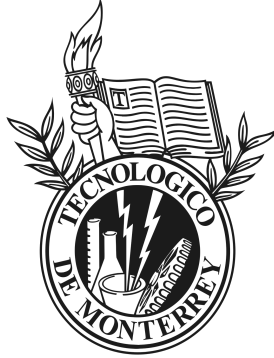


INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES
DE MONTERREY
Campus Ciudad de México



ESTUDIO DE LA TRANSICIÓN DE FASE DE MCFs
EN UNA UNIDAD CILÍNDRICA DE ALMACENAMIENTO TÉRMICO:
TEORÍA Y EXPERIMENTO

Tesis presentada por

Valter Silva Nava

sometida a la
Escuela de Ingeniería y Ciencias
como un requisito parcial para obtener
el grado académico de

Maestro en Ciencias
en
Ciencias de Ingeniería

Tlalpan, Ciudad de México, México, 5 de Diciembre de 2020

Dedicatoria

para Jennifer...
por un mundo mejor en el que sigamos juntos

Reconocimientos

Dr. José Antonio Otero Hernández
Dr. Ernesto Manuel Hernández Cooper
Dr. Francisco Castillo Aranguren
Dr. Jesús Enrique Chong Quero
MSc. Suset Graciella Rodríguez Alemán
Ing. Jesús Ricardo Zamudio Gómez

Gracias por su apoyo, consejos y discusiones para el desarrollo de este proyecto.

Resumen

El fenómeno físico del cambio de fase líquido-sólido que ocurre en los materiales de cambio de fase (MCF) se estudia con mucho interés para el área del almacenamiento de energía térmica por calor latente. Los estudios tanto numéricos como experimentales buscan hacer más eficientes los sistemas de almacenamiento de energía térmica (SAET) mediante la eficiencia del uso de los MCF así como de la disminución de las pérdidas o fugas de energía del sistema.

Esta tesis muestra una comparativa entre dos modelos isobáricos teóricos, de los cuales sólo uno considera la masa total constante, y los datos obtenidos experimentalmente. Ambos modelos buscan obtener el perfil de temperaturas y el movimiento de la interfase en estado transiente, utilizando el método de diferencia finita con esquema implícito y condiciones de frontera de Dirichlet. Se basan en modelos teóricos en coordenadas cartesianas, los cuales se extendieron a coordenadas cilíndricas para adecuarlos al SAET que se construyó.

Los resultados obtenidos se compararon y analizaron, mostrando conclusiones que apoyan la hipótesis planteada y que abren un panorama a investigaciones futuras donde se puedan considerar otras propiedades termofísicas que afectan directa o indirectamente al sistema.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.1.1. Breve Historia de la energía y su relación con la tecnología	1
1.1.2. Recursos energéticos	2
1.1.3. Fuentes de energía no renovables	3
1.1.4. Fuentes de energía renovables	3
1.2. Motivación	5
1.3. Pregunta de Investigación	7
1.4. Hipótesis	7
1.5. Objetivo General	7
1.6. Objetivos Específicos	7
1.7. Principales contribuciones	8
2. Estado del Arte	9
2.1. Materiales de Cambio de Fase (MCF)	9
2.2. Clasificación de los MCF	9

2.3.	Aplicaciones de los MCF	12
2.4.	Sistema de Almacenamiento de Energía Térmica (SAET)	12
2.5.	Comparación entre el almacenamiento de energía térmica sensible, latente y química	13
2.6.	Modelado matemático en SAET cilíndricos	14
3.	Metodología y Desarrollo	16
3.1.	Datos	16
3.2.	Esquema	17
3.3.	Condiciones	18
3.3.1.	Condiciones iniciales	18
3.3.2.	Condiciones de frontera	18
3.4.	Modelo 1: Problema de Stefan	19
3.4.1.	Planteamiento Matemático	19
3.4.2.	Estado Estacionario	23
3.5.	Modelo 2: Problema de Stefan y Conservación de la Masa	26
3.5.1.	Planteamiento Matemático	26
3.5.2.	Estado Estacionario	29
4.	Procedimiento Experimental	30
4.1.	Sistema de Almacenamiento de Energía Térmica (SAET)	30
4.1.1.	Hardware	33
4.1.2.	Software	36

5. Discusión y Resultados	38
5.1. Resultados a 70 °C	42
5.2. Resultados a 80 °C	46
6. Conclusiones	50
6.1. Conclusiones	50
6.2. Investigación Futura	51
A. Procedimiento para la realización de experimentos.	56
B. Dedución de la Condición de Stefan con conservación de la masa total	57
B.1. Derretirse (masa del líquido)	58
B.2. Derretirse (masa del sólido)	59
B.3. Solidificarse (masa del líquido)	61
B.4. Solidificarse (masa del sólido)	62
B.5. Conclusiones de la demostración	64

Índice de cuadros

1.1. Consumo de la energía por habitante en diferentes décadas.	2
1.2. Fuentes no renovables mundiales.	3
1.3. Fuentes renovables de energía.	4
2.1. Tabla comparativa entre MCF orgánicos e inorgánicos.	11
3.1. Algunas propiedades termofísicas de la parafina.	16
3.2. Condiciones iniciales de temperatura en la frontera del líquido.	18
5.1. Datos utilizados en los cálculos de la parafina con $T(r_0, t) = 70^\circ\text{C}$	38
5.2. Datos utilizados en los cálculos de la parafina con $T(r_0, t) = 80^\circ\text{C}$	39
5.3. Error relativo del movimiento de la interfase en ambas temperaturas.	41
B.1. Tabla comparativa de los comportamientos de la masa del líquido y del sólido. . .	64

Índice de figuras

1.1. Línea del tiempo de los avances tecnológicos más significativos relacionados con la energía	1
1.2. Energías renovables	4
1.3. Tipos de sistemas de almacenamiento de energía.	5
1.4. Tipos de sistemas de almacenamiento de energía térmica.	5
1.5. Diagrama esquemático de la transición del cambio de fase de los MCF.	6
2.1. Clasificación general de materiales de cambio de fase (MCF).	10
2.2. Tabla comparativa de las propiedades más comunes usadas en los MCF.	10
3.1. Modelo CAD del Sistema de Almacenamiento de Energía Térmica (SAET)	17
3.2. Vista superior del sistema de almacenamiento térmico.	17
3.3. Nodos básicos para el método implícito.	21
4.1. Base del SAET. a) Base para el SAET con la pintura aplicada y b) Resina epóxica utilizada en el pegado de la base y el cuerpo del SAET.	31
4.2. Ensamble de la base con el cuerpo del SAET. a) Vista externa y b) Vista interna .	31
4.3. Soportes para guiar a los termopares dentro del SAET. a) Soporte externo rígido y b) Soporte guía para los termopares.	31

4.4.	Sistema de almacenamiento de energía térmica (SAET) en su versión final.	32
4.5.	Posición de los termopares en el SAET	33
4.6.	Montaje del experimento.	33
4.7.	a) Calentador metálico con termopares y b) Calentador sostenido por el soporte universal para ingresar en el SAET relleno de parafina como MCF.	34
4.8.	a) Termopares tipo K y b) Diagrama de funcionamiento de un termopar.	34
4.9.	Sistema térmico donde están el controlador, el calentador y el termopar.	35
4.10.	Interfase del software NI LabVIEW2017.	36
4.11.	Diagrama de bloques del proceso de cálculos de MatLab.	37
5.1.	Gráfica del error relativo del movimiento de la interfase en ambas temperaturas.	40
5.2.	Gráficas del cambio de las temperaturas en los sensores con $T(r_0, t) = 70^\circ\text{C}$. a) Modelo isobárico. Ecs. (3.6) y (3.14) y b) Modelo isobárico de masa total constante. Ecs. (3.6), (3.14) y (3.33)	42
5.3.	Gráfica del cambio de las temperaturas en los sensores con $T(r_0, t) = 70^\circ\text{C}$. Datos experimentales.	42
5.4.	Gráfica del cambio de las temperaturas en los sensores con $T(r_0, t) = 70^\circ\text{C}$. Comparativa entre los resultados de los dos modelos usados en este trabajo y los resultados de la experimentación.	43
5.5.	Gráficas del cambio de las temperaturas en los sensores con $T(r_0, t) = 70^\circ\text{C}$. a) Sensor 1 y b) Sensor 2	44
5.6.	Gráficas del cambio de las temperaturas en los sensores con $T(r_0, t) = 70^\circ\text{C}$. a) Sensor 3 y b) Sensor 4	44
5.7.	Gráfica del cambio de las temperaturas en los sensores con $T(r_0, t) = 70^\circ\text{C}$. Sensor 5	44

5.8. Gráficas del movimiento de la interfase con $T(r_0, t) = 70^\circ\text{C}$. a) En un tiempo de 15,000 segundos y b) En un tiempo de 150,000 segundos donde se muestra el estado estacionario.	45
5.9. Gráficas del movimiento del radio exterior para el modelo isobárico de masa total constante con $T(r_0, t) = 70^\circ\text{C}$. a) En un tiempo de 15,000 segundos y b) En un tiempo de 150,000 segundos donde se muestra el estado estacionario.	45
5.10. Gráficas del cambio de las temperaturas en los sensores con $T(r_0, t) = 80^\circ\text{C}$. a) Modelo isobárico. Ecs. (3.6) y (3.14) y b) Modelo isobárico de masa total constante. Ecs. (3.6), (3.14) y (3.33)	46
5.11. Gráfica del cambio de las temperaturas en los sensores con $T(r_0, t) = 80^\circ\text{C}$. Datos experimentales.	46
5.12. Gráfica del cambio de las temperaturas en los sensores con $T(r_0, t) = 80^\circ\text{C}$. Comparativa entre los resultados de los dos modelos usados en este trabajo y los resultados de la experimentación.	47
5.13. Gráficas del cambio de las temperaturas en los sensores con $T(r_0, t) = 80^\circ\text{C}$. a) Sensor 1 y b) Sensor 2	48
5.14. Gráficas del cambio de las temperaturas en los sensores con $T(r_0, t) = 80^\circ\text{C}$. a) Sensor 3 y b) Sensor 4	48
5.15. Gráfica del cambio de las temperaturas en los sensores con $T(r_0, t) = 80^\circ\text{C}$. Sensor 5	48
5.16. Gráficas del movimiento de la interfase con $T(r_0, t) = 80^\circ\text{C}$. a) En un tiempo de 16,000 segundos y b) En un tiempo de 160,000 segundos donde se muestra el estado estacionario.	49
5.17. Gráficas del movimiento del radio exterior para el modelo isobárico de masa total constante con $T(r_0, t) = 80^\circ\text{C}$. a) En un tiempo de 16,000 segundos y b) En un tiempo de 160,000 segundos donde se muestra el estado estacionario.	49
B.1. Diagrama del Sistema de Almacenamiento de Energía Térmica (SAET).	57

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

1.1.1. Breve Historia de la energía y su relación con la tecnología

A lo largo de la historia de la humanidad, la base para la construcción de las civilizaciones ha sido el descubrimiento y dominio de nuevas fuentes de energía, buscando mayor eficiencia y usando tecnología cada vez más avanzada. Se puede considerar que uno de los mayores descubrimientos está relacionado con los métodos y técnicas que se han utilizado para convertir la energía química contenida en la madera en calor y luz.[Jarabo, 1988]

El primero de estos descubrimientos fue el fuego. Al principio no se sabía producir y era la tarea de algunos miembros de las sociedades primitivas el mantenerlo siempre vivo. Fue hasta tiempos relativamente recientes que el fuego se logró dominar en el momento que se pudo producir.[Jarabo, 1988]

La siguiente figura muestra los avances tecnológicos con relación a la energía y sus usos en una línea de tiempo desde el fuego hasta el siglo XVII cuando ocurre la Revolución Industrial.

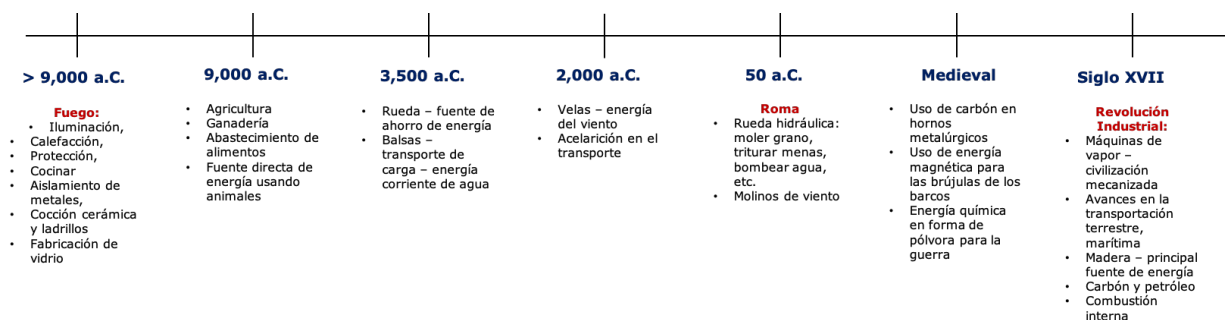


Figura 1.1: Línea del tiempo de los avances tecnológicos más significativos relacionados con la energía

Para la primer década del siglo XX, la demanda de la energía aumentó de manera abrupta, para cumplir con este aumento se duplicó la producción de carbón y cuadruplicó la de petróleo. Del año 1902 a 1907 casi se triplica la producción de energía eléctrica. Hacia el año de 1917 el consumo de electricidad superó por siete veces la cantidad que se consumía a principios de siglo. Después de la Primera Guerra Mundial cayó la producción de carbón. En 1918 su consumo era seis veces mayor al del petróleo, en 1925 sólo el triple y para 1930 sólo el doble. Después de la Segunda Guerra Mundial el consumo del petróleo superó al del carbón y ha crecido ese consumo desde entonces. El último gran descubrimiento de la energía se le puede otorgar a la nuclear. Los primeros estudios sobre los materiales radioactivos se realizaron en Francia y Gran Bretaña a finales del siglo pasado. [Jarabo, 1988]

La Historia le ha enseñado a la humanidad que se requieren muchas decenas de años para pasar de una fuente energética a otra. Primero fue el uso de la madera, luego el del carbón y después el del petróleo.[Jarabo, 1988]

1.1.2. Recursos energéticos

La siguiente tabla nos muestra un cálculo aproximado del consumo de energía eléctrica por habitante a principios de los años 90s, con proyecciones para principios del nuevo milenio y para el año 2050.

Década	Población mundial [millones de habitantes]	Uso de energía eléctrica global [TW]	Uso de energía eléctrica por habitante [kW]
1990	7,000	12	1.7
2000	8,000	24	3
2050	10,500	56	5.3

Cuadro 1.1: Consumo de la energía por habitante en diferentes décadas.

Fuente:[Jarabo, 1988]

Lo que podemos observar de la tabla 1.1 es alarmante, para el año 2050 el consumo de energía eléctrica por habitante en el planeta será de más del triple en promedio. También hay que mencionar que estos valores no son uniformes en todo el mundo, ya que mientras los países desarrollados consumen hasta tres o cuatro veces más energía por habitante, los países en vías de desarrollo pueden consumir una cuarta parte o menos de energía por habitante. Esto demuestra el por qué la energía eléctrica es un factor económico en el sistema global.[Jarabo, 1988]

Algunas de las fuentes de energía son repositorios de energía, por lo general química o nuclear, que puede ser liberada para propósitos útiles, por ejemplo el carbón, petróleo o uranio. Otros tipos de fuentes de energía son flujos de energía que están presentes en la naturaleza y presentan variación en tiempos y lugares particulares, tal es el caso del viento y la energía solar. [Ehrlich and Geller, 2018]

Todas las fuentes de energía tienen algún impacto en el medio ambiente. Tanto los combustibles fósiles y nucleares como las energías verdes, a pesar de que éstas son consideradas menos dañinas. Debido a las grandes cantidades y tiempo que se han utilizado los combustibles fósiles y la energía nuclear, el impacto ambiental se ha vuelto peor, y esto se debe a la población mundial y su relación con el uso de la energía y los estándares de estilo de vida a nivel mundial. Las personas son conscientes también del impacto ambiental a causa de las catástrofes ocurridas a lo largo

de la historia por los combustibles fósiles y las plantas nucleares, resultando en derrames petroleros, desastres en minas de carbón, derretimientos de reactores nucleares y fugas de material radioactivo, entre otros. También hay que considerar otros impactos que han ocurrido en el agua, aire y contaminación de la tierra, que pueden tener efectos a largo plazo.[Ehrlich and Geller, 2018]

Los problemas actuales que la humanidad tiene asociados con la energía son el cambio climático y el crecimiento de la población mundial. Los niveles atmosféricos de gases de invernadero han ido en aumento a lo largo del tiempo y este aumento de las emisiones es el responsable en cierta medida del cambio climático. [Ehrlich and Geller, 2018]

1.1.3. Fuentes de energía no renovables

Se consideran principalmente a los combustibles fósiles (carbón, petróleo, gas natural), los cuales tienen su origen en la descomposición de materiales biológicos formados hace casi 100 millones de años y su energía está contenida en los enlaces químicos. Otra fuente de energía no renovable es el uranio que se utiliza en la producción de energía nuclear por fisión.[Jarabo, 1988]

Combustibles fósiles	Combustibles nucleares (fisión)	Combustibles nucleares (fusión)	Hidrocarburos no tradicionales
petróleo gas natural carbón	uranio torio	deuterio	pizarras bituminosas arenas asfálticas

Cuadro 1.2: Fuentes no renovables mundiales.
Fuente:[Jarabo, 1988]

Lo que hace que los combustibles fósiles sean tan atractivos como una fuente de energía, tanto en el pasado como en el presente, y que sea tan difícil dejar de consumirlos a pesar de la gran cantidad de evidencia que hay sobre los problemas ambientales que producen, tiene que ver principalmente con el enorme almacén de energía que contienen. Estos recursos representan almacenamientos con alta concentración de energía comparados con las concentraciones tan reducidas de los recursos renovables, además de que son más fáciles y baratos de recolectar, almacenar, transportar y se pueden usar donde y cuando se desee, a diferencia de la mayoría de las fuentes renovables de energía. [Ehrlich and Geller, 2018]

1.1.4. Fuentes de energía renovables

En contraste con los recursos fósiles, la disponibilidad de la mayoría de los recursos de energía renovable fluctúan. Un suministro completo de energía renovable no sólo debe convertir la energía de los recursos renovables en tipos de energía útil como la electricidad o el calor; sino que también debe garantizar su disponibilidad. Esto se puede lograr mediante grandes sistemas de almacenamiento de energía, transporte global de la energía o adaptación de la demanda con la energía disponible. [Quashning, 2005]

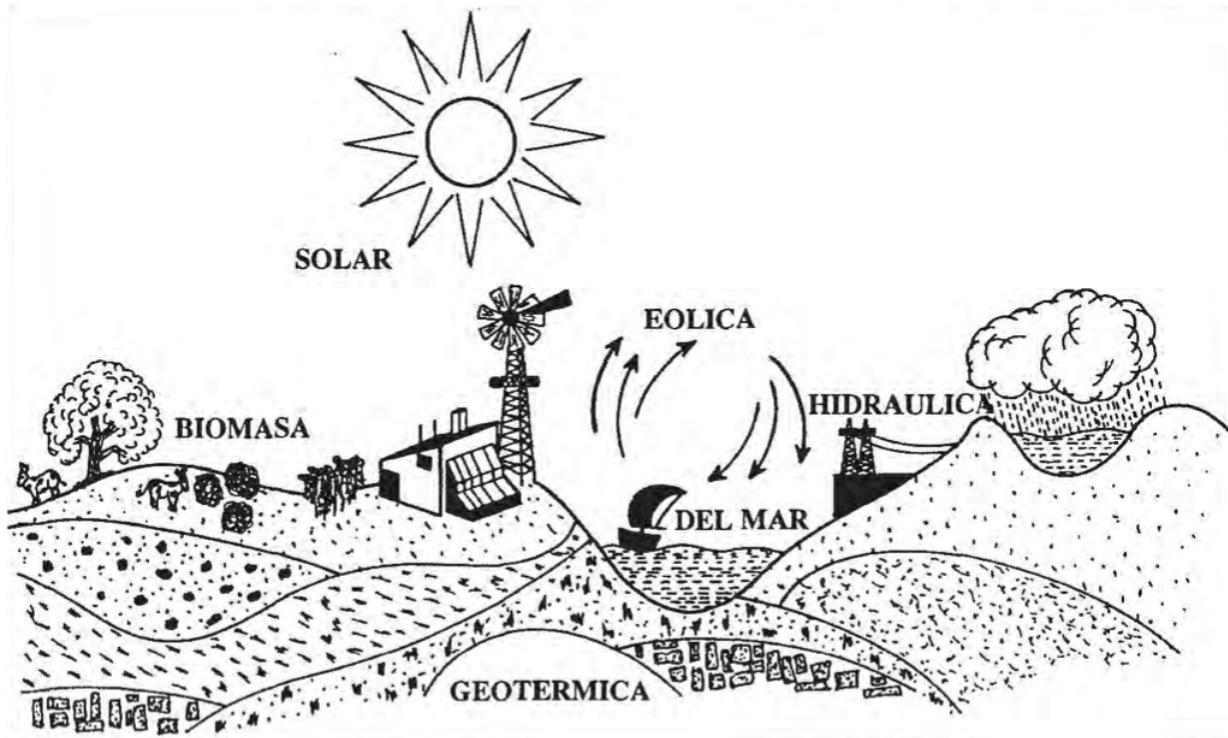


Figura 1.2: Energías renovables

Fuente:[Jarabo, 1988]

Energías renovables
Biocombustibles
Geotérmica
Eólica
Hidráulica
Radiación solar
Solar térmica
Solar fotovoltaica
Mareas
Olas de mar
Almacenamiento de energía

Cuadro 1.3: Fuentes renovables de energía.

Como parte de estas energías renovables está el almacenamiento de energía, y su importancia radica en dos características: 1) la cantidad de energía almacenada y 2) el tiempo de almacenamiento. También hay que considerar la forma de energía a consumir y las variaciones en la velocidad del consumo. Referente a la calidad de la energía, podemos mencionar que está cuantificada por la entropía del sistema, apoyándose en la Segunda Ley de la Termodinámica. La energía se puede clasificar en alta calidad como la energía eléctrica, mecánica, química y calor de alta

temperatura, y en energía de baja calidad donde está el calor de baja temperatura. [Jarabo, 1988]

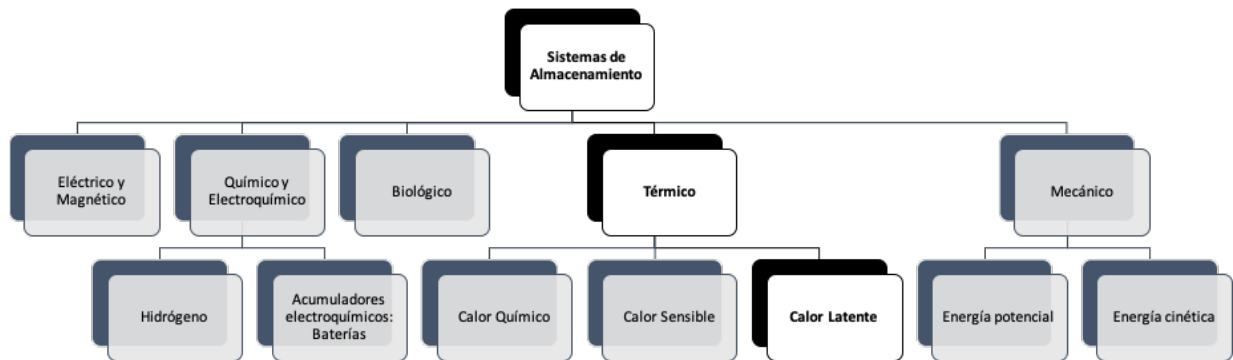


Figura 1.3: Tipos de sistemas de almacenamiento de energía.
Fuente:[Jarabo, 1988]

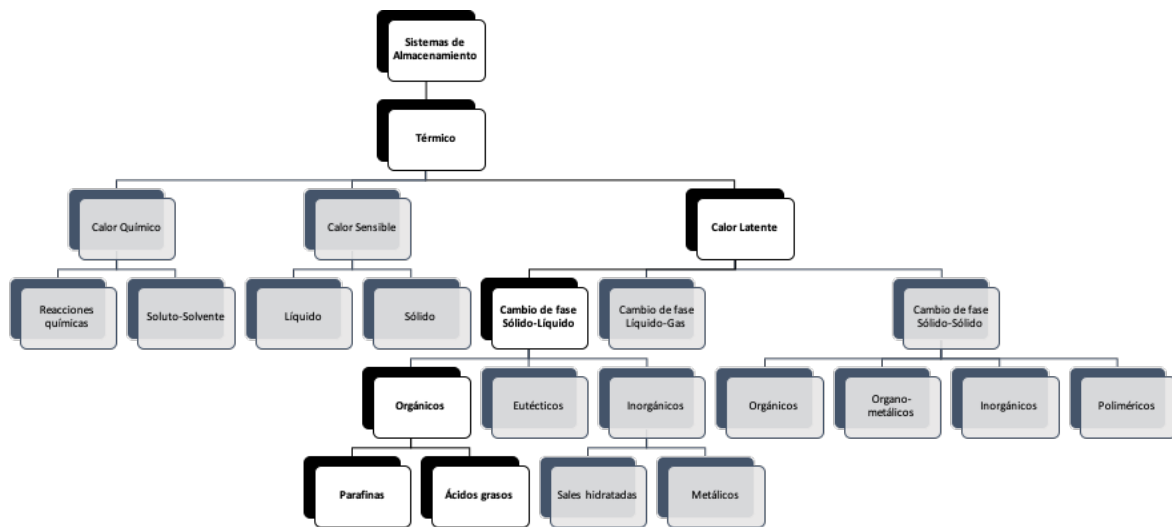


Figura 1.4: Tipos de sistemas de almacenamiento de energía térmica.
Fuente:[Fallahi et al., 2017]

1.2. Motivación

Almacenar la energía y utilizarla en el momento que se requiera es una aplicación tecnológica que ayuda a la reducción de la producción de energía, independientemente de que esta sea por medio de recursos no renovables

o renovables. Simplemente tener la capacidad de almacenar energía en recipientes de alta eficiencia, considerando que a pesar del tiempo almacenada esta tenga la mínima pérdida y esté casi toda la energía que almacenamos, esto significa un cambio en el manejo y uso de la energía.

Como se muestra en la figura 1.4, el almacenamiento térmico puede realizarse mediante tres mecanismos básicos, los dos más comunes son el calor sensible y el calor latente. Almacenar calor sensible consiste en utilizar la capacidad calorífica del medio al aumentar su temperatura, mientras que almacenar calor latente consiste en utilizar el calor asociado con un cambio de fase del medio, el cual se produce a temperatura constante. [Jarabo, 1988]

El estudio en esta tesis se basa en los principios de funcionamiento de los sistemas de almacenamiento de energía térmica (SAET), en su ramificación de cambio de fase sólido-líquido, utilizando un tipo de parafina como material de cambio de fase (MCF) orgánico.

El almacenamiento de energía térmica tiene dos principales problemas asociados: [Jarabo, 1988]

1. Se debe establecer una superficie de transmisión de calor adecuada, con el propósito de conseguir un intercambio de energía rápido tanto para fuera como para dentro de la unidad de almacenamiento.
2. Se debe evitar fugas de calor hacia los alrededores, con el propósito de que el tiempo de pérdida sea mayor comparado al tiempo que se requiere para almacenar la energía.

El almacenamiento de energía térmica con MCF es una tecnología que está llamando mucho la atención y se basa en el principio del calor latente, que ocurre cuando los MCFs absorben o liberan grandes cantidades de energía a una determinada temperatura durante el periodo de transición de cambio de fase (procesos de carga o descarga), con un alto calor de fusión alrededor del rango de temperatura del cambio de fase, como se muestra en la siguiente figura. [Du et al., 2018]

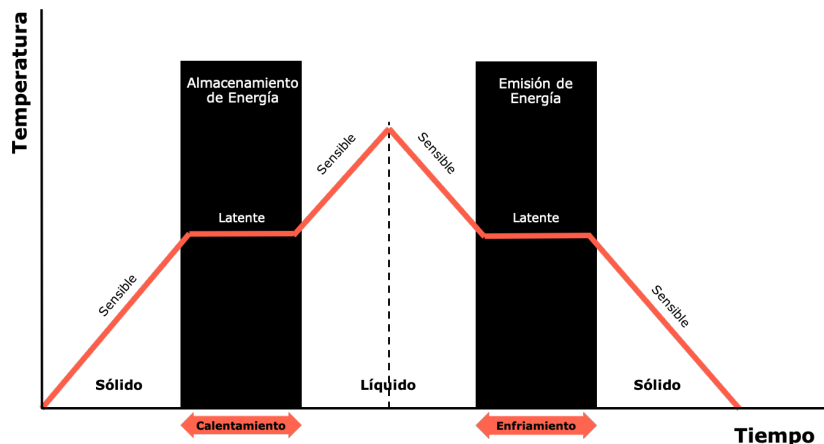


Figura 1.5: Diagrama esquemático de la transición del cambio de fase de los MCF.

Fuente:[Du et al., 2018]

Como el MCF es un medio que transmite calor por conducción y dentro del material existen dos estados ca-

racterizados por sus temperaturas, coeficientes de conducción de calor, calores específicos y densidades, entonces podemos abordar el estudio de estos materiales como un tipo de problema de Stefan. [Rubinshtein, 1971]

En muchos procesos, sustancias o materiales se experimenta el cambio de una fase a otra con absorción y emisión de calor. El calor se almacena isotérmicamente en el material a la temperatura de fusión durante la cual el material experimenta una transición de fase, en el proceso inverso cuando el calor se disipa o la fuente de calor frío se aplica al material derretido, entonces empieza a liberarse calor y a solidificarse. La determinación de la ubicación y velocidad de la interfase sólido-líquido durante el derretimiento o solidificación se le conoce como problema de Stefan. [Khalid et al., 2017]

1.3. Pregunta de Investigación

¿Se puede predecir con mayor precisión el comportamiento de la interfase y de la temperatura en un material de cambio de fase?

1.4. Hipótesis

Si consideramos un modelo matemático que involucre la conservación de la masa, entonces podemos predecir con mayor precisión el comportamiento de las temperaturas tanto en la fase líquida como en la sólida así como el movimiento de la interfase en un sistema líquido-sólido en un rango de tiempo determinado.

1.5. Objetivo General

Estudiar el proceso de transición de fases en un sistema de almacenamiento térmico cilíndrico.

1.6. Objetivos Específicos

1. Extender el modelo matemático del problema de Stefan [Hernández et al., 2017] a coordenadas cilíndricas.
2. Extender el modelo matemático del problema de Stefan considerando un sistema con masa constante [Santiago et al., 2017] a coordenadas cilíndricas.
3. Crear un sistema de almacenamiento térmico cilíndrico donde se pueda medir la temperatura en diversos puntos utilizando termopares.
4. Utilizar una interfase gráfica donde se muestren las mediciones en tiempo real de las temperaturas del material de cambio de fase que está en el sistema de almacenamiento de energía térmica (SAET).

5. Realizar las comparaciones entre los resultados teóricos y los experimentales.

1.7. Principales contribuciones

1. Se extendió el modelo matemático del problema de Stefan [Hernández et al., 2017] a coordenadas cilíndricas.
2. Se extendió del modelo matemático del problema de Stefan considerando un sistema con masa constante [Santiago et al., 2017] a coordenadas cilíndricas.
3. Creación de una herramienta computacional desarrollada con el uso de la aplicación MatLab para el estudio de la dinámica de transición de fases.
4. Se obtuvieron resultados numéricos de los modelos estudiados, utilizando el método de diferencia finita con esquema implícito.
5. Se comprobó que el modelo de masa constante concuerda mejor con las mediciones experimentales.

Capítulo 2

Estado del Arte

2.1. Materiales de Cambio de Fase (MCF)

Los materiales de cambio de fase (MCF) son materiales que se caracterizan por intercambiar grandes cantidades de calor como calor latente dentro de un corto rango de temperatura cuando la transformación de la fase ocurre. [Kumar et al., 2011]

Son materiales que usan sus enlaces químicos para el almacenamiento y liberación de energía. Cuando los MCF alcanzan la temperatura a la cual se funden (T_f), absorben una gran cantidad de energía sin calentarse. Se solidifican y liberan energía cuando la temperatura de los alrededores desciende. [Rahman et al., 2013]

Cuando se libera la energía o se enfría, la temperatura del MCF tiene que bajar por debajo de la temperatura de cambio de fase (conocido como subenfriamiento) esto para superar la barrera energética requerida. [Kumar et al., 2011]

El calor latente de los MCF es por mucho mayor que el calor específico de los materiales. Entonces un MCF puede almacenar de 2 a 3 veces más calor o frío por volumen o por masa que el calor sensible que puede almacenar el agua a 20°C. [Kumar et al., 2011]

Debido a la poca cantidad de calor latente en transiciones sólido-sólido y el uso de grandes volúmenes para la transición líquido-gas, estas opciones se vuelven poco viables. [Rahman et al., 2013]

2.2. Clasificación de los MCF

Los MCF pueden dividirse en dos grandes categorías: orgánicos e inorgánicos. Otro grupo son los Eutécticos, pero no se consideran como una categoría por dos razones: 1) muy pocos MCF son realmente Eutécticos y 2)

la mayoría son modificados antes de cualquier aplicación práctica. [Rahman et al., 2013] Las sales hidratadas, las mezclas eutécticas de sal y los eutécticos metálicos están cubiertos por los MCF inorgánicos, mientras que los ácidos grasos, parafinas, azúcares, alcoholes, etc. son MCF orgánicos de uso común, los cuales tienen su densidad menor a la del agua.[Kumar et al., 2011]

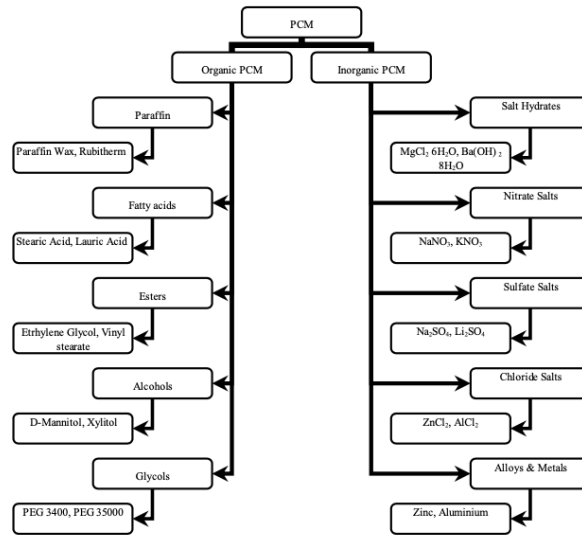


Figura 2.1: Clasificación general de materiales de cambio de fase (MCF).
Fuente:[Karthick and Sivalakshmi, 2019]

Tipo de material	Tipo de transición	Rango de temperatura del cambio de fase [°C]	Calor latente [J/cm ³]	Densidad [g/cm ³]	Ejemplos
Compuestos orgánicos	Sólido-líquido (húmedo)	-12 to +187	125-400	0.75-1.54	Parafinas, ácidos grasos, alcoholes, azúcares, etc.
Inorgánico: sales hidratadas	Sólido-líquido (húmedo)	20-140	270-650	1.5-2.2	CaCl ₂ ·6H ₂ O, Ca(NO ₃) ₂ ·4H ₂ O, MgSO ₄ ·7H ₂ O etc.
Sales inorgánicas	Sólido-líquido (húmedo)	< 150	200- 500	1.7-2.5	LiNO ₃ , NaNO ₃ , MgCl ₂ , K ₂ CO ₃
Soluciones de sales inorgánicas	Sólido-líquido (húmedo)	< 0	130- 330	Alrededor 1	KCl 19.5 % + H ₂ O
Compuestos orgánicos sólido-sólido	Sólido-sólido (seco)	21-100	140-200	1-1.1	Compuesto de Control de Temperatura (TCC)
Metales eutecticos	Sólido-líquido (húmedo)	30-125	200-800	6-10	Eutécticos de Bi-Pb-Cd-Sn-In
Micro-encapsulado MCF	Sólido-líquido (seco)	6-101	95-186	0.9- 1.1	Micro-encapsulado: parafina, ácido graso

Figura 2.2: Tabla comparativa de las propiedades más comunes usadas en los MCF.
Fuente:[Kumar et al., 2011]

	Ventajas	Desventajas
Orgánico	<p>Estable químicamente</p> <p>No es corrosivo</p> <p>No super enfriamiento</p> <p>Se congela sin mucho super enfriamiento o sub enfriamiento</p> <p>Capacidad para ser incorporado directamente</p> <p>Baja presión de vapor en el proceso de cambio de fase</p> <p>Buen desempeño térmico</p> <p>Capacidad para derretirse congruentemente</p> <p>Propiedades auto-nucleantes</p> <p>Compatibilidad con material de construcción convencional</p> <p>Disponibles en rangos altos de temperatura</p> <p>No hay segregación</p> <p>Alto calor de fusión</p> <p>Seguro y no reactivo</p> <p>Reciclable</p>	<p>Más costoso</p> <p>Amplio rango de fusión</p> <p>Baja capacidad de calor latente</p> <p>Baja conductividad térmica en su estado sólido</p> <p>Algunos son insolubles en agua</p> <p>Se quema fácilmente</p> <p>Baja entalpía en el cambio de fase</p> <p>Baja densidad</p> <p>Requiere una gran área de superficie</p> <p>Se requieren de altas tasas de transferencia de calor durante el ciclo de congelamiento</p> <p>Baja capacidad de almacenamiento de calor latente volumétrico</p> <p>Flamable</p> <p>Alta expansión volumétrica</p> <p>Baja conductividad térmica</p>
Inorgánico	<p>Menos costoso</p> <p>Alto calor latente por unidad de volumen</p> <p>Alta conductividad térmica</p> <p>No flamables</p> <p>Gran capacidad de almacenamiento de calor</p> <p>Mayor entalpía en el cambio de fase</p> <p>Reciclable</p> <p>Cambio de fase agudo</p>	<p>Alto grado de super enfriamiento</p> <p>Corrosivos</p> <p>Falta de estabilidad térmica</p> <p>Segregación de la fase</p> <p>Algunos tienen un gran peso</p> <p>Requieren de contenedor y soporte</p> <p>Propensos a degradarse</p> <p>Problemas de compatibilidad con algunos materiales de construcción</p>

Cuadro 2.1: Tabla comparativa entre MCF orgánicos e inorgánicos.

Fuentes:[Rahman et al., 2013], [Nazir et al., 2019]

2.3. Aplicaciones de los MCF

Desde su primer aplicación realizada por la NASA en el campo aeroespacial [Hale et al., 1971], pasando por miles de materiales simples y mezclas de dos o más materiales, se ha investigado a los MCF en áreas como la energía solar, almacenamiento de calor residual, cambio de carga y ahorro de energía [Clarksean, 2006], textiles [Salaun et al., 2010], refugios de refrigeración pasiva [Sundram et al., 2010], edificios con eficiencia energética [Cui and Riffat, 2011] [Tyagi and Buddhi, 2007], tecnología de enfriamiento para electrónicos [Ullman and Newman, 2010], contenedores para transportación de alimentos y medicinas [Mehling and Cabeza, 2008], y conservación de la energía a través de su almacenamiento [Bakker et al., 2009], etc.

También se puede clasificar la aplicación de los MCF para calentamiento, enfriamiento y generación de electricidad por los rangos de temperatura a los cuales trabajan.[Du et al., 2018]

1. Rango de temperaturas bajo (-20°C a 5°C) para aplicaciones de refrigeración doméstica y productos comerciales refrigerados.
2. Rango de temperaturas bajo-medio (5°C a 40°C) para aplicaciones de enfriamiento libre, construcción de calefacción y refrigeración pasiva, enfriador de absorción solar, refrigeración evaporativa y por radiación, y sistemas de aire acondicionado.
3. Rango de temperaturas medio (40°C a 80°C) para aplicaciones de calentadores de aire solares, destiladores solares, sistemas solares de calentamiento de agua, y dispositivos eléctricos.
4. Rango de temperaturas alto (80°C a 200°C) para aplicaciones de enfriamiento de absorción solar, recuperación de calor residual en el sitio, recuperación de calor residual fuera del sitio, y generación de electricidad térmica solar.

2.4. Sistema de Almacenamiento de Energía Térmica (SAET)

La producción y uso de energía es uno de los principales motores que impulsan el crecimiento y desarrollo del mundo actual. Los retos en el campo de la energía son la mejora de la eficiencia, la reducción del consumo de los combustibles fósiles y de las emisiones de CO_2 y el desarrollo de alternativas de recursos de energías renovables. [Rahman et al., 2013]

Los sistemas de almacenamiento de energía térmica (SAET) son uno de los métodos más comunes para el almacenamiento de energía. Estos sistemas no solo reducen la diferencia entre el suministro y la demanda sino que también incrementan la estabilidad y calidad del suministro de la energía además de conservar la energía. [Rahman et al., 2013]

Los SAET a través de los MCF son capaces de almacenar y liberar energía en grandes cantidades; esto depende directamente del MCF que se utilice.

La naturaleza isotérmica de la transición de fase proporciona aplicaciones atractivas para el aislamiento térmico y el almacenamiento de energía térmica. El almacenamiento de calor latente es particularmente atractivo ya que la densidad de energía de las unidades del SAET puede ser mejorada a través del calor sensible y latente, aumentando la capacidad de almacenar energía térmica a una temperatura constante y sobre un rango limitado de temperaturas, que corresponde a la temperatura de saturación del MCF [Dutil, 2014].

Los tipos de MCF utilizados en las plantas de CSP consisten en sales con altos puntos de fusión, que constituyen MCF de alta temperatura (MCFAT), donde se almacena la energía térmica. [Gil et al., 2010] El calor extra capturado de la radiación solar concentrada es transportado al MCFAT por un fluido de transferencia de calor (FTC). El MCFAT absorbe la energía térmica en forma de calor latente y calor sensible para su uso como un sistema de reserva durante las noches o períodos nublados.[Gil et al., 2010] La tasa de transferencia de calor entre el FTC y el MCF puede aumentar, debido a la baja conductividad térmica del MCF. El aumento de las tasas de transferencia de calor se ha logrado a través del encapsulamiento de los MCF en pequeños recipientes esféricos, que aumentan el área de superficie del MCF específico.[Mathur et al., 2014]

Los materiales compuestos que combinan MCFAT con grafito se han desarrollado para aumentar la tasa de transferencia de calor [Gil et al., 2010; Lopez et al., 2010]. Se ha reportado también, que para mejorar las propiedades termofísicas deseadas de los MCF, el uso de multiparedes de nanotubos de carbono que incrementan la conductividad térmica del MCF y reducen los tiempos de derretimiento/solidificación con poco impacto en el calor latente de fusión.[Lokesh et al., 2017].

2.5. Comparación entre el almacenamiento de energía térmica sensible, latente y química

Por lo general, la densidad de almacenamiento del medio del almacenamiento de calor latente (ACL) es mayor que la del medio del almacenamiento de calor sensible (ACS) debido al alto cambio de entalpía que ocurre durante la transición de fase, pero el almacenamiento de energía termoquímica (AETQ) tiene la mayor densidad de almacenamiento en comparación con los otros dos sistemas. [Nazir et al., 2019]

Actualmente, varios materiales del AETQ están en fase de desarrollo y tal sistema todavía no está disponible comercialmente. La viabilidad comercial del ACL está limitada por las características del material, por lo tanto, se encuentra en la fase de desarrollo a diferencia del ACS, que se comercializa en gran medida. [Nazir et al., 2019]

La durabilidad de los materiales para el ACS es aproximadamente de 20 años en comparación con los materiales del ACL, que tienen una cuarta parte de vida media y los del AETQ tienen una décima parte de vida media respecto a los materiales del ACS. [Nazir et al., 2019]

Entre los diferentes tipos de SAET, el ACL tiene el rango de temperaturas más flexible para operar seguido por el del ACS y AETQ. La ventaja de utilizar tecnología de almacenamiento de calor latente sobre la de calor sensible es que tiene 10 veces más densidad, capacidad de 50-150 kWh/t y eficiencia de 75-96 %. [Nazir et al., 2019]

2.6. Modelado matemático en SAET cilíndricos

Anica Trp [Trp, 2005; Trp et al., 2007] analizó el fenómeno de transferencia de calor transiente durante el derretimiento y solidificación de parafina grado técnico en un recipiente cilíndrico. El modelo matemático, formulado para representar el sistema físico, ha sido adecuado para tratar tanto los procesos de derretimiento como de solidificación. Se puede concluir que la selección de las condiciones de operación y las dimensiones de los parámetros geométricos depende de la tasa de transferencia de calor y del tiempo en que la energía tiene que ser almacenada o liberada. Los resultados muestran que estos parámetros deben elegirse cuidadosamente para optimizar el rendimiento térmico del SAET.[Dutil et al., 2010]

Gong y Mujumdar [Gong and Mujumdar, 1997] desarrollaron un modelo de elemento finito para un intercambiador que consiste en un tubo rodeado por un cilindro externo coaxial con MCF. Este modelo compara las características de dos modos de operación. En el modo 1, los fluidos calientes y fríos se introducen por el mismo extremo del tubo, mientras que en el modo 2, el fluido caliente y el frío se introducen por extremos diferentes. Los análisis muestran que la energía cargada o descargada en un ciclo que utiliza el modo 1 es un 5.0 % mayor que cuando se utiliza el modo 2. La tasa de carga/descarga también es más rápida cuando se utiliza el modo 1 porque la diferencia de temperatura para la transferencia de calor entre el fluido y el MCF es mayor en la entrada del fluido que en la salida. Cuanto mayor es la diferencia de temperatura, más profundo penetra la interfase en el MCF y se almacena más calor. En el proceso de descarga se producen fenómenos simétricos.[Dutil et al., 2010]

El-Dessouky y Al-Juwayhel [El-Dessouky and Al-Juwayhel, 1997] presentaron una técnica para predecir el efecto de diferentes diseños y parámetros operativos en el número de generación de entropía o la efectividad de la segunda ley en un SAET de calor latente en donde el MCF está contenido en el anillo de un intercambiador de calor de doble tubo. Una de las conclusiones de este análisis es que la efectividad de la segunda ley aumenta con el incremento del número de Reynolds, el área específica donde ocurre la transferencia de calor y la temperatura de la pared del fluido en operación en el proceso de recuperación de calor y con la disminución de la temperatura de entrada del fluido en el proceso de almacenamiento de calor.[Dutil et al., 2010]

Para un calentador solar de agua, Prakash et al. [Prakash et al., 1985] analizaron una unidad de almacenamiento que contenía una capa de MCF en el fondo. Bansal y Buddhi [Bansa and Buddhi, 1992] hicieron lo mismo para una unidad de almacenamiento cilíndrica con un colector de placa plana. En un esfuerzo por mejorar el rendimiento de las unidades de almacenamiento de cambio de fase para aplicaciones de calentamiento solar, Farid [Farid, 1986] ha sugerido utilizar muchos MCF con diferentes temperaturas de fusión. Esta idea ha sido aplicada más tarde por Farid y Kanzawa [Farid and Kanzawa, 1989] y Farid et al. [Farid et al., 1990] para una unidad hecha con tubos verticales llenos de tres tipos de ceras obteniendo diferentes temperaturas de fusión. Durante la carga de calor, primero fluye el aire a través del MCF que tiene la temperatura de fusión más alta para asegurar el continuo derretimiento de la mayoría de los MCF. La dirección del flujo de aire debe invertirse durante la liberación de calor. Tanto las mediciones teóricas como las experimentales mostraron una mejora en los desempeños de los SAET que utilizan este tipo de disposición.[Dutil et al., 2010]

Jones et al. [Jones et al., 2006] realizaron mediciones experimentales bien controladas y caracterizadas del derretimiento de un material con número de Prandtl moderado (*n*-eicosano) en un recipiente cilíndrico que se calentaba por un lado. El derretimiento fue capturado fotográficamente y digitalizado numéricamente. Se realizó la compa-

ración numérica utilizando un método multi-bloque de volumen finito y el método de entalpía para una serie de números de Stefan. Se obtuvo una muy buena relación entre las predicciones y el experimento para los números de Stefan de hasta 0,1807.[Dutil et al., 2010]

Esen y Ayhan [Esen and Ayhan, 1996] desarrollaron un modelo para investigar el rendimiento de un tanque cilíndrico de almacenamiento de energía. En el tanque, el MCF estaba dentro de cilindros y el fluido de transferencia de calor (FTC) corría en paralelo. Los MCF que se consideraron fueron el cloruro de calcio hexahidratado ($\text{CaCl}_2 - 6\text{H}_2\text{O}$), cera de parafina (P-116), $\text{Na}_2\text{SO}_4 - 10\text{H}_2\text{O}$ y parafina. El rendimiento del tanque cilíndrico de almacenamiento de energía se determinó mediante el Programa de Simulación de Transición [Visser, 1986] y simulaciones computacionales [Esen, 1994]. y respaldado por los datos experimentales. El resultado muestra que la energía almacenada se incrementa en un tiempo determinado a medida que aumenta la tasa de flujo másico o la temperatura de inicio del FTC y considerar que para un mayor almacenamiento de energía se deben seleccionar adecuadamente los materiales de las paredes del cilindro y las dimensiones, así como una mayor conductividad térmica y un radio pequeño.[Dutil et al., 2010]

Jian-you [Jian-you, 2008] produjo una investigación numérica y experimental de un SAET que incluye un tubo concéntrico triple con el canal de en medio relleno con MCF, con un FTC caliente que fluye hacia el canal exterior durante el proceso de carga y un FTC frío que fluye hacia el canal interior durante el proceso de descarga. Para el análisis de la solidificación y derretimiento del MCF en el tubo concéntrico triple, se desarrolló un método numérico simple relacionado con la conservación de la energía, llamado método de iteración de temperatura y resistencia térmica. La comparación con las predicciones numéricas y los datos experimentales presenta una buena relación.[Dutil et al., 2010]

Capítulo 3

Metodología y Desarrollo

3.1. Datos

Se escogió como material de cambio de fase (MCF) a la parafina para realizar los cálculos. La parafina es una mezcla orgánica de hidrocarburos de cadena larga, que se obtiene como un subproducto de la refinación del petróleo. Algunas de las ventajas que tiene este material es su bajo costo, su estabilidad química en el ciclo térmico y el alto valor de calor de fusión, entre otros. Las propiedades termofísicas de la parafina que se utilizaron en el trabajo de tesis se obtuvieron de un estudio experimental que se realizó para determinar si la cera de parafina Suntech P116 cumplía con lo necesario para el almacenamiento de energía térmica. [Haji-Sheikh et al., 1982]

NOTA: Se invirtieron los valores del calor específico del líquido por el del sólido y viceversa, debido a que a la temperatura de fusión el calor específico de un líquido es mayor que el del sólido a la misma temperatura.

Propiedades Termofísicas	Magnitud	Unidades
calor específico del líquido	C_l	2950 $\frac{J}{kg \cdot K}$
calor específico del sólido	C_s	2510 $\frac{J}{kg \cdot K}$
calor latente de fusión	L_f	266 kJ/kg
conductividad térmica del líquido	k_l	0.24 $\frac{W}{m \cdot K}$
conductividad térmica del sólido	k_s	0.24 $\frac{W}{m \cdot K}$
densidad del líquido	ρ_l	760 $\frac{kg}{m^3}$
densidad del sólido	ρ_s	818 $\frac{kg}{m^3}$
temperatura de fusión	T_f	317.15 K

Cuadro 3.1: Algunas propiedades termofísicas de la parafina.

Fuente:[Haji-Sheikh et al., 1982]

3.2. Esquema

El siguiente esquema muestra la vista superior del Sistema de Almacenamiento Térmico (TES) donde se pueden apreciar la fase líquida, la fase sólida y la interfase, junto con las variables que muestran la distancia (radios) a las que están ubicadas cada una en el sistema.

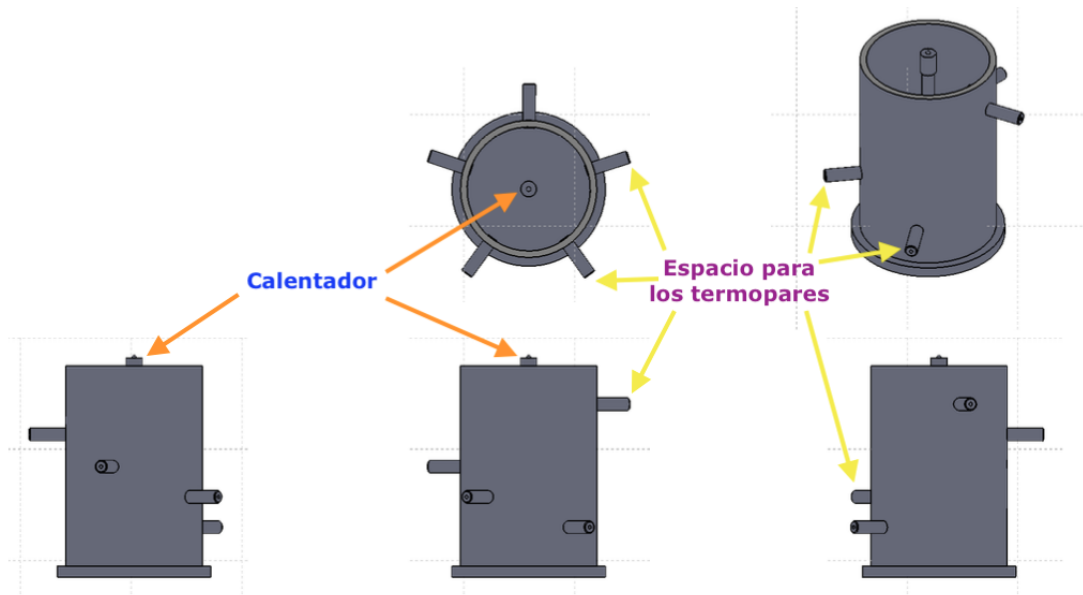


Figura 3.1: Modelo CAD del Sistema de Almacenamiento de Energía Térmica (SAET)

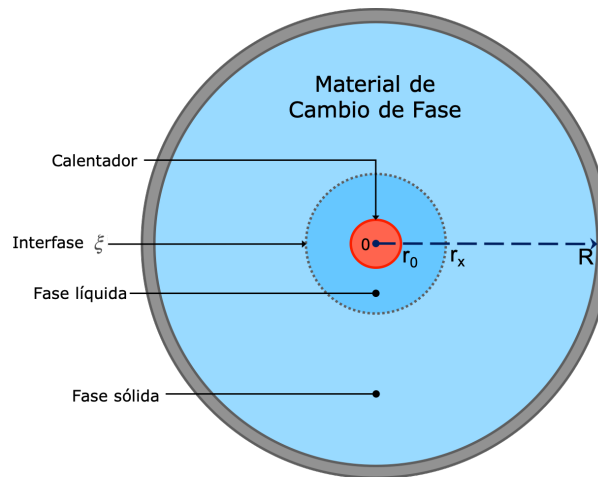


Figura 3.2: Vista superior del sistema de almacenamiento térmico.

3.3. Condiciones

3.3.1. Condiciones iniciales

La condición inicial representa la temperatura a la que está cada fase del sistema en el tiempo cero o tiempo inicial. Se realizaron dos experimentos donde la temperatura en la fase líquida para $r = r_0$ se representa por $T(r_0, t) = T_L$.

3.3.2. Condiciones de frontera

La condición de frontera de primer tipo o de temperatura prescrita, ocurre cuando la temperatura es previamente establecida en la superficie de la frontera, esto se puede representar como $T_{superficie} = T_0$ o $T_{superficie} = f(r, t)$, donde T_0 es la constante de temperatura prescrita y $f(r, t)$ es la distribución de temperatura prescrita en la superficie, en términos generales, es una función de posición y tiempo. El caso especial de temperatura cero en la frontera $T_{superficie} = 0$ es llamada *condición de frontera homogénea de primer tipo*. En matemáticas, las condiciones de frontera de primer tipo son llamadas *condiciones de frontera de Dirichlet*. [Hahn and Özisik, 2012]

Para los modelos empleados, las condiciones de frontera en la fase líquida son: $T_l(r_0, t) = T_l$, $T_l(\xi, t) = T_f$. Por otro lado, las condiciones de frontera en la fase sólida son: $T_s(\xi, t) = T_f$, $T_s(R, t) = T_s$, donde los subíndices l y s representan las fases líquida y sólida, respectivamente.

NOTA: Debido a la situación mundial que aconteció con el brote de pandemia del COVID-19 y con las medidas de seguridad que el país, y la institución tomaron, la investigación en el laboratorio se detuvo, por lo que solamente se obtuvieron los datos de dos temperaturas del lado del líquido.

Experimento	Temperatura en $T(r_0, t) = T_L$ [°C]	Temperatura en $T(r_0, t) = T_L$ [K]
1	70	323.15
2	80	333.15

Cuadro 3.2: Condiciones iniciales de temperatura en la frontera del líquido.

La temperatura de fusión (T_f) o temperatura en la interfase siempre es la misma, sin importar su movimiento a lo largo del tiempo, $T_l(r_0, t) = T_l$, $T_l(\xi, t) = T_f$, y la temperatura del lado del sólido también se considera constante en la posición $T_s(R, t) = T_s$, ya que la pared exterior está en contacto con el medio ambiente y se considera la temperatura ambiental.

3.4. Modelo 1: Problema de Stefan

Extender el modelo planteado en [Hernández et al., 2017] a coordenadas cilíndricas. Resolver la ecuación diferencial unidimensional de conducción de calor en un cilindro, considerando a la parafina como un material homogéneo con cambio de fase.

Obtener el perfil de temperaturas del **modelo isobárico** en estado transiente sin considerar la generación de calor en el sistema, utilizando el método de diferencia finita con esquema implícito de segundo orden para la ecuación diferencial de calor y el esquema explícito de orden superior para la condición de Stefan.

Para el planteamiento del problema se asumió lo siguiente:

- Variables termodinámicas como la conductividad térmica, calor específico y densidad en cada fase son constantes y no dependen de la temperatura.
- No hay generación de calor en el sistema.
- El flujo de calor es simétrico a lo largo de la sección transversal del cilindro, por lo que el problema se considera unidimensional.
- No se considera que se presente convección natural en el sistema.
- No se considera transferencia de calor por convección entre el sistema y el exterior.
- No hay transferencia de calor por radiación.
- No se considera la formación de zona pastosa.

3.4.1. Planteamiento Matemático

La ecuación general de calor en coordenadas cilíndricas está dada por, [Hahn and Özisik, 2012]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k r \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T(r, t)}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T(r, t)}{\partial z} \right) + g = \rho c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} \quad (3.1)$$

sin embargo en el modelado que se realizó se consideró un estado transiente sin generación de calor y que en parámetros físicos solamente depende de la coordenada r (problema unidimensional), por lo que la ecuación (3.1) se reduce a la Ecuación de Difusión, [Cengel and Ghajar, 2015]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(r, t)}{\partial t}$$

la cual también se puede representar como,

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = \alpha \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T(r, t)}{\partial r^2} \right) \quad (3.2)$$

donde,

- difusividad térmica: $\alpha = \frac{k}{\rho C}$ en $\left[\frac{\text{J}}{\text{mKs}} \frac{\text{m}^3 \text{kg K}}{\text{Kg J}} \right] = \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$
- conductividad térmica: k en $\left[\frac{\text{W}}{\text{m K}} \right] = \left[\frac{\text{J}}{\text{m K s}} \right]$
- densidad: ρ en $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$
- calor efectivo: C en $\left[\frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right]$

Para resolver la ecuación diferencial parcial numérica o aproximadamente en una región definida teniendo condiciones iniciales específicas así como condiciones de frontera, la solución debe satisfacer a la ecuación diferencial en cualquier punto dentro del dominio de interés, el cual puede contener al tiempo (t) y una variable espacial (r) independiente. En este caso, se utilizará el método de diferencia finita, donde el dominio del problema se va a *discretizar* para que los valores de las variables dependientes desconocidas sean consideradas solamente en un número finito de puntos en lugar de considerar cada uno de los puntos sobre el continuo. [Özisik et al., 2017]

Aproximando las derivadas de la ecuación (3.2):

a) Aproximación izquierda para la primera derivada temporal,

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta t}, \varepsilon = o(\Delta t) \quad (3.3)$$

b) Aproximación centrada para la primera derivada espacial,

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial r} = \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2\Delta r}, \varepsilon = o(\Delta r^2) \quad (3.4)$$

c) Aproximación centrada para la segunda derivada espacial,

$$\frac{\partial^2 T(r, t)}{\partial r^2} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta r^2}, \varepsilon = o(\Delta r^2) \quad (3.5)$$

donde,

$$T_{i,j} = T(r_i, t_j)$$

$$T_{i,j-1} = T(r_i, t_{j-1})$$

$$T_{i+1,j} = T(r_{i+1}, t_j)$$

$$T_{i-1,j} = T(r_{i-1}, t_j)$$

sustituyendo las aproximaciones de las ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.5) en la ecuación (3.2),

$$\frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta t} = \alpha \left(\frac{1}{r_i} \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2\Delta r} + \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta r^2} \right)$$

sustituyendo $\lambda_1 = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2}$ y $\lambda_2 = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r}$,

$$T_{i,j} - T_{i,j-1} = \lambda_1 T_{i-1,j} - 2\lambda_1 T_{i,j} + \lambda_1 T_{i+1,j} - \frac{\lambda_2 T_{i-1,j}}{2r_i} + \frac{\lambda_2 T_{i+1,j}}{2r_i}$$

ordenando los términos, finalmente llegamos a la ecuación discretizada,

$$\left(\frac{\lambda_2}{2r_i} - \lambda_1 \right) T_{i-1,j} + (2\lambda_1 + 1) T_{i,j} + \left(-\frac{\lambda_2}{2r_i} - \lambda_1 \right) T_{i+1,j} = T_{i,j-1} \quad (3.6)$$

considerando ocho nodos para cada medio (sólido y líquido) y para el tiempo, como ejemplo, el método empleado para obtener una solución analítica es el implícito. Ejemplificando ocho nodos de forma matricial tenemos,

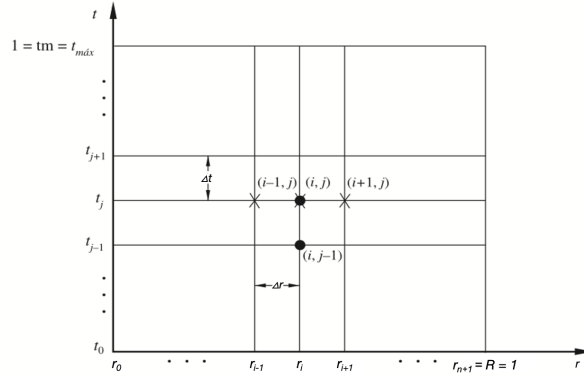


Figura 3.3: Nodos básicos para el método implícito.

Fuente: [Nieves and Domínguez, 2014]

$$\begin{bmatrix} 2\lambda_1 + 1 & -\frac{\lambda_2}{2r_2} - \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda_2}{2r_3} - \lambda_1 & 2\lambda_1 + 1 & -\frac{\lambda_2}{2r_3} - \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2}{2r_4} - \lambda_1 & 2\lambda_1 + 1 & -\frac{\lambda_2}{2r_4} - \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_2}{2r_5} - \lambda_1 & 2\lambda_1 + 1 & -\frac{\lambda_2}{2r_5} - \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_2}{2r_6} - \lambda_1 & 2\lambda_1 + 1 & -\frac{\lambda_2}{2r_6} - \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_2}{2r_7} - \lambda_1 & 2\lambda_1 + 1 \end{bmatrix}_{(6 \times 6)} \begin{bmatrix} T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{4,2} \\ T_{5,2} \\ T_{6,2} \\ T_{7,2} \end{bmatrix}_{(6 \times 1)} = \begin{bmatrix} T_{2,1} - \left(\frac{\lambda_2}{2r_2} - \lambda_1\right) T_{1,2} \\ T_{3,1} \\ T_{4,1} \\ T_{5,1} \\ T_{6,1} \\ T_{7,1} - \left(-\frac{\lambda_2}{2r_7} - \lambda_1\right) T_{8,2} \end{bmatrix}_{(6 \times 1)}$$

$AT = B$

$T = A^{-1}B$

donde,

- A = matriz del sistema de ecuaciones
- T = temperaturas incógnitas en el tiempo actual
- B = vector del sistema de ecuaciones que contiene las temperaturas del tiempo anterior y temperaturas en las fronteras

El modelo también considera la ecuación de movimiento de la interfase,

$$\rho_i L_f \frac{d\xi}{dt} = -k_l \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi^-} + k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi^+} \tag{3.7}$$

donde,

- velocidad de la interfase: $\frac{d\xi}{dt}$ en $\left[\frac{m}{s}\right]$
- conductividad térmica: k_l, k_s en $\left[\frac{W}{m K}\right] = \left[\frac{J}{m K s}\right]$
- densidad: ρ_i donde $i = l, s$ en $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$

- calor latente de fusión: L_f en $\left[\frac{\text{J}}{\text{kg}}\right]$

Aproximando las derivadas de la ecuación (3.5.1):

a) Aproximación derecha de primer orden para la primera derivada temporal,

$$\frac{\partial \xi(r, t)}{\partial t} = \frac{\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j}}{\Delta t}, \varepsilon = o(\Delta t) \quad (3.8)$$

b) Aproximación izquierda de cuarto orden $O(h^4)$ para la primera derivada espacial de la temperatura del líquido,

$$\frac{\partial T_l(r, t)}{\partial r} = \frac{25 T_{i,j} - 48 T_{i-1,j} + 36 T_{i-2,j} - 16 T_{i-3,j} + 3 T_{i-4,j}}{12 \Delta r}, \varepsilon = o(\Delta r^4) \quad (3.9)$$

c) Aproximación derecha de cuarto orden $O(h^4)$ para la primera derivada espacial de la temperatura del sólido,

$$\frac{\partial T_s(r, t)}{\partial r} = \frac{-3 T_{i+4,j} + 16 T_{i+3,j} - 36 T_{i+2,j} + 48 T_{i+1,j} - 25 T_{i,j}}{12 \Delta r}, \varepsilon = o(\Delta r^4) \quad (3.10)$$

donde,

$$\xi_{i,j} = \xi(r_i, t_j), \xi_{i,j-1} = \xi(r_i, t_{j-1}), T_{i,j} = T(r_i, t_j)$$

$$T_{i+1,j} = T(r_{i+1}, t_j), T_{i+2,j} = T(r_{i+2}, t_j), T_{i+3,j} = T(r_{i+3}, t_j), T_{i+4,j} = T(r_{i+4}, t_j)$$

$$T_{i-1,j} = T(r_{i-1}, t_j), T_{i-2,j} = T(r_{i-2}, t_j), T_{i-3,j} = T(r_{i-3}, t_j), T_{i-4,j} = T(r_{i-4}, t_j)$$

sustituyendo las aproximaciones de las ecuaciones (3.8), (3.9) y (3.10) en la ecuación (3.5.1),

$$\rho_i L_f \frac{\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j}}{\Delta t} = k_s \frac{-3 T_{i+4,j} + 16 T_{i+3,j} - 36 T_{i+2,j} + 48 T_{i+1,j} - 25 T_{i,j}}{12 \Delta r} - k_l \frac{25 T_{i,j} - 48 T_{i-1,j} + 36 T_{i-2,j} - 16 T_{i-3,j} + 3 T_{i-4,j}}{12 \Delta r}$$

$$\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j} = \frac{\Delta t}{\rho_i L_f \Delta r} \left(k_s \frac{-3 T_{i+4,j} + 16 T_{i+3,j} - 36 T_{i+2,j} + 48 T_{i+1,j} - 25 T_{i,j}}{12} - k_l \frac{25 T_{i,j} - 48 T_{i-1,j} + 36 T_{i-2,j} - 16 T_{i-3,j} + 3 T_{i-4,j}}{12} \right)$$

$$\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j} = \frac{\Delta t}{\rho_i L_f \Delta r} \left(k_s \left(-\frac{1}{4} T_{i+4,j} + \frac{4}{3} T_{i+3,j} - 3 T_{i+2,j} + 4 T_{i+1,j} - \frac{25}{12} T_{i,j} \right) - k_l \left(\frac{25}{12} T_{i,j} - 4 T_{i-1,j} + 3 T_{i-2,j} - \frac{4}{3} T_{i-3,j} + \frac{1}{4} T_{i-4,j} \right) \right)$$

ordenando los términos, finalmente llegamos a la ecuación discretizada,

$$\xi_{i,j+1} = \xi_{i,j} - \frac{\Delta t}{\rho_i L_f \Delta r_l} k_l \left(\frac{25}{12} T_{i,j} - 4 T_{i-1,j} + 3 T_{i-2,j} - \frac{4}{3} T_{i-3,j} + \frac{1}{4} T_{i-4,j} \right) + \frac{\Delta t}{\rho_i L_f \Delta r_s} k_s \left(-\frac{1}{4} T_{i+4,j} + \frac{4}{3} T_{i+3,j} - 3 T_{i+2,j} + 4 T_{i+1,j} - \frac{25}{12} T_{i,j} \right) \quad (3.11)$$

3.4.2. Estado Estacionario

Para poder obtener la ecuación del movimiento de la interfase en el estado estacionario se requiere de la ecuación diferencial de la conducción de calor tanto para la fase líquida como para la fase sólida. Adicional a esto se incluyen tres condiciones: la ecuación de movimiento de Stefan, las condiciones de frontera de Dirichlet y la temperatura en la interfase o temperatura de fusión del material. Para el estado estacionario el término de la izquierda de la ecuación (3.2) se iguala a cero, la temperatura queda en función de r solamente y las derivadas parciales se vuelven ordinarias,

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha \left(\frac{1}{r} \frac{dT_i(r)}{dr_i} + \frac{d^2T_i(r)}{dr_i^2} \right) \\ 0 &= \frac{1}{r} \frac{dT_i(r)}{dr_i} + \frac{d^2T_i(r)}{dr_i^2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

resolviendo la ecuación anterior, obtenemos la ecuación general de los perfiles de temperatura,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr_i} \left(r \frac{dT_i}{dr_i} \right) &\implies A = \int \frac{d}{dr_i} \left(r \frac{dT_i}{dr_i} \right) dr \implies A = r \frac{dT_i}{dr_i} \implies \frac{dT_i}{dr_i} = \frac{A}{r} \implies \int \frac{dT_i}{dr_i} dr = A \int \frac{1}{r} dr \\ &\implies T_i = A \ln r_i + B \end{aligned} \quad (3.13)$$

En la fase líquida la ecuación (3.13) queda,

$$T_L = A \ln r_l + B \quad (3.14)$$

y usando las condiciones de frontera correspondientes a esta fase, $T_l(r_0, t) = T_l$, $T_l(\xi, t) = T_f$, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$T_l(r_0) = A \ln r_0 + B \quad (3.15)$$

$$T_l(\xi) = A \ln \xi + B \quad (3.16)$$

para obtener la constante A , a la ecuación (3.15) se le resta la ecuación (3.16),

$$\begin{aligned} T_l(r_0) - T_l(\xi) &= A \ln r_0 - A \ln \xi \implies T_l(r_0) - T_l(\xi) = A \ln \left(\frac{r_0}{\xi} \right) \\ &\implies A = \frac{T_l(r_0) - T_l(\xi)}{\ln r_0 - \ln \xi} \end{aligned} \quad (3.17)$$

sustituyendo la constante A en la ecuación (3.15) obtendremos la constante B ,

$$\begin{aligned} T_l(r_0) &= \frac{T_l(r_0) - T_l(\xi)}{\ln r_0 - \ln \xi} \ln r_0 + B \implies B = T_l(r_0) - \frac{T_l(r_0) - T_l(\xi)}{\ln r_0 - \ln \xi} \ln r_0 \\ &\implies B = T_l(r_0) - \frac{\ln r_0 (T_l(r_0) - T_l(\xi))}{\ln r_0 - \ln \xi} \end{aligned} \quad (3.18)$$

por último sustituimos las constantes A y B en la ecuación (3.14) para obtener el perfil de temperaturas de la fase líquida,

$$\begin{aligned} T_L &= \frac{T_l(r_0) - T_l(\xi)}{\ln r_0 - \ln \xi} \ln r_l + T_l(r_0) - \frac{\ln r_0 (T_l(r_0) - T_l(\xi))}{\ln r_0 - \ln \xi} \\ T_L &= \frac{\ln r_l (T_l(r_0) - T_l(\xi))}{\ln r_0 - \ln \xi} - \frac{\ln r_0 (T_l(r_0) - T_l(\xi))}{\ln r_0 - \ln \xi} + T_l(r_0) \end{aligned}$$

$$T_L = (\ln r_l - \ln r_0) \frac{(T_l(r_0) - T_l(\xi))}{\ln r_0 - \ln \xi} + T_l(r_0) \quad (3.19)$$

En la fase sólida la ecuación (3.13) queda,

$$T_S = A \ln r_s + B \quad (3.20)$$

y usando las condiciones de frontera correspondientes a esta fase, $T_s(\xi, t) = T_f$, $T_s(R, t) = T_s$, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$T_s(\xi) = A \ln \xi + B \quad (3.21)$$

$$T_s(R) = A \ln R + B \quad (3.22)$$

para obtener la constante A , a la ecuación (3.21) se le resta la ecuación (3.22),

$$\begin{aligned} T_s(\xi) - T_s(R) = A \ln \xi - A \ln R &\implies T_s(\xi) - T_s(R) = A \ln \left(\frac{\xi}{R} \right) \\ &\implies A = \frac{T_s(\xi) - T_s(R)}{\ln \xi - \ln R} \end{aligned} \quad (3.23)$$

sustituyendo la constante A en la ecuación (3.21) obtendremos la constante B ,

$$\begin{aligned} T_s(\xi) = \frac{T_s(\xi) - T_s(R)}{\ln \xi - \ln R} \ln \xi + B &\implies B = T_s(\xi) - \frac{T_s(\xi) - T_s(R)}{\ln \xi - \ln R} \ln \xi \\ &\implies B = T_s(\xi) - \frac{\ln \xi (T_s(\xi) - T_s(R))}{\ln \xi - \ln R} \end{aligned} \quad (3.24)$$

por último sustituimos las constantes A y B en la ecuación (3.20) para obtener el perfil de temperaturas de la fase sólida,

$$\begin{aligned} T_S &= \frac{T_s(\xi) - T_s(R)}{\ln \xi - \ln R} \ln r_s + T_s(\xi) - \frac{\ln \xi (T_s(\xi) - T_s(R))}{\ln \xi - \ln R} \\ T_S &= \frac{\ln r_s (T_s(\xi) - T_s(R))}{\ln \xi - \ln R} - \frac{\ln \xi (T_s(\xi) - T_s(R))}{\ln \xi - \ln R} + T_s(\xi) \\ T_S &= (\ln r_s - \ln \xi) \frac{(T_s(\xi) - T_s(R))}{\ln \xi - \ln R} + T_s(\xi) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Una vez que tenemos las ecuaciones de los perfiles de temperatura para ambas fases, las podemos sustituir en la ecuación de Stefan en estado estacionario. Para el estado estacionario, el término de la izquierda de la ecuación (3.5.1) se iguala a cero y las derivadas parciales se vuelven ordinarias,

$$0 = -k_l \frac{dT_l}{dr_l} \Big|_{r=\xi^-} + k_s \frac{dT_s}{dr_s} \Big|_{r=\xi^+} \quad (3.26)$$

sustituyendo las ecuaciones de los perfiles de temperatura de la (3.19) y la (3.25) en la (3.26),

$$0 = -k_l \frac{d \left((\ln r_l - \ln r_0) \frac{(T_l(r_0) - T_l(\xi))}{\ln r_0 - \ln \xi} + T_l(r_0) \right)}{dr_l} + k_s \frac{d \left((\ln r_s - \ln \xi) \frac{(T_s(\xi) - T_s(R))}{\ln \xi - \ln R} + T_s(\xi) \right)}{dr_s}$$

derivando los términos con respecto a dr ,

$$0 = -k_l \left(\frac{(T_l(r_0) - T_l(\xi))}{\ln r_0 - \ln \xi} \frac{1}{\xi} \right) + k_s \left(\frac{(T_s(\xi) - T_s(R))}{\ln \xi - \ln R} \frac{1}{\xi} \right)$$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{\xi} \left(-k_l \left(\frac{(T_l(r_0) - T_l(\xi))}{\ln r_0 - \ln \xi} \right) + k_s \left(\frac{(T_s(\xi) - T_s(R))}{\ln \xi - \ln R} \right) \right) \\
0 &= -k_l \left(\frac{(T_l(r_0) - T_l(\xi))}{\ln r_0 - \ln \xi} \right) + k_s \left(\frac{(T_s(\xi) - T_s(R))}{\ln \xi - \ln R} \right) \\
k_l \left(\frac{(T_l(r_0) - T_l(\xi))}{\ln r_0 - \ln \xi} \right) &= k_s \left(\frac{(T_s(\xi) - T_s(R))}{\ln \xi - \ln R} \right) \\
\frac{k_l (T_l(r_0) - T_l(\xi))}{\ln r_0 - \ln \xi} &= \frac{k_s (T_s(\xi) - T_s(R))}{\ln \xi - \ln R}
\end{aligned}$$

$$(\ln \xi - \ln R) k_l (T_l(r_0) - T_l(\xi)) = (\ln r_0 - \ln \xi) k_s (T_s(\xi) - T_s(R))$$

$$\ln \xi k_l (T_l(r_0) - T_l(\xi)) - \ln R k_l (T_l(r_0) - T_l(\xi)) = \ln r_0 k_s (T_s(\xi) - T_s(R)) - \ln \xi k_s (T_s(\xi) - T_s(R))$$

$$\ln \xi k_l (T_l(r_0) - T_l(\xi)) + \ln \xi k_s (T_s(\xi) - T_s(R)) = \ln r_0 k_s (T_s(\xi) - T_s(R)) + \ln R k_l (T_l(r_0) - T_l(\xi))$$

$$\ln \xi (k_l (T_l(r_0) - T_l(\xi)) + k_s (T_s(\xi) - T_s(R))) = \ln r_0 k_s (T_s(\xi) - T_s(R)) + \ln R k_l (T_l(r_0) - T_l(\xi))$$

$$\ln \xi = \frac{\ln r_0 k_s (T_s(\xi) - T_s(R)) + \ln R k_l (T_l(r_0) - T_l(\xi))}{k_l (T_l(r_0) - T_l(\xi)) + k_s (T_s(\xi) - T_s(R))}$$

$$\xi = e^{\frac{\ln r_0 k_s (T_s(\xi) - T_s(R)) + \ln R k_l (T_l(r_0) - T_l(\xi))}{k_l (T_l(r_0) - T_l(\xi)) + k_s (T_s(\xi) - T_s(R))}}$$

cambiando las variables $T_s(\xi) = T_l(\xi)$ por T_f , entonces

$$\xi = e^{\frac{\ln r_0 k_s (T_f - T_s(R)) + \ln R k_l (T_l(r_0) - T_f)}{k_l (T_l(r_0) - T_f) + k_s (T_f - T_s(R))}} \quad (3.27)$$

si decimos que,

$$\delta = \frac{k_s (T_f - T_s(R))}{k_l (T_l(r_0) - T_f) + k_s (T_f - T_s(R))}$$

y

$$\gamma = \frac{k_l (T_l(r_0) - T_f)}{k_l (T_l(r_0) - T_f) + k_s (T_f - T_s(R))}$$

entonces,

$$\xi = e^{(\ln r_0 \delta)} e^{(\ln R \gamma)} = (e^{\ln r_0})^\delta (e^{\ln R})^\gamma$$

por lo tanto, la ecuación del movimiento de la interfase en estado estacionario es,

$$\xi = r_0^\delta R^\gamma = R \left(\frac{r_0}{R} \right)^\delta = r_0 \left(\frac{R}{r_0} \right)^\gamma \quad (3.28)$$

3.5. Modelo 2: Problema de Stefan y Conservación de la Masa

Extender el modelo planteado en [Santiago et al., 2017] a coordenadas cilíndricas. Resolver la ecuación diferencial unidimensional de conducción de calor en un cilindro, considerando a la parafina como un material homogéneo con cambio de fase.

Obtener el perfil de temperaturas del **modelo isobárico de masa total constante** en estado transiente sin considerar la generación de calor en el sistema, utilizando el método de diferencia finita con esquema implícito de segundo orden para la ecuación diferencial de calor, el esquema explícito de orden superior para la condición de Stefan y esquema explícito de primer orden para la ecuación de conservación de la masa total.

Para el planteamiento del problema se asumió lo siguiente:

- Variables termodinámicas como la conductividad térmica, calor específico y densidad en cada fase son constantes y no dependen de la temperatura.
- No hay generación de calor en el sistema.
- El flujo de calor es simétrico a lo largo de la sección transversal del cilindro, por lo que el problema se considera unidimensional.
- No se considera que se presente convección natural en el sistema.
- No se considera transferencia de calor por convección entre el sistema y el exterior.
- No hay transferencia de calor por radiación.
- No se considera la formación de zona pastosa.

3.5.1. Planteamiento Matemático

En este modelo se tomaron en cuenta los cambios de volumen en la dirección radial producidos por la diferencia de densidades entre el líquido y el sólido. Independientemente de que el sólido se derrita o el líquido se solidifique, en el Apéndice B se demuestra que la ecuación de movimiento de la interfase cuando $R(t)$ es una variable dinámica del movimiento y r_0 está fija en el tiempo, es la siguiente:

$$\rho_l L_f \frac{d\xi}{dt} = -k_l \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi^-} + k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi^+}$$

donde ρ_l es la densidad del líquido que aparece independientemente de la dirección en la que se mueve la interfase como consecuencia de imponer la masa total como una constante del movimiento. Adicional a la ecuación anterior y a la ecuación (3.2) desarrollada en el Planteamiento Matemático (3.4.1). En este modelo isobárico de masa constante está acoplado a la ecuación de la conservación de la masa total en coordenadas cilíndricas, i.e la ecuación de movimiento para el radio exterior.

La ecuación de la conservación de la masa inicia su planteamiento considerando que la masa total del MCF es igual a la suma de las masas de la fase líquida y la fase sólida, $m_T = m_l + m_s$. Considerando que la masa es igual a la densidad por el volumen, entonces $m_T = \rho_l V_l + \rho_s V_s$ y el volumen de un cilindro es igual a la longitud o altura del cilindro (L) por el área transversal (A_l, A_s), entonces $m_T = \rho_l L A_l + \rho_s L A_s$. De acuerdo con la figura (3.2) podemos observar que el área transversal de la fase líquida se puede obtener restando el área del líquido ($\pi \xi^2$) menos el área del calentador (πr_0^2) y el área transversal de la fase sólida se obtiene de la diferencia del área del sólido (πR^2) menos el área del líquido ($\pi \xi^2$); por lo tanto, la ecuación de la masa queda,

$$m_T = \rho_l L (\pi \xi^2 - \pi r_0^2) + \rho_s L (\pi R^2 - \pi \xi^2) \quad (3.29)$$

donde,

- Masa del líquido: m_l en [kg]
- Masa del sólido: m_s en [kg]
- Longitud: L en [m]
- Densidad líquido: ρ_l en $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$
- Densidad sólido: ρ_s en $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$
- Distancia de la interfase: ξ en [m]
- Radio exterior: R en [m]

Derivando la ecuación (3.29) usando la regla de la cadena $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$, y considerando que la masa no cambia en el tiempo (conservación de la masa) $\frac{dm_T}{dt} = 0 \implies m_0 = m(t)$, obtenemos lo siguiente,

$$0 = \rho_l L \left(2 \pi \xi \frac{d\xi}{dt} \right) + \rho_s L \left(2 \pi R \frac{dR}{dt} - 2 \pi \xi \frac{d\xi}{dt} \right)$$

$$0 = 2 \pi L \rho_l \left(\xi \frac{d\xi}{dt} \right) + 2 \pi L \rho_s \left(R \frac{dR}{dt} - \xi \frac{d\xi}{dt} \right)$$

Ecuación de la conservación de la masa en coordenadas cilíndricas,

$$0 = \rho_l \xi \frac{d\xi}{dt} + \rho_s \left(R \frac{dR}{dt} - \xi \frac{d\xi}{dt} \right) \quad (3.30)$$

Aproximando las derivadas de la ecuación (3.30):

a) Aproximación derecha para la primera derivada de ξ en el tiempo,

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j}}{\Delta t}, \varepsilon = o(\Delta t) \quad (3.31)$$

b) Aproximación derecha para la primera derivada de R en el tiempo,

$$\frac{dR}{dt} = \frac{R_{i,j+1} - R_{i,j}}{\Delta t}, \varepsilon = o(\Delta t) \quad (3.32)$$

sustituyendo las aproximaciones de las ecuaciones (3.31) y (3.32) en la ecuación (3.30).

$$0 = \rho_l \xi(t_j) \frac{d\xi}{dt} \Big|_{t=t_j} + \rho_s \left(R(t) \frac{dR}{dt} \Big|_{t=t_j} - \xi(t) \frac{d\xi}{dt} \Big|_{t=t_j} \right)$$

$$0 = \rho_l \xi_{i,j} \frac{\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j}}{\Delta t} + \rho_s \left(R_{i,j} \frac{R_{i,j+1} - R_{i,j}}{\Delta t} - \xi_{i,j} \frac{\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j}}{\Delta t} \right)$$

$$0 = \rho_l \xi_{i,j} \left(\frac{\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j}}{\Delta t} \right) + \rho_s R_{i,j} \left(\frac{R_{i,j+1} - R_{i,j}}{\Delta t} \right) - \rho_s \xi_{i,j} \left(\frac{\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j}}{\Delta t} \right)$$

multiplicando la ecuación por Δt ,

$$0 = \rho_l \xi_{i,j} (\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j}) + \rho_s R_{i,j} (R_{i,j+1} - R_{i,j}) - \rho_s \xi_{i,j} (\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j})$$

$$-\rho_s R_{i,j} (R_{i,j+1} - R_{i,j}) = \xi_{i,j} (\rho_l - \rho_s) (\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j})$$

$$(R_{i,j+1} - R_{i,j}) = \frac{\xi_{i,j}}{-\rho_s R_{i,j}} (\rho_l - \rho_s) (\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j})$$

$$R_{i,j+1} = R_{i,j} + \frac{\xi_{i,j}}{R_{i,j}} \frac{(\rho_l - \rho_s)}{-\rho_s} (\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j})$$

simplificando, obtenemos la ecuación unidimensional discretizada de la masa de primer orden,

$$R_{i,j+1} = R_{i,j} + \frac{\xi_{i,j}}{R_{i,j}} \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_s} \right) (\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j}) \quad (3.33)$$

3.5.2. Estado Estacionario

Adicional a las ecuaciones de los perfiles de temperatura para la fase líquida (ecuación (3.19)) y para la fase sólida (ecuación (3.25)) desarrolladas en el Estado Estacionario (3.4.2), se requiere obtener un sistema de dos ecuaciones no lineales con dos incógnitas. Estas variables en estado estacionario son el movimiento de la interfase (ξ) y el movimiento del radio exterior (R).

La ecuación dimensional del movimiento de la interfase es la misma que la ecuación (3.27), solo que para este modelo representa el movimiento de la interfase en el límite o estado estacionario,

$$\xi_{lim} = e^{\frac{\ln r_0 k_s (T_f - T_s(R_{lim})) + \ln R k_l (T_l(r_0) - T_f)}{k_l (T_l(r_0) - T_f) + k_s (T_f - T_s(R_{lim}))}} \quad (3.34)$$

y la segunda que se utiliza es la ecuación de la conservación de la masa en coordenadas cilíndricas (ecuación (3.29))

$$m_T = \rho_l (\pi \xi_{lim}^2 - \pi r_0^2) L + \rho_s (\pi R_{lim}^2 - \pi \xi_{lim}^2) L$$

Ambas ecuaciones forman un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales que en este caso se resolvieron mediante el método de Newton-Raphson para obtener las dos incógnitas dimensionales (ξ_{lim}, R_{lim}).

Capítulo 4

Procedimiento Experimental

4.1. Sistema de Almacenamiento de Energía Térmica (SAET)

Para comprobar la eficiencia de los modelos matemáticos, se construyó un sistema de almacenamiento térmico (SAET) para su experimentación en el laboratorio. La configuración física de este sistema se muestra en la figura 3.2, donde el radio del calentador (r_0) es de 0.635 cm, la posición inicial de la interfase (r_x) es de 0.700 cm y el radio de la pared interior (R) del SAET es de 7.65 cm con un espesor de XX cm.

El material que se utilizó para el cuerpo del cilindro es de PVC (cloruro de polivinilo) hidráulico de 15.24 cm (6 in) de diámetro y una altura de 22.5 cm. La baja conductividad térmica del PVC (0.19 W/m K) ayuda a disminuir la pérdida de calor a través del material.[Toolbox, 2011] Además, se pintó el cilindro con aerosol de color gris para mostrar una apariencia más estética y presentable.

Se adecuó una base para soportar al SAET, con material de fibropanel de densidad media o MDF (Medium Density Fibreboard), debido a su sencilla manufactura y alta absorción a selladores y laca, se recubrió con pintura acrílica color verde y las uniones se recubrieron con resina epóxica marca Resistol para evitar la fuga del MCF (figura 4.1). Esta resina se seleccionó gracias a sus características como la resistencia térmica (alrededor de 70°C) y su alta adherencia a materiales como el PVC.

Dentro del sistema se incorporaron cinco termopares a diferentes alturas con 3.4 cm entre sí y un ángulo de 72°, al estar hechos de material flexible se les adecuó un soporte guía para su entrada al sistema. Este soporte está compuesto por dos partes, una parte externa rígida adherida a la pared del sistema de aislamiento térmico y un soporte menos rígido que cubre al termopar y que ingresa al sistema a través del soporte rígido.

Para el soporte externo rígido se utilizaron bastones de pino sólido de 5 cm de largo y 1.43 de diámetro, y los soportes que envuelven al termopar son tubos largos de plástico con un diámetro de 0.44 cm, como se muestra en la figura 4.3. Para estos cinco sensores se realizó un parametrización dentro del soporte guía, de modo que la punta del sensor estuviera 1 cm fuera del soporte.



(a)



(b)

Figura 4.1: Base del SAET. a) Base para el SAET con la pintura aplicada y b) Resina epóxica utilizada en el pegado de la base y el cuerpo del SAET.



(a)



(b)

Figura 4.2: Ensamble de la base con el cuerpo del SAET.

a) Vista externa y b) Vista interna



(a)



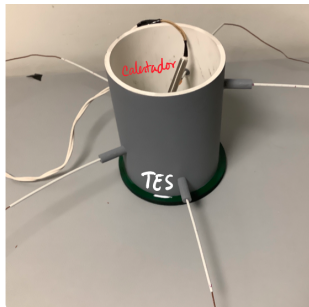
(b)

Figura 4.3: Soportes para guiar a los termopares dentro del SAET.

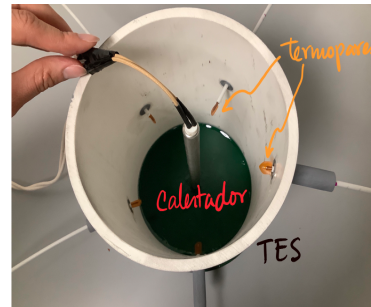
a) Soporte externo rígido y b) Soporte guía para los termopares.

También se tienen cuatro termopares más en el experimento, dos en el calentador (uno de ellos sirve para controlar la temperatura del calentador), uno en la pared exterior del SAET y el último mide la temperatura del medio ambiente en el laboratorio.

La figura 4.4 muestra el SAET ensamblado, con los soportes rígidos, los soportes guías, los termopares colocados a diferentes alturas y el calentador situado en el centro del cilindro.



(a)



(b)

Figura 4.4: Sistema de almacenamiento de energía térmica (SAET) en su versión final.

4.1.1. Hardware

Para la medición del perfil de temperaturas del material de cambio de fase dentro del SAET, se utilizaron 5 sensores que se colocaron en las posiciones mostradas en la figura 4.5. Para el funcionamiento de los termopares se utilizó hardware especializado y software para mostrar las mediciones obtenidas en forma de datos fáciles de leer.

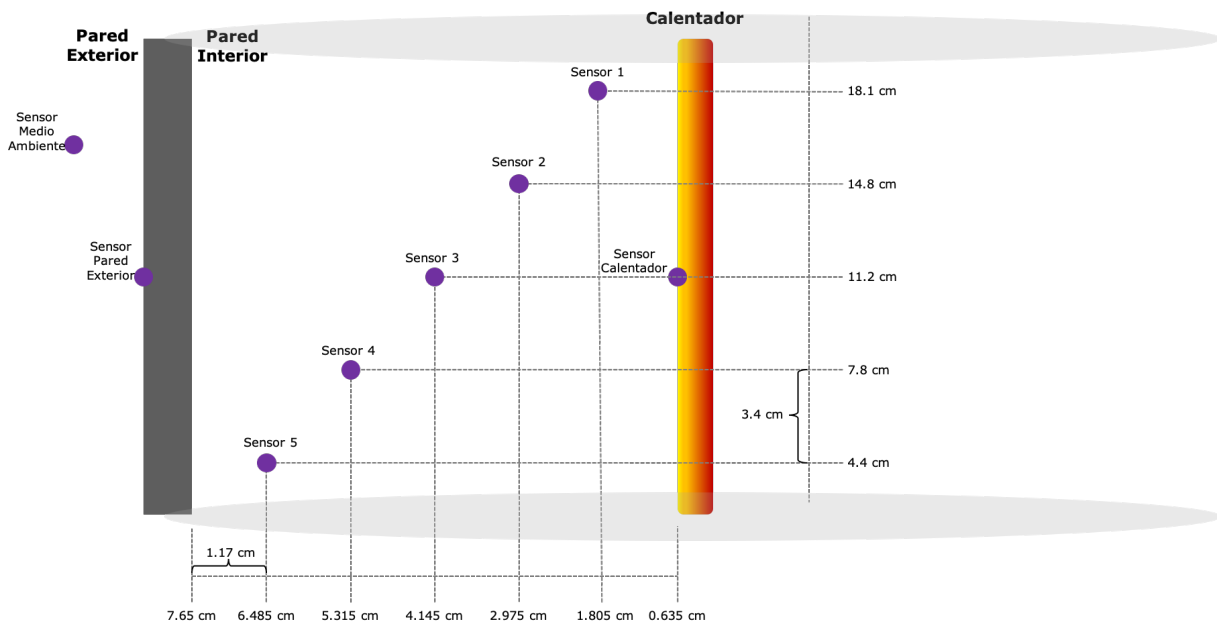


Figura 4.5: Posición de los termopares en el SAET

La siguiente figura muestra el sistema donde aparecen las partes principales del hardware.

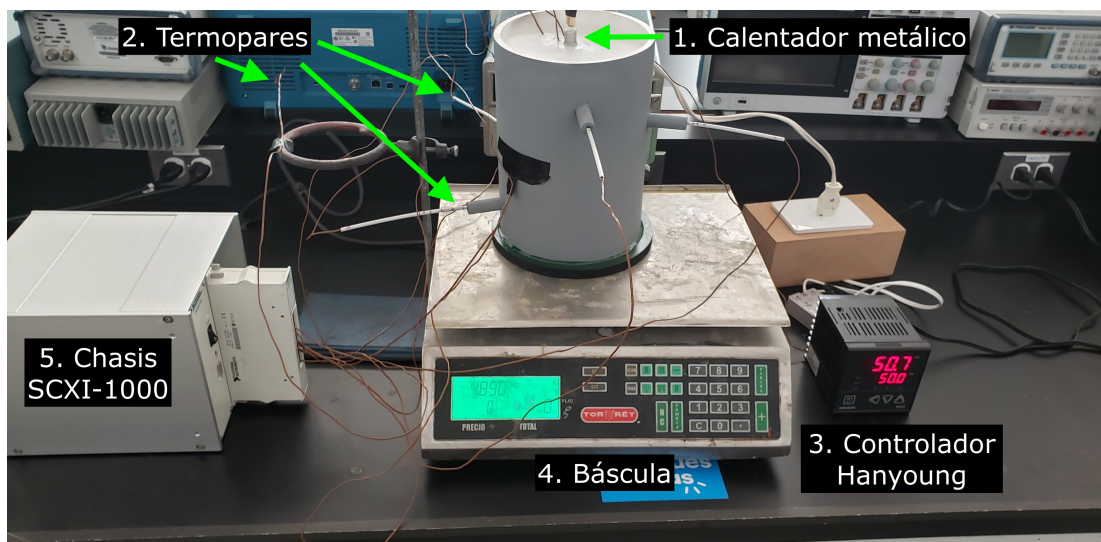


Figura 4.6: Montaje del experimento.

1. Calentador metálico. Se utilizó un calentador eléctrico de alta potencia para fluidos en contenedores. Se colocó en el centro del SAET, detenido por un soporte universal para desmontarlo fácilmente si así se requiere. Está inmerso en el MCF (parafina) donde suministra un flujo de energía homogéneo, este flujo se mide en forma de temperatura en las cinco coordenadas antes mencionadas. La temperatura del calentador será constante; pero al ser sólo una resistencia con conexión, se requiere de un sistema de lazo cerrado con controlador PID que mantenga la temperatura buscada. Con ese sistema se busca medir la temperatura del calentador y calcular el error entre el valor deseado y el valor obtenido, esto se corrige al pasar por el controlador. El diagrama representativo de la aplicación de control de temperatura se muestra en la figura (4.7).

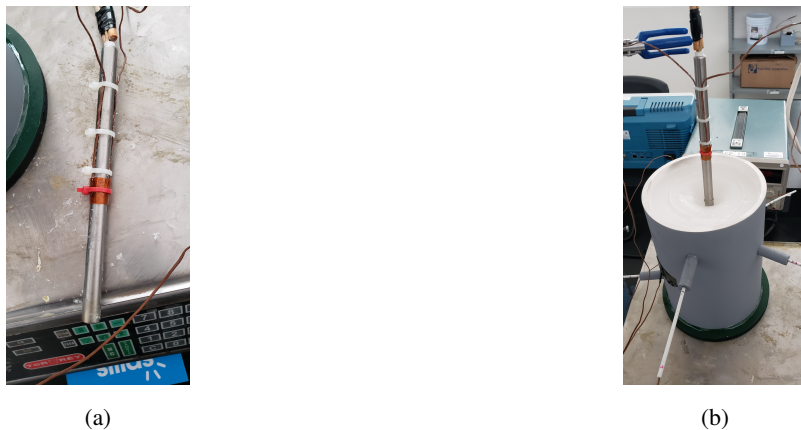


Figura 4.7: a) Calentador metálico con termopares y b) Calentador sostenido por el soporte universal para ingresar en el SAET relleno de parafina como MCF.

2. Termopares. Para la medición de la temperatura en los diversos puntos de control se utilizaron termopares. El efecto de los termopares se basa en el descubrimiento de Seebeck en 1821, quien encontró que la circulación de una corriente en un circuito cerrado formado por dos metales diferentes cuyas uniones (unión de medida o caliente y unión de referencia o fría) se mantienen a distinta temperatura. [Creus, 2010] Entonces un termopar consiste en la conversión de energía térmica en energía eléctrica. Fuente: [Omega, 2020] La energía eléctrica resultante es función de la diferencia de temperatura; por lo tanto, puede utilizarse como un instrumento de medición. [Pollock, 1991]

Los termopares que se utilizaron son tipo K, de Níquel-Cromo (cromel) / Níquel-Aluminio (alumel). Se utilizan para temperaturas entre $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$ y $1,100\text{ }^{\circ}\text{C}$. [Creus, 2010]

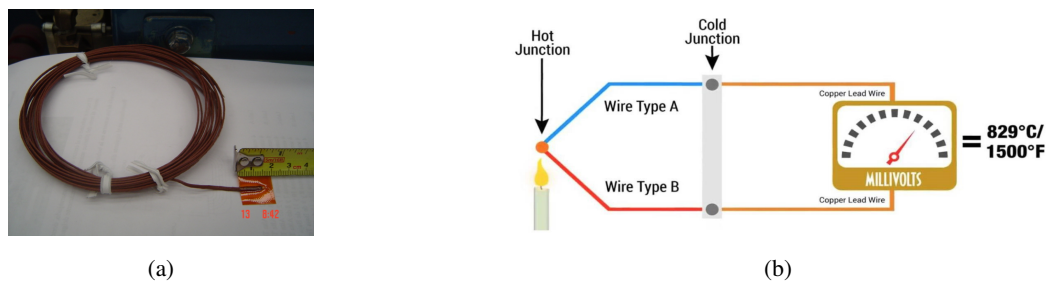


Figura 4.8: a) Termopares tipo K y b) Diagrama de funcionamiento de un termopar.

3. Controlador Hanyoung NX9-00. El controlador Hanyoung modelo NX9-00 sirve para controlar procesos de temperatura. Tiene diversas opciones de configuración para adecuarse a cualquier sistema de control de temperatura. El modelo NX permite controlar actuadores por medio de PID, y tiene una amplia variedad de sensores con los que puede trabajar, entre ellos el termopar tipo K.

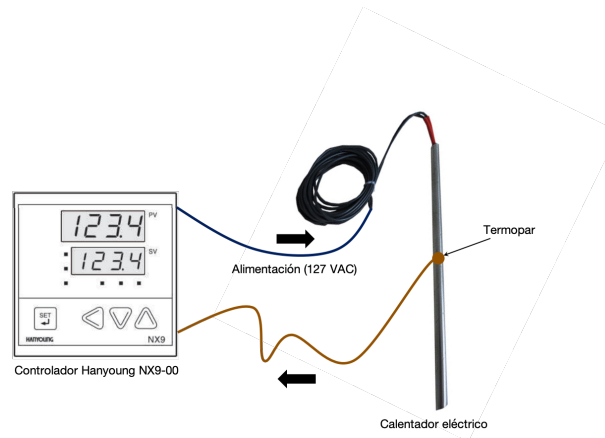


Figura 4.9: Sistema térmico donde están el controlador, el calentador y el termopar.

4. Báscula Torrey serie L-PCR.

5. Chasis de SCXI-1000 de National Instruments. El NI SCXI-1000 es un chasis durable, bajo en ruido para los módulos SCXI, que se pueden emplear para toda la planeación, iniciación, y enrutamiento de las señales entre diferentes módulos y los módulos SCXI. Este cuenta con cuatro espacios para insertar diferentes módulos SCXI-13XX. [Instruments, 2020]. Dentro del chasis se encuentran los siguientes dispositivos:

a. Módulo amplificador SCXI-1102. Módulo de Entrada de Voltaje para SCXI, 32 Canales, ± 10 V, Filtro 2 Hz—El SCXI-1102 está diseñado para acondicionamiento de señales de termopares, milivoltios, voltios y corriente. Tiene un sensor de compensación de extremos fríos para medición de temperatura y varios rangos de ganancia con un filtro de frecuencia de corte de 2 Hz. Todos los canales están conectados a un solo canal de un dispositivo DAQ de control, lo que aumenta la cantidad de canales del sistema DAQ. [Instruments, 2006]

b. Bloque terminal SCXI-1303. Es un dispositivo blindado con terminales de tornillo que se conecta a los módulos SCXI-1102/B/C y SCXI-1100. Tiene un termistor de alta precisión con un sensor de temperatura de unión fría y un plano de cobre isotérmico para minimizar los gradientes de temperatura a través de las terminales de tornillo cuando se realizan las mediciones con los termopares. [Instruments, 2000]

c. Tarjeta de adquisición de datos PCI-6251. Ofrece E/S analógicas, E/S digitales correlacionadas, dos contadores/temporizadores de 32 bits y disparos analógicos y digitales. El dispositivo ofrece capacidades DAQ confiables para aplicaciones simples en la automatización de laboratorios, investigación, verificación/prueba de diseños y pruebas de manufactura. Puede agregar la capacidad de medidas de alto voltaje y de sensores a su dispositivo con módulos de acondicionamiento de señales SCC o SCXI. [Instruments, 2016]

4.1.2. Software

1. LabView: NI LabVIEW2017. La interfase se hizo en el programa LabView, principalmente por dos razones: 1) por utilizar una tarjeta de adquisición de datos de National Instruments y 2) por ser un ambiente de programación simple e intuitivo.

En la figura (4.10) se muestran dos formas de ver los datos, una es a través de la imagen del SAET donde se aprecia el valor en tiempo real de cada sensor que involucra el sistema y la segunda forma es con la gráfica, donde se incluye el historial completo de los valores registrados por cada sensor. Otras de las funciones que se pueden apreciar es la selección del tiempo para que los sensores registren los datos entre muestra y muestra (delta tiempo) y un cuadro de texto donde se escribe el nombre del archivo que guardará los datos que se generen en el experimento.

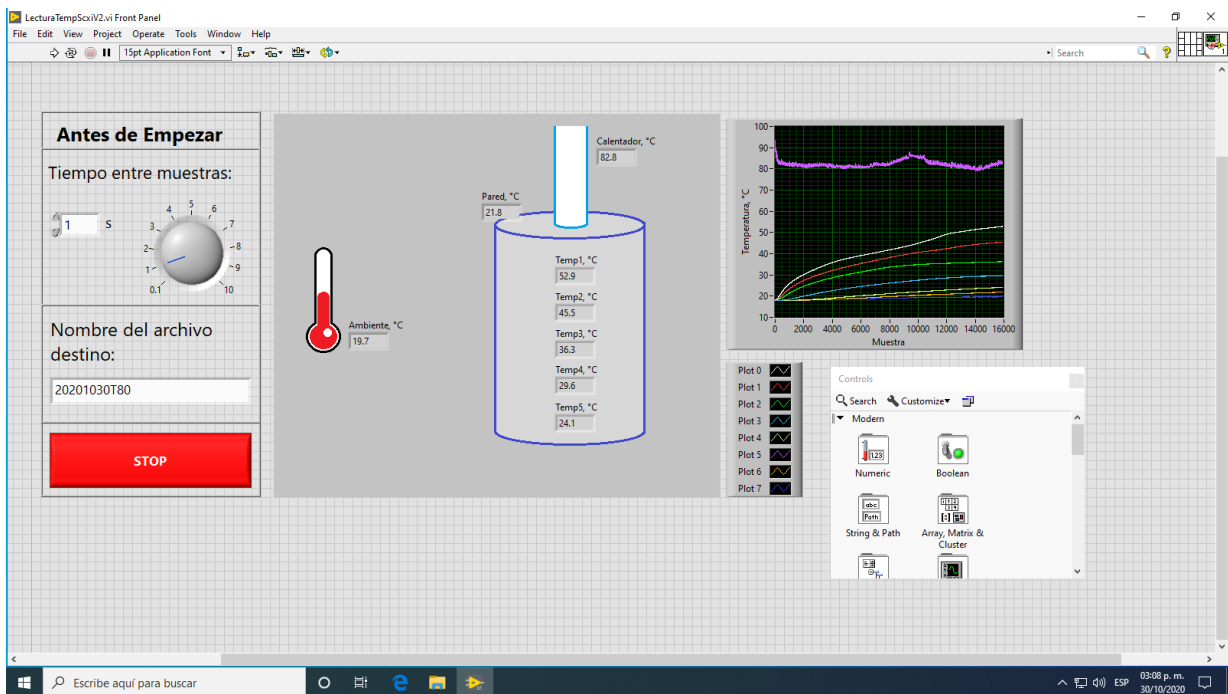


Figura 4.10: Interfase del software NI LabVIEW2017.

2. Matlab. Versión MatLab R2019a (abreviatura de MATrix LABoratory, «laboratorio de matrices») es un sistema de cómputo numérico que ofrece un entorno de desarrollo integrado (IDE) con un lenguaje de programación propio (lenguaje M). Esta es la herramienta con la que se desarrollaron los modelos numéricos y con la cual se realizaron las simulaciones matemáticas.

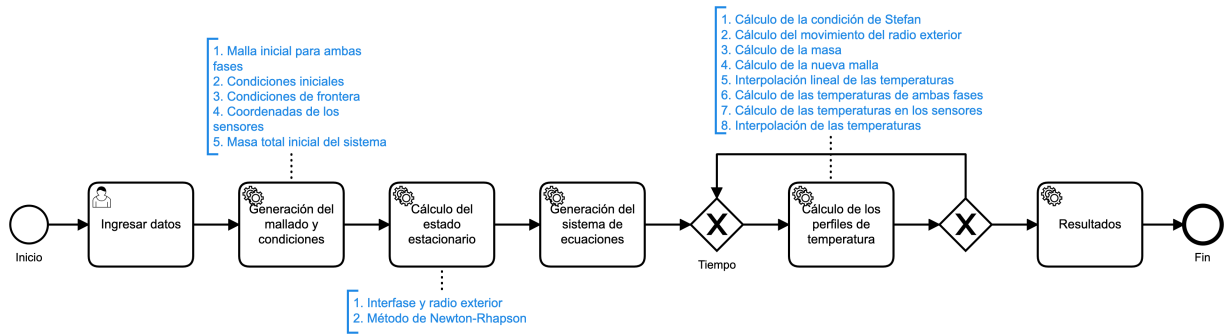


Figura 4.11: Diagrama de bloques del proceso de cálculos de MatLab.

Capítulo 5

Discusión y Resultados

Para obtener los perfiles de temperatura del modelo isobárico en coordenadas cilíndricas (figuras (4.1a) y (4.9a)) se utilizó el método de diferencias finitas con esquema implícito de segundo orden para la ecuación discretizada de calor en coordenadas cilíndricas (3.6) y el esquema explícito de orden superior para la ecuación discretizada de movimiento de la interfase (3.11), utilizando las condiciones de frontera de Dirichlet.

Los datos que se utilizaron para los cálculos son los presentados en la tabla (5.1) cuando se utilizó la temperatura del calentador en 70°C y los de la tabla (5.2) cuando la temperatura del calentador fue de 80 °C. La diferencia de tiempos se debe a los tiempos utilizados en los experimentos correspondientes.

Parámetros utilizados		Magnitud	Unidades
radio del calentador	r_0	0.00635	m
posición de la interfase inicial	ξ_0	0.007	m
altura del cilindro	L	0.225	m
tiempo máximo	t_{max}	15,000	s
tiempo máximo en estado estacionario	t_{max}	150,000	s
	Δt	1/3	s
nodos en fase líquida	n_l	50	
nodos en fase sólida	n_s	100	

Cuadro 5.1: Datos utilizados en los cálculos de la parafina con $T(r_0, t) = 70^\circ\text{C}$.

Lo mismo se realizó con el modelo isobárico de masa total constante. En este caso se utilizó la ecuación discretizada de calor en coordenadas cilíndricas (3.6), la ecuación discretizada de movimiento de la interfase (3.11), y la ecuación discretizada de conservación de masa total, mediante el método de diferencias finitas con un esquema implícito, cuando el sistema está sujeto a condiciones de frontera isotérmicas (Dirichlet). Podemos observar los perfiles de temperatura en los sensores en las figuras (4.1b) y (4.9b) utilizando este modelo.

En las gráficas (5.3) y (5.11) se muestra el comportamiento experimental de la temperatura de cada uno de los

Parámetros utilizados		Magnitud	Unidades
radio del calentador	r_0	0.00635	m
posición de la interfase inicial	ξ_0	0.007	m
altura del cilindro	L	0.225	m
tiempo máximo	t_{max}	16,000	s
tiempo máximo en estado estacionario	t_{max}	160,000	s
	Δt	1/3	s
nodos en fase líquida	n_l	50	
nodos en fase sólida	n_s	100	

Cuadro 5.2: Datos utilizados en los cálculos de la parafina con $T(r_0, t) = 80^\circ C$.

sensores a las temperaturas del calentador correspondientes. El Apéndice A muestra el procedimiento que se usó para la realización de los experimentos.

Las figuras (5.4) y (5.12), incluyen los dos modelos usados en este trabajo y los datos experimentales. Podemos observar la comparación de temperaturas en cada uno de los sensores, en los internos del SAET, los colocados en la pared del calentador, fuera del SAET y el que mide la temperatura ambiente. El sensor de la pared muestra variaciones de temperatura debido a que durante el tiempo de duración del experimento la temperatura del laboratorio aumenta, además no había control sobre las condiciones de temperatura en el laboratorio.

Las figuras (5.5), (5.6), (5.7), (5.13), (5.14) y (5.15) muestran un mejor comportamiento de la temperatura en cada uno de los sensores que están dentro del SAET. En todas estas gráficas se puede apreciar que la curva más cercana a los datos experimentales es la que pertenece al modelo isobárico de masa constante. Dentro del acercamiento mostrado se puede observar una diferencia entre ambos modelos.

En el sensor 1 se puede apreciar que hay una diferencia de la temperatura a $70^\circ C$ y a $80^\circ C$ en cuanto a comportamiento. Mientras que a $70^\circ C$ la curva experimental está por debajo de ambas curvas modeladas matemáticamente, la curva a los $80^\circ C$ del calentador logra sobrepasarlas en un tiempo poco superior a los 11 mil segundos. En los demás sensores los datos experimentales están por encima de las predicciones; sin embargo, el comportamiento es muy similar en los tres casos.

Se necesita un parámetro de comparación para saber si las soluciones numéricas son correctas, para ello se obtuvo la ecuación de movimiento de la interfase en el estado estacionario (ecuación (3.28)). Esta ecuación nos permite conocer el límite al cual debe aproximarse la interfase líquido-sólido cuando modificamos alguno de los parámetros mencionados en las tablas (3.1), (3.2), (5.1) o (5.2).

Las figuras (5.7a) y (5.15a) muestran la evolución en el tiempo de la interfase y que corresponde a cada temperatura evaluada. La posición inicial de la interfase que se usó para obtener las soluciones numéricas, es la misma que se usó experimentalmente. En las figuras (5.7b) y (5.15b) se puede observar que para tiempos grandes las soluciones numéricas tienden asintóticamente al estado estacionario. La pequeña diferencia que muestran ambos comportamientos del movimiento de la interfase se debe a la similitud de las densidades en la fase sólida y líquida de la parafina, como se muestra en las figuras (5.8) y (5.16).

En cuanto al modelo de transición isobárica de masa total constante, que considera los efectos volumétricos debido a la diferencia de densidades entre líquido y sólido, se compararon las soluciones numéricas para tiempos largos con la posición de la interfase y el radio exterior mostrados en la ecuación (3.34) y (3.29) respectivamente. Estas ecuaciones predicen el límite asintótico para la interfase y el radio exterior cuando modificamos alguno de los parámetros mencionados en las tablas (3.1), (3.2), (5.1) o (5.2). Las figuras (5.8a) y (5.16a) muestran la dinámica del radio exterior para las dos temperaturas del calentador, consideradas en este trabajo. Ambas figuras muestran como las soluciones numéricas se aproximan asintóticamente al estado estacionario.

Para encontrar la posición de la interfase líquido-sólido y el radio exterior en el estado estacionario, se utilizó el método de Newton-Rhaphson para resolver las ecuaciones (3.29) y (3.34).

La siguiente gráfica y tabla muestran el error relativo del movimiento de la interfase que surge de la comparativa de los modelos isobárico e isobárico con masa total constante, los cuales se resolvieron por el método de diferencia finita con esquema implícito de segundo orden para la ecuación de calor, esquema explícito de orden superior para la ecuación de movimiento de la interfase y esquema explícito de primer orden para la ecuación de conservación de la masa total. Estos errores corresponden a las gráficas (5.8a) y (5.8b) a la temperatura de 70 °C y para las gráficas (5.16a) y (5.16b) a la temperatura de 80 °C.

$$ER = \left(\frac{\text{Modelo Isobárico con Masa Total Constante} - \text{Modelo Isobárico}}{\text{Modelo Isobárico con Masa Total Constante}} \right) \times 100$$

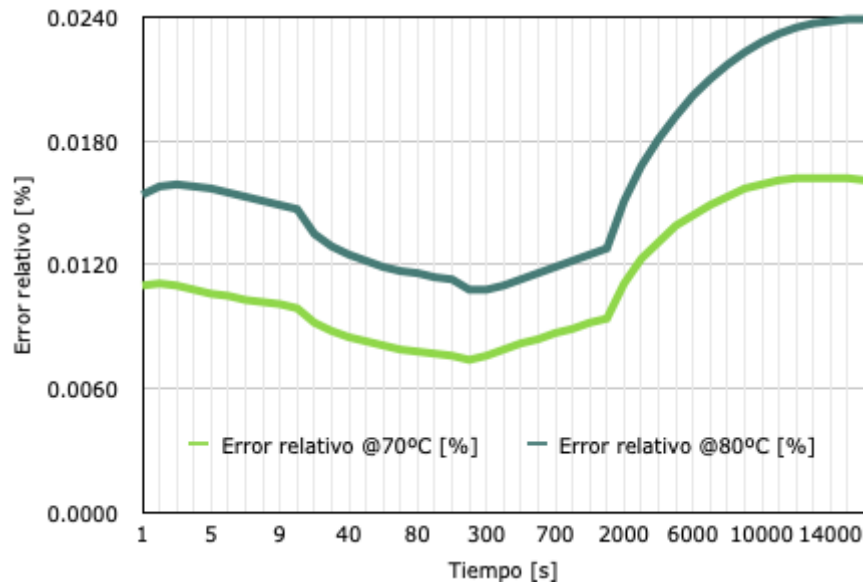


Figura 5.1: Gráfica del error relativo del movimiento de la interfase en ambas temperaturas.

Tiempo [s]	Error relativo [%] @70°C	Error relativo [%] @80°C
1	0.0110	0.0154
2	0.0111	0.0158
3	0.0110	0.0159
4	0.0108	0.0158
5	0.0106	0.0157
6	0.0105	0.0155
7	0.0103	0.0153
8	0.0102	0.0151
9	0.0101	0.0149
10	0.0099	0.0147
20	0.0092	0.0135
30	0.0088	0.0129
40	0.0085	0.0125
50	0.0083	0.0122
60	0.0081	0.0119
70	0.0079	0.0117
80	0.0078	0.0116
90	0.0077	0.0114
100	0.0076	0.0113
200	0.0074	0.0108
300	0.0076	0.0108
400	0.0079	0.0110
500	0.0082	0.0113
600	0.0084	0.0116
700	0.0087	0.0119
800	0.0089	0.0122
900	0.0092	0.0125
1000	0.0094	0.0128
2000	0.0111	0.0151
3000	0.0123	0.0168
4000	0.0131	0.0181
5000	0.0139	0.0192
6000	0.0144	0.0202
7000	0.0149	0.0210
8000	0.0153	0.0217
9000	0.0157	0.0223
10000	0.0159	0.0228
11000	0.0161	0.0232
12000	0.0162	0.0235
13000	0.0162	0.0237
14000	0.0162	0.0238
15000	0.0162	0.0239
16000	0.0161	0.0239

Cuadro 5.3: Error relativo del movimiento de la interfase en ambas temperaturas.

5.1. Resultados a 70 °C

Perfiles de temperatura

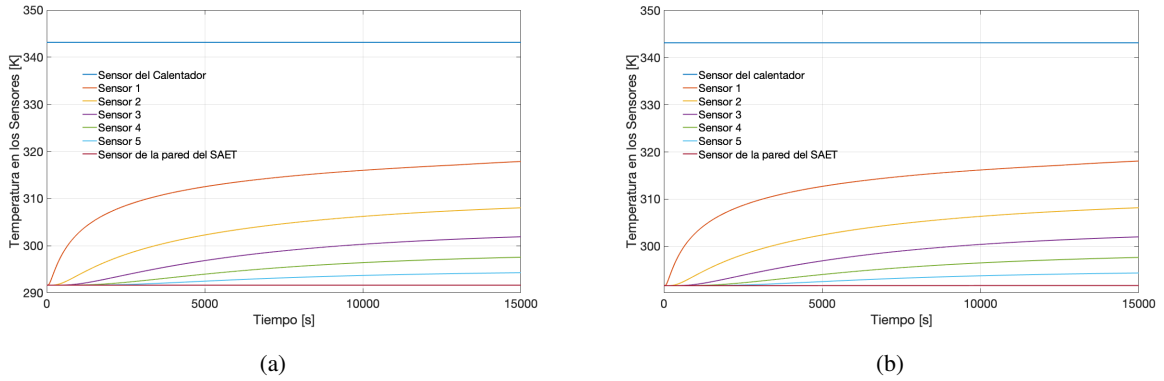


Figura 5.2: Gráficas del cambio de las temperaturas en los sensores con $T(r_0, t) = 70^\circ\text{C}$.
 a) Modelo isobárico. Ecs. (3.6) y (3.14) y b) Modelo isobárico de masa total constante. Ecs. (3.6), (3.14) y (3.33)

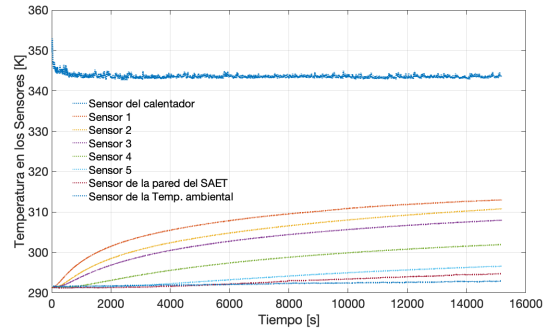


Figura 5.3: Gráfica del cambio de las temperaturas en los sensores con $T(r_0, t) = 70^\circ\text{C}$.
 Datos experimentales.

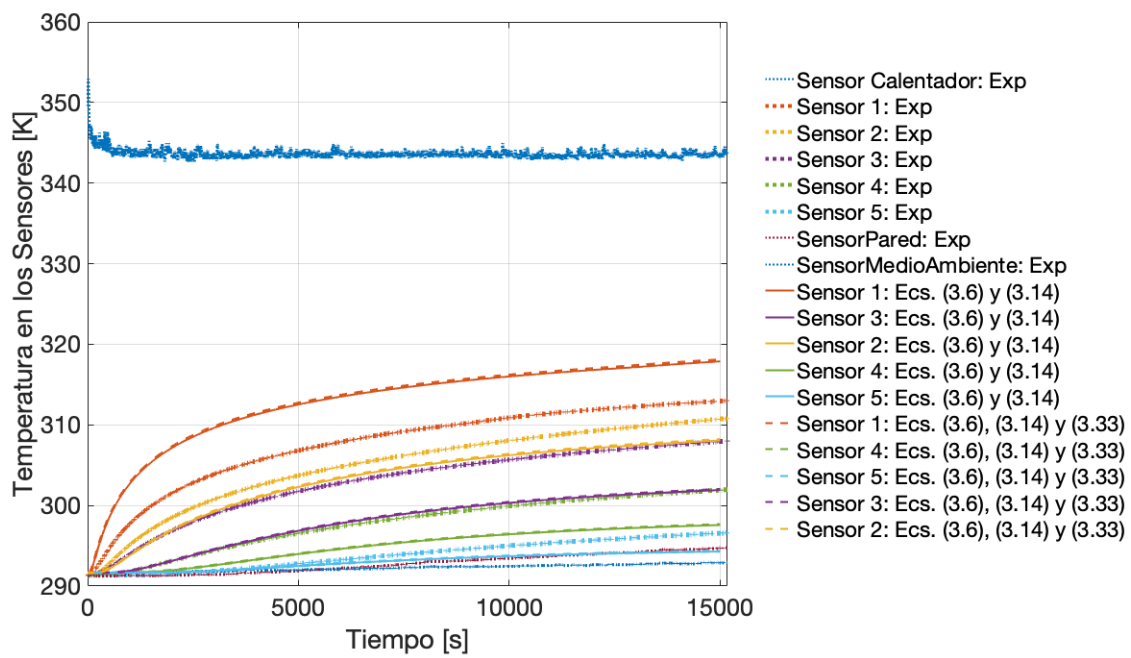
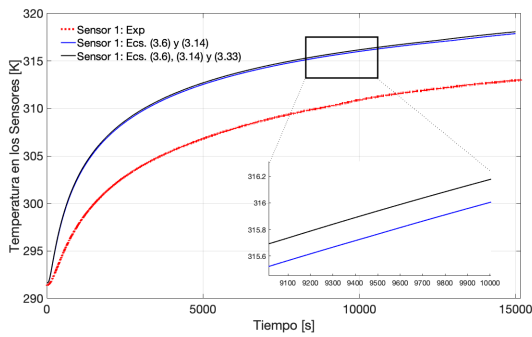
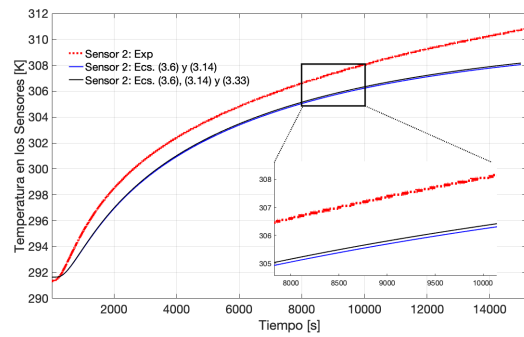


Figura 5.4: Gráfica del cambio de las temperaturas en los sensores con $T(r_0, t) = 70^\circ C$.

Comparativa entre los resultados de los dos modelos usados en este trabajo y los resultados de la experimentación.



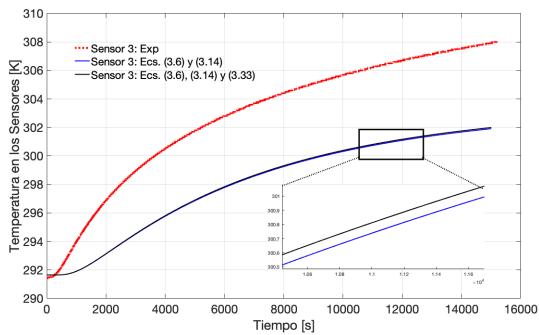
(a)



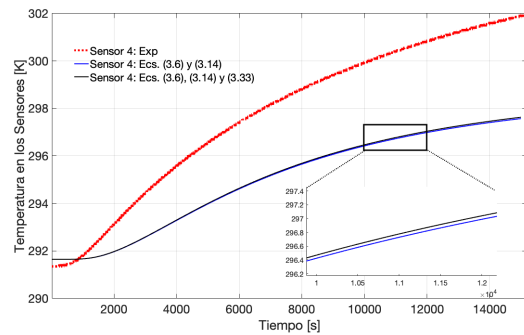
(b)

Figura 5.5: Gráficas del cambio de las temperaturas en los sensores con $T(r_0, t) = 70^\circ\text{C}$.

a) Sensor 1 y b) Sensor 2



(a)



(b)

Figura 5.6: Gráficas del cambio de las temperaturas en los sensores con $T(r_0, t) = 70^\circ\text{C}$.

a) Sensor 3 y b) Sensor 4

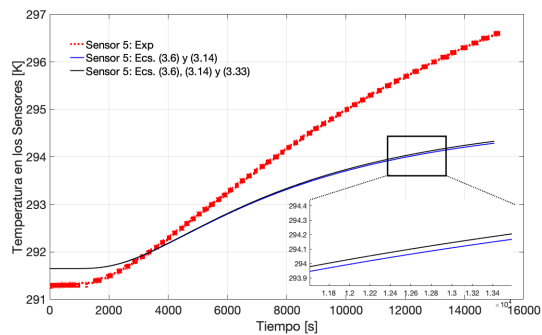


Figura 5.7: Gráfica del cambio de las temperaturas en los sensores con $T(r_0, t) = 70^\circ\text{C}$.

Sensor 5

Movimiento de la interfase

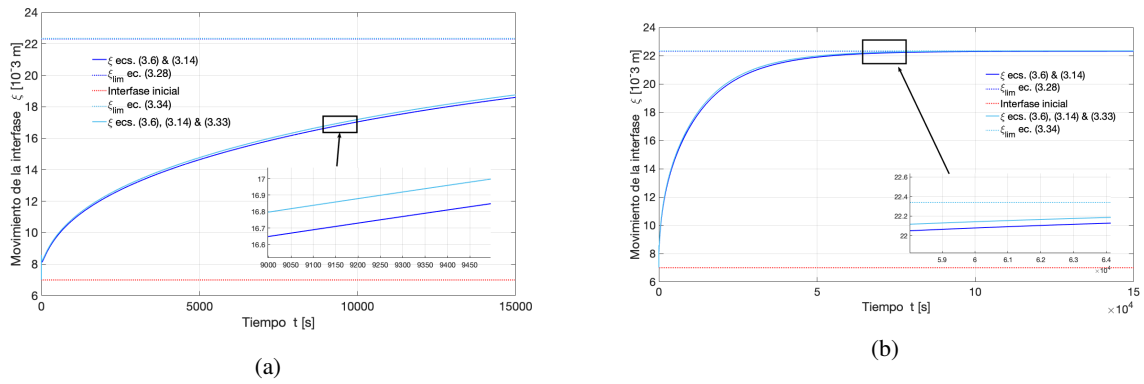


Figura 5.8: Gráficas del movimiento de la interfase con $T(r_0, t) = 70^\circ C$.

a) En un tiempo de 15,000 segundos y b) En un tiempo de 150,000 segundos donde se muestra el estado estacionario.

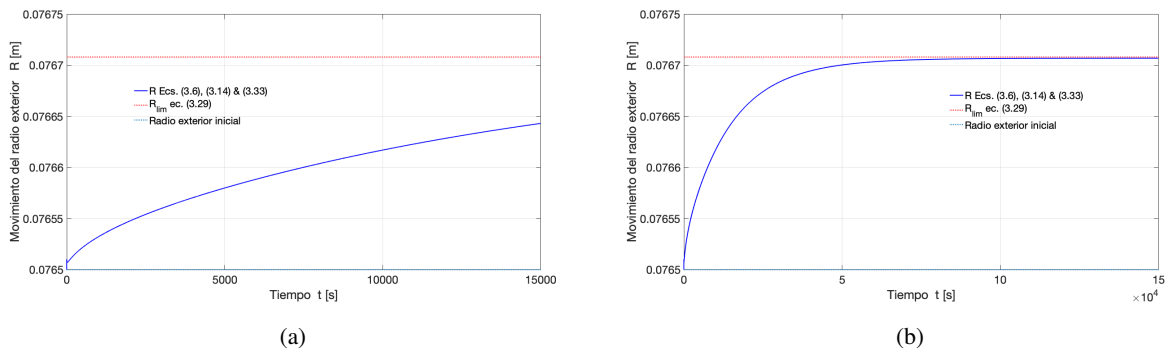


Figura 5.9: Gráficas del movimiento del radio exterior para el modelo isobárico de masa total constante con $T(r_0, t) = 70^\circ C$.

a) En un tiempo de 15,000 segundos y b) En un tiempo de 150,000 segundos donde se muestra el estado estacionario.

5.2. Resultados a 80 °C

Perfiles de temperatura

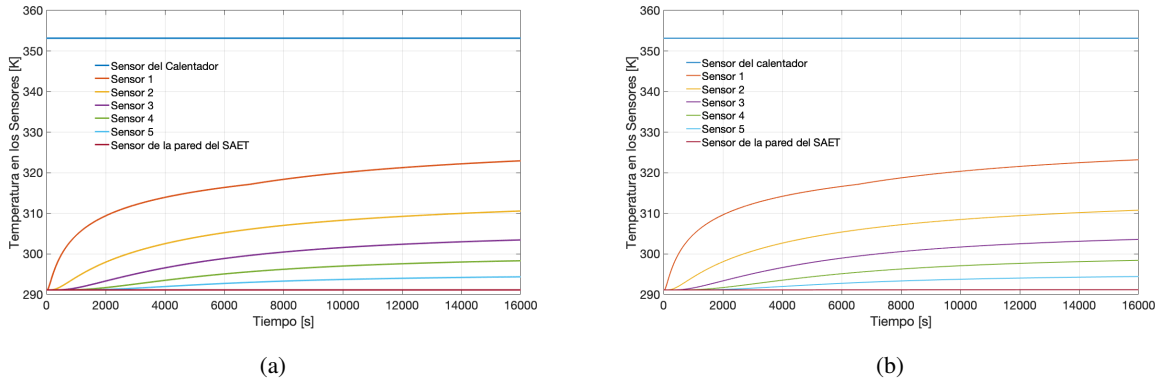


Figura 5.10: Gráficas del cambio de las temperaturas en los sensores con $T(r_0, t) = 80^\circ\text{C}$.

a) Modelo isobárico. Ecs. (3.6) y (3.14) y b) Modelo isobárico de masa total constante. Ecs. (3.6), (3.14) y (3.33)

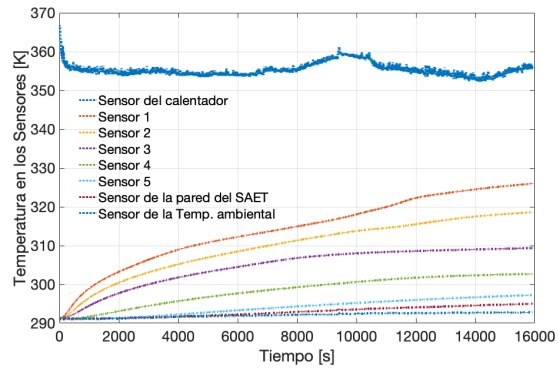


Figura 5.11: Gráfica del cambio de las temperaturas en los sensores con $T(r_0, t) = 80^\circ\text{C}$.

Datos experimentales.

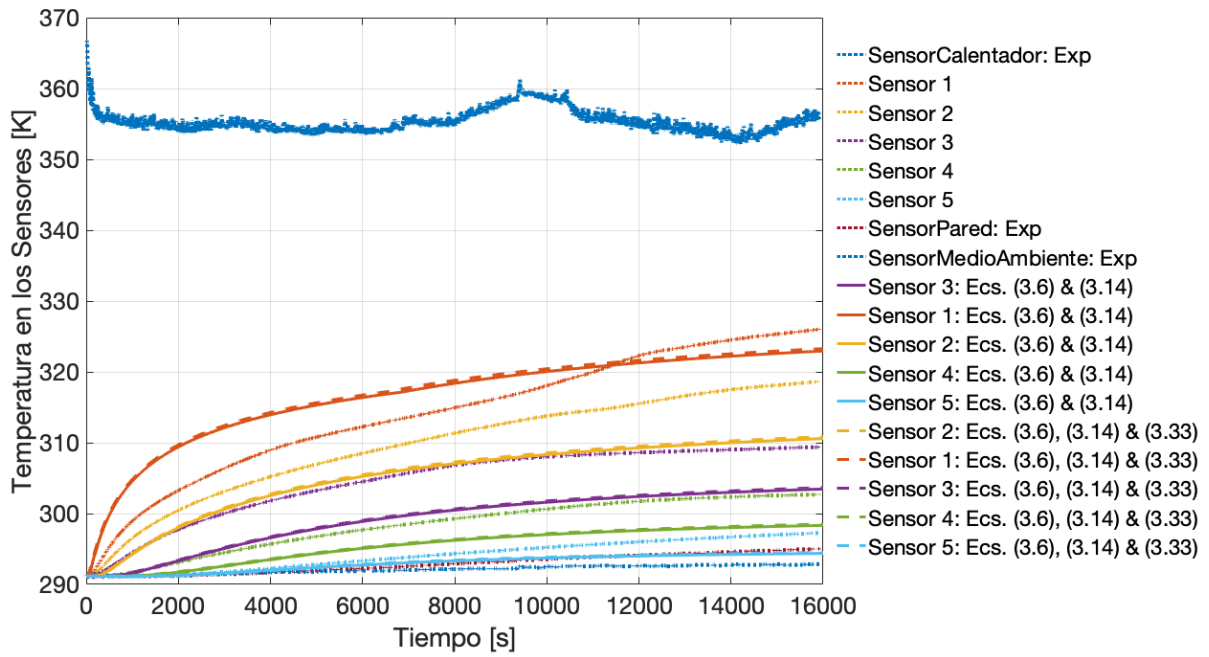


Figura 5.12: Gráfica del cambio de las temperaturas en los sensores con $T(r_0, t) = 80^{\circ}C$.

Comparativa entre los resultados de los dos modelos usados en este trabajo y los resultados de la experimentación.

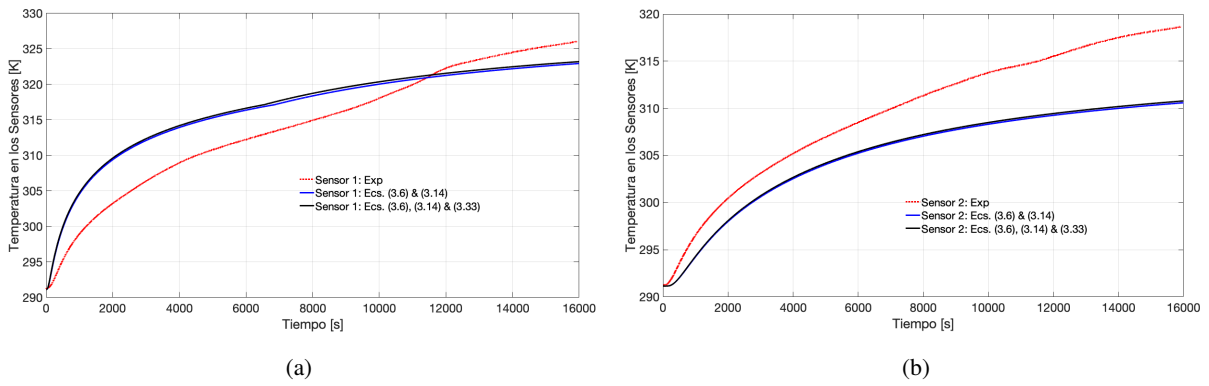


Figura 5.13: Gráficas del cambio de las temperaturas en los sensores con $T(r_0, t) = 80^\circ\text{C}$.

a) Sensor 1 y b) Sensor 2

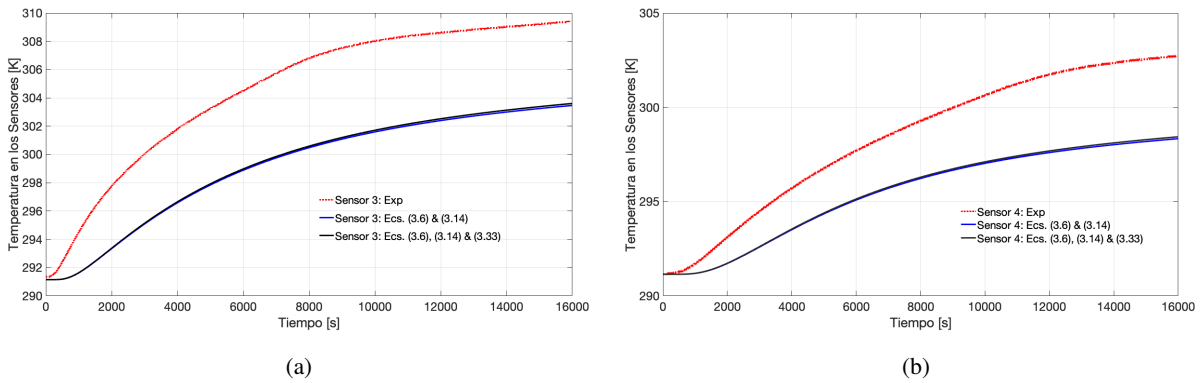


Figura 5.14: Gráficas del cambio de las temperaturas en los sensores con $T(r_0, t) = 80^\circ\text{C}$.

a) Sensor 3 y b) Sensor 4

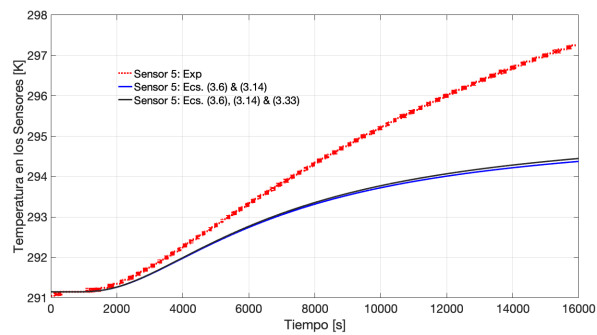


Figura 5.15: Gráfica del cambio de las temperaturas en los sensores con $T(r_0, t) = 80^\circ\text{C}$.
Sensor 5

Movimiento de la interfase

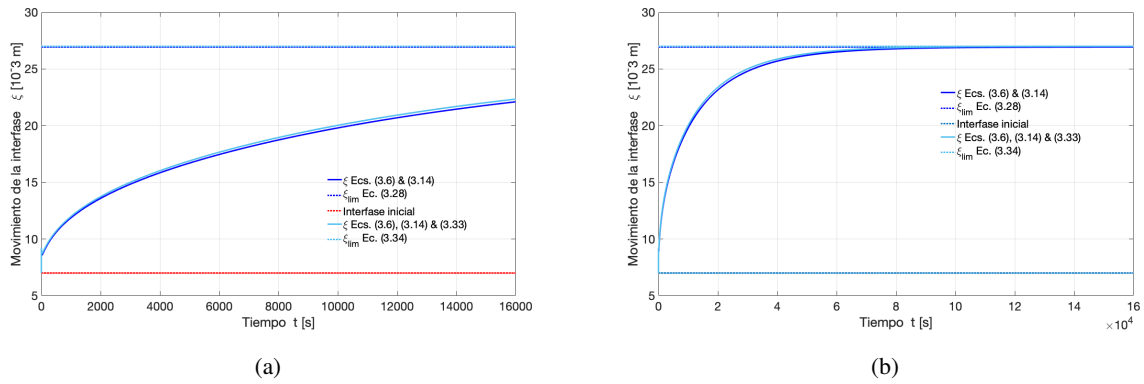


Figura 5.16: Gráficas del movimiento de la interfase con $T(r_0, t) = 80^\circ\text{C}$. a) En un tiempo de 16,000 segundos y b) En un tiempo de 160,000 segundos donde se muestra el estado estacionario.

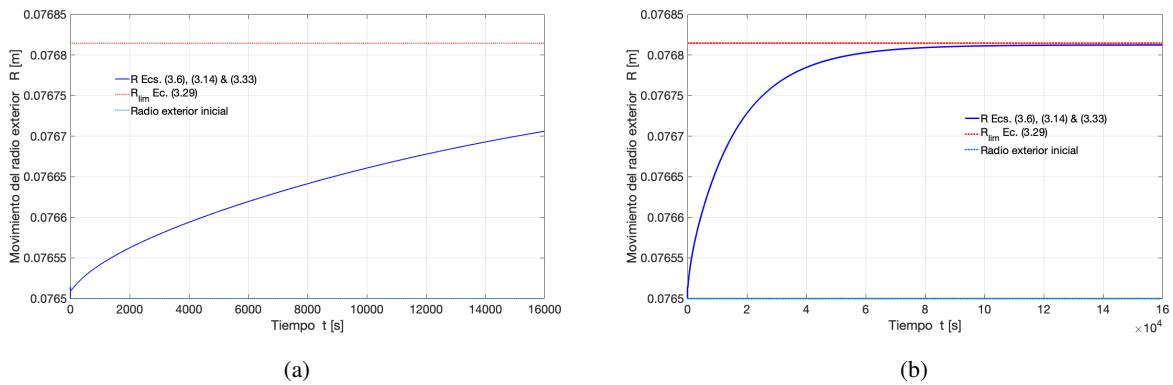


Figura 5.17: Gráficas del movimiento del radio exterior para el modelo isobárico de masa total constante con $T(r_0, t) = 80^\circ\text{C}$. a) En un tiempo de 16,000 segundos y b) En un tiempo de 160,000 segundos donde se muestra el estado estacionario.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1. Conclusiones

Se extendieron los modelos matemáticos del problema de Stefan planteado en coordenadas cartesianas por [Hernández et al., 2017] y el modelo del problema de Stefan considerando un sistema con masa constante en coordenadas cartesianas por [Santiago et al., 2017] a coordenadas cilíndricas. El propósito de ambos es predecir el comportamiento del movimiento de la interfase líquido-sólido de un material de cambio de fase (MCF) al igual que el perfil de temperatura. Los resultados numéricos se obtuvieron mediante el método de diferencias finitas con esquema implícito. Los datos que se utilizaron para estos modelos fueron obtenidos de un artículo debido a que la parafina que se adquirió para realizar los experimentos es genérica y falta información sobre las propiedades termofísicas.

Para validar experimentalmente estos modelos se construyó un Sistema de almacenamiento de energía térmica (SAET) cilíndrico utilizando parafina como MCF. A este SAET se le colocaron diversos termopares para medir el cambio de temperatura en cada punto con respecto a un tiempo determinado.

Con la ayuda del Dr. Enrique Chong y su equipo de trabajo de la carrera de Ingeniería Mecatrónica, se obtuvieron las temperaturas que registraban los sensores y el seguimiento del experimento mediante una interfaz gráfica que mostraba la información en tiempo real. Se realizaron experimentos con la temperatura del calentador a 70 y 80 °C.

Para medir el comportamiento de la interfase se requiere diferente instrumentación.

Los resultados experimentales se compararon con las soluciones numéricas de los modelos usados en este trabajo. Ambos modelos reportan diferencias significativas en comparación con los datos experimentales. A pesar de que el modelo isobárico que incluye los efectos volumétricos al considerar densidades distintas en ambas fases, se acerca más a los resultados experimentales. La diferencia relativa sigue siendo significativa. Existen varios aspectos que son causa de estas diferencias:

1. Falta información sobre propiedades termodinámicas de la parafina. Se asumieron iguales a las reportadas por otros autores, a pesar de que es muy sabido el alto error experimental en la medición de estas variables, principalmente la conductividad térmica.
2. Falta de control en las condiciones experimentales, principalmente la temperatura del calentador y la temperatura ambiente. La variación de la temperatura ambiente no se tomó en cuenta en las condiciones de frontera de ambos modelos a través de condiciones de Dirichlet no homogéneas.
3. La expansión de la parafina debido a la diferencia de densidades entre la fase líquida y sólida no se lleva a cabo radialmente durante el experimento. Es muy importante considerar que la expansión es a lo largo del eje de simetría axial y es necesario proponer una ecuación de movimiento que conserve la masa total del sistema tomando en cuenta la expansión en la dirección longitudinal.
4. Efectos de zona pastosa durante la carga del MCF. La zona pastosa es una mezcla sólido-líquido que se encuentra en un rango de temperatura, el cual corresponde a un rango de valores donde el material experimenta la transición de fase. Estos efectos son muy difíciles de tomar en cuenta con métodos de frontera móvil y para ello es necesario elaborar un modelo de entalpía porosa que considere la conservación de la masa total.
5. Convección natural que de acuerdo con algunos autores, es un mecanismo de transferencia de calor predominante en sistemas con tamaños mayores a 10 mm.
6. Efectos de expansión térmica pueden alterar significativamente los resultados numéricos ya que los gradientes de temperatura, es decir, la diferencia de temperatura entre el calentador y el ambiente supera los 40 grados Celsius.

6.2. Investigación Futura

1. Realizar más experimentación considerando otras temperaturas del calentador para tener más información sobre el comportamiento de la parafina y probablemente sales hidratadas.
2. Medir experimentalmente las propiedades termodinámicas principalmente del calor latente, la temperatura de fusión, y los calores específicos o usar los datos experimentales para encontrar estas variables termodinámicas a través del planteamiento del problema inverso.
3. Extender el modelo de masa total constante a método de entalpía porosa para incluir efectos de transferencia de calor por convección natural y el fenómeno de zona pastosa, que es una región de mezcla líquido-sólido en saturación.

Bibliografía

- [Bakker et al., 2009] Bakker, M., Helden, W. V., and Haur, A. (2009). Materials for compact thermal energy storage: A new idea joint shc/eces task. In *11th International Conference on Thermal Energy Storage*, Stockholm, Sweden.
- [Bansa and Buddhi, 1992] Bansa, N. K. and Buddhi, D. (1992). An analytical study of a latent heat storage system in a cylinder. *Solar Energy*, 33(4):235–242.
- [Cengel and Ghajar, 2015] Cengel, Y. A. and Ghajar, A. J. (2015). *Heat and Mass Transfer. Fundamentals and Applications*. McGraw Hill Education, 5 edition.
- [Clarksean, 2006] Clarksean, R. L. (2006). Phase-change material (pcm) system and methods for shifting peak electrical load. US Patent No. 7096929.
- [Creus, 2010] Creus, A. (2010). *Instrumentación Industrial*. Alfaomega, 8 edition.
- [Cui and Riffat, 2011] Cui, M. S. Y. and Riffat, S. (2011). Review of phase change materials for building applications. *Appl. Mech. Mat.*, pages 1958–1962.
- [Du et al., 2018] Du, K., Calautit, J., Wang, Z., Wu, Y., and Liu, H. (2018). A review of the applications of phase change materials in cooling, heating and power generation in different temperature ranges. *Applied Energy*, 220:242–273.
- [Dutil, 2014] Dutil, Y. (2014). Modeling phase change materials behavior in building applications: Comments on material characterization and model validation. *Renewable Energy*, 61:132–135.
- [Dutil et al., 2010] Dutil, Y., Rousse, D. R., Salah, N. B., and Lassue, S. (2010). Mathematical modeling of phase change materials: An updated review. In *World Energy Congress 2010 (WEC MONTREAL 2010)*, volume 4 of *Energy Efficiency: A new energy source and its metrics*, page 3141, Montreal, Canada. World Energy Council (WEC).
- [Ehrlich and Geller, 2018] Ehrlich, R. and Geller, H. A. (2018). *Renewable Energy. A First Course*. CRC Press.
- [El-Dessouky and Al-Juwayhel, 1997] El-Dessouky, H. and Al-Juwayhel, F. (1997). Effectiveness of a thermal energy storage system using phase-change materials. *Energy Convers Manage*, 38(6):601–617.
- [Esen, 1994] Esen, M. (1994). *Numerical simulation of cylindrical energy storage tank containing phase change material on the solar assisted heat pump system and comparing with experimental results*. PhD thesis, Karadeniz Technical University, Trabzon, Turkey.

- [Esen and Ayhan, 1996] Esen, M. and Ayhan, T. (1996). Development of a model compatible with solar assisted cylindrical energy storage tank and variation of stored energy with time for different phase change materials. *Energy Convers Manage*, 37(12):1775–1785.
- [Fallahi et al., 2017] Fallahi, A., Guldentops, G., Tao, M., Granados-Focil, S., and Dessel, S. V. (2017). Review on solid-solid phase change materials for thermal energy storage: Molecular structure and thermal properties. *Applied Thermal Engineering*, 127:1427–1441.
- [Farid, 1986] Farid, M. M. (1986). Solar energy storage with phase change. *Solar Energy*, pages 11–29.
- [Farid and Kanzawa, 1989] Farid, M. M. and Kanzawa, A. (1989). Thermal performance of a heat storage module using pcm's with different melting temperatures:mathematical modeling. *Solar Energy*, pages 152–157.
- [Farid et al., 1990] Farid, M. M., Kim, Y., and Kanzawa, A. (1990). [90] m. m. farid, y. kim, a. kanzawa, thermal performance of heat storage module using pcm's with different melting temperatures:experimental. *Solar Energy*, pages 125–131.
- [Gil et al., 2010] Gil, A., Medrano, M., Martorell, I., Lázaro, A., Dolado, P., Zalba, B., and Cabeza, L. F. (2010). State of the art on high temperature thermal energy storage for power generation. part 1—concepts, materials and modellization. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 14(1):31–55.
- [Gong and Mujumdar, 1997] Gong, Z. X. and Mujumdar, A. S. (1997). Finite-element analysis of cyclic heat transfer in a shell-and-tube latent heat energy storage exchanger. *Appl Therm Eng*, 17(6):583–591.
- [Hahn and Özisik, 2012] Hahn, D. W. and Özisik, M. N. (2012). *Heat Conduction*. John Wiley and Sons, Inc., 3 edition.
- [Haji-Sheikh et al., 1982] Haji-Sheikh, A., Eftekhar, J., and Lou, D. Y. S. (1982). Some thermophysical properties of paraffin wax as a thermal storage medium. Technical report, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., St. Louis, USA.
- [Hale et al., 1971] Hale, D. V., Hoover, M. J., and O'Neill, M. J. (1971). Phase change materials handbook. Technical Report Report No. HREC-5183-2LMSC- HREC D225138, NASA, Marshal Space Flight Centre, Alabama.
- [Hernández et al., 2017] Hernández, E. M., Otero, J. A., Santiago, R. D., Martínez, R., Castillo, F., and Oseguera, J. E. (2017). Non-parabolic interface motion for the 1-d stefan problem. dirichlet boundary conditions. *Thermal Science*, 21(6A):2327–2336.
- [Instruments, 2000] Instruments, N. (2000). Scxi -1303 32-channel isothermal scxi-1303 32-channel isothermal terminal block.
- [Instruments, 2006] Instruments, N. (2006). *SCXI-1102/B/C User Manual*. National Instruments.
- [Instruments, 2016] Instruments, N. (2016). *DAQ M Series. M Series User Manual*. National Instruments.
- [Instruments, 2020] Instruments, N. (2020). National instruments scxi-1000. <https://bit.ly/3pOjh8G>.
- [Jarabo, 1988] Jarabo, F. (1988). *El libro de las Energías Renovables*. Colección ERA SOLAR, 1 edition.
- [Jian-you, 2008] Jian-you, L. (2008). Numerical and experimental investigation for heat transfer in triplex concentric tube with phase change material for thermal energy storage. *Solar Energy*, pages 977–985.

- [Jones et al., 2006] Jones, B. J., Sun, D., Krishnan, S., and Garimella, S. V. (2006). Garimella, experimental and numerical study of melting in a cylinder. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, pages 2724–2738.
- [Karthick and Sivalakshmi, 2019] Karthick, C. and Sivalakshmi, S. (2019). A review on thermal energy storage materials for solar cooking. *International Journal of Research and Innovation in Engineering Technology*, 05(09):19–26.
- [Khalid et al., 2017] Khalid, M. Z., Zubair, M., and Ali, M. (2017). An analytical method for the solution of two phase stefan problem in cylindrical geometry. *Applied Mathematics and Computation*, 000:1–14.
- [Kumar et al., 2011] Kumar, R., Misra, M. K., Kumar, R., Gupta, D., Sharma, P. K., Tak, B. B., and Meena, S. R. (2011). Phase change materials: Technology status and potential defence applications. *Defence Science Journal*, 61(6):576–582.
- [Lokesh et al., 2017] Lokesh, S., Murugan, P., Sathishkumar, A., Kumaresan, V., and Velraj, R. (2017). Melting/solidification characteristics of paraffin based nanocomposite for thermal energy storage applications. *Thermal Science*, 21(6 Part A):2517–2524.
- [Lopez et al., 2010] Lopez, J., Caceres, G., Del Barrio, E. P., and Jomaa, W. (2010). Confined melting in deformable porous media: A first attempt to explain the graphite/salt composites behaviour. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53(5-6):1195–1207.
- [Mathur et al., 2014] Mathur, A., Kasetty, R., Oxley, J., Mendez, J., and Nithyanandam, K. (2014). Using encapsulated phase change salts for concentrated solar power plant. *Energy Procedia*, 49:908–915.
- [Mehling and Cabeza, 2008] Mehling, H. and Cabeza, L. F. (2008). *Heat and cold storage with PCM*. Springer, Germany.
- [Nazir et al., 2019] Nazir, H., Batool, M., Osorio, F. J. B., Isaza-Ruiz, M., Xu, X., Vignarooban, K., Phelan, P., Inamuddin, and Kannan, A. M. (2019). Recent developments in phase change materials for energy storage applications: A review. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, pages 491–523.
- [Nieves and Domínguez, 2014] Nieves, A. and Domínguez, F. C. (2014). *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería*. Grupo Editorial Patria, 1 edition.
- [Omega, 2020] Omega (2020). Diagrama de funcionamiento de los termopares. <https://es.omega.com/prodinfo/thermocouple-union.html>.
- [Özisik et al., 2017] Özisik, M. N., Orlande, H. R. B., Colaço, M. J., and Machado, R. (2017). *Finite Difference Methods in Heat Transfer*. CRC Press, 2 edition.
- [Pollock, 1991] Pollock, D. D. (1991). *Thermocouples: Theory and Properties*. CRC Press.
- [Prakash et al., 1985] Prakash, J., Garg, H. P., and Datta, G. (1985). A solar water heater with a built-in latent heat storage. *Energy Convers Manage*, 25(1):51–56.
- [Quashning, 2005] Quashning, V. (2005). *Understanding Renewable Energy Systems*. Earthscan.
- [Rahman et al., 2013] Rahman, M., Hamja, A., and Chowdhury, H. N. (2013). Phase change materials: Characteristics and encapsulation. In *International Conference on Mechanical Engineering and Renewable Energy 2013*, Chittagong, Bangladesh. International Conference on Mechanical Engineering and Renewable Energy.

- [Rubinshtein, 1971] Rubinshtein, L. I. (1971). *The Stefan Problem*, volume 27. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
- [Salaun et al., 2010] Salaun, F., Devaux, E., Bourbigot, S., and Rumeau, P. (2010). Development of phase change material in clothing part i: Formulation of microencapsulated phase change. *Textile Res.*, 80(3):195–05.
- [Santiago et al., 2017] Santiago, R. D., Hernández, E. M., and Otero, J. A. (2017). Constant mass model for the liquid-solid phase transition on a one-dimensional stefan problem: Transient and steady state regimes. *International Journal of Thermal Sciences*, 118:40–52.
- [Sundram et al., 2010] Sundram, A. S., Seeniraj, R. V., and Velraj, R. (2010). An experimental investigation on passive cooling system comprising phase-change material and two-phase closed thermo siphon for telecom shelters in tropical and desert regions. *Energy Buildings*, 42:1726–1735.
- [Toolbox, 2011] Toolbox, T. E. (2011). Plastics - thermal conductivity coefficients. https://www.engineeringtoolbox.com/thermal-conductivity-plastics-d_1786.html.
- [Trp, 2005] Trp, A. (2005). An experimental and numerical investigation of heat transfer during technical grade paraffin melting and solidification in a shell-and-tube latent thermal energy storage unit. *Solar Energy*, 79(6):648–660.
- [Trp et al., 2007] Trp, A., Lenic, K., and Frankovic, B. (2007). Analysis of the influence of operating conditions and geometric parameters on heat transfer in water-paraffin shell-and-tube latent thermal energy storage unit. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50(9-10):1790–1804.
- [Tyagi and Buddhi, 2007] Tyagi, V. V. and Buddhi, D. (2007). Phase-change material thermal storage in buildings: A state-of-art. *Renew. Sustain. Ener. Rev.*, 11(6):1146–1166.
- [Ullman and Newman, 2010] Ullman, A. Z. and Newman, C. D. (2010). Phase-change cooling system. US Patent No. 0157525.
- [Visser, 1986] Visser, H. (1986). Energy storage in phase-change materials. development of a component model compatible with the 'trnsys' transient simulation program. final report. Technical report, Delft University of Technology, Department of Applied Physics, Delft.

Apéndice A

Procedimiento para la realización de experimentos.

1. Al ingresar al laboratorio hacer una inspección de las conexiones tanto del equipo de cómputo como del SAET y el controlador.
2. Encender el chasis de National Instruments SCXI-1000.
3. Encender la computadora.
4. Abrir el software: NI LabVIEW2017.
5. En la ventana de recent files, seleccionar: LecturaTempScxiV2.vi.
6. En la interfase de la pantalla:
 - a. Asignar el tiempo de muestreo de las temperaturas.
 - b. Nombrar el archivo que guardará la información del experimento.
 - c. Correr la aplicación.
7. Asignar la temperatura en el controlador del calentador.
8. Conectar el calentador al controlador.
9. Estar al pendiente del experimento el tiempo que se requiera.
10. Detener la aplicación.
11. Buscar el archivo que se generó en la carpeta de Documentos y guardarla en una USB.
12. Cerrar la aplicación, apagar la computadora.
13. Apagar el chasis de National Instruments.
14. Desconectar el calentador y el controlador.

Apéndice B

Deducción de la Condición de Stefan con conservación de la masa total

Considerando a $\frac{dr_0}{dt} = 0$ como frontera fija. donde,

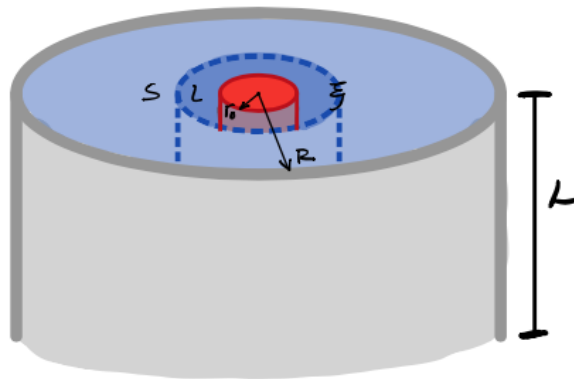


Figura B.1: Diagrama del Sistema de Almacenamiento de Energía Térmica (SAET).

- S = fase sólida del material de cambio de fase
- L = fase líquida del material de cambio de fase
- r_0 = radio exterior del calentador
- ξ = interfase líquido-sólido
- R = radio del SAET
- L = altura del SAET

B.1. Derretirse (masa del líquido)

$$m_{l_0} = \rho_l V_{l_0} = \rho_l A_{l_0} L = \rho_l L (\pi \xi^2(t) - \pi r_0^2)$$

$$m_l = \rho_l V_l = \rho_l A_l L = \rho_l L (\pi \xi^2(t + \Delta t) - \pi r_0^2)$$

$m_l > m_{l_0}$ la masa final del líquido es mayor a la masa inicial del líquido,

$$\Delta m_l = \rho_l L (\pi \xi^2(t + \Delta t) - \pi r_0^2 - (\pi \xi^2(t) - \pi r_0^2))$$

como $r_0 = 0$ por ser la frontera fija,

$$\Delta m_l = \rho_l L \pi (\xi^2(t + \Delta t) - \xi^2(t))$$

masa del líquido que se formó en el tiempo Δt

calor empleado para derretir cierta cantidad de sólido en el tiempo Δt por lo tanto, **el líquido aumenta.**

$$\Delta Q = L_f \Delta m_l \implies \frac{\Delta Q}{\Delta t} = L_f \frac{\Delta m_l}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = L_f \rho_l L \pi \frac{(\xi^2(t + \Delta t) - \xi^2(t))}{\Delta t}; \text{ limite cuando } \Delta t \rightarrow 0$$

$$\frac{dQ}{dt} = L_f \rho_l L \pi 2 \xi \frac{d\xi}{dt} \quad (\text{B.1})$$

flujo de calor del lado del líquido

$$\frac{dQ_l}{dt} = -k_l A \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi}$$

flujo de calor del lado del sólido

$$\frac{dQ_s}{dt} = -k_s A \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi}$$

como se **derrite** entonces $\frac{dQ_l}{dt} > \frac{dQ_s}{dt}$, por lo tanto,

$$\frac{dQ}{dt} = -k_l A \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + k_s A \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi} \quad (\text{B.2})$$

donde $A = 2 \pi L \xi$ = área transversal del cilindro

igualando las ecuaciones (B.1) y (B.2),

$$L_f \rho_l L \pi 2 \xi \frac{d\xi}{dt} = -k_l A \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + k_s A \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi}$$

sustituyendo las áreas $A = 2 \pi L \xi$,

$$L_f \rho_l L \pi 2 \xi \frac{d\xi}{dt} = -k_l 2 \pi L \xi \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + k_s 2 \pi L \xi \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi}$$

eliminando los términos comunes obtenemos la condición de Stefan utilizando la densidad del líquido,

$$L_f \rho_l \frac{d\xi}{dt} = -k_l \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi} \quad (\text{B.3})$$

B.2. Derretirse (masa del sólido)

$$m_{s_0} = \rho_s V_{s_0} = \rho_s A_{s_0} L = \rho_s L (\pi R^2(t) - \pi \xi^2(t))$$

$$m_s = \rho_s V_s = \rho_s A_s L = \rho_s L (\pi R^2(t + \Delta t) - \pi \xi^2(t + \Delta t))$$

$m_{s_0} > m_s$ la masa inicial del sólido es mayor a la masa final del sólido

$$\Delta m_s = \rho_s L (\pi R^2(t) - \pi \xi^2(t) - \pi R^2(t + \Delta t) + \pi \xi^2(t + \Delta t))$$

$$\Delta m_s = \rho_s L \pi (R^2(t) - \xi^2(t) - R^2(t + \Delta t) + \xi^2(t + \Delta t))$$

masa del sólido que se perdió en el tiempo Δt

calor empleado para derretir cierta cantidad de sólido en el tiempo por lo tanto, **el sólido disminuye**,

$$\Delta Q = -L_f \Delta m_s \implies \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -L_f \frac{\Delta m_s}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -L_f \rho_s L \pi \frac{(R^2(t) - \xi^2(t) - R^2(t + \Delta t) + \xi^2(t + \Delta t))}{\Delta t}; \text{ limite cuando } \Delta t \rightarrow 0$$

$$\frac{dQ}{dt} = -L_f \rho_s L \pi \left(2R \frac{dR}{dt} - 2\xi \frac{d\xi}{dt} \right) \quad (\text{B.4})$$

flujo de calor del lado del líquido

$$\frac{dQ_l}{dt} = -k_l A \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi}$$

flujo de calor del lado del sólido

$$\frac{dQ_s}{dt} = k_s A \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi}$$

como se **derrite** entonces $\frac{dQ_l}{dt} > \frac{dQ_s}{dt}$, por lo tanto,

$$\frac{dQ}{dt} = -k_l A \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + k_s A \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi} \quad (\text{B.5})$$

donde $A = 2 \pi L \xi$ = área transversal del cilindro

igualando las ecuaciones (B.4) y (B.5),

$$-L_f \rho_s L \pi \left(2R \frac{dR}{dt} - 2\xi \frac{d\xi}{dt} \right) = -k_l A \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + k_s A \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi}$$

sustituyendo las áreas, $A = 2 \pi L \xi$,

$$-L_f \rho_s L \pi \left(2R \frac{dR}{dt} - 2\xi \frac{d\xi}{dt} \right) = -k_l 2 \pi L \xi \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + k_s 2 \pi L \xi \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi}$$

$$-2 L_f \rho_s L \pi \left(R \frac{dR}{dt} - \xi \frac{d\xi}{dt} \right) = -k_l 2 \pi L \xi \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + k_s 2 \pi L \xi \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi}$$

$$-2 L_f \rho_s L \pi R \frac{dR}{dt} + 2 L_f \rho_s L \pi \xi \frac{d\xi}{dt} = -k_l 2 \pi L \xi \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + k_s 2 \pi L \xi \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi}$$

dividiendo ambos términos de la ecuación entre $2 \pi L \xi$,

$$-L_f \rho_s \frac{R}{\xi} \frac{dR}{dt} + L_f \rho_s \frac{d\xi}{dt} = -k_l \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi} \quad (\text{B.6})$$

ecuación de la masa total del sistema con coordenadas cilíndricas,

$$m_T = \rho_l L (\pi \xi^2 - \pi r_0^2) + \rho_s L (\pi R^2 - \pi \xi^2)$$

$$\text{como } \frac{dr_0}{dt} = 0,$$

$$m_T = \rho_l L \pi \xi^2 + \rho_s L (\pi R^2 - \pi \xi^2)$$

$$\frac{dm_T}{dt} = \rho_l L \pi 2 \xi \frac{d\xi}{dt} + \rho_s L \pi \left(2R \frac{dR}{dt} - 2\xi \frac{d\xi}{dt} \right)$$

$$\frac{dm_T}{dt} = \rho_l L \pi 2 \xi \frac{d\xi}{dt} + 2 R \rho_s L \pi \frac{dR}{dt} - 2 \xi \rho_s L \pi \frac{d\xi}{dt}$$

$$\text{despejando } \frac{dR}{dt},$$

$$2 R \rho_s L \pi \frac{dR}{dt} = 2 \xi \rho_s L \pi \frac{d\xi}{dt} - 2 \rho_l L \pi \xi \frac{d\xi}{dt}$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{2 \xi \rho_s L \pi}{2 R \rho_s L \pi} \frac{d\xi}{dt} - \frac{2 \rho_l L \pi \xi}{2 R \rho_s L \pi} \frac{d\xi}{dt}$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\xi}{R} \frac{d\xi}{dt} - \frac{\rho_l}{\rho_s} \frac{\xi}{R} \frac{d\xi}{dt}$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\xi}{R} \frac{d\xi}{dt} \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_s} \right) \quad (\text{B.7})$$

sustituyendo la ecuación (B.7) en (B.6),

$$-L_f \rho_s \frac{R}{\xi} \frac{\xi}{R} \frac{d\xi}{dt} \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_s} \right) + L_f \rho_s \frac{d\xi}{dt} = -k_l \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi}$$

$$-L_f \rho_s \frac{d\xi}{dt} \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_s} \right) + L_f \rho_s \frac{d\xi}{dt} = -k_l \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi}$$

$$-L_f \rho_s \frac{d\xi}{dt} + \frac{\rho_l}{\rho_s} L_f \rho_s \frac{d\xi}{dt} + L_f \rho_s \frac{d\xi}{dt} = -k_l \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi}$$

obtenemos la condición de Stefan utilizando la densidad del líquido,

$$L_f \rho_l \frac{d\xi}{dt} = -k_l \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi} \quad (\text{B.8})$$

B.3. Solidificarse (masa del líquido)

$$m_{l_0} = \rho_l V_{l_0} = \rho_l A_{l_0} L = \rho_l L (\pi \xi^2(t) - \pi r_0^2)$$

$$m_l = \rho_l V_l = \rho_l A_l L = \rho_l L (\pi \xi^2(t + \Delta t) - \pi r_0^2)$$

$m_{l_0} > m_l$ la masa inicial del líquido es mayor a la masa final del líquido,

$$\Delta m_l = \rho_l L (\pi \xi^2(t) - \pi r_0^2 - (\pi \xi^2(t + \Delta t) - \pi r_0^2))$$

como $r_0 = 0$ por ser la frontera fija,

$$\Delta m_l = \rho_l L \pi (\xi^2(t) - \xi^2(t + \Delta t))$$

masa del líquido que se perdió en el tiempo Δt

calor empleado para formar cierta cantidad de sólido en el tiempo Δt , por lo tanto, **el líquido disminuye**,

$$\Delta Q = -L_f \Delta m_l \implies \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -L_f \frac{\Delta m_l}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -L_f \rho_l L \pi \frac{(\xi^2(t) - \xi^2(t + \Delta t))}{\Delta t}; \text{ limite cuando } \Delta t \rightarrow 0$$

$$\frac{dQ}{dt} = -L_f \rho_l L \pi 2 \xi \frac{d\xi}{dt} \quad (\text{B.9})$$

flujo de calor del lado del líquido

$$\frac{dQ_l}{dt} = -k_l A \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi}$$

flujo de calor del lado del sólido

$$\frac{dQ_s}{dt} = -k_s A \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi}$$

como se **solidifica** entonces $\frac{dQ_s}{dt} > \frac{dQ_l}{dt}$, por lo tanto,

$$\frac{dQ}{dt} = -k_s A \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + k_l A \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi} \quad (\text{B.10})$$

donde $A = 2 \pi L \xi$ = área transversal del cilindro

igualando las ecuaciones (B.9) y (B.10),

$$-L_f \rho_l L \pi 2 \xi \frac{d\xi}{dt} = -k_s A \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + k_l A \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi}$$

sustituyendo las áreas $A = 2 \pi L \xi$,

$$-L_f \rho_l L \pi 2 \xi \frac{d\xi}{dt} = -k_s 2 \pi L \xi \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + k_l 2 \pi L \xi \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi}$$

eliminando los términos comunes obtenemos,

$$-L_f \rho_l \frac{d\xi}{dt} = -k_s \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + k_l \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi}$$

multiplicando ambos términos por menos uno obtenemos la condición de Stefan utilizando la densidad del líquido,

$$L_f \rho_l \frac{d\xi}{dt} = -k_l \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi} \quad (\text{B.11})$$

B.4. Solidificarse (masa del sólido)

$$m_{s_0} = \rho_s V_{s_0} = \rho_s A_{s_0} L = \rho_s L (\pi R^2(t) - \pi \xi^2(t))$$

$$m_s = \rho_s V_s = \rho_s A_s L = \rho_s L (\pi R^2(t + \Delta t) - \pi \xi^2(t + \Delta t))$$

$m_s > m_{s_0}$ la masa final del sólido es mayor a la masa inicial del sólido,

$$\Delta m_s = \rho_s L (\pi R^2(t + \Delta t) - \pi \xi^2(t + \Delta t) - (\pi R^2(t) - \pi \xi^2(t)))$$

$$\Delta m_s = \rho_s L \pi (R^2(t + \Delta t) - \xi^2(t + \Delta t) - R^2(t) + \xi^2(t))$$

masa del sólido que se formó en el tiempo Δt

calor empleado para formar cierta cantidad de sólido en el tiempo por lo tanto, **el sólido aumenta,**

$$\Delta Q = L_f \Delta m_s \implies \frac{\Delta Q}{\Delta t} = L_f \frac{\Delta m_s}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = L_f \rho_s L \pi \frac{(R^2(t + \Delta t) - \xi^2(t + \Delta t) - R^2(t) + \xi^2(t))}{\Delta t}; \text{ limite cuando } \Delta t \rightarrow 0$$

$$\frac{dQ}{dt} = L_f \rho_s L \pi \left(2R \frac{dR}{dt} - 2\xi \frac{d\xi}{dt} \right) \quad (\text{B.12})$$

flujo de calor del lado del líquido

$$\frac{dQ_l}{dt} = -k_l A \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi}$$

flujo de calor del lado del sólido

$$\frac{dQ_s}{dt} = -k_s A \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi}$$

como se **solidifica** entonces $\frac{dQ_s}{dt} > \frac{dQ_l}{dt}$, por lo tanto,

$$\frac{dQ}{dt} = -k_s A \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + k_l A \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi} \quad (\text{B.13})$$

donde $A = 2 \pi L \xi$ = área transversal del cilindro

igualando las ecuaciones (B.12) y (B.13),

$$L_f \rho_s L \pi \left(2R \frac{dR}{dt} - 2\xi \frac{d\xi}{dt} \right) = -k_s A \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + k_l A \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi}$$

sustituyendo las áreas, $A = 2 \pi L \xi$,

$$L_f \rho_s L \pi \left(2R \frac{dR}{dt} - 2\xi \frac{d\xi}{dt} \right) = -k_s 2 \pi L \xi \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + k_l 2 \pi L \xi \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi}$$

$$2 L_f \rho_s L \pi \left(R \frac{dR}{dt} - \xi \frac{d\xi}{dt} \right) = -k_s 2 \pi L \xi \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + k_l 2 \pi L \xi \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi}$$

$$2 L_f \rho_s L \pi R \frac{dR}{dt} - 2 L_f \rho_s L \pi \xi \frac{d\xi}{dt} = -k_s 2 \pi L \xi \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + k_l 2 \pi L \xi \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi}$$

dividiendo ambos términos de la ecuación entre $2 \pi L \xi$,

$$L_f \rho_s \frac{R}{\xi} \frac{dR}{dt} - L_f \rho_s \frac{d\xi}{dt} = -k_s \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + k_l \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi} \quad (\text{B.14})$$

ecuación de la masa total del sistema con coordenadas cilíndricas,

$$m_T = \rho_l L (\pi \xi^2 - \pi r_0^2) + \rho_s L (\pi R^2 - \pi \xi^2)$$

$$\text{como } \frac{dr_0}{dt} = 0,$$

$$m_T = \rho_l L \pi \xi^2 + \rho_s L (\pi R^2 - \pi \xi^2)$$

$$\frac{dm_T}{dt} = \rho_l L \pi 2 \xi \frac{d\xi}{dt} + \rho_s L \pi \left(2R \frac{dR}{dt} - 2\xi \frac{d\xi}{dt} \right)$$

$$\frac{dm_T}{dt} = \rho_l L \pi 2 \xi \frac{d\xi}{dt} + 2 R \rho_s L \pi \frac{dR}{dt} - 2 \xi \rho_s L \pi \frac{d\xi}{dt}$$

$$\text{despejando } \frac{dR}{dt},$$

$$2 R \rho_s L \pi \frac{dR}{dt} = 2 \xi \rho_s L \pi \frac{d\xi}{dt} - 2 \rho_l L \pi \xi \frac{d\xi}{dt}$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{2 \xi \rho_s L \pi}{2 R \rho_s L \pi} \frac{d\xi}{dt} - \frac{2 \rho_l L \pi \xi}{2 R \rho_s L \pi} \frac{d\xi}{dt}$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\xi}{R} \frac{d\xi}{dt} - \frac{\rho_l}{\rho_s} \frac{\xi}{R} \frac{d\xi}{dt}$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\xi}{R} \frac{d\xi}{dt} \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_s} \right) \quad (\text{B.15})$$

sustituyendo la ecuación (B.15) en (B.14),

$$L_f \rho_s \frac{R}{\xi} \frac{\xi}{R} \frac{d\xi}{dt} \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_s} \right) - L_f \rho_s \frac{d\xi}{dt} = -k_s \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + k_l \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi}$$

$$L_f \rho_s \frac{d\xi}{dt} \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_s} \right) - L_f \rho_s \frac{d\xi}{dt} = -k_s \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + k_l \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi}$$

$$L_f \rho_s \frac{d\xi}{dt} - \frac{\rho_l}{\rho_s} L_f \rho_s \frac{d\xi}{dt} - L_f \rho_s \frac{d\xi}{dt} = -k_s \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + k_l \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi}$$

simplificando términos obtenemos,

$$-L_f \rho_l \frac{d\xi}{dt} = -k_s \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + k_l \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi}$$

multiplicando ambos términos por menos uno obtenemos la condición de Stefan utilizando la densidad del líquido,

$$L_f \rho_l \frac{d\xi}{dt} = -k_l \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=\xi} \quad (\text{B.16})$$

B.5. Conclusiones de la demostración

Se demostró mediante las cuatro formas considerando como frontera fija a r_0 , que la densidad que se utiliza en la ecuación de movimiento de la interfase es la densidad del líquido, expresada en las ecuaciones (B.3), (B.8), (B.11) y (B.16), la cual es la misma ecuación:

$$L_f \rho_l \frac{d\xi}{dt} = -k_l \left. \frac{\partial T_l}{\partial r} \right|_{r=\xi} + k_s \left. \frac{\partial T_s}{\partial r} \right|_{r=\xi}$$

	Masa del Líquido	Masa del Sólido
Derretir	aumenta la m_l $m_l > m_{l_0}$ $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = L_f \frac{\Delta m_s}{\Delta t}$ $\frac{dQ_l}{dt} > \frac{dQ_s}{dt}$	disminuye la m_s $m_{s_0} > m_s$ $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -L_f \frac{\Delta m_s}{\Delta t}$ $\frac{dQ_l}{dt} > \frac{dQ_s}{dt}$
Solidificar	disminuye la m_l $m_{l_0} > m_l$ $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -L_f \frac{\Delta m_s}{\Delta t}$ $\frac{dQ_s}{dt} > \frac{dQ_l}{dt}$	aumenta la m_s $m_s > m_{s_0}$ $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = L_f \frac{\Delta m_s}{\Delta t}$ $\frac{dQ_s}{dt} > \frac{dQ_l}{dt}$

Cuadro B.1: Tabla comparativa de los comportamientos de la masa del líquido y del sólido.

Curriculum Vitae

Valter Silva Nava nació en la Ciudad de México. Recibió el título de Ingeniero Químico (2005), el grado de Maestro en Administración (2013) por la UIA Ciudad de México. Estudiante de tiempo completo en la Maestría en Ciencias de la Ingeniería en ITESM campus Ciudad de México con enfoque a Energías Renovables. Candidato a continuar los estudios en el Doctorado en Ciencias de la Ingeniería en la misma institución. Sus principales áreas de estudio son la Termodinámica y la Transferencia de Calor, usando las herramientas analíticas de Diferencia Finita y el Método de Elemento Finito para la resolución de problemas.