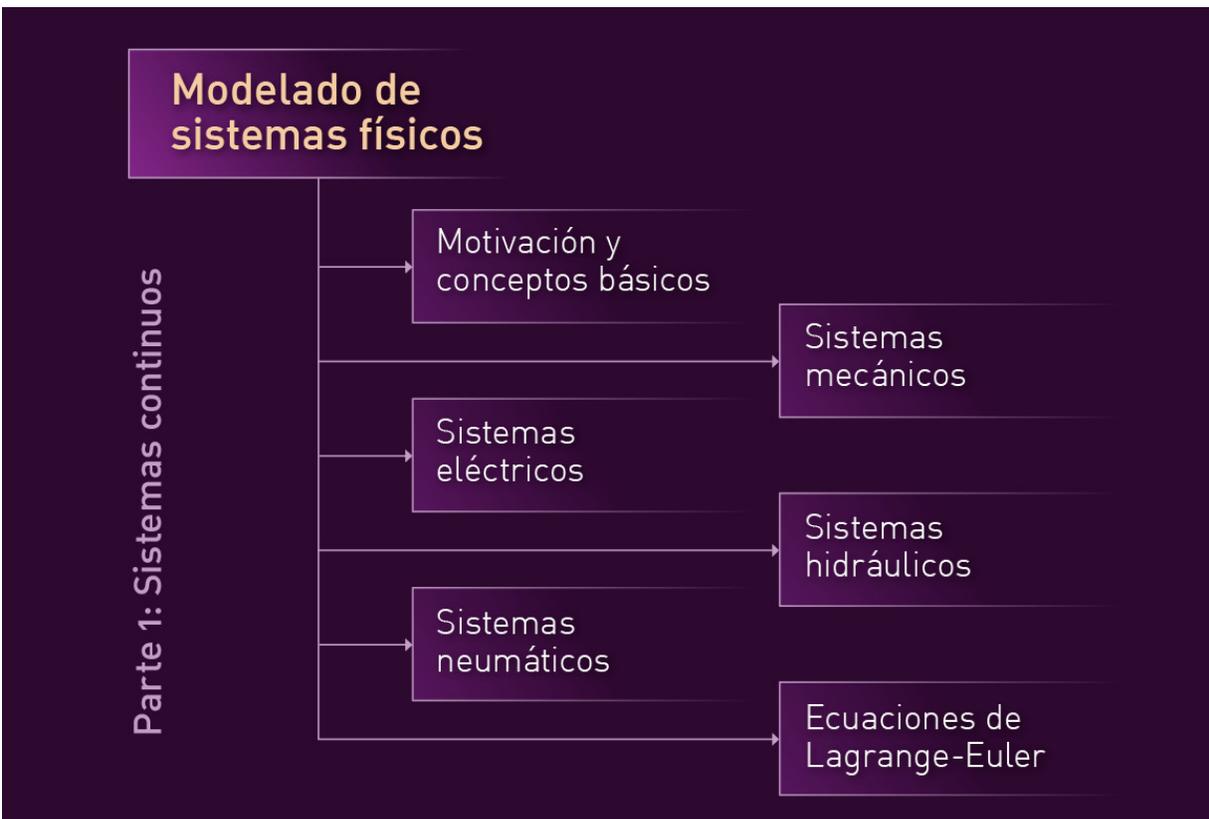
- [Actividad integradora](#)

Recursos del capítulo 1

- [IEEE Control Systems Magazine, edición especial historia del control](#) (abril de 2002).

Esta edición especial contiene artículos muy interesantes y detallados sobre la historia del control automático.

2. Modelado de sistemas físicos



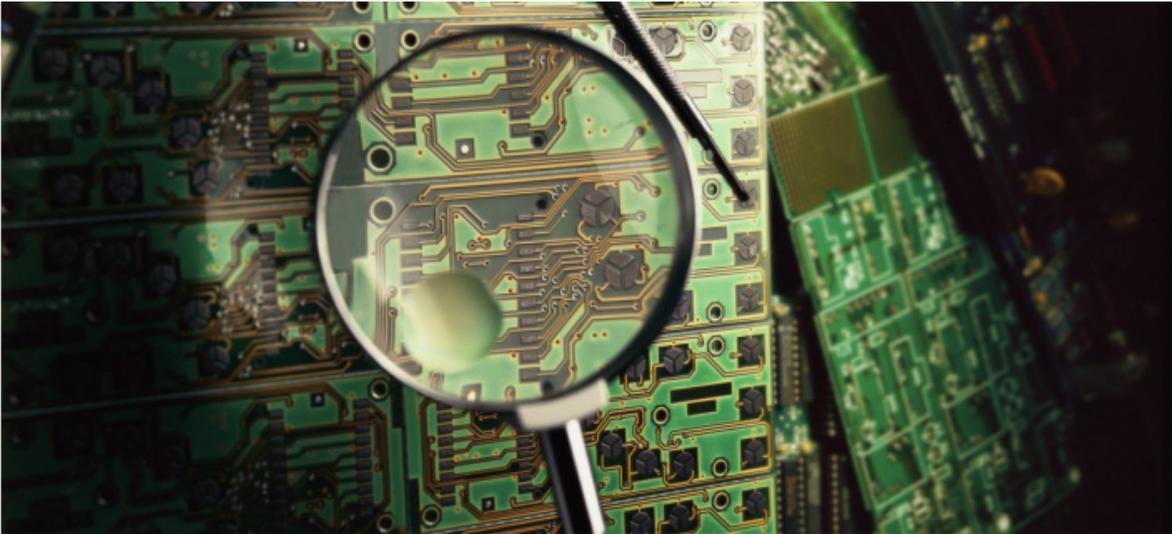
El ingeniero es un profesional que se dedica a resolver problemas aplicando conceptos y técnicas basadas primordialmente en la física y las matemáticas.

El tipo de problemas a los que se enfoca este libro involucran sistemas físicos, es decir, sistemas que pueden representarse utilizando leyes físicas con ayuda de las matemáticas. En general, este tipo de fenómenos son los que están más ligados a la industria y para los cuales desarrollaremos herramientas a fin de controlarlos dentro de un proceso que puede ser más grande que el propio fenómeno a estudiar.

Para poder controlar un sistema, necesitaremos primero conocer qué es lo que queremos controlar. Este capítulo utiliza conceptos básicos de ecuaciones diferenciales para poder llegar a lo que llamamos el modelo matemático del sistema. Este modelo

matemático nos servirá para representar el comportamiento de fenómeno y posteriormente para analizarlo.

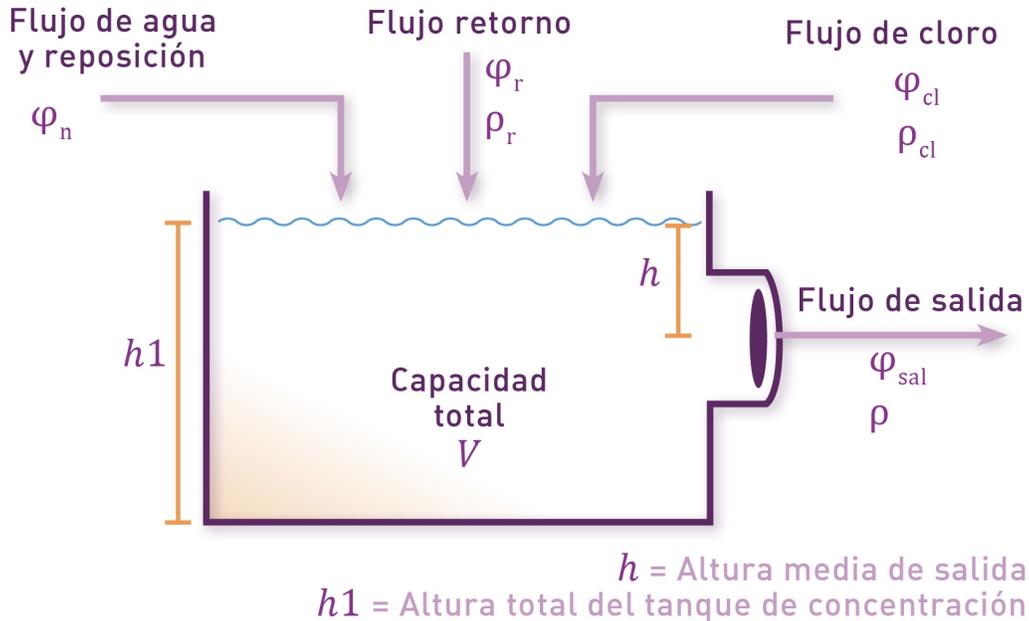
Los tipos de sistemas que trataremos son: mecánicos, eléctricos, hidráulicos, neumáticos y térmicos.



2.1 Motivación y conceptos básicos

Podemos encontrar problemas en muchos ámbitos: en la industria, en áreas biológicas o en las ciencias sociales. En la biología podemos encontrar, por ejemplo, la dosificación de medicinas, la regulación del ritmo cardiaco o la prevención de un ataque epiléptico.

En la industria tenemos muchos otros problemas que son particularmente importantes para un ingeniero. Por ejemplo, el acondicionamiento de agua en una planta química o la planeación de movimiento en un robot de ensamble en una planta de automóviles. En ciencias sociales también existen problemas interesantes, como en la economía y en la dinámica de sociedades. En este libro nos enfocaremos al estudio de sistemas que puedan representarse utilizando leyes físicas con apoyo de las matemáticas.



Para poder aproximarnos a un problema, lo primero que necesitamos es conocerlo, saber qué variables afectan al fenómeno que estamos tratando y averiguar la forma en que estas variables están relacionadas.

Para poder conocer la dinámica de un fenómeno podemos considerar cuatro opciones:

- **Ecuaciones diferenciales ordinarias**
- **Ecuaciones en diferencias**
- **Ecuaciones en diferencias parciales**
- **Análisis de series de tiempo**

Una **ecuación diferencial ordinaria** es una igualdad que contiene derivadas, diferenciales y/o integrales con respecto a una sola variable independiente.

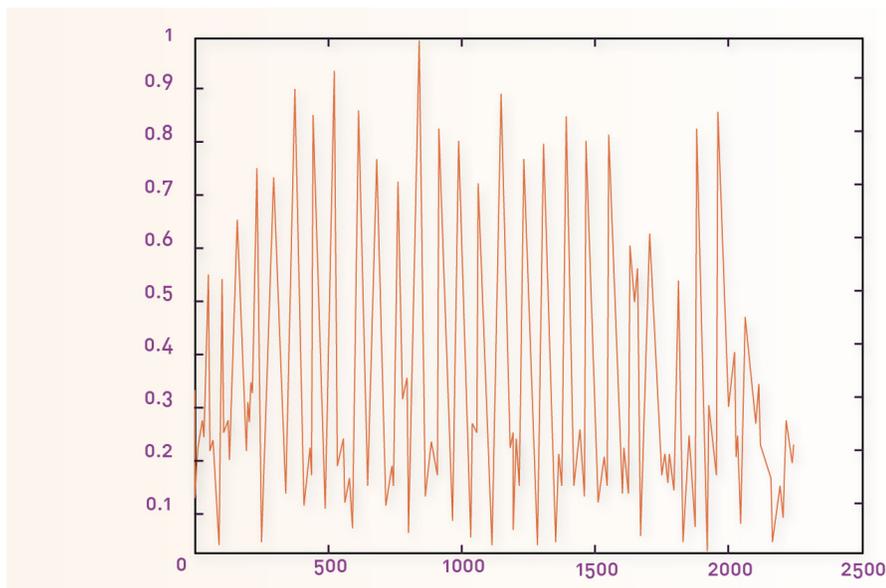
Una **ecuación en diferencias** es una ecuación que contiene diferencias de una función; en general se utiliza para describir cambios en una variable en tiempo discreto (ver parte III de este libro).

Una **ecuación diferencial parcial** es una igualdad que contiene

derivadas parciales, es decir, derivadas con respecto a más de una variable independiente.

La variable independiente que utilizamos es el **tiempo** pues nos interesan los sistemas dinámicos.

Si el sistema es demasiado complicado para modelar con alguna de las tres herramientas anteriores, como es el caso del cerebro, por ejemplo, siempre es posible utilizar mediciones de alguna variable de salida para poder analizar el sistema. Esta estrategia involucra lo que conocemos como análisis de series de tiempo. Como ejemplo, podemos ver en la imagen un electroencefalograma (EEG) de un paciente durante una crisis epileptiforme.



El fenómeno a analizar puede ser de naturaleza lineal o no lineal, esto se refiere particularmente al tipo de ecuación a la que conducen las relaciones entre las variables del sistema. Es decir un **sistema lineal** es aquél cuyo comportamiento puede representarse mediante una ecuación lineal.

Ésta es una diferencia muy importante dado que se tienen, en general, pocas herramientas para el análisis matemático de sistemas no lineales. Luego, una ventaja significativa de los sistemas lineales sobre los no lineales es que los lineales siempre tienen solución, más aun, tienen solución única (satisfacen la

condición de Lipschitz).

Este libro está enfocado al estudio de sistemas lineales, tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto. En este capítulo nos enfocaremos a la aplicación de ecuaciones diferenciales para modelar sistemas físicos. En la parte III, analizaremos sistemas en tiempo discreto.

Una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes es aquella que puede escribirse de la siguiente manera:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-2} \ddot{y} + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = u(t)$$

En donde $y=y(t):\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ es una variable que depende del tiempo y toma un número real para relacionarlo con otro número real (el tiempo); esta variable normalmente se toma como variable de salida del sistema. $u=u(t):\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ representa una fuerza externa al sistema y generalmente se toma como la entrada. Los valores $a_i, i=1, \dots, n$ son constantes y representan los parámetros del sistema físico.

Un sistema cuyo comportamiento se describe mediante la ecuación anterior, se conoce como Sistema Lineal Invariante en Tiempo (SLIT).

La solución de la ecuación diferencial es una función $y(t)$ que satisface la igualdad:

$$y = y_H + y_P$$

Para y_H la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada, es decir, cuando $u(t) = 0$ (sistema sin entrada o autónomo); y y_P una solución particular de la ecuación diferencial homogénea, es decir, debida a la entrada. A su vez, la solución

general del sistema autónomo está dada por:

$$y_H = \sum_{i=1}^n C_i y_i = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}$$

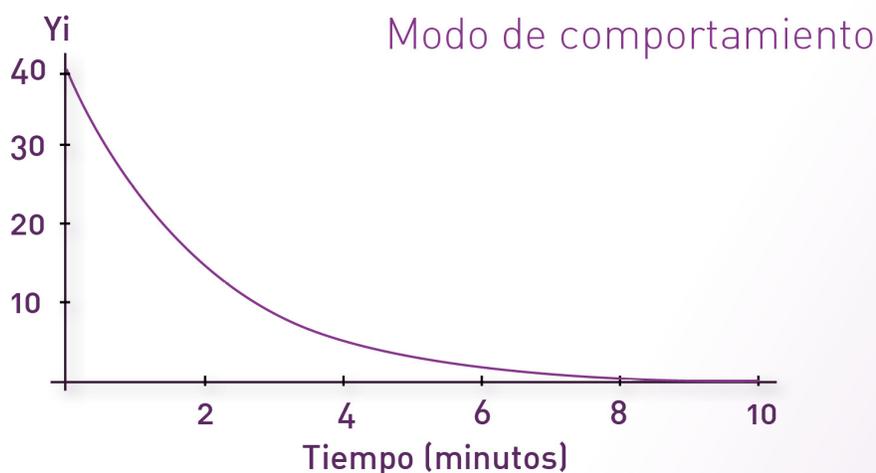
Con λ solución de la ecuación característica:

$$\lambda^{(n)} + a_1 \lambda^{(n-1)} + a_2 \lambda^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

A cada una de las soluciones $y_i = e^{\lambda_i t}$ para $i = 1, \dots, n$, se les llama modos de comportamiento. Se puede observar que y_H está dada por una combinación lineal (suma con constantes) de los diferentes modos de comportamiento.

La imagen muestra un ejemplo de modo de comportamiento. La suma de estos modos de comportamiento es precisamente lo que caracteriza de manera única la solución de la ecuación diferencial.

Como toda solución de un polinomio, la ecuación característica puede tener valores complejos. El análisis de los diferentes modos de comportamiento se trata en el capítulo 2 de este libro.



Otra herramienta muy importante para obtener la solución de una

ecuación diferencial ordinaria lineal es la transformada de Laplace. Si aplicamos la transformada de Laplace a la ecuación diferencial lineal, considerando condiciones iniciales nulas (cero) tendremos:

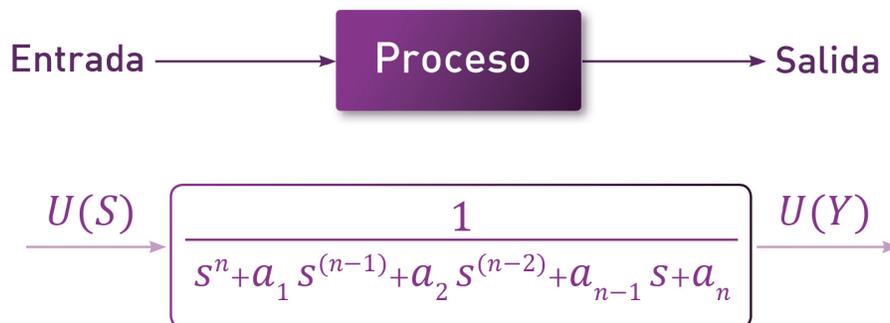
$$(s^n + a_1 s^{(n-1)} + a_2 s^{(n-2)} + a_{n-1} s + a_n) Y(s) = U(s)$$

Ahora podemos encontrar la relación de la salida con respecto a la entrada:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{(n-1)} + a_2 s^{(n-2)} + a_{n-1} s + a_n}$$

A esta cantidad se le conoce como **función de transferencia** y es uno de los conceptos más utilizados al trabajar con sistemas dinámicos pues muestra la relación entrada/salida de un sistema considerando condiciones iniciales nulas.

La función de transferencia nos permite aclarar el concepto de bloque visto en el capítulo 1 En la imagen se muestra un ejemplo de bloque que contiene la función de transferencia de un proceso.



La función de transferencia puede ser escrita como:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{K \prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

$$= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Y definimos dos conceptos que nos serán de utilidad:

- **Polos:** Los polos de la función de transferencia son los valores de la variable s que hacen que $G(s)$ tienda a infinito.
- **Ceros:** Los ceros de la función de transferencia son los valores de s que hacen que se $G(s)$ se anule.

En este tema hemos visto algunos conceptos preliminares de ecuaciones diferenciales que nos permitirán desarrollar los temas subsecuentes.

LIGAS DE INTERÉS

Herramientas para el análisis matemático de sistemas no lineales:

[MathWorks](#) (1994).

Programa de software Mathematica(R), útil para realizar operaciones matemáticas incluyendo manejo de operaciones simbólicas.

Program CC (2011).

Programa de software de propósito específico utilizado para realizar operaciones propias de control automático.

[Scilab: the free software for numerical computation](#) (2011).

Programa de software para manejo de cálculos numéricos, similar al Matlab(R) pero de licencia GNU.

[WolframAlpha: computacional know-ledge engine](#) (2011).

Descripción: Mathematica (R) en línea, utilizado para cálculos numéricos y simbólicos sin tener que tener instalado el Mathematica(R).

2.2 Sistemas mecánicos

La mecánica es la parte de la física dedicada al estudio del movimiento de los cuerpos. En esta sección dedicaremos especial atención a cuerpos rígidos, es decir, cuerpos en los cuales la aplicación de una fuerza ocasiona una deflexión no significativa.

Empezaremos esta sección con el repaso de algunos conceptos básicos para después aplicar leyes físicas para describir relaciones entre las variables involucradas.

Masa y peso

La *masa* m de un cuerpo es la cantidad de materia que contiene, esta cantidad se supone constante. La magnitud de la fuerza que ejerce la tierra sobre él se llama *peso* w .

$$w = m g$$

Donde g es la constante de aceleración gravitacional:

$$g = 9.81\text{m/s}^2 = 32.2\text{ ft/s}^2 = 386\text{in/s}^2$$

Fuerza

La *fuerza* puede definirse como la causa que tiende a producir un cambio en el movimiento de un cuerpo sobre el que actúa.

Hay dos tipos de fuerza: las de contacto y las de campo. Las fuerzas de contacto son aquellas que se establecen en contacto directo con el cuerpo. Las fuerzas de campo actúan sobre el cuerpo sin ponerse en contacto con él.



Par o momento de fuerza

El *par o momento de fuerza* se define como cualquier causa que tienda a producir un cambio en el movimiento rotacional de un cuerpo sobre el que actúa. El par es el producto de una fuerza y la distancia perpendicular desde un punto de rotación a la línea de acción de la fuerza.



Momento de inercia

El momento de inercia J de un cuerpo rígido alrededor de un eje se define como:

$$J = \int r^2 dm$$

Donde dm es un elemento de masa, r es la distancia del eje a dm y la integración se efectúa sobre el cuerpo. El momento de inercia de un cuerpo es una medida de su resistencia a la aceleración angular. El momento J es diferente para cada eje con respecto al cual se formula.



Desplazamiento, velocidad y aceleración

El desplazamiento x es un cambio en la posición desde un punto a otro en un marco de referencia. La velocidad v es la derivada con respecto al tiempo del desplazamiento. La aceleración a es la derivada con respecto al tiempo de la velocidad.

$$v = \dot{x}, \quad a = \ddot{x} = \dot{v}$$

Rapidez es la razón con la cual se mueve un cuerpo a lo largo de su trayectoria (es una cantidad escalar).

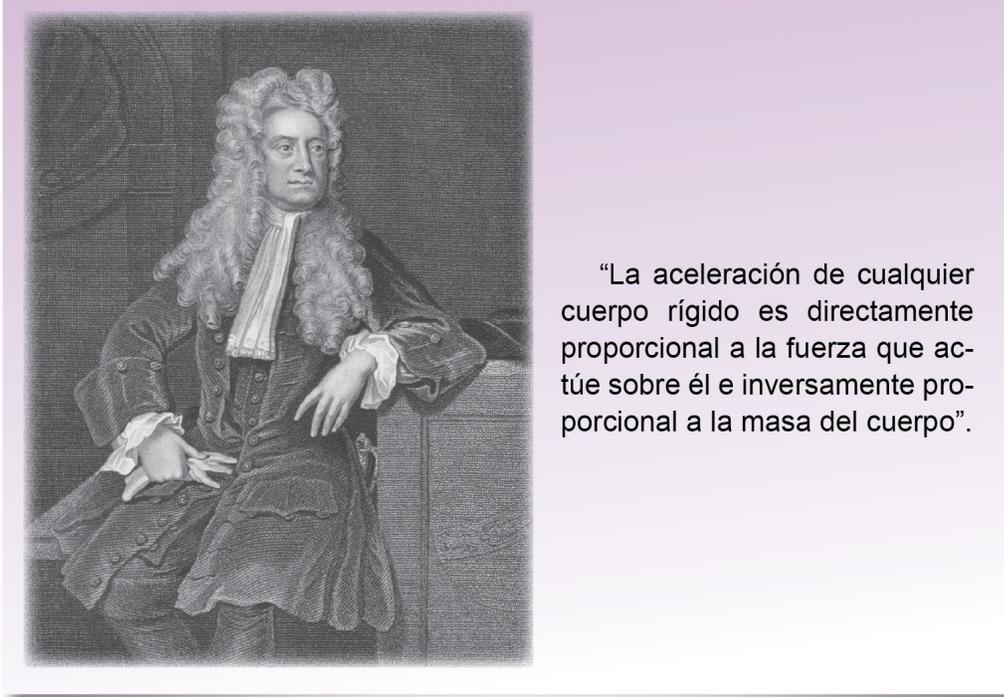
Desplazamiento, velocidad y aceleración angulares

El desplazamiento angular θ se mide en radianes y se define positivo cuando se mide en dirección contraria a la de las manecillas del reloj. Velocidad angular ω es la derivada con respecto al tiempo del desplazamiento angular y α es la aceleración angular, derivada

de la velocidad angular.

$$\omega = \dot{\theta}, \alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$$

Segunda ley de Newton (traslacional)



$$F = m a$$

Supóngase que varias fuerzas actúan sobre la masa m , entonces:

$$\sum F = m a$$

Segunda ley de Newton (rotacional)

Para un cuerpo rígido en rotación pura alrededor de un eje fijo, la segunda ley de Newton establece que:

$$\sum T = J \alpha$$

Donde T es la suma de todos los pares que actúan alrededor de un eje dado. J es el momento de inercia del cuerpo alrededor de ese eje y α es la aceleración angular.

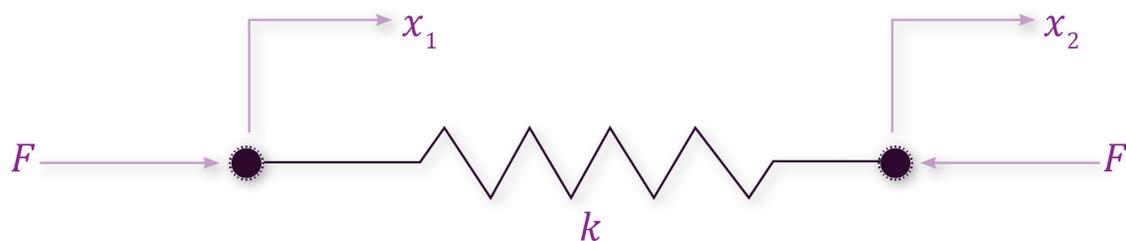
Modelado

En el modelado matemático de sistemas mecánicos consideraremos, no en forma restrictiva, tres tipos de elementos básicos:

- Elementos de inercia
- Resortes
- Amortiguadores

Elementos de inercia

La inercia puede definirse como el cambio en fuerza (par) requerido para producir un cambio unitario en la aceleración (aceleración angular).



Elementos de resorte

Un resorte lineal es un elemento mecánico que puede ser deformado por una fuerza externa tal que la deformación sea directamente proporcional a la fuerza o par que se le aplique.

$$F = kx = k (x_1 - x_2)$$

Y para un resorte torsional:

$$T = k\theta = k (\theta_1 - \theta_2)$$

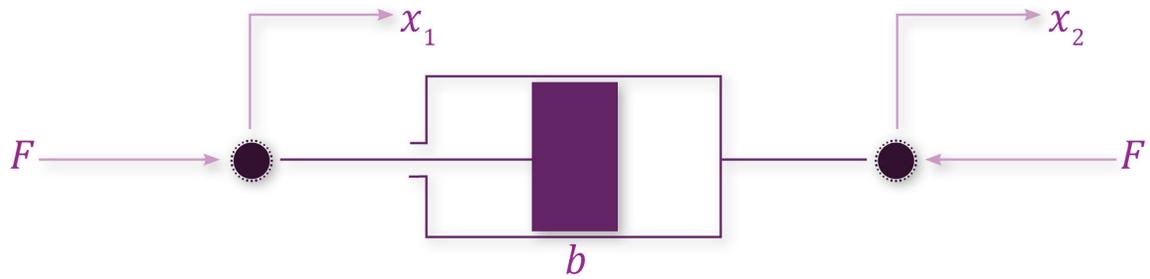
Donde k es la constante de elasticidad del resorte.



Amortiguadores

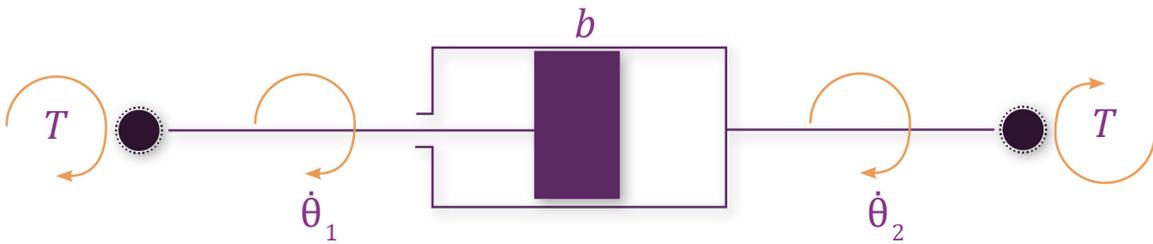
Un amortiguador es un elemento mecánico que disipa energía en forma de calor en lugar de almacenarla.

$$F = b\dot{x} = b (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$



Y para un resorte torsional:

$$T = b\dot{\theta} = b(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

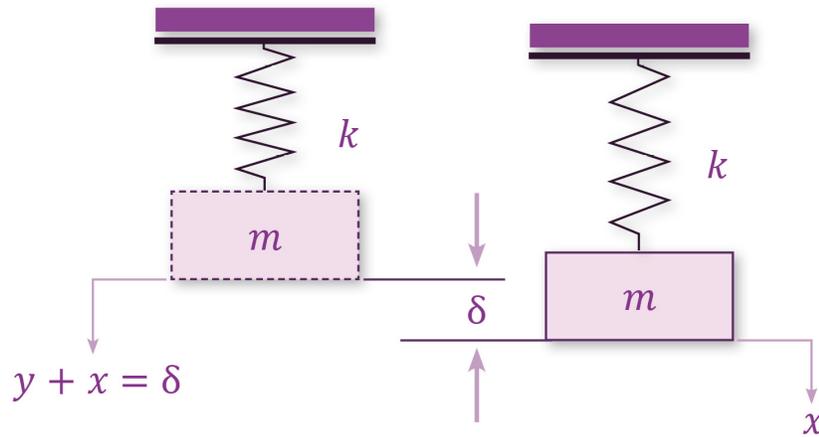


Donde b es el coeficiente de fricción viscosa.

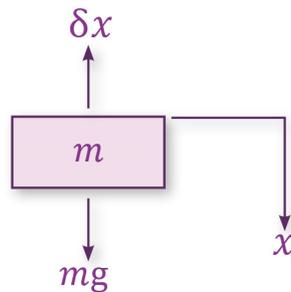
Parámetros

Consideraremos parámetros a las cantidades que dependen exclusivamente de las características intrínsecas del elemento, es decir, el parámetro de un resorte es precisamente su constante de elasticidad.

Ejemplo 1. Obtenga el modelo matemático de un sistema masa-resorte como se muestra en la figura. Considere la deflexión inicial δ del resorte.



Solución. Realizaremos primero un análisis estático del sistema. Considerando un **diagrama de cuerpo libre** de la masa en reposo, tenemos que:

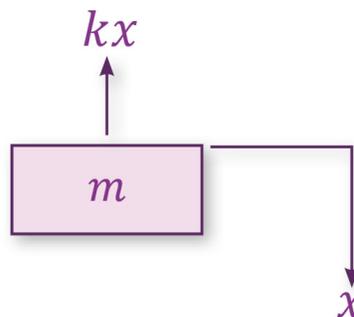


$$\sum F = 0 = mg - \delta x = 0 \Rightarrow mg = \delta x$$

De donde podemos deducir que el peso del cuerpo se equilibra con la deflexión inicial del resorte. De hecho, esta es una forma de encontrar el coeficiente de elasticidad del resorte.

Para un análisis dinámico, requerimos de un experimento mental, es decir, de un poco de imaginación. Si el sistema está inicialmente en reposo y no se le aplica una fuerza externa, la masa NO se moverá, es decir permanecerá en reposo. Entonces, para poder encontrar las ecuaciones dinámicas del sistema, será necesaria una pequeña suposición.

Dado que no se le está aplicando ninguna fuerza externa, vamos a suponer que tiene una condición inicial diferente de cero; es decir, que movemos la masa hacia abajo y después la soltamos. Con esto logramos que la masa se mueva, la segunda parte del experimento mental es tomar una foto instantánea del sistema en movimiento. Digamos que en la foto que tomamos, la masa se encuentra debajo de la posición de equilibrio (reposo) del sistema. Entonces, el diagrama de cuerpo libre de la masa será de la siguiente manera:



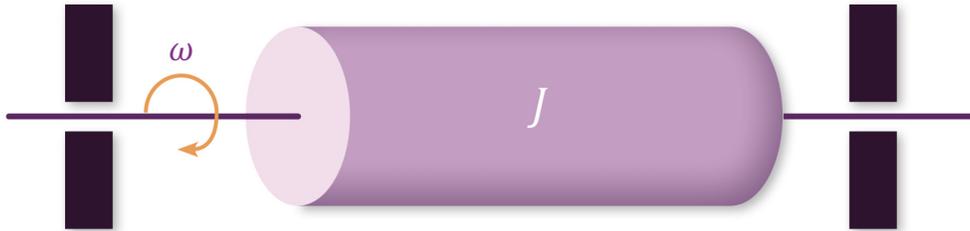
Luego, las ecuaciones de movimiento estarán dadas por la segunda ley de Newton para sistemas traslacionales:

$$\begin{aligned}\sum F &= ma \\ -kx &= m\ddot{x} \\ m\ddot{x} + kx &= 0\end{aligned}$$

Esta última ecuación es el modelo matemático del sistema.

Ejemplo 2. Obtenga el modelo matemático de un rotor montado

sobre cojinetes como se muestra en la figura. Suponemos que en $t = 0$ el rotor está girando a una velocidad angular de $\omega(0) = \omega_0$. Suponemos también fricción viscosa y que no se aplica par externo.



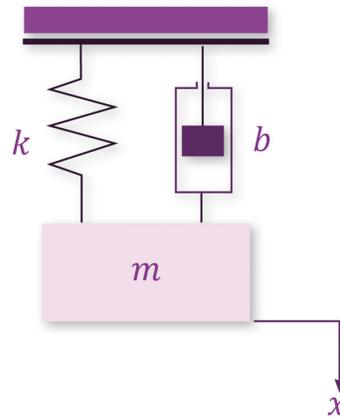
Solución. Dado que el problema indica que se tiene una velocidad angular inicial, el rotor se encuentra en movimiento cuando $t = 0$, la única fuerza actuante es la fricción sobre los cojinetes. De tal manera que, aplicando la segunda ley de Newton para sistemas rotacionales, tenemos:

$$\sum T = J \alpha$$

$$-b\dot{\omega} = J\ddot{\omega}$$

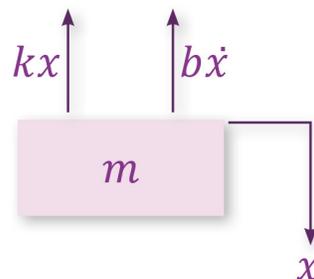
$$J\ddot{\omega} + b\dot{\omega} = 0$$

Ejemplo 3. Determine el modelo matemático del sistema masa-resorte amortiguador que se muestra en la figura. Este es el modelo más simple de la suspensión de un vehículo.



Solución. Para resolver este problema, realizamos el mismo experimento mental del ejemplo 1, es decir, imaginamos una condición inicial distinta de cero, dejamos el sistema evolucionar en tiempo y realizamos un diagrama de cuerpo libre de una foto instantánea.

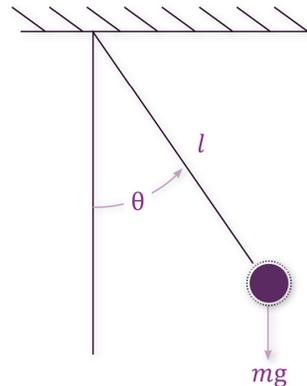
Es importante notar que para el análisis dinámico de este sistema no se toma en cuenta el peso dado que en reposo está equilibrado con la deflexión inicial del resorte.



$$\begin{aligned} \sum F &= ma \\ -kx - b\dot{x} &= m\ddot{x} \\ m\ddot{x} + b\dot{x} + kx &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 4. Obtenga la ecuación de movimiento para el péndulo

simple de la figura.



Solución. Para este sistema no se tiene fuerza externa, de hecho, la única fuerza actuante es el peso. Nótese que en este caso, el peso es el responsable del único momento que experimenta el péndulo. Antes de encontrar el modelo, recordamos que el momento de inercia está dado por:

$$J = \int l^2 dm = ml^2$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\sum T &= J \alpha \\ -mgl \operatorname{sen}\theta &= ml\ddot{\theta} \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \operatorname{sen}\theta &= 0\end{aligned}$$

El modelo matemático del péndulo simple resulta en una ecuación diferencial no lineal, dado que la variable dependiente está afectada por una función trascendente.

A fin de poder incluir este tipo de sistemas en análisis posteriores, haremos una aproximación. Restringiremos el movimiento del péndulo a ángulos pequeños. Usando un resultado común de cálculo elemental, esto implica que:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \text{sen} \theta = \theta$$

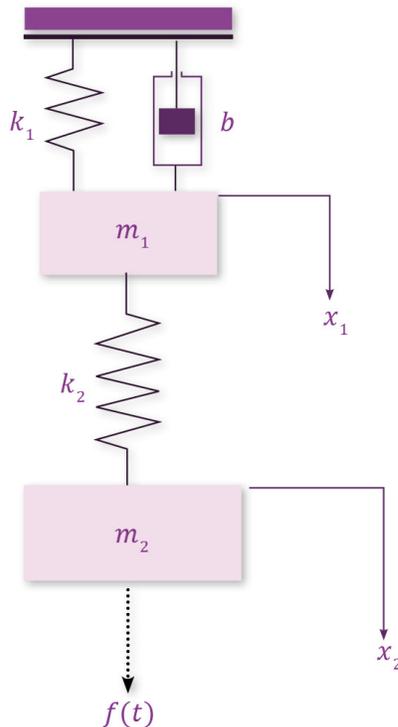
Recordemos que θ está dado en radianes, entonces esta aproximación no es demasiado restrictiva.

Entonces:

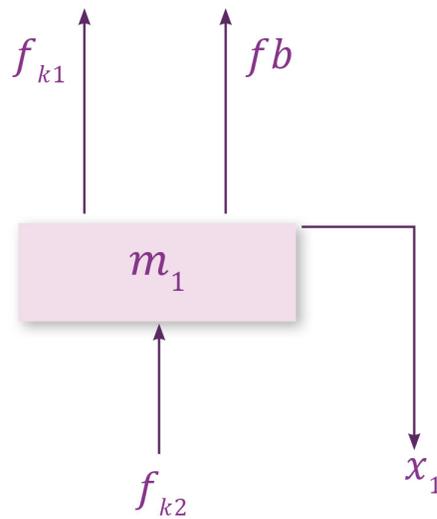
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

Nótese que matemáticamente ésta es la misma ecuación diferencial que la del ejemplo 1.

Ejemplo 5. Encuentre el modelo matemático del sistema que se muestra en la figura.



Solución. Empleando las mismas técnicas que en ejemplos anteriores, obtenemos los diagramas de cuerpo libre correspondientes.

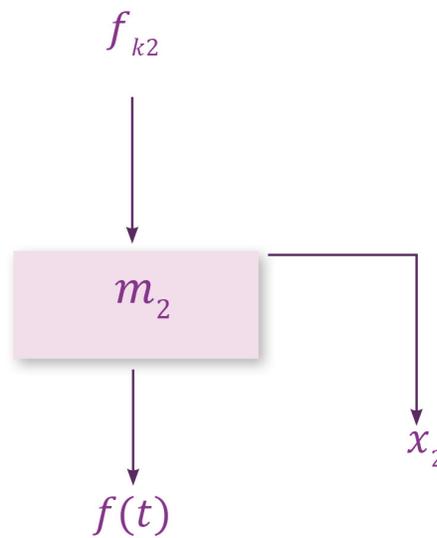


$$\downarrow (+) \sum F = m_1 \ddot{x}_1$$

$$-f_{k1} - fb - f_k = m_1 \ddot{x}_1$$

$$-k_1 x_1 - b \dot{x}_1 - k_2 (x_1 - x_2) = m_1 \ddot{x}_1$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + b \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = 0$$

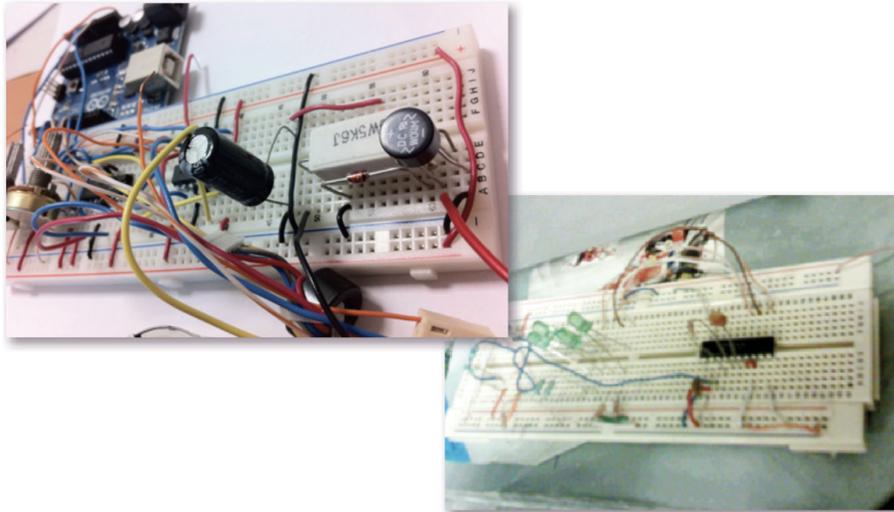


$$\downarrow (+) \sum F = m_2 \ddot{x}_2$$
$$f_k + f(t) = m_2 \ddot{x}_2$$
$$k_2 (x_1 - x_2) + f(t) = m_2 \ddot{x}_2$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) = f(t)$$

En este tema hemos visto el modelado de sistemas mecánicos consistentes principalmente de resortes, amortiguadores y masas.

2.3 Sistemas eléctricos



Un sistema eléctrico es aquél que contiene elementos que manipulan la energía eléctrica. Esta sección no pretende presentar un análisis detallado de circuitos eléctricos, partiremos del supuesto de que el lector tiene conocimientos previos sobre el tema, pero de cualquier manera veremos algunos conceptos básicos.

Voltaje $v(t)$

Es la fuerza electromotriz requerida para producir un flujo de corriente (V)

Carga $q(t)$

La carga eléctrica se mide en coulombs (C), un Coulomb es la cantidad de carga transferida en un segundo por una corriente de un Ampere (A)

Corriente $i(t)$

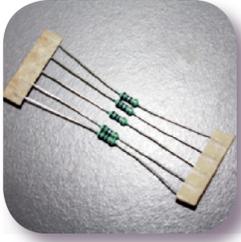
La corriente se refiere a la razón de cambio del flujo de carga. Se mide en amperes (A):

$$i = \frac{dq}{dt}$$

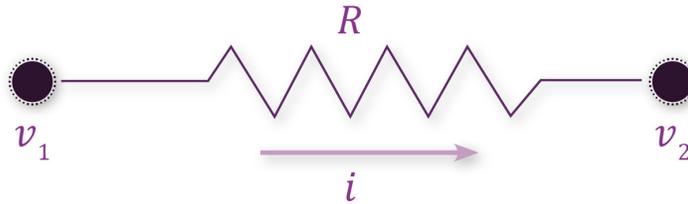
En el modelado matemático de sistemas eléctricos consideraremos tres tipos de elementos básicos:

- Elementos resistivos
- Elementos capacitivos
- Elementos inductivos

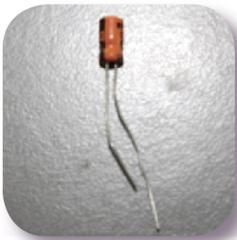
Resistividad: Se define como el cambio en voltaje requerido para producir un cambio unitario en la corriente. La unidad de la resistividad o resistencia es el ohm (Ω):



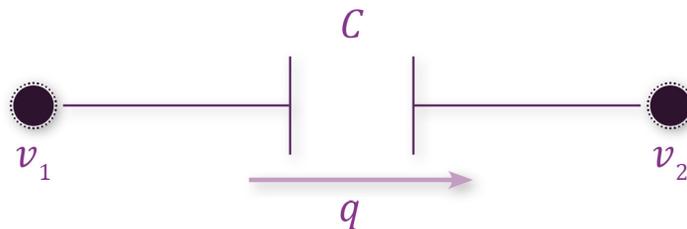
$$R = \frac{v}{i}$$



Capacitancia: Dos conductores separados por un medio aislante forman un capacitor. La capacitancia se define como el cambio en la cantidad de carga eléctrica para producir un cambio unitario en el voltaje. La unidad de capacitancia es el Farad (F):

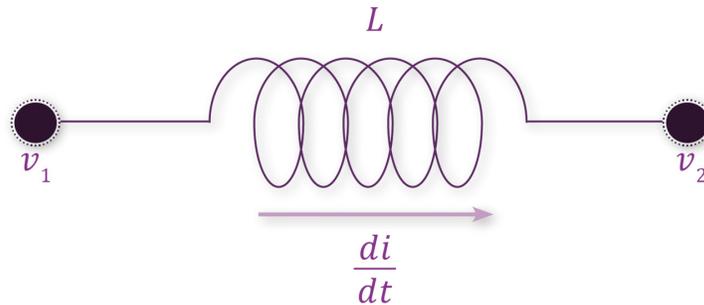


$$C = \frac{q}{v}$$



Inductancia: Es la propiedad de una bobina cuando el campo magnético establecido por la corriente de la bobina “enlaza” la propia bobina. La magnitud del voltaje es proporcional a la razón del cambio de flujo que enlaza al circuito. La unidad de inductancia es el Henry (H):

$$L = \frac{v}{di/dt}$$



Leyes eléctricas

Ley de mallas de Kirchhoff: La ley de voltajes de Kirchhoff establece que en cualquier instante dado del tiempo la suma algebraica de los voltajes alrededor de una malla cualquiera en un circuito eléctrico es cero. Esta ley puede expresarse como: la suma de las caídas de potencial es igual a la fuerza electromotriz suministrada.



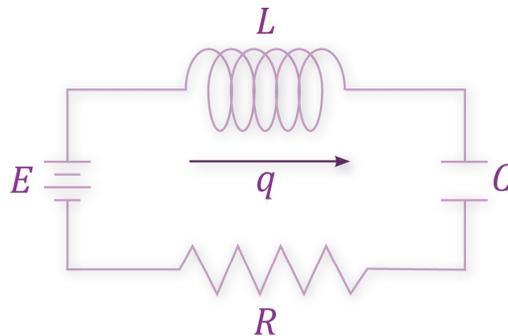
$$\sum v_i = E$$

Ley de nodos de Kirchhoff: Un nodo en un circuito es un punto donde tres o más conductores se unen entre sí. La ley de corrientes de Kirchhoff establece que la suma algebraica de todas las corrientes que entran al nodo o salen de él, es cero.



$$\sum i = I$$

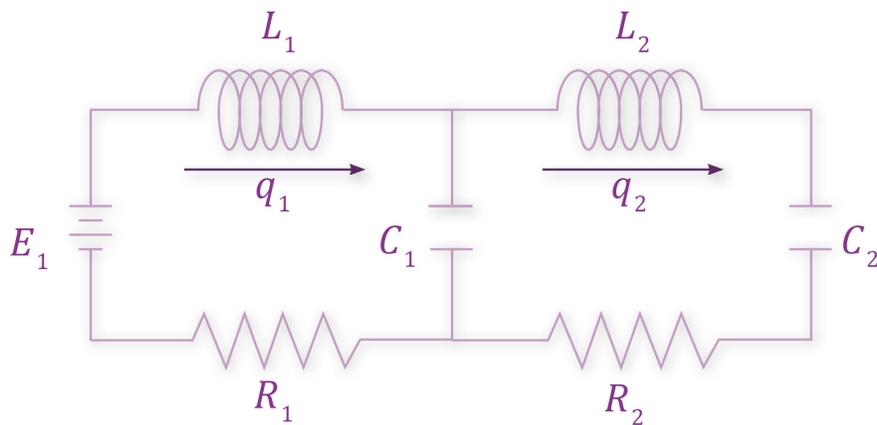
Ejemplo 1. Obtenga el modelo matemático del sistema que se muestra en la siguiente figura:



Solución. Empleando ley de mallas de Kirchhoff:

$$\begin{aligned}\sum v_i &= E \\ v_R + v_L + v_C &= E \\ L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q &= E\end{aligned}$$

Ejemplo 2. Obtenga el modelo matemático del sistema que se muestra en la siguiente figura:



Solución: Empleando ley de mallas:

$$\sum v_i = E$$

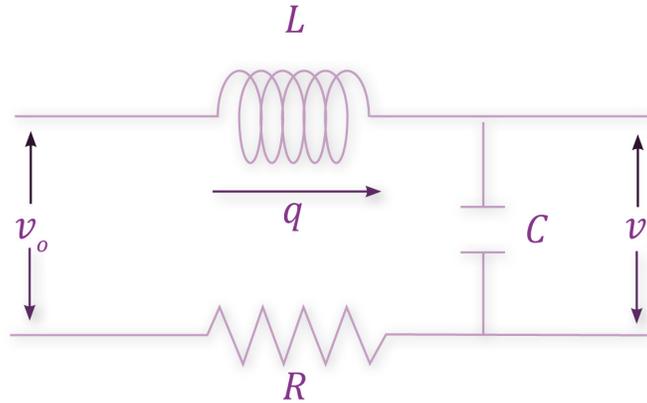
Por la malla 1:

$$L_1 \ddot{q}_1 + R_1 \dot{q}_1 + \frac{1}{C_1} (q_1 - q_2) = E$$

Por la malla 2:

$$L_2 \ddot{q}_2 + R_2 \dot{q}_2 + \frac{1}{C_2} (q_2 - q_1) + \frac{1}{C_2} = 0$$

Ejemplo 3. Encuentre la expresión $V_o(s) / V_i(s)$ para el circuito que se muestra en la siguiente figura:



Solución. Considerando impedancias complejas y divisor de voltaje:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{CLs^2 + RCs + 1}$$

Reescribiendo:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

En este tema hemos visto elementos para modelar sistemas eléctricos consistentes de elementos pasivos como resistencias, capacitancias e inductancias.

2.4 Sistemas hidráulicos

Flujo (volumétrico)



Caudalímetro

El flujo o caudal en una tubería se define como la cantidad de volumen de líquido por unidad de tiempo.

$$Q = v A$$

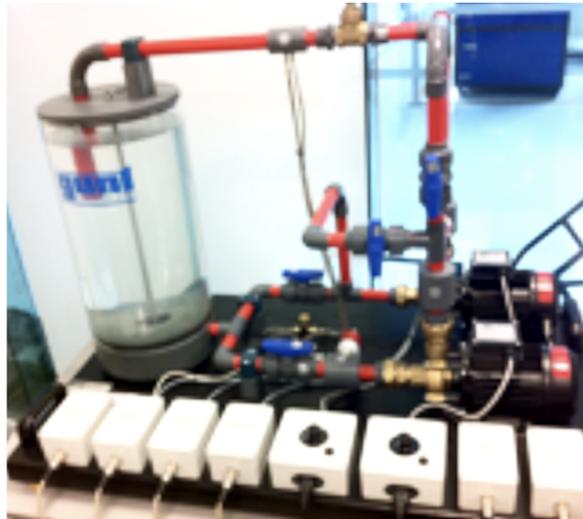
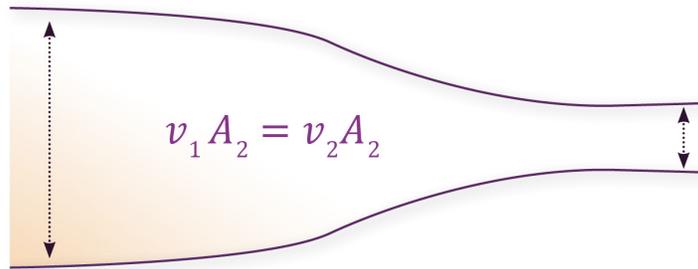
Donde A representa el área transversal de la tubería y v la velocidad del líquido.

Ecuación de continuidad

Aplicando el principio de conservación de la masa del flujo:

$$Q_1 = Q_2$$
$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

Donde A representa el área transversal de la tubería y v la velocidad del líquido.



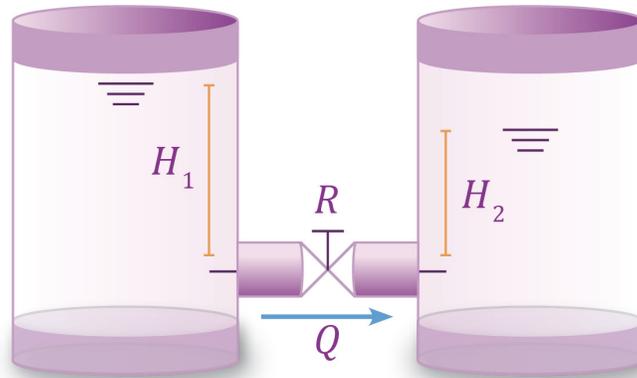
Modelado

En el modelado matemático de sistemas hidráulicos pueden considerarse tres tipos de elementos básicos:

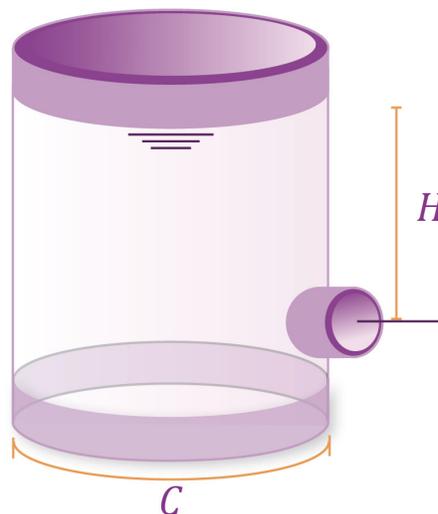
- Elementos resistivos
- Elementos capacitivos
- Elementos inductivos

Resistencia hidráulica: puede definirse como el cambio en la altura diferencial necesario para causar un cambio unitario en la razón de flujo. Sus unidades son s/m^2

$$R = \frac{d(H_1 - H_2)}{dQ}$$



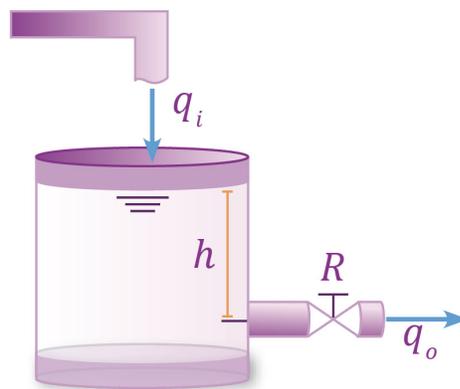
Capacitancia: Es el cambio en la cantidad de líquido con respecto al cambio en la altura.



Inertancia: Se refiere al cambio en potencial necesario para producir una razón de cambio unitario en la razón de flujo, la velocidad o la corriente. Para el efecto de inercia en el flujo de líquidos en tubos y dispositivos semejantes, el potencial puede ser la presión o la altura, y el cambio en la razón de flujo por segundo puede ser la aceleración del flujo.

Nota: en los sistemas hidráulicos consistentes solamente en tanques y válvulas, los efectos de la inercia pueden ser despreciables.

Ejemplo 1. Considere el siguiente sistema de nivel de líquido y obtenga el modelo matemático del sistema.



Solución: Ley de la conservación de masa:

$$\begin{aligned} & [\text{Lo que entra}] - [\text{Lo que sale}] = [\text{Lo que se acumula}] \\ & \left[\frac{\text{Lo que entra}}{t} \right] - \left[\frac{\text{Lo que sale}}{t} \right] = \left[\frac{\text{Lo que se acumula}}{t} \right] \end{aligned}$$

Entonces:

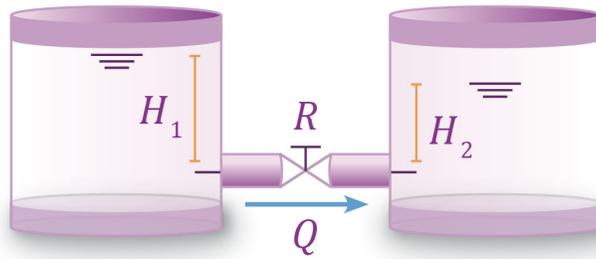
$$q_i - q_o = C \frac{dh}{dt}$$

$$q_o = \frac{1}{R} h$$

Entonces:

$$C \frac{dh}{dt} + \frac{1}{R} h = q_i$$

Ejemplo 2. Obtenga el modelo matemático del siguiente sistema.



Solución: Empleando la ley de conservación de la masa, obtenemos:

Para el tanque 1:
$$-Q = C_1 \frac{dH_1}{dt}$$

Para el tanque 2:
$$Q = C_2 \frac{dH_2}{dt}$$

Para la resistencia:
$$Q = \frac{1}{R}(H_1 - H_2)$$

Entonces:

$$C_1 \dot{H}_1 + \frac{1}{R} H_1 - \frac{1}{R} H_2 = 0$$

$$C_2 \dot{H}_2 + \frac{1}{R} H_2 - \frac{1}{R} H_1 = 0$$

En este tema se analizaron los componentes de un sistema hidráulico y las relaciones necesarias entre las variables que lo componen para poder obtener un modelo que describa su comportamiento.

2.5 Sistemas neumáticos

Los sistemas neumáticos son sistemas de fluido que utilizan el aire u otro gas como el medio para la transmisión de señales y de potencia. Son utilizados en buena medida en la automatización de

maquinaria.

Como en los sistemas vistos en secciones anteriores de este capítulo, existen tres elementos básicos utilizados para el modelado matemático de los sistemas neumáticos:

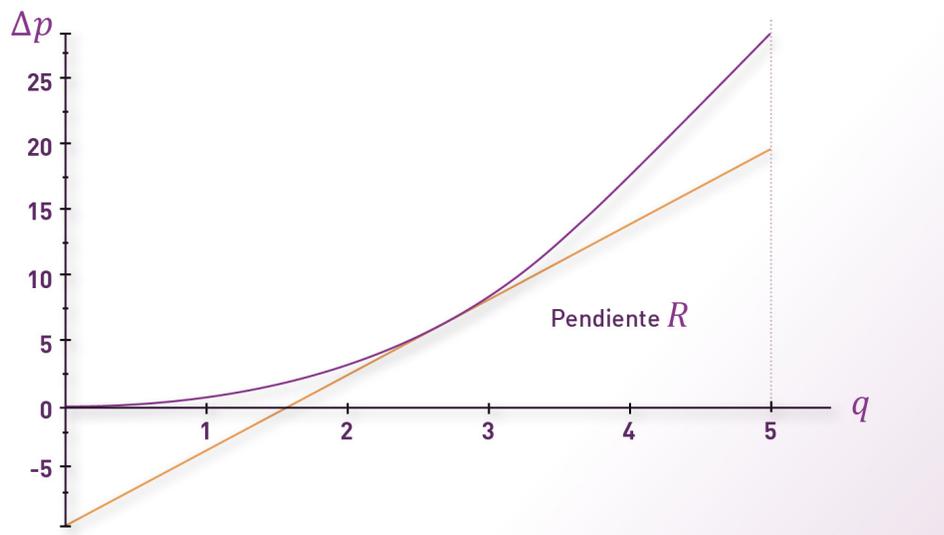
- Resistencia
- Capacitancia
- Inertancia

La **resistencia** al flujo de aire en tubos, orificios, válvulas y cualquier otro dispositivo restrictor de flujo puede definirse como el cambio en la presión diferencial (N/m²) necesaria para hacer un cambio unitario en la razón de masa:

$$R = \frac{d(\Delta p)}{dq}$$



En flujo estable, donde Δp es constante y q es constante también, la resistencia en esta condición de operación puede obtenerse fácilmente si se dispone de una curva experimental que relacione ambas variables. En este punto de operación, la pendiente de esta recta tangente es precisamente la resistencia neumática R .



Capacitancia ($\text{kg m}^2/\text{N}$). En un recipiente de presión neumática, la capacitancia puede definirse como el cambio en la masa de aire (kg) en el recipiente, requerido para hacer un cambio unitario en la presión (N/m^2):

$$C = \frac{dm}{dp} = V \frac{d\rho}{dp}$$

Donde m es la masa del aire en el recipiente, p es la presión absoluta del aire, V el volumen del recipiente y ρ es la densidad de masa del aire.

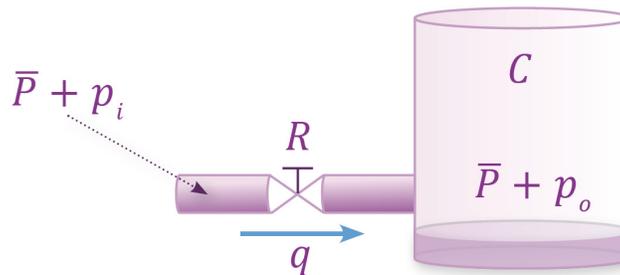


Inertancia. La inertancia (m^{-1}) de un sistema neumático se refiere al cambio de presión requerido para hacer un cambio de razón unitario en la razón de flujo de masa (esto es, el cambio en la razón de flujo de masa por segundo).

El aire (gas) en tubos puede presentar vibraciones sostenidas por resonancia acústica porque el aire tiene inercia y más aun, es elástico. Nótese que la combinación inertancia-capacitancia en un sistema neumático actúa como una combinación masa-resorte en un sistema mecánico, causando vibraciones.



Ejemplo. Encuentre el modelo matemático del sistema neumático de presión de la siguiente figura.



Solución. Suponemos que el sistema opera de tal modo que el flujo promedio a través de la válvula R es cero, es decir, $q = 0$ si $p_i = p_o$. Entonces, la resistencia de la válvula puede escribirse de la siguiente manera:

$$R = \frac{p_i - p_o}{q}$$

Y sabemos que la capacitancia del tanque está dada por:

$$C = \frac{dm}{dp_o}$$

Pero $dm = qdt$, entonces:

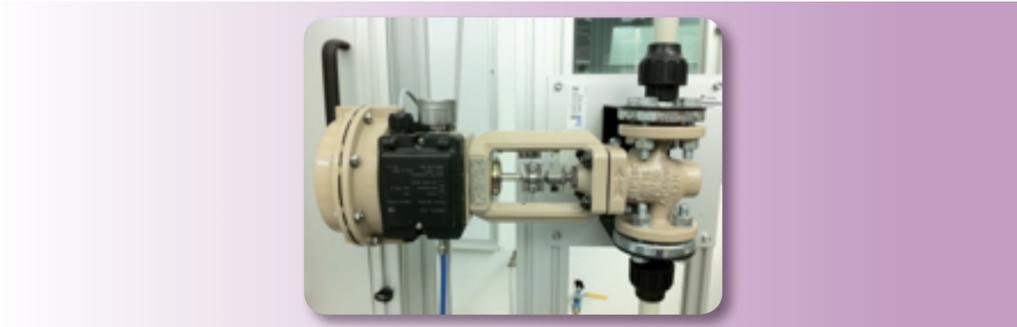
$$Cdp_o = qdt$$

Dado que $q = \frac{p_i - p_o}{R}$, podemos escribir:

$$Cdp_o = \frac{p_i - p_o}{R} dt$$

Reordenando términos:

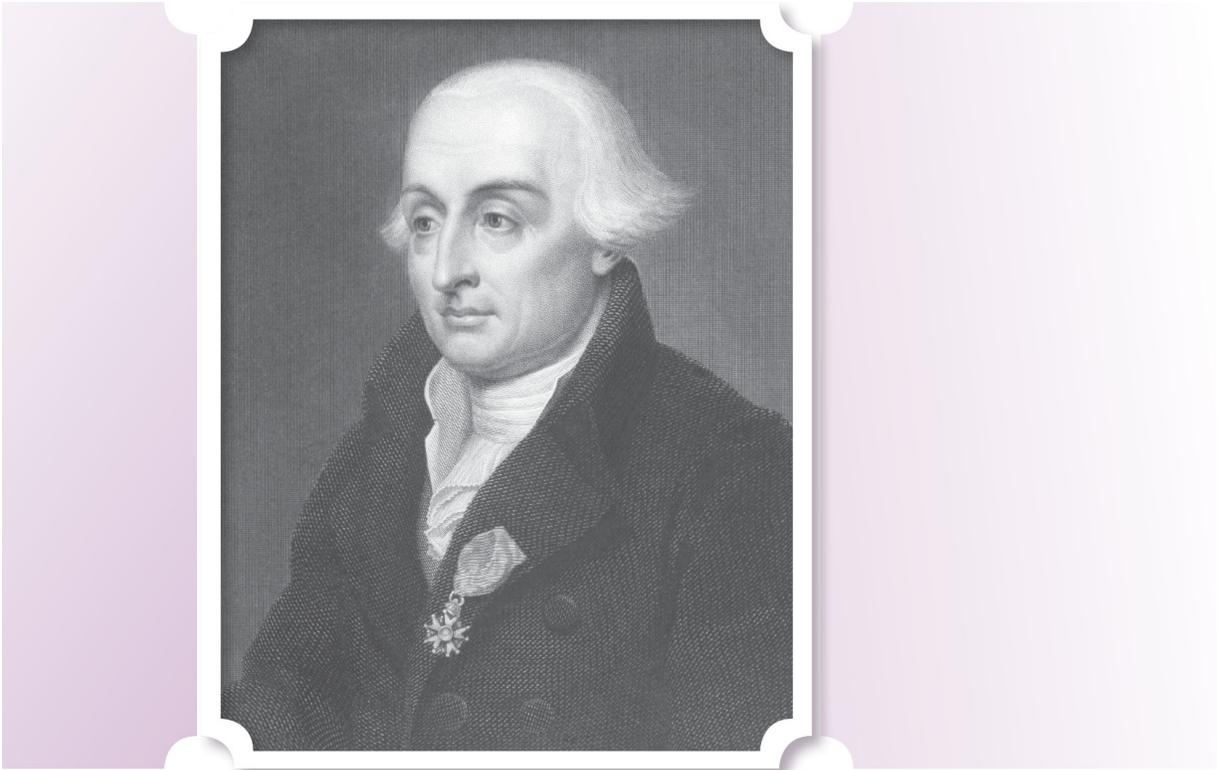
$$RC \frac{dp_o}{dt} + p_o = p_i$$



Es importante comentar que esta ecuación diferencial es exactamente igual a la de un circuito eléctrico RC serie.

En este tema se vieron los elementos que conforman un sistema neumático y las ecuaciones que describen el comportamiento del mismo.

2.6 Ecuaciones de Lagrange-Euler



En algunos casos, la utilización de leyes físicas para encontrar modelos dinámicos como la segunda ley de Newton, no es un problema sencillo y, en vez de resolvernos el problema, nos puede crear otro que eventualmente es más complicado que el que teníamos inicialmente.

En esta sección estudiaremos una técnica basada en energías que nos ayudará a modelar sistemas de una manera un poco más sencilla.

Esta técnica utiliza las ecuaciones de Lagrange-Euler, estas ecuaciones son útiles además para

- Simulación en computadora
- Diseño de controladores
- Evaluación de la estructura mecánica

A fin de formular las ecuaciones, veremos primero algunos conceptos preliminares.

Coordenadas generalizadas

Son el conjunto de coordenadas independientes necesarias para describir el movimiento del sistema, las denominaremos q_i para $i=1, \dots, n$.

Función de Lagrange

Es una función que relaciona la energía cinética y la energía potencial del sistema. También se conoce como Lagrangiano:

$$L = T - P$$

T es la energía cinética del sistema y P es la energía potencial. Normalmente, el Lagrangiano es de la forma:

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

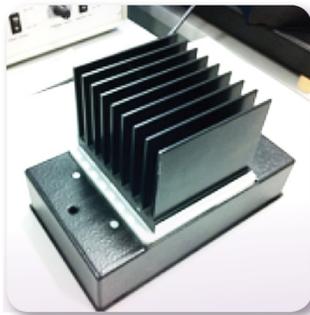


Una vez que se ha calculado el Lagrangiano del sistema, la ecuación de Lagrange para sistemas conservativos (sistemas donde no hay disipación de energía) es:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Función de disipación de Rayleigh

Si consideramos disipación de energía en forma de un amortiguador viscoso, podemos utilizar la función de Rayleigh:



$$D = \frac{1}{2} (b_1 \dot{q}_1^2 + b_2 \dot{q}_2^2 + \dots + b_r \dot{q}_r^2)$$

Planteada aquí para r amortiguadores viscosos, cada uno con un coeficiente de fricción b_i , para $i = 1, \dots, r$.

Entonces, para sistemas disipativos, podemos considerar la siguiente ecuación de Lagrange-Euler:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Sistemas forzados

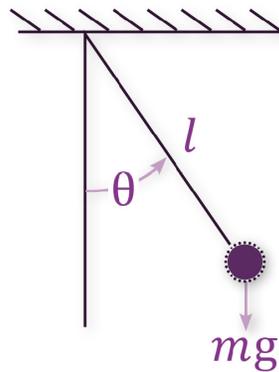
Las ecuaciones anteriores se plantean para sistemas autónomos (no forzados), pero si se tiene una fuerza externa al sistema, podemos tomar la siguiente ecuación de Lagrange-Euler:



$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = \tau$$

Esta ecuación es la más general y más utilizada en sistemas dinámicos.

Ejemplo 1. Encuentre la dinámica para el péndulo simple mostrado en la siguiente figura.



Solución. El modelo matemático de este sistema fue obtenido en el tema 2 de este capítulo, pero veremos que podemos llegar al mismo resultado utilizando ecuaciones de Lagrange-Euler.

Primero identificamos que la única coordenada generalizada es el desplazamiento angular θ , notamos también que el sistema es no forzado y se asume que no hay fricción. Por lo anterior, podemos plantear la ecuación de Lagrange-Euler como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

Queda obtener el Lagrangiano del sistema. Para esto, obtenemos

la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2$$

La energía potencial del sistema está dada por:

$$P = mgl(1 - \cos\theta)$$

Entonces, podemos escribir el Lagrangiano como:

$$L = T - P = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 - mgl(1 - \cos\theta)$$

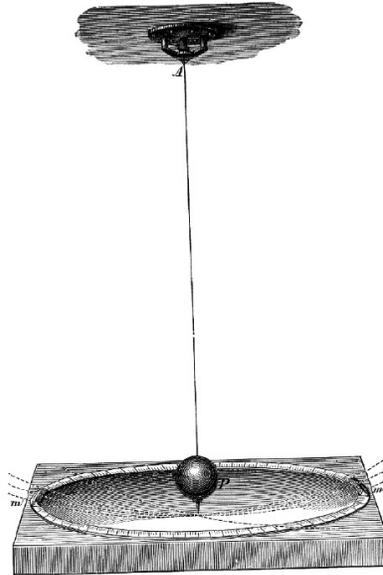
Utilizando el Lagrangiano, obtenemos la ecuación de Lagrange-Euler para el sistema:

$$\frac{d}{dt}(ml\dot{\theta})^2 + mgl \operatorname{sen}\theta = 0$$

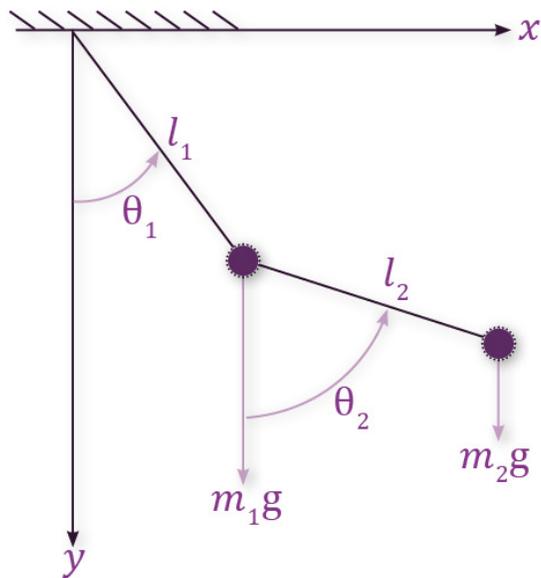
Finalmente se tiene:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0$$

Que es el mismo resultado que se había obtenido en la sección 2 utilizando segunda ley de Newton para sistemas rotacionales.



Ejemplo 2. A fin de mostrar la potencialidad de esta técnica, consideremos un ejemplo un poco más complejo: encuentre la dinámica para el péndulo doble mostrado en la siguiente figura.



Solución. Utilizar la segunda ley de Newton para modelar este sistema requiere de considerar desplazamientos angulares relativos, por supuesto que es posible hacerlo pero utilizaremos ecuaciones

de Lagrange-Euler.

Encontramos la energía cinética del sistema:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Para encontrar v_2 , ubicamos la posición del segundo péndulo con respecto a x y y .

$$\begin{aligned}x &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \\y &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2\end{aligned}$$

Encontramos después las velocidades correspondientes:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ \dot{y} &= -l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 - l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2\end{aligned}$$

Entonces, la velocidad resultante, que es la que estamos buscando, se puede obtener como:

$$\begin{aligned}v_2^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \\ &= (l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2)^2 + (-l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 - l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2)^2 \\ &= l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)\end{aligned}$$

Entonces la energía cinética del sistema queda:

$$T = \frac{1}{2} (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)]$$

La energía potencial se puede obtener como:

$$P = m_1 g l_1 (1 - \cos \theta_1) + m_2 g [l_1 (1 - \cos \theta_1) + l_2 (1 - \cos \theta_2)]$$

Entonces podemos formar el Lagrangiano de la siguiente manera:

$$L = \frac{1}{2} (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)] - m_1 g l_1 (1 - \cos \theta_1) + m_2 g [l_1 (1 - \cos \theta_1) + l_2 (1 - \cos \theta_2)]$$

En este caso, tenemos dos ecuaciones de Lagrange-Euler, una para cada coordenada generalizada:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \qquad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$$

Desarrollando los términos de las ecuaciones:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - m_2 g l_2 \sin \theta_2$$

Entonces finalmente queda:

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)] + (m_1 + m_2) g \sin\theta_1 = 0$$

$$l_2 \ddot{\theta}_2 + l_1 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2 - \theta_1)] + g \sin\theta_2 = 0$$

En este apartado se han visto las ecuaciones de Lagrange-Euler que se basan en una ecuación de energía para poder obtener un modelo matemático que pueda describir un sistema dinámico.

Conclusión del capítulo 2

El modelado de sistemas físicos permite, mediante el uso de herramientas de física y matemáticas, tener una descripción de la dinámica de un sistema. Estos modelos matemáticos resultan en ecuaciones diferenciales que pueden ser lineales o no lineales. En este libro se tratan particularmente modelos lineales y, en caso de que el modelo resulte no lineal, se realiza una linealización a fin de poder utilizar herramientas conocidas.

Se proveen herramientas para modelado de sistemas mecánicos, eléctricos, hidráulicos y neumáticos. Es importante también comentar que una vez que se tiene el modelo matemático de un sistema lineal, es posible encontrar una ecuación diferencial que, a su vez, modela otro sistema dinámico equivalente, es decir, una misma ecuación diferencial (a pesar de tener parámetros físicos completamente distintos) puede ser el modelo matemático de sistemas físicos de distinta naturaleza, así podemos tener un tanque hidráulico modelado como un circuito eléctrico. Esto permite tener herramientas para simular sistemas en general.

Las ecuaciones de Lagrange-Euler son un método importante para el modelado de sistemas complejos. Utilizan una función de energía del sistema llamada Lagrangiano, esta función es utilizada para formar las ecuaciones de Lagrange-Euler a fin de tener el modelo matemático del sistema. Son muy utilizadas para modelar sistemas robóticos.

Actividades del capítulo 2

- [Actividad integradora](#)

Recursos del capítulo 2

- [MathWorks](#) (1994).

Programa de software Mathematica(R), útil para realizar operaciones matemáticas incluyendo manejo de operaciones simbólicas.

- Program CC (2011).

Programa de software de propósito específico utilizado para realizar operaciones propias de control automático.

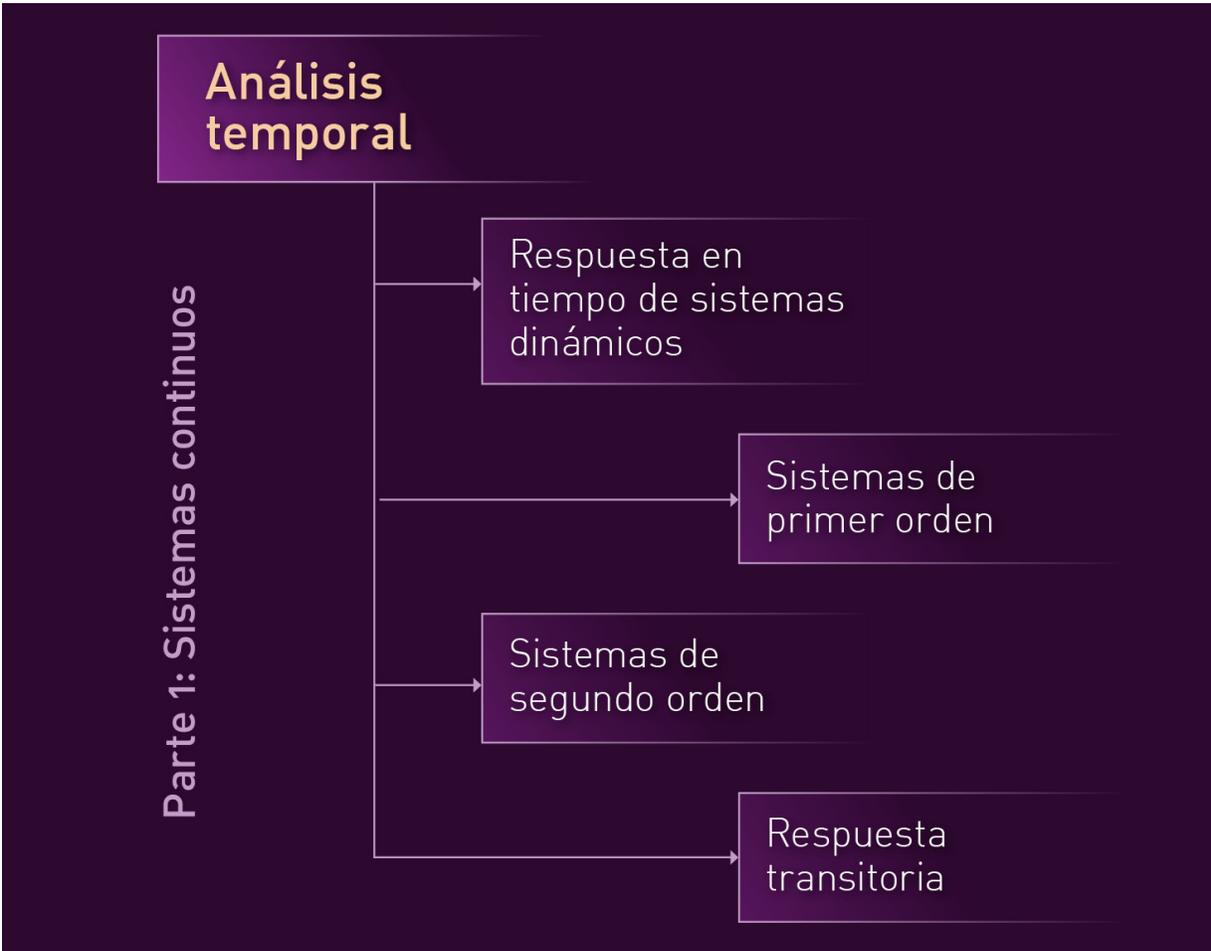
- [Scilab: the free software for numerical computation](#) (2011).

Programa de software para manejo de cálculos numéricos, similar al Matlab(R) pero de licencia GNU.

- [WolframAlpha: computacional knowledge engine](#) (2011).

Mathematica (R) en línea, utilizado para cálculos numéricos y simbólicos sin tener que tener instalado el Mathematica(R).

3. Análisis temporal



La manipulación de variables en un sistema para fines de regulación o seguimiento de alguna referencia específica requiere de un conocimiento previo del comportamiento del sistema. Primero es necesario contar con un modelo matemático que describa las relaciones entre las variables del sistema, para luego poder hacer análisis.

Podemos realizar varios tipos de análisis para un sistema; uno de ellos es el análisis temporal, que se refiere particularmente al análisis de la respuesta en tiempo del sistema ante una entrada específica. El análisis temporal, en este capítulo, se refiere a uno de dos momentos en la evolución en tiempo de esta respuesta. Un

momento es cuando se ha iniciado el sistema desde un tiempo inicial (que puede ser cuando energizamos el sistema por primera vez) y el siguiente capítulo trata el momento cuando ha pasado ya mucho tiempo, y decimos que el sistema se encuentra en estado estacionario (cuando el tiempo tiende a infinito).

Es parte de este análisis los parámetros medibles de cada respuesta para poder identificar, no sólo cualitativa sino cuantitativamente, los diferentes tipos de respuesta que pueda presentar un sistema con una dinámica específica. Así, podemos definir parámetros de respuesta transitoria y también parámetros de respuesta permanente (o coeficientes de error estático) que finalmente son indicadores que pueden manejarse como objetivos de control en capítulos subsecuentes de este libro.

3.1 Respuesta en tiempo de sistemas dinámicos

Consideraremos un sistema dinámico a un sistema cuyas variables cambian con respecto al tiempo, es decir, donde el modelo matemático resulta una ecuación diferencial. Analizaremos sistemas lineales que puedan ser escritos con la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{L[\text{Salida}]}{L[\text{Entrada}]} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$


The diagram shows a rectangular box labeled $G(s)$. An arrow labeled $U(s)$ points into the box from the left, and an arrow labeled $Y(s)$ points out of the box to the right.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

$$G(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

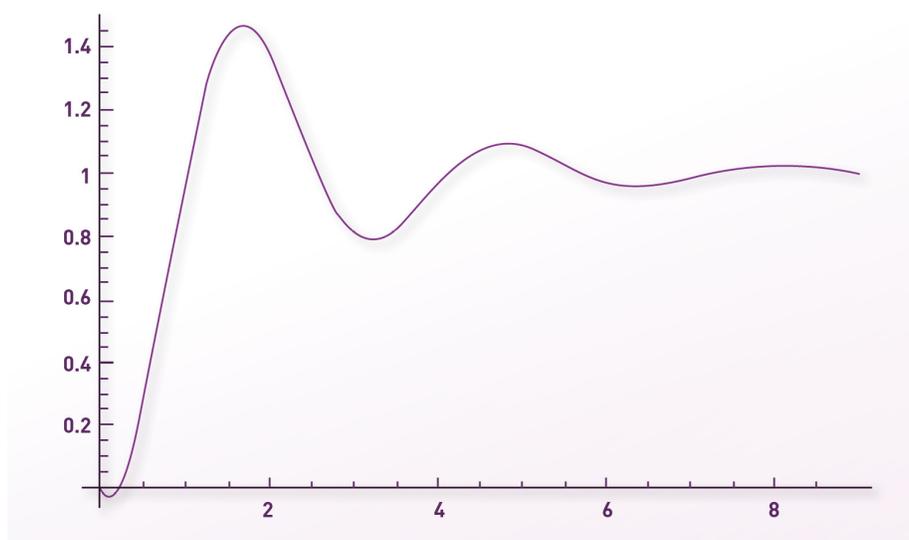
A fin de conocer el comportamiento de un sistema, nuestro primer impulso sería aplicar una entrada al sistema y observar qué pasa a la salida. Es lo que hacemos cuando nos hacen un regalo dentro de una caja, sacudimos la caja, para sentir el peso del objeto, escuchar el tipo de ruido que hace e intentar saber qué hay en el interior. El análisis temporal comienza así, introducimos una entrada que llamaremos **señal de prueba**.

Dentro del análisis temporal distinguiremos dos tipos: el análisis de respuesta transitoria y el análisis de respuesta permanente.

El análisis de respuesta transitoria se refiere a conocer qué pasa inmediatamente después de que se ha inicializado el sistema, puede ser desde el momento en que se energiza o desde el momento en que se aplica una entrada específica.

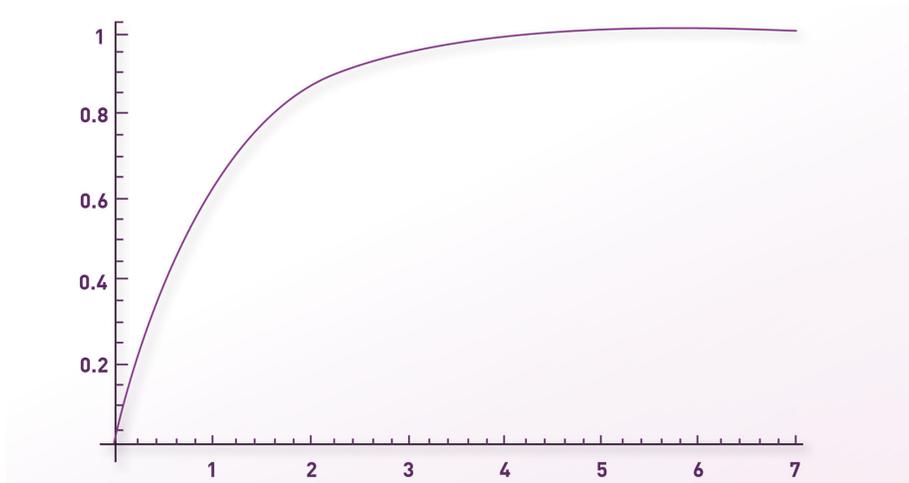
Tanto la respuesta transitoria como la permanente son determinantes para el buen funcionamiento de un sistema. Por ejemplo, en la suspensión de un automóvil, si la respuesta transitoria presenta un pico, es posible que roce la salpicadera del automóvil, provocando desgaste innecesario.

Por supuesto, estos parámetros pueden ser y son considerados para el diseño de un sistema. En general también se utilizan como datos cuantitativos para lograr diversos objetivos de control.

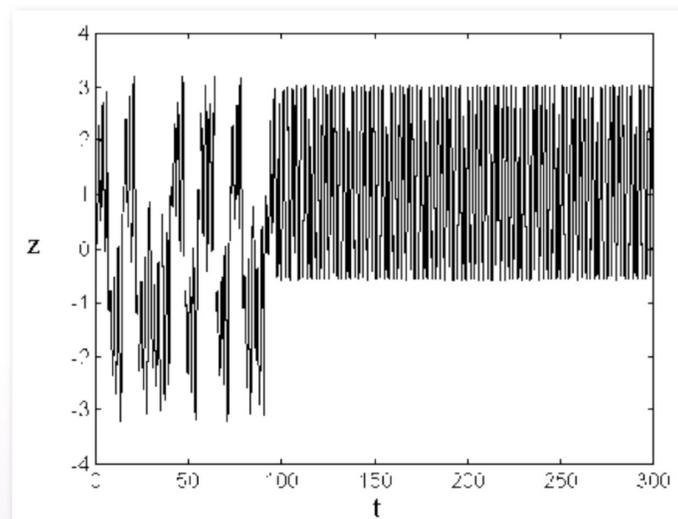


La respuesta permanente se considera cuando ha pasado mucho tiempo; en general, cuando el tiempo tiende a infinito.

Por supuesto, en sistemas físicos reales la variable llega mucho antes al estado estacionario, es decir, no tenemos que esperar infinito número de segundos para determinar este valor. Para resolver el problema se considera la constante de tiempo del sistema, esto se verá posteriormente en este capítulo.



Algo que es importante comentar es que la respuesta estacionaria del sistema no necesariamente tiene que ser constante, es decir, puede darse el caso de que la respuesta transitoria sea variante en tiempo.

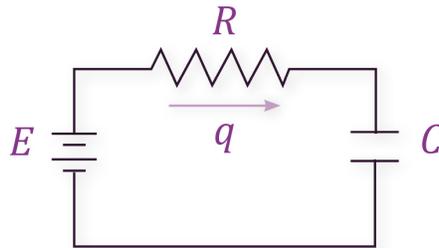


En la siguiente sección comenzaremos por analizar sistemas de primer orden, relacionando el comportamiento del sistema en tiempo con la ubicación de los polos de la función de transferencia.

3.2 Sistemas de primer orden

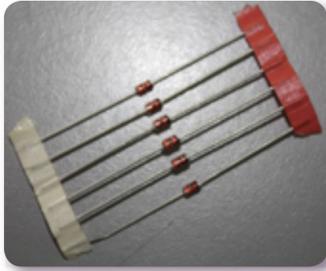
Llamamos sistema de primer orden a un sistema cuya dinámica está descrita por una ecuación diferencial de primer orden. El caso más simple es la ecuación:

$$\dot{y} = -ay + bu$$



Para $y(t)$ la salida del sistema y $u(t)$ la entrada, a y b son parámetros propios del sistema. Un ejemplo de para este sistema es un circuito RC serie.

Resulta sencillo demostrar que la función de transferencia correspondiente para este sistema es:



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b}{s + a}$$

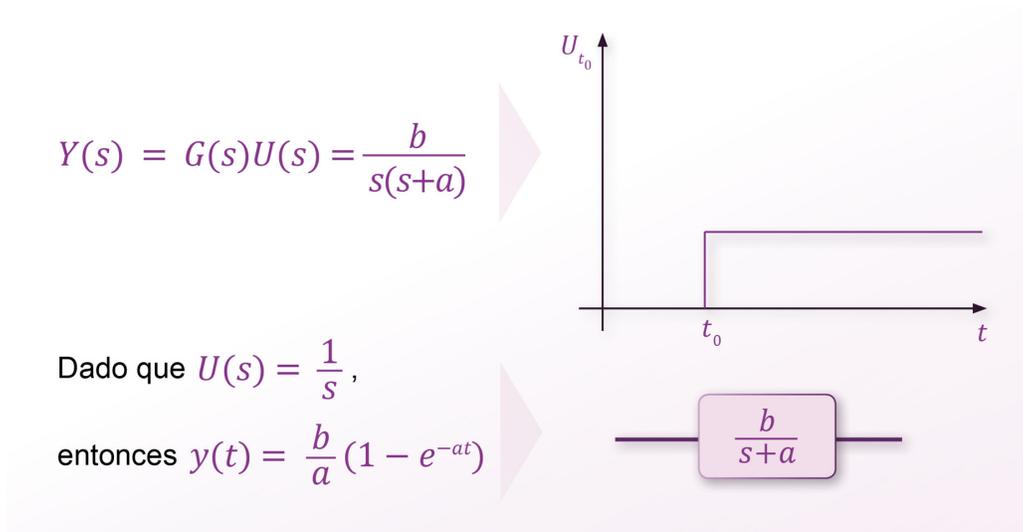
A fin de conocer la respuesta en tiempo del sistema, es necesario aplicar una entrada, esto es para que el sistema tenga una respuesta, queda claro que si no hay una entrada y tenemos condiciones iniciales nulas, el sistema seguirá en reposo. Entonces seleccionamos una respuesta, la más sencilla y real posible: una entrada escalón unitario.

Una entrada escalón unitario está definida como:

$$U_{t_0}(t) = \begin{cases} 1 & t \geq t_0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

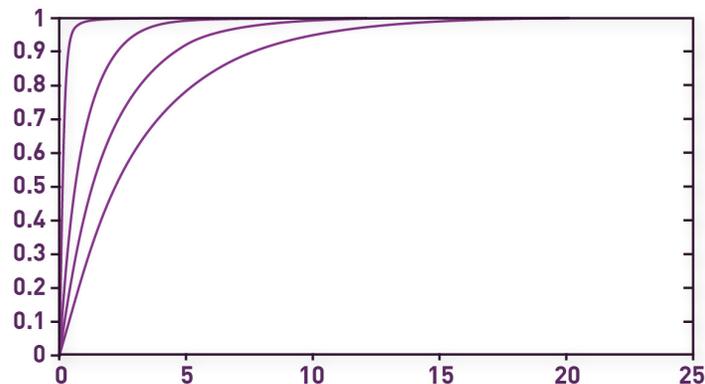
Esta entrada es usada comúnmente como señal de prueba pues representa la acción de energizar el sistema.

La salida para la entrada escalón considerando $t_0 = 0$, se puede obtener aplicando la transformada inversa de Laplace de:

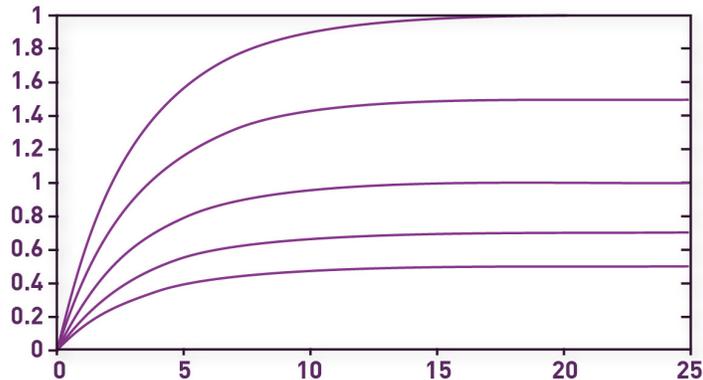


Graficando la respuesta en tiempo, podemos observar el mismo patrón para diferentes valores de a y de b . Este patrón se repite siempre que se tenga la respuesta al escalón de una respuesta de primer orden y consiste en que la respuesta se acerca exponencialmente a una constante.

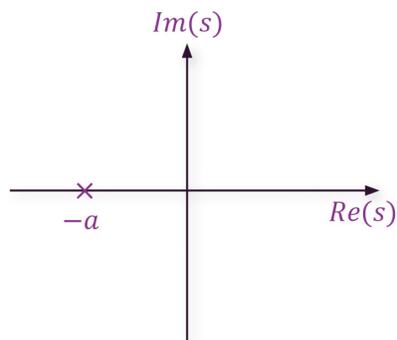
Esta respuesta exponencial es debida al único polo que se tiene en la respuesta, es decir, el polo $s = -a$, que da lugar a una respuesta en tiempo de la forma e^{-at} . En la **primera gráfica** se pueden observar diferentes posibles respuestas para $b / a = 1$ constante y cambiando el parámetro a . Es importante notar que para un valor de a pequeño tenemos una respuesta lenta mientras que para un valor de a grande, la respuesta es rápida.



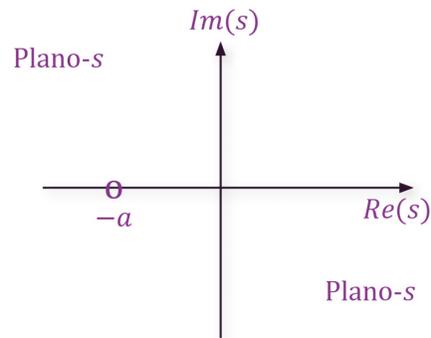
Por otro lado, en la **segunda gráfica** se mantiene el valor de a constante y se cambia el valor de b . Aquí se puede notar que el parámetro b marca el valor donde se establece la señal de salida.



Centraremos de momento el análisis en el parámetro a que indica dónde se encuentra el único polo del sistema. Dado que, en general, la solución del polinomio característico del sistema es un conjunto de valores complejos, podemos ubicar el polo $s = -a$ en el plano complejo (**plano de Argand**).



Graficar polos y ceros en el plano-s se conoce como realizar el **diagrama de polos y ceros** del sistema. Denotaremos los polos “x” y los ceros “o”. Notamos que la respuesta en tiempo del sistema es más “rápida” si el polo $s = -a$ está más alejado del origen y será más “lenta” si el polo se acerca al origen.



Para el sistema de primer orden, como la única opción de solución de la ecuación característica es un polinomio de primer orden, la única raíz posible es una raíz real, de modo que el polo resultante siempre estará sobre el eje real del plano-s.

Como vimos, la rapidez de la respuesta está gobernada por la ubicación del polo de la función de transferencia, entonces, conviene asignar un parámetro general para describir esta rapidez.

Hagamos $\tau = 1/a$, a esto se le conoce como **constante de tiempo** del sistema. Por otro lado, también conviene considerar **la salida en estado estacionario** y_{ss} , es decir:

$$y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{b}{s(s+a)} = \frac{b}{a}$$

Entonces, considerando estos valores, tenemos que:

$$\text{Para } t = \tau, y(t) = \frac{0.6321b}{a} \Rightarrow 63\% \text{ de } y_{ss}$$

$$\text{Para } t = 2\tau, y(t) = \frac{0.8646b}{a} \Rightarrow 86\% \text{ de } y_{ss}$$

$$\text{Para } t = 3\tau, y(t) = \frac{0.9502b}{a} \Rightarrow 95\% \text{ de } y_{ss}$$

$$\text{Para } t = 4\tau, y(t) = \frac{0.9816b}{a} \Rightarrow 98\% \text{ de } y_{ss}$$

De tal manera que, utilizando la constante de tiempo del sistema,

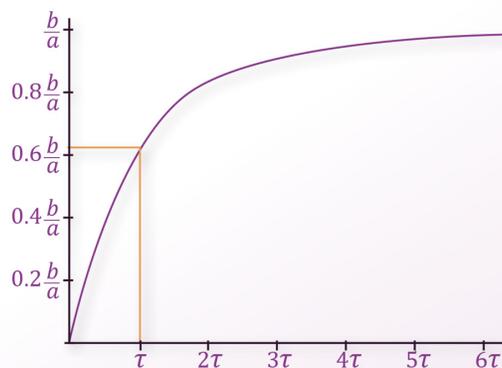
podemos describir de manera sencilla y ágil la rapidez de respuesta del sistema.

La constante de tiempo del sistema también la podemos relacionar con el primer parámetro de respuesta transitoria que veremos aquí: **el tiempo de establecimiento**.

El único parámetro de respuesta transitoria para la respuesta de primer orden es el tiempo de establecimiento que se define en función de la constante de tiempo del sistema como: $t_s = 3\tau$

En el caso de que sea suficiente contar con un 95% de la respuesta en estado estacionario, o: $t_s = 4\tau$

Si se requiere contar con el 98% de la respuesta en estado estacionario.



*Es importante mencionar también que cualquier sistema de primer orden se comporta de esta manera, es decir, no importa la naturaleza física del sistema: matemáticamente se comporta así. Esto nos permite generalizar este concepto para cualquier sistema cuyo modelo matemático sea una **EDO** lineal de primer orden.*

3.3 Sistemas de segundo orden

La respuesta de un sistema dinámico lineal está asociada

directamente con los polos de la función de transferencia del sistema; es decir, los modos de comportamiento gobiernan el comportamiento. En un sistema de primer orden sólo se tiene un polo que da como resultado una respuesta exponencial en tiempo.

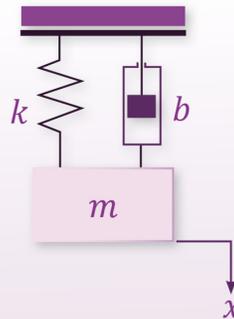
En el caso de un sistema de segundo orden, se tienen dos raíces del polinomio característico de la EDO, es decir, dos polos. Sólo se pueden dar cuatro casos de posibles raíces: raíces imaginarias, raíces complejas, raíces reales iguales y raíces reales distintas.

Por ejemplo, si se tiene la suspensión de un automóvil con modelo dinámico:

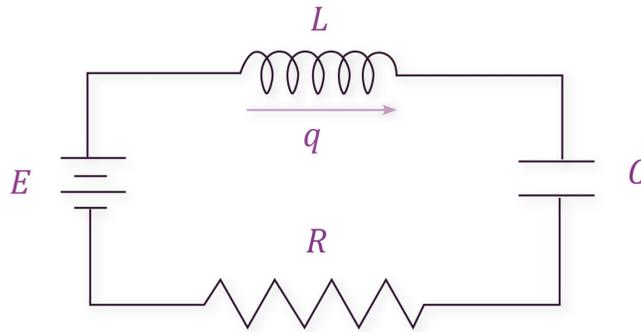
$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t)$$

Las raíces de la ecuación característica están dadas por:

$$s_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{b^2 - 4mk}$$



En este caso, es sencillo observar que la naturaleza de las raíces está dada por los parámetros m , b y k . Entonces, por ejemplo, si se quisieran tener raíces complejas, debemos hacer que $b^2 < 4mk$. Si el sistema fuera eléctrico, digamos un RLC, entonces la naturaleza de las raíces estaría dada por los parámetros L , R y C .



A fin de generalizar el patrón de respuesta para cualquier sistema de segundo orden, no importando el origen físico del sistema, introduciremos la EDO general de segundo orden:

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_n\dot{y} + \omega_n^2y = \omega_n^2u$$

De tal manera que la función de transferencia queda como:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

LIGAS DE INTERÉS

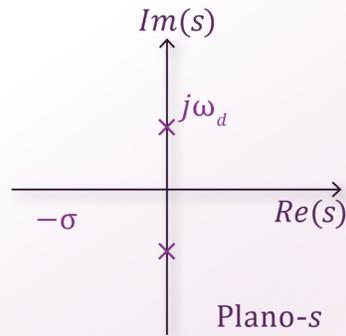
Applet de Java para obtener diferentes respuestas al escalón para diferentes configuraciones de polos.

<http://web.mit.edu/6.302/www/pz/>

Williams, Brian (2004). PoleZeroApplet (Versión 1.0)

La solución de la ecuación característica $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$, queda:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$



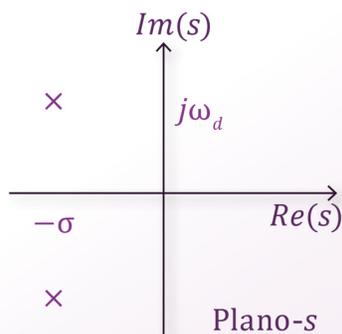
Nótese que no importa qué señal de entrada se aplique, los polos **no cambian de lugar**. Esto implica que podemos hacer un análisis preliminar del tipo de raíces que tendremos para la ecuación característica:

Raíces imaginarias, $\xi=0$, polos en $s_{1,2} = \pm j\omega_n$

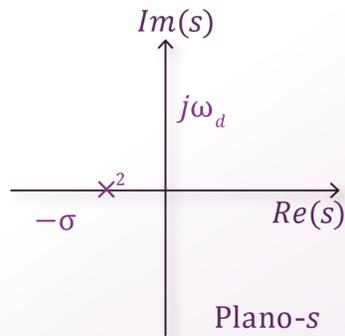
Raíces complejas, $0 < \xi < 1$, polos en $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n$

Raíces iguales, $\xi=1$, polos en $s_{1,2} = -\omega_n$

Raíces reales distintas, $\xi > 1$, polos en $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n$



De nuevo, la ubicación de polos estará asociada a una respuesta en tiempo diferente. Llamaremos respuesta **marginalmente estable** cuando $\xi=0$; respuesta **subamortiguada** para $0 < \xi < 1$; respuesta **críticamente amortiguada** cuando $\xi=1$ y respuesta sobreamortiguada cuando $\xi > 1$.



A la cantidad adimensional ξ la llamamos **factor de amortiguamiento** relativo y a ω_n **frecuencia natural**. A continuación analizaremos estos cuatro casos con más detenimiento.

Raíces imaginarias: respuesta marginalmente estable

A fin de realizar un análisis más a fondo de la respuesta en tiempo cuando $\xi=0$ consideramos la función de transferencia.

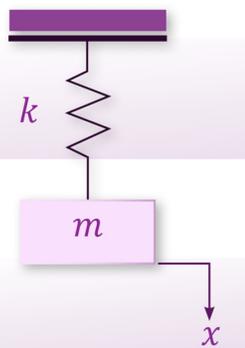
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$$

Suponemos una entrada escalón unitario:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)}$$

Entonces, la respuesta en tiempo queda:

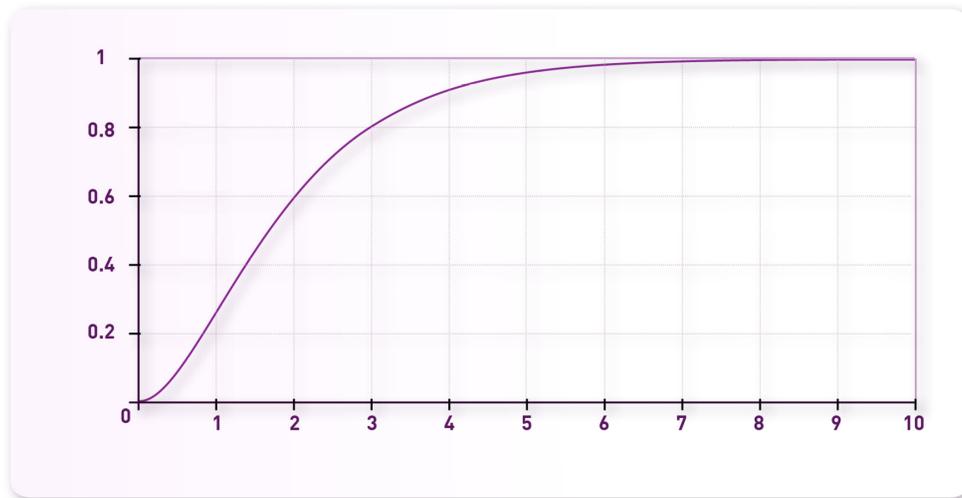
$$Y(t) = 1 - \cos\omega_n t$$



Nótese que esta respuesta considera que no se tiene un coeficiente para el término y , es decir, se supone que no hay fricción en caso de un sistema mecánico o que no se cuenta con una resistencia en un sistema eléctrico.

La respuesta en tiempo para una entrada escalón se muestra

siguiente gráfica.



Raíces complejas: respuesta subamortiguada

De nuevo partimos de la función de transferencia:

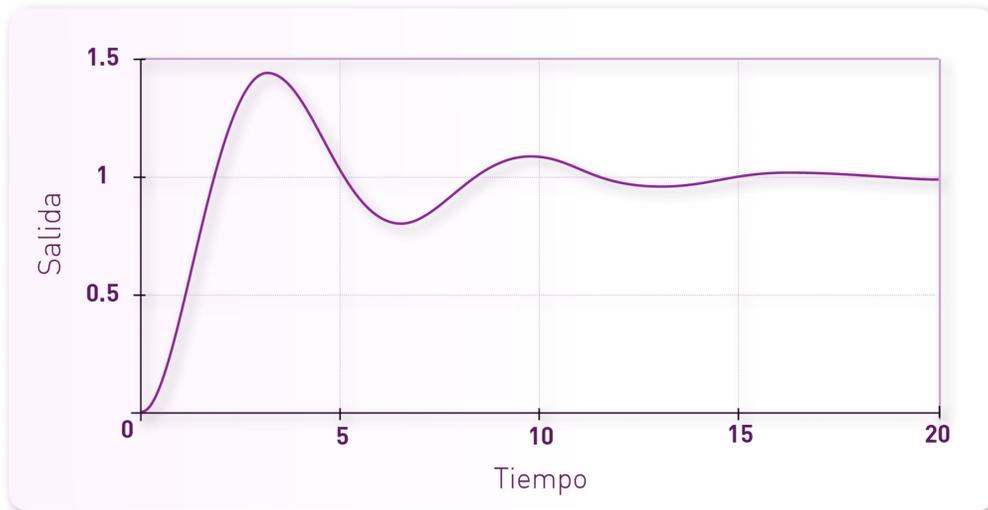
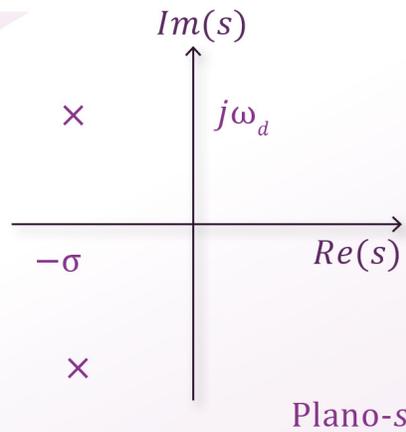
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Suponemos una entrada escalón unitario:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Definimos $\sigma = \xi\omega_n$ y $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ (**frecuencia natural amortiguada**) y la respuesta en tiempo queda:

$$y(t) = 1 - e^{-\sigma t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d} \operatorname{sen} \omega_d t \right)$$



De la gráfica anterior podemos observar que la respuesta también presenta oscilaciones, en este caso la oscilación se atenúa conforme pasa el tiempo, esto es debido a la exponencial que aparece como amplitud de la oscilación en la salida.

Raíces reales iguales: respuesta críticamente amortiguada

Consideremos

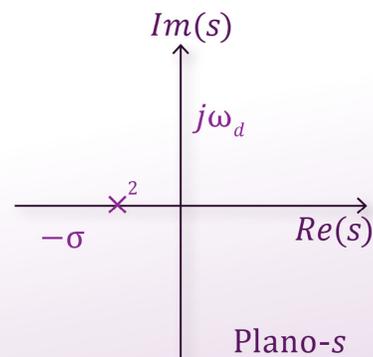
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Suponemos una entrada escalón unitario:

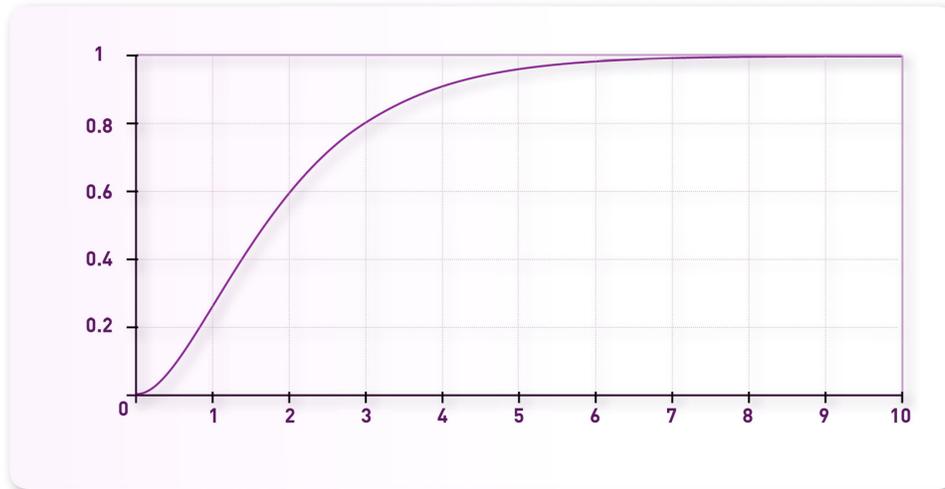
$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2}$$

Entonces, la respuesta en tiempo queda:

$$Y(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t)$$



La respuesta en tiempo se muestra en la siguiente gráfica. Es importante notar que en este caso ya no aparecen oscilaciones de ningún tipo. Esto es debido a la ausencia de modos imaginarios en los polos del sistema, es decir $\xi=1$.



Raíces reales distintas: respuesta sobreamortiguada

Partimos de la siguiente función de transferencia

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

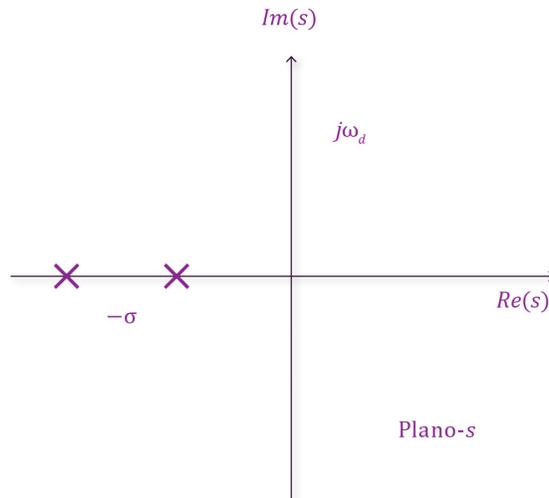
Suponemos una entrada escalón, entonces

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Aplicando antitransformada de Laplace:

$$Y(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})} e^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} - \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})} e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t}$$

A pesar de que parece muy complicada la respuesta, este es un caso simple, ya que tiene dos polos reales diferentes y tampoco presenta oscilaciones.

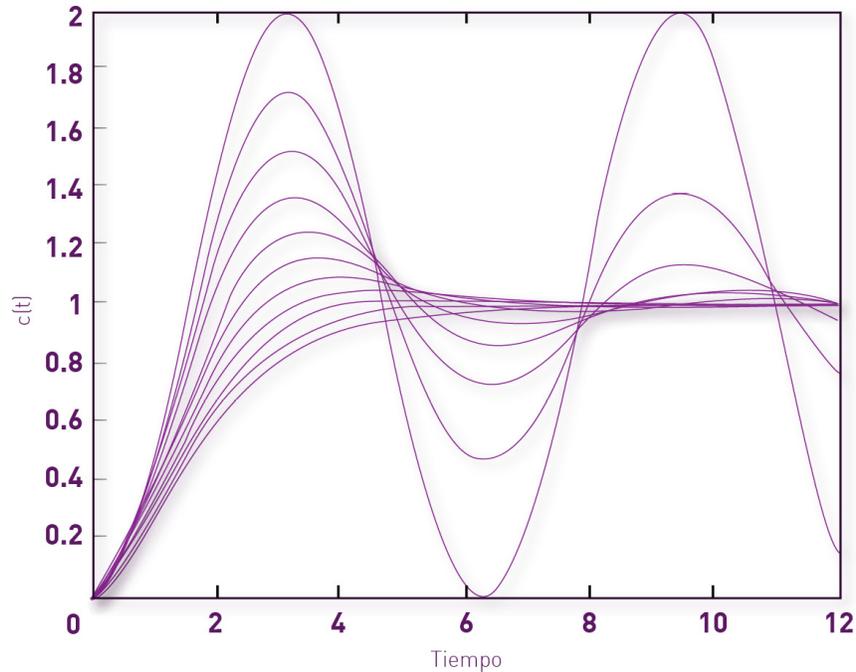


3.4 Parámetros de respuesta transitoria

Como hemos visto, la respuesta más rica en comportamientos transitorios es la respuesta subamortiguada. El factor de amortiguamiento relativo es el que origina esta riqueza; este factor, como su nombre lo indica está íntimamente ligado a la magnitud del amortiguamiento presente en el sistema. Aquí es importante notar que no necesariamente funciona sólo para sistemas mecánicos sino para cualquier tipo de sistemas físicos (recuerde que una resistencia eléctrica se comporta como un amortiguador).

En la figura podemos observar diferentes respuestas para diferentes valores del parámetro ξ , si se tiene $\xi=0$, tendremos una respuesta marginalmente estable, también conocida como de oscilaciones sostenidas. Si aumentamos un poco el valor a $\xi=0.1$ tenemos una respuesta que presenta un pico bastante significativo, si seguimos aumentando el valor de ξ , tendremos que la oscilación se atenúa cada vez más hasta llegar a valores de ξ que dan paso a sistemas críticamente amortiguados y sobreamortiguados.

Es importante caracterizar cada uno de estos comportamientos para diferentes valores de ξ pero, a fin de tener más información sobre la respuesta y poder cuantificar estas características, definiremos algunos parámetros importantes.

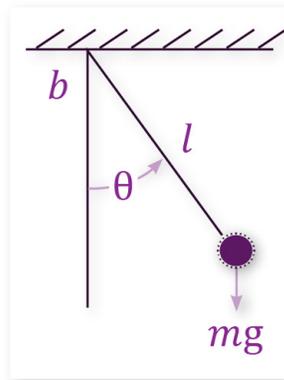


Tomaremos la respuesta del caso subamortiguado, dado que es la que presenta mayor variabilidad para ξ . Partimos de la respuesta:

$$y(t) = 1 - e^{-\sigma t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d} \operatorname{sen} \omega_d t \right)$$

Para: $\sigma = \xi \omega_n$ y $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$

Consideraremos cuatro parámetros:

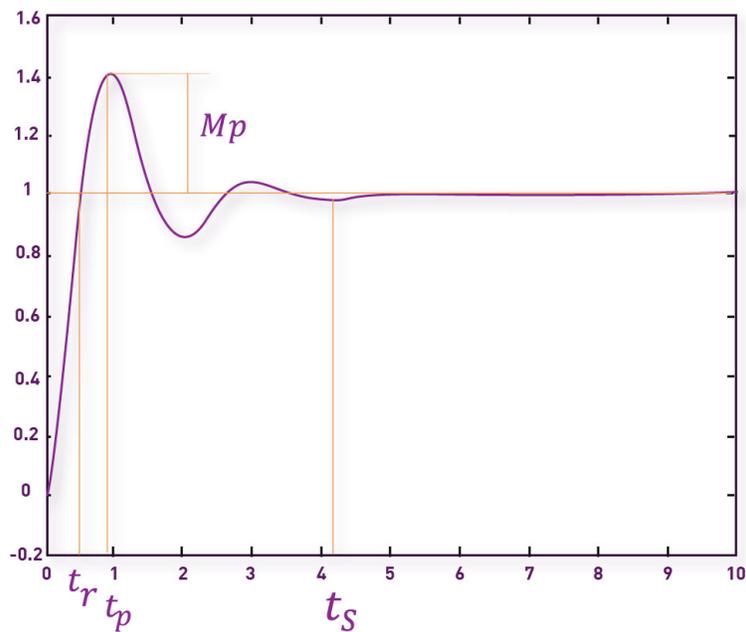


M_p : Máximo sobreimpulso

t_p : Tiempo de pico

t_r : Tiempo de crecimiento

t_s : Tiempo de establecimiento



Tiempo de crecimiento (t_r): es el tiempo requerido para que la respuesta pase, por primera vez, el valor en estado estacionario del sistema. Primero consideraremos el valor en estado estacionario para este sistema:

$$y_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2)} = 1$$

Es importante notar que este valor puede cambiar si el numerador de la función de transferencia es diferente. Ahora encontramos t_r

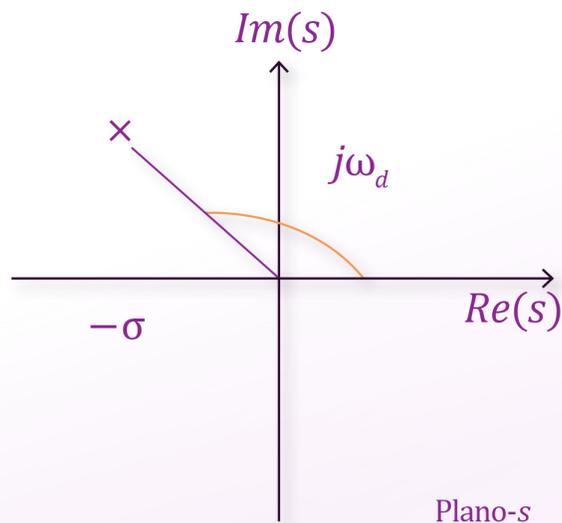
$$y_{ss} = 1 = 1 - e^{-\sigma t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d} \operatorname{sen} \omega_d t \right)$$

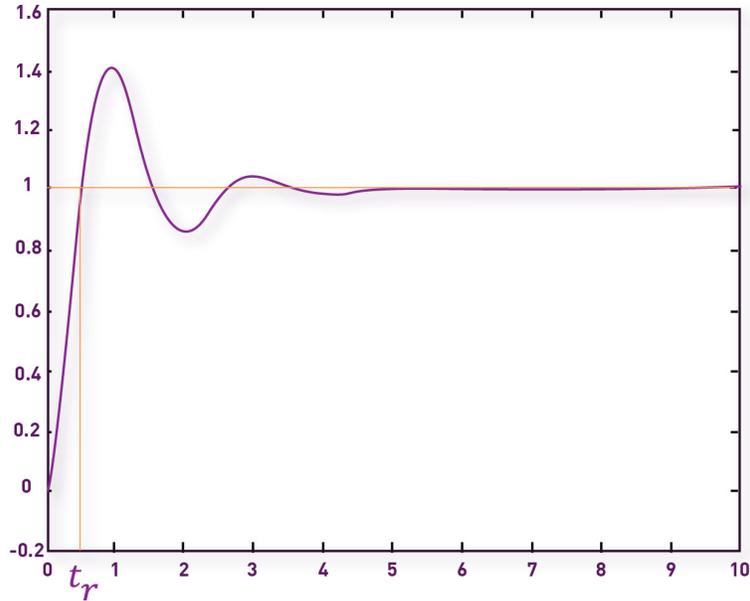
$$\cos \omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d} \operatorname{sen} \omega_d t = 0$$

$$1 + \frac{\sigma}{\omega_d} \tan \omega_d t = 0$$

Para evitar tener tiempos negativos, consideramos sólo ángulos positivos:

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \left(\pi - \tan^{-1} \left(\frac{\omega_d}{\sigma} \right) \right)$$





Tiempo de pico (t_p): es el tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer máximo.

Tomamos la salida del sistema:

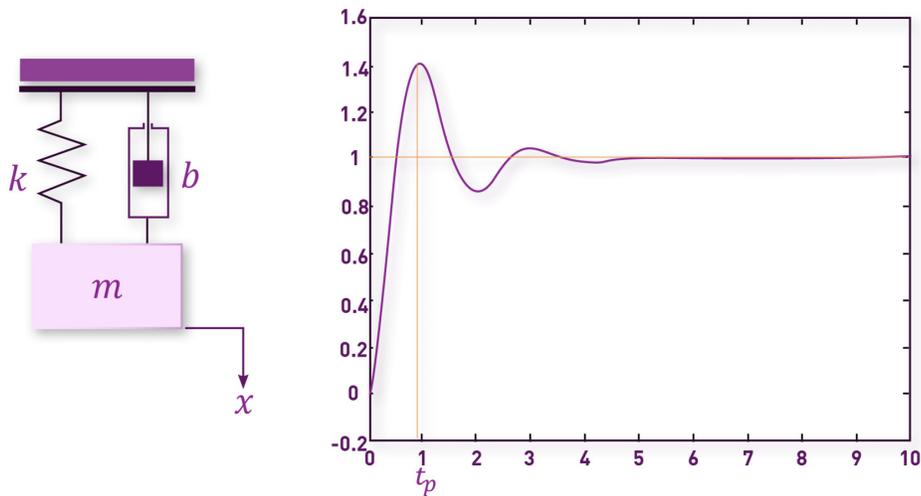
$$y(t) = 1 - e^{-\sigma t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d} \operatorname{sen} \omega_d t \right)$$

Y, derivando, encontramos los puntos máximos (y mínimos) de la respuesta:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\sigma t} \operatorname{sen} \omega_d t$$

$$\operatorname{sen} \omega_d t = 0 \Rightarrow \omega_d t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

Entonces, el valor que buscamos para $\omega_d t$ es π , luego: $t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$



El tiempo de pico es cuando se da el máximo sobreimpulso o sobretiro.

Máximo sobreimpulso (M_p): es el pico máximo de la curva de respuesta.

Podemos definir el sobretiro como:

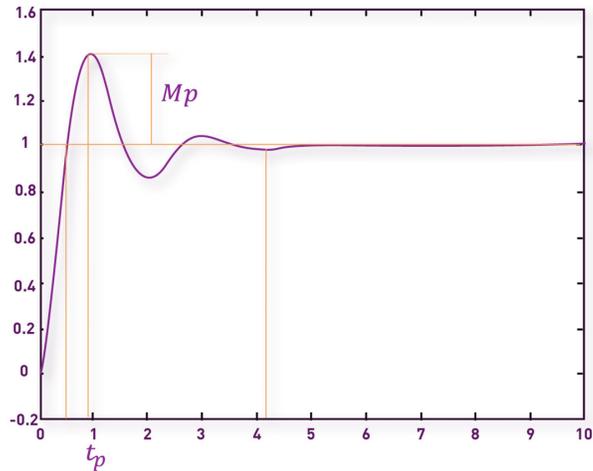
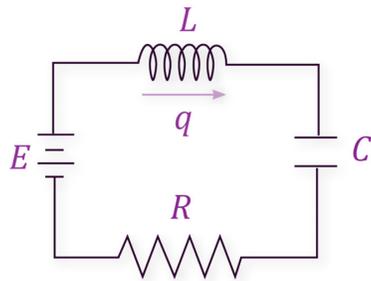
$$M_p = y(t_p) - y_{ss}$$

Es decir:

$$M_p = 1 - e^{-\sigma t_p} \left(\cos \omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d} \operatorname{sen} \omega_d t \right) - 1$$

Considerando que $t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$, entonces:

$$M_p = \exp \left(- \frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \times 100\%$$



Esta cantidad se acostumbra expresarla en porcentaje.

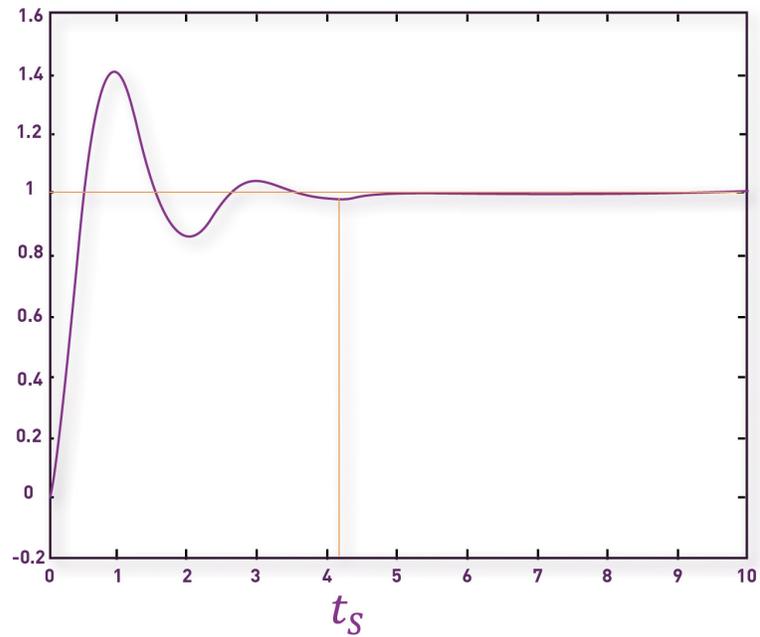
Tiempo de establecimiento (t_s): podemos considerarlo con base en la constante de tiempo. Para el sistema de segundo orden:

Es fácil observar en la ecuación anterior que la atenuación de la oscilación está gobernada por la exponencial $e^{-\sigma t}$, de tal manera que la rapidez con la que se atenúa es precisamente dada por el valor de $\sigma = \xi\omega_n$.

Entonces, podemos definir la constante de tiempo $\tau = 1 / \sigma$ y finalmente definir:

$$t_{s_{5\%}} = 3\tau = \frac{3}{\xi\omega_n}$$

$$t_{s_{2\%}} = 4\tau = \frac{4}{\xi\omega_n}$$



Ejemplo. Obtenga los parámetros de respuesta transitoria para el siguiente sistema:

$$G(s) = \frac{4}{s^2 + 2s + 2}$$

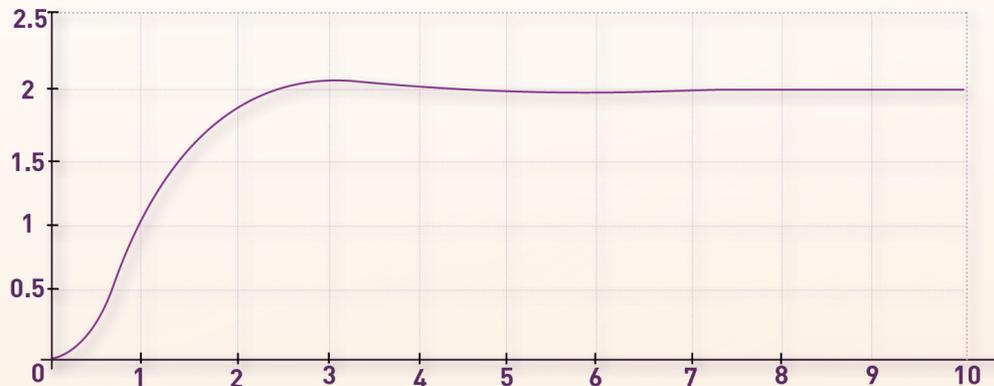
Solución.

$$t_r = 2.35s$$

$$t_p = 3.14s$$

$$Mp = 0.0086 = 8.6\%$$

$$t_s = 4s$$



LIGAS DE INTERÉS

[Applet de Java para graficar soluciones en tiempo de sistemas amortiguados]. Cambridge, MA: MIT.

<http://math.mit.edu/daimp/DampedVib.html>

Hohn, H., Miller H. y Claus, J. M. (2008). *Damped vibration*

Conclusión del capítulo 3

La respuesta en tiempo de un sistema depende de los parámetros de los componentes físicos que constituyen el sistema. Las relaciones entre estos parámetros y las variables entre sí, determinan el comportamiento de un sistema. En este capítulo hemos visto cómo generalizar el comportamiento de sistemas de primer y segundo orden, utilizando nuevos parámetros que, además, nos dan información para caracterizar los diferentes comportamientos que pueden presentar estos sistemas físicos.

Algo importante de remarcar es que cada comportamiento está asociado con una configuración específica de polos. Así, una pareja de polos complejos conjugados da origen a un sistema subamortiguado en el que la respuesta siempre será una oscilación que se atenúa con respecto al tiempo. Otras configuraciones dan lugar a otros comportamientos, pero siempre asociando la ubicación de los polos con el comportamiento específico.

El factor de amortiguamiento relativo, la frecuencia natural y la frecuencia natural amortiguada, son parámetros que se pueden utilizar en el diseño de sistemas físicos, estos parámetros son más útiles para sistemas subamortiguados, en los que sirven para caracterizar también los sobreimpulsos y los tiempos que presenta un sistema de este tipo.

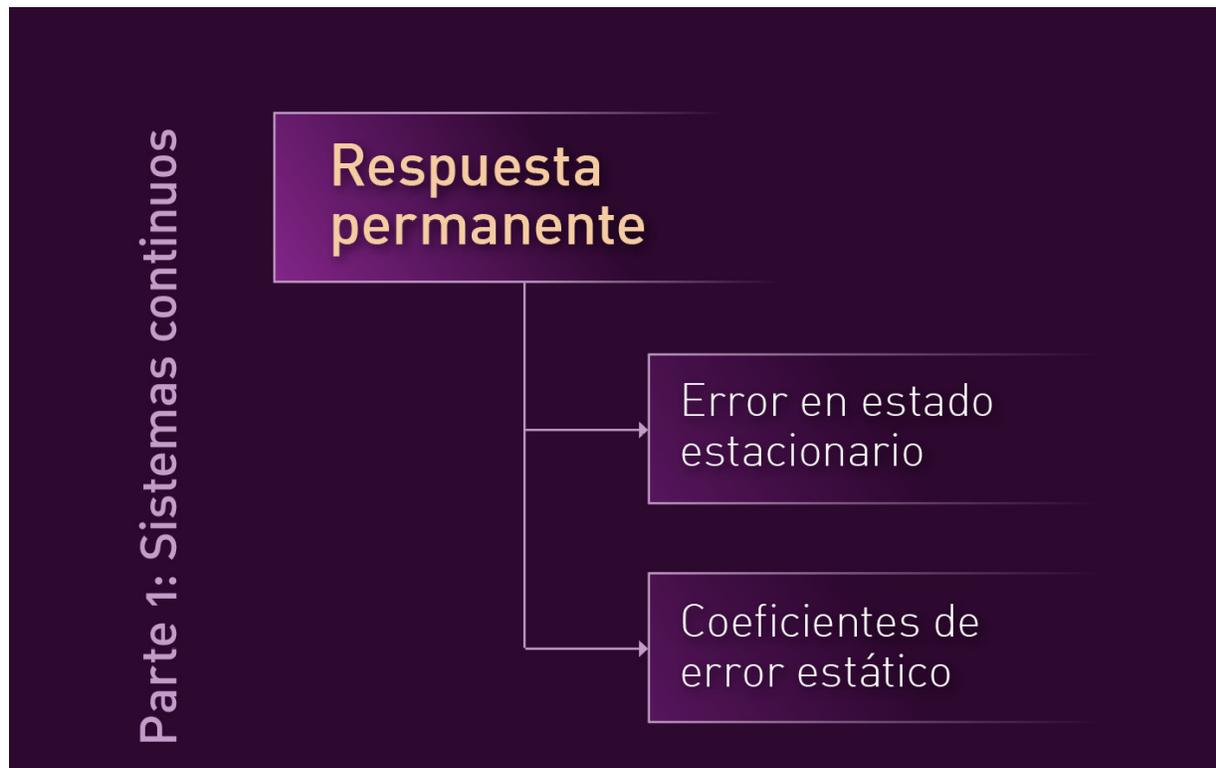
Actividades del capítulo 3

- [Actividad integradora](#)

Recursos del capítulo 3

- [PoleZeroApplet \(Versión 1.0\)](#). (2004)
- Applet de Java para obtener diferentes respuestas al escalón para diferentes configuraciones de polos.
- [Damped vibration](#). (2008)
- Applet de Java para graficar soluciones en tiempo de sistemas amortiguados.

4. Respuesta permanente



La respuesta permanente de un sistema se refiere a la respuesta del sistema cuando ha pasado mucho tiempo; es equivalente a la respuesta en estado estacionario del sistema.

Cuando se requiere que el sistema llegue a un valor específico, esta respuesta es la que se debe cuidar. El cambiar la respuesta requiere de una entrada específica, esta entrada deberá contar con cierta estructura que puede ser modificada en el dominio de Laplace para finalmente lograr el objetivo de control que se desee en este sentido.

En este capítulo veremos la definición de respuesta permanente y también los coeficientes de error en estado estacionario que describen el comportamiento de esta respuesta ante diferentes entradas.

4.1 Error en estado estacionario

Introduciremos un primer concepto de control. Considere una planta como la de la siguiente figura, inicialmente podemos pensar en tratar de que la salida llegue a la entrada o, dicho de otra manera, podemos cambiar el valor de la entrada para llegar a una salida deseada. Un ejemplo consiste en regular la temperatura del agua de la regadera del baño. Abrimos el flujo de agua caliente como una entrada al sistema para tener a la salida una temperatura deseada.



En el caso general, podemos definir un error entre la entrada y la salida, este error cambia con respecto al tiempo, entonces podemos escribir:

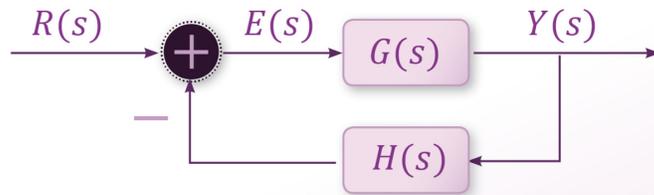
$$e(t) = r(t) - y(t)$$

Que en estado estacionario se puede escribir como:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

El ejemplo anterior se considera en lazo abierto, esto es, sin retroalimentación.

En general, en un sistema de control tenemos lazos cerrados de control. El principio de retroalimentación se intenta hacer automáticamente, por esto consideramos el sistema de lazo cerrado de la siguiente figura. Aquí consideramos la posibilidad de tener sensores; para esto suponemos un bloque $H(s)$ en el lazo de retroalimentación.



Suponemos que pueden existir también varias funciones de transferencia en el lazo principal, todas estas funciones están incluidas en $G(s)$.

Entonces, escribiendo las relaciones entre bloques y señales de la figura, tenemos:

$$E(s) = R(s) - G(s)H(s)E(s)$$

Despejando:

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Entonces, de acuerdo a la definición de error en estado estacionario:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

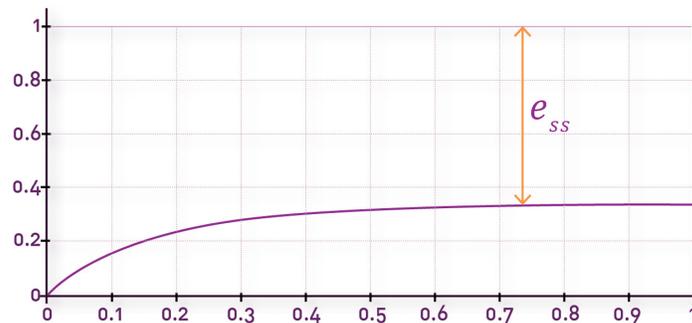
Aquí es importante notar que el error en estado estacionario no solamente depende de la dinámica de la planta y de los sensores sino que también depende de la entrada o referencia que se aplique al sistema.

Por ejemplo, imaginemos un sistema de primer orden de la forma: $G(s) = b/(s + a)$, y una $H(s) = 1$. Si aplicamos una entrada escalón al sistema en lazo cerrado tendremos un error:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+a}{s+a+b} = \frac{a}{a+b}$$



En la gráfica se muestra la respuesta en tiempo para $a = 4$ y $b = 2$.



El error en estado estacionario es:

$$\frac{a}{a+b}$$

es decir $2/3$.

4.2 Coeficientes de error estático

Dado que el error en estado estacionario cambia con respecto a la referencia o entrada que se utilice, es posible considerar diferentes errores típicos para diferentes entradas. De aquí definiremos los coeficientes de error estático.

Coefficiente de error estático de posición

Suponemos una entrada escalón:

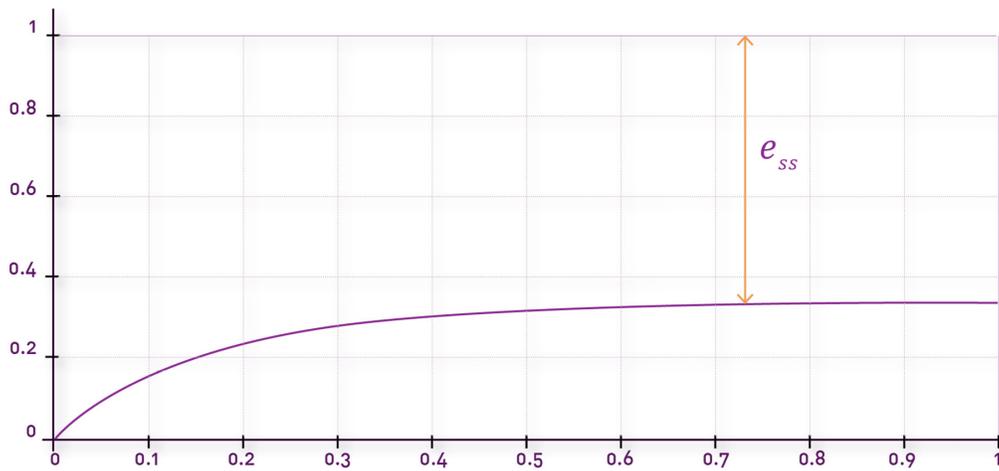
$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

Definimos:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$$

Entonces:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}$$



Coefficiente de error estático de velocidad

Suponemos una entrada rampa:

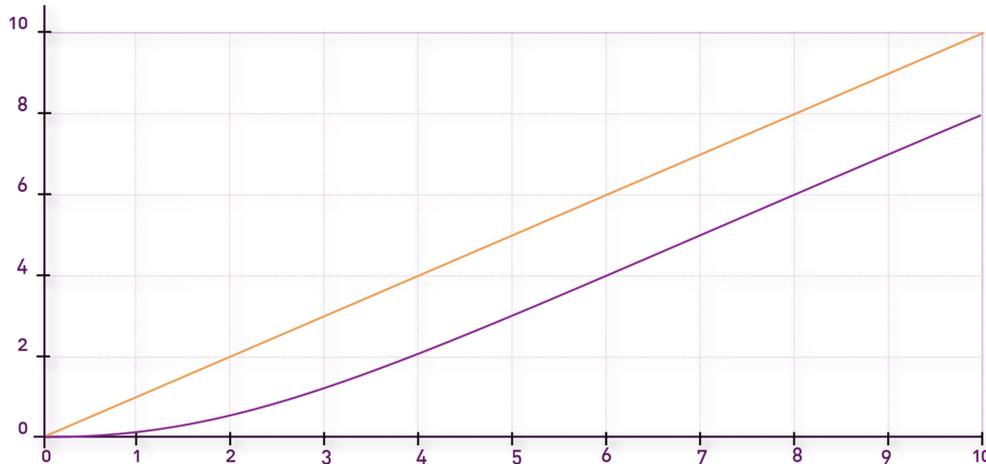
$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s [1 + G(s)H(s)]}$$

Definimos:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s)H(s)$$

Entonces:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$$



Coefficiente de error estático de aceleración

Suponemos una entrada parabólica:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 [1 + G(s)H(s)]}$$

Definimos:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)$$

Entonces:

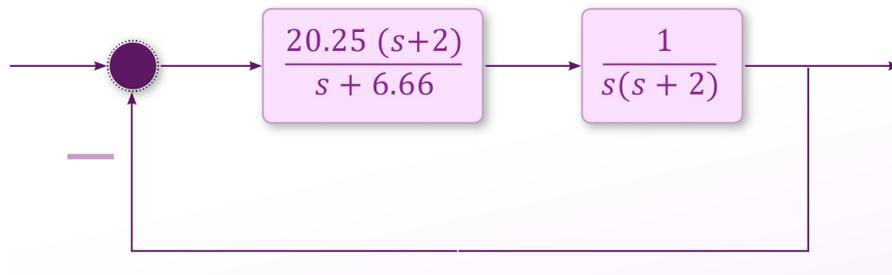
$$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

Con estos errores para diferentes entradas podemos reunir todos los resultados en una tabla. Antes definiremos lo siguiente: el **tipo** de un sistema es la cantidad de polos en el origen que tenga su función de transferencia:

Sistema tipo	Escalón	Rampa	Parábola
0	$\frac{1}{1 + K_p}$	∞	∞
1	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
2	0	0	$\frac{1}{K_a}$

Considerando los resultados resumidos en esta tabla, si tenemos un sistema tipo 0 y una entrada escalón, tendremos un error en estado estacionario de: $1/(1 + K_p)$.

Ejemplo: Considere el siguiente sistema, obtenga los coeficientes de error en estado estacionario para el sistema.



Solución: Obtenemos:

$$G(s) = \frac{20.25(s+2)}{s+6.66} \frac{20.25}{s+6.66} = \frac{1}{s(s+2)}$$

$$H(s) = 1$$

Entonces, sustituyendo en las fórmulas respectivas:

$$K_p \rightarrow \infty, K_v = 3.041, K_a = 0$$

Conclusión del capítulo 4

La forma de caracterizar la respuesta permanente de un sistema es mediante el error en estado estacionario junto con los coeficientes de error estático. Hemos visto cómo se puede medir este error, tanto en lazo abierto como en lazo cerrado, así como los coeficientes de error estático de posición, velocidad y aceleración, que también son útiles para especificar objetivos de control en un sistema de lazo cerrado.

El tipo de sistema es un elemento muy importante a considerar para lograr que el error en estado estacionario se anule. A través del capítulo se ha hecho hincapié en el hecho de que, si se aumenta el tipo del sistema, se logran resultados favorables en hacer el error cero. El agregar un polo en el origen es exactamente lo mismo que añadir un integrador electrónico a la entrada de la planta, este concepto es sumamente importante pues con esto comenzamos a relacionar estrategias de control con el mundo real. Un integrador puede realizarse físicamente empleando un amplificador operacional con una resistencia y un capacitor.

Un punto importante a aclarar es el hecho de que, si aumentamos la cantidad de integradores en un sistema para una misma entrada, no se hace “más cero” el error. En un capítulo posterior se verá que, dependiendo del sistema, es posible llegar a desestabilizar el sistema si se agregan demasiados integradores al lazo de control.

LIGAS DE INTERÉS

Program CC (2011):

[Amplificadores operaciones \(2011\)](#)

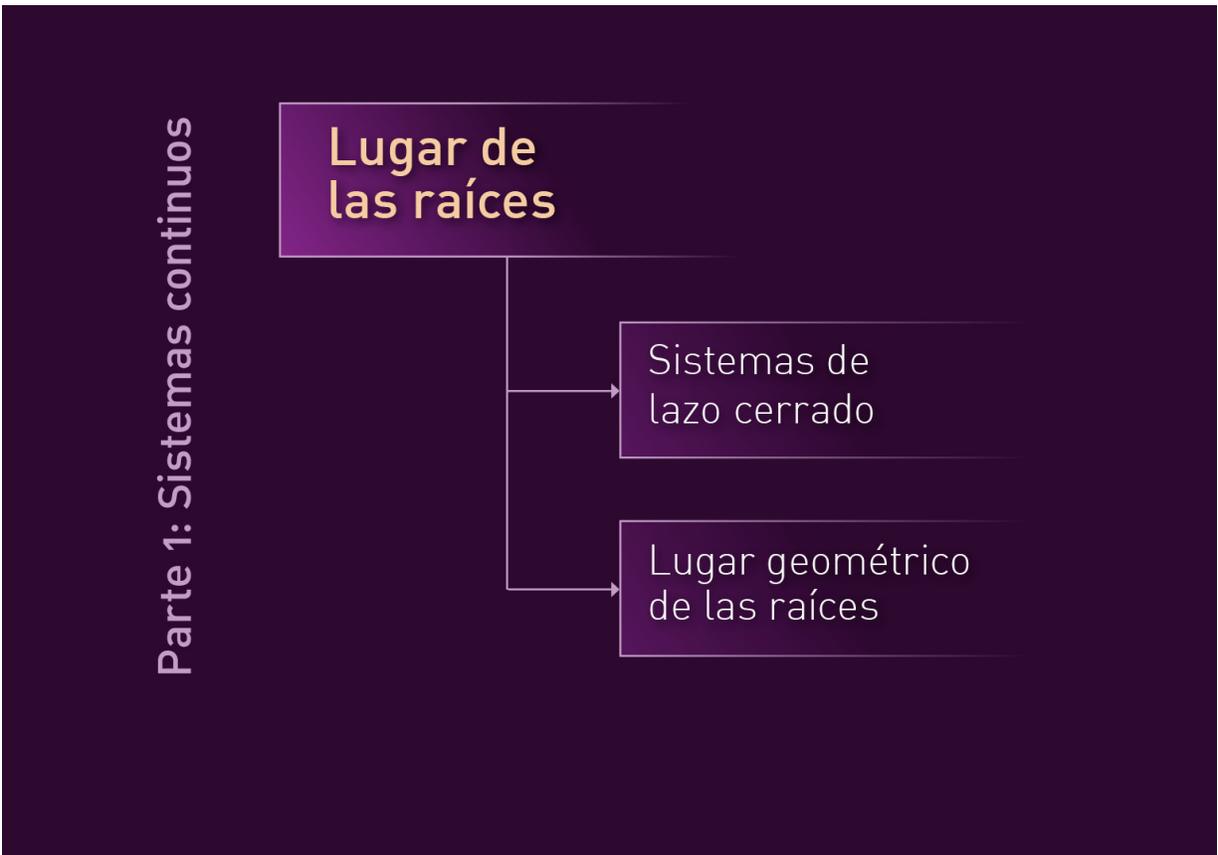
Actividades del capítulo 4

- [Actividad integradora](#)

Recursos del capítulo 4

- Program CC (2011).
- [Amplificadores operacionales](#) (2011).

5. Lugar de las raíces



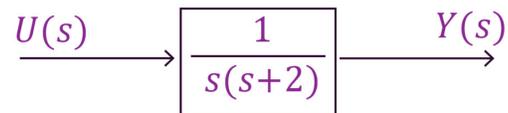
El concepto de retroalimentación es altamente utilizado en ingeniería de control, esto es debido en gran medida a que representa la posibilidad de corregir una salida para tener un comportamiento deseado en un sistema específico. Matemáticamente es posible modelar este principio de retroalimentación mediante las funciones de transferencia y señales adecuadas.

En este capítulo explotaremos el principio de retroalimentación para poder ajustar el comportamiento de un sistema físico sin tener que cambiar sus parámetros. La idea básica consiste en generar una señal de entrada proporcionada por otra función de transferencia (controlador) para cambiar la salida global del sistema en lazo cerrado.

El diseño de controladores basados en lugar de las raíces es uno de los temas fundamentales en lo que a ingeniería de control se refiere. Analizaremos distintas estrategias de control para poder satisfacer objetivos específicos.

5.1 Sistemas de lazo cerrado

Considere el sistema:



Sabemos que la respuesta del sistema está gobernada por la ubicación de los polos de la función de transferencia:

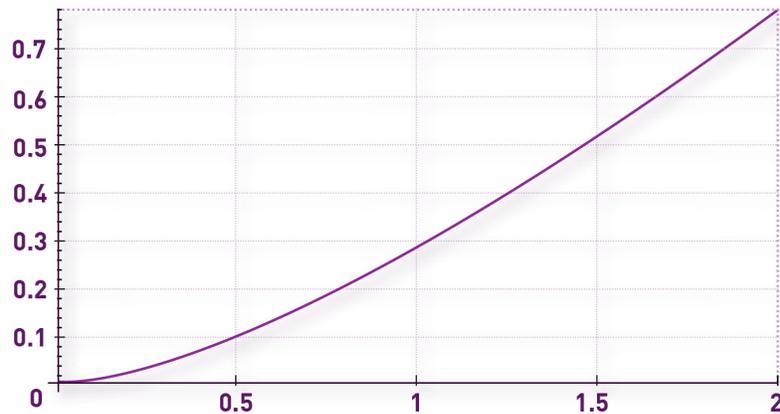
$$\begin{aligned} s_1 &= 0 \\ s_2 &= -2 \end{aligned}$$

Y la respuesta del sistema ante una entrada escalón está dada por:

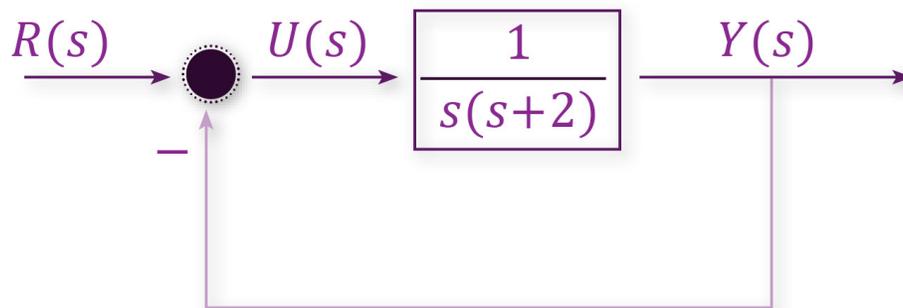
$$y(t) = \frac{1}{4}(e^{-2t} - 1 + 2t)$$

¿Cómo se puede cambiar su comportamiento?

Cambiar sus parámetros no siempre es viable. Tendríamos que cambiar de planta.



Principio de retroalimentación:



La función de transferencia de lazo cerrado estará dada por:

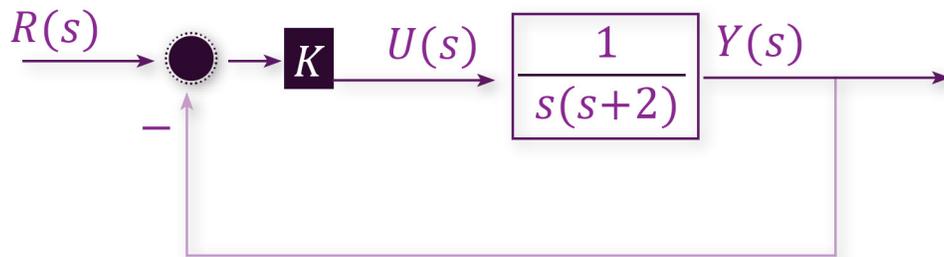
$$G_{LC}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

Polos:
 $s_1 = s_2 = -1$

El solo hecho de aplicar la retroalimentación provoca un cambio de polos de lazo cerrado. Ahora nos podemos preguntar, **¿es posible cambiar los polos a otra ubicación?**

Utilizando el principio de retroalimentación, podríamos introducir un bloque sencillo, una **ganancia**.



Cambia la función de transferencia y a su vez cambia la ubicación de los polos de lazo cerrado:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + 2s + K}$$

Polos:

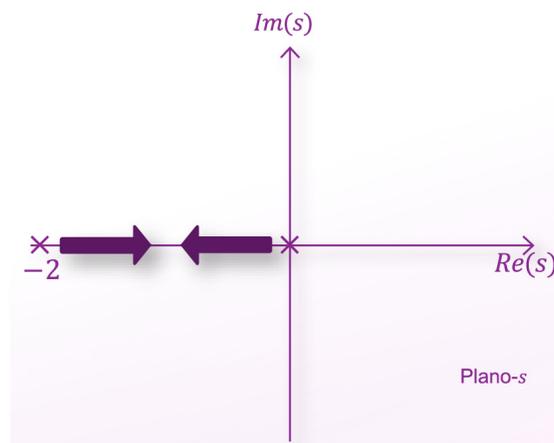
$$s_1 = s_2 = -1 \pm \sqrt{1-K}$$

Ahora la ubicación de los polos de lazo cerrado depende de la ganancia K . Si intentamos graficar las distintas posiciones de los polos de lazo cerrado en el **plano-s** tendremos un **lugar geométrico** formado por todas las raíces de la ecuación característica de lazo cerrado del sistema. Para valores de $K < 1$ tenemos raíces reales distintas, para valores de $K > 1$ tendremos raíces complejas.

K	Polo1	Polo2
0	0	-2
0.1	-0.0513167	-1.9486833
0.2	-0.10557281	-1.89442719
0.3	-0.16333997	-1.83666003
0.4	-0.22540333	-1.77459667
0.5	-0.29289322	-1.70710678
0.6	-0.36754447	-1.63245553
0.7	-0.45227744	-1.54772256
0.8	-0.5527864	-1.4472136
0.9	-0.68377223	-1.31622777
1	-1	-1

Más aún, si observamos con detenimiento, para $K=0$ tenemos los polos de lazo abierto del sistema.

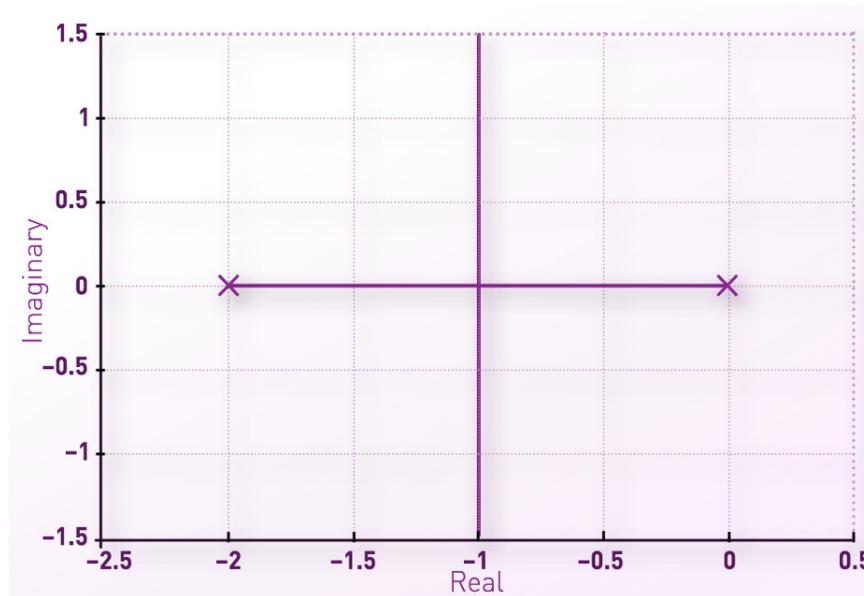
Si aumentamos K , el polo que inicia en el origen se desplaza hacia la izquierda y el polo que inicia en -2 se desplaza hacia la derecha como se muestra en la figura.



Si seguimos aumentando el valor de K , los dos polos llegan a estar en el mismo lugar $s=-1$. Para $K > 1$, empezamos a tener raíces complejas con -2 como parte real y con la parte imaginaria aumentando.

Graficamos el comportamiento y queda como en la figura. Éste es

el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica de lazo cerrado.



Esto implica que estamos cambiando el comportamiento del sistema en lazo cerrado. No estamos alterando en modo alguno el sistema original en lazo abierto pero, al cerrar el lazo e incluir esta ganancia, podemos tener respuestas sobreamortiguadas, críticamente amortiguadas y subamortiguadas. Ahora, la pregunta automática es, **¿esto se logra sólo tabulando?** Imaginemos un sistema de orden 7. Esto puede ser labor de todo un día.

LIGAS DE INTERÉS

Program CC (2011)

5.2 Lugar geométrico de las raíces

Partimos de la función de transferencia de lazo cerrado:

$$G_{Lc}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

Sabemos que la ecuación característica de lazo cerrado es:

$$1+G(s)H(s)=0$$

Cuyas raíces son precisamente los polos de lazo cerrado. Entonces, es posible cambiar sus modos de comportamiento variando algún parámetro. No olvidemos que $s \in \mathbb{C}$, por tanto $G(s)H(s) \in \mathbb{C}$, es decir la ecuación anterior se puede escribir de la siguiente manera:

$$G(s)H(s) = -1$$

Entonces, el lugar de las raíces permite estudiar el efecto de un parámetro del sistema en la ubicación de los **polos de lazo cerrado** a partir de la **función de transferencia de lazo abierto**.

Podemos definir ahora:

El lugar de las raíces es el lugar geométrico de los puntos sobre el plano- s donde el ángulo es $\pm(2N+1)\pi$ y la magnitud es unitaria.

Ejemplo 1. Averigüe si el punto $s_0 = -1 + 2j$ forma parte del lugar de las raíces.

$$G(s) = \frac{s+1}{s[(s+2)^2+4](s+5)}$$

Solución. (primer método): Consideramos la ecuación:

$$G(s)H(s) = -1$$

Es decir:

$$G(s_0)H(s_0) = 1 \angle \pm 180^\circ (2N+1), N=0,1,2, \dots$$

Sustituimos el valor de $s_0 = -1 + 2j$

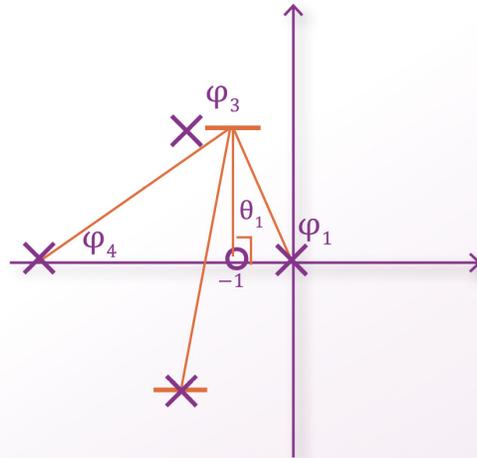
$$G(-1+2j) = 0.00485 \angle (-129.08)$$

De aquí podemos concluir que s_0 no forma parte del lugar de las raíces, en otras palabras no es un polo de lazo cerrado.

Ejemplo 2. Averigüe si el punto $s_0 = -1 + 2j$ forma parte del lugar de las raíces.

$$G(s) = \frac{s+1}{s[(s+2)^2+4](s+5)}$$

Solución (segundo método): Geométricamente, podemos representar el punto de prueba $s_0 = -1 + 2j$ en el plano de Argand.



El ángulo total de $G(s)$ en $s=s_0$ es la suma de los ángulos de los ceros menos los ángulos de los polos.

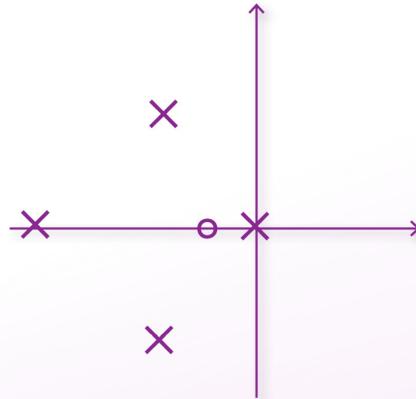
$$\begin{aligned}
 G(s_0) &= \theta_1 - \phi_1 - \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 \\
 &= 90^\circ - \left(180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right)\right) - \tan^{-1}\left(\frac{4}{1}\right) - 0 - \tan^{-1}\left(\frac{2}{4}\right) \\
 &= 90^\circ - 116.56^\circ - 75.96^\circ - 26.56^\circ \\
 &= -129.08^\circ
 \end{aligned}$$

De modo que concluimos que no es polo de lazo cerrado.

No es necesario tabular todas las posibles raíces de la ecuación característica para diferentes valores de un parámetro. Walter Evans en 1948, publicó un método para poder bosquejar este lugar geométrico; a este método se le conoce como método de Evans o método del lugar de las raíces, y consiste en una serie de reglas que dan pautas para construirlo.

Reglas para construir el lugar de las raíces:

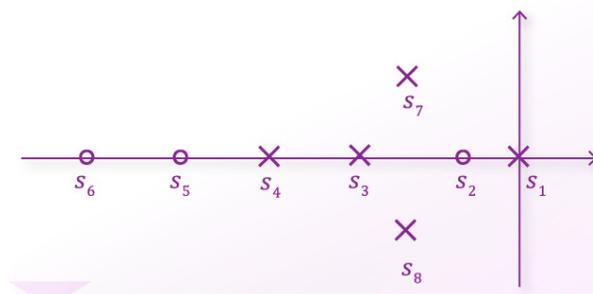
Regla 0. Ubicar polos y ceros de lazo abierto en el plano-s



$$G(s) = \frac{s+1}{s[(s+2)^2+4](s+5)}$$

Regla 1. Lugar de las raíces sobre el eje real

Suponga que un sistema tiene la siguiente configuración de polos y ceros. Se coloca un punto de prueba s_0



Si s_0 se coloca a la derecha de s_1

$$\begin{aligned} LG(s_0) &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \phi_1 - \phi_2 - \phi_3 \\ &= 0^\circ + 0^\circ + 0^\circ - 0^\circ - 0^\circ - 0^\circ \\ &= 0^\circ \Rightarrow \text{NO ES LUGAR DE LAS RAÍCES} \end{aligned}$$

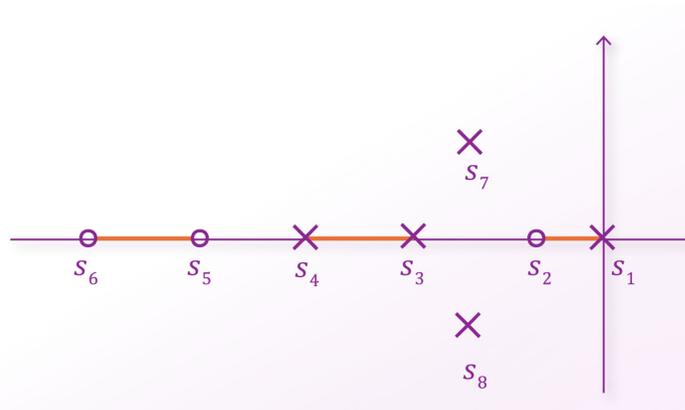
Si $s_2 < s_0 < s_1$

$$\begin{aligned} LG(s_0) &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \phi_1 - \phi_2 - \phi_3 \\ &= 0^\circ + 0^\circ + 0^\circ - 180^\circ - 0^\circ - 0^\circ \\ &= -180^\circ \Rightarrow \text{NO ES LUGAR DE LAS RAÍCES} \end{aligned}$$

Si $s_3 < s_0 < s_2$

$$\begin{aligned} LG(s_0) &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \phi_1 - \phi_2 - \phi_3 \\ &= 180^\circ + 0^\circ + 0^\circ - 180^\circ - 0^\circ - 0^\circ \\ &= 0^\circ \Rightarrow \text{NO ES LUGAR DE LAS RAÍCES} \end{aligned}$$

Y así sucesivamente. Se llega al siguiente lugar geométrico sobre el eje real.



Regla 2. Asíntotas

Hacia dónde se dirigen los polos de lazo cerrado cuando $K \rightarrow \infty$.

Considere:

$$1 + KG(s)H(s) = 0$$

$$K = \frac{-1}{G(s)H(s)}$$

$$K = \infty \text{ cuando } G(s) = 0$$

El lugar de las raíces termina en los ceros de lazo abierto. Buscamos otra condición para que $G(s) = 0$

Considere:

$$1 + K \frac{B(s)}{A(s)} = 0$$

$$1 + K \frac{s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = 0$$

Si $n > m$ $G(s)H(s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \infty$. En este caso existen $n - m$ ceros en infinito.

Por otra parte, podemos aproximar la ecuación característica (EC) como

$$1 + K \frac{1}{(s-a)^{n-m}} = 0$$

Para cuando s y K tienden a infinito. El lugar geométrico de la ecuación anterior es asintótico con respecto al original. Ahora colocamos un punto de prueba en $s_0 = Rej\theta$ para $R \rightarrow \infty$. Para que s_0 sea LR deberá cumplir la condición de ángulo.

$$\begin{aligned} \text{ang}\left(K \frac{1}{(s-a)^{n-m}}\right) &= \pm\pi (2N+1) \\ &= -(n-m)\text{ang}(s-a) \end{aligned}$$

Definiendo:

$$y = \text{ang}(s-a)$$

$$\gamma = \frac{\pm\pi(2N+1)}{n-m}; N=0,1,2,\dots$$

γ es conocida como el ángulo de las asíntotas.

Consideramos las asíntotas como rectas y como tales será necesario encontrar, además de la pendiente (ángulo), un punto que pertenezca a esta recta. Entonces para caracterizar la asíntota completamente necesitamos saber también la **intersección de la asíntota con el eje real (α)**.

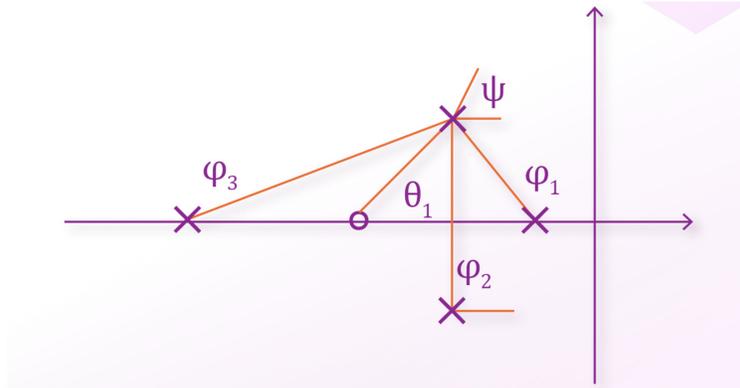
Se puede demostrar que:

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n \text{Re}(p_i) - \sum_{j=1}^m \text{Re}(z_j)}{n-m};$$

Regla 3. Ángulo de salida de polos (llegada a ceros) complejos

Si se tienen polos complejos, al cerrar el lazo y aumentar el valor de K , tendremos que estos polos se desplazan; la pregunta es hacia dónde salen. En caso de tener ceros, sabiendo que los polos de lazo cerrado llegan a los ceros de lazo abierto cuando $K \rightarrow \infty$, estos polos llegarán con un cierto ángulo. Para encontrar estos ángulos ψ se coloca un punto de prueba exactamente en el mismo lugar de los polos (ceros) complejos y se aplica condición de ángulo:

$$-\psi + \theta_1 - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 = \pm (2N + 1)\pi; N=0,1,2,\dots$$



Regla 4. Cruce del lugar de las raíces con el eje imaginario

Hacemos $s=j\omega$ en $1+G(s)H(s)=0$ y resolviendo para K y ω

Regla 5. Puntos de ruptura (breakpoints)

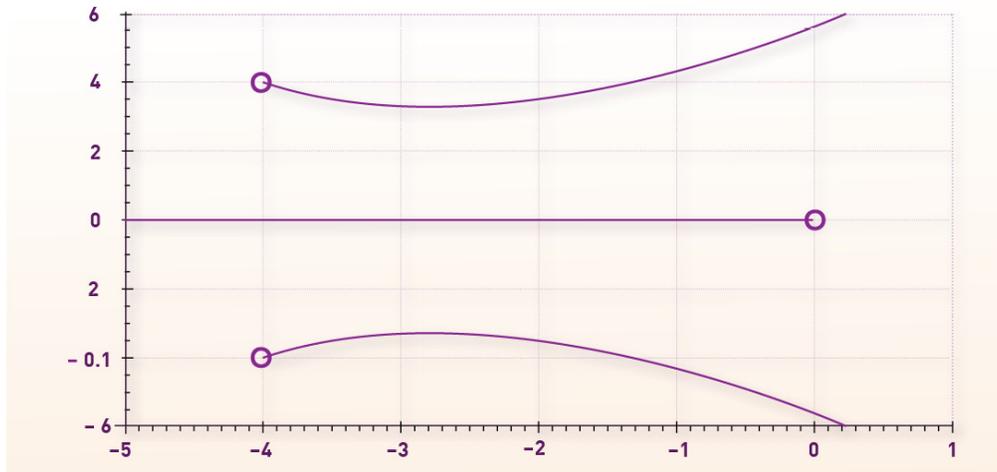
Encontramos

$$\left. \frac{dK}{ds} \right|_{s=\sigma_b} = 0$$

Y verificamos que el resultado sea parte del lugar de las raíces.

Ejemplo. Bosqueje el lugar de las raíces para la siguiente función de transferencia de lazo abierto

$$G(s) = \frac{1}{s((s+4)^2 + 16)}$$



Conclusión del capítulo 5

El concepto de retroalimentación es sumamente importante, en este capítulo hemos visto que, con sólo retroalimentar la salida del sistema, podemos cambiar de lugar los polos de lazo cerrado y, sobre todo, si agregamos una simple ganancia al lazo principal es posible tener más flexibilidad para ubicar las raíces de la ecuación característica del sistema y así cambiar el comportamiento del mismo.

Con un simple controlador proporcional, podemos tener una gran variedad de comportamientos, aunque estos comportamientos están asociados sólo al lugar geométrico que resulta, es decir, al lugar de las raíces. Si se requiere un comportamiento asociado a un punto en el plano- s que no forma parte de este lugar geométrico, entonces será necesario cambiar la forma del lugar de las raíces y “forzar” al sistema a que llegue al polo deseado para algún valor de un parámetro accesible.

El conocer la forma del lugar geométrico que forman todas las raíces de la ecuación característica es de vital importancia para el diseño de controladores.

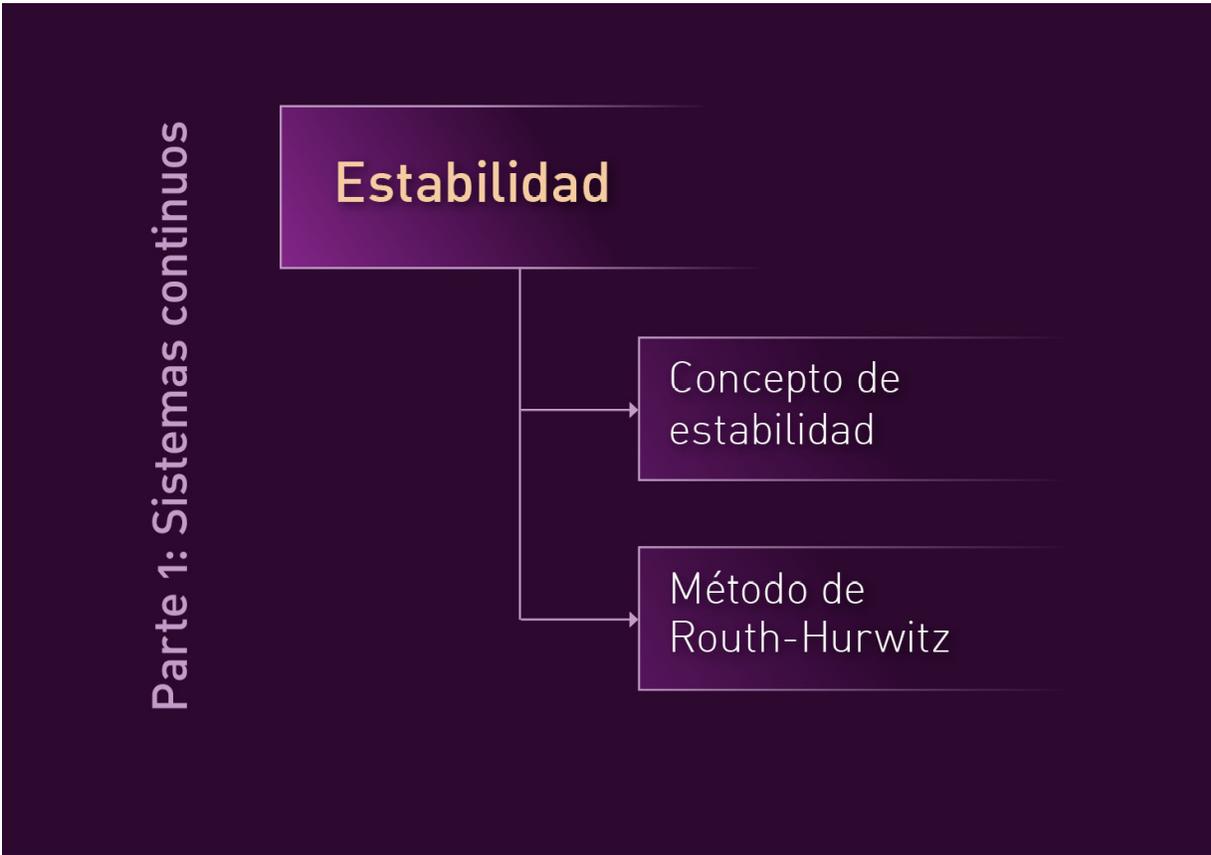
Actividades del capítulo 5

- [Actividad integradora](#)

Recursos del capítulo 5

- Program CC (2011).

6. Estabilidad



En general, la estabilidad de un sistema se refiere a la magnitud de las señales involucradas en el sistema. Particularmente se requiere que la salida de un sistema tenga una magnitud que esté dentro de ciertos límites, el concepto es relativamente sencillo, el problema es poder determinar en qué momentos un sistema puede llegar a ser inestable. Eso es lo que nos preocupa principalmente.

En este capítulo veremos métodos cualitativos y cuantitativos para poder determinar la estabilidad de un sistema a través de las raíces de la ecuación característica del sistema, es decir de sus polos. Resulta lógico emplear la ubicación de los polos dado que estos determinan el comportamiento de un sistema físico.

En el diseño de controladores, hemos visto que es necesario asignar un valor a los parámetros de un controlador, esto se conoce

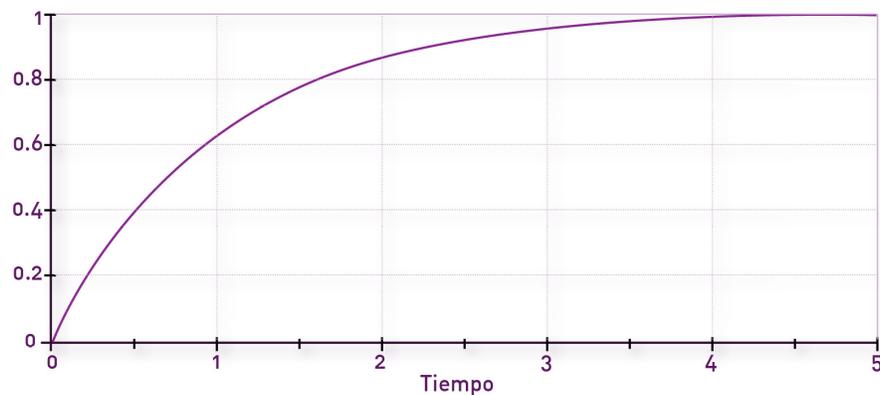
como sintonización, al variar estos parámetros cambiamos la respuesta del sistema y en consecuencia es posible que tengamos conjuntos de valores que hagan que el sistema pueda llegar a desestabilizarse en lazo cerrado. Es por esta razón que este tema es de alta importancia para el diseño de controladores.

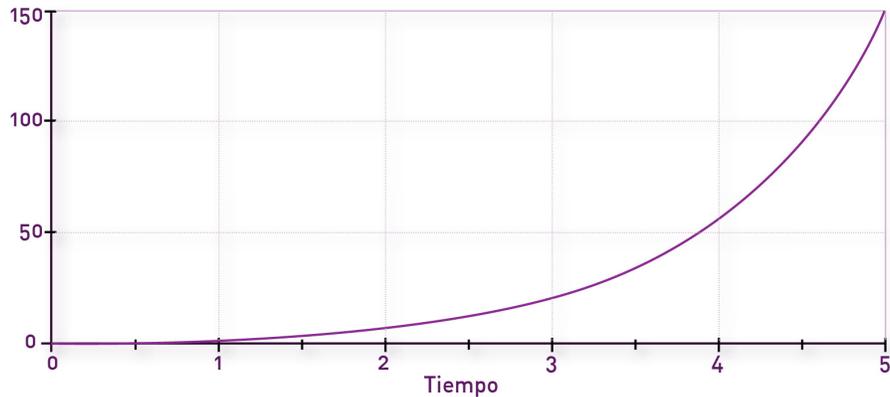
6.1 Concepto de estabilidad

Suponga un sistema de la forma:

$$G(s) = \frac{1}{s + a}$$

Si aplicamos una entrada escalón, dependiendo del signo de a tendremos dos tipos de respuestas: para $a > 0$, la respuesta será como en la primera gráfica. Pero si $a < 0$, la respuesta será como en la segunda.





Aquí conviene recordar el concepto de **cota**, decimos que una señal $y(t)$ está acotada si $a_{\min} < y(t) < a_{\max}$ para todo valor de t . Es decir, podemos decir para el ejemplo anterior, que la salida es acotada si $a > 0$ y si $a < 0$ decimos que la salida es no acotada.

Un concepto básico de estabilidad está íntimamente relacionado conocer si la salida es acotada o no, de tal manera que definimos que:

Un sistema lineal invariante en tiempo (SLIT) es estable si para una entrada acotada tenemos una salida acotada, y será inestable si para una entrada acotada la salida es no acotada.

Siguiendo en este orden de ideas, y considerando la ubicación de los polos de la función de transferencia, podemos hacer otra definición:

Un sistema será estable sólo si todos y cada uno de los polos de la función de transferencia tienen parte real positiva. Será inestable si al menos uno de sus polos tiene parte real negativa.

Cabe mencionar que esta definición de estabilidad depende solamente de los polos de la función de transferencia.

Averigüe si los siguientes sistemas son estables:

Ejemplo 1:
$$G(s) = \frac{3(s-1)}{s^2 + 2s + 1}$$

Solución: Dado que la estabilidad sólo depende de los polos, verificamos que los polos se ubican en, y al tener parte real negativa, la salida será acotada. Entonces podemos decir que el sistema es estable.

Ejemplo 2:

$$G(s) = \frac{s}{s(s^9 + 3s^8 + 2s^7 + 5s^6 + 12s^5 + 2s^4 + s^3 + 31s^2 + 15s + 144)}$$

Solución: Para este ejemplo necesitaremos de la ayuda de algún software que pueda encontrar raíces de polinomios de al menos orden 9.

Utilizamos ProgramCC, introducimos:

$$CC>P=s^9+3*s^8+2*s^7+5*s^6+12*s^5+2*s^4+s^3+31*s^2+15*s+144$$

Tendremos como resultado:

1: -0.3787775 + 1.3786119j
 2: -0.3787775 - 1.3786119j
 3: 1.2864454 + 0.7579903j
 4: 1.2864454 - 0.7579903j

5: 0.6348746 + 1.6542101j
 6: 0.6348746 - 1.6542101j
 7: -1.8075044 + 0.8986988j
 8: -1.8075044 - 0.8986988j
 9: -2.4700763 + 0j

Ejemplo 3:

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + K}$$

Solución: Para este sistema es claro que las raíces del polinomio denominador dependen de K , por esta razón, la estabilidad del sistema también depende de K .

Podemos encontrar las raíces de la siguiente manera:

$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - K}$$

Haciendo un análisis sencillo, podemos decir que el sistema es estable para $K > 0$. Nótese que para $K = 0$ tenemos un polo en el origen y por definición tendríamos un sistema marginalmente estable.

Cuando se tiene el caso de que la ecuación característica presente algún parámetro variable, inicialmente, necesitamos tener la solución de un polinomio de orden n , es decir generalizar este caso. Esto no es práctico en la realidad pues no contamos con solución analítica para un polinomio de orden 7, por ejemplo.

En estos casos es conveniente utilizar alguna otra estrategia para determinar la estabilidad del sistema.

Es importante aquí comentar que la estabilidad depende solamente de la región en donde se encuentren los polos de lazo cerrado, no necesariamente de su ubicación exacta, por esta razón

no es estrictamente necesario saber los valores de las raíces sino solo si tienen parte real positiva o no.

En la siguiente sección veremos un método que podemos utilizar para este efecto: el método de Routh-Hurwitz.

6.2 Método de Routh-Hurwitz

El método que consiste en la tabla de Routh y el criterio de Hurwitz, es utilizado para determinar la ubicación de las raíces de un polinomio en el plano complejo. Es por esta razón que se utiliza para determinar la estabilidad de un SLIT.

Considere un polinomio de la forma:

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

La tabla de Routh se construye de la siguiente forma:

s^n	a_0	a_2	a_4	...
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	
s^{n-2}	$\frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$\frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$...	
\vdots	\vdots	\vdots		
s^0	a_n			

Se pueden presentar algunos casos especiales:

Renglón de ceros: en este caso, sustituir el renglón de ceros por los coeficientes de la derivada del polinomio auxiliar (el inmediato superior).

Cero en la primera columna: reemplazar ceros con $\varepsilon \rightarrow 0$, una vez terminada la tabla, obtener el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

El criterio de Hurwitz establece que:

“El número de raíces con parte real positiva es igual al número de cambios de signo de la primera columna de la tabla de Routh”.

Ejemplo: Considere la siguiente función de transferencia y determine el rango de estabilidad para K .

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + K}$$

De la siguiente tabla podemos verificar que para que no haya cambio de signo, necesitamos que K sea positiva, confirmando el rango de estabilidad del ejemplo anterior: $K > 0$.

s^2	1	K
s^1	2	
s^0	K	

Conclusión del capítulo 6

El concepto de retroalimentación es sumamente importante, en este capítulo hemos visto que, con sólo retroalimentar la salida del sistema, podemos cambiar de lugar los polos de lazo cerrado y, sobre todo, si agregamos una simple ganancia al lazo principal es posible tener más flexibilidad para ubicar las raíces de la ecuación característica del sistema y así cambiar el comportamiento del mismo.

Con un simple controlador proporcional, podemos tener una gran variedad de comportamientos, aunque estos comportamientos están asociados sólo al lugar geométrico que resulta, es decir, al lugar de las raíces. Si se requiere un comportamiento asociado a un punto en el plano- s que no forma parte de este lugar geométrico, entonces será necesario cambiar la forma del lugar de las raíces y “forzar” al sistema a que llegue al polo deseado para algún valor de un parámetro accesible.

El conocer la forma del lugar geométrico que forman todas las raíces de la ecuación característica es de vital importancia para el diseño de controladores.

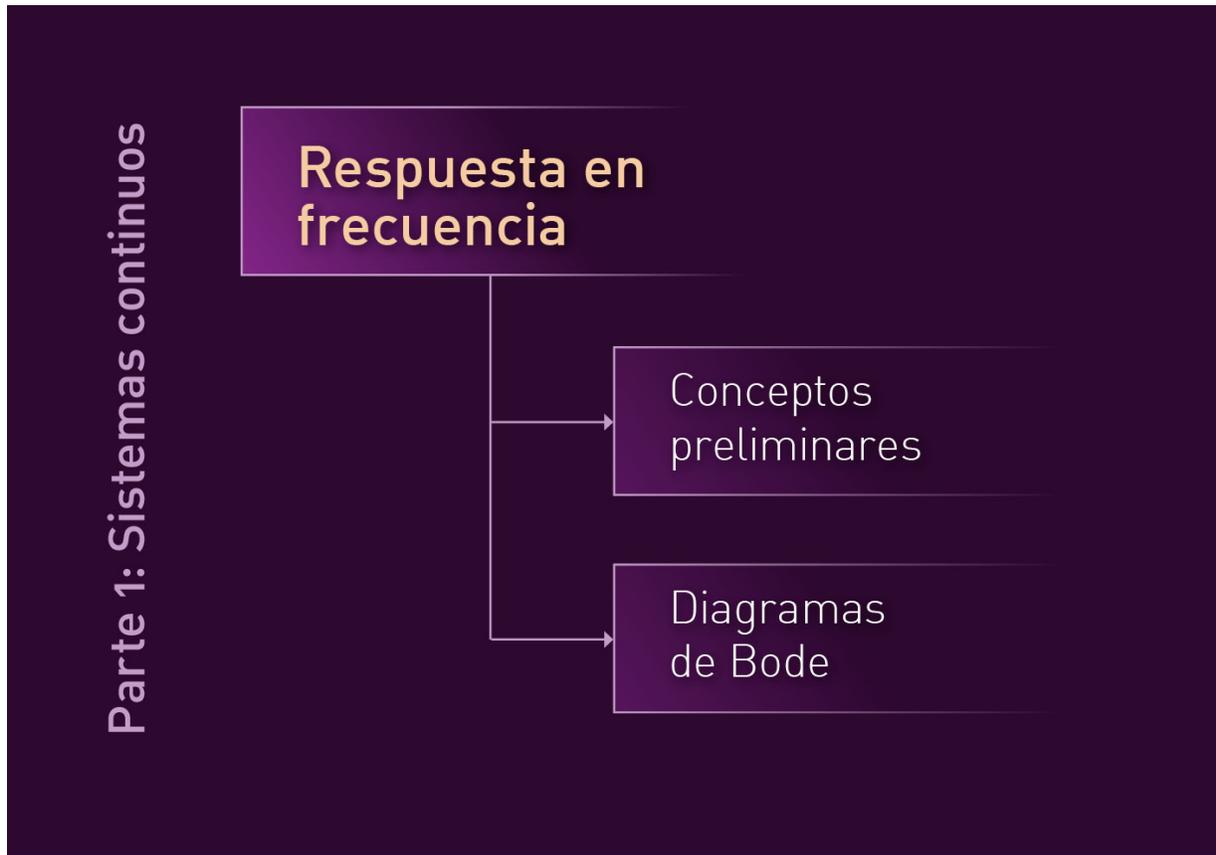
Actividades del capítulo 6

- [Actividad integradora](#)

Recursos del capítulo 6

- Program CC (2011).

7. Respuesta en frecuencia



El análisis de respuesta en frecuencia se refiere al comportamiento de un sistema con respecto a una entrada oscilatoria. De la misma forma en que se realiza el análisis temporal en un sistema, se introduce una señal de prueba, aunque en este caso es una señal que contiene al menos una frecuencia que provoca la excitación de los modos del sistema a fin de conocer tanto la magnitud como la fase de la señal.

En general, en el ámbito de control, se utiliza el aislamiento de vibraciones que pueden ser nocivas, ya sea para un equipo o las vibraciones de un equipo que puedan dañar la instalación o a sí mismo.

Este análisis puede también ser útil para el diseño de equipos de audio de alta fidelidad, telefonía, filtros de señal e, incluso, hasta en

el análisis de señales biológicas como electroencefalogramas o electrocardiogramas.

7.1 Conceptos preliminares

De la misma manera en que se realiza el análisis temporal, para analizar la respuesta en frecuencia de un sistema es conveniente introducir una señal que llamamos de prueba. Esta señal de prueba deberá ser oscilatoria pues lo que nos interesa es saber cómo responde el sistema ante diferentes frecuencias.

Podemos seleccionar una señal simple que contenga una sola frecuencia, este es el caso de la señal senoidal:

$$u(t) = A \sin \omega t$$

Ahora, supongamos que conocemos el modelo matemático del sistema, esto es:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}$$

Donde $Y(s)$ es la salida del sistema, $U(s)$ la entrada, $N(s)$ es el numerador de la función de transferencia, $D(s)$ el denominador y $p_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$ son los polos o modos de comportamiento del sistema.



$$G(s) = \frac{L [\text{Salida}]}{L [\text{Entrada}]} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Dado que $G(s)$ es también un número complejo, entonces

podemos escribir:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\varphi} = Me^{j\varphi}$$
$$G(-j\omega) = |G(j\omega)| e^{-j\varphi} = Me^{-j\varphi}$$

Para $\varphi = \text{ang}[G(j\omega)]$. Entonces:

$$y_{ss}(t) = A|G(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \varphi)} - e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2j}$$

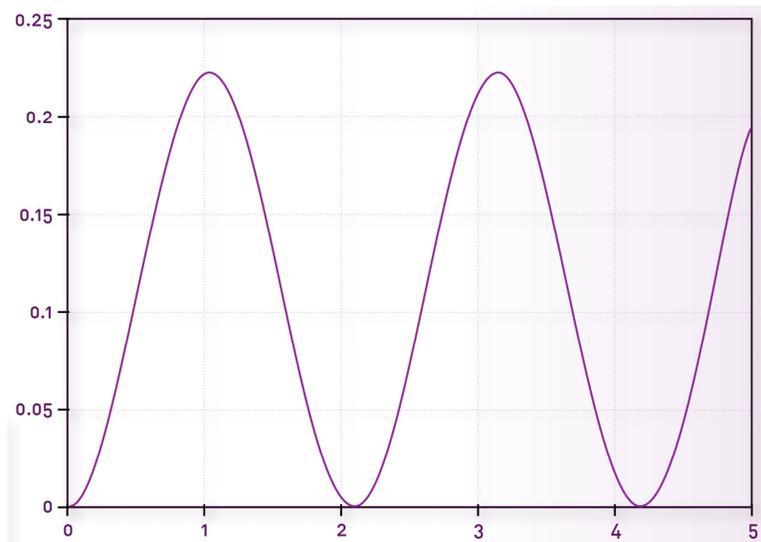
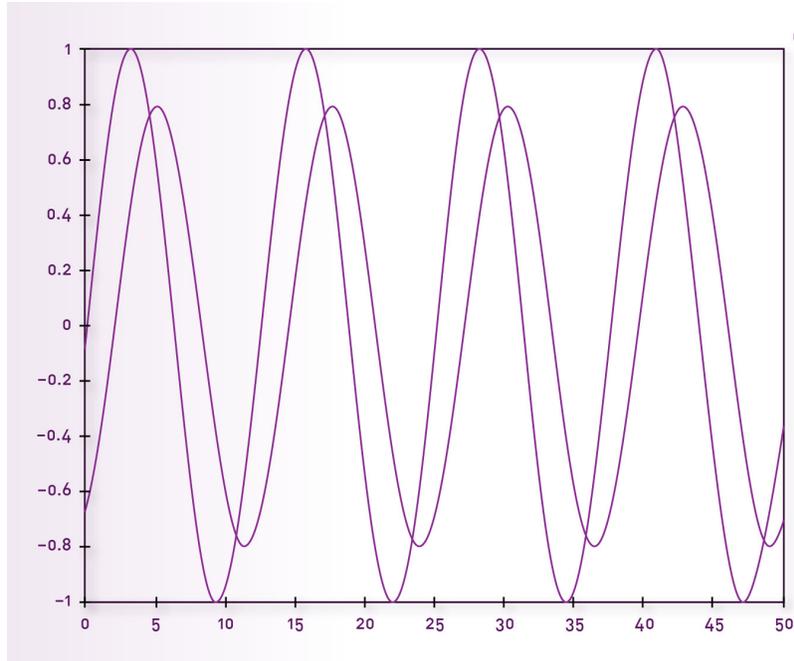
Finalmente:

$$y_{ss}(t) = AM \sin(\omega t + \varphi)$$

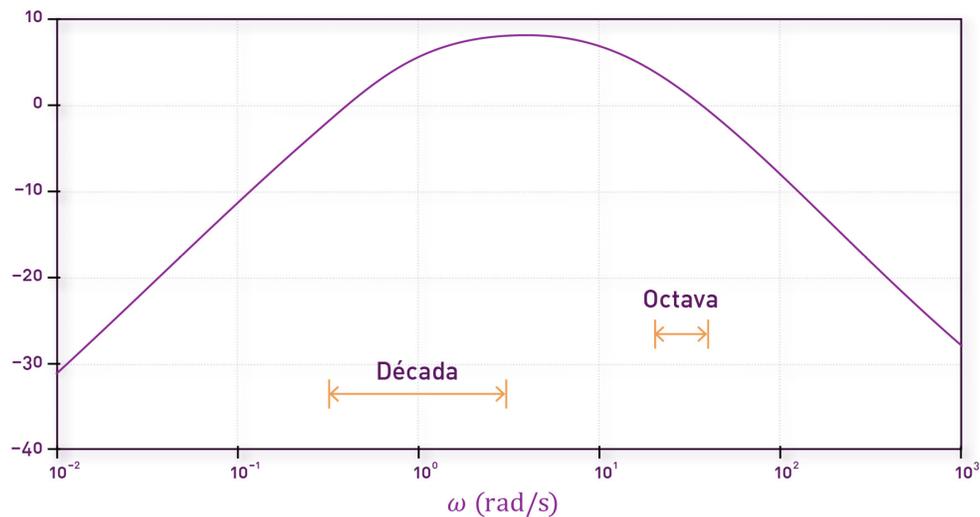
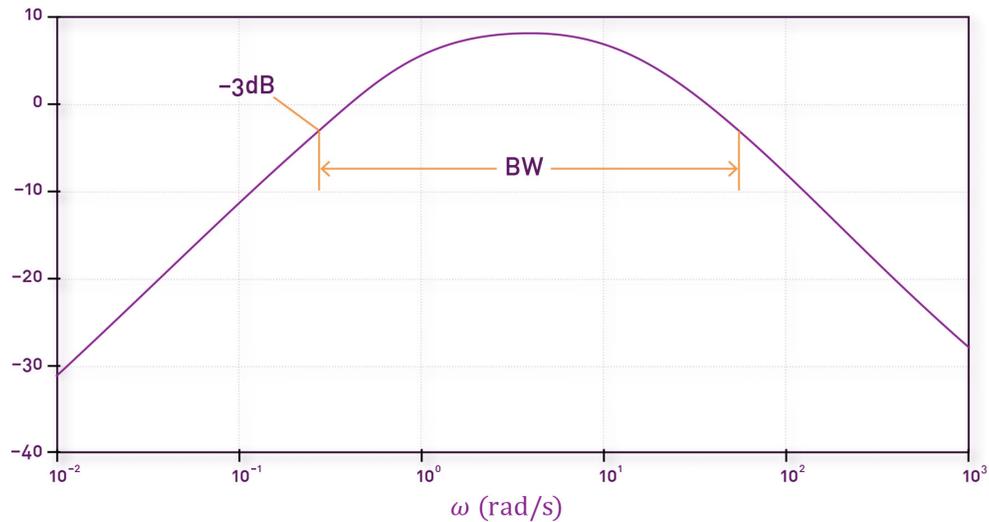
De aquí podemos concluir que la salida de un **sistema lineal invariante en tiempo** ante una entrada oscilatoria, preserva la forma de onda y la frecuencia, y cambia la fase y la magnitud. Éste es un resultado muy importante pues en este hecho se basa todo el análisis de respuesta en frecuencia.

A las gráficas que muestran el comportamiento de la magnitud y de la fase con respecto a la frecuencia se les llama **diagramas de Bode**.

Para introducirnos al tema de diagramas de Bode, será necesario hacer algunas definiciones preliminares.



Decibel (dB): Es la décima parte de un Bel, y un Bel es el logaritmo base diez de la razón de dos cantidades cuadráticas, así, podemos escribir: $20 \log |G(j\omega)|$



Ancho de banda: Es el rango de frecuencia en el que la magnitud de la respuesta de un sistema es mayor o igual $a - 3dB$.

Década: Es el rango de frecuencias entre una frecuencia inicial ω_1 y $10\omega_1$.

Octava: Es el rango de frecuencias entre una frecuencia inicial ω_1 y el doble de esa frecuencia $2\omega_1$.

Función de transferencia normalizada: Es la función de transferencia del sistema evaluada en $s = j\omega$ con los términos

independientes unitarios.

En este tema se han tratado algunos conceptos preliminares que serán de mucha utilidad para poder realizar análisis y control de sistemas en el dominio de la frecuencia.

LIGAS DE INTERÉS

Williams, B. PoleZeroApplet. (Applet de Java para obtener diagramas de Bode). Cambridge, MA: MIT

[PoleZeroApplet](#)

7.2 Diagramas de Bode

Los diagramas de Bode son gráficas que relacionan la magnitud y la fase de un sistema con respecto a la frecuencia de la señal de entrada.

Diagrama de Bode de magnitud: Es la gráfica de la función $|G(j\omega)|$ con respecto a la frecuencia, usualmente en dB.

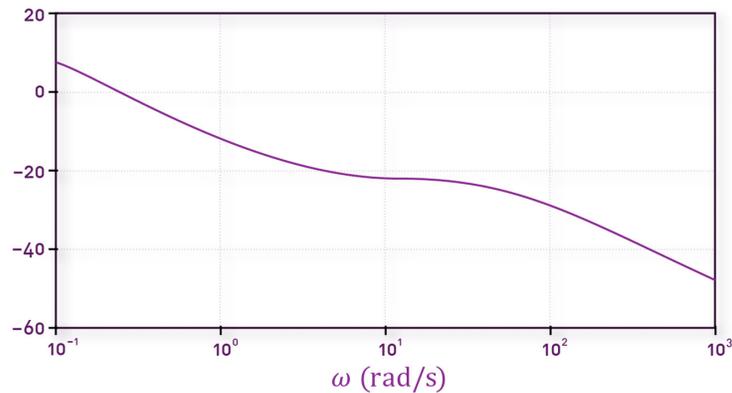
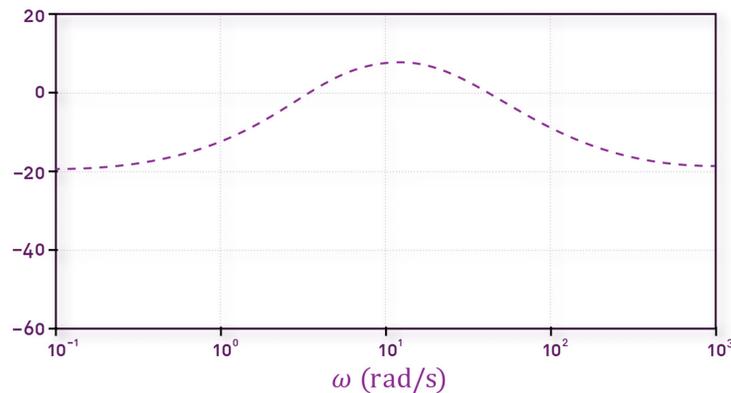


Diagrama de Bode de fase: Es la gráfica de la función $\text{ang}|G(j\omega)|$ con respecto a la frecuencia, usualmente en grados.



Gráficas semilogarítmicas: La escala horizontal es logarítmica.

La utilización del decibel para encontrar el diagrama de Bode de magnitud conduce a una simplificación en el trazado del mismo, pues el logaritmo da la posibilidad de sumar las contribuciones de cada factor. Por ejemplo, consideremos la magnitud en decibeles de una función de transferencia como se muestra:

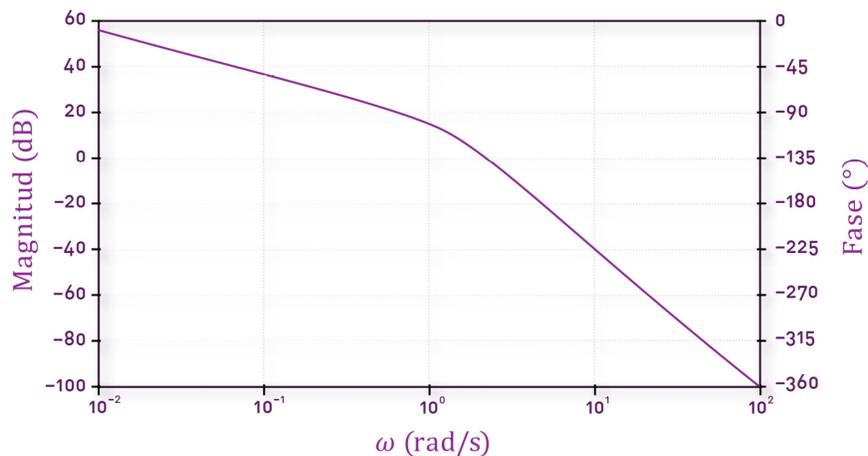
$$G(s) = \frac{\omega_2 \omega_n^2 K(s + \omega_1)}{\omega_1 s^n (s + \omega_2)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log \left| \frac{K \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_1}\right)}{(j\omega)^n \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_2}\right) \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n} (j\omega) + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}\right)} \right|$$

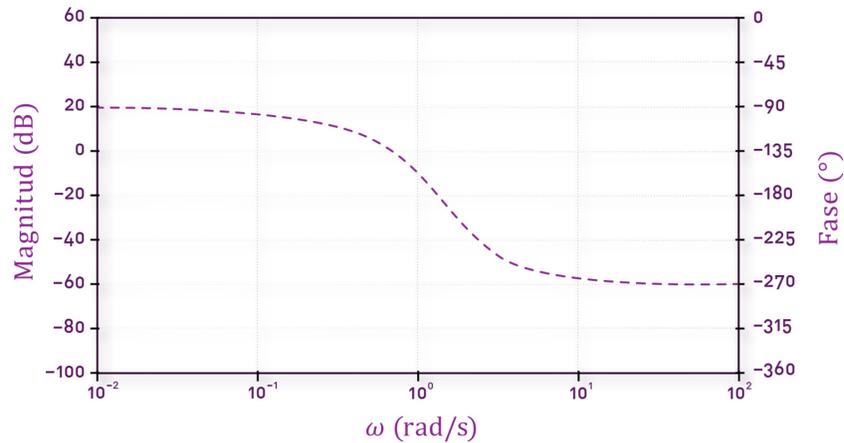
$$= 20\log K + 20\log \left| 1 + \frac{j\omega}{\omega_1} \right| - 20n\log |j\omega| -$$

$$20\log \left| 1 + \frac{j\omega}{\omega_2} \right| - 20\log \left| 1 + \frac{2\xi}{\omega_n} (j\omega) + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \right|$$

Como vemos, se puede construir el diagrama de Bode de magnitud mediante la suma de las contribuciones particulares de cada factor:



Analizaremos la contribución particular de cada factor. Tanto en magnitud como en fase:



Es posible distinguir cuatro tipos de factores para cualquier función de transferencia:

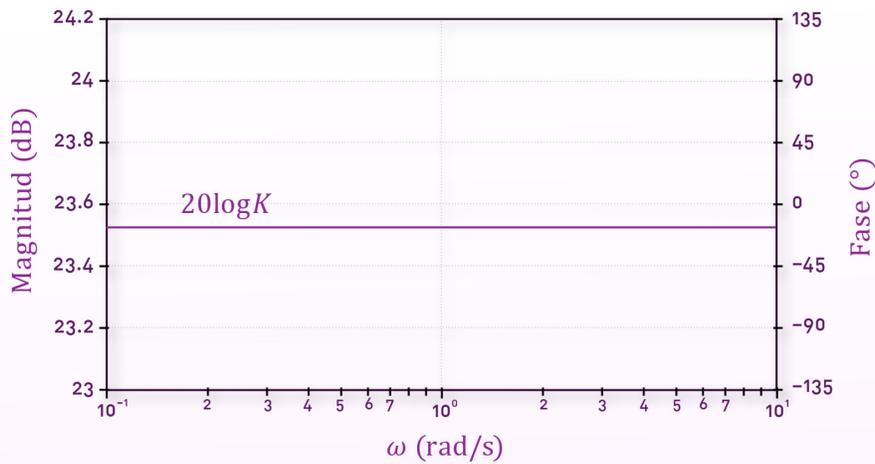
- » [Factor de ganancia](#)
- » [Polos o ceros en el origen](#)
- » [Factores de primer orden](#)
- » [Factores de segundo orden](#)

Analizaremos los cuatro casos por separado:

1. Factor de ganancia

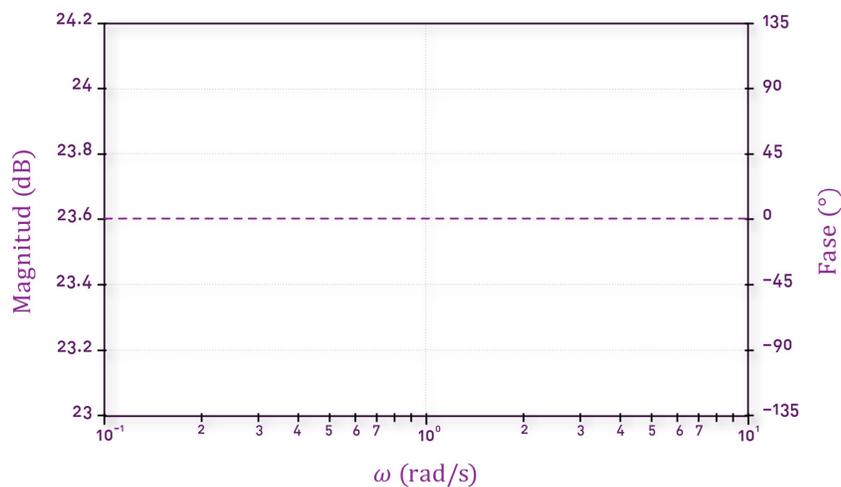
La contribución en magnitud de la ganancia en una función de transferencia puede expresarse como:

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log K \quad \forall \omega$$



La contribución en fase de la ganancia en una función de transferencia es:

$$\text{ang}[G(j\omega)] = \text{ang}(K) = 0^\circ \quad \forall \omega$$

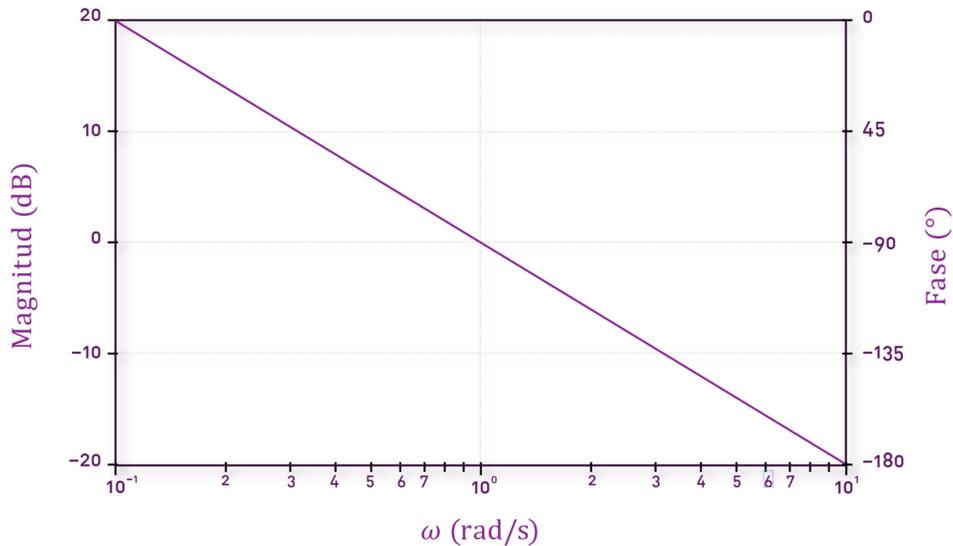


2. Polos o ceros en el origen $(j\omega) \pm n$

Analizaremos primero la contribución en magnitud de un factor de

la forma:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$



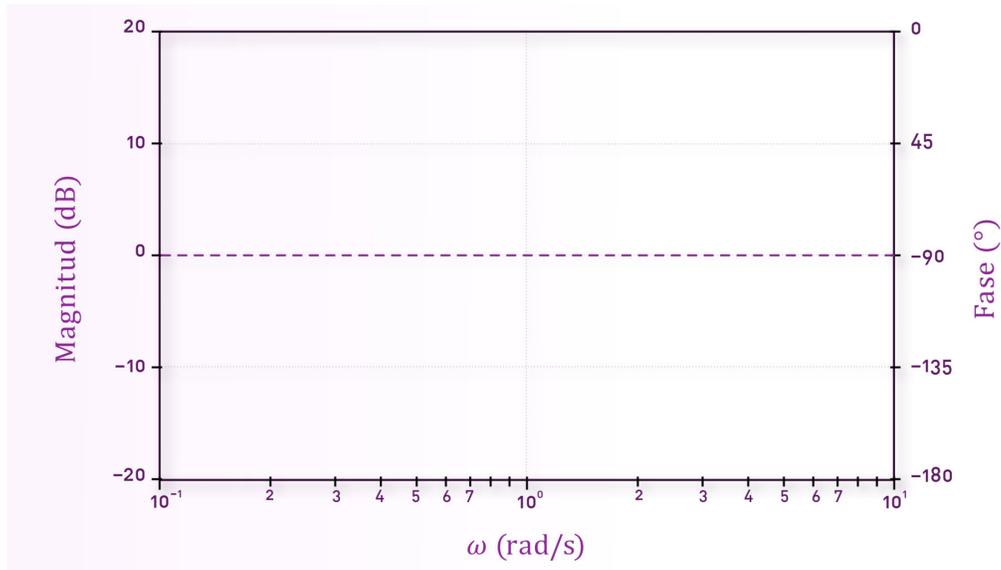
En decibeles, tenemos que la magnitud es:

$$20\log \left| \frac{1}{j\omega} \right| - 20\log |j\omega| = -20\log \omega$$

$$\text{Si } \omega = 0.1 \text{ rad/s} \Rightarrow 20\text{dB}$$

$$\text{Si } \omega = 1 \text{ rad/s} \Rightarrow 0\text{dB}$$

$$\text{Si } \omega = 10 \text{ rad/s} \Rightarrow -20\text{dB}$$

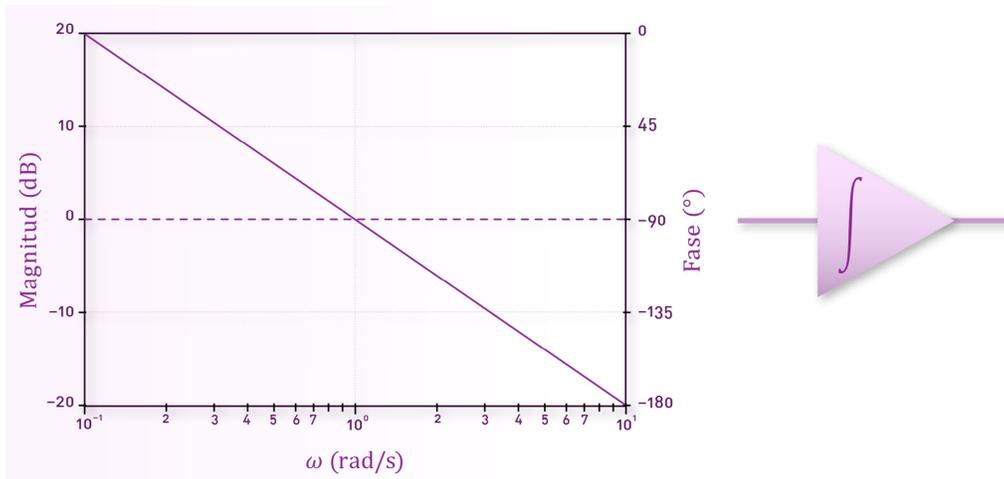


La fase del factor:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

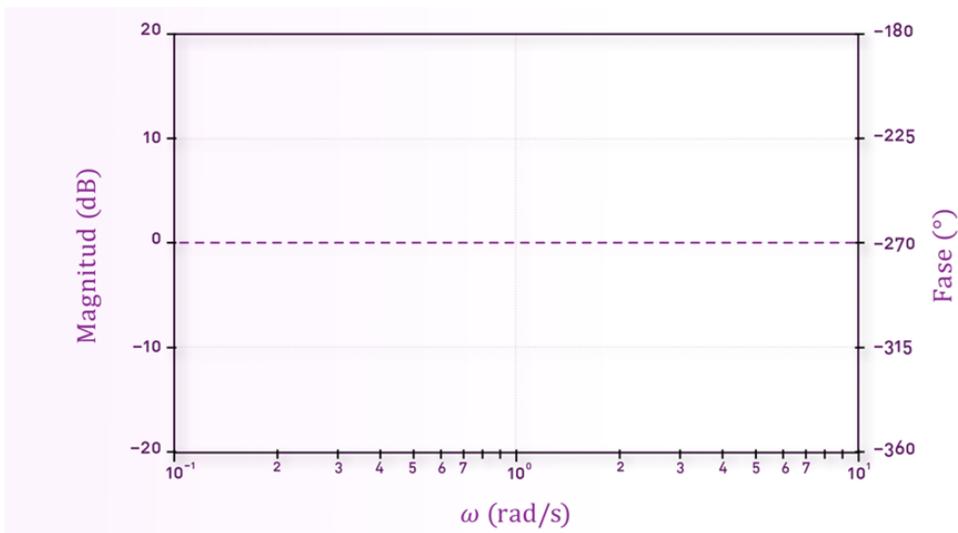
Se puede obtener como:

$$\begin{aligned} \text{ang} \left(\frac{1}{j\omega} \right) &= - \text{ang}(j\omega) \\ &= - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{0} \right) = -90^\circ \end{aligned}$$



Ahora suponemos un factor de la forma:

$$G(j\omega) = j\omega$$



En decibeles, tenemos que la magnitud es:

$$20\log |j\omega| = 20\log |j\omega| = 20\log \omega$$

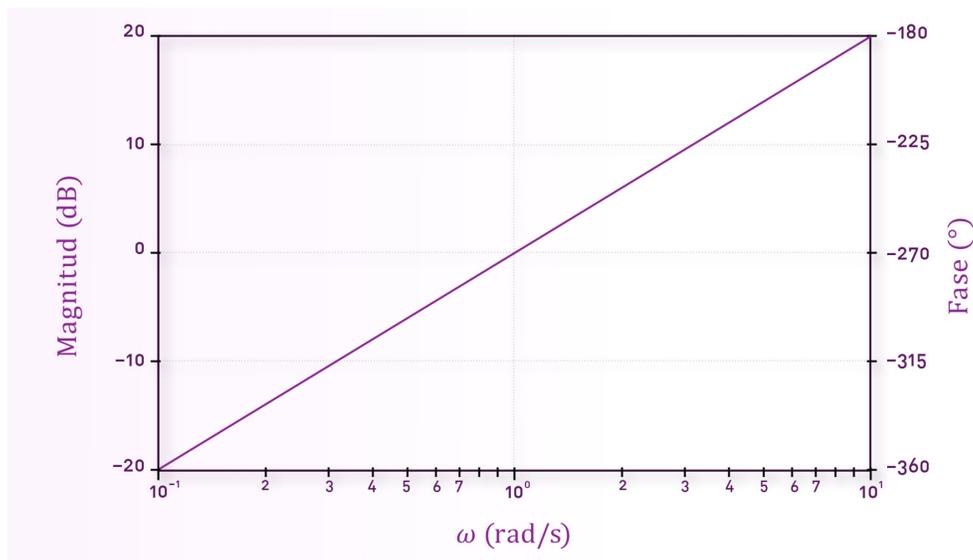
$$\text{Si } \omega = 0.1 \text{ rad/s} \Rightarrow -20\text{dB}$$

$$\text{Si } \omega = 1 \text{ rad/s} \Rightarrow 0\text{dB}$$

$$\text{Si } \omega = 10 \text{ rad/s} \Rightarrow 20\text{dB}$$

La fase se puede obtener como:

$$\begin{aligned} \text{ang}(j\omega) &= \text{ang}(j\omega) \\ &= -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{0}\right) = 90^\circ \end{aligned}$$



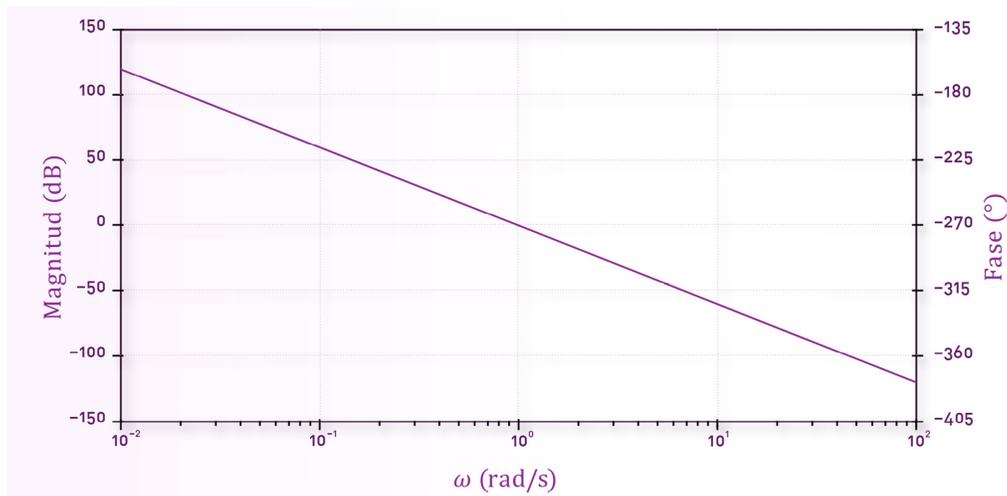
Generalizando, la magnitud en decibeles de este factor es:

$$20\log |(j\omega)^{\pm n}| = \pm 20n\log |j\omega| \\ = \pm 20n\log \omega$$

Si $\omega = 0.1 \text{ rad/s} \Rightarrow \pm 20n \text{ dB}$

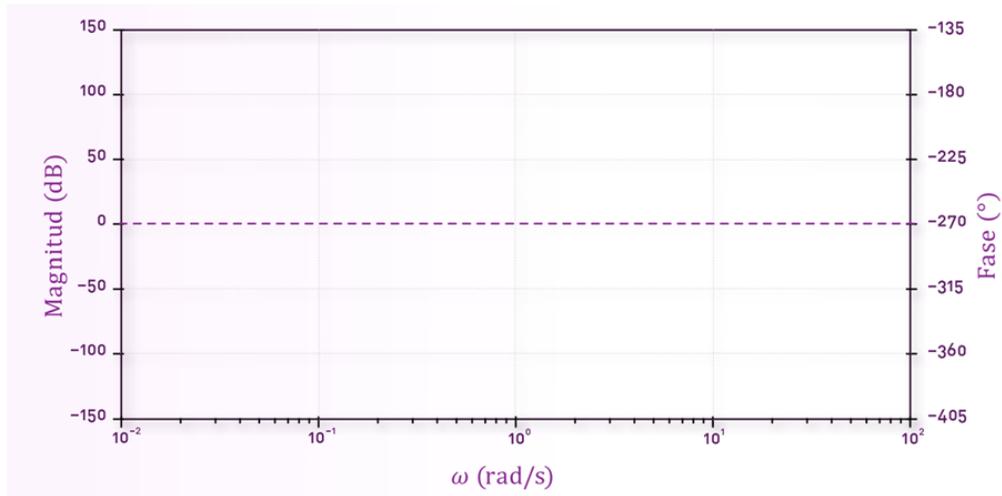
Si $\omega = 1 \text{ rad/s} \Rightarrow 0 \text{ dB}$

Si $\omega = 10 \text{ rad/s} \Rightarrow \pm 20n \text{ dB}$



Y la fase:

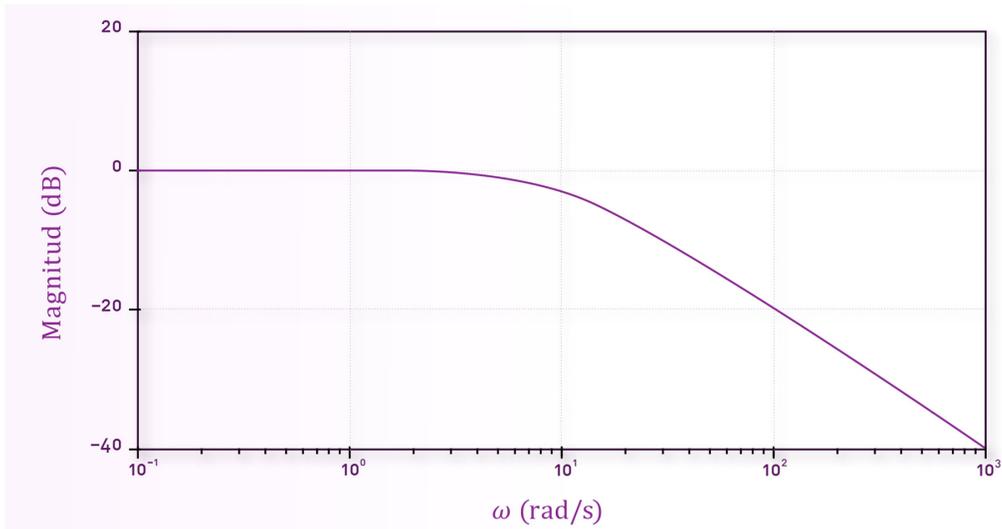
$$\text{ang}[(j\omega)^{\pm n}] = \pm n \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{0}\right) = \pm 90n^\circ$$



3. Factores de primer orden $(1 + j\omega/\omega_c) \pm n$

Analizaremos primero la contribución en magnitud de un factor de la forma:

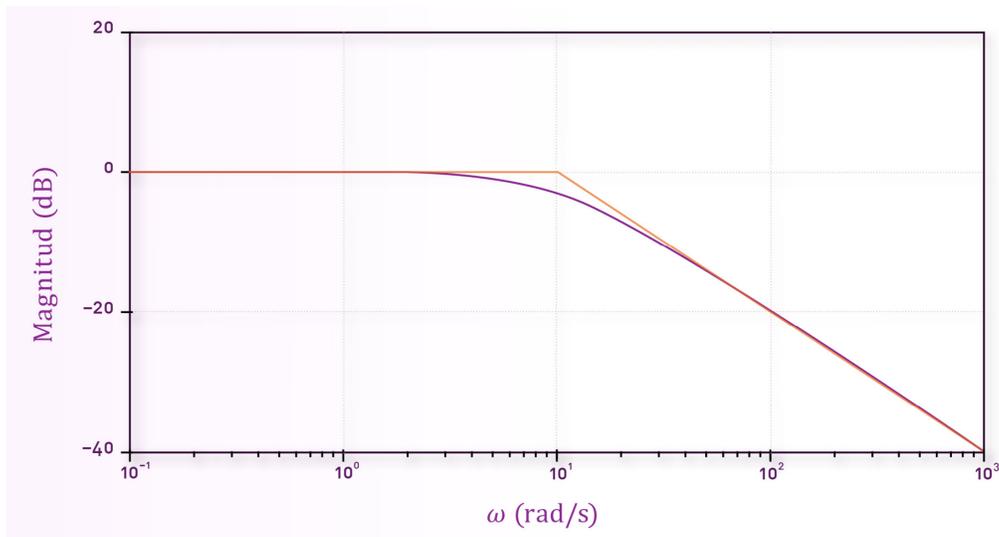
$$G(j\omega) = \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_c}\right)^{-1}$$



En decibele, tenemos que la magnitud es:

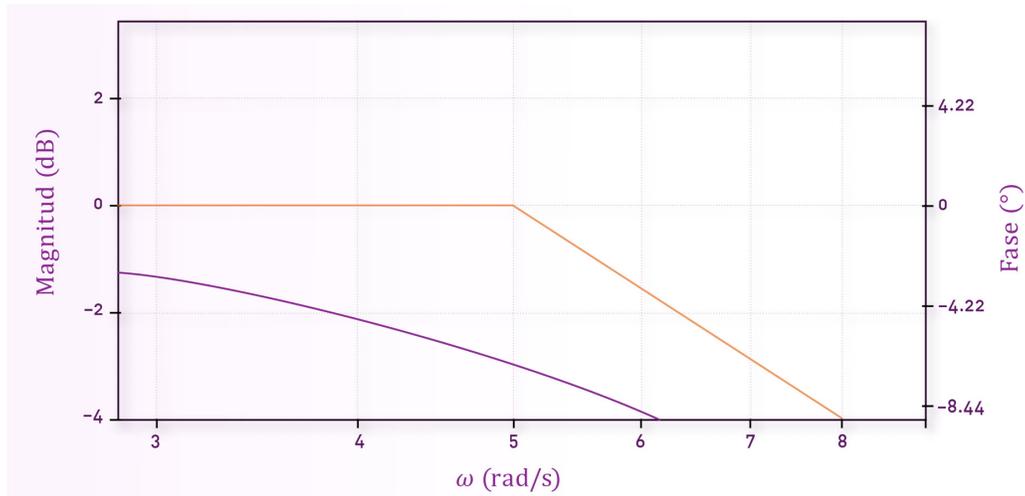
$$20\log\left|\frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_c}}\right| = -20\log\left|1 + \frac{j\omega}{\omega_c}\right|$$
$$= -20\log\sqrt{1 + \left(\frac{j\omega}{\omega_c}\right)^2}$$

Si $\omega \gg \omega_c \Rightarrow -20\text{dB/dec}$



Llamaremos a ω_c frecuencia de corte, y cumple con la siguiente condición:

$$\text{Si } \omega = \omega_c \Rightarrow -20\log\sqrt{2} = -3\text{dB}$$



La contribución en fase puede obtenerse como:

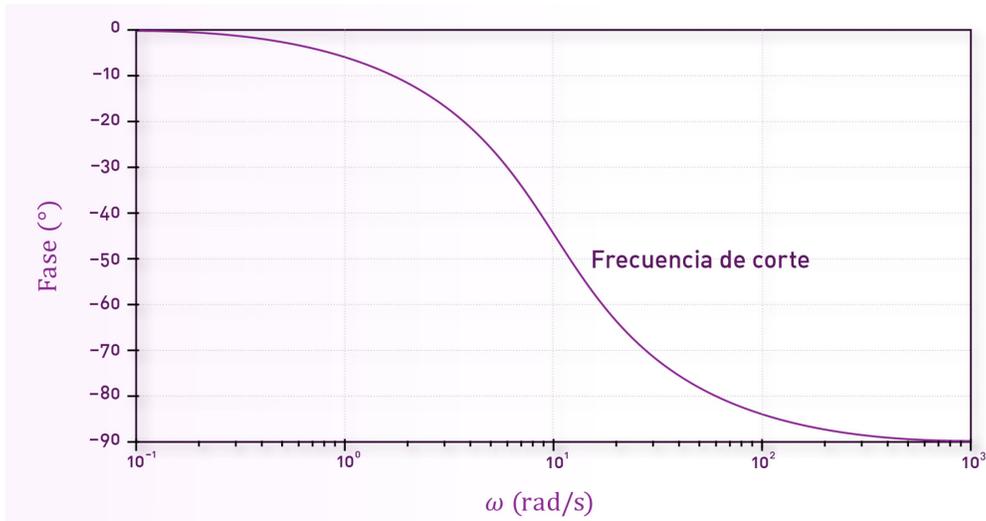
$$20\log\left(\frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_c}}\right) = -\text{ang}\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_c}\right)$$

$$= -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

$$\text{Si } \omega \ll \omega_c \Rightarrow 0^\circ$$

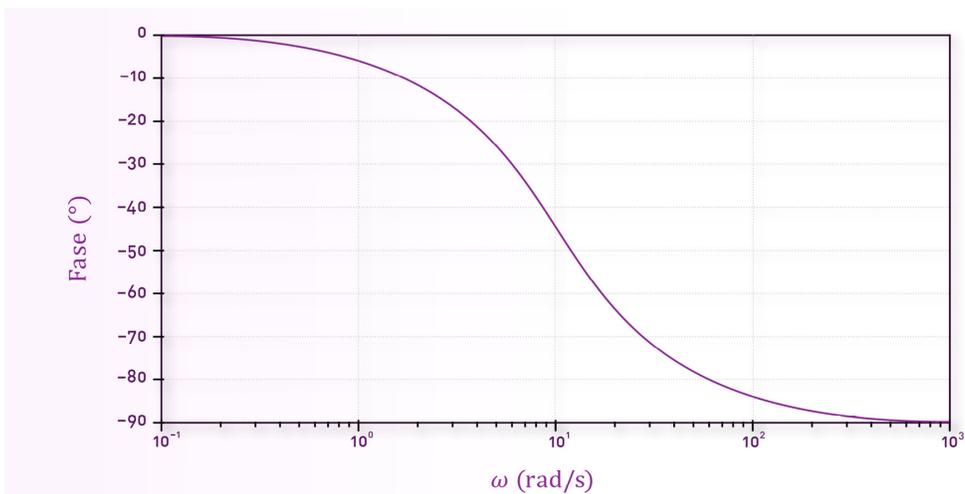
$$\text{Si } \omega = \omega_c \Rightarrow -45^\circ$$

$$\text{Si } \omega \gg \omega_c \Rightarrow -90^\circ$$



Algunos puntos importantes:

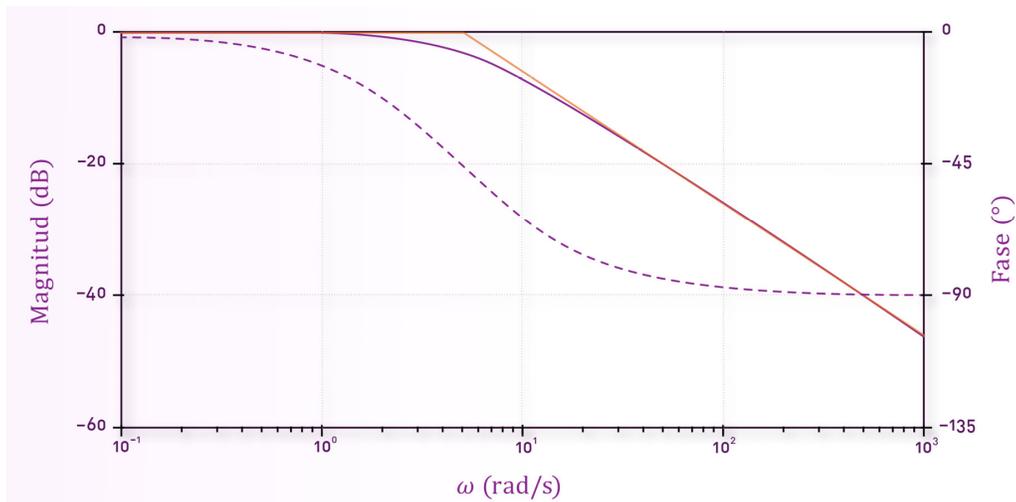
$$\begin{aligned} \text{Si } \omega &= \omega_c / 10 \Rightarrow -5.7^\circ \\ \text{Si } \omega &= \omega_c / 2 \Rightarrow -26.6^\circ \\ \text{Si } \omega &= 2\omega_c \Rightarrow -63.4^\circ \\ \text{Si } \omega &= 10\omega_c \Rightarrow -84.3^\circ \end{aligned}$$



Es importante comentar aquí que es posible obtener un diagrama de magnitud asintótico, esto es de mucha utilidad para identificar

cualitativamente la forma del diagrama. En la figura se observa el diagrama asintótico en naranja.

Un poco más de cerca, se puede ver que, justo en la frecuencia de corte, la pendiente de la asíntota cambia y la magnitud real se encuentra a -3dB .



Generalizando, para factores de la forma:

$$G(j\omega) = \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_c}\right)^{\pm n}$$

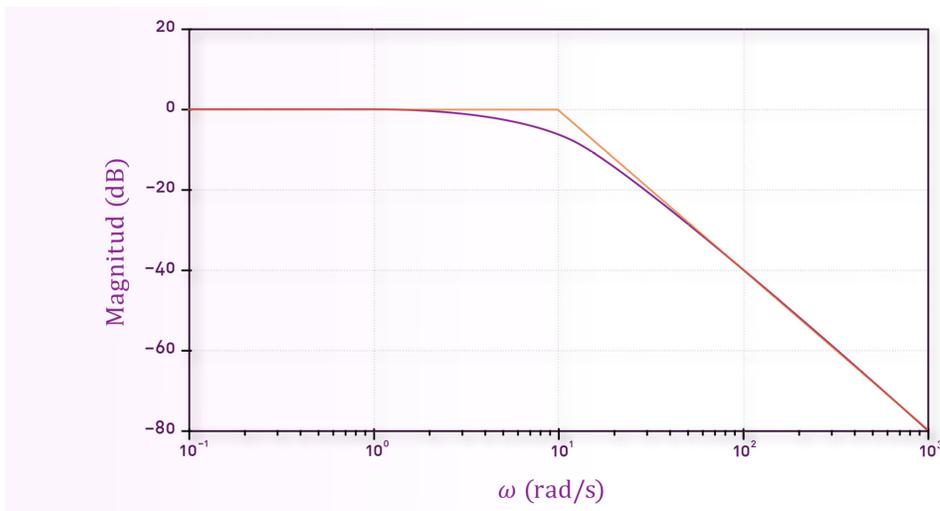
En decibeles, tenemos que la magnitud es:

$$20 \log \left| \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_c} \right)^{\pm n} \right| = \pm 20n \log \left| 1 + \frac{j\omega}{\omega_c} \right|$$

$$= \pm 20n \log \sqrt{1 + \left(\frac{j\omega}{\omega_c} \right)^2}$$

Si $\omega \gg \omega_c \Rightarrow \pm 20n \text{ dB/dec}$

Si $\omega \ll \omega_c \Rightarrow 0 \text{ dB/dec}$



Y la fase:

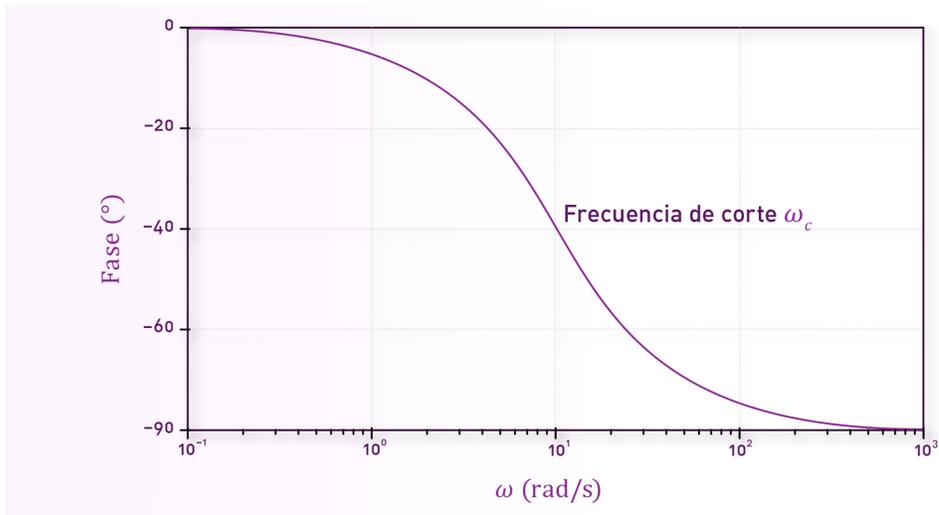
$$\text{ang} \left[\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_c} \right)^{\pm n} \right] = \pm n \text{ang} \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_c} \right)$$

$$= \pm n \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)$$

Si $\omega \ll \omega_c \Rightarrow 0^\circ$

Si $\omega = \omega_c \Rightarrow \pm 45n^\circ$

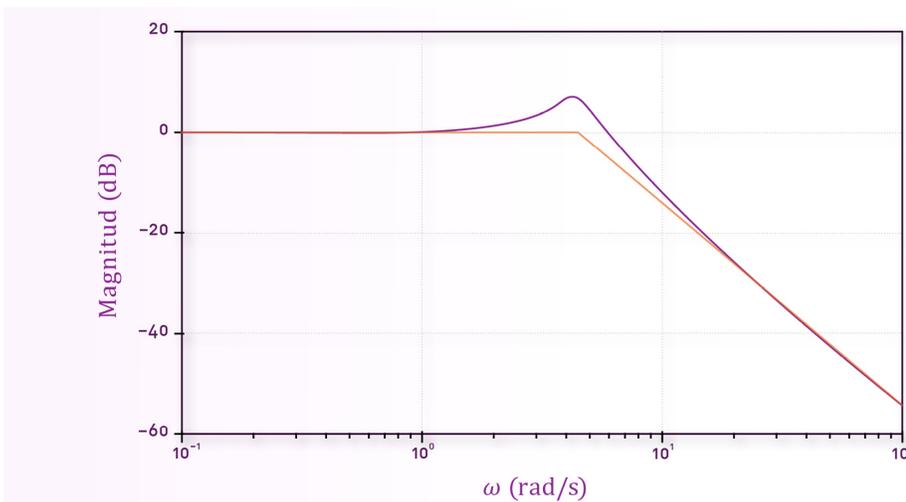
Si $\omega \gg \omega_c \Rightarrow \pm 90n^\circ$



4. Factor cuadrático

Consideremos primero el factor:

$$\left[1 + \frac{2\xi}{\omega_n}(j\omega) + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \right]^{-1}$$



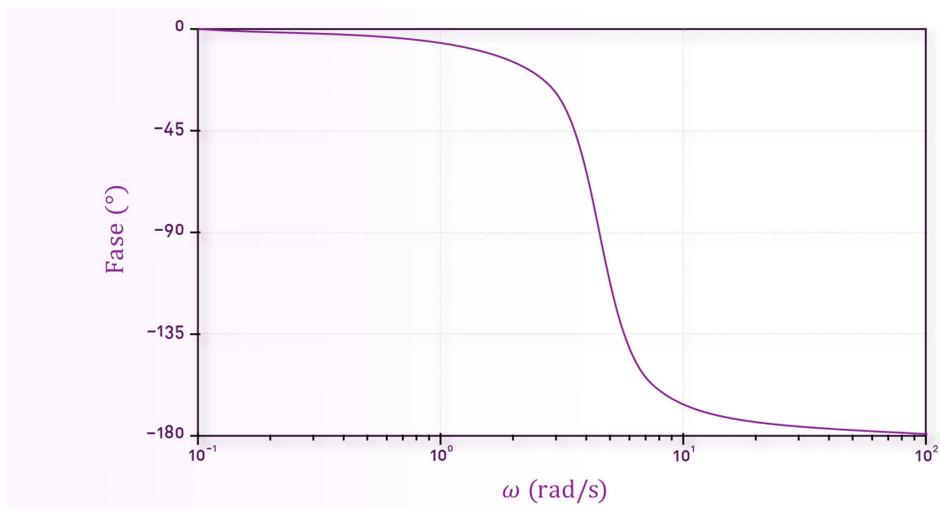
En decibeles, tenemos que la magnitud es:

$$-20\log \left| 1 + \frac{2\xi}{\omega_n} (j\omega) + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \right|$$

$$= -20\log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Si $\omega \ll \omega_n \Rightarrow -20\log 1 = 0\text{dB}$

Si $\omega \gg \omega_n \Rightarrow -40\log\omega$



Para la fase:

$$\text{ang} \left[1 + \frac{2\xi}{\omega_n} (j\omega) + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \right]^{-1}$$

$$= -\tan^{-1} \left(\frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_n}}{\frac{1-\omega^2}{\omega_n^2}} \right)$$

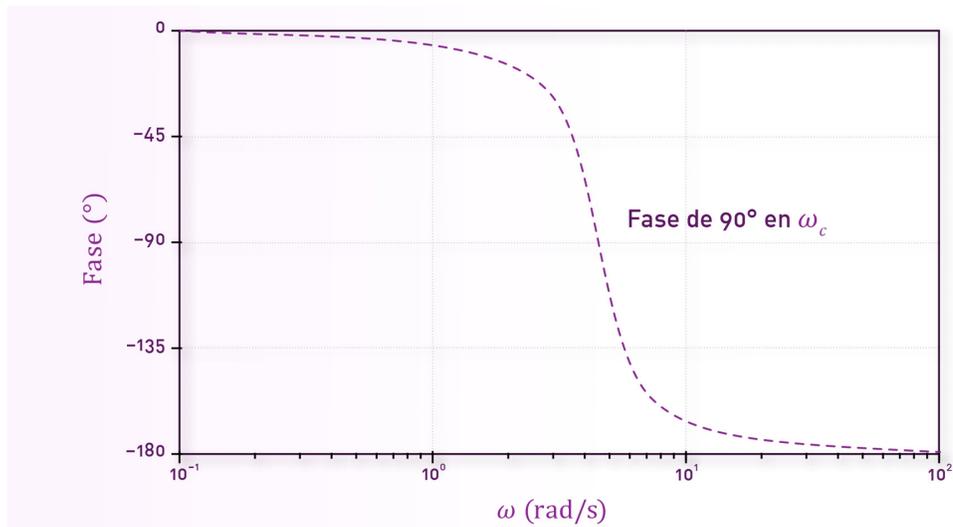
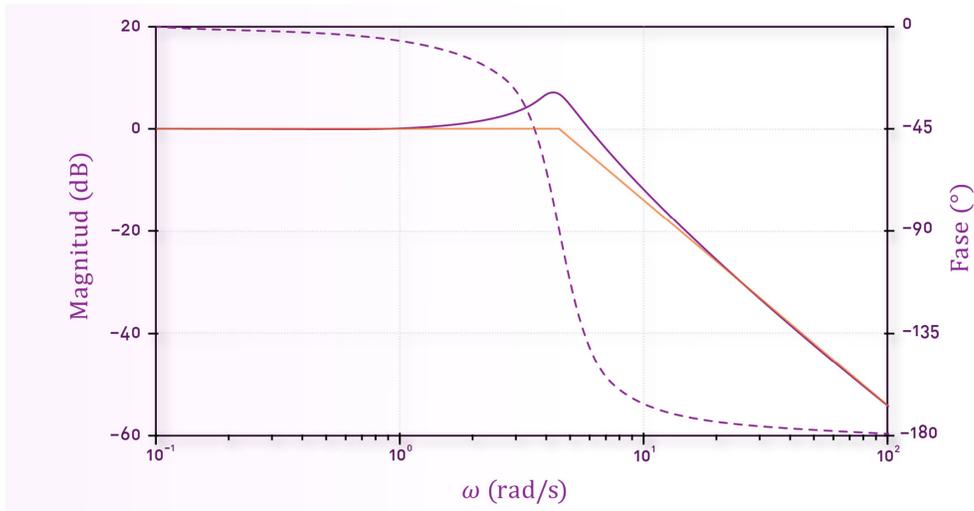
Si $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow 0^\circ$

Si $\omega = \omega_n \Rightarrow -90^\circ$

Si $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow -\tan^{-1} \left(\frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_n}}{\frac{1-\omega^2}{\omega_n^2}} \right)$

$$= -\tan^{-1} \left(\frac{\frac{2\xi}{\omega\omega_n}}{\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_n^2}} \right)$$

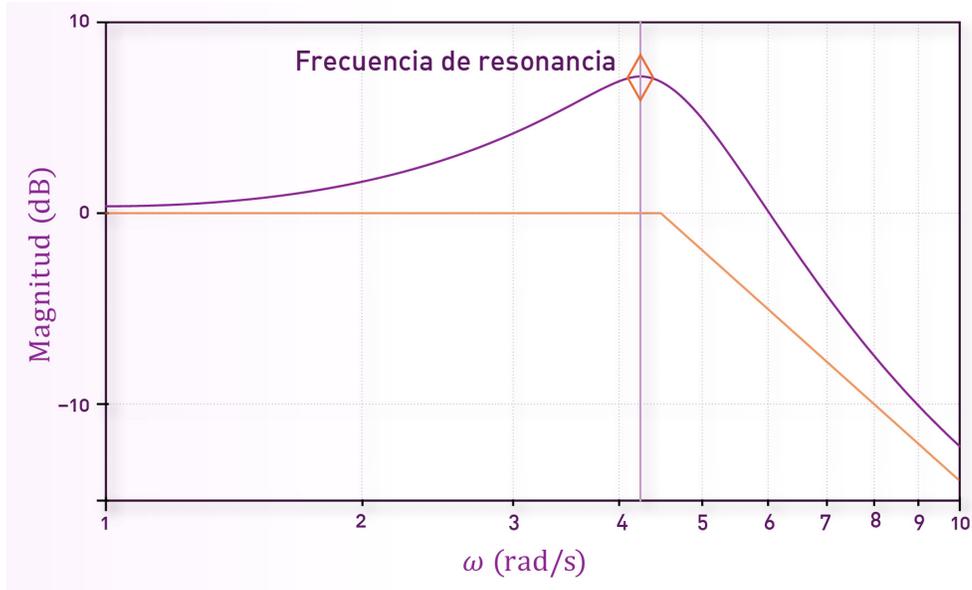
$$= -\tan^{-1} 0 = -180^\circ$$



En el diagrama de Bode de magnitud anterior se puede observar, de la respuesta real, un pico en una frecuencia específica. Este pico se llama pico de resonancia, y se da precisamente en la frecuencia de resonancia ω_m . Es posible encontrar estos valores analíticamente:

$$M = \left| \left[1 + \frac{2\xi}{\omega_n}(j\omega) + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \right]^{-1} \right| = \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n}(j\omega) + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \right)^{-1/2}$$

$$M^2 = \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n}(j\omega) + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \right)^{-1}$$

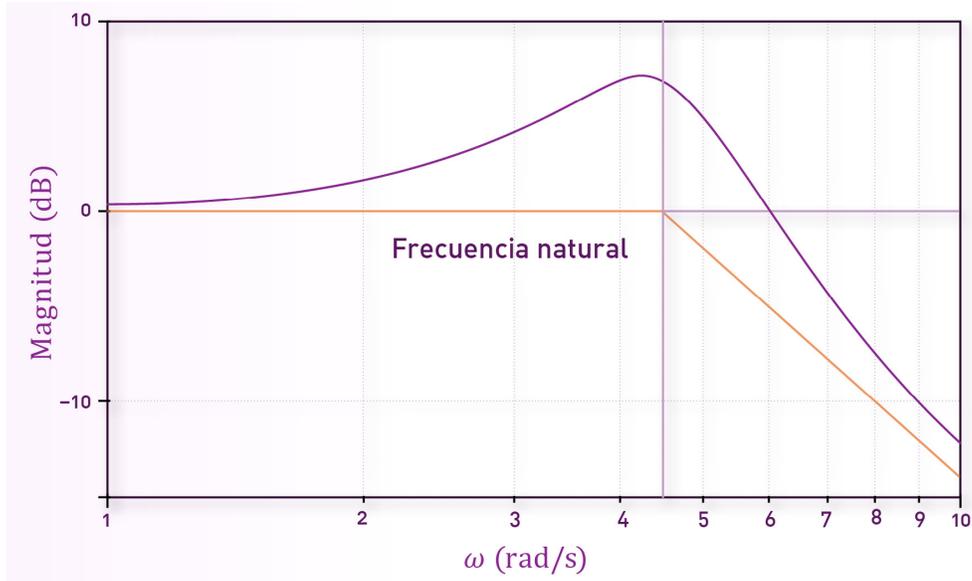


Derivando con respecto a ω e igualando a cero:

$$\frac{dM^2}{d\omega} = 2M \frac{dM}{d\omega} = - \frac{\left[-\frac{4\omega}{\omega_n^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) + \frac{8\xi^2\omega}{\omega_n^2} \right]}{\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n}(j\omega) + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \right)^2} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{4\omega}{\omega_n^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) + \frac{8\xi^2\omega}{\omega_n^2} = 0$$

$$\omega_m = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

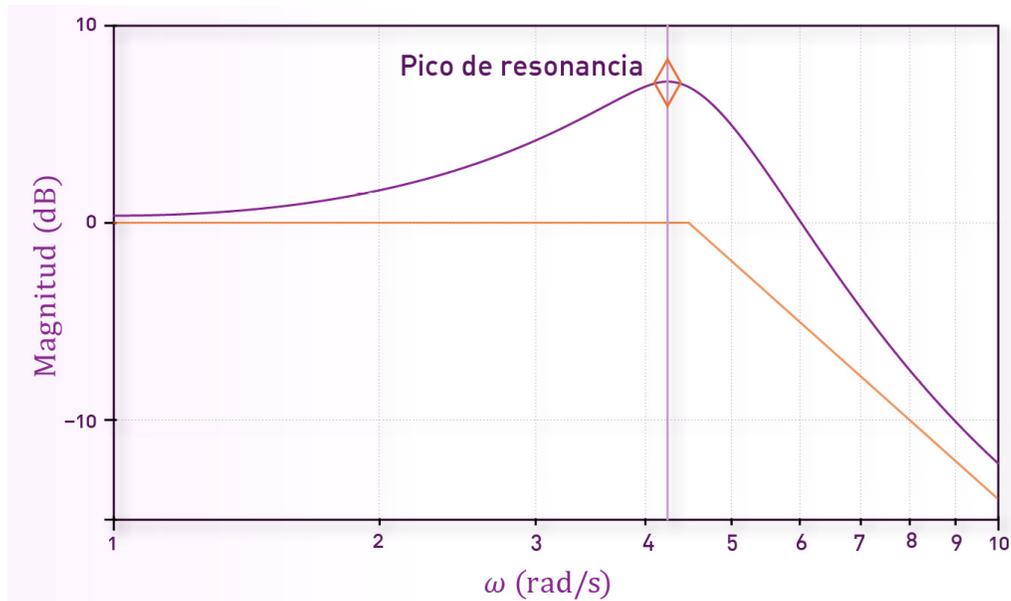


Una vez determinada la frecuencia de resonancia, es posible obtener el pico de resonancia M_m :

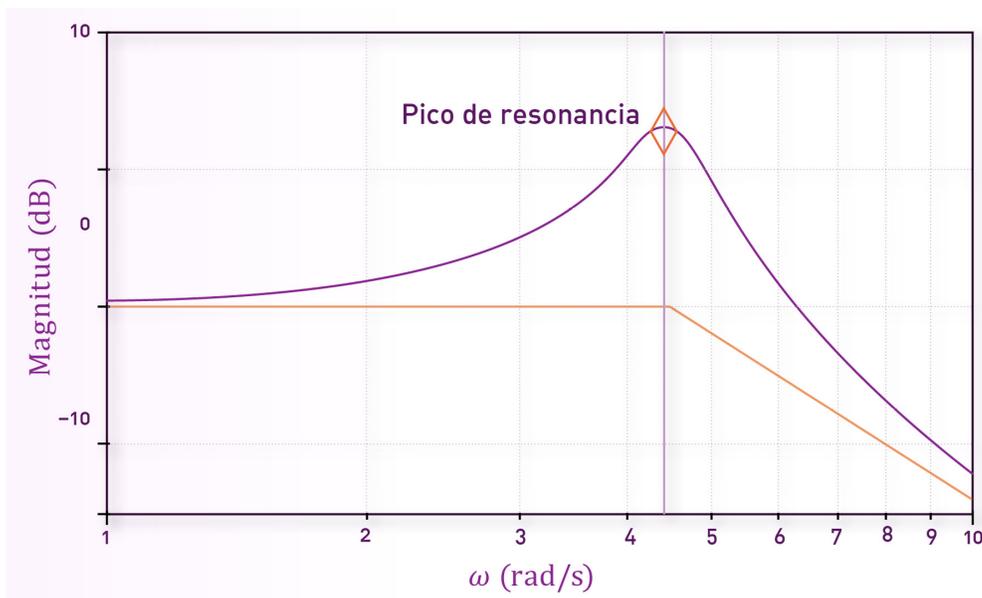
$$M = \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \frac{4\xi^2 \omega^2}{\omega_n^2} \right]^{-1}$$

$$= \left[\left(1 - \frac{(\omega_n \sqrt{1-2\xi})^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \frac{4\xi^2 (\omega_n \sqrt{1-2\xi})^2}{\omega_n^2} \right]^{-1}$$

$$M_m = \frac{1}{2\xi \sqrt{1-\xi^2}}$$



Estos valores son muy importantes cuando se requiere evitar problemas de resonancia. En este valor de frecuencia, el pico puede ser muy grande. Es importante también notar que estos valores dependen directamente del factor de amortiguamiento relativo.



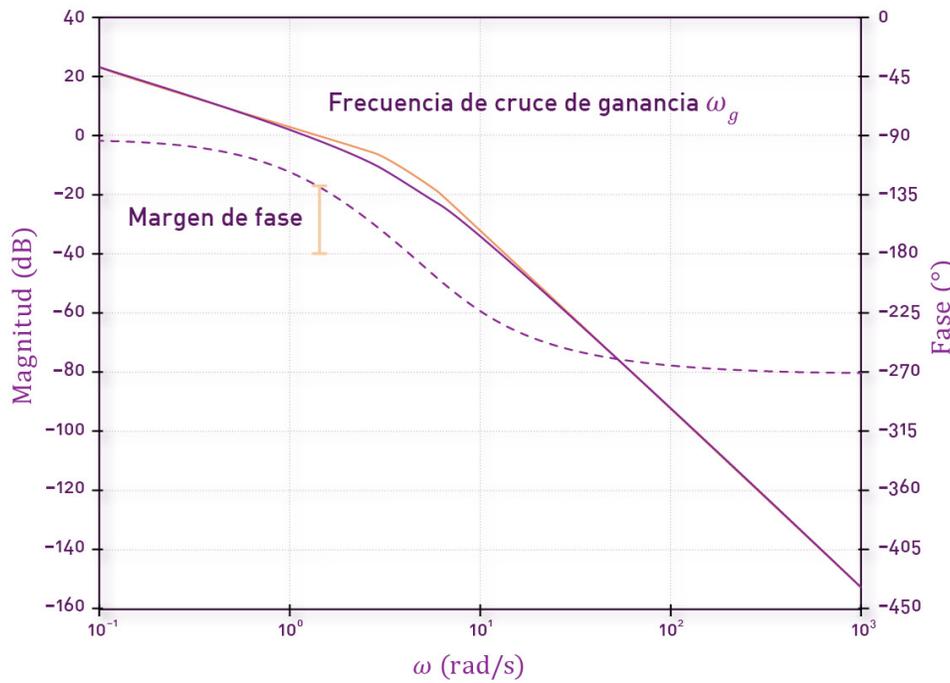
Márgenes de robustez

Los márgenes de robustez son utilizados como criterios de diseño para compensadores y sistemas en frecuencia. Existen dos

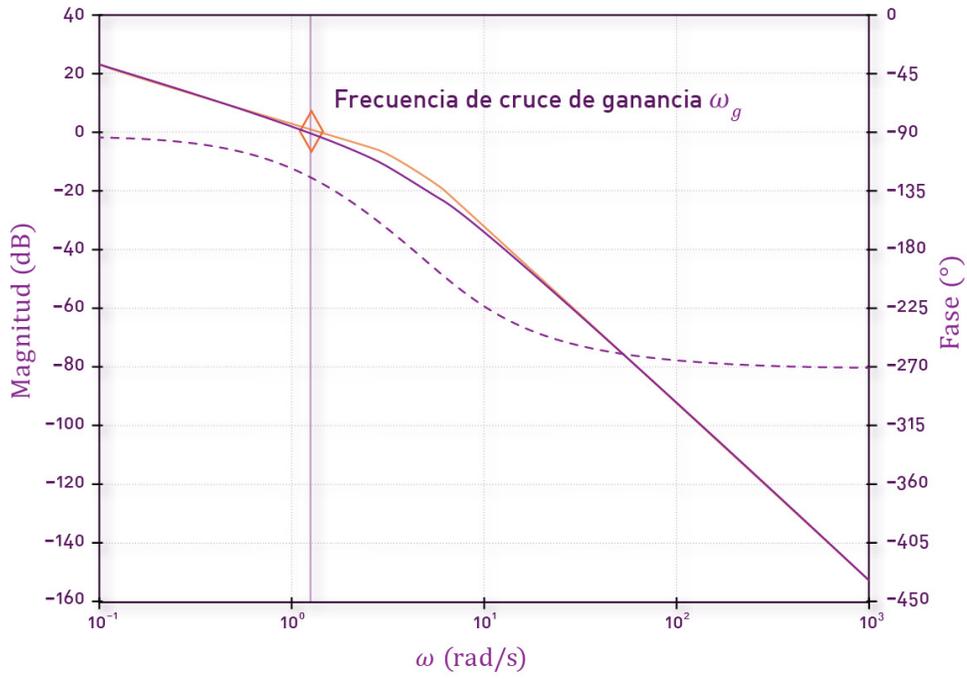
márgenes importantes: el de fase y el de ganancia.

El margen de fase (γ): Es la cantidad de retardo de fase adicional, en la frecuencia de cruce de ganancia, requerida para llevar al sistema al borde de la inestabilidad.

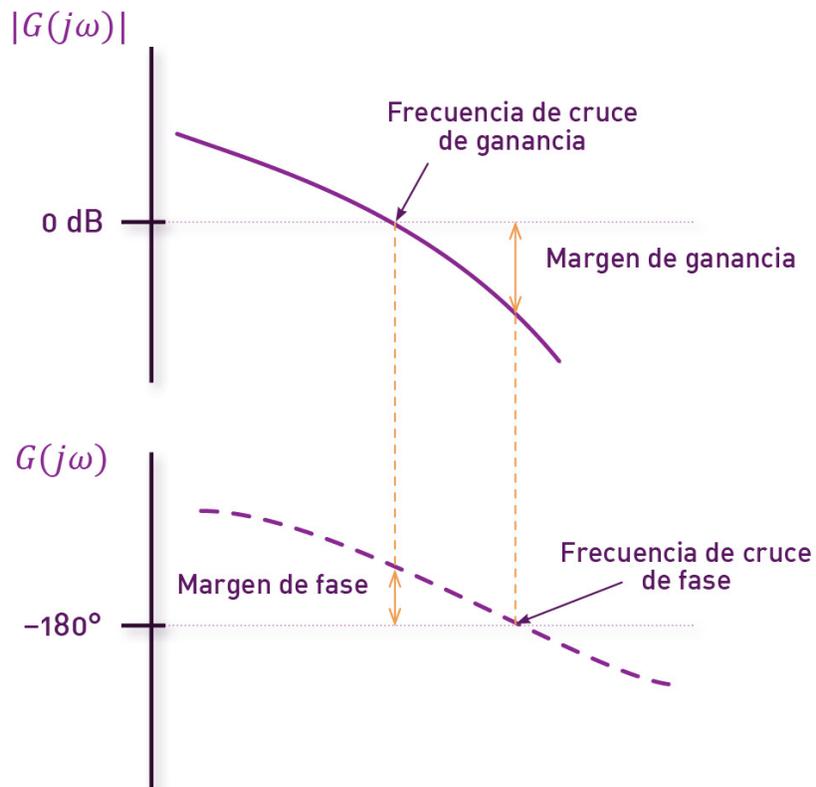
$$\gamma = 180 + \angle G(j\omega_g)$$



Frecuencia de cruce de ganancia (ω_g): Es la frecuencia para la cual la magnitud de la función de transferencia en lazo abierto es unitaria.

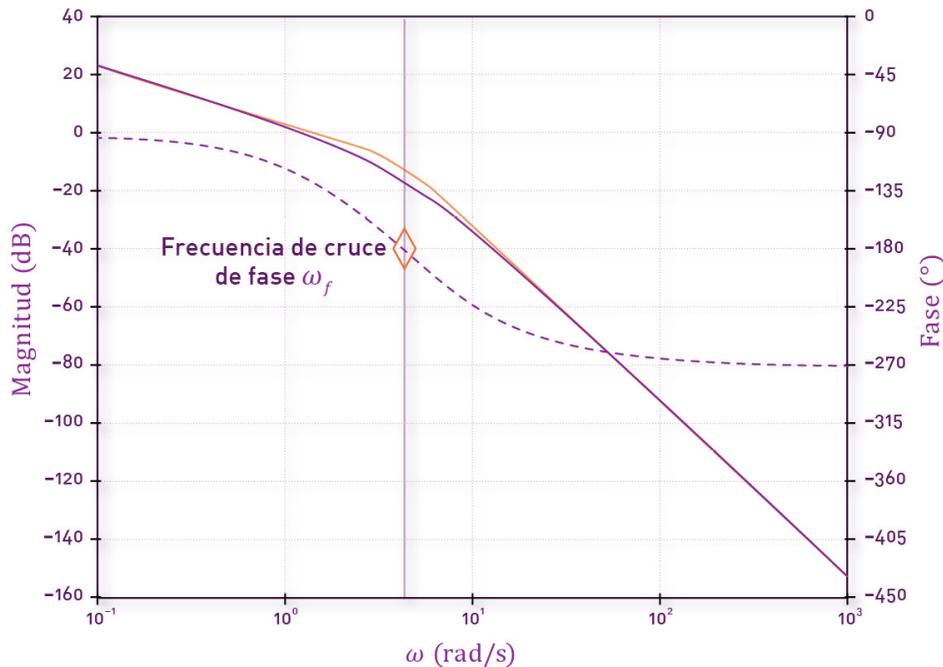


Márgen de ganancia (K_g): Es el recíproco de la magnitud de la función de transferencia en la frecuencia de cruce de fase.



Frecuencia de cruce de fase (ω_f): Es la frecuencia a la cual el ángulo de fase es -180° .

$$K_g = -20 \log |G(j\omega_f)|$$

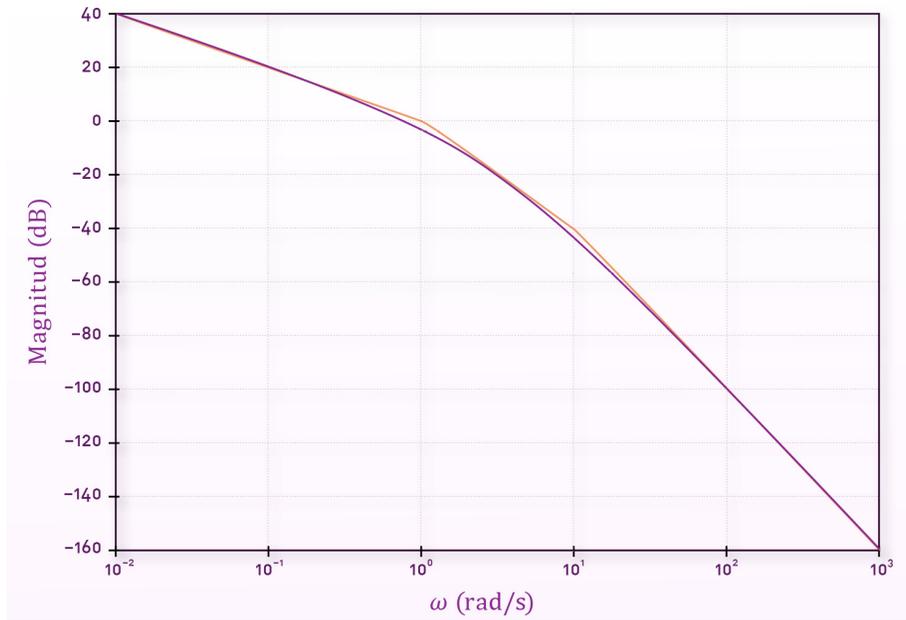


Ejemplo. Para el siguiente sistema, diseñe un controlador para que el margen de fase sea de 45° y el coeficiente de error estático de velocidad sea de $4s-1$.

$$G_p(s) = \frac{1}{s(0.1s + 1)(s + 1)}$$

Solución: El primer paso es normalizar la función:

$$G_p(j\omega) = \frac{1}{(j\omega) \left(1 + \frac{j\omega}{1}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{10}\right)}$$



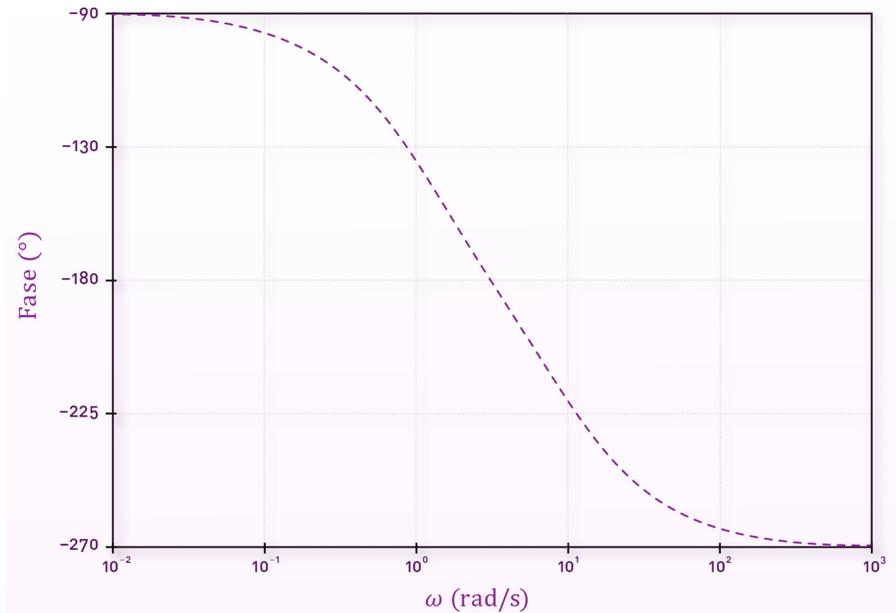
Sabemos que: $K_v = \lim_{j\omega \rightarrow 0} j\omega G_{LA}(j\omega)$ (1)

$$\gamma = 180^\circ + \text{ang}(G_{LA}(j\omega)) \quad (2)$$

$$|G_{LA}(j\omega)| = 1 \quad (3)$$

Proponemos un compensador de la forma:

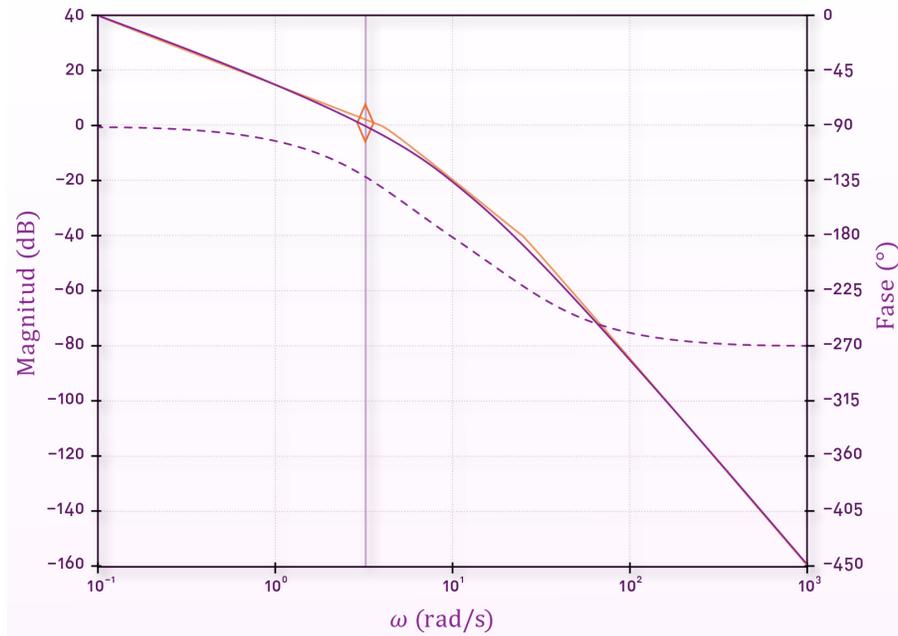
$$G_c(j\omega) = \frac{K \left(1 + \frac{j\omega}{\alpha}\right)}{\left(1 + \frac{j\omega}{\beta}\right)}$$



Entonces $G_{LA}(j\omega) = G_c(j\omega) G_p(j\omega)$

Para satisfacer la condición $K_v = 4$:

$$4 = \lim_{j\omega \rightarrow 0} j\omega \frac{1}{(j\omega)\left(1 + \frac{j\omega}{1}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{10}\right)} \frac{K\left(1 + \frac{j\omega}{\alpha}\right)}{\left(1 + \frac{j\omega}{\beta}\right)}$$



De donde podemos despejar $K = 4$. Recordemos que el agregar una ganancia en el controlador, equivale a poner un offset en el diagrama de Bode de magnitud, esto implica que cambia la ω_g y, por consecuencia, también el margen de fase.

El problema ahora consiste en determinar los valores de α y β del controlador que satisfagan la condición para el margen de fase.

Ahora, tomando en cuenta el objetivo $\gamma = 45^\circ$, es conveniente recordar que si la asíntota de baja frecuencia (no su extensión) cruza con el eje de 0dB , entonces $\omega_g = K_v$; entonces forzamos a que esto suceda aumentando la pendiente exactamente en la primer frecuencia de corte de la $G_{LA}(j\omega)$, es decir, poniendo un cero en $\omega = 1\text{rad/s}$. En otras palabras, hacemos $\alpha=1$. Con esto cancelamos el primer polo de la función de transferencia y se logra $\omega_g = K_v$, por lo que no será necesario utilizar la ecuación (3).

Finalmente podemos utilizar la ecuación (2) para encontrar el valor de β :

$$45^\circ = 180^\circ + \text{ang}\left(\frac{1}{(j\omega)\left(1 + \frac{j\omega}{10}\right)} \frac{4}{\left(1 + \frac{j\omega}{\beta}\right)}\right)$$

$$45^\circ = 180^\circ - 90 - \tan^{-1}\left(\frac{4}{10}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{4}{\beta}\right)$$

$$23.1986 - \tan^{-1}\left(\frac{4}{\beta}\right)$$

$$\beta = 9.33$$

Entonces, en el dominio de $j\omega$, el controlador queda:

$$G_c(j\omega) = \frac{4(1 + j\omega)}{1 + \frac{j\omega}{9.33}}$$

Y finalmente:

$$G_c(j\omega) = \frac{37.33(s + 1)}{s + 9.33}$$

En este tema hemos analizado técnicas de análisis para sistemas lineales que permiten describir su comportamiento en frecuencia, una vez analizado el sistema es posible diseñar compensadores que corrijan o mejoren la respuesta en frecuencia de acuerdo con algún objetivo específico.

Conclusión del capítulo 7

El análisis de respuesta en frecuencia se basa en el hecho de que un sistema lineal modifica la magnitud y la fase de la señal de entrada y conserva la forma de onda y la frecuencia. Los diagramas de Bode de magnitud y fase dan información sobre el comportamiento de estas dos variables con respecto a la frecuencia.

Los márgenes de robustez: el margen de fase y el margen de ganancia, son parámetros de diseño para controladores y dan información sobre la estabilidad relativa del sistema.

En este capítulo hemos visto cómo se pueden diseñar compensadores en frecuencia sin necesidad de recurrir a fórmulas prediseñadas tales como los compensadores en adelanto o atraso. Estas técnicas de compensación fueron diseñadas cuando no se contaba con amplificadores operacionales con los que se pudiera instrumentar un compensador cualquiera.

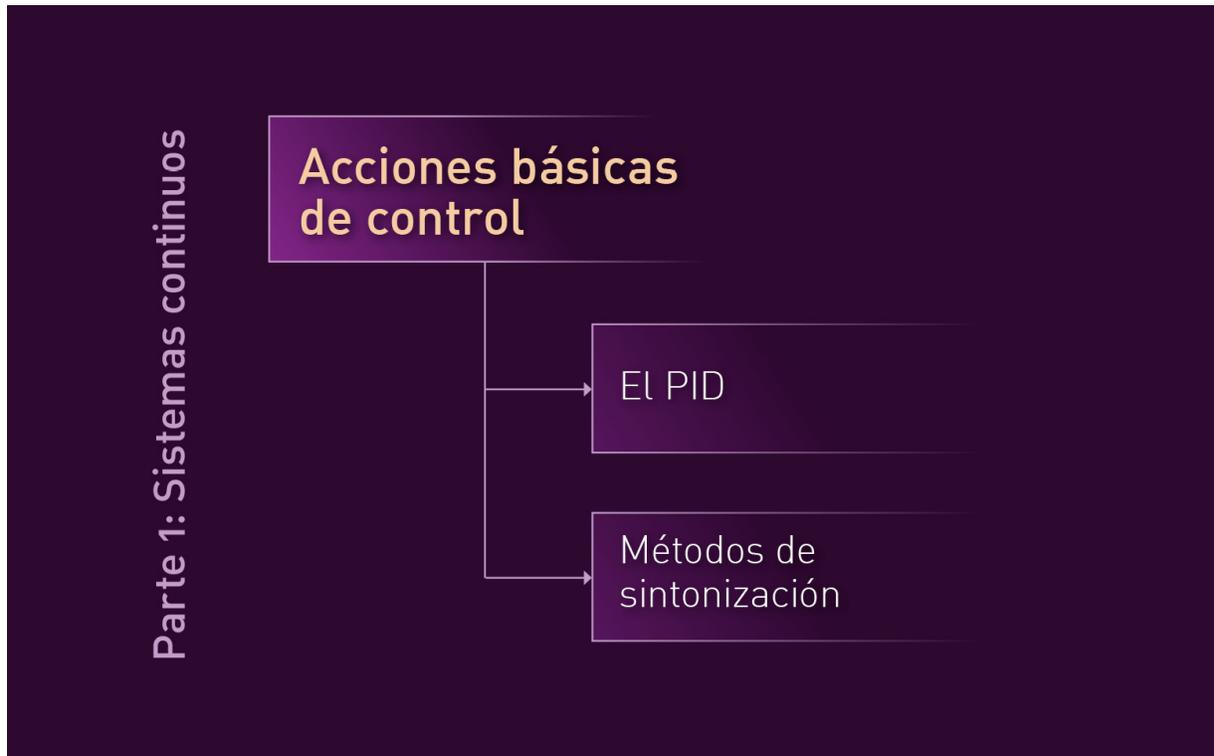
Actividades del capítulo 7

- [Actividad integradora](#)

Recursos del capítulo 7

- [PoleZeroApplet](#).
- Applet de Java para obtener diagramas de Bode.

8. Respuesta en frecuencia



Uno de los controladores más utilizados en la industria es el conocido como el PID por las siglas Proporcional Integral Derivativo. El uso extensivo de este controlador se debe a que es posible sintonizar los parámetros del mismo, utilizando mediciones previas de la respuesta del sistema a controlar, sin necesidad de contar con el modelo matemático del sistema.

Dado que, en general, la función de transferencia de un controlador se compone de ganancias, polos y ceros, el PID aprovecha esta idea simplificando un poco el tipo de acciones que se generan cuando se instrumenta un controlador; esto es, utiliza una ganancia del error, una integral del error y una derivada del error. Estas tres acciones se conocen como acciones básicas de control y son reunidas en un PID para un propósito específico: tener una señal de salida rápida, un sobreimpulso pequeño y un error en estado estacionario nulo.

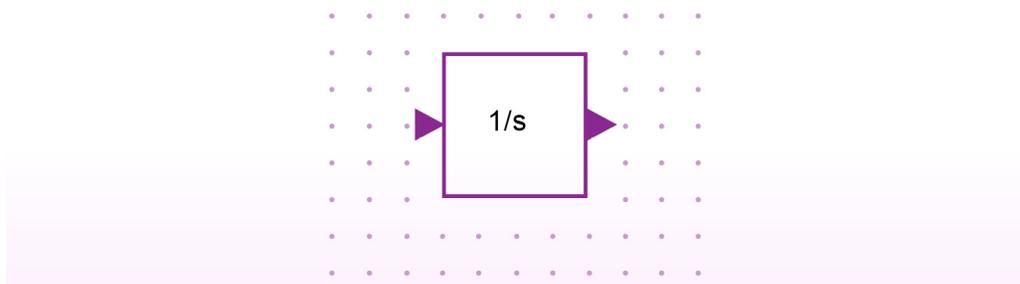
No todos los sistemas responden bien cuando se instrumenta un PID, esto se debe a que el sistema a controlar debe cumplir con ciertas características. Por ejemplo, sabemos que si agregamos un polo en el origen, la respuesta ante un escalón unitario de la planta tiene un error nulo en estado estacionario, pero esto solo sucede para **sistemas tipo cero**, es decir, sistemas que presentan un error de entrada. Para este tipo de sistemas un PID no es conveniente pues puede llegar a inestabilizar la planta.

Este capítulo tratará los conceptos básicos para instrumentar este tipo de controladores y también se tratarán algunos métodos de sintonización de sus parámetros.

8.1 El PID

El controlador **PID** reúne tres acciones básicas de control:

- » Proporcional: Agrega una proporción del error



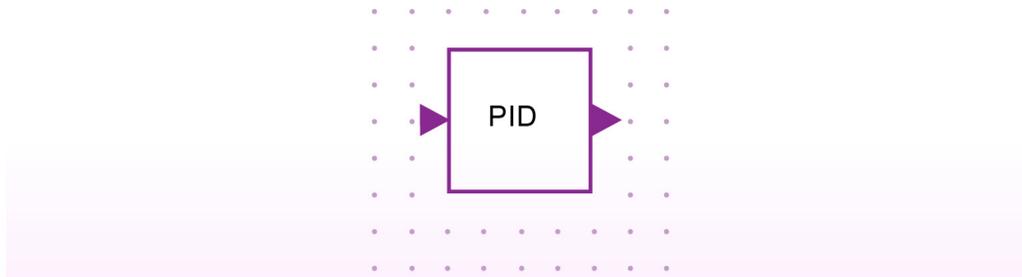
- » Integral: Agrega una proporción de la integral del error
- » Derivativa: Agrega una proporción de la derivada del error

En general, la función de transferencia de un PID se puede escribir como:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

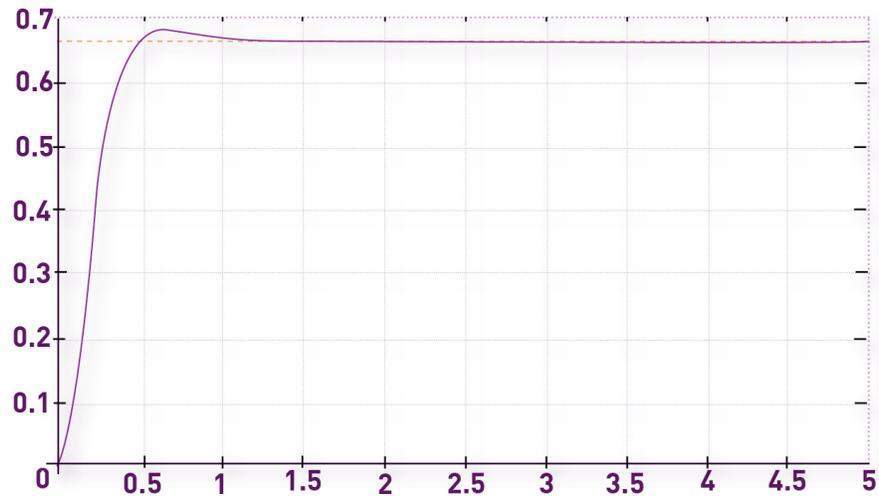
$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{d}{dt} e(t) \right)$$

Para $u(t)$ la salida del controlador (entrada a la planta), $e(t)$ la entrada al controlador (el error proveniente del punto de suma en el lazo de control), K_p la ganancia proporcional, T_i el tiempo integral y T_d el tiempo derivativo.

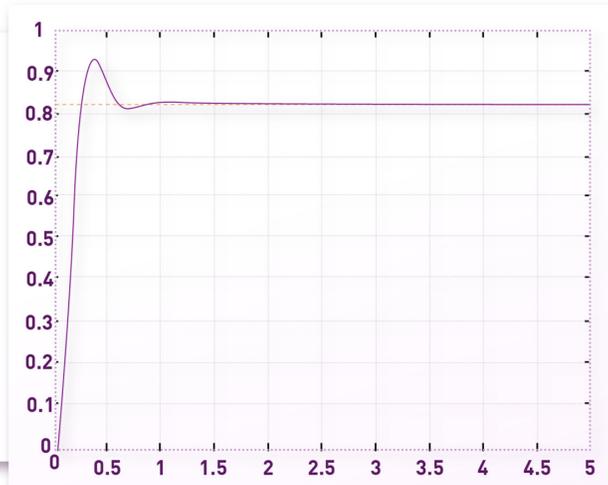


Para explicar cualitativamente la acción de cada una de las acciones de control empezaremos suponiendo sólo la acción proporcional, es decir consideraremos la acción integral y la derivativa nulas ($T_i = T_d = 0$).

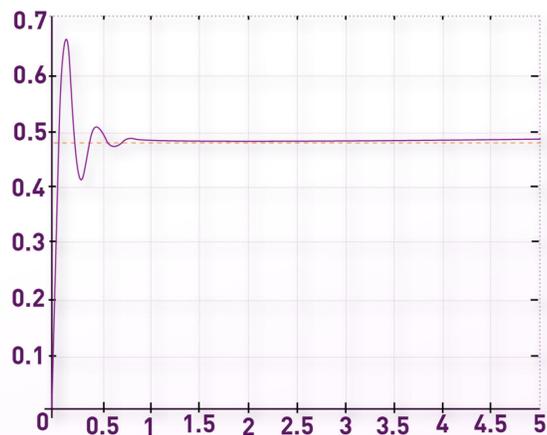
Supongamos que un sistema tiene una respuesta al escalón unitario como la que se muestra en la siguiente figura. Se puede observar que se tiene un error en estado estacionario relativamente grande. Intuitivamente, dado que la función de transferencia del controlador proporcional es solamente una ganancia, parece lógico que, si aumentamos esta ganancia, la salida sistema sea mayor y se pueda disminuir este error.



Problemas con una $K_p=50$. El error en estado estacionario ha disminuido como era de esperarse, pero también notamos un aumento en el sobreimpulso del sistema.



Si aumentamos más la ganancia, por ejemplo a $K_p=200$ seguimos disminuyendo el error en estado estacionario pero el sobreimpulso también aumentó.

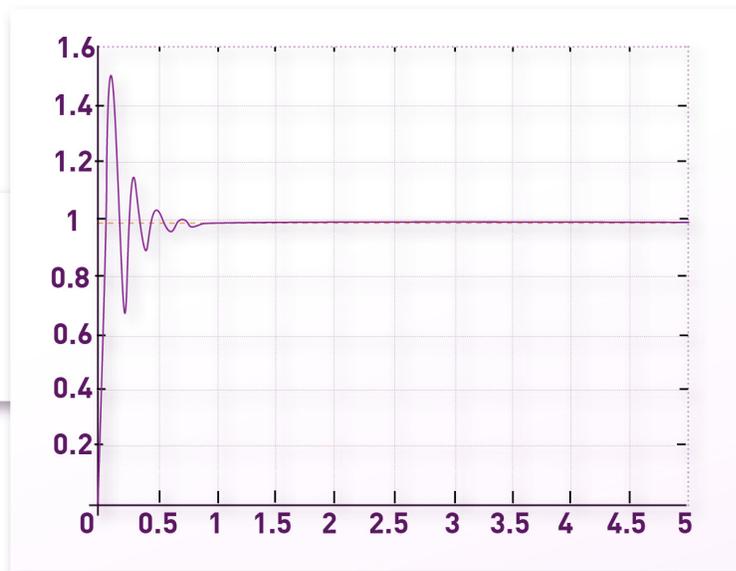


Para notar más este efecto, aumentamos K_p a 500, aquí se puede observar aún más el efecto de esta acción de control. Particularmente, el error en estado estacionario es muy cercano a cero pero el sobreimpulso llega a más del 50%.

Claramente, el tener solamente un control proporcional no es la mejor solución.

Dado que el sistema tiene un error distinto de cero ante una entrada escalón, sabemos que el sistema es de tipo 0, es decir, no tiene polos en el origen. Aquí es conveniente, entonces, introducir al controlador la parte integral.

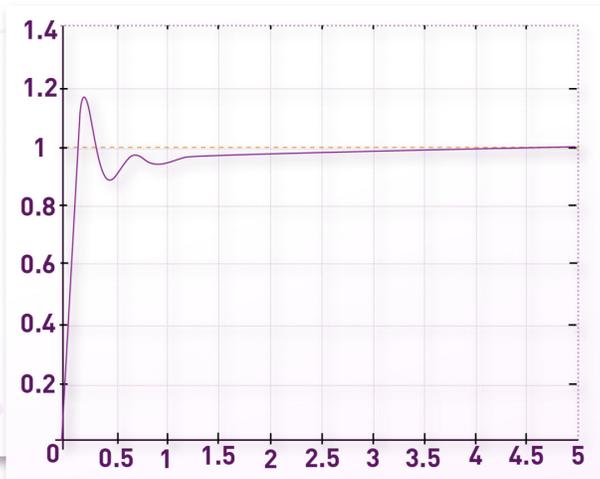
$$K_I = \frac{K_P}{T_i}$$



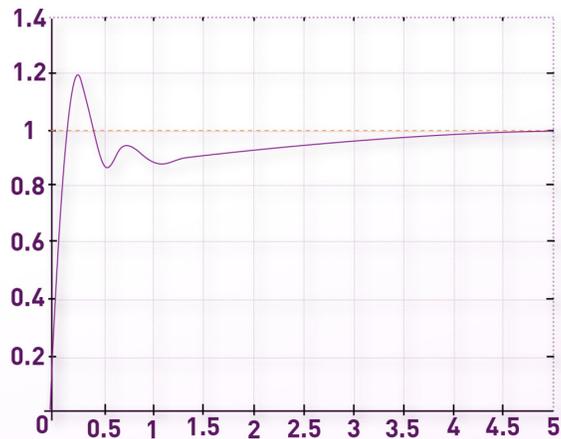
Fijaremos el valor de K_P en 100 y comenzaremos a variar el parámetro K_I . Nótese que ahora tenemos tanto la acción proporcional, como la acción integral en el controlador. A este tipo de controladores se les llama **PI**.

El solo hecho de hacer distinta de cero (y positiva) la ganancia integral, coloca un polo en el origen del sistema controlado y dado que el sistema es tipo cero, entonces se espera que el error en estado estacionario sea cero.

Hagamos $K_I=50$. En la figura se puede observar que, efectivamente, el error se hace cero, vemos también que el sobreimpulso no es tan grande, menos del 20%, pero la respuesta es muy lenta.

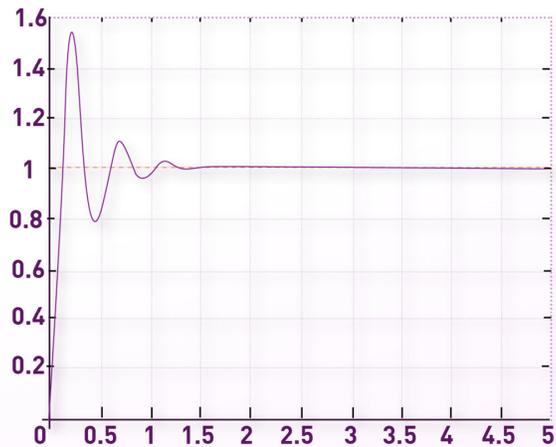


Si aumentamos el valor de K_I a 200, la respuesta es más rápida pero tenemos un sobreimpulso mayor, casi del 30%, mas aún conservamos el error nulo en estado estacionario.

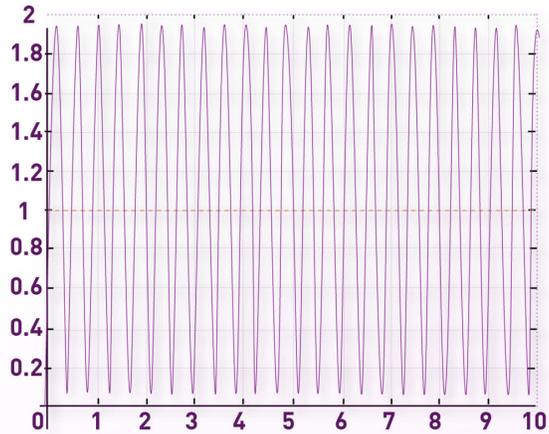


Pareciera lógico que, si seguimos aumentando el valor de K_I , el sobreimpulso será más grande. Veamos qué sucede:

En esta gráfica, el valor de K_I se ha aumentado a 500. Se observa un sobreimpulso mayor, de casi el 50% y también apreciamos la aparición de oscilaciones típicas de un sistema subamortiguado con un factor de amortiguamiento pequeño.

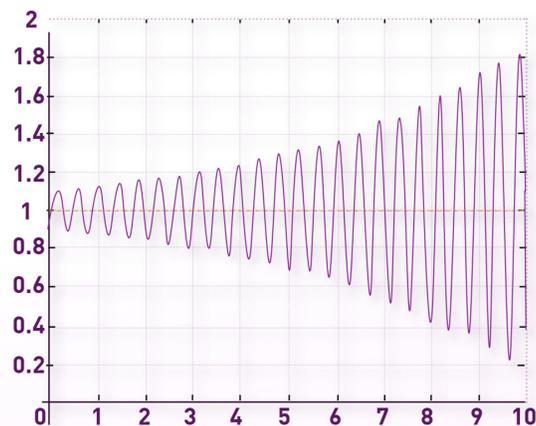


Si aumentamos K_I podemos esperar, entonces, que en algún momento tengamos un sistema marginalmente estable. Para comprobar esto, hacemos $K_I=1320$ y podemos observar en la gráfica que la respuesta presenta oscilaciones sostenidas.



Nótese que, en este experimento numérico, no hemos partido del modelo matemático del sistema pero, si lo tuviéramos y realizáramos el lugar de las raíces del sistema para K_I , observaríamos que los polos de lazo cerrado están desplazándose hacia el eje imaginario hasta llegar a colocarse encima del eje, por esta razón tenemos este comportamiento marginalmente estable.

Esto también implica que si aumentamos aún más el valor de K_I , los polos de lazo cerrado pasarían al semiplano derecho de Laplace ocasionando inestabilidad en el sistema. Probemos $K_I=1400$. En la gráfica se muestra que la respuesta presenta oscilaciones que aumentan de amplitud, esto implica que el sistema se vuelve inestable como esperábamos.



Tomemos un valor de K_I que produzca una respuesta aceptable, por ejemplo $K_I=200$ y conservemos el valor de $K_p=100$. Ahora nos queda el recurso de la acción derivativa.

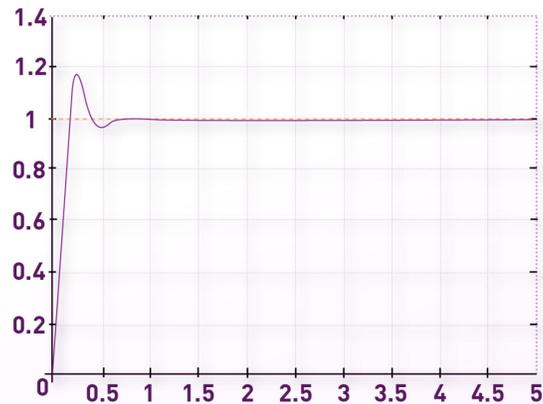
A fin de manejar solo un parámetro, definamos:

$$K_D = K_p T_d$$

Hagamos $K_D=2$, la respuesta se muestra en la siguiente gráfica y se observa que el sobreimpulso se reduce al menos de 20% sin perder las características que teníamos, es decir, el error en estado estacionario nulo.

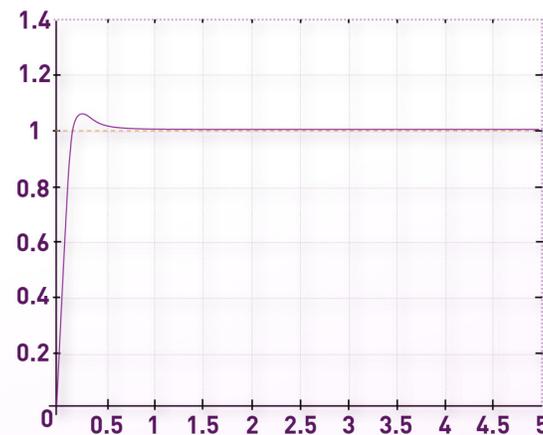
Este es precisamente el controlador PID pues tiene las tres acciones básicas.

Es importante aclarar que sólo con el PI no fue posible reducir este sobreimpulso, veamos qué tanto podemos mejorar la respuesta con el PID.



Si hacemos $K_D=5$, el sobreimpulso disminuye menos del 10% como se muestra en la siguiente gráfica.

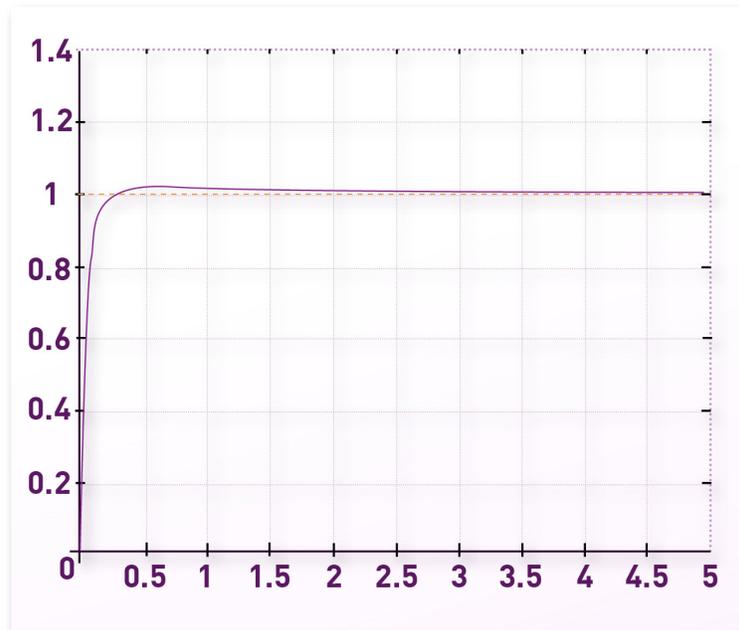
Podemos intuir que, si aumentamos K_D , logramos que la respuesta tenga un menor sobreimpulso y podamos conservar también la rapidez de respuesta y el error en estado estacionario.



Hagamos entonces $K_D=10$ La respuesta al escalón es rápida, presenta un error en estado estacionario nulo y, además, el sobreimpulso es muy pequeño, de menos de 5%. Podemos aceptar ahora esta respuesta.

El método que hemos utilizado en este experimento puede ser aplicado en situaciones reales pero es importante aclarar que, dependiendo de la planta, el variar parámetros sin cautela puede conducir a una situación de inestabilidad.

Esto es de suma importancia pues, en una situación normal, no queremos que se presenten este tipo de comportamientos.

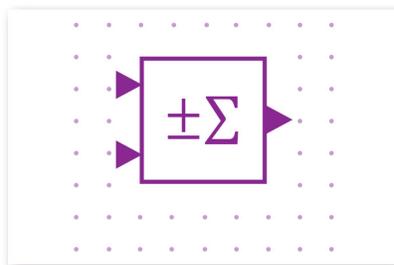
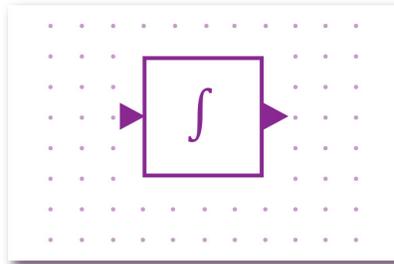


Podemos resumir el método como sigue:

1. Variar el parámetro proporcional K_p (set point) hasta tener una respuesta que no presente un sobreimpulso demasiado grande.

2. Variar el parámetro integral K_I . Con esto logramos un error nulo en estado estacionario. Esta acción provoca que la planta responda más lento. Aumentamos K_I hasta tener una respuesta no tan lenta y con un sobreimpulso no muy grande, de menos del 20%. Cuidar que la planta no se estabilice. Variar K_D hasta tener una

respuesta rápida pero sin sobreimpulso o teniendo un sobreimpulso muy pequeño.



8.2 Métodos de sintonización

Hemos visto que es posible sintonizar un controlador PID con una metodología de prueba y error. Dependiendo de la naturaleza de la planta, es posible que este método no arroje los resultados deseados. En este caso, podemos recurrir a métodos clásicos que, aunque fueron desarrollados empíricamente, presentan resultados aceptables para ciertas situaciones.

Presentaremos dos métodos, ambos desarrollados por John G. Ziegler y Nathaniel B. Nichols (Ziegler & Nichols, 1942) y son mejor conocidos como los métodos de Ziegler-Nichols:

1. Método de curva de reacción
2. Método de ganancia crítica (oscilaciones sostenidas)

Estos métodos son ampliamente utilizados pues **no consideran** el modelo matemático del sistema, es decir, se pueden aplicar (bajo ciertas circunstancias) sin conocer las ecuaciones dinámicas que modelan el comportamiento del sistema a controlar. Esto claramente

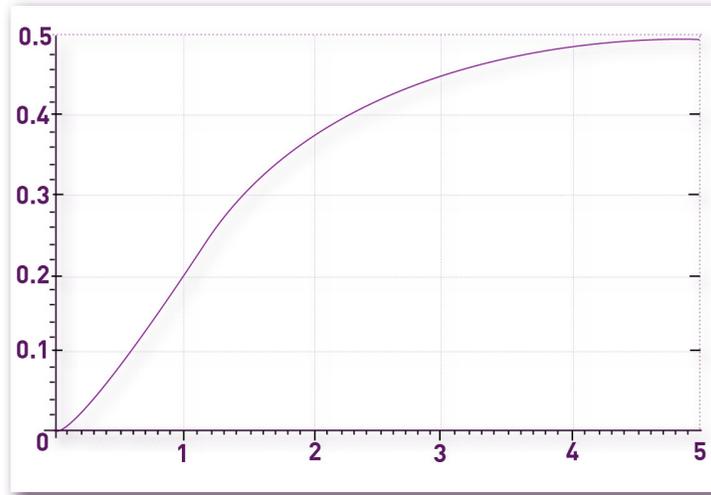
es una ventaja sobre otros controladores vistos. Por esta razón se utilizan mucho en la industria.



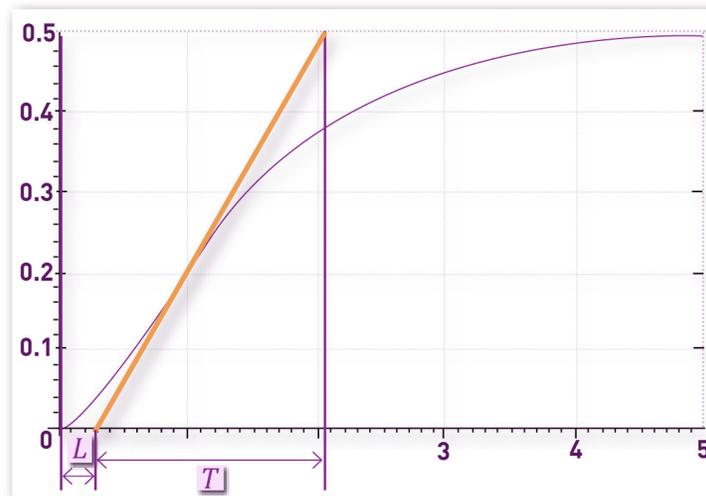
8.2.1. Método de curva de reacción

Este método permite obtener un ajuste grueso de los parámetros K_p , T_i y T_d para un controlador PID.

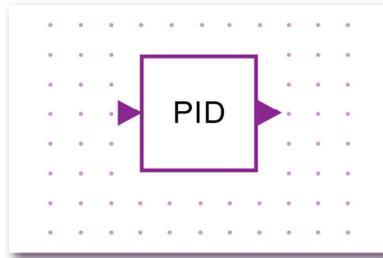
Primero se aplica una entrada escalón al sistema en lazo abierto. La magnitud del escalón debe ser suficiente para obtener una respuesta del sistema pero sin poner en riesgo la operación del proceso. Una restricción para poder aplicar este método es que la derivada de la respuesta cuando $t=0$ sea cero, es decir, una respuesta como se muestra en la gráfica. Esta es una condición importante pero no tan restrictiva, varios sistemas presentan este tipo de respuesta.



El siguiente paso es obtener la pendiente de una recta tangente en el primer punto de inflexión de la respuesta como se muestra en la gráfica. Hay dos intersecciones de esta recta que se deben considerar, la intersección con el valor de la salida en estado estacionario y la intersección con el eje del tiempo. Con estas intersecciones es posible, por simple geometría, obtener los parámetros L y T .



Con los valores de L y T se calculan los parámetros del PID de acuerdo con la siguiente tabla (Ziegler y Nichols, 1942)



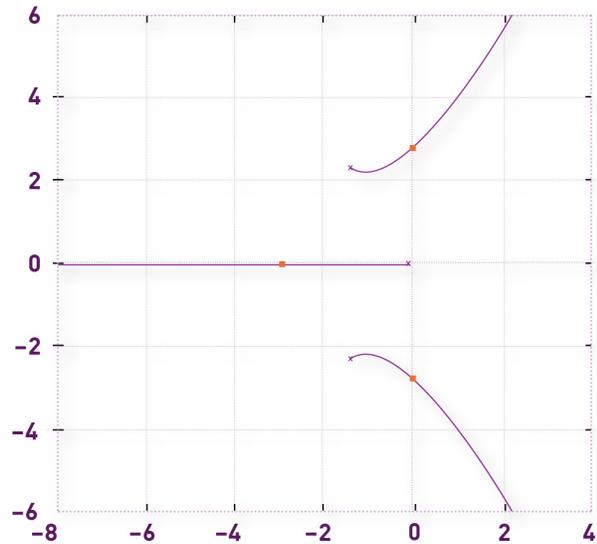
Acción	K_p	T_i	T_d
P	T/L	-	-
PI	$0.9T/L$	$L/0.3$	-
PID	$1.2T/L$	$2L$	$0.5L$

Se pueden considerar estos parámetros para sintonizar un controlador comercial.

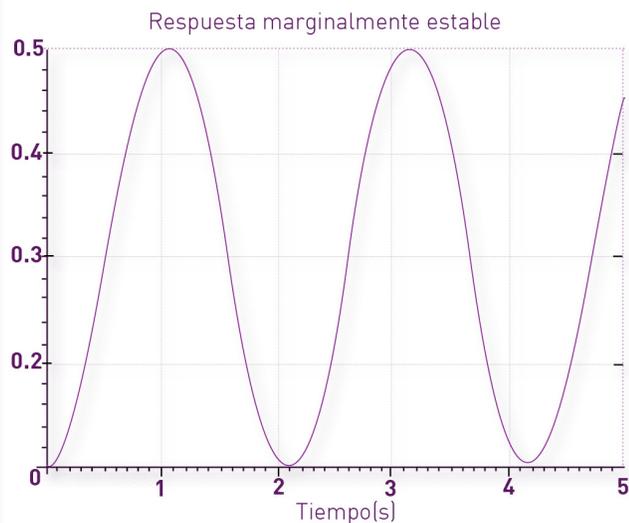


8.2.2. Método de oscilaciones sostenida

Este método requiere de la aplicación de un controlador proporcional al sistema en lazo cerrado. Se varía K_p hasta que el sistema presenta un comportamiento marginalmente estable.



Nótese que no todos los sistemas tienen un comportamiento de esta naturaleza, es decir, dependiendo de la dinámica de la planta, es o no posible lograr oscilaciones sostenidas con sólo un controlador proporcional, pero si este es el caso, entonces con este valor crítico que llamaremos K_u y el periodo de oscilación, se calculan los valores de los parámetros del PID de acuerdo a la siguiente tabla (Ziegler y Nichols, 1942)



Acción	Kp	Ti	Td
P	$0.5K_u$	-	-
PI	$0.45K_u$	$0.8T_u$	-
PID	$0.6K_u$	$0.5T_u$	$0.12T_u$

Ejemplo. Considere el siguiente sistema:

$$G(s) = \frac{5}{s^3 + 3s^2 + 8s + 1}$$

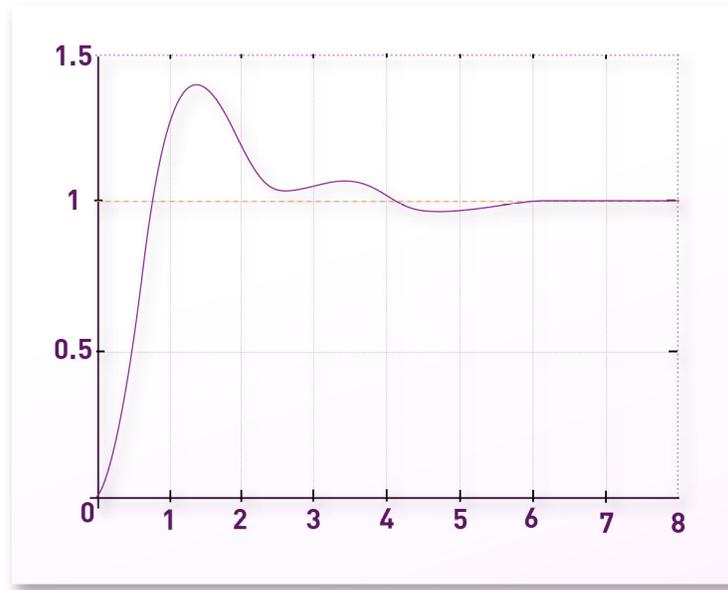
Diseñe un controlador **PID** utilizando el método de oscilaciones sostenidas.

Solución. Utilizando el método de **Routh-Hurwitz** para la ecuación característica de lazo cerrado:

$$s^3 + 3s^2 + 8s + 5K + 1 = 0$$

Es posible determinar que la ganancia crítica es $K = K_u = 4.6$. Al sustituir este valor, tenemos dos polos imaginarios en $s = \pm j2.82$. Esto implica que la frecuencia de oscilación es $\omega = 2.82 \text{ rad/s} = 2\pi/T_u$, de donde $T_u = 2.2 \text{ s}$ y siguiendo el controlador queda:

$$u(t) = 2.8 \left(e(t) + \frac{1}{1.1} \int_0^t e(t) dt + 0.3 \frac{d}{dt} e(t) \right)$$



En este tema hemos visto dos formas de sintonizar controladores PID, una ventaja importante es que no es estrictamente necesario conocer las ecuaciones dinámicas del sistema a controlar.

LIGAS DE INTERÉS

[Amplificadores operacionales 2011](#)

Program CC (2011).

Conclusión del capítulo 8

El controlador **PID** es muy utilizado en la industria, su popularidad se debe a que es posible diseñarlo sin necesidad de conocer las ecuaciones dinámicas de la planta.

En este capítulo hemos visto mecanismos de ajuste para sintonizar los parámetros del **PID**; estos métodos se pueden aplicar bajo ciertas circunstancias que es importante notar. El método de curva de reacción necesita que la respuesta al escalón tenga un punto de inflexión para poder aplicarse.

Por otro lado, el método de oscilaciones sostenidas requiere que, con un controlador proporcional, sea posible llevar al sistema al límite de la estabilidad. Este último método representa un riesgo cuando se realiza en una planta real pues, si se aumenta este parámetro, es posible que la respuesta del sistema sea inestable y se ponga en peligro la planta.



Actividades del capítulo 8

- [Actividad integradora](#)

Recursos del capítulo 8

- Program CC (2011).
- [Amplificadores operacionales](#) (2011).

9. Espacio de estado



Las técnicas en el espacio de estado se desarrollan en el dominio del tiempo en lugar de utilizar la variable de Laplace. Estas técnicas surgieron inicialmente de la necesidad de atacar sistemas no lineales. Las técnicas de control clásico se desarrollaron con base en la función de transferencia y, dado que un sistema no lineal no puede tener una función de transferencia en el dominio complejo, hubo necesidad de utilizar otras herramientas para analizar y controlar sistemas no lineales. Esto no implica que sólo sean útiles para sistemas no lineales; por el contrario, para sistemas lineales, estas técnicas resultan ser muy útiles y, sobre todo, sencillas de instrumentar.

Otra ventaja de utilizar técnicas en el espacio de estado es el poder manipular diversas variables a la vez, dando como resultado un análisis y un control de las variables “internas” del sistema, que dejan de ser accesibles cuando se trabaja con una función de transferencia.

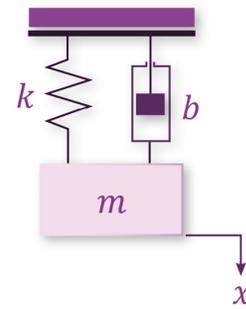
En este capítulo se revisarán conceptos preliminares de las

ecuaciones de estado, que resultan ser una forma matricial de escribir las ecuaciones dinámicas del sistema. Posteriormente se presentan conceptos de controlabilidad y observabilidad que serán útiles en el diseño de leyes de control y observadores de estado, y que son las herramientas fundamentales para lograr objetivos de control utilizando estas técnicas.

9.1 Concepto de estado

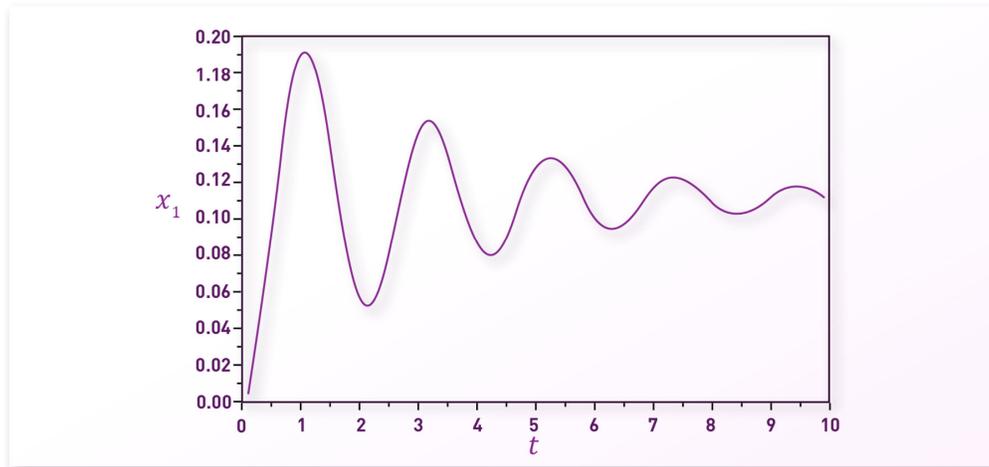
Suponga un sistema masa-resorte-amortiguador con una fuerza externa u y defina la salida $y = x$:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = u$$



Si se hace el cambio de variable para la posición $x_1 \triangleq x$ (donde el símbolo \triangleq denota igualdad por definición) y la velocidad $x_2 \triangleq \dot{x}$, el sistema se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

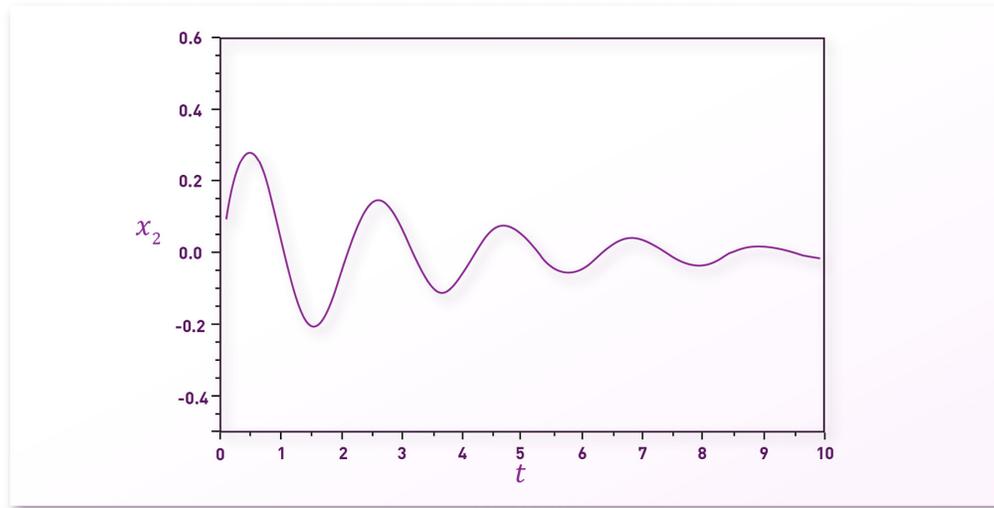


A la ecuación anterior se le denomina ecuación de estado. Si consideramos ahora la salida tenemos:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Existen ventajas al considerar el sistema escrito en esta forma. Una es que la solución del sistema de ecuaciones simultáneas nos da información no solo de la posición, sino también de la velocidad de la masa en cualquier instante de tiempo.

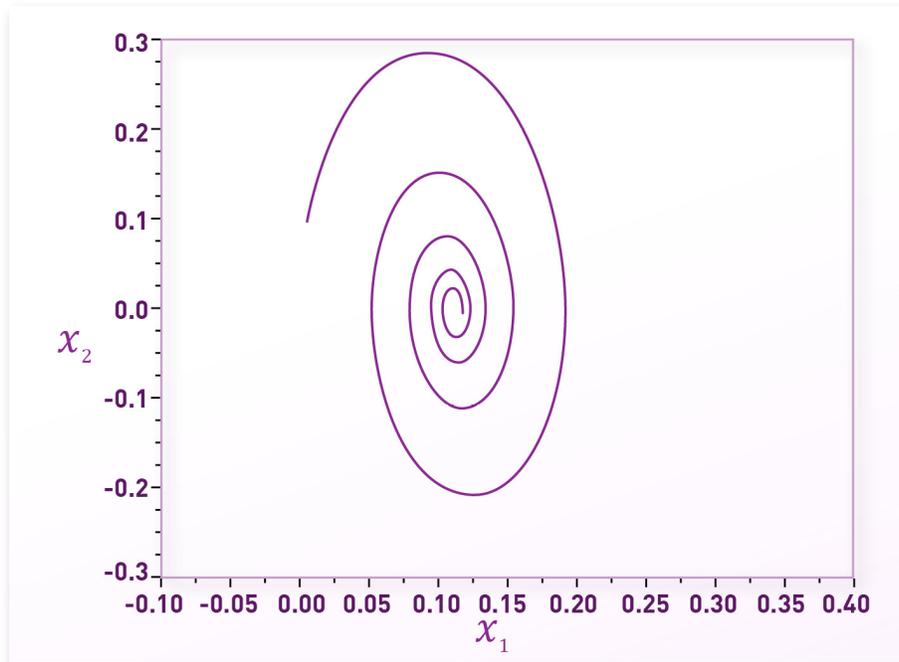
Al vector $[x_1 x_2]^T$ se le denomina vector de estado y a las variables x_1 y x_2 se les denomina variables de estado. Se acostumbra considerar vectores “verticales”; por esta razón, para escribir un vector en forma “horizontal” aplicamos el operador matriz transpuesta (T). El nombre de vector de estado proviene del hecho de que los valores de posición y velocidad del sistema del ejemplo determinan completamente el “estado” del sistema.



Para el sistema del ejemplo, tenemos que el vector puede representarse en dos dimensiones, esto coincide siempre con el orden de la ecuación diferencial lineal de la que se esté tratando. Es decir, si tenemos un SLIT de orden n , tendremos un vector de estado n -dimensional. Así podemos definir:

Estado: conjunto mínimo de variables que describen el comportamiento instantáneo de un sistema dinámico

Espacio de estado: es el espacio n -dimensional formado por las variables de estado como coordenadas



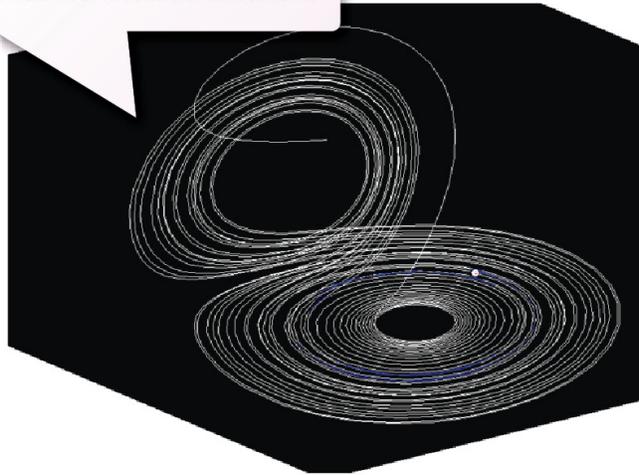
Entonces:

$$x = x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Es decir, para un valor específico de t , el vector de estado da las coordenadas de un punto en el espacio de estado. Esto implica que, en el espacio de estado, la solución forma una trayectoria que será una órbita formada por los puntos $x(t)$ en el espacio de estado. Esta órbita está formada como una gráfica paramétrica n -dimensional con t como parámetro.

En esta imagen se observa una trayectoria de solución en tres dimensiones para un **sistema no lineal** conocido como el sistema de Lorenz en régimen caótico.

Los sistemas lineales no presentan comportamientos tan complejos, pero es importante comentar aquí que las técnicas en el espacio de estado permiten tratar con sistemas no lineales también.



Ejemplo. Obtenga una representación en variables de estado de la planta:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 6s + 3}$$

Solución. Multiplicamos numerador y denominador por $X(s)$:
Entonces, igualando numeradores y denominadores:

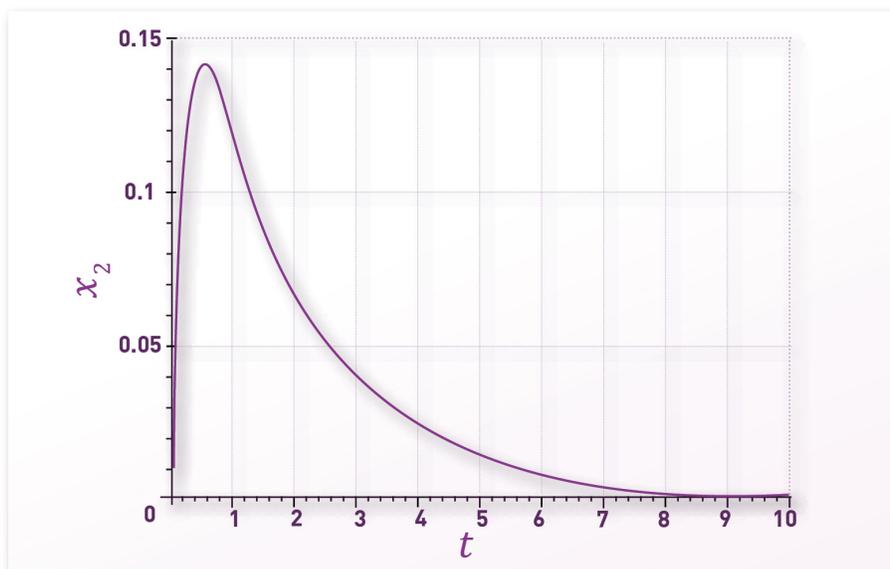
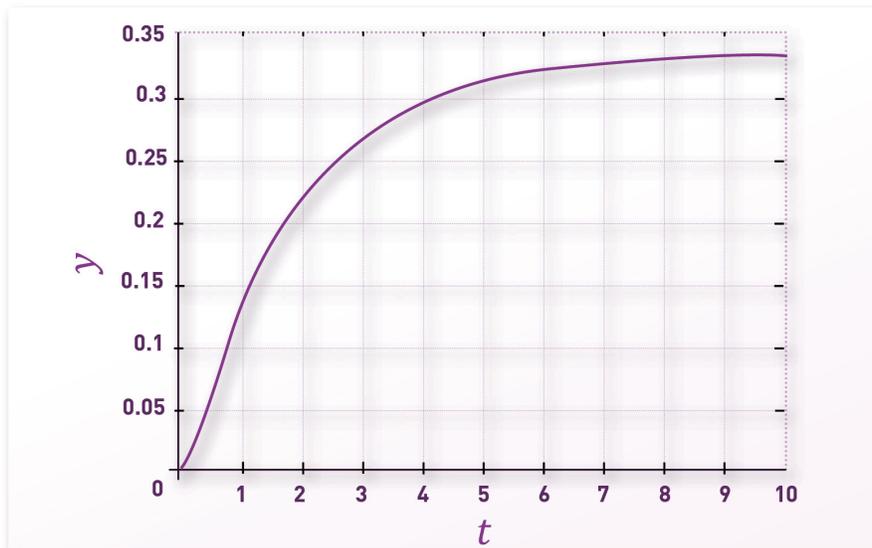
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 6s + 3} X(s)$$

Aplicando transformada inversa y cambios de variable:

$$Y(s) = X(s), U(s) = (s^2 + 6s + 3) X(s)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0] x$$



En este tema hemos visto algunos conceptos fundamentales para comprender el enfoque de técnicas de variable de estado para el análisis de sistemas continuos de control.

LIGAS DE INTERÉS

Program CC (2011).

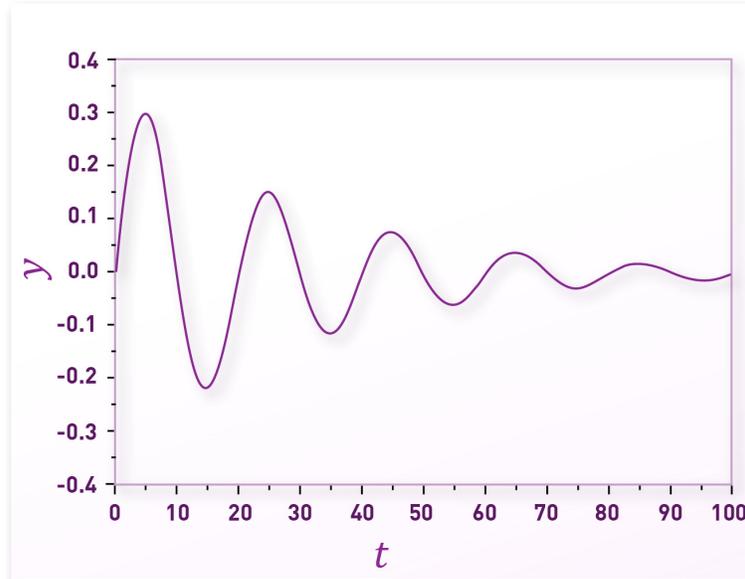
9.2 La ecuación de estado

En el caso general, la ecuación de estado puede representarse como:

$$\dot{x} = f(x,t), y = h(x)$$

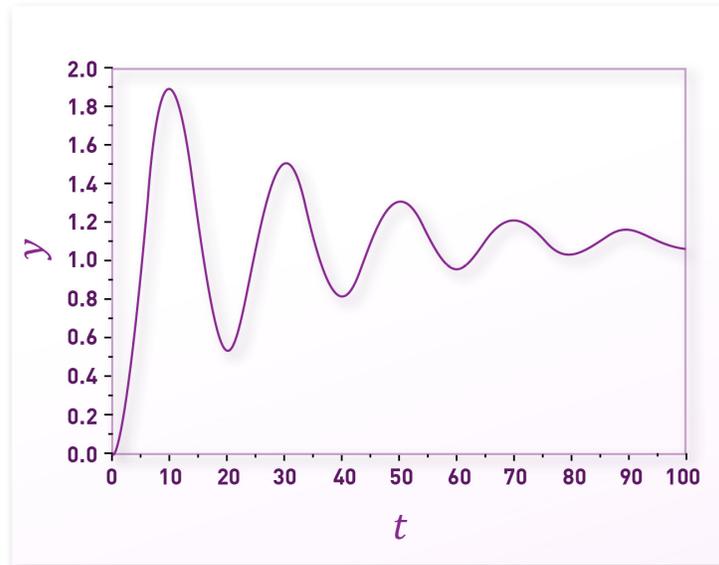
Con $x \in \mathbb{R}^n$ y f, h campos vectoriales sobre x (un vector que contiene funciones de x). Nótese que la linealidad de la ecuación depende de la naturaleza del campo vectorial f . En algunos casos es posible escribir la ecuación anterior como:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, y = h(x)$$



Para f , g y h campos vectoriales sobre x . La diferencia fundamental es el poder escribir explícitamente la entrada u que, a su vez, es una función del tiempo t . De nuevo, la linealidad de esta ecuación depende de la naturaleza de f y g . Un caso particular de este tipo de ecuación es cuando ambos campos vectoriales son lineales, es decir, cuando se puede escribir:

$$\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$$

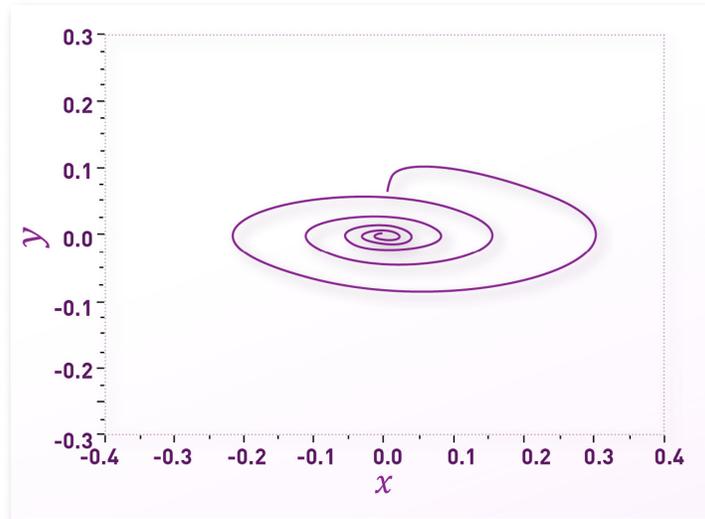


Para el caso lineal de una entrada-una salida, las matrices son de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}; C = [c_1 \dots c_n]$$

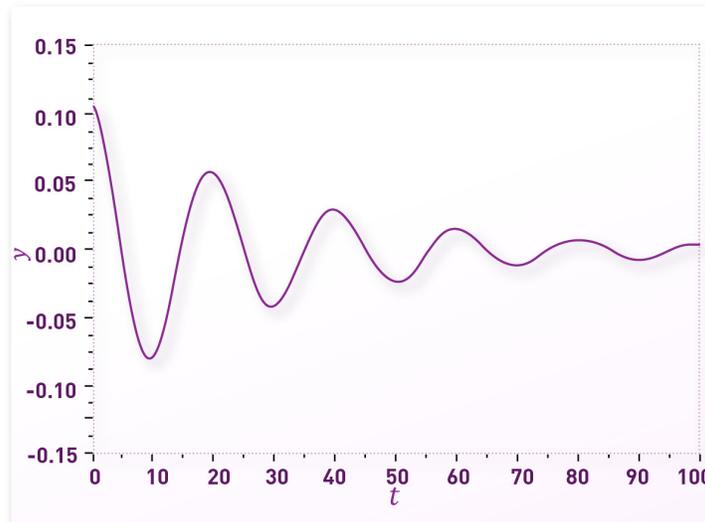
Entonces podemos encontrar la solución de la ecuación de estado aplicando transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\ (sI - A) X(s) &= x(0) + BU(s) \end{aligned}$$



Nótese que para poder factorizar el vector $X(s)$ fue necesaria la multiplicación del escalar s por la matriz identidad I , para poder sumarla con la matriz A . Ahora multiplicaremos ambos lados de la ecuación por la matriz $(sI-A)^{-1}$ para obtener:

$$X(s) = (sI-A)^{-1}x(0) + (sI-A)^{-1}BU(s)$$



Aquí conviene hacer una definición:

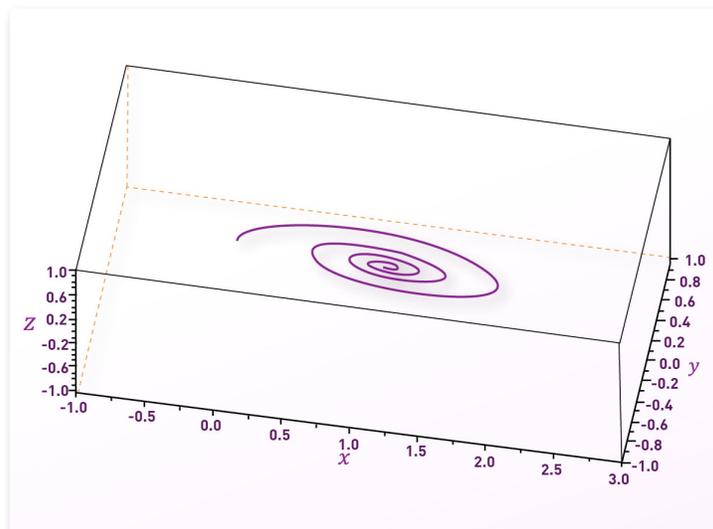
Matriz de transición de estados

Es la matriz que transfiere el estado inicial del sistema a un estado arbitrario en ausencia de una entrada:

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

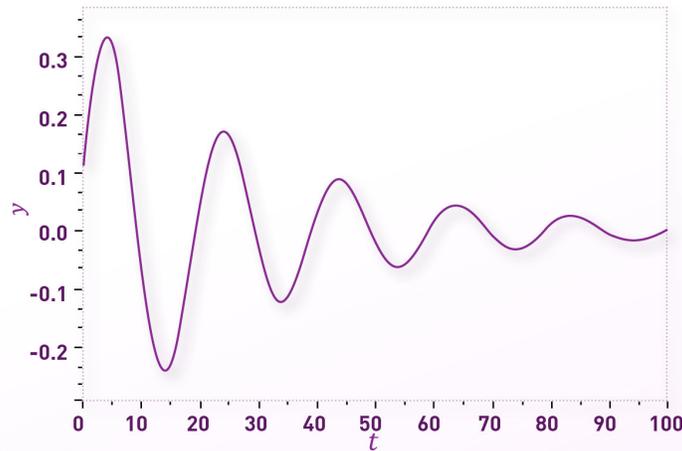
Utilizando este concepto, aplicamos la transformada inversa de Laplace a ambos lados de la ecuación para encontrar el vector:

$$x(t) = \phi(t) x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau) B u(\tau) d\tau$$



Nótese la aplicación del teorema de convolución para obtener la antitransformada de una multiplicación de funciones en el dominio complejo. A ésta última ecuación se le conoce como la solución de la ecuación de estado, también podemos obtener la salida $y(t)$:

$$x(t) = C\phi(t) x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau) Bu(\tau) d\tau$$



Función de transferencia

Es posible también obtener la función de transferencia del sistema a partir de la ecuación de estado, considerando condiciones iniciales nulas y sabiendo que:

$$\begin{aligned} X(s) &= (sI - A)^{-1} BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) \end{aligned}$$

Entonces:

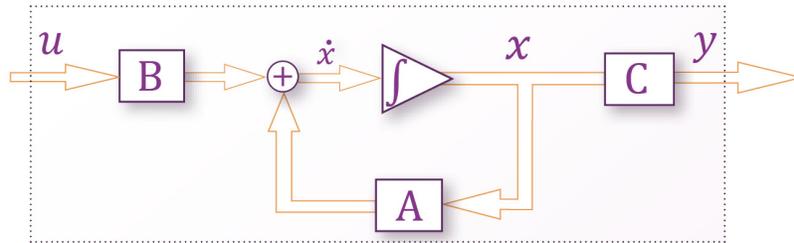
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1} B$$

Y, dado que la matriz inversa está definida como:

$$M^{-1} = \frac{\text{Adj}M}{|M|} = \frac{[[M]^c]^T}{|M|}$$

Donde $\text{Adj}M$ representa la matriz adjunta de M que se puede obtener transponiendo la matriz de cofactores de M y $|M|$ representa

el determinante de M .



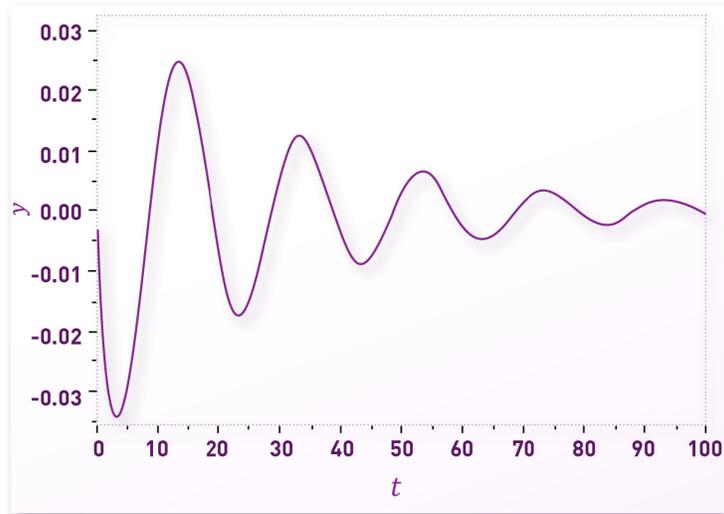
Entonces, podemos escribir la función de transferencia como:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{C \text{ Adj}(sI-A)B}{|sI-A|}$$

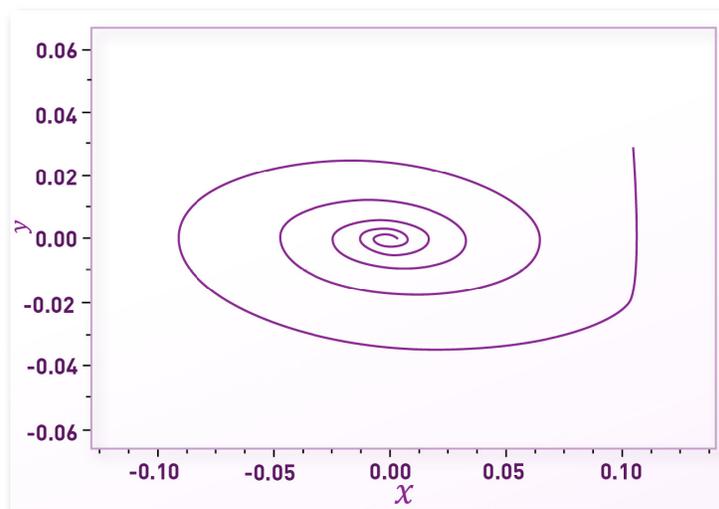
Esta forma de escribir la función de transferencia es muy útil conceptualmente pues vemos la relación de los polos con la matriz A , es decir, los polos son los valores propios de la matriz A . Por esta razón, la ecuación característica del sistema se puede escribir como:

$$|\lambda I - A| = 0$$

En otras palabras, la matriz A contiene la dinámica del sistema y los modos de comportamiento del sistema. Esta ecuación siempre coincide con el denominador de la función de transferencia igualada a cero.



Esta relación entre polos y valores propios es muy importante pues los objetivos de control están enfocados generalmente a variar la ubicación de polos de lazo cerrado del sistema. En este caso, tendremos que buscar formas de variar los valores propios de la matriz coeficiente de x en la ecuación de estado.



En este tema hemos analizado la forma de la ecuación de estado, su solución y su relación con la función de transferencia que modela el sistema.

9.3 Controlabilidad y observabilidad

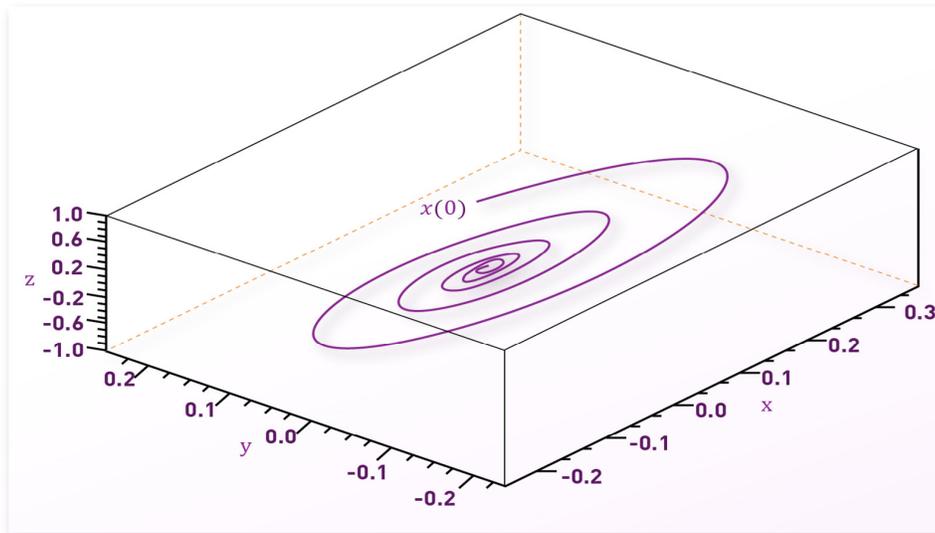
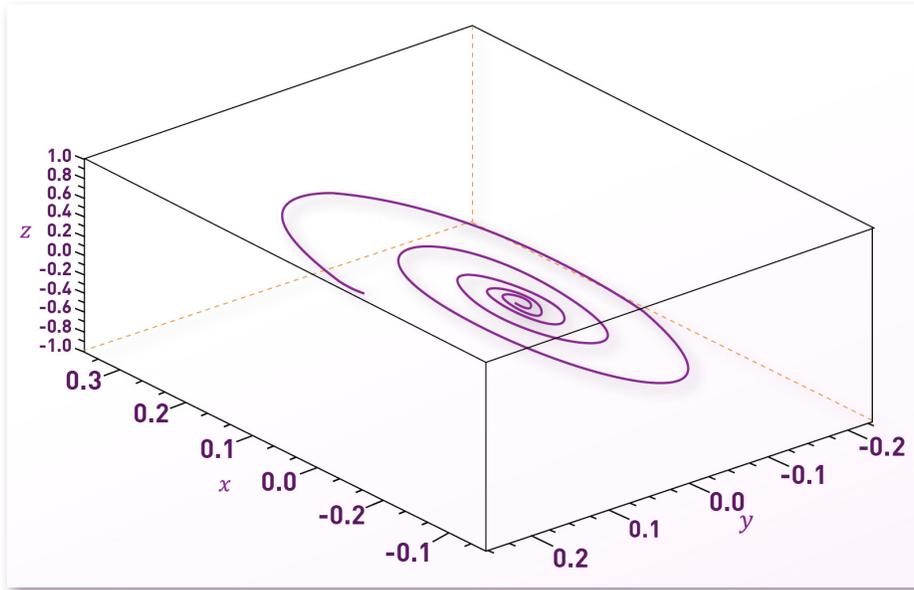
Definiremos ahora un par de conceptos que son de suma importancia para la realización de leyes de control. El primero se refiere a la condición para la existencia de esta ley de control; y el segundo, a la posibilidad de estimar un estado a partir de la salida en caso de que no se pudiera medir.

Controlabilidad

Considere el sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Se dice que el sistema es **controlable** si existe una señal de control $u(t)$ definida sobre t , tal que, empezando desde cualquier estado inicial, el estado $x(t)$ puede ser transferido al estado final deseado x_f en un tiempo finito.



Este concepto se refiere a la posibilidad de obtener una entrada externa al sistema, que llamaremos **ley de control**, que transfiera el sistema a un estado deseado, recordemos que un estado específico es un punto en el espacio de estado.

Si se cumple que:

$$\text{Rango}[B:AB:\dots:A^{n-1}B]=n$$

Donde n es el orden del sistema y el rango de una matriz es el número de vectores linealmente independientes que contiene esta matriz. Entonces, para un estado arbitrario x_f existe una señal de control $u(t)$ que lleva al sistema desde un punto inicial al estado x_f .

$$\begin{matrix} A & B & = & AB \\ \text{nxn} & \times & \text{nx1} & \text{nx1} \end{matrix}$$

A la matriz en la ecuación anterior se le llama matriz de controlabilidad M .

$$M=[B \dots A^{n-1}B]$$

$$\begin{matrix} A^2 & B & = & A^2B \\ \text{nxn} & \times & \text{nx1} & \text{nx1} \end{matrix}$$

Para el caso lineal UEUS (una entrada-una salida) esta matriz es una matriz cuadrada y la condición de controlabilidad puede replantearse como:

$$|M| \neq 0$$

Observabilidad

Considere el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax \\ y &= Cx \end{aligned}$$

El sistema es completamente observable si, dada la salida $y(t)$, es posible determinar el estado inicial $x(0)$.

Si se cumple que:

$$\text{Rango} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

C A = CA
 $1 \times n$ $n \times n$ $1 \times n$

Entonces, es posible determinar el estado inicial $x(0)$ a partir de mediciones de la salida.

$$\begin{matrix} C & A^2 & = & CA^2 \\ 1 \times n & n \times n & & 1 \times n \end{matrix}$$

En este tema se han visto las condiciones para que un sistema sea controlable y observable.

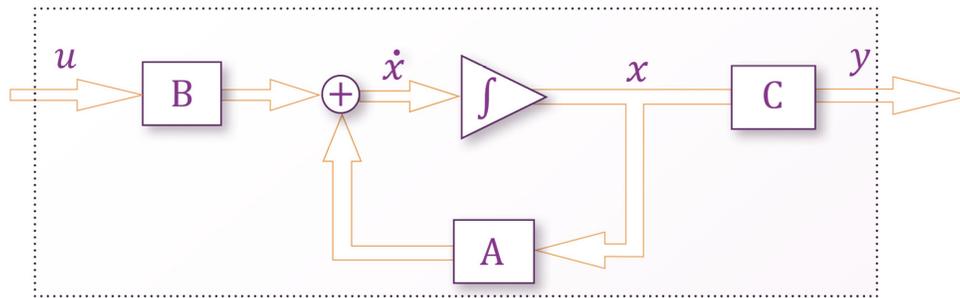
9.4 Control de retroalimentación de estado

En el [tema 9.2](#) de este capítulo se ha comentado sobre la función de transferencia del sistema, se ha visto que los polos del sistema son valores propios de la matriz A de la ecuación de la ecuación de estado:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Es decir los valores propios λ de A que son solución de la ecuación:

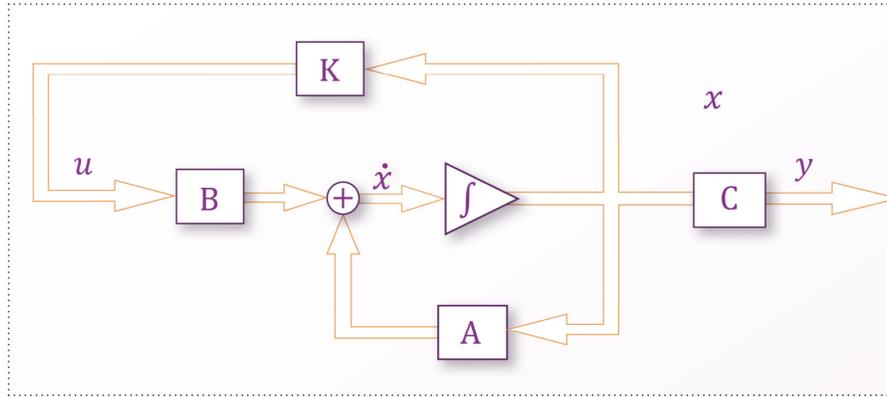
$$|\lambda I - A| = 0$$



Gobiernan el comportamiento del sistema. Entonces, si queremos cambiar el comportamiento, tendremos que cambiar los componentes de la matriz A , es decir, de la matriz coeficiente de x en la ecuación de estado. Sólo si, el sistema es controlable, una opción para realizar este cambio es el proponer una entrada al sistema que sea una función lineal de x :

$$u = -Kx$$

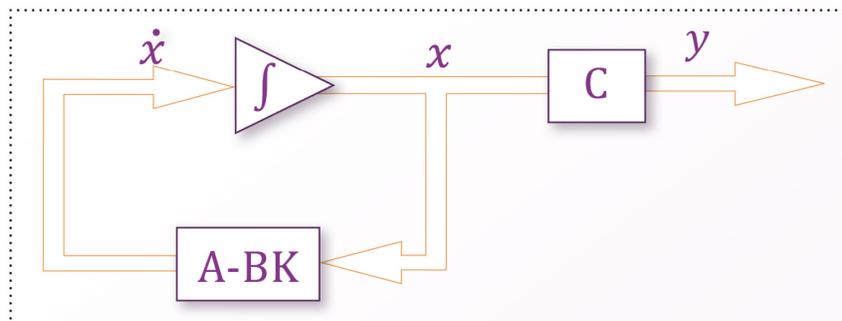
Donde K es una matriz de ganancias de la forma $K = [k_1 \dots k_n]$



$$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x$$

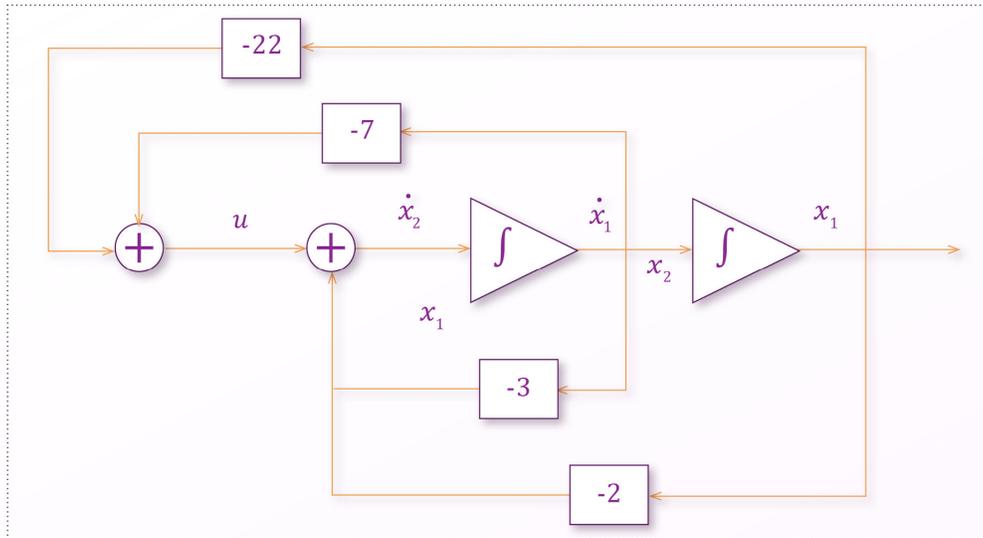
Es posible corroborar esto sustituyendo u en la ecuación de estado:

Ahora es posible seleccionar arbitrariamente K de tal manera que los valores propios (polos) del sistema se ubiquen en las posiciones que se requieran según los objetivos de control.



Ejemplo. Diseñe una ley de control por retroalimentación de estado que haga que el sistema en lazo cerrado tenga los modos de comportamiento $\lambda = [-4 \ -6]$. Suponga el sistema controlable:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$



Solución. Igualamos: $|\lambda I - A| + BK| = (\lambda + 4)(\lambda + 6)$ y despejamos K . Se obtiene $K = [22 \ 7]$, entonces la ley de control está dada por:

$$u = -22x_1 - 7x_2$$

En este tema hemos visto la estrategia de control por retroalimentación de estado para asignación de polos en un sistema continuo de control.

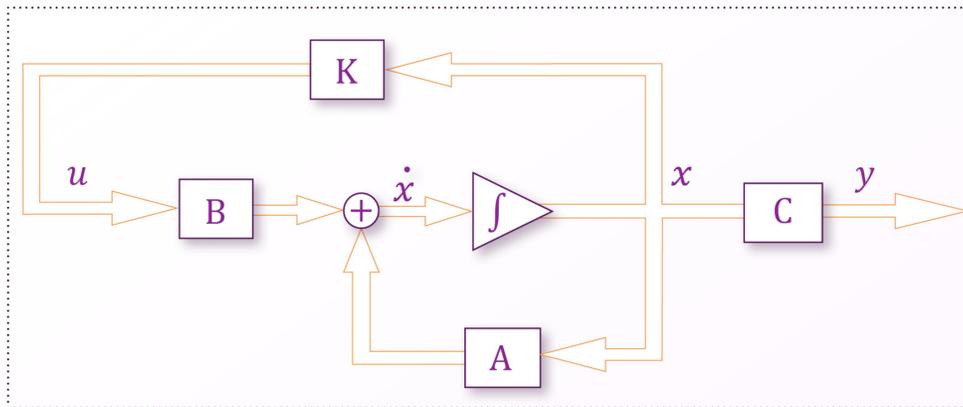
9.5 Observadores de estado

Supongamos un SLIT de la forma:

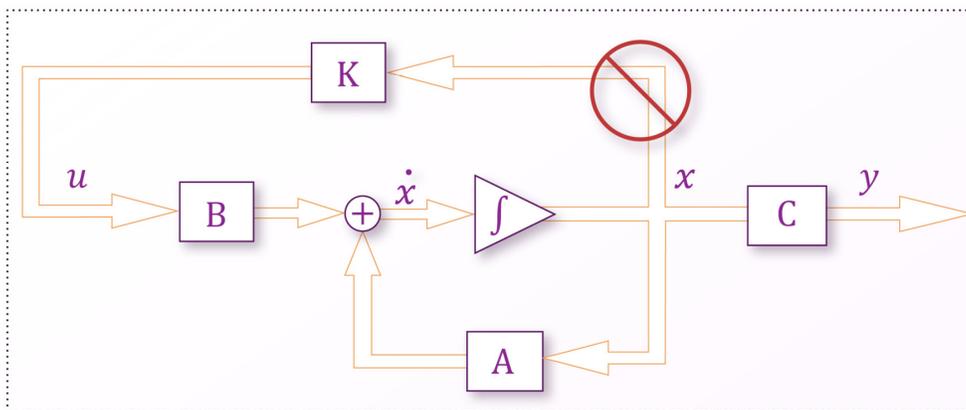
$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

Ahora consideremos una ley de control por retroalimentación de estado como:

$$u = -Kx$$



Esto implica que, para instrumentar esta ley de control, será necesario medir cada una de las variables de estado para después sumar proporciones de ellas, a fin de introducir la entrada de control al sistema. Esto implica que, si no son medibles estas variables de estado, no será posible instrumentar la ley de control.



Una opción viable es estimar los estados; a esta estimación se le llama observación y se realiza a partir de la salida que suponemos medible. Por esta razón, necesitamos que el sistema sea

observable. Si es posible realizar esta observación, entonces la ley de control contendrá los estados observados en lugar de los estados originales.

Dado que conocemos A , B y C , entonces, es posible generar una planta, ya sea en simulación o con instrumentación electrónica vía amplificadores operacionales, utilizando los valores de las matrices.

Denominaremos al vector de estado observado como \tilde{x} entonces, el sistema dinámico que utilizaremos para estimar los estados (que llamaremos observador) lo podemos escribir como:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + Bu \\ \tilde{y} &= C\tilde{x}\end{aligned}$$

En general, debido a incertidumbres paramétricas, tendremos un error entre el estado observado y el estado real $e = x - \tilde{x}$, si derivamos ambos lados de la ecuación y sustituimos por los valores correspondientes obtenemos la dinámica de este error:

$$\dot{e} = Ae$$



Aquí vemos que el comportamiento del error depende

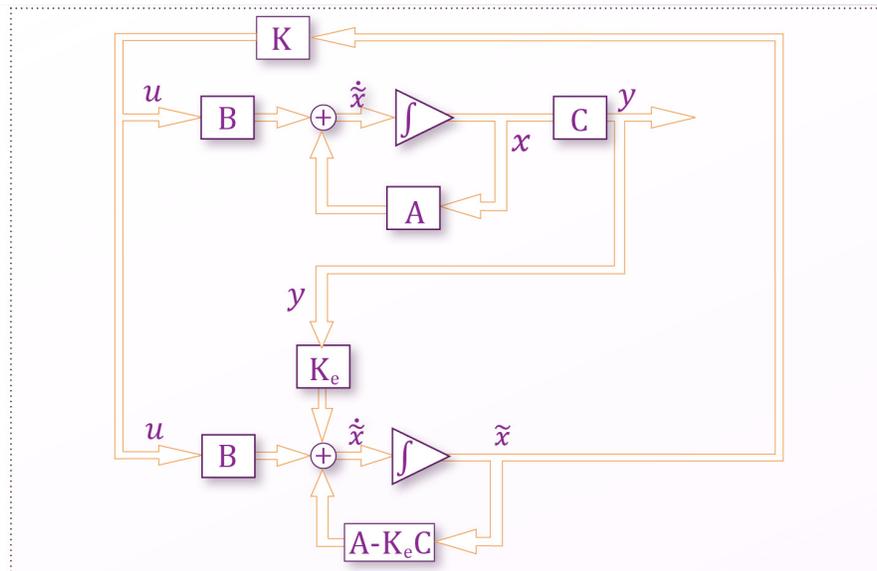
directamente de la matriz A . Esto implica que si A es Hurwitz (los valores propios de A tienen parte real negativa), entonces el vector de error se hace cero cuando el tiempo tiende a infinito.

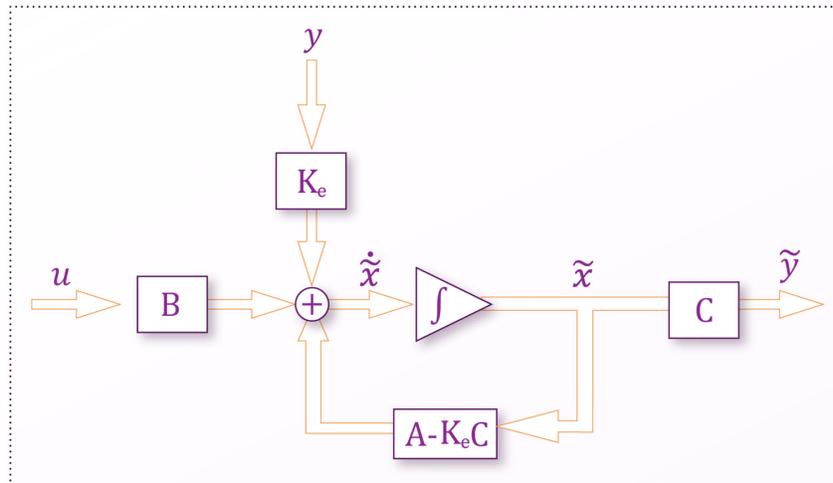
Pero, ¿qué pasa si A es inestable o tiene dinámica demasiado lenta? En este caso, el error no converge a cero o los estados estimados tardan demasiado tiempo en llegar a los estados originales. Entonces, para estimar el estado que usaremos para el control, proponemos una forma en la que la dinámica del error dependa no solo de la matriz A . Para esto introducimos una proporción del error de salida:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + Bu + K_e[y - C\tilde{x}] \\ \dot{\hat{x}} &= (A - K_e C)\tilde{x} + Bu + K_e y\end{aligned}$$

Donde K_e es una matriz de ganancias. De esta manera, la ecuación de error queda:

$$\begin{aligned}\dot{x} - \dot{\hat{x}} &= (A - K_e C)[x - \tilde{x}] \\ \dot{e} &= (A - K_e C)e\end{aligned}$$





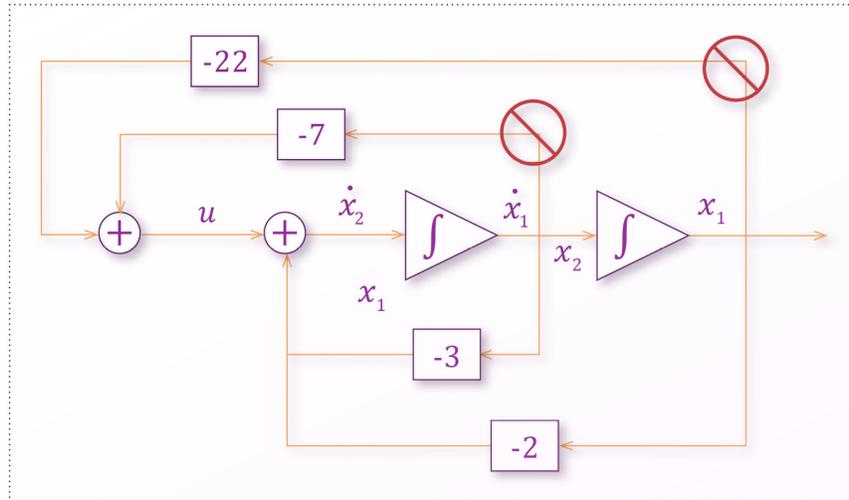
Si la matriz $(A-K_eC)$ es estable, entonces el error converge a cero para cualquier error inicial $e(0)$. Es posible escoger arbitrariamente K_e de tal forma que se obtenga una respuesta rápida del error.

Ejemplo: Considere el sistema con estados no medibles:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0] x$$

Diseñe un observador de estado considerando que los valores propios deseados son $\lambda = [-1 \pm j]$. Suponga el sistema observable.

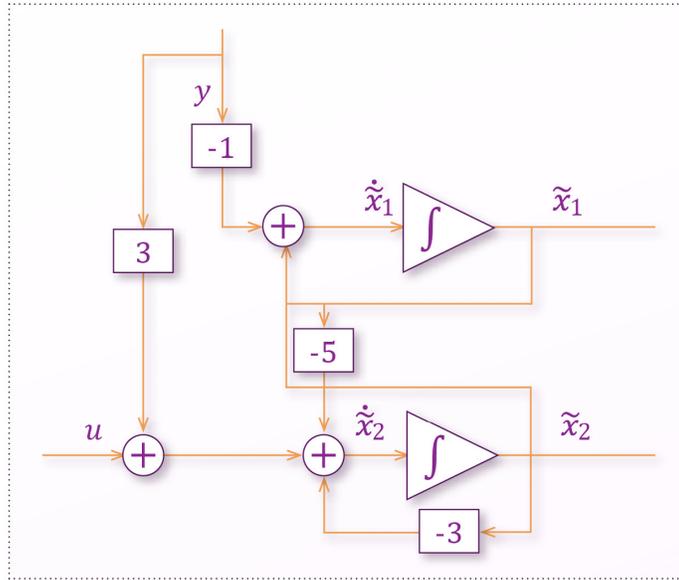


Solución: A partir de los valores propios deseados para la dinámica del error, obtenemos la ecuación característica deseada y comparamos con la ecuación característica del error:

$$|\lambda I - A + K_e C| = \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

Entonces:

$$K_e = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

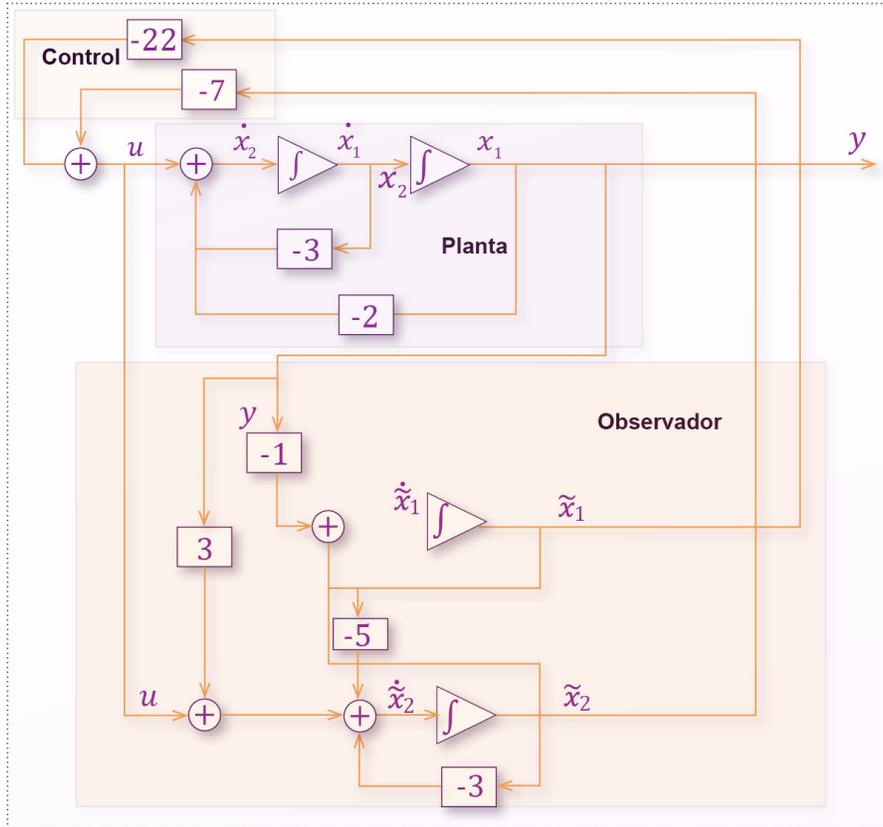


De tal forma que la ecuación del observador estará dada por:

$$\dot{\tilde{x}} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} [1 \ 0] \right) \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} y$$

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} y$$

En la siguiente figura se muestra el sistema completo con observador y ley de control.



En este tema hemos visto la estrategia para instrumentar un observador de estado que se utiliza cuando el estado no es medible.

Conclusión del capítulo 9

Las técnicas en el espacio de estado permiten el desarrollo de controladores, mucho más sencillo de instrumentar que los controladores obtenidos mediante técnicas clásicas; esto es debido a que las leyes de control son combinaciones lineales (sumas ponderadas) de los estados del sistema. Esto representa una gran ventaja pues sólo son necesarios amplificadores operacionales en configuraciones muy sencillas, no es necesario utilizar derivadores o integradores.

También es importante notar que el análisis también provee de mayor información pues contempla las variables internas del sistema.



Actividades del capítulo 9

- [Actividad integradora](#)

Recursos del capítulo 9

- Program CC (2011).
- [Scilab](#) (2011).

Parte II. Sistemas de control en tiempo discreto

La teoría de control se puede dividir en muchas áreas pero particularmente, según el tipo de señales que se manejen, se puede clasificar en sistemas continuos y sistemas discretos. En general, una señal en tiempo discreto es una señal que adquiere valores solamente en instantes discretos de tiempo, es decir a intervalos. De manera que, mientras un sistema continuo manipula señales con respecto al tiempo, donde el tiempo es considerado una variable real, un sistema discreto manipula señales en donde el tiempo es considerado una variable discreta.

La matemática relacionada con las señales en tiempo discreto es ligeramente distinta a la que estamos acostumbrados a manejar para señales continuas, es por esto que es necesario introducir conceptos como retrasos o adelantos en tiempo, en lugar de derivadas, por ejemplo. Los conceptos que se analizarán en la segunda parte de este libro están dirigidos precisamente a contar con un sistema de conocimiento que nos permita manipular variables en el dominio discreto y, más aún, a encontrar un mapeo en números complejos para poder aplicar herramientas importantes como la función de transferencia que hemos trabajado en capítulos anteriores.

En esta parte se analizarán conceptos preliminares para manipular señales discretas en tiempo, se presentarán y analizarán técnicas propias para mapear un sistema continuo al dominio discreto, tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la variable compleja y, por supuesto, se propondrán técnicas propias de control discreto para poder llevar a cabo la incorporación exitosa de la computadora digital en el lazo de control.

10. La computadora en el lazo de control



El crecimiento de los sistemas de control ha estado ligado íntimamente con los desarrollos tecnológicos. Desde la aparición de las computadoras digitales era cuestión de unos pocos años que se incorporaran éstas en los sistemas de control. Gracias al advenimiento de las computadoras digitales, rápidamente se fueron utilizando sistemas basados en ellas para poder controlar sistemas físicos en la industria.

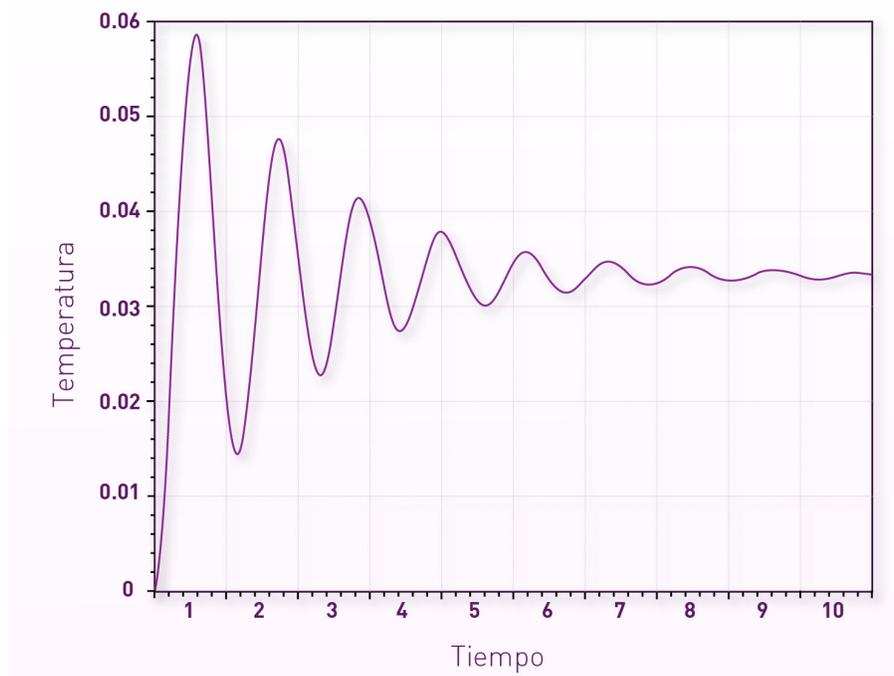
Un sistema de control basado en una computadora digital o similar, ofrece ciertas ventajas con respecto a uno basado en una computadora analógica. La tecnología digital permite tener un sistema relativamente robusto con respecto al ruido externo, permitiendo su utilización en ambientes sometidos a las perturbaciones que comúnmente se presentan en fábricas,

maquiladoras y plantas de producción. Otro punto muy importante es la reducción de energía pues el consumo de un sistema digital es considerablemente menor al de un sistema analógico.

En este capítulo analizaremos el tratamiento matemático de la señal continua hasta llegar a la señal discreta y parte de la señal digital con la que realmente trabaja una computadora digital.

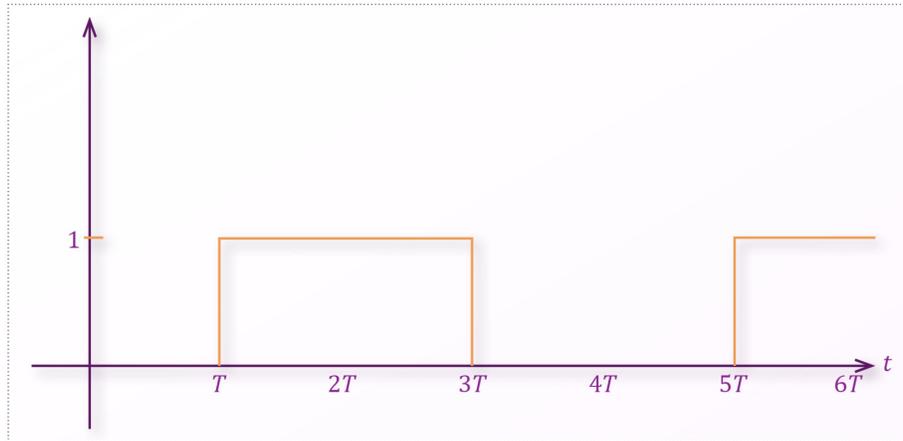
10.1 El proceso de muestreo de señales continuas

En el mundo físico, las variables que asignamos para describir un fenómeno son, en general, variables continuas en tiempo, es decir, son funciones en las que la variable independiente es una cantidad real, un número real. Esto permite hacer un análisis relativamente sencillo partiendo de herramientas conocidas y ampliamente utilizadas.



Cuando requerimos incorporar una computadora digital a un proceso continuo se deberá hacer una adecuación de esta señal para poder utilizarla. Por otro lado, sabemos que las computadoras

digitales utilizan señales binarias, donde no solamente el tiempo es una variable discreta (número entero) sino que también el valor de la función es también un número entero (1 o 0). El proceso matemático es sencillo pero es importante conocerlo para poder identificar entre los distintos tipos de señales con las que se tratarán en esta parte del libro.



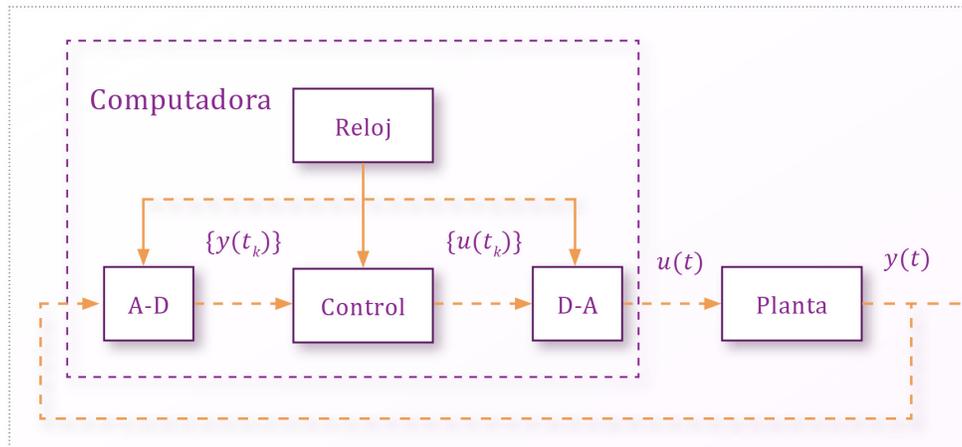
Comenzaremos con el muestreo de la señal continua basándonos en la ubicación de la computadora en el lazo de control.

La intención de utilizar una computadora digital en el lazo de control es facilitar los cálculos matemáticos del algoritmo de control, de tal manera que parece lógica la necesidad de introducir también la señal de retroalimentación para poder generar un algoritmo de control que permita que la computadora digital nos dé una salida adecuada como entrada a la planta. Es decir podemos sustituir el controlador analógico por la computadora digital.

Para esto será necesario adecuar la medición de la señal de la salida de la planta para poderla manipular dentro de la computadora. Es importante recordar que el "tiempo" en la computadora no es continuo, es decir, depende de un reloj interno que, además, determina la velocidad de la computadora. Este reloj normalmente está basado en un oscilador de cristal.

Esto implica que cualquier cambio dentro de la computadora está sujeto a intervalos regulares de tiempo, es decir solamente existen

eventos que llamamos discretos en cada periodo de tiempo. No hay cambios entre un intervalo y otro. La vida dentro de una computadora es como ver con un estroboscopio.



Entonces, para poder introducir una señal a la computadora será necesario introducirla tomando muestras de la señal a intervalos discretos en tiempo. Conviene aquí referirnos al teorema de muestreo de Shannon que establece que para poder replicar la forma de onda de una señal, es necesario que la frecuencia de muestreo sea superior al doble de la máxima frecuencia a muestrear, esto se toma como base para determinar el periodo mínimo de muestreo utilizado en el proceso de discretización de una señal.

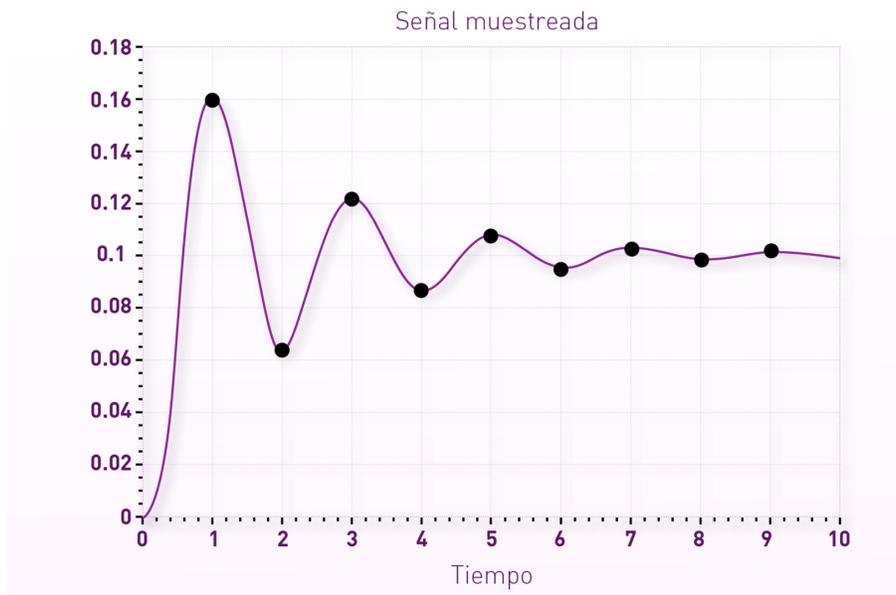
Aquí conviene definir los diferentes tipos de señales que están involucrados en el proceso de muestreo:

» **Señal continua.** Una señal $f(t)$ es continua en el dominio del tiempo si para toda $t, \tau \in \mathbb{R}$ se cumple:

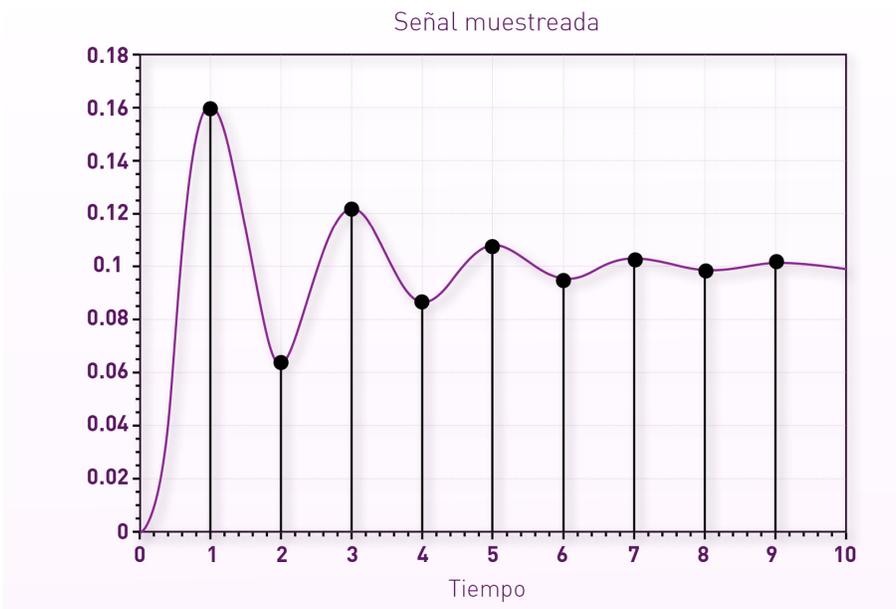
- i. Existe $\lim_{t \rightarrow \tau^+} f(t)$
- ii. Existe $\lim_{t \rightarrow \tau^-} f(t)$
- iii. $\lim_{t \rightarrow \tau^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow \tau^-} f(t)$

» **Señal seccionalmente continua.** Una señal seccionalmente continua o continua a tramos es una señal que es continua en

intervalos de tiempo.



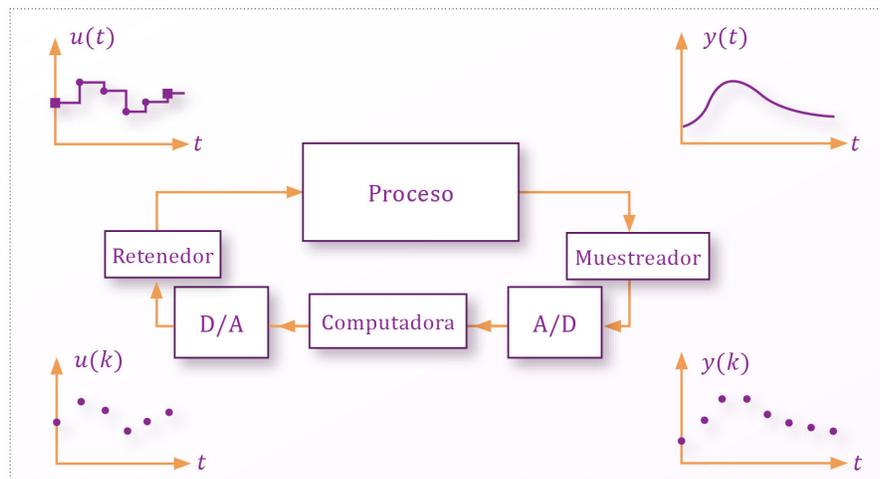
- » **Señal discreta.** Es una función que solamente tiene valores en instantes de tiempo.
- » **Señal digital.** Es una función que, además de solo tener valores en instantes de tiempo, solamente puede adquirir valores **1s** y **0s**.



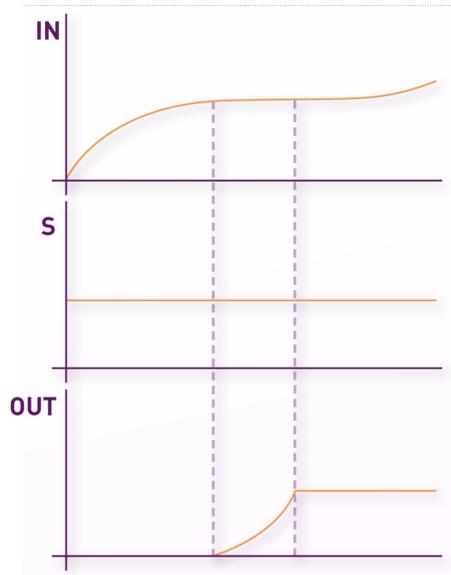
En el lazo de control no solamente necesitamos introducir la señal

medida de la salida a la computadora sino también se requiere generar la señal de control que será la entrada a la planta, esto se lleva a cabo por medio de un reconstructor o **retenedor** de la señal.

Así es como se completa el lazo de control utilizando una computadora digital.



El proceso de muestreo físicamente se lleva a cabo por medio de un muestreador-retenedor, comúnmente llamado Sample & Hold o S-H. En la se muestra esquemáticamente la función de un S-H. El dato es muestreado y retenido para ser introducido a un convertidor analógico digital (A/D) que puede ser un ADC0808 o un CA3306.



En el convertidor A/D se procesa la señal para obtener una señal digital codificada equivalente a la magnitud de la señal original en el instante muestreado. Dependiendo de la resolución del convertidor será la precisión del dato. Es decir, no es lo mismo contar con 4 bits de resolución (24 niveles) a contar con 8 bits (28 niveles). Pero finalmente tendremos una cadena de 1s y 0s.

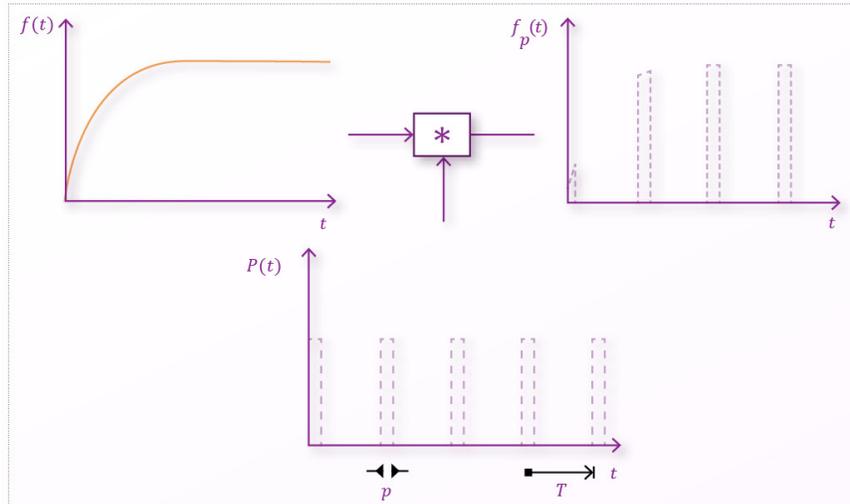
Es demasiado complicado generar una señal de control solamente contando con dos niveles (1s y 0s), por esta razón, a pesar de que introducimos datos binarios a la computadora, se cuentan con intérpretes y compiladores que pueden mostrarnos datos en sistema decimal, listos para ser manipulados. Entonces, hacemos un compromiso con la computadora, no le hablamos en binario y le pedimos que nos permita manipular datos decimales. Así es como se logra una comunicación entre la computadora y los datos reales provenientes de los sistemas físicos.

Modelo matemático del proceso de muestreo

Es posible modelar una señal muestreada de la siguiente manera:

$$f_p(t) = \begin{cases} f(kT) & kT \leq t < kT + p \\ 0 & kT + p \leq t < (k+1)T \end{cases}$$

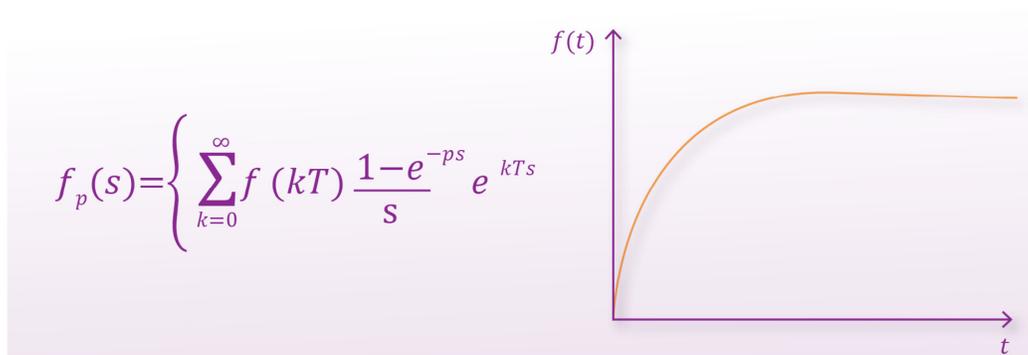
$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) [U_s(t-kT) - U_s(t-kT-p)]$$



Con:

$$U_s t = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Aplicando transformada de Laplace:



Pero:

$$1 - e^{-ps} = \left[1 - ps + \frac{(ps)^2}{2!} - \frac{(ps)^3}{3!} + L \right]$$

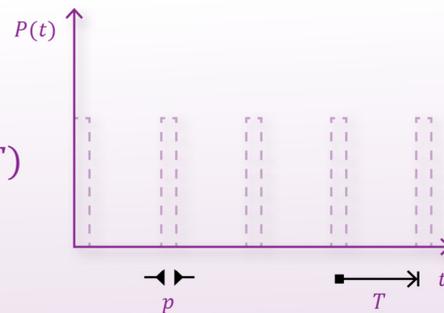
si $p \rightarrow 0$ y $p \neq 0$ entonces $1 - e^{-ps} \cong ps$

Sustituyendo:

$$f_p(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) p e^{-kTs}$$

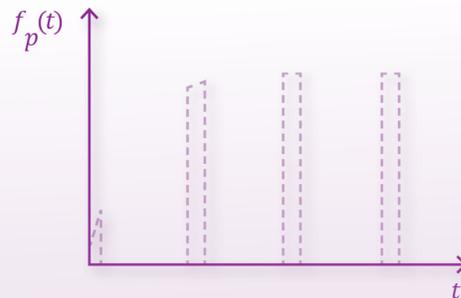
Aplicando transformada inversa de Laplace:

$$L^{-1}[F_p(s)] f_p(t) \cong \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT)$$



El muestreador puede considerarse **ideal** con atenuador p :

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT)$$



En esta sección se ha tratado una breve introducción a la ingeniería de control de sistemas discretos, se han visto las características de las diferentes señales involucradas en el proceso de muestreo y la modelación matemática de la señal de muestreo.

10.2 Retenedores

En el lazo de control es necesario que el controlador genere una respuesta que, a su vez, sea entrada a la planta a controlar. Se verá en capítulos posteriores que la señal generada por un controlador digital es de naturaleza discreta, es decir, a intervalos discretos en tiempo tal y como se muestra en la figura 10.12. Por esta razón es fundamental el procesar esta señal para convertirla a una señal lo más cercana a una continua; podemos pensar en este proceso como el proceso matemático de “reconstruir” la señal entre los instantes de muestreo. Al dispositivo encargado de reconstruir esta señal se le conoce como retenedor.



Partimos de que una función se puede reconstruir a partir de la expansión en series:

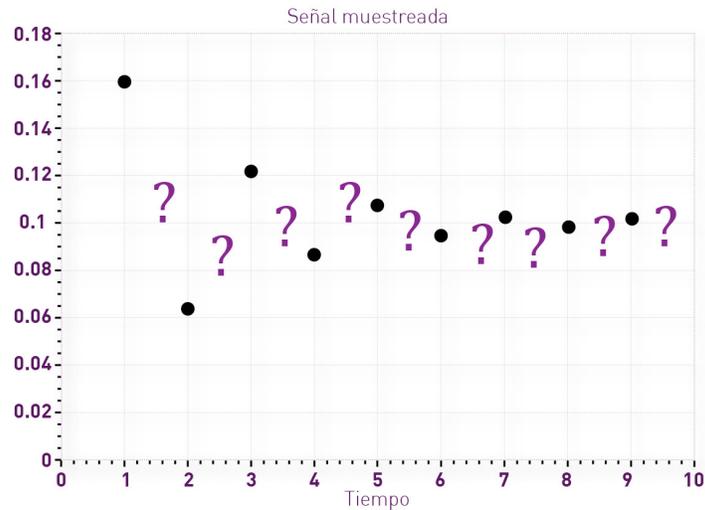
$$f'(kT) = \frac{f(kT) - f((k-1)T)}{T}$$

Un valor aproximado para la segunda derivada es como sigue:

$$f''(kT) = \frac{f'(kT) - f'((k-1)T)}{T}$$

Es decir:

$$f''(kT) = \frac{f(kT) - 2f((k-1)T) + f((k-2)T)}{T^2}$$



Notamos que esta expansión necesita derivadas de diferentes órdenes para poder hacer la reconstrucción. Es evidente que no podremos obtener estas derivadas tal cual son pues la señal con la que contamos es discreta, otro punto es que, dado que es un proceso causal, no contamos con el valor de la señal un instante después de que es adquirida pues no se ha generado en un sistema de tiempo real. Por esta razón aproximaremos las derivadas de la siguiente manera.

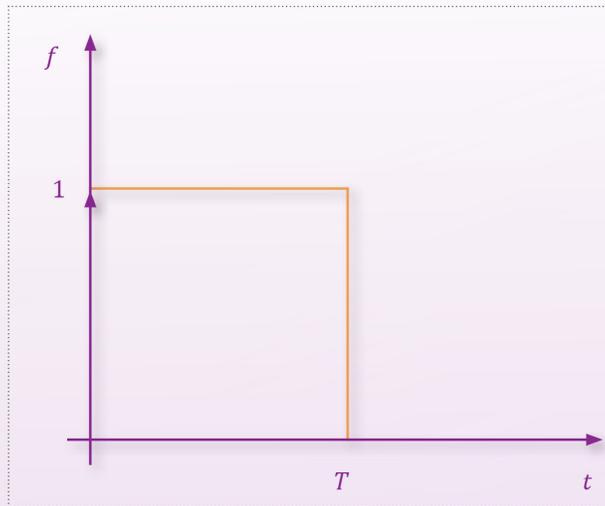
La única información disponible es la magnitud de $f(t)$ en los instantes muestreados, las derivadas deben estimarse a partir de valores de $f(kT)$:

Es importante notar que mientras más términos se utilicen de la expansión, será más precisa la reconstrucción de la señal, de manera que, si tuviéramos infinito número de muestras de la señal original, podríamos reconstruir esta señal con infinita precisión. Como esto es imposible en un sistema de control real, truncaremos la expansión en series tomando en cuenta sólo algunos términos.

Se llaman retenedores de orden n a los dispositivos que aproximan una señal hasta la n -ésima derivada.

Retén de orden cero (ROC): Es aquél que aproxima:

$$f(kT) = f(t) \text{ para } kT \leq t < (k+1)T$$



Ahora, sería muy conveniente obtener su función de transferencia, esto se puede lograr aplicando una entrada impulso y obteniendo la función de transferencia de la salida (respuesta al impulso).

Sabemos que:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Si aplicamos una entrada impulso unitario: $U(s) = 1$

Entonces:

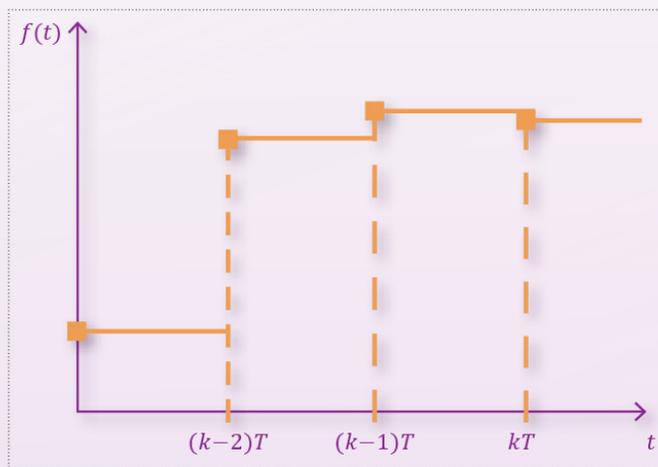
$$G_{ROC}(s) = Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$$

Por lo que:

$$g_{roc}(s) = U(s) - U(t-T)$$

Y finalmente, la función de transferencia queda como:

$$G_{ROC}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$



Retenedor de primer orden (**RPO**): Tomamos hasta la primera derivada de la expansión en series:

$$\begin{aligned} f_k(t) &= f(kT) + f'(kT)(t - kT) \\ &= f(kT) + \frac{1}{T} [f(kT) - f[(k-1)T]] (t - kT) \end{aligned}$$

Encontramos la respuesta al impulso para obtener la función de transferencia del RPO:

$$f_0(t) = f(0) + \frac{1}{T} [f(0) - f(-T)](t)$$
$$= 1 + \frac{t}{T} \text{ para } 0 \leq t < T$$

para $k=1$

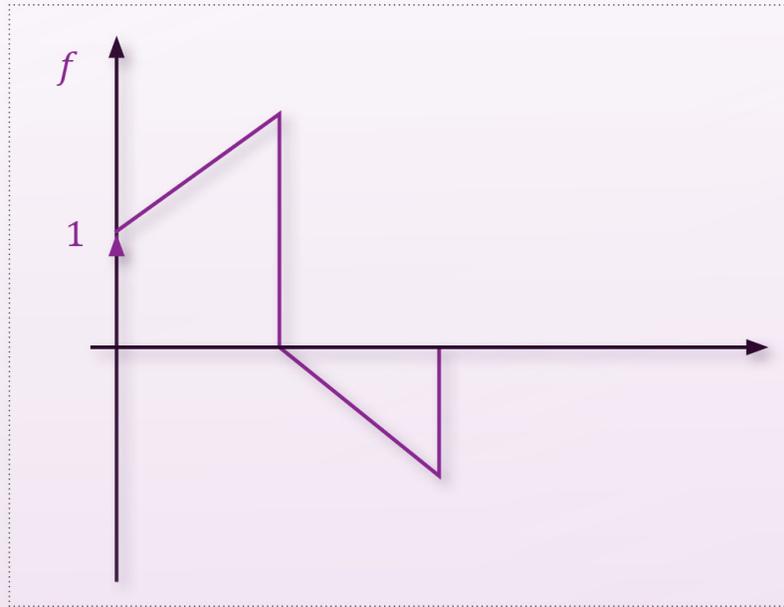
$$f_1(t) = f(T) + \frac{1}{T} [f(T) - f(0)](t - T)$$
$$= 1 - \frac{t}{T} \text{ para } T \leq t < 2T$$

para $k=2$

$$f_2(t) = f(2T) + \frac{1}{T} [f(2T) - f(T)](t - 2T)$$
$$= 0 \text{ para } 2T \leq t < \infty$$

Entonces, podemos escribir la respuesta al impulso como:

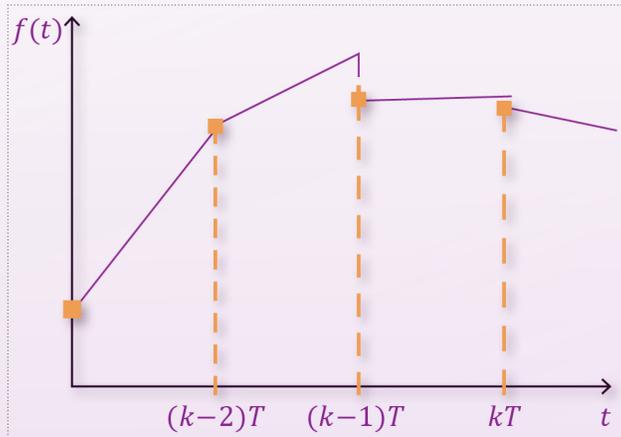
$$g_{rpo}(t) = \begin{cases} 1 + \frac{t}{T} & 0 \leq t < T \\ 1 - \frac{t}{T} & T \leq t < 2T \end{cases}$$



Ahora es sencillo obtener la función de transferencia del RPO:

$$G_{rpo}(s) = \int_0^T \left(\frac{1}{T}t + 1 \right) e^{-st} dt + \int_T^{2T} \left(\frac{1}{T} - 1t \right) e^{-st} dt$$

$$G_{RPO}(s) = \frac{(1 - e^{-Ts})^2 (Ts + 1)}{Ts^2}$$



De esta manera se pueden obtener retenedores de cualquier orden, aunque el más utilizado en la realidad, por su simplicidad, es el retenedor de primer orden.

En este tema se ha tratado matemáticamente el proceso de reconstruir una señal discreta para obtener una señal seccionalmente continua que pueda ser alimentada a la planta a controlar.

LIGAS DE INTERÉS

ROC

Retén de orden cero (2011). Recuperado de <http://cnx.org/content/m10402/latest/>

10.3 Transformada Z

En los sistemas de control lineales continuos ha sido de gran utilidad la transformada de Laplace. Gracias a esta herramienta ha sido posible desarrollar el concepto de función de transferencia que es de vital importancia para el control. En esta sección desarrollaremos una transformada similar que también nos ayudará en la descripción y manipulación matemática de los sistemas de control pero ahora en tiempo discreto.

Sabemos que una señal muestreada se puede representar como:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT)$$

Si aplicamos la transformada de Laplace a esta expresión queda:

$$L[f^*(t)] = F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) L[\delta(t - kT)]$$

Pero como:

$$L[\delta(t - kT)] = e^{-kTs}$$

Entonces podemos escribir:

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-kTs}$$

Como vemos, siempre que muestreemos una señal aparece el término exponencial e^{-Ts} , dado que sigue siendo una variable compleja (al ser función de la variable compleja s) conviene hacer la siguiente definición:

$$z = e^{Ts}$$

Entonces:

$$F^*(s) = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$$

A esta última expresión se le conoce como transformada Z , que también puede escribirse como una serie de potencias:

$$F(z) = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots$$

Ejemplo: Obtenga la transformada Z de la función escalón unitario.

Solución: Sabemos que la función escalón unitario está descrita como sigue:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Entonces, aplicándola la definición:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$$

$$F(z) = f(0)z^0 + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots$$

$$F(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

$$F(z) = 1 + z^{-1}(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots)$$

$$F(z) = 1 + z^{-1}F(z)$$

Entonces:

$$F(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$



Ejemplo: Obtenga la transformada Z de la función exponencial.

$$f(t) = \begin{cases} e^{at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Solución: Aplicando la definición de transformada Z tenemos:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$$

$$F(z) = f(0)z^0 + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots$$

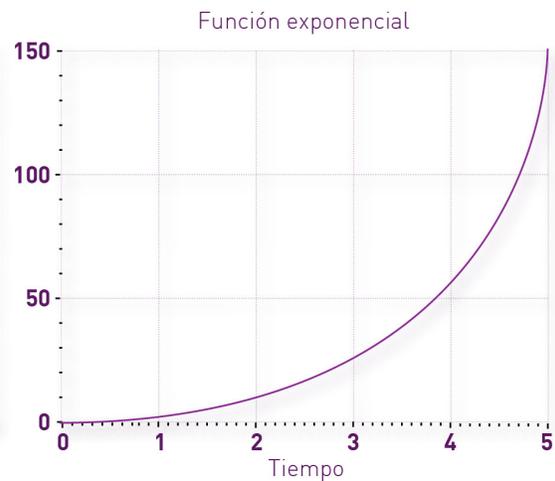
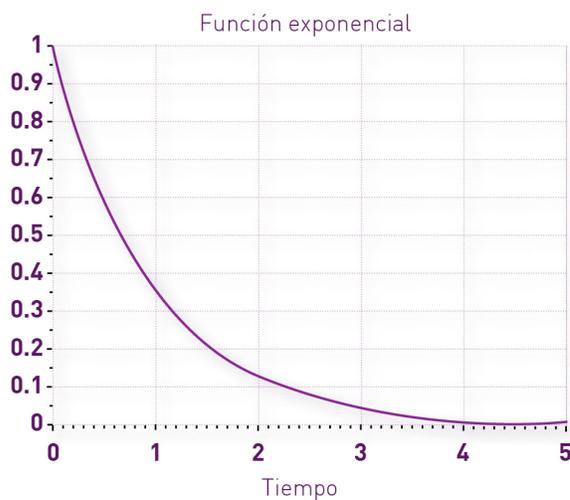
$$F(z) = 1 + e^{aT}z^{-1} + e^{2aT}z^{-2} + e^{3aT}z^{-3} + \dots$$

$$F(z) = 1 + e^{aT}z^{-1}(1 + e^{aT}z^{-1} + e^{2aT}z^{-2} + \dots)$$

$$F(z) = 1 + e^{aT}z^{-1}F(z)$$

Entonces:

$$F(z) = \frac{1}{1 - e^{aT}z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{aT}}$$

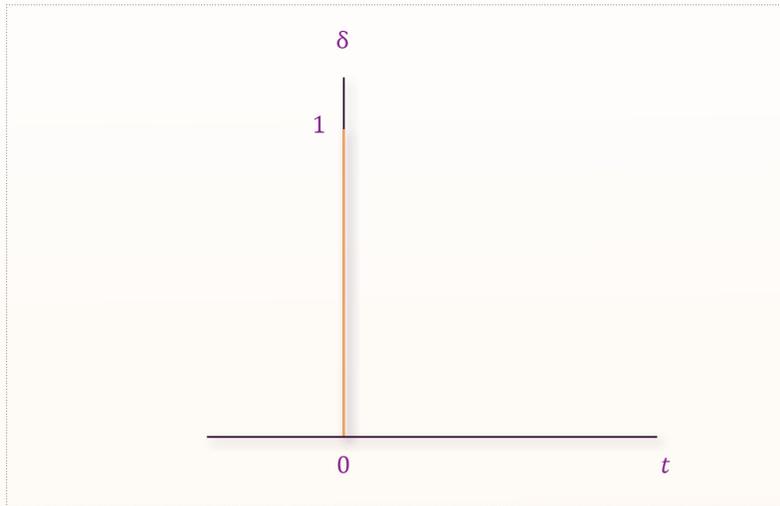


Ejemplo: Obtenga la transformada Z de la función delta de Kronecker:

$$\delta_0(k) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Solución:

$$Z[\delta_0(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_0(k) z^{-k} = (1)z^0 + (0)z^{-1} + \dots = 1$$



Ejemplo: Obtenga la transformada Z de la siguiente función:

$$F(z) = \begin{cases} a^k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

Solución: Aplicando la definición de transformada Z (obviando T):

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

$$F(z) = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + \dots$$

$$F(z) = 1 + az^{-1} (1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots)$$

$$F(z) = 1 + az^{-1} F(z)$$

$$F(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

Propiedades de la transformada Z

$$i) Z[af(k)+bg(k)]=aF(z)+bG(z)$$

$$ii) Z[a^k x(k)]=X(a^{-1}z)$$

$$iii) Z[x(t-nT)]=z^{-n}X(z)$$

i) Propiedad del corrimiento hacia atrás (retraso):

$$Z[x(t-nT)]=z^{-n}X(z)$$

ii) Propiedad del corrimiento hacia delante:

$$Z[x(t-nT)]=\left[X(z)-\sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}\right]$$

iii) Teorema del valor final:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1-z^{-1})X(z) \right]$$

iv) Teorema del valor inicial:

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

v) Convolución real: Considere $x_{1,2}(t)=0$ para $t < 0$:

$$X_1(z)X_2(z) = Z \left[\sum_{h=0}^k x_1(hT)x_2(kT-hT) \right]$$

vi) Convolución compleja:

$$Z[x_1(k)x_2(k)] = \frac{1}{2\pi j} \int_c \xi^{-1} X_2(\xi) X_1(\xi^{-1} z) d\xi$$

La transformada Z inversa

La transformada Z inversa se define como:

$$Z^{-1}[F(z)] = f(k)$$

Que operativamente podemos escribir mediante la integral de línea:

$$Z^{-1}[F(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c F(z) z^{k-1} dz$$

Donde el contorno de integración engloba todas las singularidades de $F(z)$.

Existen diversos métodos para obtener la transformada Z inversa:

1. Método de la integral de inversión
2. Método de fracciones parciales
3. Método de división directa

En esta sección comentaremos cada uno de ellos:

Método de la integral de inversión.

De la teoría de variable compleja (Saff y Snider, 2003) sabemos que la integral de inversión se puede encontrar mediante los residuos de la función, es decir:

$$f(k) = Z^{-1}[F(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{k-1} dz$$

$$f(k) = Z \sum_{i=1}^m \left[\text{Residuo de } F(z)z^{k-1} \text{ en el polo } z=z_i \text{ de } F(z)z^{k-1} \right]$$

$$f(k) = R_1 + R_2 + \dots + R_m$$

Si el denominador de $F(z)z^{k-1}$ contiene un polo simple en $z=z_i$, entonces el residuo correspondiente está dado por:

Si contiene un polo múltiple z_j de orden q , entonces el residuo está dado por:

$$R = \frac{1}{(q-1)!} \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}} [(z-z_i)^q F(z)z^{k-1}]$$

Ejemplo: Obtenga la **antitransformada Z** para la siguiente función utilizando la integral de inversión:

$$F(z) = \frac{z(z-0.5)}{(z-0.3)(z-0.4)}$$

Solución: Aplicando residuos:

$$f(k) = Z \sum_{i=1}^m \left[\text{Residuo de } F(z)z^{k-1} \text{ en el polo } z=z_i \text{ de } F(z)z^{k-1} \right]$$

$$f(k) = R_1 + R_2$$

Entonces:

$$R_1 = \lim_{z \rightarrow 0.3} \left[\frac{z^k(z-0.5)}{(z-0.4)} \right] = 2(0.3)^k$$

$$R_2 = \lim_{z \rightarrow 0.4} \left[\frac{z^k(z-0.5)}{(z-0.3)} \right] = 2(0.4)^k$$

Finalmente:

$$f(k) = 2(0.3)^k - (0.4)^k$$

Método de fracciones parciales.

Esta técnica es similar a la utilizada para encontrar antitransformadas de Laplace, es decir, consiste en expandir la función original $F(z)$ en fracciones parciales, obteniendo así antitransformadas directas.

Ejemplo: Obtenga la transformada Z inversa de la siguiente función utilizando fracciones parciales:

$$F(z) = \frac{z(z-0.5)}{(z-0.3)(z-0.4)}$$

Solución: Expandiendo en fracciones parciales:

$$F(z) = \frac{2z}{(z-0.3)} - \frac{z}{(z-0.4)}$$

Y aplicando antitransformada directamente:

$$f(k) = 2(0.3)^k - (0.4)^k$$

Método de división directa.

Este método consiste en dividir el numerador de $F(z)$ entre su denominador. El método utiliza la propiedad del corrimiento hacia atrás para encontrar los valores de la función en tiempo.

Ejemplo: Obtenga la transformada Z inversa de la siguiente función utilizando el método de la división directa:

$$F(z) = \frac{z(z-0.5)}{(z-0.3)(z-0.4)}$$

$$F(z) = 1 + 0.2z^{-1} + 0.02z^{-2} + 0.038z^{-3} + \dots$$

Comparando con:

$$F(z) = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + f(3)z^{-3} + \dots$$

Vemos que:

$$f(0) = 1, f(1) = 0.2, f(2) = 0.02, f(3) = 0.038, \dots$$

Este método es útil solamente si se requieren los valores de la antitransformada en intervalos discretos, es decir, si no es necesaria una expresión que permita calcular f para cualquier k .

En este apartado se definió la transformada Z y su operación inversa, la antitransformada Z, se comentaron sus propiedades principales y, particularmente, la conveniencia de utilizarla en sistemas de tiempo discreto.

LIGAS DE INTERÉS

Transformada Z (2011).

Recuperado de <http://mathworld.wolfram.com/Z-Transform.html>

Conclusión del capítulo 10

En este capítulo hemos analizado las bases necesarias para poder describir matemáticamente el proceso de muestreo; y cómo es posible que, del tratamiento matemático y aplicando transformada de Laplace, se obtenga la transformada z naturalmente. Esto nos permite construir funciones de transferencia como relaciones de polinomios.

A lo largo de esta segunda parte ocuparemos la transformada z para poder construir controladores discretos.

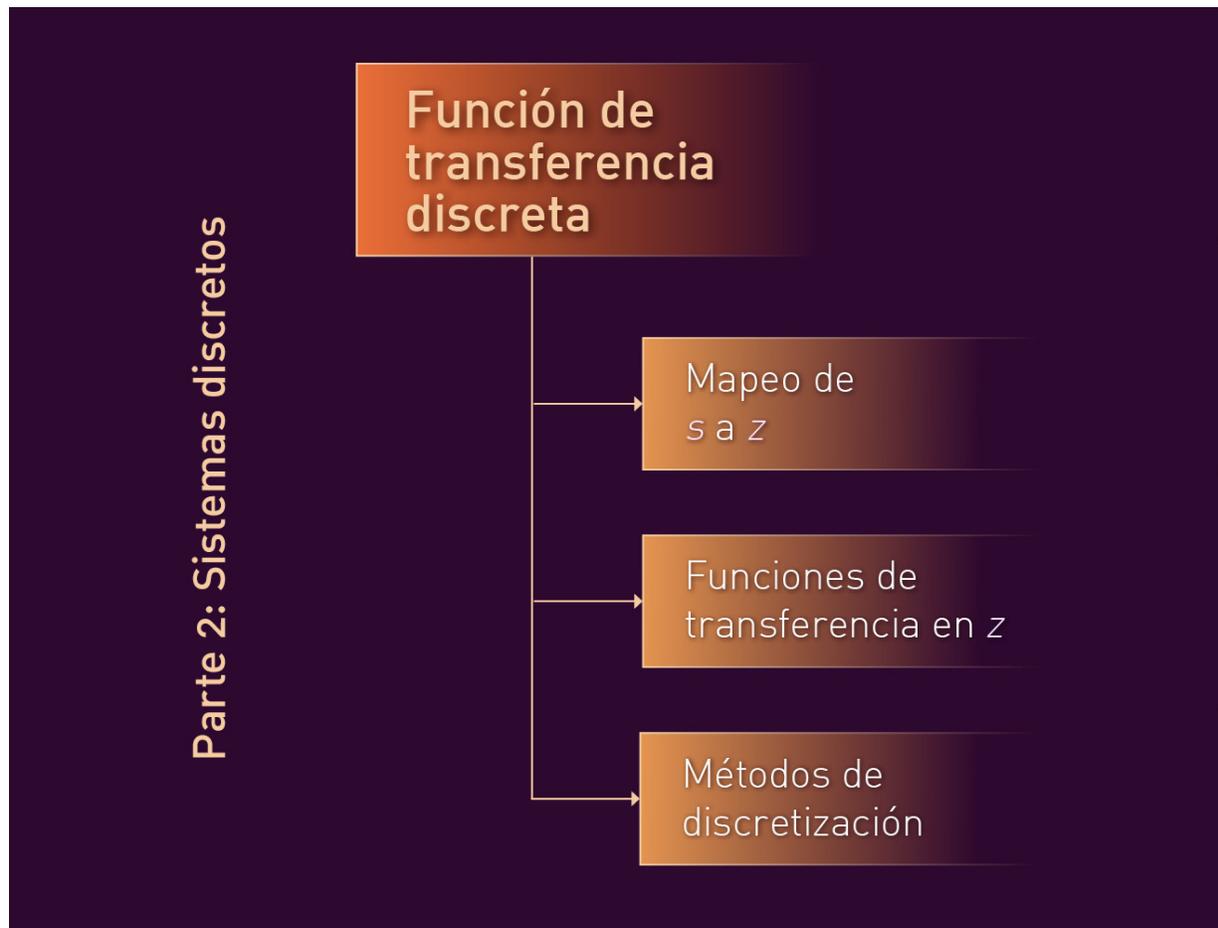
Actividades del capítulo 10

- [Actividad integradora](#)

Recursos del capítulo 10

- Program CC (2011).
- [Retén de orden cero](#) (2011).
- [Transformada Z](#) (2011).

11. Función de transferencia



En los sistemas de control lineales, el concepto de función de transferencia es fundamental pues su utilización permite una visión global del sistema, ubicando las entradas y las salidas de cada bloque vinculado con el esquema de control. Para sistemas continuos, la función de transferencia no es más que escribir de una forma particular la transformada de Laplace de ecuaciones diferenciales que modelan, ya sea una planta o un controlador específico. Para sistemas discretos es necesario utilizar una transformación apropiada para poder analizar el sistema a través de bloques: la transformada Z .

En este capítulo analizaremos la relación que existe entre la variable compleja de Laplace y la variable compleja z , esto nos

permitirá tener mayor información para decidir sobre alguna estrategia de control en particular. Analizaremos las funciones de transferencia involucradas en un sistema de control discreto y posteriormente veremos varios métodos de discretización. Todo esto enfocado a trabajar con un sistema de control discreto en el dominio de z .

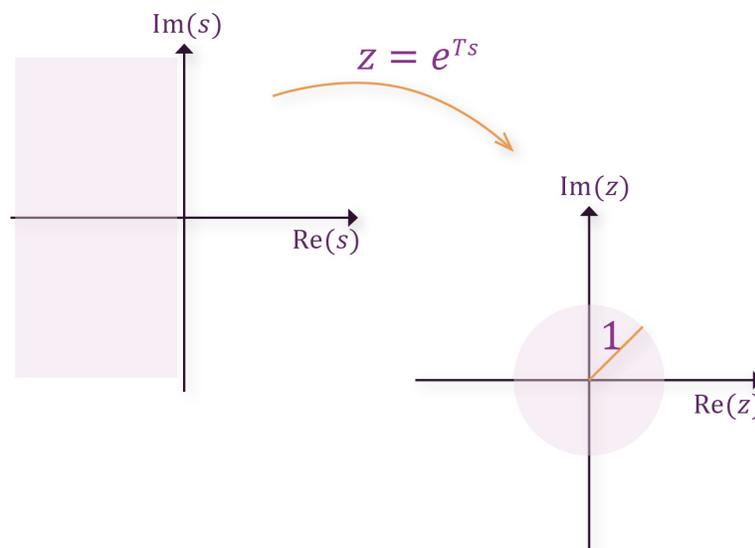
11.1 Mapeo de s a z

Antes de introducirnos de lleno al tema de la transformada de Laplace conviene analizar la relación entre las variables s y z . Para esto comenzaremos mapeando el semiplano izquierdo de Laplace:

Nótese que:

$$z = e^{Ts} = e^{T(\sigma + j\omega)} = e^{T\sigma} e^{jT\omega} = e^{T\sigma} e^{j(T\omega + 2\pi N)}$$

Por lo que puntos en s donde las frecuencias difieren por múltiplos de la frecuencia de muestreo $\omega_s = 2\pi / T$ son mapeados al mismo lugar en el plano z , es decir hay un número infinito de valores en s para cada valor de z .

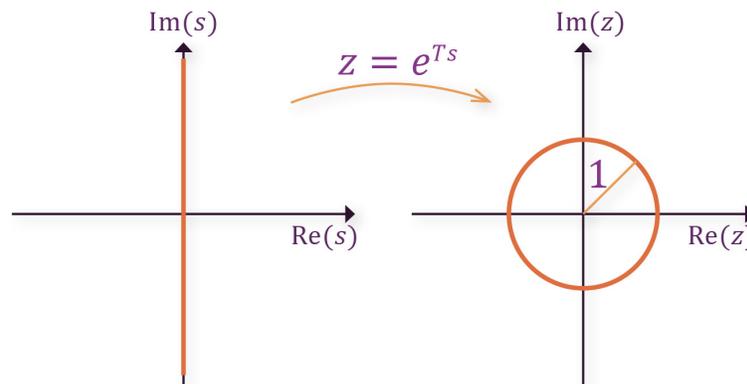


Por otro lado, como σ es negativo en el semiplano izquierdo de s :

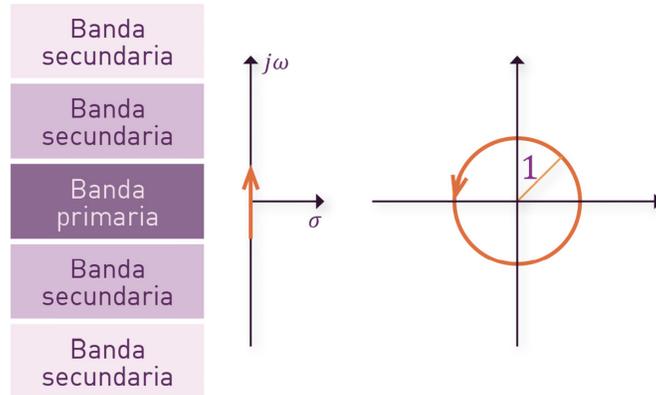
$$|z| = e^{T\sigma} < 1$$

El eje $j\omega$ en el plano s corresponde al círculo unitario:

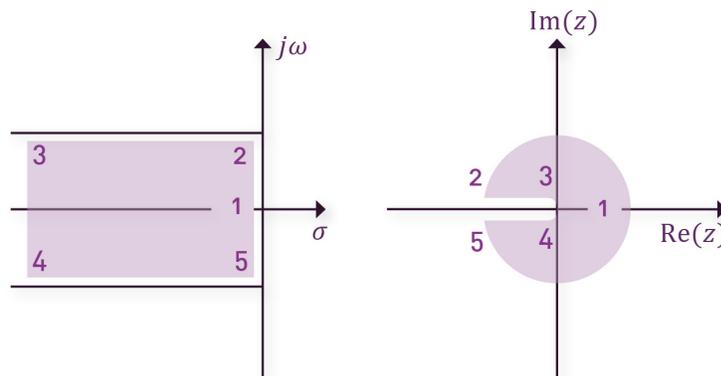
$$|z| = 1$$



Para el mapeo de frecuencias, se tiene algo un poco diferente, como $\text{ang}(z) = \omega T$, mientras el ángulo varía de $-\infty$ a ∞ , la frecuencia ω varía igual, pero con una peculiaridad. Considere un punto sobre $j\omega$ en el plano s . Mientras este punto varía desde $-j\omega_s/2$ a $j\omega_s/2$, $\text{ang}(z)$ varía desde $-\pi$ a π , en sentido contrario a las manecillas del reloj en el plano z . A la banda de frecuencias comprendida desde $-\omega_s/2$ a $\omega_s/2$ le llamamos “banda primaria”, las bandas secundarias son, por ejemplo, desde $\omega_s/2$ a $3\omega_s/2$ y así sucesivamente.

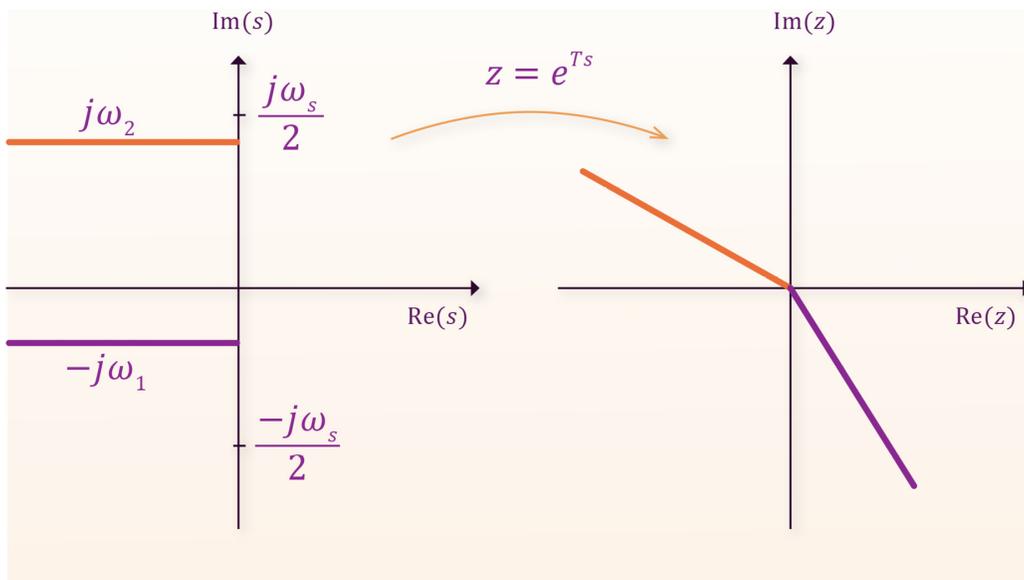


Si en la banda primaria trazamos la secuencia de puntos 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 1 en el plano s , este camino se mapeará al plano z como se muestra en la figura. El área encerrada en cualquiera de las bandas complementarias se mapea al mismo círculo unitario (la relación entre s y z no es única).



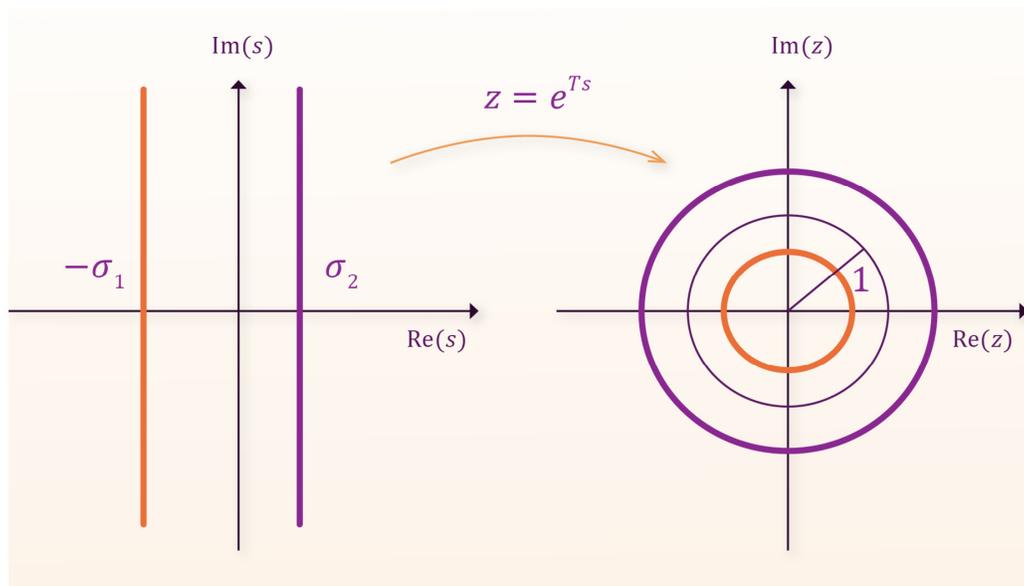
Ejemplo 1: Considere la figura mostrada. Mapee los lugares de frecuencia constante del plano s al plano z .

Solución: sabemos que $z = e^{Ts} = e^{T(\sigma + j\omega)}$, entonces la magnitud del número complejo z está dada por $|z| = e^{T\sigma}$ y el ángulo de z estará dado por $\text{ang}(z) = \omega T$. De tal manera que si se mantiene la frecuencia constante, el ángulo de z permanece constante y solo variará la magnitud. Se puede observar el resultado en la siguiente figura.



Ejemplo 2: Mapee los lugares de atenuación constante de la figura mostrada del plano s al plano z .

Solución: sabemos que $z = e^{Ts} = e^{T(\sigma + j\omega)}$, entonces la magnitud del número complejo z está dada por $|z| = e^{T\sigma}$ y el ángulo de z estará dado por $\angle(z) = \omega T$. Entonces, si se mantiene la atenuación σ constante, solo variará el ángulo, formando círculos de diferentes radios.



Un lugar geométrico muy importante en control es el lugar de

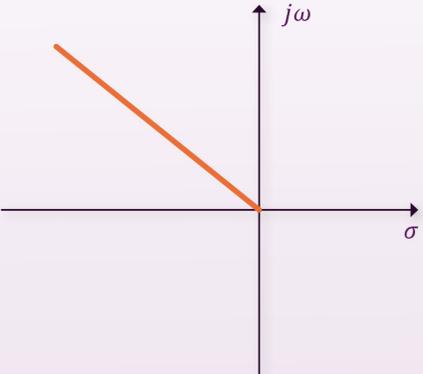
factor de amortiguamiento relativo ξ constante. La importancia de este lugar geométrico radica en que muchas veces el valor del amortiguamiento relativo es un criterio de diseño para el controlador. Sabemos que el lugar de ξ constante en el plano ξ es una línea recta que parte del origen con un ángulo de $\cos^{-1}\xi$ como se muestra en la figura. Entonces, podemos hacer el siguiente análisis:

$$s = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-2\xi^2} = -\xi\omega_n + j\omega_d$$

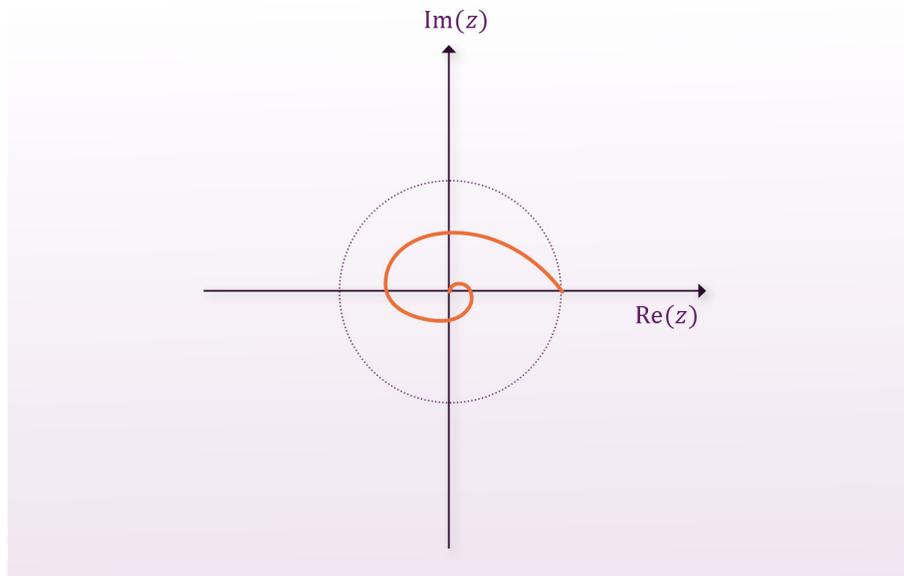
$$z = e^{Ts} = \exp(-\xi\omega_n T + j\omega_d T)$$

$$z = \exp\left(-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-2\xi^2}} \frac{\omega_d}{\omega_s} + j2\pi \frac{\omega_d}{\omega_s}\right)$$

$$|z| = \exp\left(-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-2\xi^2}} \frac{\omega_d}{\omega_s}\right)$$

$$\text{ang}(z) = 2\pi \frac{\omega_d}{\omega_s}$$


La magnitud de z decrece y el ángulo de z crece mientras ω_d aumenta por lo que el lugar en z es una espiral logarítmica.



En este apartado se ha analizado la relación que existe entre la variable compleja s de Laplace y la variable z . Esta relación es muy importante para el diseño de controladores en el dominio de z .

11.2 Funciones de transferencia en z

En un sistema de control discreto, siempre es necesario que la entrada a la planta sea lo más parecido a una señal continua porque, si es introducida la señal discreta directamente, el efecto en la planta será la respuesta a un tren de impulsos de diferente magnitud. Es por ello que son necesarios los retenedores.

Como hemos visto, podemos ver a los retenedores como reconstructores de señal, de tal manera que podemos utilizarlos para generar una señal, al menos, seccionalmente continua que podrá ser utilizada como entrada a la planta para conseguir el desempeño adecuado.

Siempre será necesario, entonces, colocar un retenedor en el lazo

antes del proceso. Tomemos por ejemplo un retenedor de orden cero que es el más común.



Podemos encontrar la función de transferencia del retenedor con la planta:

$$G_{RP}(s) = \frac{(1-e^{-Ts})}{s} G(s) = (1-e^{-Ts}) \frac{G(s)}{s}$$

Haciendo:

$$G_1(s) = \frac{G(s)}{s}$$

Tenemos:

$$G_{RP}(s) = (1-e^{-Ts}) G_1(s)$$

Si consideramos la función:

$$G_{RP1}(s) = e^{-Ts} G_1(s)$$

Entonces:

$$g_{rp1}(t) = \int_0^t \delta(t-T-\tau) g_1(\tau) d\tau = g_1(t-T)$$

Donde:

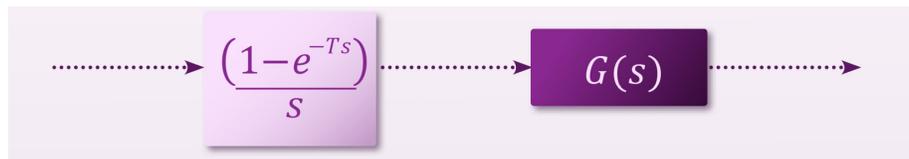
$$g_0(t) = L^{-1}[e^{-Ts}] = \delta(t-T)$$
$$g_1(t) = L^{-1}[G_1(s)]$$

Entonces:

$$g_{rp1}(t) = \int_0^t \delta(t-T-\tau) g_1(\tau) d\tau = g_1(t-T)$$

De esta forma:

$$Z[g_{rp1}(t)] = Z[g_1(t-T)] = z^{-1} G_1(z)$$



Entonces:

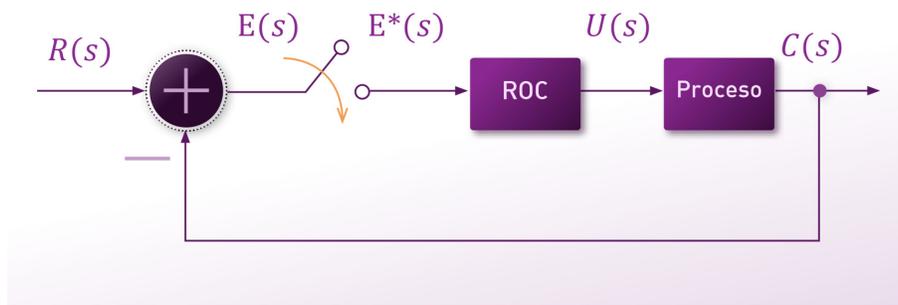
$$\begin{aligned} G_{RP}(z) &= Z[G_1(s) - e^{-Ts} G_1(s)] = Z[g_1(t)] - Z[g_{rp1}(t)] \\ &= G_1(z) - z^{-1} G_1(z) \\ &= (1 - z^{-1}) G_1(z) \end{aligned}$$

Finalmente:

$$G_{RP}(z) = (1 - z^{-1}) Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

Este resultado es particularmente importante pues, matemáticamente, es posible tener la función de transferencia de la planta en el dominio de z , esto facilitará los cálculos ya que podremos aplicar todo lo referente a bloques, tratado en la primera parte de este libro.

Ejemplo: Obtenga la función de transferencia en lazo cerrado y en el dominio de z para el sistema en lazo cerrado de la figura.



Considere que la planta se comporta de acuerdo con:

$$G_p(s) = \frac{K}{s+1}$$

Solución: Sabemos que la función de transferencia con retenedor es:

$$G_{PR}(s) = G_{ROC}(s) G_p(s) = \frac{1-e^{Ts}}{s} \frac{K}{s+1}$$

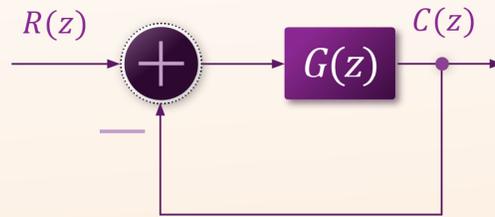
Entonces:

$$G_p(z) = Z[G_{PR}(s)] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{K}{s(s+1)}\right] = (1-z^{-1})ZK\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right]$$

$$G_p(z) = (1-z^{-1})K\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}\right) = \frac{K(1-e^{-T})z^{-1}}{1-e^{-T}z^{-1}}$$

Finalmente sabemos que la función de transferencia $C(z)/R(z)$ es:

$$G_{LC}(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{K(1-e^{-T})z^{-1}}{1+(K-(K+1)e^{-T})z^{-1}}$$



Función de transferencia de un controlador digital

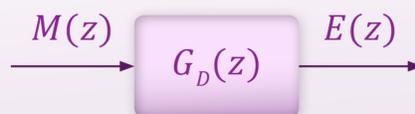
La función de transferencia de un controlador digital puede ser obtenida a partir de las características requeridas de entrada-salida del sistema en lazo cerrado.

Suponga que la entrada al controlador es $e(k)$ y la salida $m(k)$. En general, la salida, $m(k)$ puede estar dada por la siguiente ecuación en diferencias:

$$m(k) + a_1m(k-1) + a_2m(k-2) + L + a_nm(k-n) = b_0e(k) + b_1e(k-1) + b_2e(k-2) + L + b_ne(k-n)$$

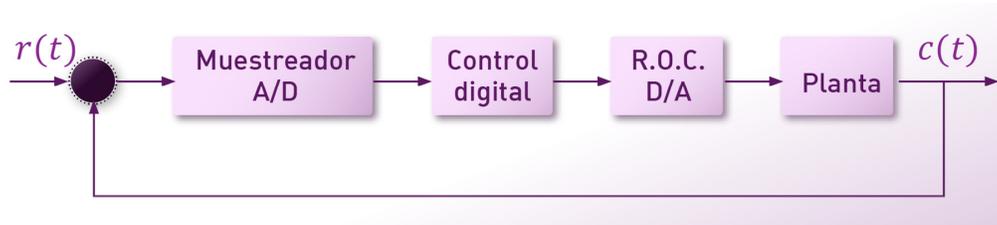
$$M(z) + a_1z^{-1}M(z) + a_2z^{-2}M(z) + L + a_nz^{-n}M(z) = b_0E(z) + b_1z^{-1}E(z) + b_2z^{-2}E(z) + L + b_nz^{-n}E(z)$$

$$G(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + L + b_nz^{-n}}{1 + a_1z^{-1} + L + a_nz^{-n}}$$

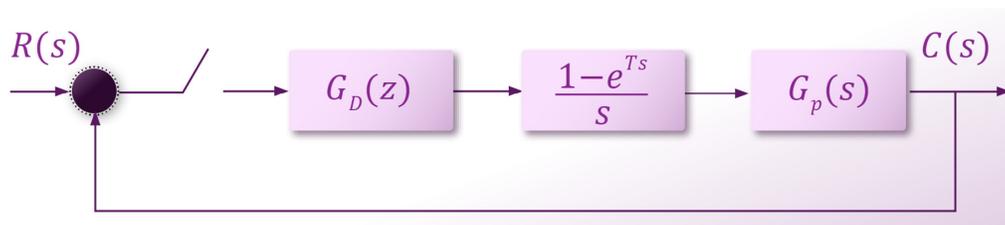


La función de transferencia de controlador discreto da como salida

una señal que sólo presenta valores a intervalos discretos de tiempo y toma como entrada, generalmente, el error entre la referencia y la salida del sistema.



El muestreador, el convertidor A/D, el control digital, el retén de orden cero y el D/A producen una señal continua (constante por tramos) $u(t)$ de control que se alimenta a la planta. Se seleccionan adecuadamente los polos y ceros de $G_D(z)$.



Finalmente, dado que el bloque de retenedor-proceso y también el controlador son funciones en el dominio de z , tenemos un sistema de bloques de lazo cerrado donde podemos analizar matemáticamente todo en el dominio de z .

Se ha visto la definición de una función de transferencia discreta y la forma en la que se utilizará tanto para describir plantas continuas como para describir controladores.

11.3 Métodos de discretización

Es muy útil tener la descripción del sistema de control discreto en

el dominio de la variable compleja z . Esto permite la manipulación de todas las señales involucradas de una manera natural, sin tener que recurrir a la transformada de Laplace o regresar al dominio del tiempo.

En este tema trataremos métodos de discretización que son básicamente equivalentes discretos de funciones de transferencia (filtros) continuos.

Método de invariancia al escalón

Dada la función de transferencia $G(s)$ de un filtro continuo, el equivalente discreto es aquél cuya respuesta al escalón es la misma que aquélla del filtro original en los instantes de muestreo, esto es:

$$Z^{-1} \left[G_D(z) \frac{1}{1-z^{-1}} \right] = L^{-1} \left[G(s) \frac{1}{s} \right]_{t=kT}$$

Aplicando transformada Z a ambos lados de la ecuación:

$$G_D(z) \frac{1}{1-z^{-1}} = Z \left[L^{-1} \left[\frac{G(s)}{s} \right] \right] = Z \left[\frac{G(s)}{s} \right]$$

De tal manera que podemos escribir el equivalente discreto como:

$$G_D(z) = (1-z^{-1}) Z \left[\frac{G(s)}{s} \right]$$

Nótese que este método es conceptualmente lo mismo que aplicar un retén de orden cero a la planta original; en otras palabras, tener un retenedor de orden cero antes del proceso en el sistema de control hace que la salida del sistema sea la misma en los instantes de muestreo.

Método de mapeo de polos y ceros

Este método se basa en la definición de $z=e^{Ts}$ y en el mapeo del

plano s al plano. Introduciremos el método a manera de algoritmo:

- » Factorizar $G(s)$. Los polos y los ceros finitos de $G(s)$ son mapeados al plano z con $z=e^{Ts}$.
- » Los ceros en infinito son mapeados al punto $z=-1$. De la misma forma son mapeados los polos en infinito.
- » Ajuste de ganancia. La ganancia del filtro pasobajas discreto en $z=1$ debe ser la misma que la del continuo en $s=0$. En forma similar para filtros pasoaltas: $z=-1$ para cuando $s \rightarrow \infty$.

Ejemplo: Obtenga el equivalente discreto de:

$$G(s) = \frac{a}{s + a}$$

Solución: Existe un cero en infinito que se mapea al punto $z=-1$, el polo se mapea a $z=e^{-aT}$:

$$G_D(z) = K \frac{a(z + 1)}{z - e^{-aT}}$$

Ajustando K para bajas frecuencias (filtro pasobajas):

$$G_D(1) = K \frac{2a}{1 - e^{-aT}} = G(0) = 1$$

De donde se obtiene:

$$K = \frac{1 + e^{-aT}}{2}$$

Finalmente:

$$G_D(z) = \frac{(1 + e^{-aT})(1 - z^{-1})}{2(1 - e^{-aT} z^{-1})}$$

Ejemplo: Obtenga el equivalente discreto de $G(s) = a/(s + a)$:

$$G(s) = \frac{a}{s + a}$$

Solución: El cero $s=0$ se mapea a $z=1$:

$$G_D(z) = K \frac{(z - 1)}{z - e^{-aT}}$$

Ajustando K para altas frecuencias:

$$G_D(-1) = K \frac{-1 - 1}{-1 - e^{-aT}} = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 1$$

De donde:

$$K = \frac{1 - e^{-aT}}{2a}$$

Entonces:

$$G_D(z) = \frac{(1 - e^{-aT})(1 + z^{-1})}{2(1 - e^{-aT} z^{-1})}$$

Método de la transformada bilineal o de Tustin

El **método de Tustin** es particularmente útil para el análisis y diseño de compensadores en el dominio de la frecuencia y se presenta a continuación.

Considere el filtro:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a}{s + a}$$

Que puede ser escrito como:

$$\frac{dy}{dt} = -ay + ax$$

Integrando ambos lados de la ecuación:

$$\int_0^t \frac{dy}{dt} dt = -a \int_0^t y(t) dt + a \int_0^t x(t) dt \quad (1)$$

Sustituyendo $t = kT$:

$$y(kT) - y(0) = -a \int_0^{kT} y(t) dt + a \int_0^{kT} x(t) dt \quad (2)$$

Ahora sustituimos en (1):

$$y[(k-1)T] - y(0) = -a \int_0^{(k-1)T} y(t) dt + a \int_0^{(k-1)T} x(t) dt \quad (3)$$

Restando (2) de (3):

$$y(kT) - y[(k-1)T] = -a \int_{(k-1)T}^{kT} y(t)dt + a \int_{(k-1)T}^{kT} x(t)dt \quad (4)$$

Es posible aproximar las integrales de la siguiente forma:

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(t)dt \cong \frac{1}{2} [y(kT) + y((k-1)T)]$$

Y:

$$\int_{(k-1)T}^{kT} x(t)dt \cong \frac{1}{2} [x(kT) + x((k-1)T)]$$

Entonces la ecuación (4) se puede aproximar como:

$$y(kT) = y((k-1)T) - \frac{aT}{2} [y(kT) + y((k-1)T)] + \frac{aT}{2} [x(kT) + x((k-1)T)]$$

Aplicando transformada Z:

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) - \frac{aT}{2} [Y(z) + z^{-1}Y(z)] + \frac{aT}{2} [X(z) + z^{-1}X(z)]$$

Entonces:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G_D(z) = \frac{\frac{aT}{2}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1}) + \frac{aT}{2}(1+z^{-1})} = \frac{a}{\frac{2}{T} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) + a}$$

Comparando G(z) con G(s) vemos que:

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)$$

A esta última relación se le conoce como **transformada Bilineal o de Tustin**.

En este tema se trataron diferentes métodos de discretización de sistemas continuos a través de funciones de transferencia. No son los únicos pero sí los más utilizados en el diseño de sistemas discretos de control.

Conclusión del capítulo 11

En este capítulo hemos visto cómo obtener funciones de transferencia discretas, es decir, en el dominio de z . Cada método de discretización se utiliza para diferentes situaciones, por ejemplo, el método de invariancia al escalón es equivalente a tener un retenedor de orden cero en el lazo de control. El mapeo de polos y ceros se emplea cuando se tiene un controlador continuo que ya está funcionando como se requiere y solamente se requiere introducir a un sistema digital. Finalmente, el método de transformada bilineal se utiliza cuando se requiere hacer un análisis o diseño en el dominio de la frecuencia.



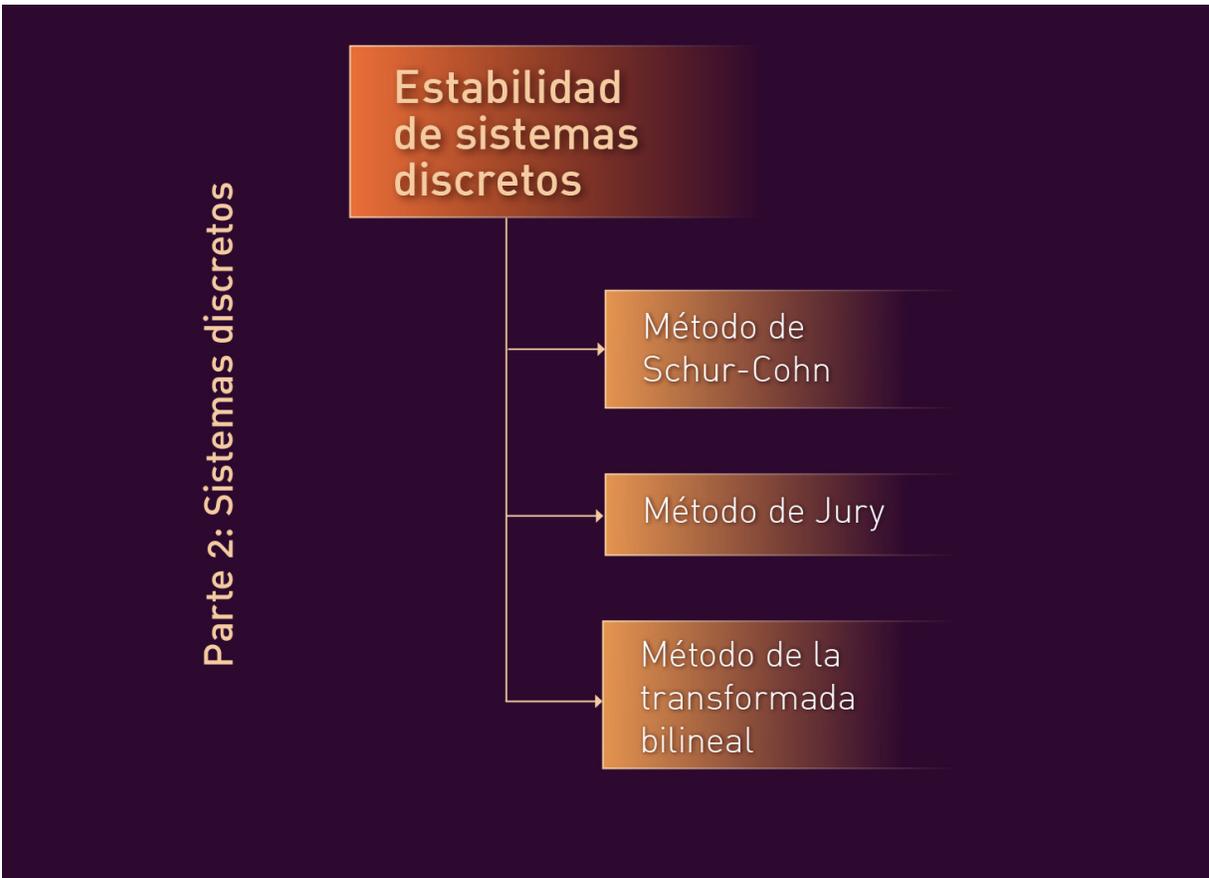
Actividades del capítulo 11

- [Actividad integradora](#)

Recursos del capítulo 11

- Program CC (2011).

12. Estabilidad de sistemas discretos



La estabilidad es un concepto muy importante para el desarrollo de sistemas de control pues es indispensable que el sistema en lazo cerrado sea estable, es decir, que presente una salida acotada ante una **entrada acotada**.

En analogía con el concepto de estabilidad para sistemas continuos, la estabilidad de un sistema discreto dependerá de la ubicación de polos de lazo cerrado del sistema. Dado que el semiplano izquierdo de Laplace se mapea al interior del círculo unitario en el plano- z , entonces, un sistema será estable si todas las raíces de la ecuación característica se encuentran dentro del círculo unitario en el plano z . Si al menos una de las raíces se encuentra

fuera del círculo unitario, el sistema en cuestión será inestable.

En este capítulo analizaremos diversos métodos para determinar la estabilidad de un sistema de control en lazo cerrado partiendo de su ecuación característica.

12.1 Método de Schur-Cohn

El criterio de Schur-Cohn para polinomios complejos puede darse como sigue. El polinomio:

$$F(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$$

Tiene todas las raíces dentro del círculo unitario solo si se satisfacen las siguientes restricciones:

$$|\Delta_k| < 0 \text{ para } k \text{ impar}$$

$$|\Delta_k| > 0 \text{ para } k \text{ par}$$

Donde la matriz Δ_k está dada por:

$$\Delta_k = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & a_n & \dots & a_{n-k+2} & a_{n-k+1} \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & a_n & a_{n-k+3} & a_{n-k+2} \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ a_{k-1} & a_{k-2} & \dots & a_0 & 0 & 0 & a_n \\ \hline \bar{a}_n & 0 & 0 & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \dots & \bar{a}_{k-1} \\ \bar{a}_{n-1} & \bar{a}_n & 0 & 0 & \bar{a}_0 & \dots & \bar{a}_{k-2} \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ \bar{a}_{n-k+1} & \bar{a}_{n-k+2} & \dots & 0 & 0 & 0 & \bar{a}_0 \end{bmatrix}$$

Con $k = 1, 2, \dots, n$ y \bar{a}_k es el complejo conjugado de a_k .

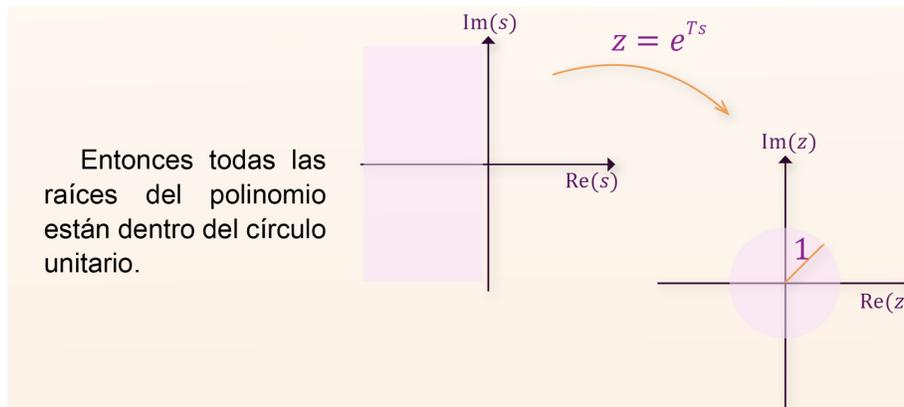
Ejemplo: Determine si todas las raíces del siguiente polinomio están dentro del círculo unitario:

$$z^2 + z + 0.25 = 0$$

Solución: Encontramos los determinantes $|\Delta_1|$ y $|\Delta_2|$:

$$|\Delta_1| = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.25 & 1 \\ 1 & 0.25 \end{vmatrix} = -0.9375 < 0$$

$$|\Delta_2| = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & a_2 & a_1 \\ a_2 & a_0 & 0 & a_2 \\ \bar{a}_2 & 0 & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & 0 & \bar{a}_0 \end{vmatrix} = 0.3164 > 0$$



Ejemplo: Determine para qué valores de K el siguiente polinomio tiene todas las raíces dentro del círculo unitario:

$$z^2 + z + K = 0$$

Solución: Encontramos los determinantes $|\Delta_1|$ y $|\Delta_2|$:

$$|\Delta_1| = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K & 1 \\ 1 & K \end{vmatrix} = K^2 - 1$$

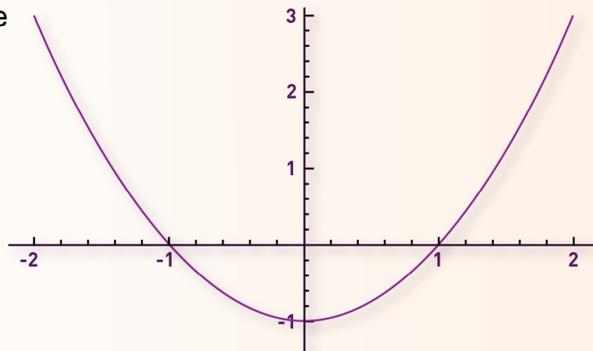
$$|\Delta_2| = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & a_2 & a_1 \\ a_2 & a_0 & 0 & a_2 \\ \bar{a}_2 & 0 & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & 0 & \bar{a}_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & K & 1 \\ 1 & 1 & 0 & K \\ K & 0 & 1 & 1 \\ 1 & K & 0 & 1 \end{vmatrix} = K^4 - 3K^2 + 2K$$

Para que todas las raíces estén dentro del círculo unitario se deben de cumplir simultáneamente las condiciones:

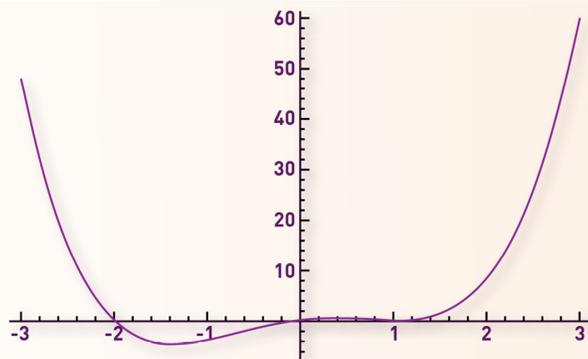
$$K^2 - 1 < 0$$

$$K^4 - 3K^2 + 2K > 0$$

La primera condición se cumple para $-1 < K < 1$.



La segunda condición se cumple para $(-\infty < K < -2) \cup (0 < K < 1) \cup (1 < K < \infty)$.



De tal manera que, para que se cumplan ambas condiciones simultáneamente, K tiene que estar en el intervalo $0 < K < 1$.

En este apartado se presentó el método de Schur-Cohn para determinar si las raíces de un polinomio están dentro del círculo unitario en el plano complejo. Este método es particularmente útil cuando se tiene un parámetro desconocido del cual depende la estabilidad en un sistema discreto. El inconveniente que presenta es que, para sistemas de mayor orden, los determinantes y las desigualdades a resolver se vuelven complicados de manipular.

12.2 Criterio de Jury tabular

Las condiciones necesarias y suficientes para que el siguiente polinomio:

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

tenga todas las raíces dentro del círculo unitario pueden obtenerse de la tabla siguiente:

z^0	z^1	z^2	\dots	z^n	z^{n-1}
a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-1}	a_n
a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_1	a_0
b_0	b_1	b_2	\dots	b_{n-1}	
b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	\dots	b_0	
c_0	c_1	c_2	\dots		
c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	\dots		
\vdots					

Para:

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}; \quad c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}$$

Y así sucesivamente con los renglones posteriores.

Las restricciones de estabilidad son:

$$\begin{aligned} F(1) &> 0 \\ (-1)^n F(-1) &> 0 \\ |a_0| &< a_n \\ |b_0| &> |b_{n-1}| \\ |c_0| &> |c_{n-2}| \end{aligned}$$

El número de raíces dentro del círculo unitario, si ninguna de las anteriores es igualdad, está dada por el número de productos P_k , $k = 1, 2, \dots, n$ que sean negativos, donde:

$$\begin{aligned} P_1 &= [|a_0| - |a_n|] \\ P_2 &= P_1 [|b_0| - |b_{n-1}|] \\ P_3 &= P_2 [|c_0| - |c_{n-2}|] \\ &M \end{aligned}$$

Ejemplo: Determine si todas las raíces del siguiente polinomio se encuentran dentro del círculo unitario:

$$z^4 - 1.5z^3 + 0.5z^2 + 0.5z + 0.1 = 0$$

Solución: Construimos la tabla de Jury:

z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
0.1	0.5	0.5	-1.5	1
1	-1.5	0.5	0.5	0.1
-0.99	-1.55	-0.45	-0.65	
-0.65	-0.45	1.55	-0.99	
0.5576	-1.827	1.453		
1.453	-1.827	0.5576		
-1.8	1.636			
1.636	-1.8			
0.5635				

Probamos restricciones de estabilidad:

$$F(1) = 0.6 > 0$$

$$(-1)^4 F(-1) = 2.6 > 0$$

$$a_n = 1 > |a_0| = |0.1| = 0.1$$

$$|b_0| = |-0.99| = 0.99 > |b_{n-1}| = |-0.65| = 0.65$$

$$|c_0| = |0.56| = 0.56 > |c_{n-2}| = |1.453| = 1.453$$

Dado que la condición para los coeficientes c de la tabla no se cumple, entonces el polinomio tiene raíces fuera del círculo unitario. Es posible también encontrar cuántas raíces están fuera y cuántas dentro del círculo unitario utilizando los siguientes productos:

$$P_1 = |a_0| - |a_n| = 0.1 - 1 = -0.9 < 0$$

$$P_2 = -0.9 (0.99 - 0.65) = -0.306 < 0$$

$$P_3 = -0.306 (0.5576 - 1.453) = 0.274 > 0$$

$$P_4 = 0.274 (1.8 - 1.636) > 0$$

De esta manera tenemos que dos raíces están dentro y dos fuera del círculo unitario.

Ejemplo: Determine para qué valores de K el siguiente polinomio tiene todas las raíces dentro del círculo unitario.

$$z^2 + z + K = 0$$

Solución: Construimos la tabla de Jury:

z^0	z^1	z^2
K	1	1
1	1	K
K^2-1	$K-1$	

Probamos condiciones de estabilidad:

$$F(1) = K + 2 > 0$$

$$(-1)^4 F(-1) = K > 0$$

$$a_n = 1 > |a_0| = |K|$$

$$|b_0| = |K^2-1| > |b_{n-1}| = |K-1|$$

De donde se puede deducir que el rango de estabilidad para K es:

$$0 < K < 1$$

En este tema se presentó el método tabular de Jury para determinar la estabilidad de un sistema discreto a partir de la ecuación característica del mismo. El método nos permite obtener además el número de raíces que se encuentran dentro y fuera del círculo unitario en el plano complejo a través de restricciones de estabilidad basadas en una tabla previamente obtenida.

12.3 Método de la transformada bilineal (o de Tustin)

Dado el polinomio:

$$F(w) = b_0 + b_1w + b_2w^2 + \dots + b_nw^n$$

su equivalente en el plano w es:

$$F(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$$

donde la relación entre a_k y b_k está dada por:

$$b_{n-k} = \sum_{j=0}^n a_{n-j} \left[\begin{array}{l} \binom{n-j}{k} - \binom{j}{1} \binom{n-j}{k-1} + \binom{j}{2} \binom{n-j}{k-2} - \dots \\ + (-1)^{k-1} \binom{j}{k-1} \binom{n-j}{1} + (-1)^k \binom{j}{k} \end{array} \right]$$

Para:

$$\binom{j}{k} = \frac{j!}{k!(j-k)!}$$

Una vez obtenido el polinomio en el dominio de w , entonces aplicamos el **criterio de Routh-Hurwitz**. Es posible también aplicar la transformada bilineal inversa, es decir:

$$w = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \Rightarrow z = \frac{2 + Tw}{2 - Tw}$$

Ejemplo. Dado el polinomio:

$$F(z) = z^4 - 1.5z^3 + 0.5z^2 + 0.5z + 0.1 = 0$$

Determine si todas las raíces del polinomio se encuentran en el interior del círculo unitario, considere $T=1$.

Solución. Aplicando transformada de Tustin tenemos:

$$F(w) = w^4 + 5.846 w^3 + 8.615 w^2 - 1.231 w + 3.692 = 0$$

Ahora podemos aplicar el método de Routh-Hurwitz:

w^4	1	8.615	3.692
w^3	5.846	-1.231	
w^2	8.825	3.692	
w	-3.676		
w^0	3.692		

Tenemos dos cambios de signo en la primera columna de la tabla, esto implica que existen dos raíces fuera del círculo unitario.

El método de Routh-Hurwitz, diseñado para sistemas continuos, puede ser usado en combinación con la transformada de Tustin para determinar la estabilidad de un sistema discreto. Se utiliza la transformada de Tustin para poder mapear el sistema discreto en el dominio de z al dominio de una variable compleja asociada a un sistema continuo. No es conveniente utilizar el mapeo inverso $s=(1/T) \ln z$ pues la función de transferencia quedaría en términos de logaritmos de z , por esta razón se utiliza la transformación w o de Tustin que conduce a tener funciones de transferencia polinómicas que son las que utilizamos normalmente.

Conclusión del capítulo 12

En este capítulo hemos visto algunos métodos para determinar la estabilidad de un sistema discreto. Es importante notar que las herramientas matemáticas para sistemas discretos son distintas que para un sistema continuo, la dificultad principal radica en que todos los polos del sistema discreto deben estar dentro del círculo unitario para que el sistema sea estable en el sentido de entrada acotada-salida acotada. Gracias a los métodos de Schur-Cohn y Jury, que fueron diseñados para este propósito específico, y al método de Routh-Hurwitz con la ayuda de la transformada de Tustin, es posible determinar la ubicación de los polos de un sistema discreto con base en el análisis de la ecuación característica de lazo cerrado.

La estabilidad juega un papel determinante en el diseño de controladores discretos pues es un requisito básico para que el sistema controlado pueda comportarse de acuerdo a un objetivo de control. Si en lazo cerrado el sistema resulta inestable, entonces no se podrá cumplir ningún requisito de control; es por esto que es necesario siempre considerar posibles inestabilidades en el diseño de controladores.



Actividades del capítulo 12

- [Actividad integradora](#)

Recursos del capítulo 12

- Program CC (2011).

13. Controladores discretos



Los controladores discretos se refieren a controladores en el dominio de la variable compleja z . En general, un controlador discreto es siempre una función de transferencia y, por ende, es también una ecuación en diferencias. En este capítulo veremos diferentes estrategias de control enfocadas al logro de diferentes objetivos. De los capítulos 4 al 8 de este libro se analizan diferentes herramientas para el diseño de controladores de sistemas continuos; para sistemas discretos no son evidentes estas técnicas, es por esta razón que se incorporan en esta sección.

En este capítulo analizaremos metodologías de control para sistemas discretos. Trataremos técnicas como lugar de las raíces, respuesta en frecuencia utilizando transformada w , revisaremos instrumentaciones del PID discreto y, además, se presenta una estrategia propia de sistemas discretos que es el controlador prototipo mínimo; este controlador no es físicamente realizable para sistemas continuos pero, en sistemas discretos, es perfectamente realizable y además presenta buen desempeño.

13.1 Respuesta permanente de sistemas discretos

Antes de entrar a detalle al tema de controladores digitales, conviene aclarar el concepto de error en estado estacionario para sistemas discretos.

Uno de los objetivos de control más utilizados es el de tener un error en **estado estacionario nulo**. El error en estado estacionario determina la diferencia entre la referencia y la salida de un sistema de control. En general, se requiere que la salida del sistema controlado siga a la referencia rápidamente y sin error; la rapidez y la forma en que la respuesta tiende a alcanzar a la referencia son los transitorios o respuesta transitoria del sistema. La diferencia entre la referencia y la salida, cuando ha pasado mucho tiempo, se conoce como respuesta permanente.

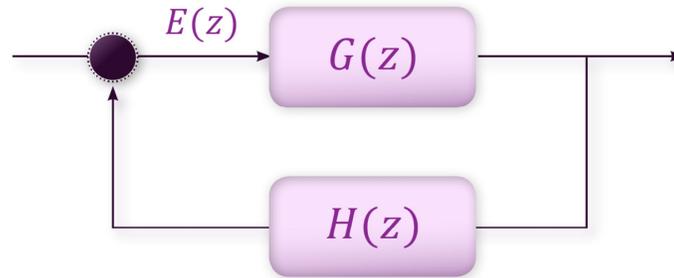
La respuesta permanente del sistema puede describirse completamente utilizando el concepto de error en estado estacionario. A partir del diagrama de bloques del sistema discreto mostrado en la figura, podemos obtener:

$$E(z) = \frac{R(z)}{1 + G(z)H(z)}$$

Definimos el error en estado estacionario como:

$$e_{ss} = \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1}) R(z)}{1 + G(z)H(z)}$$

Podemos observar que de manera análoga al caso continuo, el error depende de la entrada al sistema, es decir, será diferente el error para una entrada escalón que para una entrada rampa, es por esto que consideraremos ahora los coeficientes de error estático.



Coefficiente de error estático de posición

Suponemos una entrada escalón:

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + G(z) H(z)}$$

Definimos:

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) H(z)$$

Entonces:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}$$

Coefficiente de error estático de velocidad

Suponemos una entrada rampa:

$$R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})[1 + G(z) H(z)]}$$

Definimos:

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z^{-1})G(z) H(z)}{T}$$

Entonces:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$$

Coefficiente de error estático de aceleración

Suponemos una entrada rampa:

$$R(z) = \frac{T^2(1-z^{-1})z^{-1}}{2(1-z^{-1})^3}$$

Definimos:

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T^2}{(1-z^{-1})^2[1 + G(z) H(z)]}$$

Entonces:

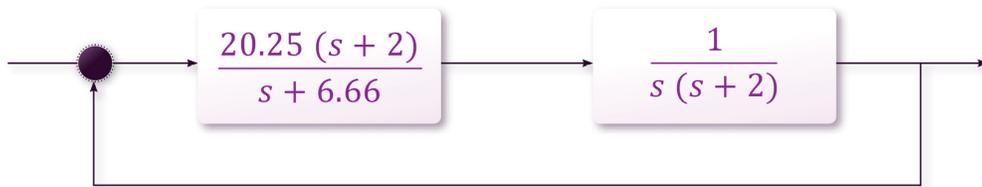
$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z^{-1})^2 G(z) H(z)}{T^2}$$

Ejemplo: Considere el siguiente sistema, obtenga los coeficientes de error en estado estacionario para el sistema continuo y para el sistema discretizado.

Solución:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

Ejemplo: Considere el siguiente sistema, obtenga los coeficientes de error en estado estacionario para el sistema continuo y para el sistema discretizado.



Solución:

Sistema continuo

$$\begin{aligned}
 K_p &\rightarrow \infty \\
 K_v &= 3.041 \\
 K_a &= 0
 \end{aligned}$$

Sistema discretizado

$$G(z) H(z) = \frac{0.2385 (1 + 0.8760 z^{-1}) z^{-1}}{(1 - 0.2644 z^{-1}) (1 - z^{-1})}$$

$$T = 0.2 \text{ s}$$

$$K_p \rightarrow \infty$$

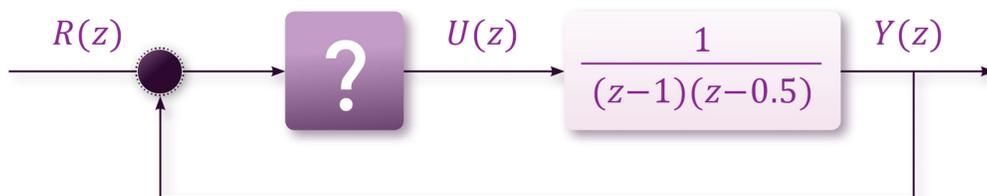
$$K_v = 3.041$$

$$K_a = 0$$

En este apartado se han analizado las condiciones bajo las cuales un sistema presenta error en estado estacionario nulo que, en general, es uno de los objetivos de control más típicos. Es importante recordar que el error en estado estacionario depende de la referencia del sistema discreto; es por esta razón que formulamos diferentes definiciones de coeficientes de error estático asociadas a distintas referencias.

13.2 Controladores basados en lugar de las raíces

Una herramienta muy útil para el diseño de controladores es el lugar de las raíces. Sabemos que, cuando se retroalimenta la salida en un sistema de control, es posible cambiar de ubicación los polos del sistema original y, si aumentamos una ganancia en el lazo, es posible cambiar la ubicación de estos polos siguiendo cierto lugar geométrico. A este lugar geométrico se le llama lugar de las raíces.



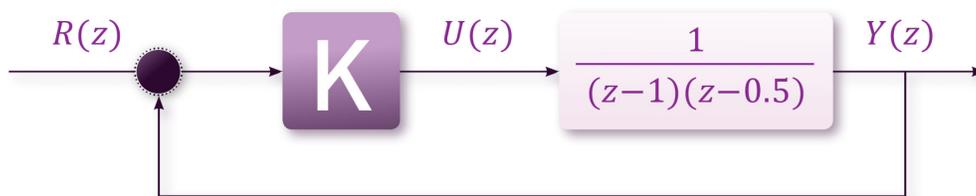
De tal manera que es posible cambiar el comportamiento en lazo cerrado de un sistema utilizando una simple ganancia. Este mismo principio se replica cuando tenemos un sistema discreto en el dominio de z .

Tomemos como ejemplo la planta:

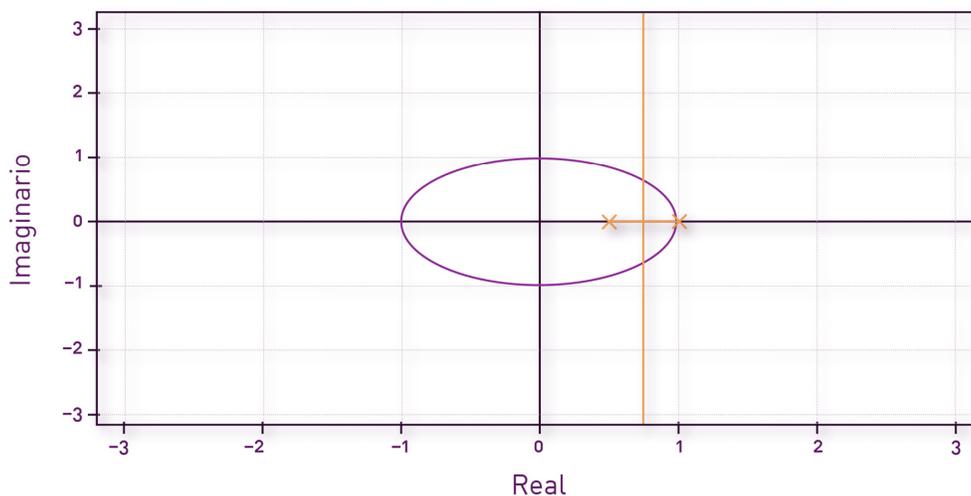
$$G(z) = \frac{1}{(z-1)(z-0.5)}$$

Los polos de lazo cerrado cuando se aplica una ganancia están dados por:

$$z_1 = z_2 = 0.75 \pm \sqrt{0.0625 - K}$$



Entonces, los polos de lazo cerrado en función de K pueden representarse en el plano complejo z como se muestra en la siguiente gráfica. Este lugar geométrico es conocido como el lugar de las raíces del sistema para la variable K .



Es posible bosquejar este lugar geométrico con ayuda del método de Evans, tal y como se analizó a detalle en el [capítulo 5](#) de este libro. Entonces, replantearemos el método adecuándolo para

sistemas en el dominio de z . Nótese que z también es una variable compleja, de tal manera que las reglas pueden ser aplicadas exactamente de la misma manera que para el dominio de Laplace.

Método de Evans

Dado un **sistema lineal invariante en tiempo**, de la forma:

$$G_{LC}(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z) H(z)}$$

es posible cambiar sus modos de comportamiento variando algún parámetro. El método del lugar de las raíces (Evans) permite estudiar el efecto de un parámetro del sistema en la ubicación de los polos de lazo cerrado a partir de la función de transferencia de lazo abierto.



El lugar de las raíces es el lugar geométrico de valores de z para los cuales se cumple que:

$$1 + G(z) H(z) = 0$$

Condición de magnitud:

$$|G(z) H(z)| = 1$$

Condición de ángulo:

$$\text{Ang}[G(z) H(z)] = \pm(2N+1)\pi; \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

No olvidar que las reglas para el trazado del lugar de las raíces siguen siendo las mismas que para sistemas en el dominio de Laplace. Se sugiere al lector revisar el [capítulo 5](#) de este libro, teniendo en cuenta que z también es una variable compleja.

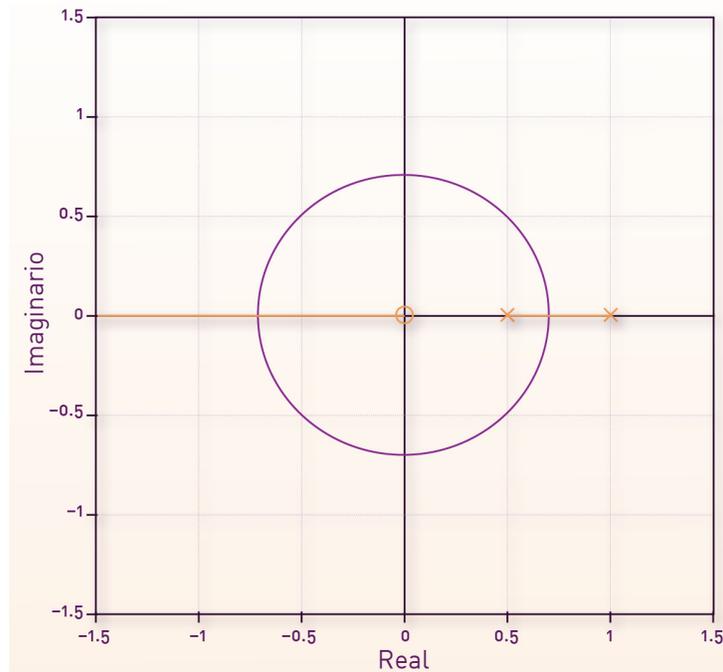
Retomamos las reglas aquí, obviaremos una explicación detallada:

- » **Regla 0.** Ubicar polos y ceros de lazo abierto en el plano z
- » **Regla 1.** Encontrar el lugar de las raíces sobre el eje real
- » **Regla 2.** Determinar las asíntotas
- » **Regla 3.** Ángulo de salida (llegada) de polos (ceros) complejos
- » **Regla 4.** Cruce del lugar de las raíces con el eje imaginario
- » **Regla 5.** Puntos de ruptura

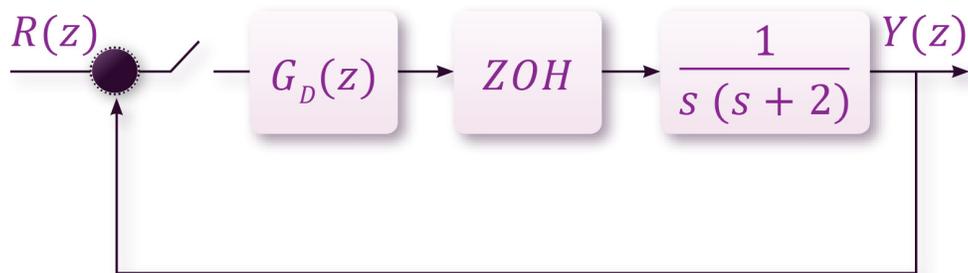
Ejemplo. Bosqueje el lugar de las raíces para el siguiente sistema:

$$G(z) = \frac{1}{(z-1)(z-0.5)}$$

Solución: Aplicando las reglas se puede obtener un bosquejo de la gráfica obtenida aquí por *ProgramCC*.



Ejemplo: Considere el sistema de control mostrado en la siguiente figura. Diseñe un controlador $G_D(z)$ tal que los polos dominantes de lazo cerrado tengan un factor de amortiguamiento relativo de 0.5 y el sistema tenga un tiempo de establecimiento de 2 segundos.



Solución: Encontramos el polo deseado en el dominio de z :

$$t_s = \frac{4}{\xi \omega_n} \Rightarrow \omega_n = 4 \text{ rad/s},$$

$$\omega_d = 3.464 \text{ rad/s},$$

$$\omega_s = 31.42 \text{ rad/s}$$

$$|z| = \exp\left(\frac{-2\pi\xi\omega_d}{\omega_s\sqrt{1-\xi^2}}\right) = 0.6703,$$

$$\angle z = 2\pi \frac{\omega_d}{\omega_s} = 0.6927 \text{ rad} = 39.69^\circ$$

Entonces el polo deseado está en:

$$z_d = 0.6703 \angle 39.69^\circ = 0.5158 + j0.4281$$

Encontramos la función de transferencia de la planta con el retenedor:

$$G(z) = (1-z^{-1}) Z\left[\frac{1}{s^2(s+2)}\right] = \frac{0.01758(z+0.8760)}{(z-1)(z-0.6703)}$$

Proponemos un controlador de la forma:

$$G_D(z) = \frac{K(z+\alpha)}{(z+\beta)}$$

Elegimos $\alpha = 0.6703$ y buscamos el ángulo deseado para β aplicando condición de ángulo:

$$17.1^\circ - 138.51^\circ - \theta_\beta = -180^\circ$$

Entonces, $\theta_D = 58.59^\circ$ pero:

$$58.59^\circ = \tan^{-1}\left(\frac{0.4281}{d}\right)$$

Luego $d = 0.2614$ y $\beta = 0.5158 - 0.2614$; entonces:

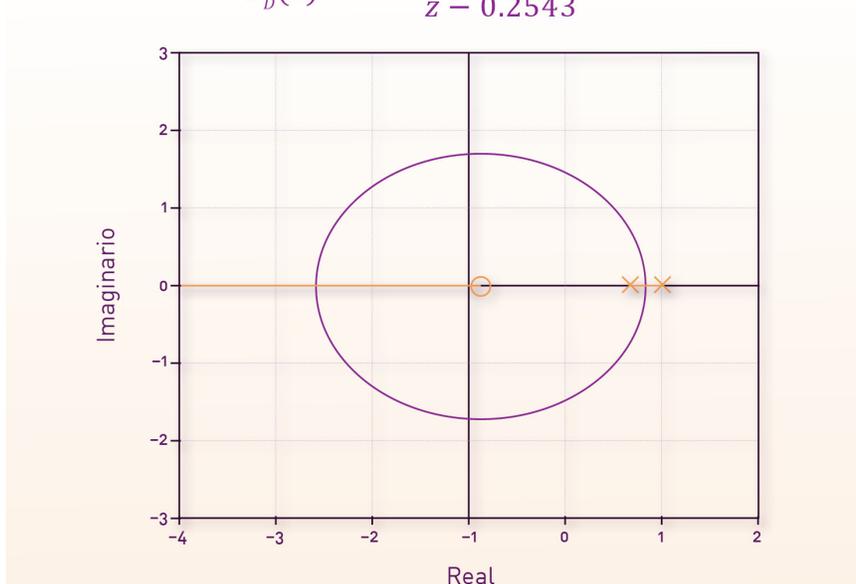
$$G_D(z) = \frac{K(z - 0.6703)}{(z - 0.2543)}$$

Solo resta encontrar el valor de la ganancia, aplicando condición de magnitud:

$$|G_p(z) G_D(z)|_{z=0.5158+j0.4281} = 1, \Rightarrow K = 12.66$$

Entonces el controlador queda finalmente:

$$G_D(z) = \frac{12.66 (z - 0.6703)}{z - 0.2543}$$



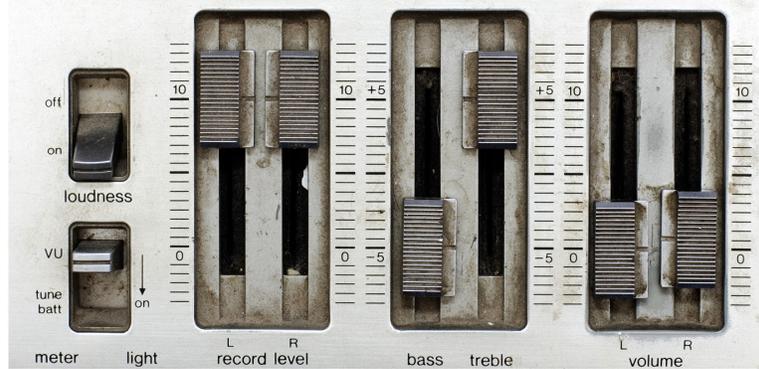
En este tema se ha visto cómo realizar el bosquejo del lugar geométrico formado por las raíces de la ecuación característica de un sistema discreto. El diseño de controladores basado en lugar de las raíces trata de aprovechar las condiciones de magnitud y ángulo aquí definidas para asegurar un comportamiento específico en lazo cerrado.

LIGAS DE INTERÉS

Program CC (2011).

13.3 Transformada w y compensadores digitales

El análisis y diseño de compensadores en frecuencia para sistemas discretos se puede realizar utilizando la transformada w . Una vez que se tiene la función de transferencia del retenedor con la planta $G_{RP}(z)$ en el dominio de z , la información de frecuencia no es sencilla de ubicar. Por esta razón utilizamos la transformada bilineal que nos permite mapear la función en z a un dominio “continuo” y así poder realizar el análisis o diseño de controladores como si fuera la variable de Laplace.



Procedimiento de diseño en el plano w :

1. Obtener $G(z)$. Transformar $G(z)$ para obtener $G(w)$.
2. Sustituir $w=jv$ en $G(w)$ y obtener el diagrama de Bode para jv .
3. Leer del diagrama las constantes de error estático, el margen de fase y el margen de ganancia.
4. Suponiendo que la ganancia a baja frecuencia de la FT del controlador $G_D(w)$ es la unidad, determine la ganancia del sistema satisfaciendo los requerimientos de alguna constante de error dada. Obtenga, usando técnicas convencionales de diseño, la ubicación de polos y ceros de la FT del controlador.
5. Transformar $G_D(w)$ para obtener $G_D(z)$.

Podemos escribir la variable w como:

$$w = \mu \pm jv$$

La variable v (nu) es considerada una frecuencia ficticia. Es posible encontrar una relación entre ω y v para poder compensar la diferencia en frecuencias, aunque esto, a menudo, no es necesario.

Los márgenes de robustez se obtienen de la misma manera que para un sistema en el dominio de **Laplace** considerando v en vez de ω .



Ejemplo: Suponga que la función de transferencia de un motor de corriente directa se puede expresar como:

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 1)}$$

El sistema se ha discretizado con $T = 0.1s$. Utilice la transformada bilineal y encuentre el margen de fase, el margen de ganancia y determine el coeficiente de error estático de velocidad a partir del diagrama de Bode de magnitud.

Obtenemos la función de transferencia de la planta suponiendo un retenedor de orden cero:

$$G(z) = 0.004837 \left[\frac{(z + 0.9672)}{(z - 1)(z - 0.9048)} \right]$$

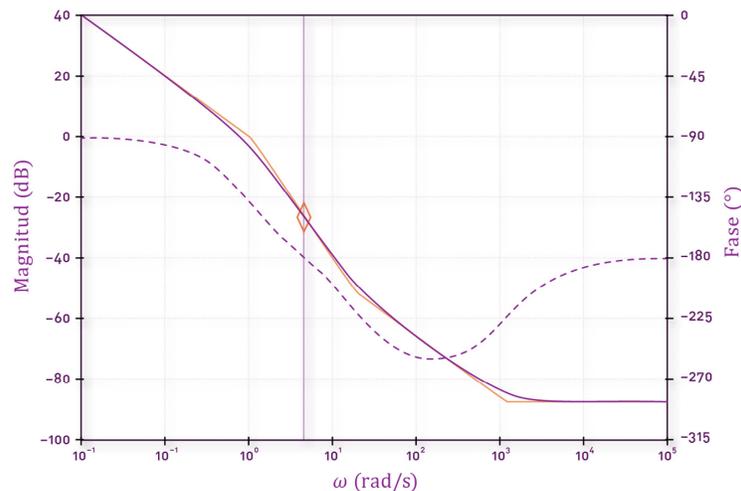
Obtenemos la transformada w de la planta:

$$G(w) = \frac{-4.163 \times 10^{-5} (w + 1200)(w - 20)}{w(w + 0.9992)}$$

Normalizando:

$$G(s) = \frac{\left(1 + \frac{w}{1200}\right)\left(1 - \frac{w}{20}\right)}{w\left(1 + \frac{w}{0.9992}\right)}$$

Introducimos esta función a ProgramCC y de ahí podemos leer los datos que se piden.



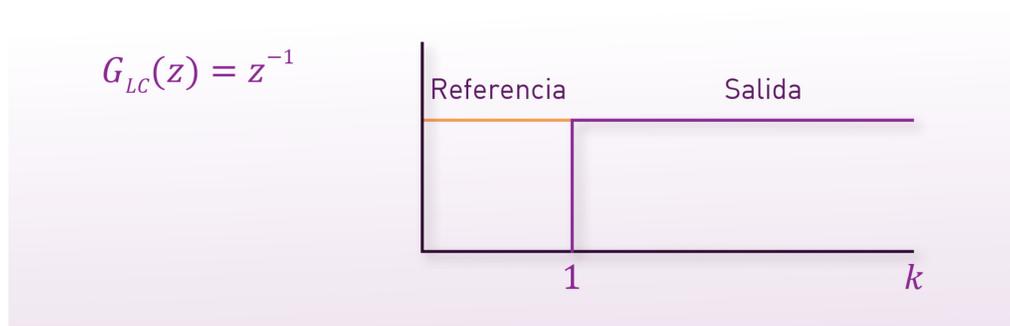
En este tema se ha retomado el diseño de compensadores en frecuencia utilizando los diagramas de Bode. El diseño de este tipo de controladores involucra el mapeo de z a w por medio de la transformada de Tustin a fin de poder realizar el diseño en frecuencia sobre una variable asociada a sistemas continuos. Una vez teniendo el sistema en el dominio de w se pueden aplicar las técnicas vistas en el [Capítulo 7](#) de este libro.

13.4 Controlador prototipo mínimo

La estrategia para diseñar un controlador prototipo mínimo (también llamado corrector) es lograr la respuesta más rápida

posible con un error en estado estacionario nulo. Parecen evidentes estos objetivos de control pero este tipo de controladores se logran de una manera muy sencilla después de haber sido diseñados.

La mejor respuesta que pudiéramos tener en un sistema discreto para una entrada escalón, es aquella en la que la salida alcanza al escalón en el primer periodo de muestreo. Para este caso en particular, la función de transferencia de lazo cerrado deseada sería un retraso:



Entonces, intuitivamente, podríamos pensar en encontrar la función de transferencia de un controlador de tal forma que se lograra tener un retardo como FT de lazo cerrado.

Si extendemos esta idea, podemos pensar que la función de error debe ser cero en el menor tiempo posible, esto implica que el grado del polinomio del error $E(z)$ debe mínimo.

Una desventaja de este tipo de controladores es que, dado que el error **depende de la entrada**, el controlador prototipo mínimo tendrá que diseñarse de acuerdo a la entrada a la que se requiere la respuesta.

Podemos considerar el siguiente tipo de entrada:

$$R(s) = \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{s^i}$$

Nótese que si $m=1$ y $a_i=1$ tenemos un escalón unitario, podemos encontrar fácilmente los valores para una entrada rampa. En el

dominio de z , la entrada se ve como sigue:

$$R(z) = \frac{A(z)}{(1 - z^{-1})^{m+1}}$$

Consideremos la función de transferencia de lazo cerrado:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = F(z) = \frac{G_D(z)G_P(z)}{1 + G_D(z)G_P(z)}$$

Y la función de transferencia del error:

$$\frac{E(z)}{R(z)} = W(z) = \frac{1}{1 + G_D(z)G_P(z)}$$

Donde la relación entre estas dos FTs está dada por:

$$W(z) = 1 - F(z)$$

Entonces, el error queda:

$$E(z) = (1 - z^{-1})^{k+m+1} B(z)A(z)(1 - z^{-1})^{-(m+1)}$$

Haciendo:

$$1 - F(z) = (1 - z^{-1})^{k+m+1} B(z); \quad k \geq 0$$

Donde $B(z)$ es un polinomio en z^{-1} de grado l , entonces:

$$E(z) = (1 - z^{-1})^{k+m+1} B(z)A(z)(1 - z^{-1})^{-(m+1)}$$

Es decir:

$$E(z) = (1 - z^{-1})^k B(z)A(z)$$

De manera que el régimen transitorio será mínimo si $k = 0$ y $B(z) = 1$.

$$E(z) = A(z)$$

$$W(z) = \frac{A(z)}{A(z)/(1 - z^{-1})^{m+1}} = (1 - z^{-1})^{m+1}$$

Entonces, la función de transferencia deseada mínima queda como:

$$F(z) = 1 - (1 - z^{-1})^{m+1}$$

En el caso general en el que $A(z)$ sea un polinomio en z^{-1} de grado i , $e^*(t)$ se anula en $z + 1$ periodos de muestreo.

Dado que:

$$F(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)G_P(z)}{1 + G_D(z)G_P(z)}$$

Entonces, podemos encontrar la función de transferencia de controlador de la siguiente manera:

$$G_D(z) = \frac{F(z)}{G_P(z)[1 - F(z)]}$$

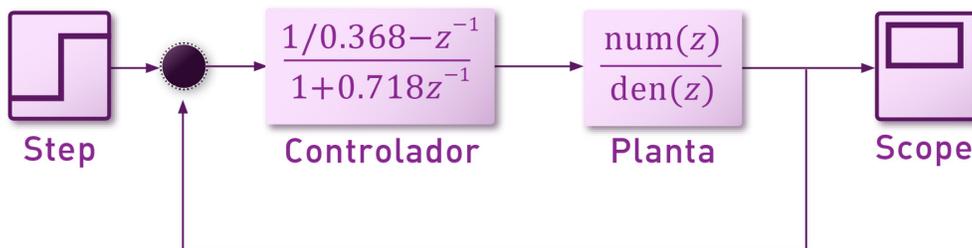
Donde:

$$F(z) = 1 - (1 - z^{-1})^{m+1}$$

Es la función de transferencia en lazo cerrado que corresponde a un sistema mínimo absoluto para una cierta entrada.

Ejemplo: Considere un sistema cuya función de transferencia es:

$$G_p(z) = \frac{0.368Kz^{-1}(1+0.718z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}$$



Encuentre el corrector para una entrada escalón unitario.

Solución. Para una entrada escalón se tiene:

$$r(t) = 1, R(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}; m = 0, A(z) = 1$$

Entonces:

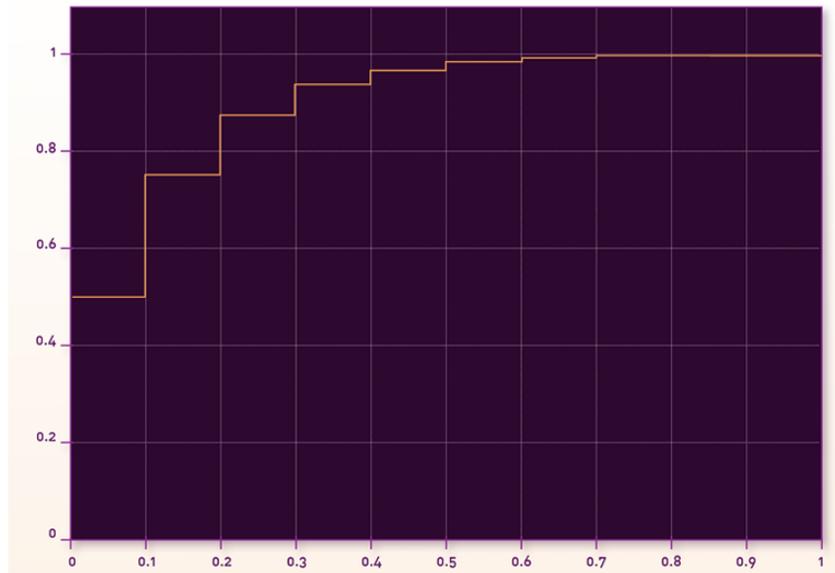
$$F(z) = 1 - (1 - z^{-1}) = z^{-1}$$

De tal manera que el controlador queda como:

$$G_d(z) = \frac{F(z)}{G_p(z)[1-F(z)]}$$

Finalmente:

$$G_D(z) = \frac{1}{K0.368} \frac{(1-0.368z^{-1})}{(1+0.718z^{-1})}$$

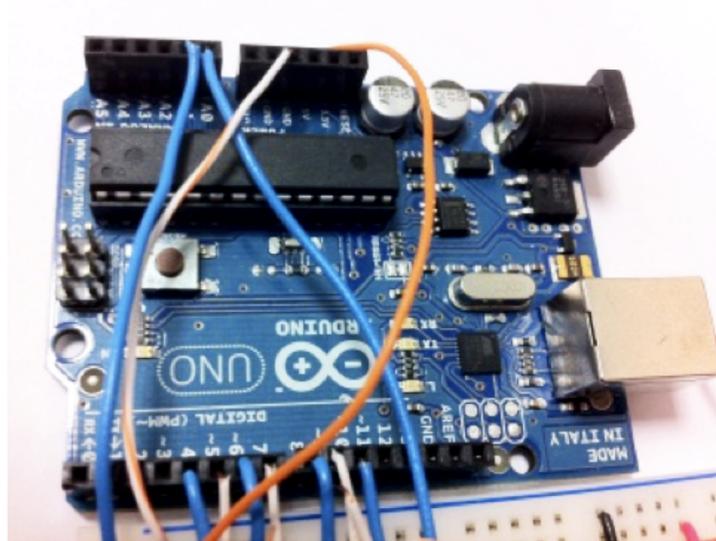


En este tema hemos visto un controlador exclusivo de tiempo discreto, es decir, en general no es físicamente realizable en tiempo continuo. Este tipo de controladores, llamados también correctores, es de fácil instrumentación en un microcontrolador, por ejemplo.

13.5 El PID discreto

Los controladores tipo PID reúnen las tres acciones básicas de **control**: proporcional, integral y derivativa. Son muy utilizados en la industria pues es posible instrumentarlos sin tener conocimiento preciso del modelo matemático de la planta a controlar. El modelo matemático de un PID está dado por:

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$$



De donde podemos obtener la función de transferencia:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left[1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right]$$

Existen métodos para sintonizar este tipo de **controladores** como los desarrollados por Ziegler y Nichols y, si se tiene el modelo matemático de la planta, entonces es posible ajustar los parámetros siguiendo requerimientos específicos de comportamiento de la salida.



A pesar de tener las ventajas mencionadas, como que es posible instrumentarlo sin conocimiento *a priori* de la dinámica del sistema, y que reúne las tres acciones básicas de control, también tiene algunas desventajas:

» **Saturación de la acción derivativa:** la salida se hace muy grande ante cambios repentinos de la señal de error. Se soluciona incluyendo en el término derivativo una constante de relajación $\alpha = 0.05 \dots 0.2$.

» **Integral windup:** debido a la integración de la señal de error. Si hay un sobreimpulso, la acción integral sumará estos errores positivos para generar la acción integral necesaria. Si el error se hace negativo, entonces la dirección de la señal de control no variará para compensar este error mientras la suma del error previo sea dominante.

Para poder instrumentar un PID de forma discreta, será necesario discretizar los términos involucrados en el modelo matemático.



De esta manera podemos comenzar con el término integral, aplicando la aproximación trapezoidal:

$$\frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt \rightarrow \frac{T}{T_i} \sum_{h=1}^k \frac{e((h-1)T) + e(hT)}{2}$$

El término derivativo se puede aproximar mediante el método de Euler:

$$T_d \frac{de(t)}{dt} \rightarrow \frac{T_d}{T} [e(kT) - e((k-1)T)]$$

Entonces, la expresión para el PID discreto queda:

$$u(kT) = K_p \left\{ e(kT) + \frac{T}{T_i} \sum_{h=1}^k \frac{e((h-1)T) + e(hT)}{2} + \frac{T_d}{T} [e(kT) - e((k-1)T)] \right\}$$

Aplicando transformada Z:

$$U(z) = K_p \left[1 - \frac{T}{2T_i} + \frac{T}{T_i} \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{T_d}{T} (1-z^{-1}) \right] E(z)$$

A esta forma se le conoce como forma posicional o algoritmo de posición para el PID discreto.

Existe una forma alternativa conocida como algoritmo de velocidad en la que se considera la variación de la entrada, es decir: $u(kT) - u((k-1)T)$.

$$U(z) = -K_p Y(z) + K_i \frac{R(z) - Y(z)}{1-z^{-1}} - K_d (1-z^{-1}) Y(z)$$

Nótese que sólo el término del control integral incluye la entrada $R(z)$. Por lo tanto el término integral no se puede excluir del controlador digital si éste se utiliza en la forma de velocidad. Esta forma tiene una serie de ventajas, entre ellas que elimina la saturación del integrador.

Dado que el diseño del PID discreto se diseña con respecto al PID continuo, los parámetros son obtenidos directamente de los métodos de sintonización ya analizados.

Un controlador en un lazo de control se comporta como una computadora diseñada con el propósito de mantener, en un valor determinado, alguna variable física como presión, temperatura, nivel, flujo, velocidad, etc., de procesos industriales típicos.

Al aplicar los controladores PID industriales, la mayor dificultad

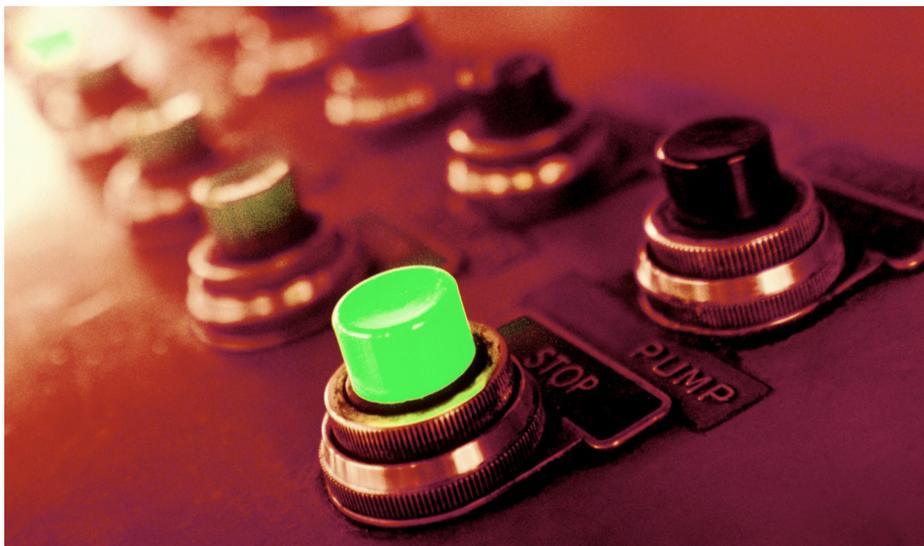
consiste en fijar los valores adecuados de la ganancia (también llamada banda proporcional), la integral del error (también llamada reajuste automático o *reset*) y la derivada del error (anticipatoria o *rate*). Prácticamente, la sintonización de los valores de los parámetros de un PID industrial se realiza con base en los métodos de Ziegler y Nichols o, en algunos casos, también a prueba y error.

En este tema se ha tratado la discretización y estructuras posibles para un controlador Proporcional-Integral-Derivativo. Este tipo de controladores son ampliamente utilizados en la industria y su sintonización no es muy complicada.

Conclusión del capítulo 13

En este capítulo hemos visto diferentes estrategias de control para lograr objetivos específicos. Algunas de ellas son conceptualmente similares a las utilizadas para sistemas de control continuos; otras, como el controlador prototipo mínimo, son específicas para sistemas discretos. Todas ellas se utilizan según los requerimientos que se especifiquen.

Los objetivos de control más importantes son el llegar rápido y sin errores a la referencia. Esto se logra considerando las herramientas que se tienen particularmente; es importante considerar las diferentes opciones para poder lograr los requerimientos.



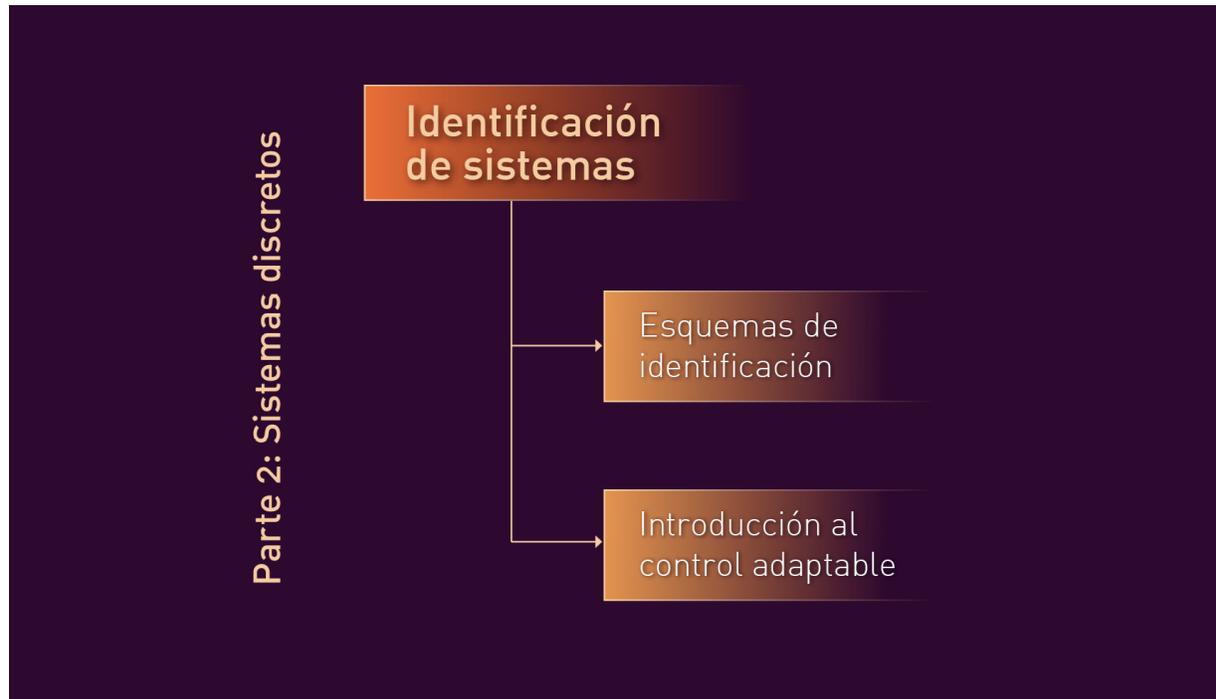
Actividades del capítulo 13

- [Actividad integradora](#)

Recursos del capítulo 13

- Program CC (2011).

14. Controladores discretos



Es común que no se cuente con el modelo matemático de un proceso en particular. Normalmente no se venden los equipos con las ecuaciones dinámicas que gobiernan su comportamiento y, para hacer control sobre estos equipos, muchas veces se necesita el modelo matemático, pues con base en él es como se diseñan varios controladores.

En este capítulo se trata el problema de encontrar el modelo matemático de una planta a partir solamente de mediciones de entrada y salida del sistema. Esta herramienta es extraordinariamente útil cuando se requiere tanto analizar el comportamiento como diseñar un controlador adecuado a los requerimientos de diseño.

La identificación de sistemas no solamente es útil para tener la función de transferencia del sistema sino que también, considerando los mismos algoritmos, es posible diseñar controladores que puedan ajustar sus propios parámetros a fin de lograr un objetivo de control, a esta rama del control se le llama “control adaptable”. En este

capítulo se trata brevemente al control adaptable de sistemas lineales.

14.1 Esquema de identificación

La identificación de sistemas consiste prácticamente en la estimación de los parámetros de una planta física. Para este libro se consideran sistemas lineales, por lo que podemos suponer que, en general, podemos escribir la función de transferencia de una planta como sigue:

$$P(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + L + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + L + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Se considera la planta causal y suponemos que $A(s)$ es **estrictamente Hurwitz**, lo cual nos permitirá hacer pruebas con salidas acotadas. También suponemos $A(s)$ y $B(s)$ coprimos, es decir, que no comparten raíces. Ahora podemos hacer el planteamiento del problema.



Problema: Identificar a y a , para $i = 1, \dots, n$ a partir de mediciones de entrada-salida del sistema.

Antes de comenzar con la parte central de la identificación, es importante aclarar que, dados los algoritmos que se usarán, es necesario escribir la función de transferencia de una forma específica, a este proceso se le llama “parametrización”.

Considere la función de transferencia:

$$y = \frac{B(s)}{A(s)} u = \frac{B(s)}{A(s) - \Lambda(s) + \Lambda(s)}$$



Se ha incluido un polinomio $\Lambda(s) = s^n + \lambda_1 s^{n-1} + 2s^{n-2} + \dots + \lambda_n$ estrictamente Hurwitz que nos ayudará en este proceso. Cabe aclarar aquí que se requieren cambiar los parámetros de la planta “ficticia” con respecto al tiempo, para ajustarlos de acuerdo a la minimización del error entre los parámetros reales de la planta real y los parámetros estimados de la planta ficticia. Por supuesto, la planta ficticia estará simulada dentro de un programa de computadora para así poder encontrar los parámetros reales.

Procederemos ahora con la parametrización de la planta:

$$\Lambda(s)y = [\Lambda(s) - A(s)]y + B(s)u$$

$$y = \frac{\Lambda(s) - A(s)}{\Lambda(s)} y + \frac{B(s)}{\Lambda(s)} u$$

$$y = \frac{(\lambda_1 - a_1)s^{n-1} + \dots + (\lambda_n - a_n)}{\Lambda(s)} y + \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{\Lambda(s)} u$$

$$y = \left[(\lambda_n - a_n) \quad \dots \quad (\lambda_1 - a_1) \quad b_n \quad \dots \quad b_1 \right] \frac{1}{\Lambda(s)} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix} y \\ \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix} u \end{bmatrix}$$

Al vector:

$$\theta_*^T = \left[(\lambda_n - a_n) \quad \dots \quad (\lambda_1 - a_1) \quad b_n \quad \dots \quad b_1 \right] \in \mathbb{R}^{2n}$$

Se le llama vector de parámetros. Aquí hacemos la distinción entre los parámetros de la planta (desconocidos) como θ_* y los parámetros de la planta ficticia que serán funciones del tiempo $\theta(t)$.

Al vector:

$$\phi = \left[\phi_1^T \quad \phi_2^T \right]^T$$

Le llamaremos regresor y siempre está formado por señales medibles o generables, a partir de la entrada y la salida de la planta real.

$$\phi_1 = \frac{1}{\Lambda(s)} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix} y; \quad \phi_2 = \frac{1}{\Lambda(s)} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix} u$$

Así, podemos parametrizar la planta, lineal en los parámetros:

$$y(t) = \phi^T(t) \theta_*$$

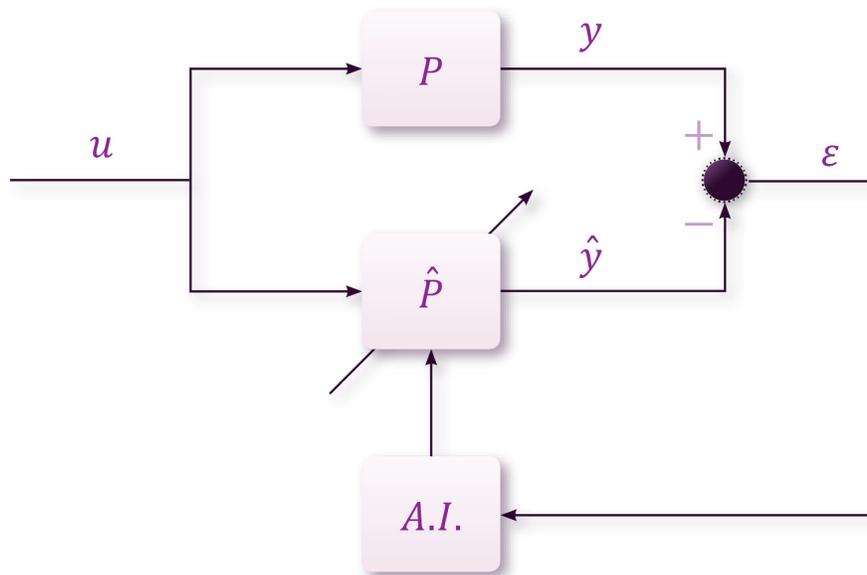
Ahora necesitamos una regla de ajuste paramétrico con respecto al tiempo. Una vez que se tiene la planta parametrizada, esto se puede realizar empleando algoritmos de estimación como mínimos cuadrados, o máximo de verosimilitud, por ejemplo. Por su simplicidad se ha seleccionado el algoritmo gradiente para este efecto.

Algoritmo gradiente

El algoritmo gradiente es sumamente sencillo de instrumentar y además presenta buenas características de estabilidad. El algoritmo gradiente es, precisamente, un mecanismo de ajuste entre los parámetros de la planta ficticia que varían con respecto al tiempo y los parámetros de la planta real. Se puede escribir de la siguiente manera:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma \phi \varepsilon$$

para $\gamma > 0$. El error de identificación $\varepsilon = y - \hat{y}$ también llamado error de salida, puede llegar a ser cero aun sin que los parámetros sean iguales, sobre todo en estado estacionario, de tal manera que necesitamos otra condición para garantizar la convergencia paramétrica.



Se necesita una condición para garantizar la convergencia paramétrica, a esta condición se le llama condición de excitación persistente o PE.

La condición de excitación persistente se refiere a que la entrada debe ser suficientemente rica en frecuencias para excitar todos los modos de comportamiento del sistema. Esta condición resulta en que se debe aplicar una entrada PE, esto es, se deberá incluir una frecuencia por cada parámetro (recordar que una señal seno tiene dos frecuencias). Entonces, si se requieren identificar dos parámetros, será suficiente con introducir una señal tipo $A \sin \omega t$. Para cuatro parámetros se podría aplicar una señal del tipo de $A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t$ para ω_1 y ω_2 dos frecuencias inconmensurables, es decir, que una no sea múltiplo de la otra.

Otro punto importante aquí es aclarar que, inicialmente, se tiene que proponer el orden del sistema a identificar para poder construir una función de transferencia ficticia. Existen algoritmos para esto pero, en general, es posible identificar el orden del sistema a partir de la respuesta al escalón, al menos inicialmente.



Ejemplo: Suponga una planta lineal de primer orden con parámetros desconocidos.

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b^*}{s + a^*}$$

Encuentre una parametrización y proponga un algoritmo para identificar sus parámetros.

Solución: Primero parametrizamos la planta:

$$Y(s) = \frac{b}{s + a + (s + \lambda) - (s + \lambda)} U(s)$$

Que se puede escribir como:

$$(s + \lambda) Y(s) = [(s + \lambda) - (s + a)] Y(s) + bU(s)$$

Entonces:

$$Y(s) = \frac{\lambda - a}{s + \lambda} Y(s) + \frac{b}{s + \lambda} U(s)$$

Ahora podemos separar linealmente los parámetros de las señales del regresor:

$$Y(s) = \begin{bmatrix} \lambda - a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+\lambda} U(s) \\ \frac{1}{s+\lambda} Y(s) \end{bmatrix}$$

Identificamos entonces el vector de parámetros:

$$\theta_*^T = \begin{bmatrix} \lambda - a & b \end{bmatrix}$$

Y el regresor:

$$\phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+\lambda} Y(s) & \frac{1}{s+\lambda} U(s) \end{bmatrix}^T$$

Finalmente podemos escribir la ecuación como:

$$y(t) = \phi^T(t)\theta^*$$

Nótese que se ha realizado la parametrización sobre la planta real:

$$y(t) = \phi^T(t)\theta^*$$

Utilizamos esta parametrización para instrumentar la planta ficticia:

$$\hat{y}(t) = \phi^T(t)\hat{\theta}(t)$$

Podemos ahora encontrar el error de estimación:

$$\varepsilon = \hat{y} - y = \phi^T(t)[\hat{\theta}(t) - \theta^*] = \phi^T(t)\tilde{\theta}(t) = \phi^T(t)\hat{\theta}(t) - y$$

Que será utilizado en el algoritmo de identificación: $\dot{\theta} = -\gamma\phi\varepsilon$;
 $\gamma > 0$

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}(\lambda - a) \\ \frac{d}{dt}b \end{bmatrix} = -\gamma \begin{bmatrix} \frac{1}{s+\lambda} Y(s) \\ \frac{1}{s+\lambda} U(s) \end{bmatrix} [\phi^T(t)\hat{\theta}(t) - y]$$

Este último sistema dinámico se implementa dentro de una computadora mediante un programa de simulación que permitirá la convergencia de los parámetros de la planta ficticia a los parámetros de la planta real.

Es importante notar que se involucran un par de parámetros de control en el algoritmo; uno es la ganancia del algoritmo γ que deberá ser un número positivo para que el algoritmo sea estable y se determina experimentalmente. Un buen comienzo es asignar $\gamma = 15$, por ejemplo.

El otro parámetro es λ , es decir el coeficiente del polinomio auxiliar que se utiliza en la parametrización de la planta. Este coeficiente (que para el caso de primer orden coincide con el polo del **filtro**) se asigna de tal manera que todas las raíces de este polinomio tengan parte real estrictamente negativa. Dado que el filtro no debería alterar la dinámica de forma significativa, se recomienda que los polos del filtro estén lo más alejado posible del origen, es decir, que el filtro tenga una dinámica rápida para no alterar la dinámica del propio algoritmo de identificación.

En este tema se ha tratado una forma eficiente para obtener el modelo matemático de un sistema a través de mediciones de entrada y salida del mismo. Esto se logra proponiendo el orden de una función de transferencia y, por medio de un mecanismo de ajuste, se identifican los parámetros de la función de transferencia, obteniendo así el modelo matemático del sistema.

LIGAS DE INTERÉS

Scilab: the free software for numerical computation (2011).

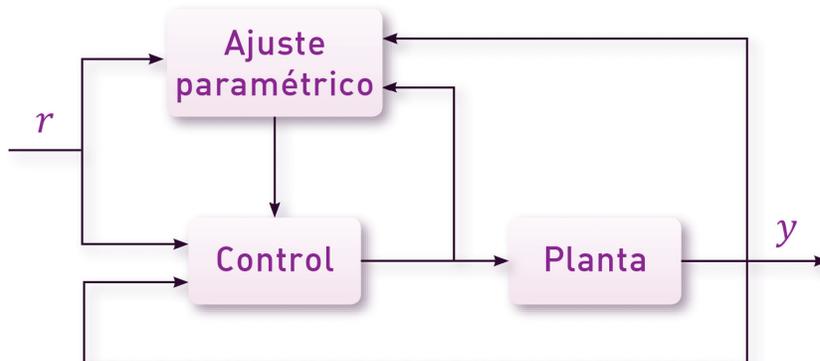
Recuperado de <http://www.scilab.org/>

14.2 Introducción al control adaptable

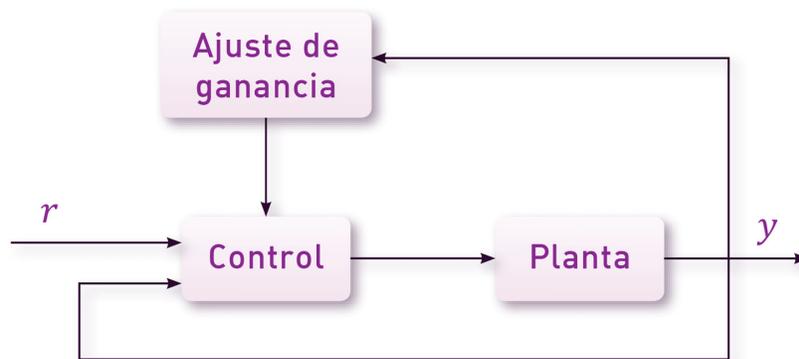
En general, se han considerado controladores en los que sus parámetros son obtenidos con base en el modelo matemático de la planta, además, suponemos que los parámetros de la planta están identificados de manera precisa. Esto no siempre es factible; en un ejemplo simple, tomemos una resistencia, tenemos el valor nominal pero, para tener el valor preciso, se necesita un multímetro. En parámetros más complicados de medir (la fricción en un robot, por ejemplo) en general tendremos lo que llamamos incertidumbre paramétrica, sensibilidad a perturbaciones y/o dinámicas no modeladas en un sistema real.

El control adaptable busca precisamente subsanar la incertidumbre paramétrica, es decir, se busca diseñar controladores que puedan ajustar sus parámetros de manera que, si se tiene algún

error en la precisión de los parámetros o, en el caso extremo que no se tengan estos valores, el mismo controlador compense esta falta de precisión y logre aun así los objetivos de diseño.



Existen diferentes esquemas de control adaptable: el ajuste de ganancia (*gain scheduling*), el control adaptable con modelo de referencia (**MRAC**) y otros más. En este tema analizaremos el control adaptable con modelo de referencia.



Para iniciar la discusión, consideremos un sistema de primer orden:

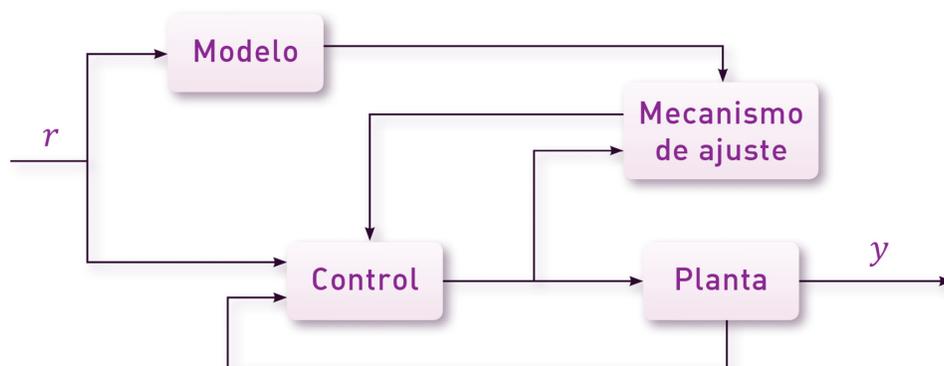
$$\dot{y} = -ay + bu$$

Y un modelo de referencia:

$$\dot{y}_m = -a_m y_m + b_m u_c$$

Requerimos que la planta original se comporte como el modelo de referencia, entonces proponemos un controlador de la forma:

$$u(t) = \theta_1 u_c - \theta_2 y$$



Entonces:

$$\dot{y}_m = -ay + b(\theta_1 u_c - \theta_2 y) = -(a + b\theta_2)y + b\theta_1 u_c$$

Los parámetros ideales serían:

$$\theta_1^* = \frac{b_m}{b} \quad \text{y} \quad \theta_2^* = \frac{a_m - a}{b}$$

Podríamos instrumentar esta ley de control pero el problema que nos planteamos es que a y b de la planta son parámetros no conocidos, es decir, no tenemos realmente el modelo matemático del sistema. Entonces consideramos el error:

$$e = y - y_m$$

Sabiendo que:

$$\dot{y} = -(a + b\theta_2)y + b\theta_1 u_c$$

Aplicamos transformada de Laplace:

$$sY(s) = -(a + b\theta_2)Y(s) + b\theta_1 U_c(s)$$

Entonces podemos escribir:

$$Y(s) = \frac{b\theta_1}{s + a + b\theta_2} U_c(s)$$

Entonces, para determinar los parámetros ajustables del controlador, proponemos una variación del algoritmo gradiente (Regla MIT, Phil Whitaker):

$$\dot{\theta} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta}$$

Ahora considere el modelo:

$$Y_m(s) = \frac{b_m}{s + a_m} U_c(s)$$

Entonces:

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_1} = \frac{\partial y}{\partial \theta_1} - \frac{\partial y_m}{\partial \theta_1}$$

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_1} = \frac{b}{s + a + b\theta_2} U_c$$

En forma similar:

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_2} = \frac{\partial y}{\partial \theta_2} = - \frac{b^2 \theta_1}{(s + a + b\theta_2)^2} U_c(s)$$

Pero como:

$$Y(s) = \frac{b\theta_1}{s + a + b\theta_2} U_c(s)$$

Entonces:

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_2} = - \frac{b}{s + a + b\theta_2} Y(s)$$

Ahora se pretende aproximar:

$$s + a + b\theta_2 \rightarrow s + a_m$$

Con la ley de adaptación:

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta}$$

Entonces, como los parámetros de la planta son desconocidos, entonces aproximamos:

$$a + b\theta_2 \approx a_m; \quad b \approx \frac{b_m}{\theta_1}$$

Entonces:

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_1} = -\frac{\frac{b_m}{\theta_1}}{s + a_m} u_c; \quad \frac{\partial y}{\partial \theta_2} = \frac{\frac{b_m}{\theta_1}}{s + a_m} y$$

Finalmente las reglas de ajuste quedan:

$$\dot{\theta}_1 = -\gamma \left(\frac{\frac{b_m}{\theta_1}}{s + a_m} u_c \right) e$$

$$\dot{\theta}_2 = -\gamma \left(-\frac{\frac{b_m}{\theta_1}}{s + a_m} y \right) e$$

En este apartado se ha visto una breve introducción al control adaptable utilizando como esquema de control el llamado control adaptable con modelo de referencia. Se utilizan los principios de identificación de sistemas para, en este caso, ajustar los parámetros de un controlador, logrando así adaptación automática de los mismos para lograr un objetivo específico.

LIGAS DE INTERÉS

Laboratorio de control adaptable del MIT (2011).

Recuperado de: <http://web.mit.edu/aclab/>

Conclusión del capítulo 14

En las plantas industriales, es común que no tengamos el modelo matemático de la planta, es decir, normalmente no contamos con la función de transferencia del sistema que deseamos controlar. Cuando esto sucede, tenemos como alternativa proponer un PID que no necesita el modelo matemático del sistema, pero no siempre es viable introducir un PID a una planta que no se conoce, esto puede resultar peor si se inestabiliza la planta.

Por otro lado, para identificar un sistema, basta con medir la salida del sistema para una entrada de excitación persistente. Esto también tiene restricciones: la primera es que, al introducir una entrada oscilatoria para excitar todos los modos del sistema, es importante cuidar que la planta no tenga una respuesta resonante para la o las frecuencias que introduzcamos; este riesgo se reduce normalmente al trabajar a frecuencias bajas. Otro requisito que parece obvio es el que la salida de la planta se pueda medir.

Uno de los temas en los que aún está abierto el problema es el del control adaptable, a pesar de que se tienen variadas aproximaciones, lograr que un controlador pueda sintonizar sus propios parámetros es tema aún de investigación. Se ha resuelto en parte para algunos casos de sistemas lineales, tal como el que se presentó en este capítulo pero, en general, sigue siendo un tema de investigación en el área de control.

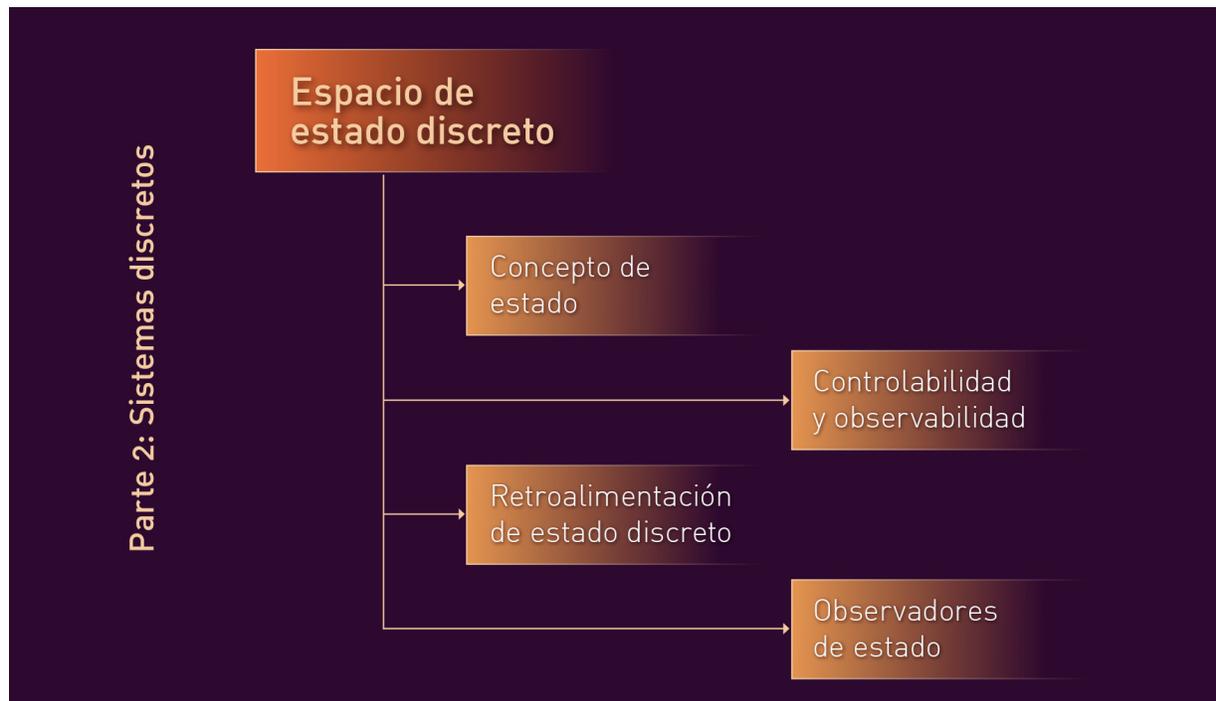
Actividades del capítulo 14

- [Actividad integradora](#)

Recursos del capítulo 14

- [Laboratorio de control adaptable del MIT](#) (2011).
- [Scilab: the free software for numerical computation](#) (2011).

15. Espacio de estado discreto



El análisis en el espacio de estado surgió por la necesidad de analizar y controlar sistemas no lineales, es decir, evitar la dependencia de la transformada de Laplace que es útil solamente para sistemas lineales. Lo mismo sucede con la transformada Z; al analizar sistemas lineales es muy práctica la utilización de esta transformada pero, si el sistema es no lineal, entonces se vuelve obsoleta. Es así como se desarrollan las técnicas en el espacio de estado que, resultan también bastante prácticas para el análisis y diseño de sistemas lineales discretos.

En este capítulo se tratarán las ecuaciones de estado discretas y su solución, también se analizará el problema de control por retroalimentación de estado discreta y el diseño de observadores discretos.

15.1 Concepto de estado discreto

Las técnicas en el espacio de estado parten del concepto de

estado discreto. De la misma manera que en sistemas continuos, el estado es el conjunto mínimo de variables que describen el comportamiento instantáneo de un sistema dinámico.

El espacio de estado es el espacio n -dimensional formado por las variables de estado como coordenadas.

La trayectoria de solución es la órbita formada por los puntos $x(k)$ en el espacio de estado.

Ejemplo: Obtenga una representación en variables de estado de la planta:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z^2 + 1.36z + 0.36}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{Y(z)}{U(z)} &= \frac{1}{z^2 + 1.36z + 0.36} \cdot \frac{X(z)}{X(z)} \\ &= \frac{z^2}{1 + 1.36z^{-1} + 0.36z^{-2}} \cdot \frac{X(z)}{X(z)}\end{aligned}$$

$$U(z) = (1 + 1.36z^{-1} + 0.36z^{-2}) X(z)$$

$$Y(z) = z^{-2} X(z)$$

$$u(k) = x(k) + 1.36x(k-1) + 0.36x(k-2)$$

$$y(k) = x(k-2)$$

Definimos:

$$x_1(k) = x(k-2) \quad x_2(k) = x(k-1)$$

Entonces:

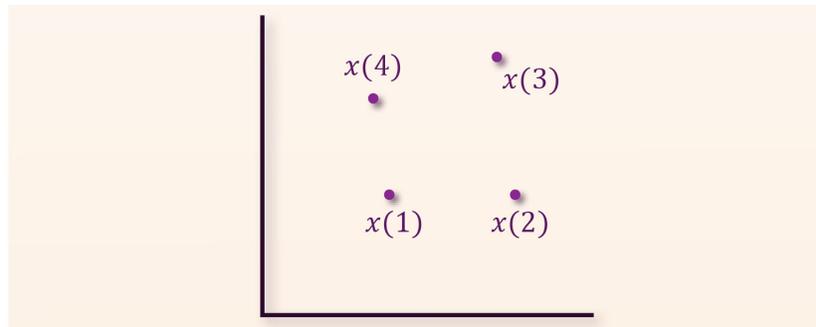
$$x_1(k+1) = x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = -0.36x_1(k) - 1.36x_2(k) + u(k)$$

$$y(k) = x_1(k)$$

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.36 & -1.36 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0] x(k)$$



Ecuación de estado

Considere un sistema dinámico en tiempo continuo:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

La solución está dada por :

$$x(t) = \varphi(t)x(t_0) + \int_{t_0}^t \varphi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

con:

$$\varphi(t) = L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$$

Para un sistema discreto, la entrada es constante entre instantes de muestreo:

$$x(t) = \varphi(t)x(t_0) + \left(\int_{t_0}^t \varphi(t-\tau)Bd\tau \right)u(kT)$$

Para $kT \leq t < (k+1)T$. Describiendo la transición de estados solamente en los instantes de muestreo:

$$x[(k+1)T] = \varphi[(k+1)T]x(kT) + \left(\int_{kT}^{(k+1)T} \varphi[(k+1)T-\tau]Bd\tau \right)u(kT)$$

Se obtienen las matrices haciendo $k = 0$:

$$x[(k+1)T] = \underbrace{\varphi[(k+1)T]}_{\varphi(T)}x(kT) + \underbrace{\left(\int_{kT}^{(k+1)T} \varphi[(k+1)T-\tau]Bd\tau \right)}_{\theta(T)}u(kT)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= L^{-1}[(sI-A)^{-1}]_{t=T} = G \\ \theta(T) &= \int_0^T \varphi(T-\tau)Bd\tau = H \end{aligned}$$

La ecuación de estado queda:

$$\begin{aligned} x[(k+1)T] &= \varphi(T)x(kT) + \theta(T)u(kT) \\ x(k+1) &= \varphi(T)x(k) + \theta(T)u(k) \\ x(k+1) &= Gx(k) + Hu(k) \end{aligned}$$

Nótese que $\theta(T)$ y $\varphi(T)$ son matrices constantes.

Ejemplo: Encuentre la ecuación de estado discreta para el

sistema continuo siguiente, suponiendo un periodo de muestreo de un segundo:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [1 \quad 0] x$$

Solución:

$$\varphi(T) = \begin{bmatrix} 2e^{-T} - e^{-2T} & e^{-T} - e^{-2T} \\ -2e^{-T} + 2e^{-2T} & -e^{-T} + 2e^{-2T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6004 & 0.2325 \\ -0.4650 & -0.0972 \end{bmatrix}$$

$$\theta(T) = \begin{bmatrix} 0.5 - e^{-T} + 0.5e^{-2T} \\ e^{-T} - e^{-2T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1997 \\ 0.2325 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.6004 & 0.2325 \\ -0.4650 & -0.0972 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.1997 \\ 0.2325 \end{bmatrix} u(k)$$

Función de transferencia discreta

La función de transferencia discreta puede encontrarse como:

$$G(z) = C(zI - \phi(T))^{-1} \theta(T)$$

Solución de la ecuación de estado discreta

Consideremos la ecuación de estado discreta:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$

Encontramos la solución por iteraciones. Si $k = 0$

$$x(1) = Gx(0) + Hu(0)$$

Para $k = 1$:

$$\begin{aligned}x(2) &= Gx(1) + Hu(1) \\ &= G[Gx(0) + Hu(0)] + Hu(1) \\ &= G^2x(0) + GHu(0) + Hu(1)\end{aligned}$$

Hacemos $k = 2$:

$$\begin{aligned}x(3) &= Gx(2) + Hu(2) \\ &= G[G^2x(0) + GHu(0) + Hu(1)] + Hu(2) \\ &= G^3x(0) + G^2Hu(0) + GHu(1) + Hu(2)\end{aligned}$$

Y así sucesivamente encontramos el valor para $k = n - 1$:

$$x(n) = G^n x(0) + \sum_{j=0}^{n-1} G^{n-j-1} Hu(j)$$

En este apartado se han visto conceptos básicos para la representación de un sistema en forma de ecuaciones de estado en tiempo discreto. Se obtuvo la solución de la ecuación de estado en tiempo discreto y también la función de transferencia, de modo que es posible encontrar una relación entre la ecuación en diferencias (ecuación de estado discreta) y la función de transferencia del sistema en el dominio de Z .

LIGAS DE INTERÉS

Espacio de estado discreto en Scilab (2011).

Recuperado de: http://home.hit.no/~finnh/scilab_scicos/scilab/

15.2 Controlabilidad y observabilidad

Controlabilidad

Considere el sistema:

$$x[(k+1)T] = Gx(kT) + Hu(kT)$$

Se dice que el sistema es **controlable** si existe una señal de control $u(kT)$ seccionalmente constante y definida sobre un número finito de periodos de muestreo tal que, empezando desde cualquier estado inicial, el estado $x(kT)$ puede ser transferido al estado final deseado x_f en n periodos de muestreo.

Partimos de la solución de la ecuación de estado discreta:

$$x(nT) = G^n x(0) + \sum_{j=0}^{n-1} G^{n-j-1} Hu(jT)$$

Desarrollando términos:

$$x(nT) = G^n x(0) + G^{n-1} Hu(0) + G^{n-2} Hu(T) + \dots + Hu[(n-1)T]$$

Podemos reescribir esta última ecuación factorizando los términos

que involucran la entrada:

$$x(nT) - G^n x(0) = \begin{bmatrix} H & GH & \dots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u[(n-1)T] \\ u[(n-2)T] \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Entonces, existirá una entrada que sea capaz de transferir el estado del sistema a un estado arbitrario solo si es posible despejar u de la ecuación anterior, es decir, si se cumple que:

$$\text{Rango} \begin{bmatrix} H & GH & \dots & G^{n-1}H \end{bmatrix} = n$$

donde el rango de una matriz es el número de vectores linealmente independientes. Esta condición equivale a decir que la matriz de controlabilidad M tiene determinante distinto de cero (sólo para sistemas **UEUS**):

$$M = \begin{bmatrix} H & GH & \dots & G^{n-1}H \end{bmatrix}$$

Entonces, para un estado arbitrario $x(nT) = x_f$, existe una secuencia de señales de control $u(0), u(T), u(2T), \dots, u((n-1)T)$ que satisface la ecuación anterior.

Ley de control en tiempo óptimo

La ley de control en tiempo óptimo es aquella entrada de control que transfiere al sistema desde una condición arbitraria $x(0)$ al origen en, a lo mucho, n periodos de muestreo.

Ejemplo: Para el siguiente sistema, encuentre la ley de control en tiempo óptimo. Suponga $T=1s$

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0.6321 \\ 0 & 0.3679 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.3679 \\ 0.6321 \end{bmatrix} u(k)$$

Solución: Partimos de la solución de la ecuación por iteraciones:

$$\begin{aligned} x(1) &= Gx(0) + Hu(0) \\ x(2) &= Gx(1) + Hu(1) = 0 \\ &= G^2x(0) + GHu(0) + Hu(1) \end{aligned}$$

Entonces:

$$x(0) = -G^{-1}Hu(0) - G^{-2}Hu(1)$$

Es decir:

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G^{-1}H & -G^{-2}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{bmatrix}$$

Por lo que la ley de control estará dada por:

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5824 & -1.24361 \\ 0.5824 & 0.2436 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

Observabilidad

Considere el sistema:

$$\begin{aligned} x[(k+1)T] &= Gx(kT) \\ y(kT) &= Cx(kT) \end{aligned}$$

El sistema es completamente observable si, dada la salida $y(kT)$ en un intervalo finito de periodos de muestreo, es posible determinar el estado inicial $x(0)$. Para determinar la observabilidad del sistema partimos de la solución de la ecuación de estado. discreta:

$$\begin{aligned}x(kT) &= G^k x(0) \\ y(kT) &= CG^k x(0)\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}y(0) &= Cx(0) \\ y(T) &= CGx(0) \\ &\vdots \\ y[(k-1)T] &= CG^{n-1}x(0)\end{aligned}$$

Entonces, podemos escribir la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(T) \\ \vdots \\ y[(k-1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix} x(0)$$

Entonces, definimos la matriz de observabilidad:

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix}$$

Si se cumple que $\text{Rango}[N] = n$ o para sistemas UEUS se cumple que $|N| \neq 0$, entonces, es posible determinar el estado inicial $x(0)$ a partir de mediciones de la salida.

Ejemplo: Determine si el siguiente sistema es observable:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.6004 & 0.2325 \\ -0.4650 & -0.0972 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.1997 \\ 0.2325 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = [1 \quad 0]x(k)$$

Solución: Encontramos la matriz de observabilidad:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.6004 & 0.2325 \end{bmatrix}$$

Calculamos:

$$|N| = 0.2325 \neq 0$$

Entonces el sistema es observable.

En este tema se dedujeron y analizaron las condiciones bajo las cuales un sistema es controlable y observable. Estas condiciones son indispensables para el diseño de leyes de control y observadores.

15.3 Control por retroalimentación de estado discreto

Considere un **SLIT** discreto de la forma:

$$x(k+1)=Gx(k)+Hu(k)$$

$$y(k)=Cx(k)$$

Donde A es la matriz que contiene la dinámica del sistema cuyos valores propios λ_i están dados por la ecuación característica:

$$|\lambda I - G| = 0$$

Es posible modificar los modos de comportamiento del sistema mediante una retroalimentación de estado de la forma:

$$u(k) = -Kx(k)$$

Para:

$$K = [K_1 \ K_2 \ L \ K_n]$$

Esto se puede comprobar directamente sustituyendo la ley de

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$

$$x(k+1) = Gx(k) + H[-Kx(k)]$$

$$x(k+1) = (G - HK)x(k)$$

Los valores propios del sistema en lazo cerrado están dados por:

$$|\lambda I - G + HK| = 0$$

De tal forma que es posible seleccionar G arbitrariamente para modificar los modos de comportamiento del sistema controlado.

Ejemplo: Diseñe una ley de control por retroalimentación de estado que haga que el sistema en lazo cerrado tenga los modos de

comportamiento $\lambda=[0.4 \ 0.6]$

$$x(k+1)=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u(k)$$

Solución: Verificamos primero que el sistema sea controlable:

$$rango(M)=rango[H:GH]=rango\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=2=n$$

Una vez confirmado que el sistema es controlable, igualamos ecuaciones características:

$$|\lambda I-G+HK|=(\lambda-0.4)(\lambda-0.6)$$

Así, obtenemos el valor del vector de ganancia:

$$K=[-0.24 \ 1.24]$$

Y construimos la ley de control:

$$u(k)=0.24x_1(k)-1.24x_2(k)$$

En este apartado se propuso la ley de control discreta para reasignación de polos en el espacio de estado. Se ha visto que, dada la controlabilidad del sistema, una simple retroalimentación lineal del estado es suficiente para reasignar la ubicación de los polos en lazo cerrado del sistema.

15.4 Observadores de estado

Considere un SLIT discreto de la forma:

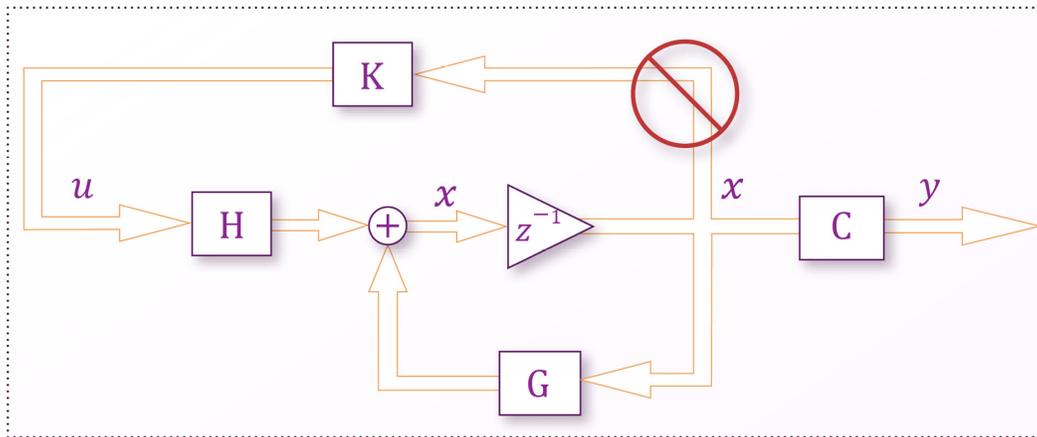
$$\begin{aligned}x(k+1) &= Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) &= Cx(k)\end{aligned}$$

Y la ley de control:

$$u(k) = -Kx(k)$$

La ley de control es una función de los estados, esto implica que es necesario que los estados sean medibles para instrumentar esta ley. Si no se tiene acceso a los estados, es decir, si no son medibles, entonces será necesario estimarlos para lograr la retroalimentación.

A esta estimación se le llama observación y se hace a partir de la salida, por esta razón, se requiere que el sistema sea observable. En este caso, se utiliza el vector de estado “observado” para generar la ley de control.



El estado puede ser determinado solo si el sistema es observable. Supongamos que el estado $x(kT)$ es aproximado por el estado del observador:

$$\tilde{x}(k+1) = G\tilde{x}(k) + Hu(k)$$

$$\tilde{y}(k) = C\tilde{x}(k)$$

Entonces definimos el error:

$$e(k) = x(k) - \tilde{x}(k)$$

$$\Rightarrow e(k+1) = Ge(k)$$

Si A es estable, entonces $e(k) \rightarrow 0$ cuando $(k) \rightarrow \infty$. Pero si A no es estable, entonces la relación anterior no se mantiene, más aún, si se tiene incertidumbre paramétrica, entonces tampoco podremos encontrar los estados a partir del observador planteado.

Entonces conviene utilizar otra aproximación para encontrar los estados, en este caso incluiremos el error de salida.

$$\tilde{x}(k+1) = G\tilde{x}(k) + Hu(k) + K_e [y(k) - C\tilde{x}(k)]$$

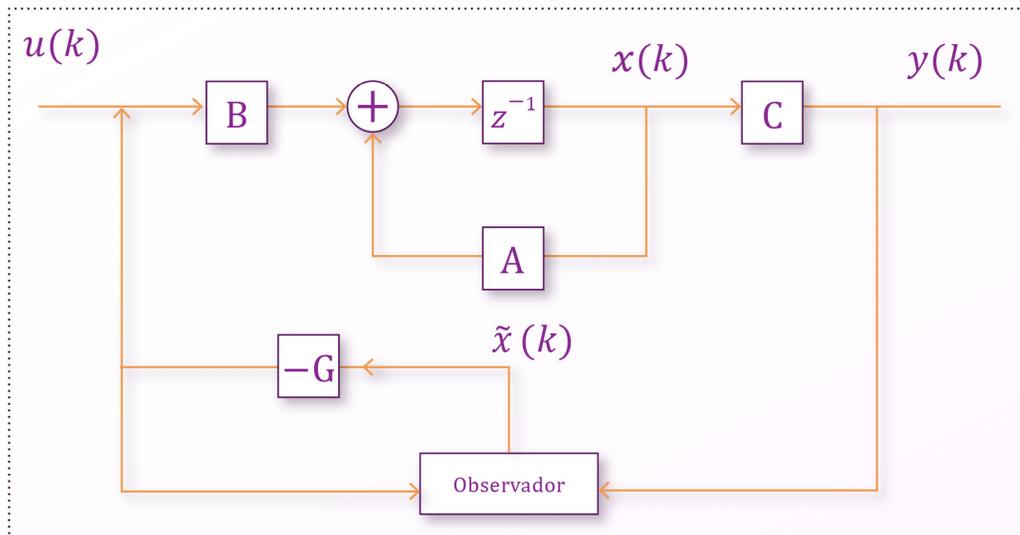
$$\tilde{x}(k+1) = (G - K_e C)\tilde{x}(k) + Hu(k) + K_e y(k)$$

donde K_e es una matriz de pesos. Así, encontramos la dinámica del error:

$$x(k+1) - \tilde{x}(k+1) = (G - K_e C) [x(k) - \tilde{x}(k)]$$

$$e(k+1) = (G - K_e C)e(k)$$

Si la matriz $(A - K_e C)$ es estable, entonces el error converge a cero para cualquier error inicial $e(0)$. Es posible escoger arbitrariamente K_e de tal forma que se obtenga una respuesta rápida del error



Ejemplo: Considere el sistema:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & -0.16 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [0 \quad 1]x(k)$$

Diseñe un observador de estado considerando que los valores propios deseados son $\lambda = 0.5 \pm j0.5$. El sistema es observable.

Solución: Consideramos la ecuación de error:

$$e(k+1) = (G - K_e C)e(k)$$

Y la ecuación característica del observador $(G - K_e C)$:

$$|\lambda I - G + K_e C| = \lambda^2 + (k_{e_2} + 1)\lambda + k_{e_1} + 0.16 = 0$$

Comparando con la ecuación característica deseada:

$$\lambda^2 - \lambda + 0.5 = 0$$

Tenemos:

$$K_e = \begin{bmatrix} 0.34 \\ -2 \end{bmatrix}$$

De tal forma que la dinámica del observador está dada por:

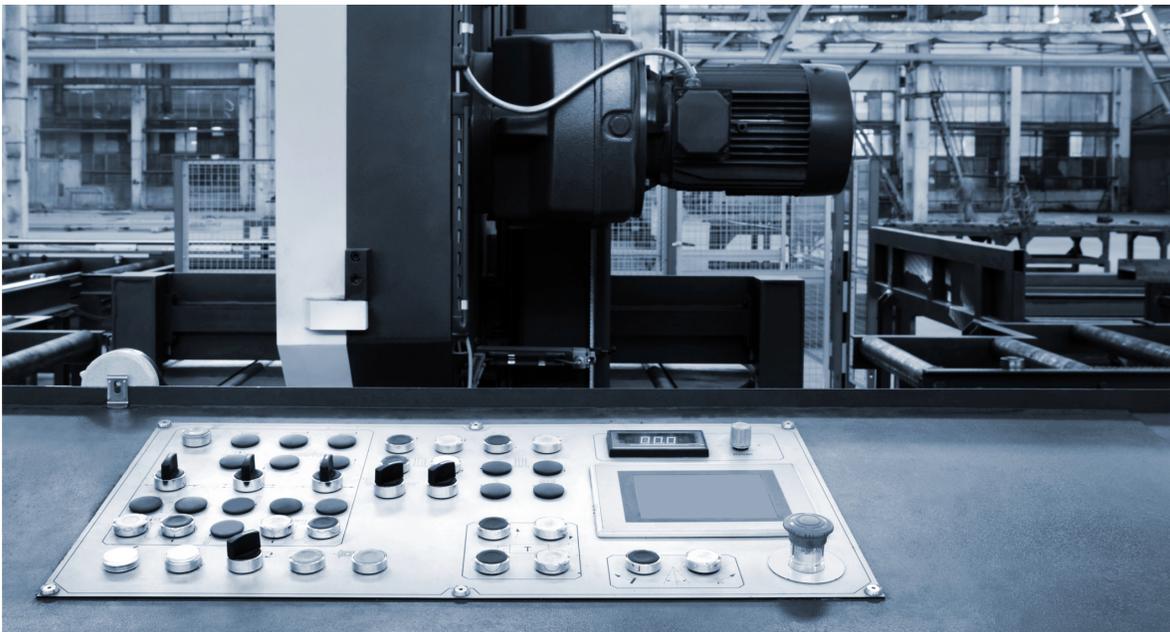
$$\tilde{x}(k+1) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -0.16 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.34 \\ -2 \end{bmatrix} [0 \quad 1] \right\} \tilde{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0.34 \\ -2 \end{bmatrix} y(k)$$

En este tema se ha diseñado un observador de estados que será útil cuando no se puedan obtener mediciones de alguno de los estados del sistema y se necesite realizar una retroalimentación de estado para controlarlo. El diseño de observadores toma como base que el sistema sea observable para poder generar estados estimados del sistema original.

Conclusión del capítulo 15

En este capítulo hemos visto las herramientas para analizar y controlar un sistema en forma de ecuaciones de estado. Hemos visto cómo los conceptos de controlabilidad y observabilidad son indispensables para encontrar leyes de control y observadores.

El obtener leyes de control por retroalimentación de estado permite instrumentar de manera muy sencilla controladores para sistemas discretos vía **microcontroladores** o computadoras con sistemas de entrada/salida de datos. Además, cuando no es posible medir algún estado del sistema, es posible también (previo análisis de observabilidad) simular el sistema dentro de una **PC** o un microcontrolador a fin de contar con un observador que proporcione los estados necesarios para instrumentar la ley de control.



Actividades del capítulo 15

- [Actividad integradora](#)

Recursos del capítulo 15

- Espacio de estado discreto en Scilab (2011).
- Program CC (2011).
- [Scilab: the free software for numerical computation](#) (2011).

Glosario general

A

Amplificador operacional

Circuito integrado con dos entradas y una salida, comúnmente usado para realizar operaciones matemáticas.

Antitransformada Z

Transformada Z inversa.

C

Caos

Tipo de comportamiento, aparentemente aleatorio, presente en algunos sistemas no lineales.

Cota

Límite.

D

Diagrama de cuerpo libre

En un sistema mecánico, es un diagrama en el que se consideran todas las fuerzas aplicadas sobre un cuerpo rígido aislado.

Diferencia de una función

Si $f(t)$ es una función de $t \in \mathbb{R}$, su diferencia (hacia atrás) es $f(t) - f(t-h)$, representa el cambio de una función en tiempo discreto.

E

Ecuación diferencial

Igualdad que contiene derivadas, diferenciales y/o integrales. Utilizada como modelo matemático para representar el

comportamiento de un sistema dinámico.

Ecuación en diferencias

Igualdad que contiene diferencias de funciones.

EDO

Ecuación diferencial ordinaria.

Estrictamente Hurwitz

Se refiere a un polinomio cuyas raíces tienen parte real estrictamente negativa.

F

Factor de amortiguamiento relativo ξ :

Parámetro adimensional proporcional al amortiguamiento en un sistema físico. Es importante aclarar que existen componentes que se comportan como amortiguadores a pesar de que no se trate de un sistema mecánico (resistencia).

Filtro

Función de transferencia.

Frecuencia natural ω_n

Es la frecuencia en radianes por segundo a la que oscila un sistema en vibración libre.

Frecuencia natural amortiguada ω_d

Frecuencia a la que oscila el sistema sin una fuerza oscilante externa pero considerando que existe un amortiguador,

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

Función de transferencia

Cociente de la salida con respecto a la entrada de un sistema físico.

Se obtiene a partir de la transformada de Laplace de la ecuación que modela el sistema, considerando condiciones iniciales nulas.

G

Ganancia

Valor constante multiplicativo utilizado para variar las raíces del plímonio característico de lazo cerrado.

I

Integrador

Circuito formado por un amplificador operacional, una resistencia y un capacitor en la retroalimentación a la entrada negativa.

L

Lugar geométrico

Es un conjunto de puntos en un espacio que satisfacen características específicas.

M

MRAC

Model Reference Adaptive Control o control adaptable con modelo de referencia.

Modelo matemático

Es, en general, cualquier abstracción de la realidad. Particularmente, en ingeniería de control, se trata de una ecuación diferencial (o en diferencias) que representa el comportamiento de un sistema físico que cambia con respecto al tiempo.

P

PID

Es una estrategia popular de control que por el tipo de acciones que realiza se denomina proporcional-integral-derivativo.

Plano de Argand

Plano formado por la parte real y la parte imaginaria de un número complejo como coordenadas.

Plano-s

Es el plano complejo formado por $\text{Re}(s)$ e $\text{Im}(s)$ como coordenadas.

Polinomio complejo

Polinomio cuyos coeficientes pueden ser números complejos.

Polinomios coprimos

Polinomios que no comparten raíces.

Polos de lazo cerrado

Raíces de la ecuación característica de lazo cerrado.

R

ROC

Retenedor de orden cero.

RPO

Retenedor de primer orden.

S

Sintonización

Ajuste de los parámetros de un controlador para lograr un objetivo específico.

Sistema de control

Conjunto de elementos interconectados para lograr un objetivo de

control.

Sistema lineal

Aquél que puede describirse mediante una ecuación diferencial lineal.

Sistema no lineal

Aquél cuyas ecuaciones dinámicas son no lineales.

SLIT

Sistema lineal, invariante en tiempo.

T

Transformada de Laplace

Es una transformación lineal que se realiza sobre una función real. El mapeo es: con $f(t)$ una función de una variable real t y el núcleo de transformación e^{-st} para s una variable compleja. Un uso importante de esta transformada es para representar una ecuación diferencial como una ecuación algebraica.

Transformada de Tustin

Transformada bilineal.

V

Vibración libre

Es la vibración de un sistema físico sin una fuerza oscilante externa ni un amortiguamiento.

Referencias

- Boylestad, R. y Nashelski, L. (2009). Electrónica: Teoría de circuitos y dispositivos electrónicos (10ª ed.) México: Pearson Educación.
- Brogan, W. (1990). Modern control theory (3a ed.) Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall
- Dorf, R.C. y Bishop, R.H. (2007). Modern control systems. New York, NY: Prentice Hall.
- Friedland, B. (1996). Advanced control system design. New York, NY: Prentice Hall.
- Franklin, G.F, Powell, J.D. y Workman, M.L. (1997). Digital control of dynamic systems (3a ed.). Menlo Park, CA: Addison-Wesley.
- Goldstein, H. (2002). Mecánica clásica. (2 a ed.). España: Reverte.
- Goodwin, G. y Payne, R. (1977). Dynamic systems identification: Experiment design and data analysis. New York, NY: Academic Press.
- Hernández Gaviño, H. (2010). Introducción a los sistemas de control. México: Pearson Educación.
- Kamen, E.W. y Heck, B.S. (2008). Fundamentos de señales y sistemas. D.F., México: Pearson Educación.
- Kuo, B. (1995). Digital control systems (2a ed.). New York, NY. Oxford University Press.
- Narendra, K.S. y Ortega, O. (1991). Advances in adaptive control. USA: IEEE.
- Nise, N. (2000). Sistemas de control para ingeniería. México: CECOSA
- Ogata, K. (2006). Ingeniería de control moderna. (4a. ed.). New Jersey: Prentice Hall.

- Raven, F.H. (1987). Automatic control engineering. (4a ed.). Singapur: McGraw-Hill.
- Routh, E.J. (1975). Treatise on the stability of a given state of motion. En Fuller, A.T. (ed.), Stability of motion. London, England: Taylor & Francis. (Reimpreso de Treatise on the stability of a given state of motion, 1877, London England: MacMillan).
- Saff, E.B. y Snider, A.D. (2003). Fundamentals of complex analysis (3a ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- Sastry, S. y Bodson, M. (1989). Adaptive control: Stability, convergence and robustness. Englewood Cliffs, NJ: PrenticeHall.
- Takahashi, T. (1990). Ecuaciones en diferencias con aplicaciones. D.F., México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Wunsch, D. (1999). Variable compleja con aplicaciones (2a ed.). D.F., México: Pearson Educación.
- Ziegler, J.G y Nichols, N.B. (1942). Optimum settings for automatic controllers. En Transactions of the ASME, 64, pp. 759-768.

Aviso legal

González Hernández, Hugo Gustavo

Sistemas de control en tiempo continuo y discreto

p. cm.

1. Sistemas de control
2. Sistemas de tiempo discreto
3. Control automático

LC: TJ213.75 Dewey: 372.358

eBook editado, diseñado, publicado y distribuido por el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey.

Se prohíbe la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio sin previo y expreso consentimiento por escrito del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey.

D.R. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, México 2013.

Ave. Eugenio Garza Sada 2501 Sur Col. Tecnológico C.P. 64849 | Monterrey, Nuevo León | México.

ISBN: 978-607-501-168-4

Edición a cargo de la Editorial Digital del Tec de Monterrey

Diseño y producción tecnológica: Tecnología Educativa de la Universidad Virtual del Sistema Tecnológico de Monterrey

Primera edición: agosto de 2013