



**TECNOLOGICO
DE MONTERREY®**

Propuesta teórica y metodológica sobre la contribución en el desarrollo del pensamiento crítico en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a través de la modelación matemática en la formación de ingenieros

Propuesta de investigación en preparación para obtener el grado de:

Doctora en Innovación Educativa

Presenta:

Claudia Jaqueline Acebo Gutiérrez

CVU: 466426

Asesor titular:

Dra. Ruth Rodríguez Gallegos

Monterrey, Nuevo León, México

Junio de 2021

Dedicatorias

Durante el camino que he recorrido durante estos últimos cuatro años del programa doctoral de Innovación Educativa, he recibido el apoyo y cariño de muchas personas y es por lo que quiero dedicar este trabajo a todas ellas.

Dedico este trabajo con mucho cariño a toda mi familia por el apoyo incondicional para alcanzar las metas propuestas y sobre todo por tanto amor que nutre mi vida y la hace excepcional.

Especialmente a mi esposo Roberto, mi inspiración y pasión, que con su amor y sabiduría me ha apoyado en cada momento de mi vida y con quien he aprendido el valor de esta.

A nuestros hijos fuente inagotable de nuestra alegría, que nos nutren de enseñanzas y regocijos. Valeria, Roberta y Luis que fueron una fuente de conocimiento y ayuda en el desarrollo de la tesis, durante mis clases y la preparación de mis trabajos de investigación. Cada vez que me surgían dudas y dificultades, ellos siempre estuvieron conmigo mostrando todo su amor enseñándome, acompañándome y motivándome; Carlos, Enrique y Roberto; que junto a mis nueras y nietos siempre tuvieron palabras de cariño, motivación y orgullo. Todas ellas fueron un gran alimento para mi alma.

Este trabajo de investigación quiero dedicarlo con todo mi amor a mi mami Alicia, que con su cariño y ejemplo de trabajo me ha enseñado el valor de la educación, que con sus palabras llenas de orgullo me han hecho sentir que puedo lograrlo todo.

A mis hermanos, Guillermo, Refugio, Cynthia y Jeannette, que con sus muestras de ternura y cariño me han inspirado y hecho sentir siempre querida, acompañada, especial y orgullosa de lo que hago.

A mis amigas, por sus muestras de cariño, apoyo y motivación.

Y a Mona por su compañía en todas esas largas noches de trabajo y desvelo.

Agradecimientos

Se dice que el trabajo de investigación, especialmente de una tesis, es un trabajo en solitario. Desde mi experiencia considero que a pesar de pasar tiempo en soledad trabajando en la investigación y todo lo que implica cursar un doctorado, no he estado sola, todo lo contrario, he recibido la ayuda y acompañamiento de muchas personas. Es por lo que quiero agradecer a cada una de ellas.

A la Dra. Ruth Rodríguez, principal colaboradora en todo el proceso de investigación, por compartir generosamente sus conocimientos y experiencias, su orientación, su motivación, por celebrar mis logros y, sobre todo, por su amistad. Me siento muy honrada por tenerla como directora de tesis, su acompañamiento ha sido clave en mi desarrollo durante el programa.

A la Dra. Katherina Edith Gallardo por su acompañamiento, atención y calidez en mi trayectoria por el doctorado. Gracias por su interés como estudiante y como persona, especialmente en los momentos de dificultad por salud.

A los miembros del sínodo, Dra. Celina Torres, Dr. Jhony A. Villa, Dr. Pablo Barniol y Dra. Yolanda Heredia que han dado su tiempo y experiencia para mejorar la calidad de este trabajo. Aprecio y agradezco su valiosa contribución.

Es importante para mí, agradecer de manera especial al Dr. Villa por compartir generosamente sus conocimientos y abrir las puertas a una comunidad de profesores y estudiantes de la Universidad de Antioquia que me recibieron de manera cálida y entusiasta durante mi estancia de la cual el Dr. Villa fue el responsable directo. Ha sido una experiencia que he disfrutado y ha sido sumamente valiosa para mi formación.

Al hablar de formación, no puedo olvidarme de agradecer a mis profesores en el aula y fuera de ella, Dra. María Soledad Ramírez, Dr. Jaime Ricardo Valenzuela, Dr. Javier Serrano, Dr. Juan Manuel Fernández, Dr. Víctor Zúñiga, Dra. Cristina Reynaga

por sus enseñanzas, cercanía, acompañamiento y dedicación que me ayudaron a crecer como investigadora.

La cercanía y el sentido de pertenencia a la institución que tuve durante el programa doctoral fue el resultado de todas estas personas que he mencionado, sin embargo, quiero agradecer de manera especial a la Mtra. Marisol Martínez por ser su exquisito trato, su empatía y cariño, su calidez y ayuda en todo momento, lo que contribuyó de manera especial a que esa pertenencia al Tecnológico de Monterrey fuera excepcional; siempre me sentí escuchada y atendida.

Agradezco la compañía, la amistad y los momentos de apoyo a mis compañeros de generación y de otras generaciones que generosamente me ofrecieron a través de sus palabras, bromas, el conocimiento compartido y las experiencias en común. Deseo agradecer de manera particular a Jazz Novelo por todo su apoyo técnico en el documento de la tesis, por su motivación y cariño.

Quiero agradecer al Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, por darme la oportunidad de aprender y crecer profesionalmente a partir de su filosofía educativa. Al Conacyt por su apoyo para que pudiera ser parte de este programa doctoral.

Finalmente, quiero agradecer de manera especial a los alumnos quienes colaboraron en este trabajo a través de su participación en la aplicación de la prueba de Cornell y, particularmente a aquellos que me dieron la oportunidad de entrevistarlos compartiendo, de este modo, sus ideas y opiniones las cuales disfruté profundamente.

Resumen

En la actualidad y a nivel mundial, se puede observar una tendencia en la formación de profesionistas enfocada al desarrollo, no sólo de competencias disciplinares, sino también competencias transversales. Específicamente en el campo de las ingenierías es de gran importancia que, además de contar con una educación matemática robusta, los estudiantes desarrollen la competencia del pensamiento crítico. Estas necesidades se basan en que, hoy en día los problemas que enfrenta la sociedad se vuelven cada vez más globales y complejos, por lo que se requiere de un pensamiento reflexivo para la toma de decisiones que lleve a soluciones efectivas.

En la enseñanza de las matemáticas el aspecto funcional es primordial, en lugar de la transmisión de conocimientos puramente conceptuales, especialmente con futuros usuarios de esta ciencia. Además de los conocimientos técnicos, los alumnos de ingeniería, específicamente, requieren desarrollar habilidades que les permita afrontar los retos de la sociedad.

Tomando en cuenta lo ya expuesto, esta investigación abordó el tema de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en la formación de ingenieros al usar como estrategia la modelación matemática y de cómo ésta puede contribuir a las habilidades de una competencia transversal como lo es el pensamiento crítico.

Se realizó un estudio de métodos mixtos, los instrumentos utilizados fueron la prueba de pensamiento crítico de Cornell, como preprueba y posprueba, la entrevista semi-estructurada y las observaciones del trabajo colaborativo de los participantes de un curso de Ecuaciones Diferenciales quienes fueron estudiantes de diferentes carreras de ingeniería.

En el enfoque cuantitativo se contó con dos grupos, el experimental y de control. Para la aplicación de la prueba de pensamiento crítico de Cornell, se llevó a cabo una prueba piloto ya que se tradujo del idioma inglés al español. Se aplicaron pruebas no paramétricas para ver si estadísticamente la estrategia de modelación matemática contribuye al desarrollo de habilidades de pensamiento crítico. Se clasificó en tres categorías los niveles de pensamiento crítico que presentaron los alumnos. Se encontró diferencias significativas en la pruebas estadísticas y avances en los diferentes niveles. Se observó que varios alumnos pasaron de un nivel a otro y aquellos avanzados, aumentaron sus puntuaciones. En el enfoque cualitativo, se llevaron a cabo observaciones a seis equipos de su trabajo en clase, se realizaron entrevistas a cuatro alumnos y se obtuvieron nueve reflexiones a solicitud de la profesora de la clase. Se analizaron los datos y se compararon con los hallazgos cuantitativos.

Esta triangulación de los hallazgos cuantitativos y cualitativos permitieron dar respuesta a la pregunta general de investigación y las tres preguntas subordinadas a ellas.

Índice

Introducción	xii
Capítulo 1: Revisión de Literatura	1
1.1 Modelación Matemática.....	1
1.1.1. Perspectivas y posturas teóricas de la Modelación Matemática.....	4
1.1.2. Sub-competencias de la modelación matemática.	13
1.1.3 Resultados de la revisión de literatura sobre modelación matemática	20
1.1.4 Desarrollo de la modelación matemática en profesores y sus implicaciones	36
1.1.5 Instrumentos para evaluar las fases de la modelación matemática.....	42
1.2 Pensamiento crítico.....	47
1.2.1 Pensamiento crítico como competencia transversal.....	47
1.2.2 Definición de pensamiento crítico	50
1.2.3 El pensamiento crítico y su importancia	54
1.2.4 Las habilidades y disposiciones de pensamiento crítico	58
1.2.5 El pensamiento crítico y las matemáticas	65
1.2.6 Instrumento para evaluar el pensamiento crítico	79
1.3 Formación de ingenieros.....	86
1.3.1 Nuevas competencias para la formación del estudiante.....	86
1.3.2 La visión STEM y la formación de ingenieros	88
1.3.3 Hacia una visión integrada	93
1.4 Uso de tecnología en la modelación matemática	98
1.4.1 La importancia en estudios previos sobre modelación y tecnología.....	100
1.4.2 Experimentación y uso de sensores en ciencias	103
1.4.3 Simulación.....	105
1.4.4 Aprendizaje basado en retos como estrategia para el aprendizaje activo ...	109

Capítulo 2: Planteamiento del problema	115
2.1 Antecedentes del problema	115
2.2 Planteamiento del problema	117
2.3 Objetivos de la investigación	121
2.4 Justificación de la investigación.....	122
2.5 Delimitaciones de la investigación	123
Capítulo 3: Método.....	126
3.1 Propuesta metodológica	126
3.2 Aproximación cuantitativa	133
3.2.1 Etapa 1: Traducción de prueba y validación	133
3.2.2.1 Instrumento: Prueba de Pensamiento Crítico de Cornell.....	135
3.2.2.2 Validación de la traducción de la prueba	137
3.2.2.3 Confiabilidad de la traducción de la prueba.....	143
3.2.2 Etapa 2: Aplicación de la prueba de Cornell	144
3.2.3 Etapa 3: Comparación de las pospruebas de los grupos experimental y de control	145
3.2.4 Establecimiento del diseño experimental	145
3.3 Aproximación cualitativa.....	147
3.3.1 Participantes e instrumentos.....	148
3.3.1.1. Rúbrica para evaluar la modelación matemática y el pensamiento crítico.....	151
3.3.1.2 Entrevista semiestructurada.....	154
3.3.1.3 Reflexión final del curso por los alumnos del grupo experimental.....	156
3.3.1.4 Situaciones problema de la clase de Ecuaciones Diferenciales.....	157
3.3.1.5 Análisis de los datos.....	163
3.4 Procedimiento.....	164
Capítulo 4: Resultados	171

4.1 Aproximación cuantitativa	171
4.1.1 Determinación de la normalidad de los datos y comparación de medias del grupo experimental	172
4.1.2 Determinación de la normalidad de los datos y comparación de medias del grupo control	175
4.1.3 Comparación de pospruebas entre grupo experimental y control.....	177
4.1.4 Resultados por niveles y secciones de la prueba de pensamiento crítico ...	179
4.2 Aproximación cualitativa.....	186
4.2.1 Fase de formulación de modelación matemática.....	188
4.2.1.1 Sub-competencia: Para comprender el problema real y construir relaciones entre las variables.	190
4.2.1.2 Sub-competencia: Buscar información disponible y diferenciar entre información relevante e irrelevante.....	195
4.2.1.3 Sub-competencia: Reconocer cantidades que influyen en la situación, nombrarlas e identificar variables clave.	196
4.2.1.4 Sub-competencia: Hacer suposiciones para el problema y simplificar situación.....	198
4.2.2 Fase de resolución de modelación matemática.....	203
4.2.2.1 Sub-competencia: elegir notaciones matemáticas apropiadas y representar situaciones gráficamente.....	205
4.2.2.2 Sub-competencia: Utilizar estrategias heurísticas como la división del problema en problemas parciales, establecer relaciones con problemas similares, reformular el problema de una forma diferente, variar las cantidades o los datos disponibles.....	206
4.2.2.3 Sub-competencia: Utilizar el conocimiento matemático para resolver el problema	207
4.2.3 Fase de interpretación de modelación matemática	211
4.2.3.1 Sub-competencia: Interpretar resultados matemáticos en contextos extra matemáticos	213

4.2.3.2 Sub-competencia: Generalizar soluciones que se desarrollaron para una situación especial	214
4.2.3.3 Sub-competencia: Ver soluciones a un problema utilizando un lenguaje matemático apropiado y/o para comunicar sobre las soluciones	214
4.2.4 Fase de validación de modelación matemática.....	217
4.2.4.1 Sub-competencia: Verificar críticamente y reflexionar sobre las soluciones encontradas, revisar algunas partes del modelo o volver a pasar por el proceso de modelado.....	219
4.2.4.2 Sub-competencia: Reflexionar otras formas de resolver el problema o si las soluciones se pueden desarrollar de manera diferente	220
4.2.5 Casos explicativos sobre las competencias de MM y habilidades de PC ...	227
4.2.6 Triangulación entre el análisis cuantitativo y cualitativo de los datos.....	239
Capítulo 5: Conclusiones.....	244
Referencias	257
Anexos.....	274

Índice de Tablas

Tabla 1	6
Clasificación actual de las perspectivas de la modelación matemática Kaiser y Sriraman, (2006, p.304)	
Tabla 2	12
Grupos de habilidades para evaluar y su mapeo de las fases (Houston, 2006, p.249)	
Tabla 3	24
Distribución de artículos por año	
Tabla 4	24
Artículos más citados	
Tabla 5	27
Revistas con más publicaciones	
Tabla 6	27
Principales temas de investigación	
Tabla 7	28
Cantidad de estudios por perspectiva	
Tabla 8	53
Resumen de definiciones de pensamiento crítico (Atabaki, Keshtiaray Yarmohammadian, 2015, p. 97).	
Tabla 9	78
Artículos con metodología experimental para evaluar intervenciones	
Tabla 10	112
Fases del Aprendizaje Basado en Retos de Apple (2015, p. 3)	
Tabla 11	138
Información de participantes por género y edad	
Tabla 12	152
Fases e indicadores de la rúbrica de MM-PC	
Tabla 13	168
Relación de las fases de modelación y las preguntas de entrevista	
Tabla 14	172
Estudiantes de los grupos experimental y control que aplicaron al instrumento	
Tabla 15	181
Puntajes por sección de estudiantes de preprueba y posprueba	
Tabla 16	182
Puntajes de la prueba de Pensamiento Crítico de Cornell por secciones de estudiantes de nivel bajo.	
Tabla 17	183
Puntajes de la prueba de Cornell por secciones de estudiantes de nivel intermedio	
Tabla 18	184
Puntajes de la prueba de Cornell por secciones de estudiantes de nivel alto	
Tabla 19	185
Puntajes por niveles de pensamiento crítico y cambios al inicio y finalización del curso	
Tabla 20	189

Descripción técnica de indicadores de rúbrica, competencias y habilidades de MM y PC para fase de formulación.	
Tabla 21	200
Observaciones, entrevistas y reflexiones y sus habilidades en la fase de formulación	
Tabla 22	204
Descripción técnica de indicadores de rúbrica, competencias y habilidades de MM y PC para fase de resolución	
Tabla 23	209
Observaciones, entrevistas y reflexiones y sus habilidades en la fase de resolución	
Tabla 24	212
Descripción técnica de indicadores de rúbrica, competencias y habilidades de MM y PC para fase de interpretación	
Tabla 25	216
Observaciones, entrevistas y reflexiones y sus habilidades en la fase de interpretación	
Tabla 26	218
Descripción técnica de indicadores de rúbrica, competencias y habilidades de MM y PC para fase de validación	
Tabla 27	222
Observaciones, entrevistas y reflexiones y sus habilidades en la fase de validación	
Tabla 28	231
Resultados de la preprueba y posprueba de estudiante con avance bajo – medio	
Tabla 29	235
Resultados de puntajes en pruebas de Cornell de alumno con niveles bajo – bajo	
Tabla 30	237
Puntajes de las pruebas de Cornell de alumno de nivel medio – alto	

Índice de Figuras

Figura 1	5
Perspectivas de la Modelación Matemática y estudios realizados	
Figura 2	8
Ciclo de modelación matemática de Pollak, 1967 – 1970 (Borromeo, 2006 p. 89)	
Figura 3	8
Ciclo de modelación matemática de Kaiser y Blum (Borromeo, 2006 p. 88)	
Figura 4	10
Ciclo de modelación de Blum y Leiss (Blum y Borromeo, 2009, p. 45)	
Figura 5	11
Ciclo de modelación de Rodríguez (2007, 2010)	
Figura 6	20
Flujo PRISMA adaptado de Moher et al. (2009)	
Figura 7	21
Criterios de inclusión y exclusión	
Figura 8	24
Autores con mayor cantidad de artículos	
Figura 9	25
Distribución geográfica de los autores	
Figura 10	63
Proceso de decisión acerca de una creencia o acción. Ennis (2005, p. 49)	
Figura 11	64
Caracterización del pensador crítico ideal (Ennis, 2005, p. 50)	
Figura 12	92
Proceso de diseño de ingeniería. Hynes et al (2016, p. 9)	
Figura 13	94
El plano inclinado de la integración de STEM (Vásquez, 2014, p.13)	
Figura 14	130
Diseños de métodos mixtos en función del tiempo y énfasis del paradigma (Johnson y Onwuegbuzie, 2004, p.22)	
Figura 15	132
Diseño mixto de triangulación concurrente de acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2010)	
Figura 16	142
Hipótesis nula y alternativa prueba piloto	
Figura 17	142
Muestra de hoja de Excel con cálculos para obtener el valor de z (prueba piloto)	
Figura 18	143
Muestra de hoja de Excel con cálculos para obtener el valor de KR20	
Figura 19	144
Aproximación cuantitativa: Etapa 1	

Figura 20	146
Diseño experimental puro del estudio	
Figura 21	150
Instrumentos y momentos relevantes del estudio para análisis y recolección de datos	
Figura 22	159
Modelación de problemas de temperatura y población en simulador	
Figura 23	160
Problema de mezclas para simulación propuesto a estudiantes	
Figura 24	161
Representación gráfica de diagrama de bloques – flujos de situación problema	
Figura 25	162
Problema de peces para simulador propuestos a estudiantes	
Figura 26	167
Pasos de aproximaciones metodológicos de los métodos mixtos del estudio	
Figura 27	174
Valor – p de la prueba Wilcoxon para medianas relacionadas del gpo. experimental	
Figura 28	176
Valor – p de la prueba de Wilcoxon para medianas relacionadas del grupo control	
Figura 29	178
Valor – p de la prueba U Mann – Whitney para medianas de las pospruebas de los grupos experimental y de control	
Figura 30	187
Resumen del proceso de trabajo con los alumnos participantes	
Figura 31	229
Modelo de situación problema de mezclas y gráfica de concentración de sal	
Figura 32	230
Interpretación y modificación de gráfica para mejorar el modelo	
Figura 33	234
Modelo diseñado con apoyo de profesora a alumnos de nivel bajo	

Introducción

La enseñanza de las Matemáticas se ha considerado de gran importancia para la sociedad. Se puede observar que, a través de los años, tanto la manera de enseñar Matemáticas, como lo que se espera de ella ha cambiado considerablemente. A mitad del siglo XX, con la puesta en órbita del Sputnik I y II por parte de la Unión Soviética, se proclamó el inicio de la era espacial y, con ella, se generó una especie de revolución mundial en la educación científica (particularmente en EU y posteriormente en otros países del mundo), especialmente en la enseñanza de las matemáticas.

Desde entonces y hasta la fecha, las propuestas de la enseñanza de las Matemáticas abarcaron una amplia gama de consideraciones. Desde los programas educativos, los enfoques metodológicos, las estrategias docentes, los fundamentos teóricos desde una perspectiva psicológica, didáctica, biológica, del conocimiento y mucho más. Todas estas consideraciones, lógicamente, están relacionadas directamente con los actores principales en el ámbito de la Educación, el alumno y el profesor.

A pesar de la importancia adquirida sobre las Matemáticas, en la actualidad, esta disciplina tiene consigo obstáculos relevantes para su aprendizaje (Socas, 2007; Devesh, 2015; Quiroz y Rodríguez, 2015). Una gran parte de los alumnos en todos los niveles escolares, desde los básicos hasta niveles superiores, tienen dificultades para entender las matemáticas. Hoy en día, en la mayoría de las aulas, podemos encontrar una enseñanza “tradicional” en la clase de matemáticas donde el profesor inicia con una exposición teórica del tema y, más adelante, resuelve problemas en el pizarrón al mismo tiempo que los alumnos “transcriben” dichos problemas para continuar continuación iniciar una serie

de ejercicios para practicar sobre el tema expuesto por el docente.

En estas clases tradicionales, algunos de los estudiantes tendrán dificultades con los procedimientos de resolución y tratarán de resolver esta situación preguntando a sus compañeros y al profesor. En algunos casos, se les dificultará el logro de aprendizajes y su objetivo se centrará en aprobar la materia. Otros alumnos, seguramente lograrán realizar los pasos que los lleven a solucionar los problemas de las actividades, sin embargo, otros estudiantes se preguntarán para qué sirve el contenido (conceptos y técnicas) visto en el curso en la vida diaria. Estos alumnos, al no descubrir cuál es la utilidad del aprendizaje de las Matemáticas, probablemente pensarán que no sirve de nada aprender Matemáticas ya que creerán que no las ocupan en su vida cotidiana. Por lo tanto, difícilmente se imaginarán que los avances de las ciencias se han dado en gran parte gracias a las matemáticas y, que toda aquella tecnología que disfrutan y les fascina, se debe, por lo tanto, en buena parte, a las matemáticas.

Esta actitud de rechazo hacia las matemáticas ha dado como resultado, jóvenes que al elegir la profesión que estudiarán y se dedicarán en su vida adulta, tenga como condición principal que “no tenga relación con las matemáticas”, por lo que carreras profesionales como las ingenierías, se encuentran en desventaja. Por ejemplo, un estudio realizado por UNESCO y RICYT reportado por Ibañez Marti (2018) sobre las percepciones de los mexicanos sobre Ciencia y Tecnología, encontró que el 80% considera que no sabe “nada de Ciencias o Tecnología”, el 54% de los mexicanos estudiados infieren que es para elitistas, el 32% de los encuestados infieren que es para genios y el 31% afirmaron que “no se les da las Matemáticas” Esta situación es alarmante considerando los desafíos que la sociedad debe enfrentar hoy en día y,

especialmente, aquellos que tendrá que superar en el futuro.

En México como en el mundo, los profesionales de la ingeniería han participado significativamente en los procesos de innovación tecnológica, económica y social y, hoy en día, la ingeniería se ha vuelto indispensable ante la gran difusión de las tecnologías de la información, robótica, biotecnología y otras disciplinas relacionadas con innovaciones y descubrimientos científicos que afectan a la vida (Vega, 2013).

El siglo XXI se enfrenta a desafíos en el campo científico-tecnológico, con un mundo polarizado en la política, económicamente globalizado y una alarmante brecha en la equidad y la justicia social (Capote, Rizo y Bravo, 2016). Para poder asegurar el crecimiento de la productividad económica, la seguridad y el bienestar de la sociedad de un país es imperante el aumento de la oferta de ingenieros, matemáticos, científicos y tecnólogos; por ello, la enseñanza y aprendizaje de la ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM por sus siglas en inglés) es una prioridad e iniciativa gubernamental en Estados Unidos y en el mundo (Bell, 2016).

La formación de estudiantes, especialmente la de los futuros ingenieros, debe ser una prioridad para todos los países. La educación en ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas, a través de la innovación, impulsa el crecimiento económico, pero, sobre todo, la calidad de vida. Cada vez más, los avances en estas disciplinas requieren de la injerencia de las matemáticas, debido a esta situación, la formación matemática de los niños y jóvenes es cada vez más apremiante.

De acuerdo con Rodríguez y Quiroz (2016), la enseñanza de las matemáticas tiene como objetivo la formación de estudiantes capaces de aplicar las matemáticas y transferir estos conocimientos en diferentes contextos y situaciones fuera de la escuela y, si se

habla de la educación superior, el objetivo de la enseñanza de las matemáticas está relacionado con los retos del mundo laboral futuro de los estudiantes.

Rodríguez (2017) afirma que, en la enseñanza de las matemáticas el aspecto funcional es primordial, en lugar de la transmisión de conocimientos puramente conceptuales, especialmente con futuros usuarios de esta ciencia. Además de los conocimientos técnicos, los alumnos de ingeniería, específicamente, requieren desarrollar habilidades que les permita afrontar los retos de la sociedad. Deberán resolver problemas, guiar el trabajo colaborativo en el área laboral, tomar decisiones y evaluar sus consecuencias tomando una actitud ética sobre los recursos y el bienestar común; entre muchas otras cosas. Estas personas, tienen y tendrán una responsabilidad por lo que es importante que, cuenten con un pensamiento crítico que los lleve a tomar decisiones que colaboren en la superación de los retos mundiales privilegiando el desarrollo de su país y, por lo tanto, del bienestar de su gente.

Al observar, la importancia de una enseñanza funcional (Rodríguez, 2017) de las matemáticas y su relación con disciplinas como la ciencia, la tecnología y la ingeniería; y viendo el papel crucial que juegan todas estas disciplinas en los desafíos que la sociedad debe enfrentar en la actualidad, esta investigación abordará el tema de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en la formación de ingenieros al usar como estrategia la Modelación Matemática y de cómo ésta puede contribuir a las habilidades de una competencia transversal como lo es el pensamiento crítico.

El interés por investigar sobre la articulación entre la modelación matemática y el pensamiento crítico se centra en que, éste último es una competencia considerada en la actualidad como una de las principales competencias transversales que los individuos

deben desarrollar en su vida y, específicamente, en el campo laboral y; de acuerdo con las características de la modelación matemática que, en primer plano, se centra en relacionar el mundo real con las Matemáticas, se considera que es de gran utilidad estudiar sobre la articulación entre los constructos.

En esta investigación, se profundiza sobre la Modelación Matemática, cómo y desde qué perspectivas se define, cuáles son sus fases como proceso cíclico y sus competencias. También se presentará la visión sobre las habilidades del Pensamiento Crítico y su importancia. Además de la formación de ingenieros desde una perspectiva de formación integrada reconociendo las disciplinas como la ciencia, la tecnología, la ingeniería y las matemáticas (STEM por sus siglas en inglés) como disciplinas interrelacionadas integrándolas al mundo real para llevar a los alumnos a la adquisición de experiencias relevantes para su formación.

En las siguientes secciones se expondrá, en el capítulo 1, la perspectiva teórica relacionada con el planteamiento del problema. Se profundizará en los dos constructos de mayor importancia para el estudio, la modelación matemática y el pensamiento crítico; además de la formación de ingenieros, el uso de tecnología y el aprendizaje basado en retos. En el capítulo 2 se presenta el planteamiento del problema, dando a conocer cuál es el origen de la problemática que se investiga, su importancia y los alcances del estudio.

En el capítulo 3 se presenta en profundidad la metodología que se llevó a cabo. Se establece la elección del método mixto como el idóneo para obtener datos cualitativos y cuantitativos que triangulados nos lleven a una comprensión profunda sobre esta articulación entre la modelación matemática y el pensamiento crítico. En el capítulo 4

se da a conocer el análisis de los datos de los dos enfoques metodológicos de acuerdo con los resultados, por un lado, de los datos que surgieron de la aplicación de preprueba y posprueba a los grupos participantes y; por otro lado de los datos recolectados a partir de las observaciones realizadas en el trabajo colaborativo de los alumnos, sus reflexiones y el resultado de las entrevistas realizadas a éstos. Finalmente, en el capítulo 5, se muestran las conclusiones y reflexiones que surgieron de esta investigación, así como recomendaciones para futuras investigaciones.

Capítulo 1: Revisión de Literatura

En este capítulo se presenta el desarrollo de la perspectiva teórica en la cual los conceptos de Modelación Matemática y Pensamiento Crítico tienen el papel más relevante en esta investigación. Por lo tanto, se abordan contenidos acerca del concepto de Modelación Matemática, sus perspectivas teóricas, sub-competencias, una revisión de literatura sistemática, un análisis de investigaciones donde los participantes estudiados son alumnos y profesores y se presentan instrumentos para su evaluación.

Más adelante se define la competencia de Pensamiento Crítico, se establecen sus sub-competencias, su relación con las Matemáticas e instrumentos para su evaluación. Finalmente, se profundiza sobre la Formación de Ingenieros, las competencias que requieren, la educación STEM y el diseño de ingeniería, así como el uso de la tecnología en la Modelación Matemática. Finalmente se expone sobre la formación de ingenieros, el uso de tecnología y el aprendizaje basado en retos.

1.1 Modelación Matemática

Hoy en día, las expectativas de la sociedad en la formación educativa de las personas, ha cambiado debido a la rapidez del desarrollo de la información y la tecnología (Arseven, 2015). En este mundo de constantes transformaciones, una persona que entiende las matemáticas y las aplica, tiene mayor posibilidad de planear su futuro (Celik, 2017).

Actualmente, entre los propósitos de la enseñanza matemática se destaca la

necesidad de educar a las personas de tal manera que en situaciones problemáticas puedan desarrollar soluciones efectivas, que en la vida diaria puedan aplicar las matemáticas y que puedan identificar la relación significativa que existe entre la realidad y las matemáticas (Ciltas e Isik, 2013).

A pesar de la importancia de entender y hacer uso de las matemáticas en la vida diaria, las dificultades para aprenderlas, el miedo y la ansiedad sobre la misma, se incrementa en el día a día (Ciltas e Isik, 2013). Desde tiempo atrás, poder transferir lo que se aprende y conoce de un ambiente a otro, es de interés y preocupación para los educadores, especialmente aquellos enfocados en las matemáticas (Wake, 2014). Esta transferencia de conocimiento de las matemáticas a contextos del mundo real se dificulta debido a la tendencia de centrarse en las técnicas analíticas y asumir que se dan las conexiones entre las propiedades y parámetros matemáticos y sus condiciones y suposiciones (Cozcher, 2017).

Según Dundar, Gookkurth y Soylu (2012), es común y normal que los estudiantes se cuestionen para qué se usan las matemáticas, ya que por lo general se tiene la idea de que esta disciplina solo se lleva a cabo en las escuelas y, por lo tanto, no se relaciona con las actividades cotidianas. Hernández-Martínez y Vos (2017) encontraron que varias investigaciones concluyen que los estudiantes consideran que las matemáticas son aburridas y no se utilizan en su vida futura o fuera de la escuela, les dan más importancia a otros temas, sólo las consideran de utilidad en el aula y los exámenes. Esta percepción de la disciplina ha preocupado a un gran número de investigadores por lo que proponen la implementación de problemas del mundo real en las clases de matemáticas para vincular el mundo de las matemáticas a la realidad (Huang, 2012).

En niveles de formación profesional se observa la dificultad de los alumnos al graduarse, en especial los de ingeniería, para aplicar las matemáticas en su entorno laboral (Nourallah y Farzad, 2012). En las aulas las matemáticas se convierten en el objeto de estudio mientras que en el ámbito laboral es una herramienta que utiliza el profesionalista para desarrollar su actividad (Wake, 2014).

Esta necesidad de entender y utilizar las matemáticas en la cotidianidad y la ineficacia de la enseñanza tradicional ha llevado a algunos educadores a considerar el estudio de la modelación matemática como una estrategia de enseñanza (Lyon y Magana, 2020; Rendón-Mesa, Esteban y Villa-Ochoa, 2016; Dundar, Gokkurt y Soyluc, 2012). Generalmente el incluir la modelación matemática en el aula se justifica en torno a su eficacia para desarrollar habilidades para resolver problemas de la realidad, por su capacidad para promover y mantener la motivación de los alumnos en el estudio de las matemáticas, o bien, para procurar el camino hacia una carrera relacionada a las ciencias y la tecnología (Czocher, 2017).

Aunado a lo anterior, en la actualidad existe el consenso sobre la necesidad de trabajar con los estudiantes en la disciplina de las matemáticas dirigida hacia el estudio de problemas aplicados y a la modelación esto es, centrar a la enseñanza de las matemáticas en situaciones de la vida real ya que se ha comprobado que la modelación matemática puede desarrollarse en todos los niveles educativos en la mayoría de los contenidos curriculares (Anhalt y Cortez, 2016; Cozcher, 2017). Es debido a todo lo anterior que la modelación en la enseñanza de las matemáticas ha ido en gran aumento en las últimas cuatro décadas (Yenmez, Erbas, Cakiroglu y Alacaci, 2017).

La modelación matemática se puede entender como un proceso cíclico donde los

problemas de la vida real se traducen a un lenguaje matemático, con la intención de resolverlos a través de un sistema simbólico (Huang, 2012). Las etapas en el proceso de lamodelación matemática se refieren a la comprensión del problema, la elección de las variables, la formación del modelo, la solución del problema, la implementación del problema en la vida real y su validación (Ciltas e Isik, 2015).

De acuerdo con Wake (2015), el concepto de modelación matemática es utilizado enpruebas internacionales como la Prueba Internacional del Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA, por sus siglas en inglés) de la Organización de Cooperación y Desarrollo Económicos (OCDE) para la evaluación de la “alfabetización matemática”. Wake (2015) concluye que dicha alfabetización matemática “comprende la aplicación de conocimientos matemáticos, habilidades y comprensión en la búsqueda de resolver problemas o dar sentido a situaciones significativas” (Wake, 2015, p. 677).

En esta sección se hablará sobre las perspectivas, algunas posturas teóricas representativas y sub-competencias de la modelación matemática. Además, se presenta brevemente los resultados de una revisión sistemática de literatura sobre la modelación matemática, eldesarrollo del modelado de alumnos y maestros y sus implicaciones.

1.1.1. Perspectivas y posturas teóricas de la Modelación Matemática

A pesar de que el término “modelación matemática” es utilizado en diferentes partesdel mundo, existe controversia entre unos y otros por considerarlo diferente y por ello su justificación surge de diferentes perspectivas epistemológicas y teóricas desde donde se aborda la modelación matemática (Borromeo, 2013). La investigadora afirma

que, la clasificación sobre las diferentes perspectivas teóricas, se desarrollaron durante algunas conferencias en Europa con el grupo “Mathematical Modelling and Applications” con participantes de todo el mundo. En la Figura 1 se mencionan las perspectivas y se muestran referencias de estudios de cada tipo de perspectiva.

Figura 1

Perspectivas de la Modelación Matemática y estudios realizados

Modelación Realística	<ul style="list-style-type: none"> • “Why do I have to learn this?” A case study on students’ experiences of the relevance of mathematical modeling activities. Hernandez Martinez, P. y Vos, P. (2018).
Modelación Contextual	<ul style="list-style-type: none"> • Competencia matemática de los alumnos en el contexto de una modelización: aceite y agua. Búa, J., Fernández, M. y Salinas M. (2016).
Modelación Educativa	<ul style="list-style-type: none"> • Using Modeling and Simulation to Learn Mathematics. Rodríguez, R. (2017).
Modelación Teórica	<ul style="list-style-type: none"> • A Didactic Analysis of the Mathematical Modeling Process in Secondary School Students. Socas, M.; Ruano, R. M., and Hernández, J. (2016).
Modelación Socio-cultural	<ul style="list-style-type: none"> • Mathematical Modeling Activities as a Useful Tool for Values Education. Doruk, B. K. (2012).
Modelación Cognitiva	<ul style="list-style-type: none"> • Structures of mathematical modeling of mathematics and metacognitive skills and abilities’ typology. Lebedev A., Krupa T. y Rezakov M. (2016).

Elaboración propia

De acuerdo con Kaiser y Sriraman (2006), la perspectiva Modelación Cognitiva la consideran como una meta-perspectiva. En la Tabla 1 se puede observar la clasificación

actual de las perspectivas de la modelación matemática, las relaciones con perspectivas anteriores y sus antecedentes.

Tabla 1

Clasificación actual de las perspectivas de la modelación matemática Kaiser y Sriraman, (2006, p.304)

<i>Nombre de la Perspectiva</i>	<i>Objetivos centrales</i>	<i>Relación con perspectivas anteriores</i>	<i>Antecedentes</i>
<i>Modelación Realística o Aplicada</i>	Objetivos pragmático-utilitarios. Por ejemplo: resolver problemas reales del mundo, promoción de las competencias de modelación	La perspectiva pragmática de Pollak	Pragmatismo anglosajón y Matemáticas aplicadas
<i>Modelación Contextual</i>	Objetivos psicológicos y relacionados con el sujeto. Por ejemplo: resolver problemas con contexto	Enfoques de procesos de la información encaminados a enfoques de sistemas	Debate americano sobre solución de problemas, así como la práctica cotidiana y experimentos psicológicos de laboratorio
<i>Modelación Educativa</i> <i>a) Modelación didáctica</i> <i>b) Modelación Conceptual</i>	Objetivos pedagógicos relacionados con el sujeto a) Estructuración de los procesos de los aprendices y su promoción b) Introducción y desarrollo del concepto	Perspectivas integradoras (Blum, Niss) y la promoción de desarrollos del enfoque científico-humanista	Teorías didácticas y de enseñanza
<i>Modelación Sociocrítica</i>	Objetivos pedagógicos como la comprensión del mundo que nos rodea	Perspectiva emancipatoria	Enfoques sociocríticos en Sociología política
<i>Modelación Epistemológica o Teórica</i>	Objetivos orientados a la teoría como la promoción del desarrollo de la teoría	Perspectiva científico-humanista de principio de Freudenthal	Epistemología romana
<i>Modelación Cognitiva</i>	Objetivos de la investigación: a) análisis de los procesos cognitivos que tienen lugar durante los procesos de modelización y comprensión de estos procesos cognitivos Objetivos psicológicos: b) promoción de los procesos de pensamiento matemático utilizando modelos como imágenes mentales o incluso imágenes físicas o enfatizando el modelado como proceso mental como abstracción o generalización		Psicología cognitiva

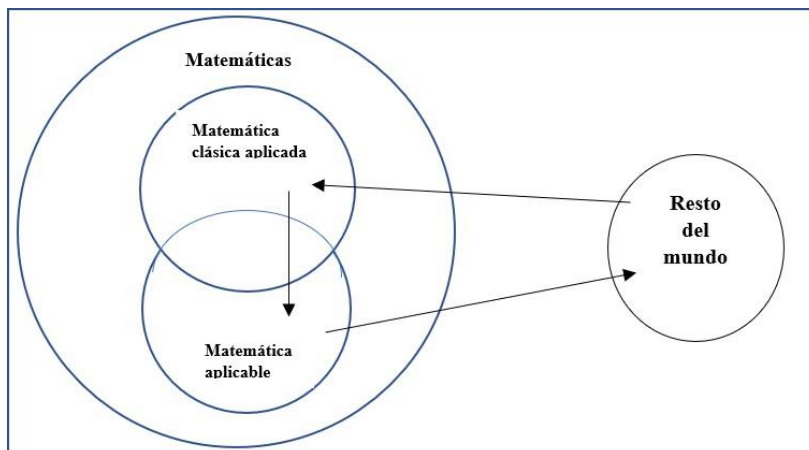
Una aplicación matemática se lleva a cabo siempre que hay un propósito para aplicar las matemáticas para afrontar algún aspecto del mundo extra-matemático, es decir, el mundo real (Niss, Blum y Galbraith, (2007). En ocasiones cuando se habla de “modelo y modelado” se genera la impresión de que tienen un mismo significado. Sin embargo, el modelo es el resultado de la modelación la cual representa un proceso (Dundar, Gokkurt ySoylu, 2012).

Una aplicación matemática se lleva a cabo siempre que hay un propósito para aplicar las matemáticas para afrontar algún aspecto del mundo extra-matemático, es decir, el mundo real (Niss, Blum y Galbraith, 2007). En ocasiones cuando se habla de “modelo y modelado” se genera la impresión de que tienen un mismo significado. Sin embargo, el modelo es el resultado de la modelación la cual representa un proceso (Dundar, Gokkurt ySoylu, 2012).

A través del tiempo se han propuesto diferentes ciclos de la modelación matemática. Se puede encontrar investigadores que consideran que no hay fase entre la situación real y el modelo matemático. Dentro de este grupo como comenta Borromeo (2006), destaca Pollak (citado en Borromeo, 2006, p. 89), especialmente en la manera de considerar el modelado para comprender mejor el mundo real. Este ciclo se puede observar en la Figura 2.

Figura 2

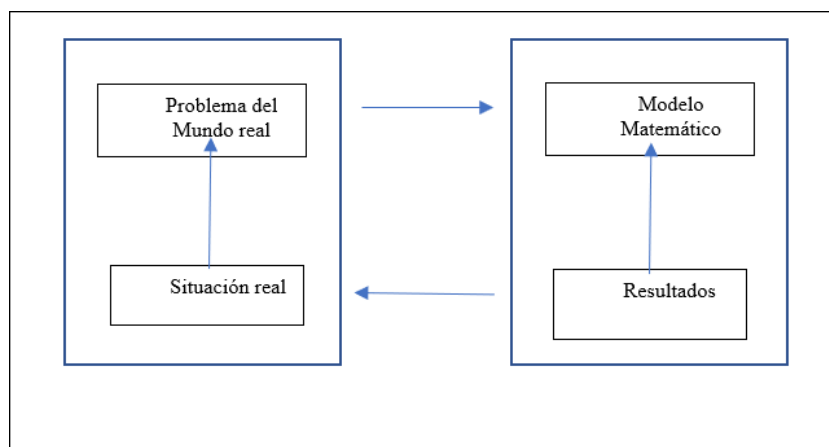
Ciclo de modelación matemática de Pollak, 1967 – 1970 (Borromeo, 2006 p. 89)



Otro ciclo de modelación que además de enfocarse en la visión psicológica de la modelación se centra en los problemas complejos y en el proceso de solucionarlos es Kaiser y Blum (1997). Este ciclo de modelación se muestra en la Figura 3.

Figura 3

Ciclo de modelación matemática de Kaiser y Blum (Borromeo, 2006 p. 88)



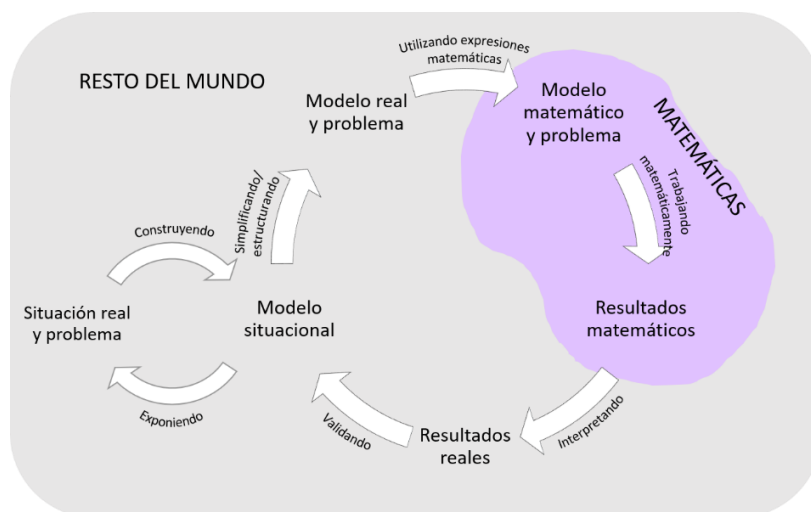
Por otro lado, sobresalen investigadores que se centran en los procesos cognitivos del estudiante en el proceso de modelado. Tal es el caso de Blum y Borromeo (2009) que utilizan en sus estudios el ciclo de modelación de Blum y Leiss (2006) que cuenta con siete pasos:

1. En la actualidad construyendo
2. Simplificando y estructurando
3. Matematizando (haciendo cálculos, resolviendo ecuaciones, etc.)
4. Trabajando matemáticamente
5. Interpretando
6. Validando una exposición

En este ciclo, el estudiante debe comprender el problema o la situación que se presenta. Ésta se debe simplificar, estructurar y precisar, es decir, tomar lo relevante para su solución. Este problema, al traducirlo a un modelo matemático, se deberá trabajar con cálculos y resolución de ecuaciones para tener un resultado que posteriormente se interpretará en el mundo real. Finalmente se validará este resultado con la realidad y, en caso de no validarse, es necesario regresar a las fases anteriores hasta lograrlo. Una vez que se valida, se expondrá ante los demás. Este ciclo de modelación matemática se puede observar en la Figura 4.

Figura 4

Ciclo de modelación de Blum y Leiss (Blum y Borromeo, 2009, p. 45)

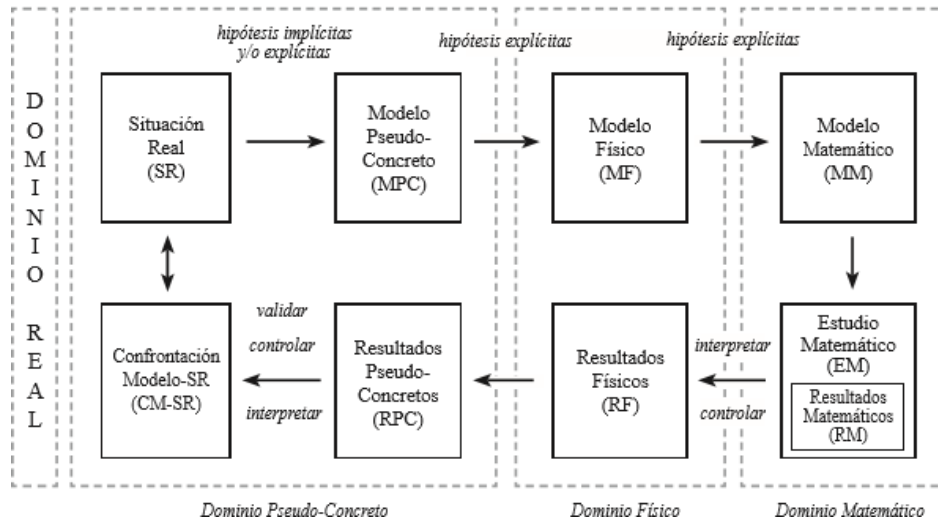


Elaboración propia

Para Rodríguez y Quiroz (2016), la modelación matemática es considerada como un proceso cíclico donde se puede reconocer cuatro dominios: el dominio real, el pseudo-concreto, el físico y el matemático. Para relacionar el dominio real con el matemático, se proponen actividades que establecen un problema del mundo real que, al comprenderlo, los alumnos lo transforman en un modelo físico y de ahí a un modelo matemático para solucionar el problema. La solución propuesta estará tanto en términos matemáticos como pseudo-concretos de tal manera que se pueda validar y, en su caso, hacer cambios. Este proceso donde se relaciona el mundo real (dominio real) y las matemáticas (dominio matemático) cíclico que Rodríguez y Quiroz proponen se puede observar en la Figura 5.

Figura 5

Ciclo de modelación de Rodríguez (2007, 2010)



Houston (2006, p. 247) afirma que, por lo general, las siete fases del ciclo de modelado están dadas por:

1. Especificar el problema verdadero
2. Crear el modelo matemático
3. Especificar el problema matemático
4. Resolver los problemas de matemáticas
5. Interpretar las soluciones matemáticas
6. Validar el modelo
7. Revisar y reportar

En la década de los ochenta surgió en los expertos en la modelación matemática el interés por evaluarla. En su artículo *The Assessment of Modelling Projects*, G. Hall (citado en Houston, 2006) propone que las habilidades de los estudiantes deben ser

evaluadas en tres grupos: Contenido, Presentación y Conducción. El grupo de contenido recoge los aspectos técnicos del modelado, el de presentación se relaciona con la escritura del proyecto y, el tercero permite la originalidad y la gestión. La Tabla 2 muestra los grupos de evaluación.

Tabla 2

Grupos de habilidades para evaluar y su mapeo de las fases (Houston, 2006, p.249)

Ítems propuestos por Hall	
Contenido	Fases
1. Capacidad para manejar y dar sentido a datos naturales y experimentales	1
2. Determinación de variables y parámetros los cuales describen la observación	2
3. Reconocimiento de patrones en los datos y en procesos	2
4. Generación de expresiones matemáticas para resumir observaciones	2
5. Capacidad para configurar un modelo que representa el sistema y relacionar sus variables	2
Significativas	
6. Capacidad técnica para manipular las expresiones matemáticas del modelo para lograr los objetivos deseados	3, 4
Presentación	
7. Representación e interpretación de datos	7b
8. Traducción de información dentro y fuera de la forma pictórica	7b
9. Capacidad de comunicación clara, especialmente en redacción	7b
Conducción	
10. Capacidad de identificar una situación y de formular problemas	1,3
11. Capacidad para consultar libros para técnicas adicionales de información	1,4
12. Comprender cuando cambiar de modelo, método u objetivo en la discusión de un Problema	7a
13. Reconocer que es lo que constituye una solución-evaluación para el éxito de los modelos	5,6
14. Capacidad de trabajar efectivamente en un grupo	1,7

Tomando en cuenta estos ciclos de la modelación matemática se puede resumir que el proceso del modelado comienza con un problema del mundo real que se puede convertir en un modelo real si se simplifica y se estructura. Este modelo real lleva a un modelo matemático que al realizar cálculos se obtiene una solución matemática. Esta solución se deberá interpretar y validar con el mundo real. Si se encuentra que, al validar

la solución, ésta no concuerda con la realidad, se deberá regresar a algunas o todas las fases del ciclo para trabajar nuevamente en una solución adecuada. El recorrido entre las fases evidencia en el ciclo del modelado que no es lineal, eso es importante decirle, incluso los alumnos suelen hacer diversas rutas para realizar la modelación de un problema en particular.

Este estudio, desde una perspectiva teórica de modelación educativa, toma como base el ciclo de modelación de Rodríguez (2010, 2016), que es concebido como un proceso cíclico que relaciona el dominio del mundo real con el dominio matemático; entre ellos, se identifican el dominio físico donde se da la comprensión de los fenómenos físicos abordados en la problemática inicial y pseudo-concreto.

En una clase de matemáticas, se proponen situaciones a través de actividades que plantean un problema en el contexto real, de tal manera, que el estudiante deberá construir un modelo pseudo-concreto que, a partir de la comprensión del problema planteado, lo convertirá en un modelo físico, para finalmente obtener un modelo matemático de la situación planteada. Una vez que se obtiene el modelo matemático, éste se resolverá en términos matemáticos, físicos y pseudo-concretos de tal manera que se evaluará la validez del modelo en el mundo real, realizando modificaciones parciales o completas si fuera necesario. Este ciclo de modelación se completará cuando los alumnos den respuesta a la pregunta que se estableció.

1.1.2. Sub-competencias de la modelación matemática.

Dominar las matemáticas significa que se tiene competencia matemática (Niss,

2003, pp. 7 – 9) Según la Real Academia Española (2020), la palabra competencia se refiere a la pericia, aptitud o idoneidad para hacer algo o intervenir en un asunto determinado. Niss (2003) afirma que la competencia matemática significa entonces la capacidad de comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos y situaciones intra y extra matemáticas en las que las Matemáticas juegan o podrían desempeñar un papel y, establece ocho competencias que forman dos grupos:

El primer grupo de competencias tiene que ver con la capacidad de hacer y responder preguntas en y con las matemáticas:

1. Pensar matemáticamente (dominar modos matemáticos de pensamiento) como:

- Formular preguntas que son características de las matemáticas y conocer los tipos de respuestas (no necesariamente las respuestas en sí mismas o cómo obtenerlas) que las matemáticas pueden ofrecer;
- Comprender y manejar el alcance y las limitaciones de un concepto dado.
- Ampliar el alcance de un concepto abstrayendo algunas de sus propiedades; generalizar resultados a clases más grandes de objetos;
- Distinguir entre diferentes tipos de enunciados matemáticos (incluidas aserciones condicionadas ("si-entonces"), enunciados cargados de cuantificadores, supuestos, definiciones, teoremas, conjeturas, casos.

2. Plantear y resolver problemas matemáticos como:

- Identificar, plantear y especificar diferentes tipos de problemas matemáticos, puros o aplicados; abierto o cerrado;

- Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos (puros o aplicados, abiertos o cerrados), ya sean planteados por otros o por uno mismo y, si corresponde, de diferentes maneras.

3. Modelar matemáticamente (es decir, analizar y construir modelos) como:

- Analizar los fundamentos y las propiedades de los modelos existentes, incluida la evaluación de su alcance y validez
- Decodificar modelos existentes, es decir, traducir e interpretar elementos del modelo en términos de la "realidad" modelada
- Realizar modelos activos en un contexto dado:
 - estructurando el campo
 - matematizando
 - trabajando con (en) el modelo, incluida la resolución de problemas que da lugar a:
 - validando el modelo, interna y externamente
 - analizando y criticar el modelo, en sí mismo y ante las posibles alternativas.
 - comunicando sobre el modelo y sus resultados.
 - monitoreando y controlando todo el proceso de modelado

4. Razonamiento matemático como:

- Seguir y evaluar cadenas de argumentos, presentados por otros.
- saber qué es una comprobación matemática (o no es) y cómo se diferencia de otros tipos de razonamiento matemático, por ejemplo, la heurística.
- descubrir las ideas básicas en una línea de argumento dada (especialmente una prueba), incluyendo distinguir líneas principales de detalles, ideas de tecnicismos;

- idear argumentos matemáticos formales e informales, y transformar argumentos heurísticos en pruebas válidas, es decir, declaraciones de prueba.

El otro grupo de competencias tiene que ver con la capacidad de manejar y administrar herramientas y lenguaje matemático:

5. Representar entidades matemáticas (objetos y situaciones, como:
 - Comprender y utilizar (decodificar, interpretar, distinguir) diferentes tipos de representaciones de objetos matemáticos, fenómenos y situaciones;
 - Comprender y utilizar las relaciones entre diferentes representaciones de la misma entidad, incluido el conocimiento de sus fortalezas y limitaciones relativas;
 - Elegir y cambiar entre representaciones.
6. Manejo de símbolos matemáticos y formalismos, como:
 - Decodificar e interpretar lenguaje matemático simbólico y formal, y comprender sus relaciones con el lenguaje natural;
 - Comprender la naturaleza y las reglas de los sistemas matemáticos formales (tanto la sintaxis como la semántica);
 - Traducción del lenguaje natural al lenguaje formal / simbólico
 - Manejo y manipulación de declaraciones y expresiones que contienen símbolos y fórmulas.
7. Comunicarse en, con y sobre las matemáticas, como:
 - Comprender los "textos" escritos, visuales u orales de otros, en una variedad de registros lingüísticos, sobre asuntos que tienen un contenido matemático;

- Expresarse en diferentes niveles de precisión teórica y técnica, en forma oral, visual o escrita, sobre tales asuntos.
8. Uso de ayudas y herramientas (TI incluida), como:
- Conocer la existencia y las propiedades de diversas herramientas y ayudas para la actividad matemática, y su alcance y limitaciones.
 - Poder utilizar reflexivamente tales ayudas y herramientas.

A partir de la consideración del proceso del ciclo de la modelación matemática,

Los problemas del mundo real que se vuelven problemas de modelado se caracterizan por ser auténticos, complejos y abiertos (Maass, 2006). Para tener éxito en la solución de problemas reales a través de la modelación matemática, el estudiante debe desarrollar competencias en esta estrategia de modelación. De acuerdo con Maass (2006,), la comprensión exacta de las competencias y habilidades de modelado está estrechamente relacionada con la definición del proceso de modelado y presenta una lista detallada de sub sub-competencias relacionadas con la comprensión del proceso de modelado de Blum y Kaiser (1997):

1. Competencias para comprender el problema real y establecer un modelo basado en la realidad:

Competencia

- para hacer suposiciones para el problema y simplificar la situación;
- para reconocer cantidades que influyen en la situación, nombrarlas e identificar variables clave;

- para construir relaciones entre las variables;
 - para buscar información disponible y diferenciar entre información relevante e irrelevante;
2. Competencias para configurar un modelo matemático a partir del modelo real:
- Competencia
- para matematizar cantidades relevantes y sus relaciones;
 - para simplificar las cantidades relevantes y sus relaciones si es necesario y reducir su número y complejidad;
 - para elegir notaciones matemáticas apropiadas y representar situaciones gráficamente;
3. Competencias para resolver preguntas matemáticas dentro de este modelo matemático:
- Competencia
- para utilizar estrategias heurísticas como la división del problema en problemas parciales, establecer relaciones con problemas similares o análogos, reformular el problema, ver el problema de una forma diferente, variar las cantidades o los datos disponibles, etc.;
 - para utilizar el conocimiento matemático para resolver el problema;
4. Competencias para interpretar resultados matemáticos en una situación real:
- Competencia
- para interpretar resultados matemáticos en contextos extramatemáticos;
 - para generalizar soluciones que se desarrollaron para una situación especial;
 - para ver soluciones a un problema utilizando un lenguaje matemático

apropiado y / o para comunicar sobre las soluciones;

5. Competencias para validar la solución:

Competencia

- para verificar críticamente y reflexionar sobre las soluciones encontradas;
revisar algunas partes del modelo o volver a pasar por el proceso de modelado si las soluciones no se ajustan a la situación;
- para reflexionar sobre otras formas de resolver el problema o si las soluciones se pueden desarrollar de manera diferente;
- para cuestionar en general el modelo. (Blum y Kaiser 1997, p.9)

Niss (2003, p.7-9) Niss, Blum y Galbraith (2007, p. 12) definen la competencia de modelación matemática de la siguiente manera:

...significa la capacidad de identificar preguntas, variables, relaciones o suposiciones relevantes en una situación del mundo real determinada, traducirlas a las matemáticas se interpretar y validar la solución del problema matemático resultante en relación con la situación dada, así como la capacidad de analizar o comparar modelos dados mediante la investigación de los supuestos que se hacen, verificando las propiedades y el alcance de un modelo dado.

De acuerdo con Firouzian et al. (2016), la falta de comprensión de los conceptos en matemáticas puede dificultar la comprensión de otros conceptos o incluso materias por lo que consideran necesario crear nuevas formas de aprender matemáticas que creen un puente necesario para vincular las matemáticas con la resolución de problemas en ingeniería, tal puede ser el caso de la modelación matemática.

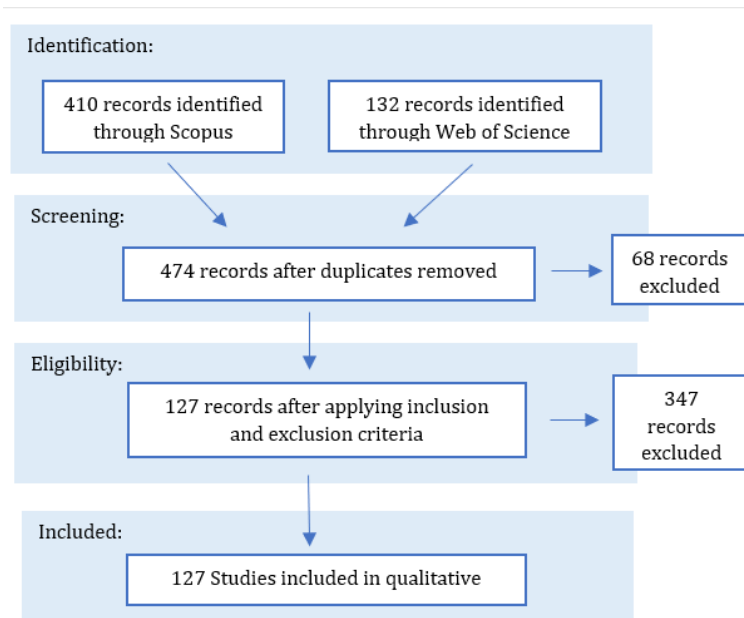
Con el interés de obtener una visión general sobre los estudios realizados sobre modelación matemática en el campo educativo, se realizó una revisión de literatura sobre el tema. En la siguiente sección se presenta brevemente los resultados obtenidos.

1.1.3 Resultados de la revisión de literatura sobre modelación matemática

Esta Revisión se hizo bajo la metodología de revisión sistemática actual de la literatura existente sobre estudios de modelación matemática se realizó mediante análisis de contenido descriptivo. Más tarde, los estudios fueron interpretados con una visión crítica basada en el análisis de contenido temático. El proceso de búsqueda en las bases de datos se presenta en el flujo PRISMA (Moher, Liberati, Tetzlaff, Altman y Prisma Group, 2009) en la Figura 6.

Figura 6

Flujo PRISMA adaptado de Moher et al. (2009)

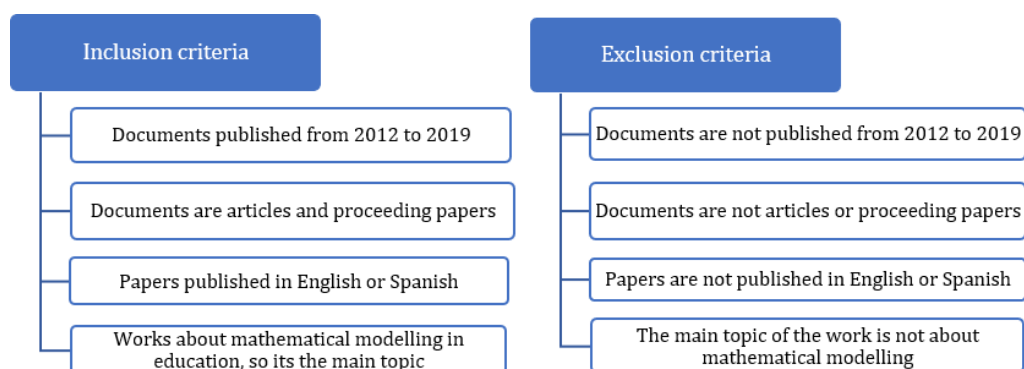


Se eligieron dos bases de datos: Scopus y Web of Science Core Collection (WOS) porque, la primera se considera la base de datos más grande de citas y resúmenes de literatura; y ambos tienen acceso a una cantidad significativa de documentos de alto impacto. En Scopus se encontraron 410 documentos y en WOS 132.

Esta búsqueda se llevó a cabo estableciendo los términos de búsqueda "mathematical modelling" o "mathematics modelling" y "education" en el título, resumen o palabras clave del autor. Además, se establecieron criterios de inclusión y exclusión y se muestran en la Figura 7.

Figura 7

Criterios de inclusión y exclusión



Las cadenas de búsqueda para las bases de datos Scopus y WOS fueron:

Scopus

(TITLE-ABS-KEY ("mathematical modelling" OR "mathematics modelling") AND TITLE-ABS-KEY (education)) AND DOCTYPE (ar OR cp) AND PUBYEAR > 2011 AND PUBYEAR < 2020 AND (LIMIT-TO (LANGUAGE, "English") OR LIMIT-TO (LANGUAGE, "Spanish"))

Web of Science Core Collection

You searched for: **TOPIC:** ("mathematical modelling" OR "mathematics modelling")
AND TOPIC: (Education) **AND LANGUAGE:** (English OR Spanish) **AND**
DOCUMENT TYPES: (Article OR Proceedings Paper) **Timespan:** 2012-2019.
Indexes: SCI-EXPANDED, SSCI, A&HCI, CPCI-SCPCI-SSH, BKCI-S, BKCI-SSH,
ESCI.

Los resultados de las bases de datos se registraron en hojas de cálculo para revisar documentos duplicados y descartarlos. El resultado fue 69 documentos repetidos. Por lo tanto, quedaban un total de 473. La búsqueda se refinó al revisar cada documento buscándose el tema principal del trabajo era sobre modelación matemática en Educación. Las selecciones se hicieron en aquellos donde aparecieron las palabras de "modelado matemático" o cuando las palabras se separaron, ambas aparecieron en los títulos. También los documentos con títulos incluían términos como "modelado matemático", "problemas del mundo real", actividades de obtención de modelos, tareas basadas en la realidad, resolución de tareas en el contexto de la vida real, ya que son términos muy comunes en el modelado matemático. Además, se analizó el resumen, se revisaron las palabras clave del autor, las referencias relacionadas con el modelado matemático y la importancia del tema para asegurarse de su tema principal.

La selección de documentos de ambas bases de datos, Scopus y Web of Science, que cumplen con los criterios establecidos alcanzó la cantidad de 127. Estas referencias se pueden encontrar en el siguiente enlace:

<https://docs.google.com/document/d/1yAV5z5wNRFVIUzwMpkAFXKZwfBYYoaiBLewCqMzVwI/edit?usp=sharing>

Las preguntas de investigación se establecieron con base en las recomendaciones que Velásquez (2014) propone, a saber:

- ¿Cuántos estudios hay en las bases de datos Scopus y Web of Science entre los años 2012 a 2019?
- ¿Quiénes son los autores con más publicaciones en el área?
- ¿Cuáles son los artículos más citados en el área?
- ¿Cuál es la distribución geográfica de los autores?
- ¿Cuáles son las revistas con más publicaciones en el área?
- ¿Cuáles son los principales temas de investigación?
- ¿Cuáles fueron perspectivas de modelado comúnmente elegidas en los estudios?

A partir de la búsqueda sistemática, después de la discriminación de los artículos, se revisaron 127 de estos, y los resultados se muestran a continuación. Estos resultados se presentan en respuesta a las preguntas de investigación establecidas al principio.

¿Cuántos estudios hay en las bases de datos Scopus y Web of Science entre los años 2012 a 2019?

Del total de documentos revisados, 91 se encontraron en la base de datos Scopus y 67 en Web of Science, se repiten 31 documentos. También se observa que el 56% de los estudios se publicaron entre 2017 y 2019. La Tabla 3 muestra la distribución por año. La información muestra los números y porcentajes de artículos para cada base de datos y los que aparecen en ambos.

Tabla 3

Distribución de artículos por año

<i>Año</i>	<i>Scopus</i>	<i>WOS</i>	<i>Ambos</i>	<i>Total</i>	<i>%</i>
2012	5	2	2	9	7.1
2013	5	7	3	15	11.8
2014	3	3	1	7	5.5
2015	6	6	2	14	11.0
2016	5	2	4	11	8.7
2017	12	8	4	24	18.9
2018	12	6	10	28	22.0
2019	12	2	5	19	15.00
<i>Total</i>	60	36	31	127	100%

¿Quiénes son los autores con más publicaciones en el área?

En relación con los autores con el mayor número de artículos publicados, los turcos fueron los más altos con un promedio de cuatro publicaciones. La Figura 8 muestra la información sobre esto.

Figura 8

Autores con mayor cantidad de artículos

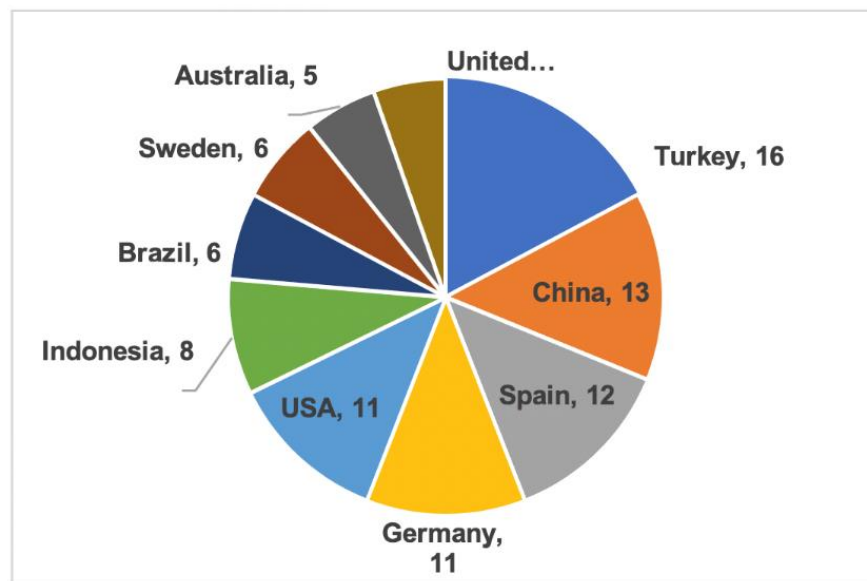


¿Cuál es la distribución geográfica de los autores?

La Figura 9 muestra los países con más publicaciones sobre modelación matemática en el campo educativo de esta investigación de datos.

Figura 9

Distribución geográfica de los autores



¿Cuáles son los artículos más citados en el área?

Los artículos más citados tienen un rango de 24 a 6 citas. La Tabla 4 muestra el autor, el título, el año de publicación, la fuente de publicación y el número de citas.

Tabla 4**Artículos más citados**

<i>Autor</i>	<i>Título</i>	<i>Año</i>	<i>Publicación</i>	<i>#</i>
<i>D. H. A. Diefes, J. S. Zawojewski, M. A. Hjalmarson, M. E. Cardella</i>	A framework for analyzing feedback in a formative assessment system for mathematical modeling problems	2012	Journal of Engineering Education	2 4
<i>P. Frejd, C. Bergsten</i>	Mathematical modelling as a professional task	2016	Educational Studies in Mathematics	1 5
<i>N. Mentzer N, T. Huffman, H. Thayer</i>	High school student modeling in the engineering design process	2014	International Journal of Technology and Design Education	9
<i>K. Vorhoelter; G. Kaiser; R. B. Ferri</i>	Modelling in Mathematics Classroom Instruction: An Innovative Approach	2014	Transforming Mathematics Instruction: Multiple	8
<i>C. O. Anhalt, R. Cortez</i>	Developing understanding of mathematical modeling in secondary teacher preparation	2016	Journal of Mathematics Teacher Education	7
<i>B. Riyanto; R. I. I. Zulkardi-Putri, Darmawijoyo</i>	Mathematical modeling in realistic mathematics education	2018	Journal of Physics: Conference Series	7
<i>M. G. Didis, A. K. Erbas, B. Cetinkaya B, E. Cakiroglu, C. Alacaci</i>	Exploring prospective secondary mathematics teachers' interpretation of student thinking through analyzing students' work in modelling	2016	Mathematics Education Research Journal	6
<i>K. E. D., Ng</i>	Teacher Readiness in Mathematical Modelling: Are There Differences Between Pre-service and In-Service Teachers?	2013	ZDM-Mathematics education	6

¿Cuáles son las revistas con más publicaciones en el área?

El número total de revistas en las que se publicaron los artículos revisados es de 68. La Tabla 5 muestra las revistas que tienen de tres a nueve publicaciones, que representan el 12% (8) del número total de revistas; proporcionan 48 artículos que representan el 38% del total de 127 publicaciones. Las 79 revistas restantes tienen dos o una publicación individual cada una.

Tabla 5*Revistas con más publicaciones*

REVISTAS	#
ZDM - MATHEMATICS EDUCATION	9
JOURNAL OF PHYSICS: CONFERENCE SERIES	8
INTERNATIONAL PERSPECTIVES ON THE TEACHING AND LEARNING OF MATHEMATICAL MODELLING	7
TEACHING MATHEMATICAL MODELLING CONNECTING TO RESEARCH AND PRACTICE	7
EURASIA JOURNAL OF MATHEMATICS SCIENCE AND TECHNOLOGY EDUCATION	6
PROCEDIA SOCIAL AND BEHAVIORAL SCIENCES	5
PROCEEDINGS OF THE NINTH CONFERENCE OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION CERME9	3
PRIMUS	3

¿Cuáles son las principales áreas de investigación?

Los temas de las publicaciones que se revisaron se muestran en la Tabla 6; la mayoría corresponden a las ciencias sociales.

Tabla 6*Principales temas de investigación*

Área	Publicaciones
<i>Ciencias Sociales</i>	64
<i>Matemáticas</i>	43
<i>Educación</i>	28
<i>Ciencias Computacionales</i>	19
<i>Ingeniería</i>	17
<i>Física y Astronomía</i>	11

¿Cuáles fueron las perspectivas de modelado comúnmente elegidas en los estudios?

El análisis de las investigaciones se realizó en relación con las perspectivas teóricas de la modelación matemática propuestas por Kaiser y Sriraman (2006). Es importante destacar que, se analizaron las publicaciones para clasificarlas ya que por lo general los autores no especificaban desde que perspectiva llevaron a cabo su investigación. También es importante reconocer que las perspectivas se pueden traslapar ya que se relacionan entre ellas. No obstante, las publicaciones se clasificaron de acuerdo con aquella perspectiva que se destacaba más. La Tabla 7 muestra la cantidad de estudios que se llevaron a cabo desde cada perspectiva.

Tabla 7

Cantidad de estudios por perspectiva

Perspectivas	Estudios
Realística o aplicada	10
Contextual	6
Educativa	84
Sociocrítica	5
Epistemológica o teórica	19
Cognitiva	3

Realista o aplicada. Estos artículos tratan sobre el desarrollo y la aplicación de actividades de modelado y experimentos en temas como condiciones climáticas, programas sociales en educación, educación física y deportes, y protección social, economía, soporte informático y seguridad alimentaria. Además, se estudiaron las

interacciones de los maestros que trabajaron colectivamente para plantear y resolver un problema de modelado, las experiencias de los estudiantes sobre la relevancia de las actividades de modelado y la caracterización de modelos matemáticos por diseñadores profesionales de modelos matemáticos.

Contextual. Estudios sobre el proceso de la enseñanza de las matemáticas y sus aplicaciones prácticas, el uso de modelos en un contexto cercano a la realidad, los vínculos contextuales entre las ciencias y las matemáticas y su relación con la resolución de problemas, y la comprensión conceptual de los estudiantes. Se describen proyectos innovadores para la integración del modelado en las aulas, el marco como un enfoque para apoyar los procesos de modelado independientes de los estudiantes.

Educativa. En relación con los estudiantes, revisamos artículos que destacan el uso de tecnologías digitales en la enseñanza y el aprendizaje de modelos matemáticos y la identificación de tareas efectivas para ser utilizadas en las actividades de los temas del programa curricular. En relación con los docentes, los estudios se centran en cómo los docentes adquieren conocimiento pedagógico y lo modifican para crear modelos en clase, entre otras cosas.

Epistemológica o teórica. Estos investigadores estudian la importancia del conocimiento de los maestros sobre el pensamiento de los estudiantes y el papel de examinar el trabajo de los estudiantes en diversos contextos para desarrollar una base de conocimiento sobre el pensamiento de los estudiantes en las actividades de modelado. Además, la caracterización del modelado matemático en temas matemáticos se centró en actividades matemáticas, niveles de complejidad y procesos metacognitivos, entre otros.

Cognitivo. Estos autores estudian cómo los estudiantes de ingeniería abordan los

problemas del modelado matemático y cómo pueden aprender a lidiar con tales problemas. Se investiga el ciclo de modelado de modeladores profesionales y sus diversidades en su progreso de modelado.

Según los resultados de la revisión de la literatura, se puede observar que el tema del modelado matemático es de interés global. Los datos informan sobre el crecimiento en el número de artículos. Además, podemos ver los autores y países más representativos en el rango de ocho años que aparecen, al menos, en las dos bases de datos utilizadas.

En la revisión del resumen, la introducción y, en algunos casos las conclusiones, fue posible reconocer que, a pesar del interés que existe para la modelación matemática debido a su efectividad como estrategia para la enseñanza de las matemáticas, existen dificultades significativas para su integración en el aula. Uno de los problemas es que a los maestros les resulta difícil de implementar debido a la falta de conocimiento sobre la modelación. Además, existen dificultades para trabajar en contextos reales y el diseño de actividades. Otra barrera es la dificultad de trabajar de manera interdisciplinaria en la escuela.

Esta revisión de literatura permitió obtener información sobre las investigaciones que se realizan en los últimos años, se encontró que, aún y cuando se utilizan métodos cuantitativos, cualitativos y mixtos, aquellos que son más usuales son los cualitativos. Los participantes son alumnos de todos los niveles escolares y futuros profesores y profesores graduados. Además, se puede concluir que en todos los estudios realizados se encontraron resultados positivos al utilizar la estrategia de modelación en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y, en el caso de los profesores, se observó que es de importancia que tomen cursos de modelación, ya que es indispensable su experiencia en

esta estrategia para que los alumnos desarrollen sus habilidades de modelación.

Finalmente, se tiene mayor conocimiento de instrumentos que se utilizaron en algunas investigaciones y se encontró que, en el resultado de esta búsqueda, no hay estudios donde se articulen la competencia de Pensamiento Crítico desde una perspectiva de competencia del siglo XXI y la Modelación Matemática. Concluimos, de esta manera, que esta investigación puede aportar hallazgos relevantes al relacionar a las competencias de modelación matemática y las habilidades de pensamiento crítico.

En el siguiente apartado se presentan hallazgos de algunas de las investigaciones que se encontraron en la revisión de literatura. Se dividen en dos grandes grupos: a) desarrollo de la modelación matemática en alumnos y sus implicaciones y b) desarrollo de la modelación matemática en profesores y sus implicaciones.

La relevancia de la modelación matemática se ha incrementado en los últimos años debido a que investigadores de diferentes países se cuestionan qué tanto están preparados sus alumnos para resolver problemas en la vida diaria que surgen fuera de la escuela y que además comienzan la etapa de su vida paralela a estudios internacionales (Citlas e Isik, 2013). Generalmente la inclusión de la modelación matemática en el aula se justifica en torno a su eficacia para desarrollar habilidades para resolver problemas de la realidad, a su capacidad para promover y mantener la motivación de los alumnos en el estudio de las matemáticas, o bien, para procurar el camino hacia una carrera relacionada a las ciencias y la tecnología (Czocher, 2017).

Estudios recientes demuestran que, los beneficios de la modelación matemática, se da a lo largo de los diferentes niveles escolares. Tal es el caso de la investigación realizada por Schukajlow, Kolter y Blum (2015) con alumnos alemanes de noveno grado

de tres diferentes escuelas. En cada escuela se trabajó con un grupo de control y uno experimental con la intención de probar los efectos de un instrumento estratégico llamado “plan de solución” que consiste en guiar paso a paso la solución de actividades de modelación matemática.

En el grupo experimental donde se aplicó el instrumento se encontró un aumento significativo en las estrategias de organización, elaboración, ensayo y planificación.

Los alumnos al introducir y repetir pasos simples del plan de solución los fueron interiorizando. Finalmente, se observó en los estudiantes la autonomía para hacer un diagnóstico de las dificultades de resolución de problemas.

Albarracín y Gorgorió (2013) proponen problemas de estimación de grandes cantidades como herramienta útil para introducir la modelación matemática en el nivel de secundaria. Estos investigadores realizaron un estudio con 216 alumnos de secundaria a quienes se les aplicó un instrumento con distintos problemas de estimación de grandes cantidades. A cada alumno se le pidió que describiera de la forma más detallada posible, cuáles serían los pasos que realizarían para resolverlo. Encontraron que una parte de los alumnos crearon propuestas con elementos de modelización de manera espontánea y sin instrucción previa de modelación matemática.

También consideran que el trabajo grupal y por proyectos permite a los alumnos complementar su conocimiento y lograr resultados exitosos. Finalmente, la diversidad de situaciones y contextos en los que se pueden plantear este tipo de problemas pueden considerarse de acuerdo con los investigadores como una buena opción de introducción a la modelación matemática.

En el nivel universitario se llevaron a cabo dos estudios con dos grupos, uno de

control y otro experimental. El propósito fue determinar el impacto del modelado matemático en el curso experimental en contraste con el grupo de control donde las clases impartidas fueron de manera tradicional. La investigación realizada por Nourallah y Farzad (2012) se llevó a cabo con 60 alumnas a quienes se les aplicaron preprueba y posprueba. Se concluyó que en los dos grupos hubo avances entre las pruebas aplicadas a los alumnos, sin embargo, en el grupo experimental el resultado fue mucho mejor.

En el caso del estudio de Cozcher (2017b), los participantes fueron 51 alumnos de ingeniería inscritos en una clase de ecuaciones diferenciales. El grupo experimental se ofreció desde una perspectiva de modelación matemática y en el grupo de control se impartió el curso de manera tradicional. El desempeño de los alumnos se midió a través de los ítems del examen final de los cursos el cual fue el mismo para los dos grupos. Además, se llevaron a cabo observaciones en clase y se analizaron las respuestas escritas de los estudiantes de las actividades del examen.

Los investigadores encontraron que el efecto principal para el enfoque instruccional fue estadísticamente significativo concluyendo que una perspectiva de modelado para enseñar ecuaciones diferenciales ayuda significativamente al aprendizaje del estudiante. Los alumnos se benefician de iniciar con situaciones o problemas contextuales relevantes y avanzar hacia resultados generalizados e ideas matemáticas formales.

Como una manera de evaluar qué tan bien utilizan y relacionan el proceso de modelación matemática en el proceso de diseño de ingeniería, Carberry y McKenna (2014) midieron las concepciones de alumnos de ingeniería. En la primera fase se impartió un curso de modelado a 76 alumnos de los últimos años de estudio de los cuales

48 participaron voluntariamente. En la segunda fase se agregó un grupo de comparación de 60 estudiantes de ingeniería de otra universidad de segundo grado que ingresaron a un curso de diseño basado en proyecto el cual tiene implícitamente incorporadas actividades de modelación.

A ambos grupos se les pidió que contestaran lo siguiente: a) Describe diferentes maneras de modelar una solución de diseño o idea y, b) ¿De qué maneras los modelos pueden ser usados/útiles en el proceso de diseño? Los hallazgos del estudio sugieren que por lo general los alumnos no tienen idea del potencial del uso de modelos. Antes del curso los alumnos solo relacionaban la modelación matemática con construcciones físicas que les permiten visualizar y probar soluciones. Después del curso sus respuestas incluyeron una modelación predictiva abstracta en el ámbito del diseño. Por ello, se considera que la modelación matemática debe enseñarse explícitamente a los alumnos de ingeniería.

En otro estudio de Doerr, Arleback y Castello (2014), donde se ofrece un curso de verano de matemáticas basado en modelación matemática para iniciar primer semestre de ingeniería, se observa que el curso de matemáticas basado en el modelado cerró la brecha anterior entre los participantes y los alumnos de primer semestre que no participaron en algún curso antes de iniciar la carrera. También encontraron beneficios significativos en los grados del curso para los estudiantes que tomaron el curso de matemáticas basado en modelos en comparación con un grupo anterior que tomó un curso tradicional de matemáticas de verano.

Otros estudios se han realizado a partir de los bloqueos y problemas con los que los alumnos pueden experimentar en el modelado. Huang (2012) llevó a cabo un estudio en

el cual investiga los procesos de modelado de estudiantes de ingeniería en una actividad de modelado. Los datos incluyen la información recopilada sobre las respuestas escritas individuales y grupales a la actividad de modelado matemático, las discusiones en grupo grabadas en video y la observación en el aula por el investigador.

De acuerdo con los datos encontrados, los estudiantes tienen dificultad en la transición entre diferentes modos de representación matemática y las clasificaciones de variables y parámetros. El investigador concluye que, con base en las dificultades de los estudiantes, los profesores deben ayudarlos a establecer relaciones útiles requeridas por problemas matemáticos. Además, las herramientas y sistemas de representación, como tablas, gráficos y dibujos, son partes importantes del proceso de modelado matemático.

Después de que alumnos de diferentes programas académicos de ingeniería realizaron prácticas en diferentes escenarios y contenidos de modelación matemática en un curso de ecuaciones diferenciales y socializando todas esas experiencias, se les realizó la pregunta: “¿Qué tipo de obstáculos se pueden encontrar en el proceso enseñanza/aprendizaje de modelación matemática en un curso de ecuaciones diferenciales?” Esto con la intención de llevar a cabo un estudio (Plaza, 2016) para identificar esos obstáculos en el proceso de modelación matemática.

Los hallazgos que encontró Plaza (2016) fueron obstáculos en la formación de las matemáticas previas a las ecuaciones diferenciales tales como cálculo, física y estadística. Este es un obstáculo importante ya que las ecuaciones diferenciales son la principal herramienta para modelar fenómenos en variados contextos. También se encontraron obstáculos del tipo epistemológico, didáctico, cognitivo y pedagógico; además otros de carácter sociológico, comunicativo (comprensión lectora y manejo de

lenguaje simbólico), organizacional (entorno académico).

Podemos observar que las investigaciones con alumnos como participantes es la más numerosa. Los estudios se han llevado a cabo en todos los niveles escolares, desde jardín de niños hasta profesional. Se observa en los hallazgos que la modelación matemática tiene resultados exitosos en comparación a la enseñanza tradicional. Algunos de los estudios se basan en los errores o barreras de los estudiantes en las fases de la modelación y se concluye que, aún y cuando hay una gran cantidad de investigaciones, este campo de la modelación requiere de mayores esfuerzos en los estudios e implementación en el aula por lo que hay mucho que aportar.

1.1.4 Desarrollo de la modelación matemática en profesores y sus implicaciones

La inclusión de la modelación matemática en la escuela tiene varias implicaciones, entre ellas, entornos abiertos y exigentes que requieren habilidades docentes complejas y formas de evaluación que puedan con estas implicaciones y familiaridad con las tareas de modelado establecidas en el aula. Los profesores necesitan experiencias para pasar de tareas rutinarias a aquellas donde promueven en sus alumnos una visión crítica y les ayudan a resolver problemas de la realidad (Villa-Ochoa, Sánchez-Cardona y Rendón-Mesa, 2021).

De acuerdo con Paolucci y Wessels (2017), las actividades que los profesores eligen para trabajar en el aula tienen una gran influencia en la calidad del aprendizaje y las percepciones de los alumnos sobre la naturaleza de las matemáticas. Por ello la importancia de su capacidad en la elección de las actividades que realmente puedan

privilegiar el aprendizaje. Como se ha comentado, la modelación matemática permite resolver problemas del mundo real y promueve el aprendizaje. Sin embargo, en ocasiones en los procesos de la modelación pueden surgir bloqueos cognitivos en los alumnos por lo que la enseñanza desde una perspectiva de modelación puede resultar un gran desafío para los profesores (Tropper, Leiss y Hänze, 2015).

En investigaciones en las cuales se estudia cómo los futuros profesores de matemáticas desarrollan modelos matemáticos mientras participan en tareas de modelado se ha encontrado que, según Adyogan, Erbas, Cakiroglu y Alacaci (2017), al inicio de la investigación las maestras participantes creían que los criterios de evaluación deberían ser diferentes para cada actividad de modelación matemática. Sin embargo, al pasar de un ciclo de implementación a otro en el salón de clase, descubrieron que los estudiantes pasaban por procesos de modelado casi idénticos.

Los investigadores concluyen que el aprendizaje es más eficaz cuando los propios practicantes tienen una comprensión de la capacidad para medir sus logros ya que pueden medir su progreso con objetivos. Por lo tanto, los criterios de evaluación claros son importantes en el proceso de la modelación matemática.

De acuerdo con Shahbari y Tabach (2016), el interés de hacer conciencia de la importancia de las actividades de modelación en la educación matemática ha cuestionado si los maestros están dispuestos a facilitar la participación de los estudiantes en la modelación. En consideración a este interés, los autores investigaron los efectos de cómo los maestros trabajan en las actividades de modelado para el desarrollo de sus habilidades para identificar los ciclos de modelado.

Los principales hallazgos indican que antes de que los profesores participaran en

las actividades de modelado sus descripciones no incluyeron todo el proceso de modelado. Los maestros, en un principio consideraban que el camino de la solución era lineal como suelen ser los problemas escolares y su solución. Por otro lado, la participación activa de los profesores en las actividades de modelación matemática lleva a un mayor conocimiento de las fases y acciones de modelado. Ser consciente de estas fases es muy importante para los profesores para poder apoyar el desarrollo de competencias de modelado entre sus alumnos y la mediación eficaz del trabajo en grupo en la modelación matemática de los estudiantes.

Zeytun, Cetinkaya y Erbas (2017) llevaron a cabo un estudio con 19 futuros profesores de matemáticas a los cuales se les ofreció un curso de modelación por un semestre. Los resultados mostraron que los futuros profesores pasaron por cinco etapas principales durante el proceso de modelación matemática: comprender la tarea, idear un plan de solución, elaborar el plan, interpretar y verificar el modelo y presentarlo.

Se observó que los participantes pasaron por un proceso de modelación lineal sin detenerse a reflexionar y mejorar sus modelos. Al encarar dificultades en el modelo para solucionar el problema prefieren ignorar variables significativas o establecieron suposiciones que pudieran apoyar sus respuestas de manera intuitiva.

Los investigadores concluyen que los programas de formación de profesores de matemáticas y los de matemáticas deben incluir cursos de modelación matemática para mejorar las competencias de modelado. La participación, el trabajo, el desarrollo y la implementación de tareas de modelado matemático también pueden proporcionar a los alumnos oportunidades de desarrollar una mejor comprensión de los conceptos matemáticos relacionados.

Según Jacobs y Durandt (2017), los profesores de matemáticas de pre-servicio deben estar involucrados en desafíos que plantea el modelado matemático durante su formación para mejorar su conocimiento pedagógico y de contenido, a la vez que fortalecen gradualmente sus disposiciones y especialmente su confianza. Así lo reveló el estudio que llevaron a cabo a través de una encuesta aplicada a 50 maestros de pre-servicio de matemáticas de tercer año sobre sus actitudes hacia la modelización después de la implementación de un curso de modelado.

Erbas et al. (2014) afirman que la modelación matemática se puede clasificar de acuerdo con su propósito en la educación matemática a partir de dos enfoques: a) la modelación como el propósito de enseñar matemáticas, llamado también modelado de contenido y, b) la modelación como un método para enseñar matemáticas, llamado modelado como vehículo (Aztekin y Zerha, 2015).

Búa, Fernández y Salinas (2016) consideran que esta clasificación puede llevar a preguntar: ¿qué es lo importante en una modelación? Y que entonces, por un lado; la respuesta puede ser el producto y, por otro, el que la modelación forme parte del conocimiento matemático de manera general. Concluyen que es fundamental que el profesor tenga muy claro que los objetivos que establece influyen en la forma en que implementa la modelación y como responde el alumno.

Según Rosa y Orey (2019), una de las conceptualizaciones que puede presentar la modelación matemática es que se puede caracterizar como un ambiente de aprendizaje en los programas de formación docente en Matemáticas para brindar a los estudiantes los mecanismos necesarios para el desarrollo de su ciudadanía de manera responsable y crítica. Estos investigadores llevaron a cabo un estudio con 76 estudiantes matriculados

en un programa de formación docente en Matemáticas en el cual se les presentó una propuesta de modelación matemática como entorno virtual de aprendizaje para favorecer el desarrollo de una visión crítica de la realidad y la reflexión de los estudiantes en la resolución de problemas que afrontan a diario, mediante el desarrollo de proyectos de modelación aplicando herramientas tecnológicas.

Los participantes eligieron una problemática real de su entorno. Las herramientas tecnológicas como las videoconferencias, foros y lecciones en video a su disposición se utilizaron como medio para el desarrollo de su investigación y les permitieron compartir contenidos matemáticos que dieron lugar a la comunicación, la colaboración y la interacción entre estudiantes, tutores y profesores. Los resultados de este estudio muestran que el desarrollo de proyectos de modelación matemática permitió a los estudiantes reflexionar sobre la importancia de las matemáticas en su vida diaria a través de la conducción de su trabajo investigativo en el proceso de resolución de modelos matemáticos.

Los entornos virtuales de aprendizaje ayudaron a los estudiantes a organizar y representar los datos que obtuvieron, a ajustar la información de diferentes maneras para determinar posibles soluciones. Favoreció el desarrollo de la criticidad y la reflexión de los estudiantes sobre la elaboración de proyectos de modelización que les ayuden a aplicar modelos al estudio y discutir los problemas que enfrentan en sus vidas.

Otra investigación que estudia la formación de profesores de manera virtual es la de Romo-Vázquez, Barquero y Bosch (2019). Esta investigación se centra en analizar los efectos de la implementación de una unidad de aprendizaje y la forma en que ésta posibilita a los profesores analizar, adaptar, validar y desarrollar una propuesta didáctica

sobre la enseñanza de la modelación matemática. Otro de los objetivos es observar en qué medida los profesores logran, durante la unidad de aprendizaje y gracias a las herramientas propuestas en ella, identificar las principales restricciones institucionales que dificultan la integración de la modelización matemática como actividad normalizada en el aula.

En el estudio se utiliza la metodología llamada “Recorridos de Estudio e Investigación para la Formación del Profesorado” (REI-FP) desarrollada por Ruiz-Olarría para la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En esta metodología, el proceso de formación parte de una cuestión problemática para la profesión docente que se aborda en cuatro etapas generales: vivir, como estudiante, una propuesta innovadora de actividad matemática; analizarla y adaptarla para su implementación en el aula; experimentarla con alumnos de secundaria; identificar las restricciones institucionales que la experimentación ha puesto en evidencia y refinar o rediseñar la actividad.

Al trabajar con un problema abierto, a partir de trabajo colaborativo guiado por un grupo de formadores expertos en didáctica de las matemáticas; permite superar la división “teoría-práctica” poniendo al alcance de los profesores herramientas innovadoras; facilita la experimentación de nuevas estrategias docentes que incorporan el uso de las TIC. De esta forma, se promueve la adaptación crítica de recursos didácticos, el compartir, analizar y evaluar entre pares las actividades implementadas en el aula. Con respecto a las restricciones institucionales, se observaron avances de los profesores al identificar a posteriori restricciones tales como: “cierre” de la actividad de modelación a una secuencia de preguntas cortas; imposición de ciertos modelos

matemáticos previamente identificados por el profesor; un uso muy dirigido de las TIC; predominio del contenido matemático curricular frente al problema por resolver.

En conclusión, las investigaciones sobre la estrategia de modelación matemática en profesores de diferentes niveles educativos, permite afirmar que existe una necesidad de incluir cursos de modelación matemática en los programas de formación de profesores de Matemáticas para desarrollar una mejor comprensión de los conceptos matemáticos y reconocer los procesos de modelación para que puedan trabajar con criterios claros de evaluación que puedan medir el progreso de los estudiantes.

Cuando los profesores tienen experiencia en modelación matemática, pueden conocer las fases y acciones de la modelación, facilitando el apoyo en el desarrollo de competencias de modelación y la medición eficaz de ésta en sus alumnos. Los profesores también fortalecen su confianza en sí mismos, tienen claro que los objetivos que establece en la enseñanza influyen en cómo implementa la modelación y cómo responde el alumno. Por otro lado, los profesores con conocimiento sobre modelación matemática pueden desarrollar una visión crítica de la realidad aplicando herramientas tecnológicas en ambientes virtuales de aprendizaje y, esto a su vez, lo puede llevar a desarrollar esta visión crítica en sus estudiantes.

1.1.5 Instrumentos para evaluar las fases de la modelación matemática

Se observa que en algunas de las investigaciones que usaron una metodología cualitativa, y que fueron comentadas en secciones anteriores, se diseñaron rúbricas para evaluar la modelación matemática. Sin embargo, sólo se muestran ejemplos sobre

algunos indicadores. No obstante, asociaciones como la Asociación Americana de Colegios y Universidades (Association of American Colleges and Universities (AAC&U), 2009) y Consortium for Mathematics and Its Applications (COMAP) y Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) ofrecen rúbricas para la evaluación de la resolución de problemas y la modelación matemática. Algunas de sus características son:

1. *Rúbrica de Valor Resolución de Problemas*. Esta rúbrica es parte de un compendio de 15 rúbricas llamadas VALUE desarrolladas por equipos de expertos de la facultad que representan colegios y universidades en todo Estados Unidos a través de un proceso que examinó muchas rúbricas existentes en estas instituciones. Las rúbricas articulan criterios fundamentales para cada resultado de aprendizaje, con descriptores de rendimiento que demuestran niveles de logro progresivos más sofisticados. Las rúbricas están destinadas al uso a nivel institucional para evaluar y discutir el aprendizaje de los estudiantes.

Esta rúbrica se diseñó para funcionar en todas las disciplinas ya que toma los elementos más comunes de la mayoría de los contextos de resolución de problemas. A pesar de contar con una base amplia, es concisa y descriptiva en su alcance para determinar cómo los estudiantes han maximizado sus habilidades para el logro de soluciones. La rúbrica se enfoca en medir la calidad de un proceso y no de un producto final, esto conlleva a que las actividades del alumno deben contener evidencia de su pensamiento. Por ejemplo, reflexiones sobre el proceso desde el problema a la solución propuesta; pasos en una tarea de aprendizaje basada en el problema; registro de protocolo de pensar en voz alta mientras se resuelve un problema.

Los indicadores de la rúbrica para evaluar esta competencia son: a) definir el problema, b) identificar estrategias, c) proponer soluciones, d) evaluar posibles soluciones, e) implementar la solución y f) evaluar los resultados. No obstante que la rúbrica se diseñó para la resolución de problemas, ésta se ha tomado en consideración debido a que, para su diseño, se tomó en cuenta que las actividades que abarcan la resolución de problemas por parte de los estudiantes pueden incluir problemas que van desde bien definidos hasta ambiguos en un contexto simulado o de laboratorio, o en entornos del mundo real. Además, la definición de esta competencia de la que parten para su diseño es: el proceso de diseñar, evaluar e implementar una estrategia para responder a una pregunta abierta o lograr un objetivo deseado. Como bien se observa, los elementos como actividades en un contexto simulado o del mundo real y la respuesta abierta a un problema son parte de la modelación matemática. Esta rúbrica se encuentra en Anexo 1.

2. *Rúbrica genérica para la evaluación en educación en modelación matemática.* En 2015, los líderes de SIAM y COMAP se reunieron para llevar a cabo un informe llamado “Pautas para la evaluación e instrucción en educación en modelación matemática” (*GAIMME: Guidelines for Assessment and Instruction in Mathematical Modeling Education, 2015*). Este grupo de líderes recibió apoyo y cooperación por parte de Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (National Council of Teachers of Mathematics; NCTM, por sus siglas en inglés) y Moody’s Mega Math (M3) Challenge.

Una de las razones de la creación de este reporte fue que, a pesar de la utilidad y el valor de demostrar cómo las matemáticas pueden ayudar a analizar y guiar la toma de decisiones para los problemas complicados del mundo real, muy pocas personas tienen

verdadera experiencia con la modelación matemática sobre qué es y qué no es como un proceso. En este reporte, además de ofrecer los principales argumentos para la inclusión del modelado matemática en todos los niveles educativos, ofrece actividades para cada nivel y ejemplos útiles de rúbricas y herramientas de evaluación que pueden usarse al enseñar modelos matemáticos o enseñar matemáticas a través del modelo.

Entre estos ejemplos de rúbricas, se consideró la rúbrica genérica para actividades por escrito. En el Anexo 2 se encuentra de manera detallada la rúbrica. Los indicadores de la rúbrica son:

- a) Definición del problema de modelado,
- b) Construyendo el modelo: hacer suposiciones y reconocer limitaciones,
- c) Construyendo el modelo: definir variables e identificar parámetros,
- d) Solución: El modelo utiliza matemáticas significativas,
- e) Solución: Los resultados son accesibles a la audiencia,
- f) Análisis y Evaluación del modelo
- g) Estilo de escritura y organización.

Para finalizar esta sección, de manera general se concluye que uno de los problemas más generalizados en el estudio de las matemáticas es que una cantidad de estudiantes no conocen el fin práctico de esta disciplina. Siendo tan necesario el aprendizaje de las matemáticas para la vida diaria, en el trabajo y en la sociedad; la modelación matemática ha tomado relevancia por su capacidad para desarrollar habilidades para resolver problemas de la realidad.

Existe un consenso de expertos que afirman que la modelación matemática es el proceso de aplicación de las matemáticas para resolver problemas del mundo real. No obstante, existen discrepancias entre los investigadores debido a sus diversos objetivos y antecedentes teóricos. Conforme se mencionó anteriormente, Kaiser y Sriraman (2006) establecieron una clasificación a partir de diferentes perspectivas teóricas desde donde parte la investigación (Tabla 1). Otra clasificación se enfoca en considerar a la modelación matemática como vehículo para entender las matemáticas o como fin en sí misma (Julie y Mudaly, 2007)

Con base en estudios realizados en el campo educativo, por más de cuarenta años, se puede afirmar que la modelación matemática propicia la comprensión de las matemáticas al aplicar esta disciplina a la realidad, de esta manera puede motivar a los estudiantes de todos los niveles educativos al aprendizaje activo en la solución de problemas. Por lo tanto, los profesores realizan un papel de gran importancia en el desarrollo de habilidades de modelado matemático de los estudiantes. No obstante, investigaciones revelan que los profesores, con gran frecuencia tienen dificultades para trabajar con sus alumnos actividades de modelación y establecen que existe una necesidad imperante para que se capaciten.

Esta investigación retoma el trabajo previamente por Rodríguez (2006) que modifica la enseñanza de las matemáticas en nivel superior a través de la experimentación en aula de clase de modelación de fenómenos reales. El objetivo es repensar la modelación matemática como estrategia didáctica que pretende desarrollar no solo competencias disciplinares sino transversales como el Pensamiento Crítico

A partir de la revisión de literatura, de las rúbricas para la evaluación de la

modelación matemática que se han presentado y las rúbricas de pensamiento crítico que más adelante se mencionan, para este estudio se diseñará una rúbrica que involucra la evaluación tanto de la modelación matemática como del pensamiento crítico. Se hablará en detalle de dicha rúbrica en el capítulo 3 en la sección 3.3.1.1. Sugiero al menos una frase de transición a la sección que sigue.

1.2 Pensamiento crítico

En este apartado se presenta al pensamiento crítico como competencia transversal; se ofrece su definición, su importancia y las sub-competencias que lo componen. Además, se presenta la relación entre el pensamiento crítico y las matemáticas, y finalmente, se describen instrumentos para evaluarlo.

1.2.1 Pensamiento crítico como competencia transversal

Los orígenes del concepto de competencia emergen del campo de la industria, desde una perspectiva laboral con el objetivo de aumentar la productividad de las empresas a partir de sus trabajadores (Lozano y Herrera, 2012). El origen de este enfoque viene de la necesidad de que los trabajadores llegaran a las empresas con cierta pericia para el trabajo que deben realizar. Más adelante, este concepto llevó a la capacitación y certificación de los empleados.

En el ámbito educativo, el concepto de competencia se ha formado desde diferentes enfoques. Un enfoque ampliamente aceptado es el socioformativo; este enfoque afirma

que las competencias “son actuaciones integrales ante actividades y problemas del contexto, con idoneidad y compromiso ético, integrando el saber ser, el saber hacer y el saber conocer con una perspectiva de mejora continua” (Tobón, Pimienta y García, 2010, p. 11). Tiene un carácter situacional, esto es, se debe dar la movilización de saberes en un contexto o situación específica teniendo que echar mano de procesos complejos como toma de decisiones, elaboración de juicios, optar por un punto de vista, etc. (Díaz y Hernández, 2010).

Villa y Poblete (2007, pp. 23-24) definen competencia como: “el buen desempeño en contextos diversos y auténticos basado en la integración y la activación de conocimientos, normas, técnicas, procedimientos, habilidades y destrezas, actitudes y valores”. Actualmente, este sentido de la aplicación de conocimientos en diferentes circunstancias es valorado en los ámbitos laborales.

De manera general, se puede hablar de dos tipos de competencias: las competencias específicas y las competencias generales o transversales. De acuerdo con Rico (2008), la diferencia entre los dos tipos de competencia reside en la amplitud o especificidad del campo de su aplicación. Cuando se afirma que una competencia es transversal, se habla de una competencia con carácter interdisciplinario. El término transversal se utiliza para establecer que las competencias abarcan varios ámbitos del ser humano utiliza. Por lo tanto, además de su importancia en el ámbito académico y profesional, también lo es en el proceso social, las redes sociales y relaciones interpersonales, la vida familiar y, de modo más generalizado, para desarrollar un sentido de bienestar personal (Villa y Poblete, 2007).

Baños y Pérez (2005) afirman que el término transversal tiene que ver con la

característica de la competencia para rebasar los límites de una asignatura y su posibilidad de desarrollarse en la totalidad de los cursos. Las competencias transversales, por lo tanto, se consideran habilidades que se requieren para la correcta práctica profesional. Algunos ejemplos de competencias transversales son: comunicativas (verbales y escritas), uso de la tecnología, solución de problemas, pensamiento reflexivo, pensamiento crítico, sentido ético, liderazgo, automotivación. El pensamiento crítico, es considerado en la actualidad como una de las competencias más importantes a desarrollar en el ámbito educativo.

El interés por el pensamiento crítico surge desde hace más de 2500 años, esto se puede evidenciar con Sócrates y su método dialéctico el cual se basa en indagar la verdad a partir de la reflexión y el análisis (Emerson, 2013). Según Marques, Tenreiro-Vieira y

Martins (2011), a Sócrates le siguieron Platón y Aristóteles, considerados por Sternberg como los fundadores del movimiento de pensamiento crítico. Las raíces del pensamiento crítico se pueden encontrar en personas notables como Tomás de Aquino, Francis Bacon, Rene Descartes, John Locke e Isaac Newton. Además, entre las contribuciones más modernas se puede mencionar a John Dewey, Ludwig Wittgenstein y Jean Piaget (Murawski, 2014).

Márques, Tenreiro y Martins (2008) consideran que desde los años 80 el interés por el pensamiento crítico ha ido en aumento y mencionan que Boisvert considera esta época tan importante que se pueden observar tres fases: a) antes de los ochenta las habilidades del pensamiento crítico se tomaban como objetivos al verlas como fin en sí mismas por la educación, b) durante los años ochenta al destacar la importancia en la solución de problemas, la toma de decisiones y la investigación, la educación se centra en los

procesos del pensamiento crítico y creativo, c) a partir de los años noventa, la educación se centra en el uso de los procesos y habilidades del pensamiento crítico de tal manera que los alumnos puedan transferirlo a diversos ámbitos y sean más conscientes de su pensamiento y de los demás.

Atabaki, Keshtiaray y Yarmohammadian (2015) afirman que pensar es una de las actividades más necesarias para la vida cotidiana, de tal manera, que para resolver problemas y tener una comunicación efectiva con otros, se requiere de habilidades de pensamiento crítico. Estos autores aseguran que quienes se dedican a la educación siempre han interesado por la dificultad de los estudiantes para el desarrollo de las habilidades del pensamiento crítico y, actualmente, esta preocupación es enorme debido a la situación general de los alumnos sobre su pensamiento.

1.2.2 Definición de pensamiento crítico

Fahim y Masouleh (2012) afirman que el pensamiento crítico se puede definir desde tres diferentes enfoques: el filosófico, el psicológico y el educativo. De acuerdo con los autores, entre los ejemplos de pensadores filosóficos se pueden mencionar a Sócrates, Platón y Aristóteles en la antigüedad; y en tiempos más recientes, a M. Lipman, R. Paul y McPeck. Este enfoque, centrado en la aplicación de reglas formales de lógica, se concentra en lo que necesita una persona para pensar; por ello, las actitudes de pensamiento crítico son lo más importante. Estos pensadores críticos se caracterizan por buscar y revelar los hechos, tener mente abierta, confianza en sí mismos, una gran curiosidad y una mentalidad escéptica (Atabaki, Keshtiaray y Yarmohammadian, 2015).

Los psicólogos definen el pensamiento crítico en función de las acciones o conductas que tienen los pensadores críticos (Fahim y Masouleh, 2012). Buscan encontrar una relación entre el pensamiento crítico, la resolución de problemas y los altos niveles de habilidades de pensamiento. De esta manera, se concentran en las habilidades de pensamiento crítico. Estas habilidades son el análisis, la inferencia, el razonamiento, la comparación, la formulación de hipótesis, la síntesis y la creación de nuevas ideas, pruebas y conclusiones exhaustivas (Atabaki, Keshtiaray y Yarmohammadian, 2015).

Los teóricos del enfoque educativo establecen que el pensamiento crítico debe considerar tanto las habilidades como las disposiciones ya que es un proceso mental que no se activa de manera automática y, por lo tanto, requiere de un estímulo para su activación (Poondej y Lerdpornkulrat, 2015). Benjamin Bloom es un ejemplo de investigadores de este enfoque educativo. Diseñó con otros investigadores una taxonomía de información para el procesamiento de información que evalúa las habilidades de pensamiento de orden superior, de los cuales se considera que los tres niveles más altos, análisis, síntesis y evaluación son representantes del pensamiento crítico (Fahim y Masouleh, 2012).

En los años noventa un panel de expertos de Delphi de la Asociación Americana de Filosofía, coordinados por Peter Facione acordaron el consenso para definir al pensamiento crítico como “la formación de un juicio autorregulado”, donde se incluían conceptos como indagación, deducción, inducción y juicio y habilidades cognitivas como interpretación, análisis, evaluación, inferencia, explicación y autorregulación (Villalobos, Ávila y Olivares, 2016, Olivares y Heredia, 2012, Wang y Zheng, 2016). En la Tabla 8 se muestra un resumen de definiciones más relevantes.

De acuerdo con Aizikovitsh-Udi y Cheng (2015), McPeck definió el pensamiento crítico como "habilidades y disposiciones para utilizar adecuadamente el escepticismo reflexivo" (McPeck, 1981, citado en Aizikovitsh-Udi y Cheng, 2015) y Lipman establece que el pensamiento crítico es "pensamiento que permite el juicio, se basa en criterios, se corrige a sí mismo y es sensible al contexto" (Lipman, 1991, citado en Aizikovitsh-Udi y Cheng, 2015).

Mathew Lipman afirma que el pensamiento crítico es pensamiento aplicado y que, por ello, no solo es un proceso sino también se trata de desarrollar un producto. Concuerdan que va más allá de entender sobre un tema, produce algo; esto es, dice, crea o hace algo. Al producir un cambio razonable, el resultado puede ser desde un juicio y no solo eso, sino también ponerlo en práctica. En sus propias palabras:

Si ahora miramos el proceso del pensamiento crítico e identificamos sus características esenciales, podremos entender mejor su relación con los juicios. Argumentaremos que el pensamiento crítico es hábil y es un pensamiento responsable que hace posible el buen juicio porque: primero, se basa en criterios; segundo, es autocorrectivo; y, tercero, es sensible al contexto. (p. 21).

La principal característica del pensamiento crítico es su carácter evaluativo, se relaciona con lo que se cree y las decisiones que se realizan. Generalmente se asume una actitud escéptica y de reflexión y, una vez que se han considerado todos los elementos importantes o significativos, se enuncia un juicio de la situación o problema (Orlich, Harder, Callahan y Kauchak, 1995).

Tabla 8

Resumen de definiciones de pensamiento crítico (Atabaki, Keshtiaray Yarmohammadian, 2015, p. 97).

Expertos	Definiciones
Sócrates	Debate de razonamiento o proceso de preguntas críticas
Dewey	Revisión continua de ideas y creencias
Smith	Creación, aplicación y uso de conceptos
Rajiro	Desarrollo de habilidades de razonamiento lógico
Kant	Pensamiento liberal, conocimiento y responsabilidad para tomar decisiones con respecto a la medida del desempeño
Strenberg	Solución de problemas y toma de decisiones
Skerun	Búsqueda de hipótesis
Ketinjer	La aplicación de juicio constructivo
Paul	Superar el sesgo, el fanatismo y el pensamiento estereotípico
McPeck	Suposición reflexiva
Onill	Capacidad para reconocer el sesgo a partir de los hechos y dividir los motivos según las ideas
Halpren	Pensamiento dirigido para tomar decisiones, interpretar o resolver los problemas
Beyer	Discriminación entre hechos válidos y afirmaciones
Lipman	Pensamiento basado en habilidades y responsabilidades que causan juicio rápido. Se basa en criterios y es sensible a los campos.
Ennis	Evaluación correcta de ideas y pensamiento reflexivo sobre lo que creemos y hacemos
Facione	Capacidad de discutir y evaluar

De acuerdo con Villa y Poblete (2007), otra característica del pensamiento crítico es la de revisar toda información antes de hacerla parte de creencias ya establecidas, el pensamiento crítico “es el comportamiento mental que cuestiona las cosas y se interesa por los fundamentos en los que se asientan las ideas, acciones y juicios, tanto propios como ajenos” (Villa y Poblete, 2007, p. 80). Es una manera de pensar sobre un tema o situación donde la persona mejora su pensamiento al acumular y evaluar información importante; como supuestos, implicaciones, consecuencias llegando a soluciones que se confirman ciertos estándares de gran relevancia (Elder y Paul, 2010).

A partir de las definiciones anteriores podemos afirmar que la competencia del pensamiento crítico es aquella que encamina a cuestionar las cosas y los actos. A interesarse y profundizar en las ideas, acciones y juicios personales y de otros,

examinandola información desde nuevos ángulos. Conduce a analizar, evaluar, inferir y explicar, de acuerdo con las evidencias, contextos, conceptos y metodologías en los cuales apoya sus juicios.

1.2.3 El pensamiento crítico y su importancia

Actualmente se vive un desarrollo acelerado en la ciencia y la tecnología, especialmente un aumento significativo en la cantidad de información. Es debido a esto que en el campo de la educación hay una necesidad constante de redefinir objetivos para cumplir con la formación que se necesita. Estos objetivos se deben centrar más en el desarrollo de habilidades de pensamiento (Marici, Spijunovic y Lazic, 2016).

Las habilidades de pensamiento crítico son las más importantes del siglo XXI, ya que son consideradas como habilidades innovadoras y de aprendizaje por lo que representan un requisito para tener éxito en la actualidad (Vargas, 2015, Bie, Wilhelm y Van der Meij, 2015). Se espera que los empleados tengan habilidades de análisis y resolución de problemas y toma de decisiones en el ámbito laboral (Murawski, 2014),

Formar estudiantes como pensadores críticos es el objetivo primordial de las instituciones educativas (Cargas, Williams y Rosenberg, 2017). Si los alumnos aprenden a pensar críticamente y con imparcialidad, además de lograr aprendizajes académicos, podrán aspirar a convertirse en ciudadanos efectivos, capaces de razonar de manera ética y actuar a favor del bien común (Elder y Paul, 2010). Pueden convertirse en una ciudadanía activa que forma parte de una sociedad plural y democrática (Bigozzi, Tarchi, Fiorentini, Falsini y Stefanelli, 2018). Pensar es el objetivo final de la educación y, aún y

cuando hay diferentes enfoques en el campo de la educación, todos coinciden en que pensar es el resultado final de la enseñanza (Atabaki, Keshtiaray y Yarmohammadian, 2015).

Paul y Elder (2005) afirman que la importancia del pensamiento crítico está en crecimiento debido al cambio acelerado que se vive, al incremento de las complejidades, el aumento de la interdependencia y del peligro. Además, establecen que en el día a día las personas se enfrentan a un exceso de información de la cual, mucha de ésta se ha puesto a disposición para tener influencia sobre los individuos para servir a intereses personales en lugar del bien común. Por ello, es importante que los estudiantes tomen control sobre sus pensamientos para reconocer sus propios valores y tomar acciones que contribuyan al bien común.

Hay un consenso sobre la necesidad de que los estudiantes aprendan a pensar críticamente; sin embargo, estudios demuestran que, aunque los profesores afirman que el pensamiento crítico es importante considerarlo en su práctica docente se les dificulta tener una claridad de concepción y evidenciar cómo lo promueven (Elder y Paul, 2010). Estas dificultades para los docentes, se convierte en un obstáculo para el logro de las políticas educativas en diferentes países de implementación del pensamiento crítico (Marques, Tenreiro y Martins, 2008, Atabaki, Keshtiaray y Yarmohammadian (2015).

Elder y Paul (2010, 39) aseguran que: “sin un pensamiento crítico que guíe el proceso de aprendizaje, es probable que la memorización se convierta en el principal recurso, con los estudiantes olvidándose casi al mismo ritmo que están aprendiendo y rara vez, o nunca, internalizando ideas poderosas”. Los profesores pueden privilegiar el desarrollo de habilidades para resolver problemas a través de un ambiente de aprendizaje

activo, y promoviendo la interacción entre los alumnos podrán incrementar el aprendizaje (Hohmann y Grillo, 2014). El nivel de desempeño de una persona en el aula y en el ambiente laboral se puede conocer a partir de su capacidad de pensamiento crítico (Asari, Mahmudi y Nuerlaelah, 2017).

De acuerdo con Mohamad, Jamali, Ahmad y Baba (2018), la ingeniería es considerada como una disciplina profesional esencial para el desarrollo del mundo. Por ello, el éxito de los ingenieros está en función de su capacidad para adaptarse a las condiciones cambiantes, de tal manera que cuenten con el conocimiento y habilidades para responder a las demandas de ingeniería en términos de tecnología moderna y habilidades de pensamiento.

Jang (2016) afirma que, el Consejo de Asesores de Ciencia y Tecnología del presidente de los Estados Unidos de Norteamérica ha hecho hincapié que: "La educación STEM ... determinará si Estados Unidos seguirá siendo un líder entre las naciones y si podremos resolver inmensos desafíos en áreas como la energía, la salud, protección del medio ambiente y seguridad nacional " (p. 296). Según este investigador, para que los estudiantes tengan carreras STEM exitosas, deben estar motivados para resolver problemas complejos interdisciplinarios usando el pensamiento crítico y el conocimiento de las disciplinas STEM. Considera que los programas de educación STEM deben ofrecer a los estudiantes actividades en el aula para resolver problemas mal estructurados utilizando pensamiento crítico y que participen en proyectos de investigación relevantes para problemas del mundo real acompañados en su aprendizaje por profesionales científicos.

En su investigación, Jang (2016) se enfoca en analizar los marcos para las

habilidades del siglo XXI y la educación en ingeniería para ver si cubren todas las competencias importantes de STEM. En el estudio se exploró habilidades, conocimientos y actividades laborales importantes utilizando la base de datos de información de ocupación estandarizada administrada por el Departamento de Trabajo de los Estados Unidos y se comparó con los marcos de habilidades del siglo XXI y los criterios de ingeniería para acreditación de la Junta de Acreditación de Ingeniería y Tecnología (ABET, por sus siglas en inglés). Estos marcos se han utilizado para abordar las habilidades necesarias para el éxito en la vida y la carrera y, en consecuencia, han impactado en la educación STEM.

Para clasificar 52 habilidades, conocimientos y actividades laborales importantes en cinco categorías, se solicitó a dos evaluadores, cada uno con al menos 5 años de experiencia en investigación en educación STEM, que revisen la definición operativa de cada descriptor y elijan la categoría más adecuada. De 35 habilidades, se consideraron 18 de ellas como las más importantes y en orden de importancia el pensamiento crítico se encontró en el primer lugar. Por ejemplo, en la base de datos del Departamento de Trabajo de Estados Unidos, establece que los trabajadores de STEM tengan habilidades de pensamiento de orden superior, como pensamiento crítico, resolución de problemas complejos y juicio y toma de decisiones. Específicamente, están obligados a resolver problemas usando las habilidades de Matemáticas y Ciencias.

Como se ha explicado, el pensamiento crítico es una competencia considerada de gran valor en la actualidad. Es una competencia de orden superior, es decir, va más allá que el pensamiento memorístico y rutinario, por lo tanto, esta competencia es compleja y está constituida por otras competencias.

1.2.4 Las habilidades y disposiciones de pensamiento crítico

El pensamiento crítico es una macro-competencia, por lo tanto, está formado por sub-competencias o categorías. Lipman (citado en Facione, 2007) establece cuatro categorías de habilidades y actitudes que reconoce en el pensamiento crítico: a) la conceptualización u organización de la información, b) el razonamiento, c) la traducción y d) la investigación. Afirma que el pensamiento crítico se basa en el uso de criterios para evaluar sus afirmaciones, en la autocorrección, buscando los errores en los que pueden haber caído. También se basa en la sensibilidad al contexto aceptando que se necesita una aplicación diferente de reglas o principios a cada situación o problema.

Facione (2007, pp. 4 – 6) establece seis habilidades de pensamiento crítico:

- la *interpretación* es comprender y expresar el significado o la relevancia de una amplia variedad de experiencias, situaciones, datos, eventos, juicios, convenciones, creencias, reglas, procedimientos o criterios. La interpretación incluye las sub-habilidades de categorización, decodificación del significado, y aclaración del sentido.
- el *análisis* consiste en identificar las relaciones de inferencia reales y supuestas entre enunciados, preguntas, conceptos, descripciones u otras formas de representación que tienen el propósito de expresar creencia, juicio, experiencias, razones, información u opiniones. Los expertos incluyen examinar las ideas, detectar y analizar argumentos como sub-habilidades del análisis.
- La *evaluación* es la valoración de la credibilidad de los enunciados o de otras

representaciones que recuentan o describen la percepción, experiencia, situación, juicio, creencia u opinión de una persona; y la valoración de la fortaleza lógica de las relaciones de inferencia, reales o supuestas, entre enunciados, descripciones, preguntas u otras formas de representación.

- La *inferencia* se refiere a identificar y asegurar los elementos necesarios para sacar conclusiones razonables; formular conjeturas e hipótesis; considerar la información pertinente y sacar las consecuencias que se desprendan de los datos, enunciados, principios, evidencia, juicios, creencias, opiniones, conceptos, descripciones, preguntas u otras formas de representación. Como sub-habilidades de inferencia, los expertos incluyen cuestionar la evidencia, proponer alternativas, y sacar conclusiones.
- La *explicación* como la capacidad de presentar los resultados del razonamiento propio de manera reflexiva y coherente. Esto significa poder presentar a alguien una visión del panorama completo: tanto para enunciar y justificar ese razonamiento en términos de las consideraciones de evidencia, conceptuales, metodológicas, de criterio y contextuales en las que se basaron los resultados obtenidos; como para presentar el razonamiento en forma de argumentos muy sólidos.
- La *autorregulación* es el monitoreo autoconsciente de las actividades cognitivas propias, de los elementos utilizados en esas actividades, y de los resultados obtenidos, aplicando particularmente habilidades de análisis y de evaluación a los juicios inferenciales propios, con la idea de cuestionar, confirmar, validar, o corregir el razonamiento o los resultados propios. Las dos sub-habilidades, en

este caso, son el auto examen y la auto corrección.

De acuerdo con Elder y Paul (2003, p. 4), un pensador crítico y ejercitado:

- Formula problemas y preguntas vitales, con claridad y precisión.
- Acumula y evalúa información relevante y usa ideas abstractas para interpretar esa información efectivamente.
- Llega a conclusiones y soluciones, probándolas con criterios y estándares relevantes.
- Piensa con una mente abierta dentro de los sistemas alternos de pensamiento; reconoce y evalúa, según es necesario, los supuestos, implicaciones y consecuencias prácticas y
- Al idear soluciones a problemas complejos, se comunica efectivamente.

Debido a que el pensamiento crítico es una competencia cognitiva (competencias relacionadas con el procesamiento de la información), su desarrollo implica un periodo de tiempo prolongado. Esta situación lleva a plantear que es importante que se trabaje esta competencia desde los primeros años escolares.

Según Craig (2001), los psicólogos educativos establecen seis tipos de pensamiento que los niños deben de ejercitar para ser pensadores críticos:

- Recordar hechos, ideas o conceptos.
- Repetir pasos, procedimientos, instrucciones.
- Razonar, como relacionar un problema específico con un concepto general.
- Reorganizar, llevando el conocimiento a otra situación y buscar soluciones nuevas.

- Relacionar el conocimiento que recién adquiere con experiencias previas.
- Reflexionar sobre qué y cómo sucedió.

Para que un estudiante se convierta en pensador crítico, debe desarrollar habilidades como: comparar, resumir, observar, clasificar, interpretar, formular críticas, búsqueda de suposiciones, imaginar, reunir y organizar datos, formular hipótesis, aplicar hechos y principios a nuevas situaciones, toma de decisiones, diseñar proyectos o hacer investigaciones y codificar (Rath y Wasserman, 1991).

Villa y Poblete (2007) consideran que el pensamiento crítico es una competencia instrumental y su desarrollo está en función del dominio de otras competencias básicas:

- *El pensamiento reflexivo.* Tiene que ver con la identificación y superación de concepciones previas, identificación de elementos claves y su jerarquización. Formula preguntas y considera la importancia del contexto y las repercusiones éticas.
- *El pensamiento lógico.* Se da orden a las ideas o conceptos que se examinan a partir de la construcción de enunciados y argumentos.
- *El pensamiento analítico.* Es un proceso ordenado para separar los elementos de situaciones o problemas complejos con la intención de reconocer aquellos elementos cualitativos y cuantitativos que son importantes y así comprender dichas situaciones.
- *El pensamiento sistémico.* Se centra en el todo y sus partes. Le interesa saber cómo se relacionan, cómo interactúan y se enlazan entre sí.
- *El pensamiento práctico.* Tiene que ver con la manera de adaptarse a la vida de

manera general, a las decisiones que se toman y el actuar ante la problemática o situación que se presenta.

- *El pensamiento colegiado.* Es una manera de pensar en compañía con otras personas para construir un pensamiento en común. Puede darse a nivel individual donde el propio pensamiento se ve enriquecido con pensamientos diferentes que no existían; y a nivel social, se da con la creación de un conocimiento compartido que surge del diálogo y la negociación.

Ennis (1985) establece la siguiente definición de pensamiento crítico: "...es el pensamiento reflexivo y razonable que se centra en decidir en qué creer o hacer" (Ennis, 1985, p. 45). De acuerdo con el investigador, esta concepción de la competencia de pensamiento crítico involucra tanto disposiciones, como habilidades que se integran en el proceso de decidir qué creer o hacer y lo expresa así:

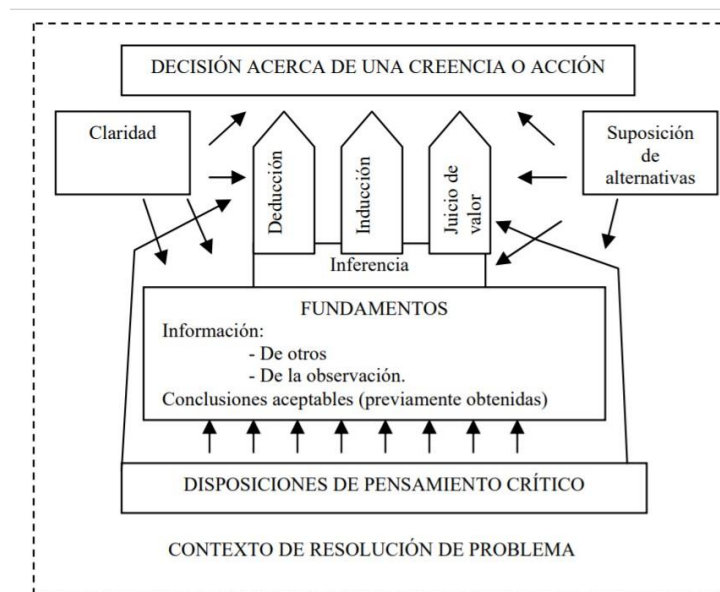
En la lista de disposiciones se incluyen tales como ser de mente abierta, poner atención a toda la situación, buscar razones y tratar de mantenerse bien informado... Los cuatro grupos generales de habilidades que constituyen el pensamiento crítico son habilidades relacionadas con la claridad (libremente dividido en grupos elemental y avanzado), habilidades relacionadas con la inferencia, habilidades relacionadas con el establecimiento de una base sólida para la inferencia y las habilidades involucradas en la toma de decisiones de una manera ordenada y útil, a menudo llamada resolución de problemas. Cuando se combinan con las disposiciones del pensamiento crítico, estas cuatro categorías se enfocan, en general, para cubrir de manera integral el proceso de decidir qué creer o hacer (p. 48).

La Figura 10 es un esquema aproximado de los procesos de toma de decisiones que, según Ennis, subyacen a una concepción y establece que:

Las decisiones acerca de las creencias o las acciones suelen ocurrir en el contexto de un problema y deben partir de algún fundamento. Este fundamento pueden ser observaciones, afirmaciones hechas por alguna fuente, y/o algunas proposiciones previamente aceptadas. Con esta base se hace una inferencia sobre la decisión. Tales inferencias pueden ser de tres tipos: inductiva, deductiva y juicio de valor (como proceso, no como producto). A la hora de tomar y juzgar la decisión el individuo debería poner en funcionamiento una serie de disposiciones de pensamiento crítico, tener claro lo que va a obtener, y ser capaz de ponderar otros puntos de vista. Además, debería disponer siempre de una defensa posible, y presentar ésta a los demás de forma escrita u oral. Todos estos elementos aparecen en la Figura 10 (Ennis, 2005, p. 49).

Figura 10

Proceso de decisión acerca de una creencia o acción. Ennis (2005, p. 49)



De la definición de pensamiento crítico que Ennis establece, se desprende una propuesta visión racional del pensador crítico ideal, la cual pretende ser una guía práctica para la toma de decisiones educativas. En la Figura 11 se muestra la caracterización del pensador crítico ideal.

Figura 11

Caracterización del pensador crítico ideal (Ennis, 2005, p. 50)

<p><i>Definición de partida:</i> "Pensamiento crítico" significa pensamiento reflexivo razonado a la hora de decidir qué hacer o creer.</p> <p>Dada esta definición, el pensador crítico ideal podría caracterizarse, más o menos, por el siguiente conjunto de 12 disposiciones y 16 habilidades, a veces interdependientes y algo solapadas. Todas las disposiciones y habilidades se presentan como elementos constitutivos del pensador crítico ideal. Las últimas cuatro habilidades (que aquí llamamos "habilidades auxiliares"), son de gran utilidad, y normalmente necesarias, para ese pensador crítico ideal.</p> <p>A. Disposiciones del pensador crítico ideal</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. A ser claro en el significado de aquello que pretende decir, escribir o comunicar de cualquier forma. 2. A determinar y mantener el enfoque sobre la conclusión o aspecto en cuestión 3. A tener en cuenta toda la situación. 4. A buscar y ofrecer razones. 5. A intentar estar bien informado. 6. A buscar alternativas. 7. A buscar tanta precisión como la situación requiera. 8. A intentar ser reflexivamente consciente de las propias creencias de partida. 9. A tener la mente abierta: a considerar seriamente los puntos de vista distintos al propio. 10. A contener el propio juicio cuando las evidencias y las pruebas son todavía insuficientes. 11. A tomar una postura (y a cambiarla) cuando las evidencias y las pruebas son suficientes. 12. A utilizar las propias habilidades de pensamiento crítico. <p>B. Habilidades del pensador crítico ideal (las cinco primeras implican la <i>aclaración</i>):</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Identificar el aspecto central: del tema, de la pregunta o de la conclusión. 2. Analizar los argumentos. 3. Hacer y contestar preguntas que aclaran o desafían 4. Definir términos, juzgar definiciones, hacer frente a la equivocación. 5. Identificar suposiciones no hechas (las siguientes dos implican la <i>base</i> para la decisión). 6. Juzgar la credibilidad de las fuentes. 7. Observar y juzgar los informes de los datos (las siguientes tres implican inferencia). 8. Deducir y valorar deducciones. 9. Inducir y valorar inducciones. <ol style="list-style-type: none"> a. Para generalizaciones. b. Para conclusiones explicativas (incluyendo hipótesis). 10. Hacer y juzgar juicios de valor (las siguientes dos son habilidades <i>metacognitivas</i> –implican la <i>suposición</i> y la <i>integración</i>). 11. Considerar y razonar premisas, motivos, suposiciones, puntos de partida y otras proposiciones, con las que no se está de acuerdo o se tienen dudas, sin que estos dos estados interfieran con el propio pensamiento ("pensamiento suposicional"). 12. Integrar las otras habilidades y disposiciones a la hora de tomar y defender la decisión (las siguientes son <i>habilidades auxiliares de pensamiento crítico</i> –su posesión no supone ser un pensador crítico). 13. Proceder de forma ordenada de acuerdo con la situación, por ejemplo: <ol style="list-style-type: none"> a. Seguir los pasos en la resolución de problemas. b. Supervisar el propio pensamiento. c. Emplear una lista de control razonable de pensamiento crítico. 14. Ser receptivos a las emociones, nivel de conocimiento y grado de sofisticación de los otros. 15. Utilizar estrategias retóricas adecuadas para la discusión y la presentación (oral o escrita). 16. Utilizar y reaccionar frente a las etiquetas de "error" de forma adecuada.
--

1.2.5 El pensamiento crítico y las matemáticas

Las matemáticas son una disciplina que está integrada en todos los niveles escolares en los sistemas educativos de todos los países, ya que se considera que ayuda a que los estudiantes puedan pensar de manera lógica, autónoma y enfrentar problemas (Tong, Loc, Uyen y Son, 2020). Además, en el mundo entero son reconocidas como un tema de suma importancia ya que las habilidades matemáticas con las que cuente una persona son un requisito para el logro escolar y el éxito en el ámbito laboral (Devesh, 2015).

En la actualidad con los cambios y desafíos que presenta el mundo, se espera que las personas resuelvan problemas, piensen críticamente y sean creativas (Turana, Kolayisb y Ulusoyc, 2012). Se requiere que los estudiantes, no solo construyan conocimiento, sino que también desarrollen habilidades de pensamiento de orden superior, es decir, la educación de hoy implica enseñar cómo pensar, cómo ser un pensador crítico (Aizikovitsh y Star 2011).

El pensamiento crítico en las matemáticas tiene relevancia ya que lleva a resolver problemas, formular conclusiones, buscar posibilidades y llevar a cabo decisiones de manera adecuada (Maulidiya y Nurlaelah, 2018). Los problemas matemáticos que implican pensamiento, análisis y síntesis pueden estimular las habilidades de pensamiento crítico de los alumnos (Firdaus, Ismail Kailani, Md. Nor Bin Bakar, Bakry. (2015).

De acuerdo con Tong, Loc, Uyen y Son (2020), el pensamiento crítico es el proceso de tratar problemas, evaluar pensamientos, argumentos, emitir juicios basados en

la recopilación y análisis de información y en las opiniones diversas sobre ciertos estándares específicos con el objetivo de dar la mejor solución. Además, estos investigadores afirman que la capacidad de pensar críticamente en matemáticas se manifiesta cuando se observa que los estudiantes revisan la relación entre el conocimiento previo y el nuevo, se hacen preguntas para resolver problemas por sí mismos, buscan bases a los argumentos al abordar problemas, consideran diferentes ideas, identifican varios criterios, desarrollan un escepticismo positivo, sacan conclusiones, están dispuestos a discutir para obtener la mejor solución, tienen la capacidad de corregir errores al argumentar pruebas o hacer frente a problemas matemáticos (Tong, Loc, Uyen y Son 2020).

La memorización, que es el método de la enseñanza tradicional, da como resultado un bajo desarrollo de las habilidades de pensamiento crítico, ésta lleva a los estudiantes a olvidar con facilidad la información aprendida y no la pueden aplicar en la cotidianidad (Maulidiya y Nurlaelah, 2018). Las habilidades de pensamiento de los estudiantes pueden desarrollarse si los profesores crean un ambiente de clase donde estimulan a los alumnos a tomar un papel activo y una constante interacción entre ellos mismos y el profesor (Firdaus, Ismail Kailani, Md. Nor Bin Bakar, Bakry, 2015).

La enseñanza de las ciencias por lo general utiliza métodos tradicionales, basándose en el contenido y llevando a los estudiantes a recurrir a la memoria para el logro de aprendizajes dejando a un lado el pensamiento crítico (Santos, 2017). En la actualidad no es suficiente que se dominen los conocimientos relevantes, sino que también se debe enseñar a los alumnos a aplicar el conocimiento y tener una actitud crítica hacia los contenidos (Marici, Spijunovic y Lazic, 2016).

Los estudiantes deben educarse y obtener una perspectiva científica (Asku y Koruklu,2015), desarrollar la competencia para tratar problemas complejos en contextos de la vida real, por lo que deberán participar activamente en procesos de pensamiento crítico (Kim, Sharma, Land y Furlong, 2013). Si los profesores desean desarrollar el pensamiento crítico de los alumnos en matemáticas, es necesario verlos como usuarios de información y no como simples receptores (Marici, Spijunovic y Lazic, 2016), guiarlos a que generen soluciones para los problemas que encuentren en la cotidianidad y discutan sus propias ideas y opiniones sobre el contenido que enseña (Asku y Koruklu, 2015).

Osman et al. (2016) afirma que, en la enseñanza universitaria, especialmente en el campo de la ingeniería, es necesario que los estudiantes desarrollen la capacidad de pensar de manera independiente ya que los problemas en la vida real son complejos y, por consiguiente, se requiere de soluciones complejas. No obstante, la necesidad de formar pensadores críticos, los alumnos llegan al término de sus estudios profesionales a un nivel deficiente por lo que llegan al ambiente laboral sin estar preparados (Hohmann y Grillo, 2014).

La Asociación Europea de Educación en Ingeniería o SEFI (en francés, Société Européenne pour la Formation des Ingénieurs) es una organización internacional no gubernamental fundada en Bruselas en 1973 para contribuir al desarrollo y la mejora de la educación superior en ingeniería en Europa. Promueve el intercambio de información sobre los acontecimientos actuales en el campo de la enseñanza de la ingeniería entre profesores, investigadores y estudiantes de los diferentes países europeos para reforzar la cooperación universitaria y empresarial y fomentar la dimensión europea en la educación superior en ingeniería. Esta asociación a través de su Grupo de Trabajo de Matemáticas

(GTM) ofrece un marco de referencia sobre el estado actual de la técnica en el diseño del plan de estudios de ingeniería con respecto a la integración del desarrollo de competencias en Matemáticas.

En el reporte que presenta el GTM se ofrece un marco de referencia para los currículos de matemáticas en la educación en ingeniería. En el reporte se adopta la definición de competencia matemática utilizada en el proyecto danés KOM y luego adoptado en el estudio OECD PISA. Definen la competencia matemática como "la capacidad de comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos y situaciones intra-matemáticas y extra-matemáticas en las que las matemáticas juegan o podrían desempeñar un papel" y las ocho competencias matemáticas que, en su conjunto, constituyen la competencia matemática general: pensar matemáticamente, razonar matemáticamente, plantear y resolver problemas matemáticos, modelar matemáticamente, representar dificultades matemáticas, manejar símbolos matemáticos y formalismo, comunicarse en, con y sobre las matemáticas y, por último, hacer uso de ayudas y herramientas (Niss 2003, p.6 – 9).

En los objetivos de aprendizaje de nivel superior basados en investigaciones educativas de vanguardia de este reporte se puede observar como la competencia matemática que se espera que el estudiante de ingeniería desarrolle va más allá que el dominio de simples algoritmos para la solución de ecuaciones y expresiones matemáticas.

Seventika, Sukestiyarno y Mariani (2015) afirman que hay dos tipos de habilidades de razonamiento. El razonamiento de orden inferior que solo usa una capacidad limitada en cosas mecánicas o de rutina, como memorizar y repetir información dada; y el razonamiento de orden superior que lleva a los estudiantes a interpretar, analizar o

manipular la información. Una de las habilidades de razonamiento de orden superior es el pensamiento crítico.

Con esta visión actual de la competencia matemática que requiere de habilidades de pensamiento de orden superior, investigadores educativos han realizado estudios relacionando la competencia transversal del pensamiento crítico con las matemáticas.

Arviana y Prabawanto (2019) realizaron un estudio de caso sobre el pensamiento crítico de cuatro estudiantes universitarias para resolver problemas matemáticos. Los indicadores evaluados en este estudio son la capacidad de presentar argumentos, sacar conclusiones y evaluar conclusiones. La capacidad de dar argumentos significa la capacidad de explicar las ideas de manera clara y sistemática. Sacar conclusiones se refiere a la capacidad de tomar decisiones racionales basadas en la información dada. Mientras tanto, evaluar la conclusión está relacionada con analizar, identificar consecuencias lógicas y evaluar argumentos. Los instrumentos utilizados fueron una prueba que consta de tres problemas matemáticos, éstos representan consecutivamente los indicadores del pensamiento crítico y una entrevista guiada cuyo objetivo fue explorar más explicaciones de la respuesta de los participantes para resolver la prueba.

De las cuatro estudiantes dos se clasificaron en el nivel bajo debido a que no pudieron resolver los problemas o se equivocaron en los cálculos. Las otras dos se clasificaron en nivel alto. Pudieron dar la solución acompañada de argumentos, realizaron correctamente los cálculos, pudieron identificar y usar la información para sacar conclusiones claras, evaluaron la conclusión dada al establecerla clara y sistemáticamente.

Basri, Purwanto, As'ari y Sisworo (2019) realizaron una investigación con el

objetivo de describir las habilidades de pensamiento crítico de los estudiantes de secundaria para resolver problemas matemáticos e identificar los componentes de pensamiento crítico de los estudiantes en las sub-habilidades de análisis, evaluación, inferencia, explicación y autorregulación. El estudio se llevó a cabo con un enfoque cualitativo descriptivo. Los datos fueron recolectados a través de una prueba y entrevistas, triangulación se realizó mediante la comparación entre la prueba y las entrevistas. Los participantes fueron 9 estudiantes varones y 15 estudiantes mujeres. La prueba utilizada en esta investigación consistió en 6 problemas que representan 6 sub-habilidades de pensamiento crítico.

Los resultados de la investigación mostraron que las habilidades de pensamiento crítico de los estudiantes de secundaria estaban en una categoría baja; las sub-habilidades de evaluación, análisis y autorregulación se convirtieron en las sub-habilidades de pensamiento crítico más bajas dominadas por los estudiantes en comparación con otras sub-habilidades de pensamiento crítico.

La investigación hecha por Hidayat, Nurlaelah y Dahlan (2017) se enfocó en examinar la capacidad matemática creativa y de pensamiento crítico de los estudiantes que obtienen un enfoque riguroso de pensamiento matemático (RMT) y los estudiantes que obtienen un enfoque expositivo. Esta investigación fue un cuasi experimento con el diseño del grupo de control preprueba-posprueba. La población era de estudiantes de grado 11. El resultado mostró que el logro de las habilidades matemáticas creativas y de pensamiento crítico de los estudiantes que obtienen RMT es mejor que los estudiantes que obtienen un enfoque expositivo. El uso de herramientas psicológicas y mediación con criterios de intencionalidad, reciprocidad y mediación de significado en RMT ayuda

a los estudiantes a desarrollar condiciones en procesos críticos y creativos.

El estudio realizado por Seventika, Sukestiyarno y Mariani (2018) tuvo el propósito de analizar y clasificar la capacidad de pensamiento crítico de los estudiantes de secundaria en función de los indicadores de pensamiento crítico modificados de acuerdo con la cobertura de Facione-Angelo: interpretación del problema, análisis de soluciones alternativas, aplicación del problema, evaluación de la solución y conclusión de los resultados obtenidos: adjunto por evidencia de apoyo. Los participantes fueron 30 estudiantes de undécimo grado. Los datos que se colectaron fueron a través de una prueba de pensamiento crítico y de entrevistas.

El resultado muestra que el 15% está en una buena categoría, el 30% en la categoría justa y el 55% en la categoría baja. Los estudiantes en la categoría "buena" han logrado pasos de pensamiento crítico, aunque imperfectos, especialmente los indicadores de evaluación y conclusión adjuntos por evidencia de apoyo. Los estudiantes categorizados como "justos" solo muestran pasos parciales de los indicadores. Los indicadores de análisis, evaluación y conclusión son los que rara vez se hacen, mientras tanto, los estudiantes categorizados "bajos" muestran todos los indicadores de baja calidad, incluso para identificar que tiene un problema que hacer.

Otro estudio que relaciona las matemáticas con el pensamiento crítico es el realizado por Husnaeni (2016), se enfocó en examinar exhaustivamente la mejora de la capacidad de pensamiento crítico matemático de los estudiantes que aprenden matemáticamente con los modelos Cooperativo de Aprendizaje Interactivo (ILSC, por sus siglas en inglés) y aprendizaje convencional (CL, por sus siglas en inglés). Los participantes fueron 68 estudiantes de décimo grado. El estudio es cuasi experimental

con preprueba y posprueba. El resultado muestra que hay una diferencia significativa entre el grupo experimental y de control. Por lo que concluyen que aprender con modelos ILSC es mejor que el método convencional.

En el modelo Cooperativo de Aprendizaje Interactivo, los profesores crean una tarea que provoca que los alumnos construyan conceptos aprendidos y estrategias. El aprendizaje en entornos cooperativos los estudiantes pueden ayudarse mutuamente en las actividades de aprendizaje o resolución de problemas y el profesor interactúa como apoyo para sus alumnos liderando discusiones para brindar oportunidad a otros grupos de dar sus opiniones, lleva a cuestionamientos que permita a los estudiantes pensar críticamente y conectar el modelo con la representación simbólica relevante.

Aizikovitsh-Udi y Cheng reportaron los resultados de un estudio que demuestra la mejora en las disposiciones de 55 estudiantes de matemáticas de décimo grado hacia el pensamiento crítico y las habilidades para pensar críticamente. En la investigación se cuestionó en qué medida los estudiantes aprenden habilidades de pensamiento crítico (habilidades y disposición) a través de una presentación de probabilidad con un enfoque de infusión.

Hay dos enfoques para enseñar el pensamiento crítico usando disciplinas de contenido: a) El enfoque de "infusión", donde las habilidades de pensamiento crítico se enseñan explícitamente usando el contenido de la disciplina; b) El enfoque "integrado" o general, donde las habilidades de pensamiento crítico se enseñan de manera indirecta sin deletrearlo a los estudiantes. En el enfoque de infusión, las habilidades se enseñan en el marco de una materia o tema en particular, y el pensamiento se convierte en una parte integral de la enseñanza del contenido específico de la materia, mientras que los

principios generales y la terminología del pensamiento se enfatizan explícitamente.

En la investigación se llevaron a cabo entrevistas a estudiantes, se analizaron exámenes y tareas y el grupo participante se evaluó antes y después del programa de instrucción utilizando dos cuestionarios, Disposiciones de pensamiento crítico (CCDTI) y Habilidades de pensamiento crítico (prueba de Cornell).

Los resultados de la investigación demostraron que, si los maestros fomentan consistente y sistemáticamente el pensamiento crítico en sus clases aplicando matemáticas a problemas de la vida real, fomentando el debate y planificando lecciones de investigación, es probable que los estudiantes practiquen habilidades de pensamiento crítico y desarrollen el lenguaje del pensamiento crítico.

El estudio también mostró cómo el enfoque de infusión puede funcionar en el caso específico de la enseñanza de la probabilidad relacionada con problemas de la vida real. Los estudiantes practicaban el pensamiento crítico usando la probabilidad, mientras que el material de estímulo presentado constituía la base para practicar las habilidades de pensamiento crítico junto con el tema de la probabilidad.

Por otro lado, se encontró que se llevaron a cabo estudios con futuros profesores de matemáticas, donde se indaga sobre sus habilidades de pensamiento crítico y la solución y diseño de problemas. Rahaju, Purwanto, Parta y Rahardjo (2019) realizaron un estudio descriptivo cualitativo con el objetivo de dar seguimiento a las habilidades de pensamiento crítico de 25 estudiantes del programa de educación docente de escuela primaria en el proceso de hacer problemas matemáticos.

Los futuros docentes habían estudiado el tema del triángulo y sus problemas, también habían aprendido cómo resolver problemas y enseñar el tema del triángulo. Se

les solicitó a los participantes hacer problemas relacionados con el tema del triángulo y eran libres de elegir la forma de los problemas, tales como preguntas objetivas, preguntas subjetivas, problemas razonados, etc. Más adelante se les entrevistó para obtener datos sobre el proceso o el pensamiento básico de los sujetos relacionados con el proceso de elaboración de los problemas.

Se obtuvieron problemas correctos e incorrectos. Entre ellos había problemas de adopción y de modificación. El problema de la adopción es un problema que se hace citando directamente un problema, los cuales se han estudiado en el aprendizaje o están contenidos en Internet. Los problemas de modificación son problemas que se hacen cambiando algunas o varias partes de los problemas, o cambiando la forma de los problemas.

Una exploración a través de una entrevista mostró que los sujetos nunca aprendieron a resolver problemas, por lo que prefieren los problemas en Internet. Esto era una contradicción con los estándares profesionales de la enseñanza de las matemáticas, es decir, dar a los estudiantes la oportunidad de proponer o crear sus propios problemas. A través de entrevistas, también se descubrió que los sujetos carecían de confianza en la capacidad de comprender y resolver problemas matemáticos, por lo que no se atrevieron a realizar demasiados cambios en los problemas referidos.

Los resultados de este estudio son algunos errores en problemas hechos por los estudiantes. Estos errores se descubrieron cuando los problemas se analizaban mediante actividades de pensamiento crítico.

Los investigadores concluyen que esto muestra que hacer problemas que son buenos y correctos no es pan comido y hay una relación entre el proceso de hacer un

problema con el pensamiento crítico. Por lo tanto, la habilidad para crear problemas o tener problemas debe ser parte del aprendizaje de las matemáticas para todos los estudiantes y, lo que es más importante, para los maestros de pre-servicio.

Rott y Leuders (2017) investigaron dos aspectos de las competencias de los profesores de matemática previos al servicio: un cierto aspecto de las habilidades matemáticas (pensamiento crítico con respecto a situaciones de problemas matemáticos) y creencias epistemológicas (evaluadas tanto por la posición de la creencia como por la justificación de la creencia). Investigaron a 463 estudiantes de dos universidades con respecto a ambos aspectos de las competencias. Mostraron que la posición de creencia y la justificación de los estudiantes son independientes y pueden evaluarse independientemente. Mientras que la posición de la creencia no está correlacionada con el número de semestres de los estudiantes, su curso de estudios y sus habilidades matemáticas, la justificación de la creencia sí está correlacionada con estos factores.

Estos investigadores aceptan que no ofrecen un modelo que explique la justificación de las creencias y el nivel de pensamiento crítico, sin embargo, hacen referencia a Kuhn que argumenta que la transición de las creencias absolutistas a las evaluativas de la estructura del conocimiento y la capacidad de pensar críticamente están estrechamente relacionadas. Por un lado, las reflexiones críticas conducen a cuestionar creencias y a la idea de que incluso los expertos no están de acuerdo sobre cuestiones importantes. Estos son pasos importantes para desarrollar creencias epistemológicas más sofisticadas. Por otro lado, una comprensión epistemológica absolutista favorece respuestas fáciles y más directas sobre cuestiones de verdad o falsedad.

Al relacionar el pensamiento crítico con las matemáticas, es indispensable hablar

sobre la Educación Matemática Crítica; ésta tiene sus raíces e influencias de las dos generaciones de la Escuela de Frankfurt, de Freire con su pedagogía de la liberación y de la educación bancaria y de D´Ambrosio con la etnomatemática y posicionamiento sobre cómo las matemáticas son una producción cultural que incluye y que se dan de manera oculta en la práctica de grupos culturales, étnicos y otros específicos como de la edad, profesiones, etc. (Guerrero, 2008).

Bajo esta perspectiva crítica, la escuela debe formar a los alumnos para ser ciudadanos críticos, preparados para correr riesgos, desafiar y creer que sus acciones pueden marcar una diferencia en la sociedad en general; por ello, la alfabetización juega un papel central (Skovmose, 1999). La alfabetización ayuda a descubrir las dificultades asociadas a las diferentes desigualdades en la sociedad; puede conducir a la reflexión, la razón y la transformación (Guerrero 2007).

Según Sánchez y Torres (2009), desde la manera en que se conciben las matemáticas, se han utilizado para excluir o incluir a otros. Esta disciplina se ha inclinado más por excluir ya que son pocos los estudiantes que logran aprendizajes. Las razones en las perspectivas como la tradicional o conductista se lo confieren al nivel de abstracción requerido, falta de interés y de capacidad por parte de los estudiantes para comprender postulados y características de los objetos matemáticos. No obstante, desde la perspectiva crítica, el fracaso se le otorga a la falta relación que tiene el estudio de las matemáticas con las situaciones reales que viven los estudiantes y, por otro lado, el profesor al tomar una postura de autoridad absoluta en clase lleva al alumno a un rol pasivo para entender y aplicar el conocimiento por lo que lo aleja del mismo llevando a carecer de herramientas para participar activamente en las decisiones sociales y políticas

del contexto.

Finalmente, se puede concluir que en la actualidad el estudio de las matemáticas va más allá de la simple memorización de algoritmos para solucionar problemas matemáticos puros. Las matemáticas representan la comprensión básica para conectarse con diferentes disciplinas; los problemas matemáticos pueden dar forma a la manera de pensar de los estudiantes al llevar a cabo un proceso de comprensión de cómo funciona el mundo debido a que las matemáticas se van relacionando con el pensamiento de una idea, procesamiento y razonamiento (Hafni, Sari y Nurlaelah, 2019).

En los estudios mencionados anteriormente, se puede observar los esfuerzos de los investigadores por encontrar esa relación entre las matemáticas y el pensamiento crítico. A través del estudio de la interpretación, análisis y manipulación de información que realizan los estudiantes; de cómo presentan argumentos y evalúan conclusiones, cómo son sus inferencias. También estudian el desarrollo del nivel de pensamiento crítico a través de estrategias como el trabajo colaborativo y de intervenciones pedagógicas; a partir de la implementación de los enfoques como el de infusión y el integrado.

Ante la necesidad de una transformación de sociedad a partir de una educación matemática crítica, existen una variedad de propuestas en la formación de los alumnos. Se propone una participación activa de los estudiantes, la democratización y empoderamiento para la toma de decisiones en resolución de problemas que sean de la vida real y de los contextos que viven los alumnos.

Desde esta visión que ofrecen las investigaciones sobre pensamiento crítico y las matemáticas se puede afirmar que la capacidad de pensar es de gran relevancia ya que, frente a los desafíos del siglo XXI, es esencial aplicar el pensamiento para resolver los

problemas que surjan y esta capacidad de pensar que se requiere es un pensamiento de orden superior, constituido por el pensamiento crítico y creativo (Hidayat, Nurlaelah y Dahlan, 2017). Por ello, se concluye que el aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo del pensamiento crítico son de relevancia en la formación de los estudiantes universitarios, especialmente, de ingeniería.

Por último, en la Tabla 9 se presenta una colección de artículos en los cuales se han investigado de manera experimental el efecto de una intervención de tal manera que puedan guiar y sustentar la implementación de la intervención en este estudio con información sobre estudios en los cuales se llevaron a cabo indagaciones sobre el pensamiento crítico. La información se centra en la metodología llevada a cabo, los resultados y los procesos relacionados con la prueba de Pensamiento Crítico de Cornell, uso de prepruebas y pospruebas y pruebas paramétricas y no paramétricas.

Tabla 9

Artículos con metodología experimental para evaluar intervenciones

Título	Método	Proceso	Resultados
Developing Critical Thinking Skills from Dispositions to Abilities: Mathematics Education from Early Childhood to High School Autores: Einav Aizikovitsh-Udi, Diana Cheng 2015	Método mixto Instrumentos: 1) Se entrevistó a cinco estudiantes al final de un período de clase y una semana después. 2) Se recopilaron los exámenes de los estudiantes, las actividades de clase y las tareas; 3) Todas las sesiones de clase se documentaron y analizaron; las sesiones se grabaron y transcribieron; 4) El grupo de participantes se evaluó dos veces, tanto antes como después del programa de instrucción, utilizando los dos cuestionarios: Disposiciones del pensamiento crítico (CCDTI) y Habilidades del pensamiento crítico (prueba de Cornell). 5) Diario de reflexión del profesor	Se ofreció un curso de probabilidad a través de un enfoque de infusión a 55 jóvenes de entre quince y dieciséis años. El curso constaba de quince sesiones. Durante este curso, se les dio a los estudiantes noticias recientes del periódico o de los resultados de la encuesta y se les pidió que juzgaran qué tan ciertas podrían ser estas afirmaciones. Para justificar adecuadamente las afirmaciones de los estudiantes, necesitaban aprender la probabilidad condicional, el teorema de Bayes y herramientas probabilísticas y estadísticas adicionales.	El estudio de la unidad de aprendizaje "Probabilidad en la vida diaria" en el enfoque de infusión a través de una serie de pruebas mostró que los estudiantes del grupo experimental mejoraron considerablemente sus disposiciones de pensamiento crítico y contribuyó al desarrollo de las habilidades de pensamiento de los estudiantes en relación con el grupo de control.

<p>Effect of Cooperative Learning Supported by Reflective Thinking Activities on Students' Critical Thinking Skills</p> <p>Autor: Erdogan, F 2019</p>	<p>En este estudio, se aplicó un modelo cuasi-experimental con grupo de control pretest-postest. En el grupo experimental, se aplicó el método de aprendizaje cooperativo apoyado por actividades de pensamiento reflexivo. En el análisis de datos, se aplicó la prueba de Shapiro-Wilks para analizar la distribución normal. Al analizar los datos, se utilizaron la prueba t de grupo independiente y la prueba t de grupo dependiente, dependiendo del tipo de datos. El análisis de covarianza (ANCOVA) se realizó para examinar la diferencia entre las puntuaciones posteriores a la prueba de los grupos. La prueba de Bonferroni se utilizó para determinar la fuente de la diferencia entre los puntajes ajustados. Se utilizó la Prueba de pensamiento crítico de Cornell, Nivel X (CCT-X) como herramienta de recopilación de datos. Esta prueba fue adaptada al turco por Mecit (2006).</p>	<p>En el grupo de control, la enseñanza de las matemáticas se realizó de acuerdo con el plan de estudios del curso de matemáticas. El grupo de estudio estaba compuesto por 70 estudiantes de séptimo grado. La fase experimental del estudio duró 25 horas de clase. Se utilizaron estrategias de escritura, redacción de diarios, discusión grupal, diálogo reflexivo, autoevaluación y pensamiento en voz alta, que se utilizan con frecuencia en la educación matemática, dirigiendo a los estudiantes a pensar, debatir y cuestionar, desarrollando habilidades para resolver problemas</p>	<p>En el estudio, cuando se verificaron las puntuaciones previas a la prueba de los grupos experimental y de control, se encontró una diferencia significativa entre las puntuaciones medias corregidas CCT-X posteriores a la prueba. Se encontró que esta diferencia estaba a favor del grupo experimental. Según este hallazgo, se puede decir que el aprendizaje cooperativo apoyado por actividades de pensamiento reflexivo tiene un efecto positivo en las habilidades de pensamiento crítico de los estudiantes.</p>
<p>The Influence of Teaching Approach on Students' Conceptual Learning in Physics Autores: Bigozzi , Tarchi, Fiorentini, Falsini y Stefanelli 2018</p>	<p>Método mixto Se investiga el efecto de las concepciones pre-instruccionales de la física, las creencias relacionadas con la ciencia y el pensamiento crítico de los estudiantes. El pensamiento crítico de los estudiantes se evaluó mediante la Prueba de pensamiento crítico de Cornell - Nivel X</p>	<p>La prueba fue traducida al italiano por un investigador bilingüe y traducida por otro investigador bilingüe. Las dos versiones fueron comparadas, y no se encontraron diferencias significativas. La versión italiana también fue validada por expertos por dos profesores con más de 20 años de experiencia en la enseñanza a estudiantes de secundaria. Los puntajes de los estudiantes podrían oscilar entre 0 y 70, y los puntajes de confiabilidad fueron $\alpha = 0.76$ en el pre-test y $\alpha = 0.82$ en el post-test.</p>	<p>Para determinar la equivalencia entre grupos al comienzo del año escolar, realizamos una serie de pruebas t para muestras independientes, con el grupo como variable independiente y puntajes de pruebas previas en creencias relacionadas con la ciencia, pensamiento crítico y comprensión conceptual de la física como variables dependientes</p>
<p>Designing Learning Environments for Critical Thinking: Examining Effective Instructional Approaches</p>	<p>Este estudio empleó un diseño cuasi-experimental que involucró a 147 estudiantes de primer año con especialización en física, química o geología.</p>	<p>Este estudio examinó los efectos de incorporar la instrucción de CT de manera sistemática en cursos de dominio específico (inmersión versus infusión) sobre la adquisición de CT de dominio específico y general de</p>	<p>Los resultados mostraron que los participantes en las condiciones de Inmersión e Infusión superaron significativamente a los de la condición de control en el dominio de CT específico del dominio y el</p>

1.2.6 Instrumento para evaluar el pensamiento crítico

Existen diversos estudios que han diseñado y validado pruebas con la intención de evaluar la competencia de pensamiento crítico de los alumnos participantes. También hay una cantidad de investigaciones donde se utilizan pruebas o rúbricas ya establecidas y validadas. En este apartado se hablarán de las más representativas.

1. *Watson-Glaser Critical Thinking* (JobTestPrep, 2019). La Evaluación de pensamiento

crítico de Watson Glaser (WGCTA, por sus siglas en inglés) es una prueba psicométrica producida por las evaluaciones de Pearson desde 1960. Actualmente, la prueba se usa para propósitos principales. Por un lado, para la selección de trabajo de graduados y profesionales en los campos del derecho, finanzas y más; y para la gestión del talento para evaluar a gerentes. Por el otro, para evaluaciones académicas a estudiantes en cursos de grados avanzados o en seminarios.

Es administrado por los empleadores como una prueba en línea o como una versión en papel en un centro de evaluación. Se dispone de dos versiones, una de 80 ítems y otra de 40 y se completan en 60 y 30 minutos, respectivamente. La evaluación se divide en cinco secciones y cada sección tiene su propio tipo de pregunta que evalúa una habilidad particular: a) Inferencia, b) Reconocimiento de suposiciones, c) Deducción, d) Interpretación y e) Evaluación de argumentos.

2. Prueba de pensamiento crítico de Halpern (HCTA, por sus siglas en inglés, 2016).

Es un medio para evaluar los niveles de pensamiento crítico para las edades de 15 años hasta la edad adulta. La evaluación consta de 20 escenarios cotidianos, cada uno de los cuales se describe brevemente y se presenta en un lenguaje común. Para cada escenario, a los encuestados primero se les hace una pregunta abierta, seguida de una pregunta de elección forzada (por ejemplo, opción múltiple, clasificación o clasificación de alternativas). Los psicólogos cognitivos diferencian entre la memoria libre y los procesos de reconocimiento en la memoria y estos dos tipos de preguntas están diseñados para aprovechar los diferentes procesos cognitivos. El puntaje total es, aproximadamente, igualmente ponderado entre las respuestas construidas y las preguntas de elección forzada.

La prueba evalúa cinco dimensiones: razonamiento verbal, análisis de argumentos, pensamiento como prueba de hipótesis, probabilidad e incertidumbre, y toma de decisiones y resolución de problemas.

3. *Prueba de Habilidades de Pensamiento Crítico de California* (CCTST, por sus siglas en inglés) (Insights Assessment, 2019). Es una evaluación para estudiantes de pregrado y posgrado o grupos de población comparables. Los elementos de opción múltiple utilizan escenarios cotidianos, apropiados para el grupo de examinados previsto. Cada ítem requiere que el examinado realice una interpretación precisa y completa de la pregunta.

Los elementos de prueba varían en dificultad y complejidad. Diferentes preguntas invitan progresivamente a analizar o interpretar la información presentada en el texto, cuadros o imágenes; sacar conclusiones precisas y justificadas; para evaluar inferencias y explicar por qué representan un razonamiento fuerte o razonamiento débil; o para explicar por qué una evaluación dada de una inferencia es fuerte o débil. El instrumento se administra típicamente en 45-50 minutos. Esta prueba arroja puntajes en estas escalas: habilidades de razonamiento general, análisis, interpretación, evaluación, explicación, inferencia, deducción, inducción y cálculo.

4. *Prueba de pensamiento crítico de Cornell* (Ennis, Millman y Tomko, 2005). Este instrumento se ofrece para dos niveles, Prueba de Pensamiento Crítico de Cornell, Nivel X, y Prueba de Pensamiento Crítico de Cornell, Nivel Z. El Nivel X está dirigido a estudiantes en los grados 4-14, Nivel Z en estudiantes de preparatoria avanzados y superdotados, estudiantes universitarios, estudiantes graduados y otros adultos.

El nivel X es una prueba de 71 ítems de opción múltiple, que evalúan las habilidades de: a) inducción, b) credibilidad de una fuente, c) observación, d) semántica, e) deducción, y f) identificación de hipótesis. El nivel Z cuenta con 52 ítems, también de opción múltiple, evalúa las siguientes habilidades: inducción, credibilidad de una fuente, semántica, predicción y experimentación, falacias, deducción, definición e identificación de hipótesis. Cada una de las pruebas debe tomarse dentro de un período de 50 minutos. Cada ítem en cada prueba tiene tres opciones y una respuesta clave.

Para analizar y subcategorizar la capacidad de pensamiento crítico, este enfoque ve tres tipos de inferencias a las creencias (inducción, deducción y valoración de juicios); y cuatro tipos de bases para tales inferencias, que son: a) los resultados de otras inferencias, b) observaciones, c) declaraciones hechas por otros y d) suposiciones.

Dadas ciertas características de esta prueba, se ha elegido para utilizarla en la metodología cuantitativa de este estudio. Se hablará con más detalle de estas características en el capítulo 3.

Se encontraron estudios en los cuales se diseñan rúbricas, sin embargo, sólo se muestran ejemplos sobre los ítems. Por otro lado, se tiene dos rúbricas para la evaluación del pensamiento crítico, las cuales se consideran de utilidad para el diseño de una rúbrica donde se relacionen la modelación matemática y el pensamiento crítico. En el Anexo 3 y 4 se muestran las rúbricas mencionadas respectivamente. Algunas de sus características son:

1. *Rúbrica del pensamiento crítico de la Asociación Americana de Colegios y*

Universidades (AACU, por sus siglas en inglés). Esta rúbrica es parte del compendio de 15 rúbricas llamadas VALUE que se mencionaron en el apartado de las rúbricas

para evaluar la modelación matemática. La rúbrica fue diseñada con la intención de que fuera transdisciplinaria ya que los expertos que la crearon están concuerdan en que el éxito en todas las disciplinas requiere hábitos de investigación y análisis que compartan atributos comunes. Además, afirman que muchas investigaciones sugieren que los pensadores críticos exitosos de todas las disciplinas necesitan cada vez más poder aplicar esos hábitos en situaciones diversas y cambiantes en todos los ámbitos de la vida. Esta rúbrica se puede utilizar con muchos tipos diferentes de tareas, tales como, aquellas que requieren que los estudiantes realicen análisis de texto, datos o problemas.

2. *Rúbrica del pensamiento crítico de la Universidad de Deusto* (Villa y Poblete, 2007, pp. 76-83). Desde 1999 la Universidad de Deusto en España inició una etapa de renovación pedagógica. Esta necesidad de cambio fue el punto de partida para otras iniciativas de universidades europeas con necesidad de un cambio pedagógico y metodológico y planteamientos similares. De esta manera, surge el Proyecto Tuning, el cual fue encabezado por la Universidad de Deusto y la Universidad de Groningen (Holanda). El proyecto ha crecido y su influencia no solo recae en el ámbito universitario europeo, sino que también, se ha desarrollado en otros continentes como Latinoamérica, Asia e India.

La Universidad de Deusto a través de un vasto equipo de trabajo de profesores de todas las áreas, diseñó y elaboró un sistema de evaluación de competencias genéricas. Este sistema presenta rúbricas de cada una de las competencias detallando la definición de cada una, sus indicadores y tres niveles de “expertise”, entre ellas se encuentra la competencia de pensamiento crítico.

Esta rúbrica tiene como base la definición del pensamiento crítico como el comportamiento mental que cuestiona las cosas y se interesa por los fundamentos en los que se asientan las ideas, acciones y juicios, tanto propios como ajenos. Los indicadores de la rúbrica para evaluar esta competencia son:

- a) La formulación de juicios propios: se hace preguntas sobre la realidad que vive, reflexiona sobre ella, formula sus propios juicios y los argumenta.
- b) El análisis de los juicios ajenos: se interesa por los juicios de otros y los analiza (diferencia datos de opiniones, puntos fuertes y débiles, e identifica ideas, principios y valores subyacentes).
- c) El empleo de criterios fundamentados para el análisis de los juicios adoptando una actitud constructiva: criterios internos (consistencia, coherencia, congruencia, fiabilidad), y externos (utilidad, viabilidad, validez, etc.).
- d) La toma de conciencia de las implicaciones prácticas de los juicios y la asunción de la responsabilidad respecto a dichas implicaciones: los pros y contras de las decisiones, las consecuencias sobre los demás y sobre los derechos de las personas.

El nivel de “expertise” en la competencia está en función del nivel de profundidad con el que se trabaje las dimensiones y no por el tipo de situaciones que se trabajen. En el Anexo 2, se muestra la rúbrica con tres niveles de dominio.

A manera de cierre se puede afirmar que el interés por el pensamiento crítico es tan antiguo que se puede considerar a Sócrates como uno de los fundadores del movimiento del pensamiento crítico. Su principal característica es su carácter evaluativo, se relaciona con lo que se cree y las decisiones que se realizan. Por lo tanto, el pensamiento crítico es una competencia transversal que lleva a cuestionar las cosas y los actos, a interesarse y

profundizar en las ideas, acciones y juicios personales y de otros; analizando la información desde diferentes situaciones. Encamina a analizar, evaluar, inferir y explicar, de acuerdo con las evidencias, contextos, conceptos y metodologías en los cuales apoya sus juicios, para finalmente tomar decisiones y solucionar situaciones.

Los desafíos que debe enfrentar la sociedad exigen que los estudiantes universitarios no solo desarrollen habilidades disciplinares, sino también aquellas habilidades transversales que le permite tomar decisiones y solucionar problemas generados por estos desafíos de una población en constante crecimiento. El pensamiento crítico es considerado una de las competencias transversales más importantes para la actualidad, de tal manera que, formar a los estudiantes como pensadores críticos es uno de los objetivos primordiales de todo centro educativo.

Los retos que deberán afrontar los estudiantes universitarios son problemas complejos que surgen de la vida diaria y, debido a esta complejidad, los profesionistas, desde una postura científica, deberán realizar procesos de pensamiento crítico para diseñar soluciones complejas. El pensamiento crítico es una competencia difícil de implementar en el currículum escolar, por ello es importante la investigación de estrategias que puedan favorecer el desarrollo de esta competencia.

Finalmente, queda decir que la postura que se toma para esta investigación es que la competencia de Pensamiento Crítico es de gran relevancia para la formación de futuros profesionistas en la actualidad, es transversal, por lo que se aplica en diferentes y variados ámbitos.

La principal característica del pensamiento crítico es su carácter evaluativo (Orlich, D., Harder, R., Callahan, R., Kauchak, D., 1995), se relaciona con lo que se cree y las

decisiones que se realizan y se establece para él la siguiente definición: la competencia del pensamiento crítico es aquella que encamina a cuestionar las cosas y los actos; a interesarse y profundizar en las ideas, acciones y juicios personales y de otros, examinando la información desde nuevos ángulos. Conduce a analizar, evaluar, inferir y explicar, de acuerdo con las evidencias, contextos, conceptos y metodologías en los cuales apoya sus juicios.

1.3 Formación de ingenieros

Los investigadores Kelley y Knowles (2016) afirman que actualmente los retos mundiales necesitan ser enfrentados a partir del desarrollo de la ciencia y la tecnología. Entre estos retos se puede mencionar el crecimiento de la población, el abastecimiento de agua, producción agrícola, el suministro de energía, entre otros. Aseguran que estos desafíos, en agudo crecimiento, no van de la mano con el interés de los estudiantes por lograr aprendizajes relacionados con la ciencia, la tecnología, ingeniería y matemáticas. Por lo que, hoy en día, existe una preocupación mundial por la falta de fuerza laboral con habilidades en los ámbitos mencionados para hacer frente a las problemáticas globales.

1.3.1 Nuevas competencias para la formación del estudiante

A partir de las necesidades de una economía basada en el conocimiento, los cambios tecnológicos y la globalización, el interés por la formación integral de las personas desde una perspectiva educativa y profesional es imperante, especialmente en la

formación de ingenieros (Kindelán y Martín, 2008). La educación, por lo tanto, deberá enfocarse en asegurar la posibilidad de las personas para afrontar los desafíos del siglo XXI. La necesidad de crear capital humano de alta calidad ha llevado a los educadores a reconocer que las habilidades básicas de lectura, escritura y aritmética no son suficientes para los alumnos cuando terminan la escuela (Husin et al, 2016).

Esta caracterización de la sociedad actual lleva a cuestionarse sobre las habilidades que las personas deben desarrollar para enfrentar la competencia global, de tal manera, que su organización pueda ser más eficiente. El reconocer la complejidad del perfil de la fuerza laboral, lleva a un segundo cuestionamiento, los enfoques y estrategias de aprendizaje en las instituciones académicas que puedan privilegiar el logro de ese perfil.

De acuerdo con Esteve y Gisbert (2013), la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) en el año 1999, considerando los nuevos retos que establece la sociedad, lleva a cabo un análisis sobre los niveles de las destrezas de la sociedad para definir las competencias para el siglo XXI. Además, en 2006, la Unión Europea se da a la tarea de proponer el desarrollo de competencias claves para el aprendizaje continuo.

Un estudio realizado por Jang (2016), que tuvo como finalidad identificar las competencias importantes de ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM por sus siglas en inglés) del siglo XXI utilizando datos del lugar de trabajo y considerarlos en el contexto de los marcos actuales, categorizó en cinco dominios de competencias, 52 habilidades, tipos de conocimiento y actividades laborales. Estos dominios fueron: habilidades de resolución de problemas, habilidades de comunicación social, tecnología e ingeniería, habilidades del sistema, y de tiempo, recursos y gestión del conocimiento.

Este investigador afirma que, de las habilidades categorizadas en los cinco dominios de competencias, que son necesarias desarrollar por alumnos que ingresan a carreras de STEM, destacan en orden de importancia: pensamiento crítico, comprensión de lectura, escucha activa, conversación, solución de problemas complejos, juicio y toma de decisiones, redacción, monitoreo, aprendizaje activo, gestión del tiempo, coordinación, análisis del sistema, matemáticas, percepción social, evaluación de sistemas, instrucción, ciencia y estrategias de aprendizaje.

Otra visión sobre las habilidades de la educación para el siglo XXI es el modelo norteamericano *Framework for 21st Century Learning* desarrollado por el Partnership for 21st Century Skills (P21). Define una serie de habilidades esenciales para este nuevo siglo como la creatividad, el pensamiento crítico, la flexibilidad, la iniciativa, la productividad o las habilidades tecnológicas, informacionales y multimedia. De acuerdo con Holzer (2012), el mercado laboral norteamericano sigue ofreciendo buenos empleos, sin embargo, éstos se enfocan más a aquellos que han desarrollado buenas habilidades generales y específicas de su área.

1.3.2 La visión STEM y la formación de ingenieros

El término "educación STEM" se refiere a la enseñanza y el aprendizaje en los campos de la ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (Kennedy y Odell, 2014; Hernández et al, 2013). El origen de este término se adjudica a Judith Ramaley, quien desarrolló un currículo en el cual la ciencia y las matemáticas eran como estrategias, también llamados "sujeta-libros", para la tecnología y la ingeniería (Bell, 2016).

Por lo general, la educación STEM es considerada sólo ciencia y matemática, sin embargo, una verdadera educación STEM debería tener avances en ingeniería y tecnología al aumentar la síntesis cognitiva de los alumnos debido a la ciencia y las matemáticas y su naturaleza dependiente (Hernández et al, 2014). Esta formación, a través de las cuatro disciplinas, permite reunir a la investigación científica que formula una pregunta que es respondida a través de la indagación y, el diseño de ingeniería que implica la formulación de un problema que puede resolverse construyendo y evaluando posterior a la etapa del diseño (Kennedy y Odell, 2014).

De acuerdo con Bybee (2012), una acepción más amplia, es la alfabetización STEM, que se refiere a la persona y sus:

- Conocimientos, actitudes y habilidades para identificar preguntas y problemas en situaciones de la vida, explicar el mundo natural y diseñado, y obtener conclusiones basadas en evidencia sobre cuestiones relacionadas con STEM.
- Comprensión de los rasgos característicos de las disciplinas STEM como formas de conocimiento humano, investigación y diseño;
- Conciencia de cómo las disciplinas STEM moldean nuestros entornos materiales, intelectuales y culturales; y
- Disposición para participar en cuestiones relacionadas con STEM y con las ideas de la ciencia, la tecnología, la ingeniería y las matemáticas como un ciudadano constructivo, preocupado y reflexivo ". (p. 10 – 11).

El acrónimo STEM fue acuñado en los Estados Unidos durante la década de 1990 por la National Science Foundation (English, 2016). Alrededor de diez años atrás, la educación STEM se ha convertido en un tema mundial debido a las expectativas de

escasez de empleados y educadores preparados en STEM (Kennedy y Odell, 2014). La preocupación en el avance en la enseñanza y el aprendizaje en la educación STEM se debe a que ésta es considerada como un factor clave para enfrentar los desafíos sociales y económicos en los países en desarrollo, las economías emergentes y en economías avanzadas como Europa y los Estados Unidos (English, 2016).

Sithole et al. (2017) afirma que a pesar de que esta época actual está caracterizada por grandes avances científicos y tecnológicos, los mismos usuarios que disfrutaban de una gran cantidad de productos tecnológicos no están interesados en trabajos en campos técnicos que requieren habilidades STEM y que son muy abundantes y altamente remunerados. Estos investigadores aseguran que se espera que los empleos STEM en Estados Unidos aumenten un 8.7% en el periodo comprendido entre 2010 y 2020, existiendo alrededor de 600,000 puestos técnicos en sectores de manufacturas vacantes por la escasez de candidatos aptos en habilidades STEM; además de las expectativas de aumentar a dos millones de puestos abiertos por la escasez de mano de obra calificada.

Sithole et al. (2017) reconocen que, a pesar de que los programas STEM han favorecido a los medios de vida diarios, el interés de los alumnos hacia las ciencias es muy bajo. Un ejemplo claro es que sólo el 3% de los estudiantes que ingresan a áreas STEM lo hacen en las ciencias físicas. Además, la deserción de carreras relacionadas con STEM es muy alto y, el rendimiento académico y el éxito universitario general de los estudiantes de Estados Unidos resultó ser menor en comparación con los de Australia, China, Inglaterra, Japón y Rusia.

Hoy en día la sociedad reconoce la necesidad de mejorar la educación STEM y de introducir conceptos de diseño de ingeniería en grados escolares antes de la universidad.

También está de acuerdo en que las cuatro disciplinas STEM no deben tratarse desde un enfoque de silos y, que la ingeniería puede llegar a ser motivador para integrar las disciplinas (Hynes, 2011).

De acuerdo con English y King (2015), el diseño de ingeniería se ha convertido en gran interés debido a que puede mejorar las habilidades y las disposiciones de los estudiantes para resolver problemas complejos del mundo real. La importancia del diseño de ingeniería se destaca debido a que es considerado necesario para una sociedad alfabetizada que puede abordar con eficacia los problemas de importancia local, nacional y mundial. Las investigadoras consideran que, dada la importancia al desarrollo de estos procesos de diseño, éstos deben comenzar en el nivel de jardín de niños. Afirman que, aunque los procesos de diseño son complejos, las investigaciones realizadas demuestran que los niños pequeños tienen una capacidad emergente para emprender un trabajo de diseño simple como imaginar, planificar, construir y evaluar.

Hynes et al (2011) trabajaron con el Departamento de Educación del Estado de Massachusetts (el primer estado en adoptar educación de ingeniería en todos los niveles en las escuelas públicas) para realizar un documento de diseño de ingeniería que describe una progresión de aprendizaje para el proceso de diseño de ingeniería (PDI), desde el jardín de infantes hasta la preparatoria.

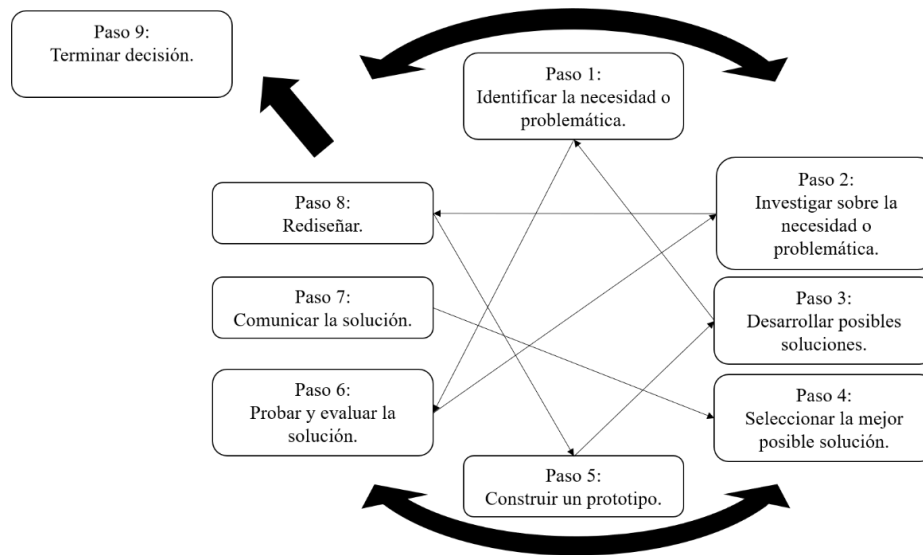
Los investigadores afirman que el propósito de introducir a los alumnos al PDI es que este proceso enseñe a los alumnos que la ingeniería trata de organizar los pensamientos para mejorar la toma de decisiones con el fin de desarrollar soluciones de alta calidad y / o productos a los problemas. Por lo tanto, las tareas de diseño implican desarrollar los tipos de habilidades de pensamiento crítico comúnmente asociadas con la

ingeniería y la alfabetización tecnológica.

El proceso de diseño de ingeniería implica un proceso cíclico y gradual, de tal manera que la tarea puede necesitar algunos saltos de un paso a otro. En la Figura 12 se muestra el proceso de diseño de ingeniería diseñado por Hynes et al (2011).

Figura 12

Proceso de diseño de ingeniería. Hynes et al (2016, p. 9)



Los estudiantes pueden descubrir que no se basa en un pensamiento rígido sino creativo, aplicando de manera práctica el conocimiento de las matemáticas y de la ciencia. La finalidad no es simplemente construir cosas, sino, en palabras de Hynes et al (2011): “es un proceso a través del cual se diseñan las estructuras, a través de las cuales son necesarias una clara identificación y definición de la necesidad o problema, investigación, planificación e intercambio de ideas, pruebas y evaluación, y comunicación” (p. 8).

1.3.3 Hacia una visión integrada

Debido a que la integración STEM se relaciona con el medio para que los estudiantes puedan ser competitivos en la economía global, ésta se ha vuelto popular (Shernoff, Sinha, Bressler y Ginsburg, 2017). No obstante, lograr un enfoque integrado es una tarea compleja y, por lo tanto, desafiante (Vásquez, 2014). Por otro lado, la investigación sobre este enfoque de integración de disciplinas se encuentra apenas en sus inicios y se enfrenta a con problemas diversos, especialmente en los primeros grados escolares. Algunos de estos problemas tienen que ver con la falta de una comprensión unificada y explícita de lo que implica y falta de conocimiento de los docentes para trabajar desde ese enfoque (English y King, 2015).

Bell (2016) afirma que, a pesar de que la colaboración interdisciplinaria en el ámbito de la enseñanza tiene tiempo, en la mayoría de las veces se ha optado por un enfoque “silo” en la oferta de cursos STEM individuales con poca o nula integración de las disciplinas.

Según Hernández et al. (2014), las experiencias auténticas del mundo real son indispensables en un enfoque integrado de la educación STEM para estudiar cómo funcionan las cosas y cómo se crean las tecnologías, ya que éstas, están relacionadas en la resolución de problemas, la innovación y el diseño. A partir de la experiencia de la interacción con el mundo real, los alumnos, estarán más motivados para involucrarse y desarrollar habilidades en el ámbito de la ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (Bell, 2016).

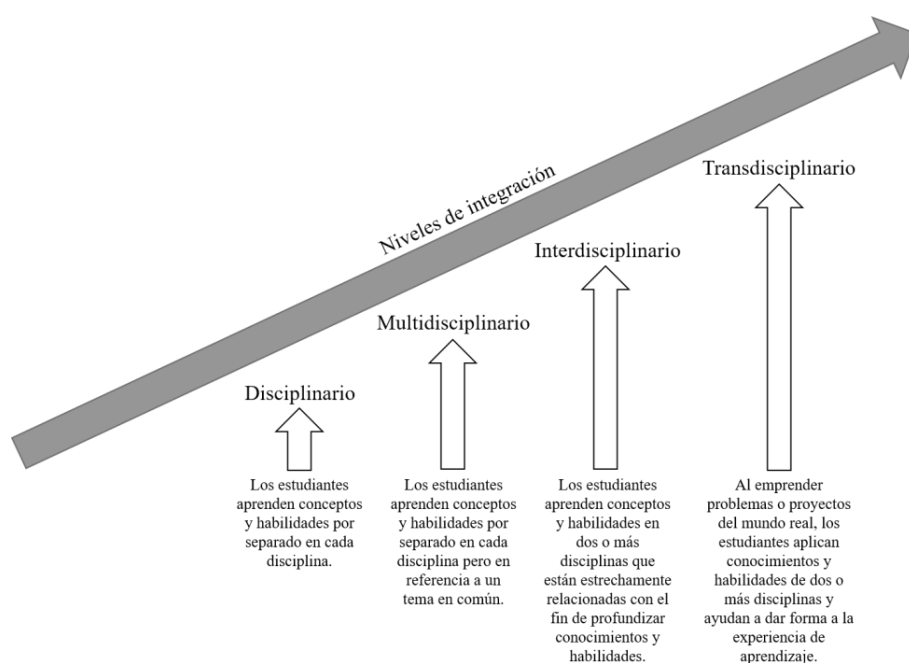
De acuerdo con English (2016), la educación STEM se ha entendido y definido

desde diferentes enfoques, los cuales van desde los enfoques disciplinarios hasta llegar a enfoques representativos de una educación STEM integrada como los son los enfoques transdisciplinarios. Vásquez afirma que esta educación transdisciplinaria, aunque aparece con regularidad en la literatura por relacionarla con el aprendizaje basado en proyectos, es la más ambiciosa y difícil de implementar.

La investigadora reconoce que, algunas de las razones de la dificultad para la implementación de la educación transdisciplinaria STEM son que es necesario una planeación cuidadosa, tiempo y colaboración para implementarla en el salón de clases. No obstante, los profesores en niveles elementales pueden iniciar a los estudiantes en la experiencia de la educación STEM desde otros niveles de integración. En la Figura 13, se muestra los diferentes niveles de la integración de la educación STEM.

Figura 13

El plano inclinado de la integración de STEM (Vásquez, 2014, p.13)



Vásquez (2014) presenta a la integración de STEM como un plano inclinado donde ésta se va dando más plenamente al ir ascendiendo por el mismo. En el primer enfoque, los alumnos aprenden el contenido y habilidades de las diferentes disciplinas en clases individuales. En el segundo enfoque llamado multidisciplinario, los profesores siguen enseñando los contenidos y habilidades en clases separadas, pero trabajan a partir de un tema común.

En el enfoque interdisciplinario, los docentes planean el programa en función de aprendizajes en común por lo que los contenidos y aprendizajes disciplinares se interconectan. Finalmente, en el enfoque transdisciplinario los contenidos y aprendizajes se vuelven interconectados e interdependientes. Los alumnos, a partir del reconocimiento de una situación o necesidad de la vida real trabajan en todas las disciplinas para llegar a una solución. Los alumnos estarán aplicando habilidades de matemáticas y ciencias como algo natural sin tener que preguntarse si es una o la otra.

Este enfoque transdisciplinario se lleva a cabo a partir de proyectos y, debido a que los problemas o situaciones son de la vida cotidiana, los alumnos se motivan y desarrollan habilidades. La procuración de la motivación de los alumnos debe fomentarse desde edades tempranas para atraer estudiantes a las áreas de ingeniería dada su importancia económica para la sociedad (Bagiati, 2015).

Shernoff et al. (2017) aseguran que la innovación en los ámbitos de STEM, además de generar crecimiento económico, también mejora el nivel de la calidad de vida. Los investigadores afirman que, en Estados Unidos el 38 % de los estudiantes de STEM no se gradúan con un grado STEM y, de aquellos que sí lo hicieron, el 43% no trabajarán en una ocupación STEM. Concluyen que, tomando en cuenta la escasez de alumnos en

educación STEM y que los desafíos globales estarán relacionados con la energía, la salud y el medio ambiente, es preponderante en encaminarse hacia una educación STEM a través de un enfoque transdisciplinario y desde los primeros años escolares.

Durante el panel de expertos realizado durante la jornada académica de trabajo conjunto Asociación Iberoamericana de Instituciones de Enseñanza de la Ingeniería (ASIBEI, 2014), el ingeniero Miguel Ángel Álvarez, Secretario General de ANFEI afirmó que las problemáticas a las que México y los demás países se enfrentan son la energía, alimentación, medio ambiente y movilidad. Además, destacó el serio problema de deserción en la formación de nuevos ingenieros, hasta un 43%, que experimenta el país provocado por la falta de vocación hacia la ingeniería y por el bajo nivel de formación previa.

Un ejemplo de lo anterior se observa en la declaración en una entrevista con El Universal (2017) y el secretario de Educación Superior de la Secretaría de Educación Pública, Salvador Jara Guerrero, quien afirmó que en nuestro país cada año se requieren de treinta mil ingenieros en la industria manufacturera y México sólo puede con una demanda de veinte mil.

En síntesis, los retos mundiales que enfrenta la sociedad llevan consecuentemente, al campo de la educación, a encarar sus propios desafíos. Las instituciones educativas reconocen que ya no es suficiente el desarrollo de habilidades básicas de lectura, escritura y aritmética. Al tener de frente una sociedad globalizada basada en el conocimiento, con cambios tecnológicos constantes, resulta urgente una formación integral en los estudiantes universitarios, especialmente los ingenieros. La complejidad del perfil de la fuerza laboral lleva a los educadores a cuestionarse qué enfoques y estrategias pueden

colaborar a la formación de los estudiantes para lograr ese perfil tan complejo.

Teniendo como panorama retos mundiales complejos, la educación STEM se ha convertido en tema de prioridad. Es un tema tan relevante ya que se observa una escasez de graduados en ámbitos de la ciencia y la tecnología. Por lo tanto, se reconoce y se empieza a trabajar en mejorar la educación STEM, además de implementar este enfoque desde los primeros años escolares. Además, diversas opiniones convergen en que estas disciplinas como la ciencia, la tecnología, la ingeniería y las matemáticas deben de tratarse desde un enfoque integrador. Este enfoque integrador se basa en la colaboración interdisciplinaria de la enseñanza interrelacionado las diferentes disciplinas para solucionar problemas, los cuales deben auténticas experiencias del mundo real.

La Educación STEM, nos lleva a reflexionar sobre la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en el campo educativo, especialmente en la ingeniería; y cómo mejorar esa disciplina que los futuros ingenieros requieren para su área de trabajo (Rodríguez, 2017).

Por lo general en la actualidad, los cursos de Ecuaciones Diferenciales ofrecen una serie de procedimientos analíticos que se encamina a solucionar problemas o situaciones sin contexto o muy lejos de la realidad, por lo que los estudiantes alcanzas aprendizajes parciales o memorísticos que no contribuyen a la formación integral de estos futuros profesionistas (Rodríguez y Quiroz, 2016). En esta situación, las conexiones entre una ecuación diferencial, lo que representan físicamente y su solución no son significativas para el estudiante debido a que el tema es complejo, se basa en el cálculo, el álgebra, la trigonometría y otros temas más; además, existe una gran variedad de soluciones a estudiar (Cozcher, 2017).

Una preocupación dentro de la problemática de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es la transferibilidad de lo que se aprende y se conoce de un ambiente a otro, existe una muy importante diferencia entre la naturaleza del papel de las matemáticas dentro del aula y el entorno laboral. En la escuela, las Matemáticas es el objeto de estudio y en el trabajo es una herramienta que ayuda al logro de un resultado productivos (Wake, 2014). El nuevo perfil del futuro ingeniero requiere de conocimientos disciplinares, pero también de habilidades que le permitan hacer uso de éstos en diferentes ambientes en la vida real (Rodríguez y Quiroz, 2016).

Para lograr esa conexión entre las Matemáticas y la vida cotidiana, cada vez se hace uso de la Modelación Matemática como estrategia enseñanza aprendizaje en los programas de ingeniería logrando que los estudiantes puedan alcanzar una mayor comprensión de los fenómenos o procesos de ingeniería (Plaza 2016).

Específicamente, la institución donde se llevará a cabo el estudio ofrece cursos de Ecuaciones Diferenciales donde se busca desarrollar aprendizajes en los alumnos para relacionar las Matemáticas, el mundo real en todos los ámbitos, desde lo cotidiano hasta lo laboral. A través de la modelación matemática se fomenta la educación STEM que es hoy en día el objetivo de las instituciones educativas.

1.4 Uso de tecnología en la modelación matemática

En la actualidad la enseñanza de las matemáticas experimenta el surgimiento de nuevas tecnologías que pueden ser implementadas en las clases de tal manera que lleve a crear ambientes de aprendizaje en los cuales las matemáticas sean más funcionales y

experimentales (Zaldívar, Londoño y Medina, 2017). Con el gran desarrollo de la información y la tecnología, las sociedades esperan que los profesores de matemáticas puedan desarrollar en los alumnos la capacidad de llevar a cabo soluciones efectivas (Arseven, 2015).

Los métodos y estrategias utilizados en las aulas, por un lado, deberán proporcionar a los estudiantes la tecnología para su vida laboral y, por otro lado, deberán proporcionar destrezas matemáticas que lleven a los alumnos a enfrentar situaciones complejas de la vida real encontrando soluciones prácticas para resolver estos problemas cotidianos (Dundar, Gokkurtb y Soyluc, 2012). La estrategia de modelación matemática es relevante, ya que, al relacionar el mundo real con el mundo de las matemáticas, puede estimular el proceso de aprendizaje y propiciar el establecimiento de habilidades cognitivas sobre las cuales el estudiante puede construir matemática (Morales, Mena, Vera y Rivera, 2012).

El modelado ofrece un sentido a los conceptos matemáticos facilitando al alumno el poder responder “para qué sirve” y, al incluir el uso de tecnología, el aprendizaje significativo puede ser mayor (Roumieu, 2014). Diversos estudios ofrecen evidencia de las ventajas del uso de tecnología en la modelación matemática (Molina-Toro, Rendón-Mesa y Villa-Ochoa; 2019; Rodríguez y Quiroz, 2016a; Rodríguez y Quiroz, 2016b), en la siguiente sección se discute sobre la modelación matemática y el uso de tecnología.

1.4.1 La importancia en estudios previos sobre modelación y tecnología

Daher y Shahbari (2015) afirman que la modelación matemática ofrece una gran diversidad de aprendizajes a los estudiantes ya que los implica en procesos sociales, matemáticos y de comunicación, motivándolos a aprender matemáticas. Más aún, aseguran que debido a que la tecnología y las herramientas tecnológicas desarrollan en los alumnos la capacidad de visualización, organización y solución de problemas; las posibilidades de aprendizaje se potencializan.

Molina-Mora (2017) en su artículo presenta una estrategia didáctica basada en la introducción de la modelación matemática y el uso de software especializado para la creación y manipulación de los modelos matemáticos en un curso de cálculo II con alumnos de ingeniería y ciencias de la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica. La decisión de implementar dicha estrategia se debió a que los estudiantes se quejaban sobre la imposibilidad de aplicar los contenidos del curso a situaciones de la vida real y profesional.

El resultado de la aplicación de la estrategia didáctica con la evaluación de la opinión de los alumnos y profesores al final del curso mostraron altos niveles de satisfacción. Una evaluación preliminar junto a la evaluación de contenidos mostró que el 82% de estudiantes describió que su interés y motivación en el curso había aumentado, un 6% que el interés se mantenía igual y el restante 12% que había disminuido.

Además, para contar con una descripción más detallada, al término del curso, se aplicó un cuestionario para evaluar diferentes parámetros. Las preguntas consideradas incluyeron aspectos de conocimientos previos, la relación de los problemas y el contexto

real, el potencial para la comprensión de conceptos del curso, uso de las TIC, aplicaciones en el área académica, asesoría en el desarrollo de modelos, los contenidos aplicados y sus dificultades; así como la congruencia con la evaluación y el potencial para servir como eje motivador.

En otro estudio realizado por Hidiroglu y Bukova (2017), se encontró que la tecnología tuvo un gran efecto en el proceso de modelado. La tecnología facilitó que el proceso de resolución fuera integral permitiendo diferentes estrategias. Las vistas algebraicas y geométricas de GeoGebra se utilizaron activamente proporcionando representaciones gráficas de los modelos matemáticos. La tecnología evitó abrumar el proceso en las operaciones difíciles debido a que los datos del problema de modelación tienen una estructura compleja por ser reales y, proporcionó un entorno rico para examinar los comportamientos y tendencias del modelo matemático que se construyó.

La investigación se llevó a cabo con siete grupos formados a partir diecinueve futuros maestros de matemáticas. La información recabada fue a través de las grabaciones de las soluciones de los participantes relacionados con los tres problemas de modelado matemático, sus hojas de trabajo, los archivos de solución GeoGebra y las notas observación de los investigadores.

En el estudio, se examinaron las propiedades de las etapas y subetapas del proceso de modelado matemático revelando los componentes del proceso de modelado matemático asistido por tecnología. La tecnología, en la mayoría del proceso, dio lugar a un proceso integral al mostrar diferentes estrategias, enfoques y habilidades. Las visiones algebraicas y geométricas de GeoGebra se utilizaron activamente durante todo el proceso. Con respecto a la modelación matemática, los investigadores consideran que las

animaciones, videos e imágenes desempeñaron un papel efectivo en la solución y concluyeron que GeoGebra llevó a cabo un papel importante a través de la activación de las habilidades matemáticas en el proceso de modelado.

Fisher (2017) afirma que además de la representación simbólica que se utiliza en la actualidad para estudiar problemas en álgebra, se puede utilizar nuevas tecnologías ya que éstas pueden ofrecer representaciones más visuales permitiendo que los conceptos algebraicos sean comprensibles a más alumnos.

A partir de la implementación de la tecnología en sus clases, un software llamado Stella, la investigadora evidencia que los alumnos pueden representar y analizar problemas que normalmente no hubieran podido lograr si trabajaran con enfoques tradicionales de ecuaciones de forma cerrada. Más aún, asegura que los estudiantes en estas clases construyeron modelos cada vez más complejos para estudiar la propagación de epidemias, la dinámica de la oferta y la demanda, el crecimiento de las ciudades y el empleo, y más.

Para finalizar el curso los alumnos eligieron un tema, algunos de las noticias o de otra clase que estaban tomando. Construyeron un modelo funcional, escribieron un documento técnico explicando su modelo e hicieron una presentación. Tuvieron la oportunidad de estudiar problemas que por lo general no incluían sus clases de matemáticas y de ciencias. Muchos de ellos lograron un trabajo interdisciplinario al relacionar su tema en diferentes clases llegando a realizar aplicaciones que se llevan a cabo en cursos de niveles posteriores.

En conclusión y de acuerdo con los hallazgos de estos investigadores se puede observar la excelente sinergia que se produce al combinar la modelación matemática y el

uso de la tecnología. Esto se traduce a una variedad de aprendizajes que llevan a relacionar el mundo real con el mundo matemático, a buscar alternativas de soluciones y llegar a la comprensión de situaciones complejas de la vida cotidiana.

1.4.2 Experimentación y uso de sensores en ciencias

La investigación en ciencias exactas y sociales se ha beneficiado de la disponibilidad de información obtenida a partir del análisis de datos gracias al desarrollo de la tecnología en los últimos cincuenta años (Morales y Salas, 2010). Este desarrollo en la tecnología ha permitido la experimentación en el aula facilitando la comprensión de los fenómenos físicos y transformando las matemáticas en una disciplina empírica (Rodríguez y Quiroz, 2016).

De acuerdo con Morales y Salas (2010), hoy en día, se vive el cambio constante en el conocimiento y, por consiguiente, se encaminan esfuerzos para plantear modelos que puedan explicar, con la mayor exactitud posible, lo que ocurre en los fenómenos naturales o situaciones que surgen en lo cotidiano. Por lo tanto, el profesional deberá contar con la habilidad de ser crítico y poder solucionar problemas para enfrentar los retos de la sociedad del conocimiento. Rodríguez y Quiroz (2016) establecen que la experimentación en el aula, basada en la modelación matemática juega un papel relevante en el proceso de dotar de significado a los alumnos sobre las nociones matemáticas.

Molina (2015, p. 49) establece la importancia del uso de la estrategia de modelación matemática, el aprendizaje por proyectos y la tecnología y enlista una serie

de ventajas, tales como:

- El desarrollo de competencias, tanto con sus pares como con el profesor, al tener un dominio claro a un problema específico de su área de estudio.
- Mejoramiento de las destrezas para indagar su entorno, o investigación.
- Incrementar las habilidades mentales y tomar decisiones al desarrollar la propuesta
- Fortalecer su conocimiento en las herramientas específicas de TIC
- Desarrollar el pensamiento crítico, autocrítico y la evaluación de sus implementaciones y de otros.
- Compromiso con lo que hacen, al trabajar en pequeños grupos y con estudiantes de carreras afines.
- Extiende el concepto de “enseñanza por resolución de problemas” a un conjunto más general y de aplicación en la vida real.
- Favorece la comprensión de conceptos abstractos a partir de casos particulares; y permite reforzar conocimientos previos y conectarlos con los nuevos.

Los avances en el poder de cálculo de la computadora, ha permitido que la enseñanza de las matemáticas en cursos como Ecuaciones Diferenciales desarrolle una metodología con la cual se puede experimentar y comprobar (Morales y Salas, 2010). Un ejemplo es el estudio de Rodríguez (2016) en el cual se utilizó la estrategia de modelación matemática a partir de una secuencia de actividades basada en el contexto de Circuitos Eléctricos. Este contexto permite a los alumnos comprender la manera de utilizar el método de Ecuaciones Diferenciales Lineales y el funcionamiento de un Circuito Eléctrico y a partir del trabajo colaborativo los puntos que no se comprendían por algunos alumnos, fueron aclarados por sus compañeros.

El uso de tecnología como la calculadora graficadora y un sensor de voltaje permitieron a los estudiantes la visualización de las gráficas de carga y descarga de los capacitadores de la experimentación. Esta visualización llevó a los alumnos a la reflexión, de tal manera que, pudieron vincular el modelo físico (del mundo real) con el planteamiento del modelo matemático (mundo de las matemáticas).

La conclusión de Rodríguez (2016) es que la tecnología elegida correctamente y aplicada en el proceso de modelación es importante, y en ocasiones indispensable, para que los alumnos puedan relacionar los pasos de la modelación. Además, la tecnología puede ser muy motivadora en el momento que los estudiantes descubrieron que podían manipular de manera intuitiva y con facilidad la calculadora y el sensor.

Además de ofrecer al estudiante conocimientos, habilidades y destrezas para manejar alguna técnica, en una práctica de laboratorio en la cual se utilizan sensores, también puede aplicar los conceptos e interpretar matemáticamente los resultados utilizando instrumentos con datos reales (Lagos y Camus, 2016). Si el alumno entiende el funcionamiento básico de un sensor, podrá aplicar cualquier configuración parecida, ya que además de integrar conocimientos de diferentes áreas, estará ingresando al mundo instrumental computacional.

1.4.3 Simulación

La manera en que los alumnos aprenden matemáticas ha cambiado de manera significativa debido al uso de la tecnología ya que los ambientes computacionales que pueden utilizar permiten que los estudiantes puedan identificar, inspeccionar y comunicar

diferentes ideas matemáticas (Gamboa, 2007). Se han convertido en herramientas indispensables para la enseñanza de conceptos matemáticos y científicos, los modelos, simulaciones y visualizaciones mediados por TIC (Roa, 2013).

La Real Academia Española (2020) establece que simular es representar algo, fingiendo o imitando lo que no es. Zavalani y Kacani (2012, p.1) afirman que, en ingeniería, por lo general se refiere “al proceso de representar el comportamiento dinámico de un sistema "real" en términos del comportamiento de un sistema de modelo idealizado y más manejable implementado a través de un simulador de software”. Estos investigadores consideran que la modelación y la simulación pueden llegar a ser, en ocasiones, la única forma efectiva para resolver problemas de ingeniería complejos.

Al presentarse la necesidad de ver alternativas de operación en cierta situación problemática, la simulación es una buena estrategia didáctico-tecnológica para sustituir o ampliar las experiencias reales reproduciendo interactivamente situaciones del mundo real. Cuando se utiliza a la simulación en educación superior como una estrategia didáctica, permite la experimentación y desarrollo de habilidades en los estudiantes ya que se acercan a contextos similares llevando a la comprensión del conocimiento en situaciones prácticas.

Una de las funciones de los simuladores en educación, es apoyar a los profesores en la transferencia de conocimiento de sus alumnos. Los simuladores se convierten en un procedimiento para crear conceptos y construir conocimiento que será aplicado en otros contextos a los cuales no puede acceder (Contreras, García y Ramírez, 2010). El reto del uso de simuladores es permitir la creación de ambientes educativos mediante prácticos

recursos hardware y software, configurados con criterios de tecnología apropiada, para cumplir objetivos como:

- Facilitar en el proceso de enseñanza-aprendizaje habilidades a los estudiantes de tal forma que sean compatibles con el entorno de trabajo, en la realización de proyectos de investigación orientados a la realidad.
- El docente moderno experimenta miles de formas para lograr una comunicación efectiva maestro-máquina-estudiante, mediante interfaces visualizadas gráficamente por el cerebro.
- Poseer medios de autoaprendizaje y estrategias de automotivación, para que los estudiantes encuentren por sí mismos las respuestas a los cuestionarios que surgen del autoestudio.
- Crear comunicación estudiante-maestro y estudiante-estudiante a través de la simulación interactiva para lograr una retroalimentación que enriquezca y complete el proceso educativo.
- Disponer de flexibilidad en los horarios de trabajo educativo, por medio de prácticas libres con el uso de los simuladores. (Contreras y Carreño, 2012, p. 112)

De acuerdo con Cabero-Almenara y Costas (2016), la simulación como apoyo en la enseñanza tiene numerosas ventajas. Entre estas ventajas se puede hablar de favorecer el aprendizaje por descubrimiento por lo que lleva al estudiante a una participación activa y al autoaprendizaje; el alumno puede reproducir la experiencia una gran cantidad de veces con el mismo control de variables, lo encamina a reaccionar tal como lo haría en el mundo laboral, fomenta la creatividad y la motivación, entre otras cosas.

La Fundación Nacional de la Ciencia (2006, p. 33) establece que:

El objetivo final de la simulación es predecir eventos físicos o los comportamientos de los sistemas de ingeniería. Las predicciones son la base de las decisiones de ingeniería, son el factor determinante en el diseño del producto o del sistema, son la base del descubrimiento científico y son la razón principal por la que la ciencia computacional puede proyectarse más allá del campo de los experimentos físicos y las observaciones.

Como se puede observar, la tecnología puede ser de gran ayuda en la formación de los alumnos facilitando la enseñanza y aprendizaje de conocimiento científico y su aplicación. Además, en el ámbito laboral, facilita la solución de problemas y situaciones necesarias para enfrentar los retos actuales y lograr el desarrollo común.

Específicamente para esta investigación, se utilizó la herramienta tecnológica de simulación llamada Vensim. Este simulador es una herramienta visual de modelaje que permite conceptualizar, documentar, simular, analizar y optimizar modelos de dinámica de sistemas. Permite la construcción de modelos de simulación con lazos causales o diagramas de stock y de flujo.

A través de palabras con flechas, las relaciones entre variables del sistema son ingresadas y registradas como conexiones causales. Esta información es usada por el editor de ecuaciones para ayudarlo a completar el modelo de simulación. De esta manera se puede analizar el modelo siguiendo el proceso de construcción, mirando las causas y el uso de las variables y también siguiendo los lazos relacionados con una variable. El simulador permite comparar los resultados de distintos experimentos, superponer gráficos de distintas variables, cambiar escalas, etc.

El uso de la herramienta Vensim permitió a los estudiantes crear sus propios simuladores desde cero y probar la pregunta: ¿qué pasaría si...? Para crear la simulación necesita comprender la situación problema que está detrás y así, representarlo en el simulador. Esto permite realizar observaciones donde el alumno desarrolla habilidades que son la base del estudio.

1.4.4 Aprendizaje basado en retos como estrategia para el aprendizaje activo

Actualmente la evolución de la tecnología ha dado como resultado una cantidad de información disponible en diferentes formatos de medios. La diversidad con la que se adquiere esta información y la manera en que los estudiantes están inmersos en estas tecnologías, claramente ha obligado a que se analicen los enfoques de instrucción tradicionales (Quweider y Khan 2016).

Los profesores de ingeniería tienen el cometido de formar a los alumnos para aplicar los conocimientos fundamentales para la solución de problemas complejos y diversos en su disciplina y, aún y cuando hay diferentes posturas sobre las estrategias de enseñanza, el interés por que los estudiantes se formen para llegar a resoluciones innovadoras de problemas es un consenso ya que se considera esencial en la profesión (Clegg y Diller, 20018).

Una estrategia educativa que se está incorporando a campos de estudio como la ciencia y la ingeniería es el Aprendizaje Basado en Retos, ésta se centra en que el aprendizaje debe implicar trabajar en un tema en lugar de leer sobre el tema de estudio (Hung y Lai, 2010). De acuerdo con Clegg y Diller (2018), la resolución de problemas es

primordial en contextos de ingeniería genuinos, por ello, la implementación del aprendizaje basado en retos es considerado como una estrategia muy adecuada. Esta estrategia plantea una pregunta compleja donde los alumnos deben recurrir a sus conocimientos previos y otros recursos como experiencia de vida, libros de texto, asesores, profesores, para llegar a una solución adecuada.

Brophy (2016) afirma, que cuando los estudiantes trabajan en prácticas de diseño auténticas, al trabajar desde la estrategia de aprendizaje basado en retos, logran una experiencia similar, pero desde diferentes perspectivas. Los alumnos se involucran en desafíos complejos que requiere que todos los miembros participen y asuman diferentes roles, además, el problema es tan abierto que genera variaciones en el tema. Esta estrategia prepara a los estudiantes para enfrentar problemas que encontrarán en el ámbito laboral, para desarrollar el trabajo colaborativo y enseña cómo colaborar en temas relevantes (Hungy Lai, 2010).

En relación con el reporte Edu trends (2015), el Aprendizaje Basado en Retos (ABR) tiene como principio que los estudiantes mejoran su aprendizaje cuando participan activamente en experiencias abiertas de formación y tiene su origen en dos instituciones: Apple y el Centro de Investigación en Ingeniería VaNTH ERC (Fidalgo, Sein-Echaluce y García-Peñalvo, 2017).

Apple implementó un proyecto a través de sus educadores en el cual se aplicó un método en el cual los alumnos y profesores trabajaban como colaboradores activos en el proceso de aprendizaje, se hacían uso de habilidades técnicas y laborales y, además del producto final, se enfocaban en el proceso desarrollado mediante la reflexión continua y la publicación de perspectivas sobre su aprendizaje (Santos, Sales, Fernandes y Nichols,

2015).

Según Kastner, Torsella y Kukreti (2014), esta metodología de aprendizaje basado en retos propuesta por Apple se define como un proceso que comienza con una gran idea que estará vinculada a un objetivo de aprendizaje o estándar académico a partir de la cual los estudiantes comenzarán a establecer preguntas esenciales. Se selecciona una de las preguntas la cual se formulará como un reto que podrá relacionar con un tema de clase.

A partir del reto establecido, a los estudiantes se les pide que construyan, diseñen, prueben, modelen un problema del mundo real. Para iniciar el proceso, los estudiantes deberán formar un grupo de preguntas guías que los llevarán a unidades y actividades específicas a realizar en el aula para poder responder dichas preguntas.

El profesor se convierte en un facilitador durante el proceso interviniendo para que el reto y las preguntas guías se mantengan en línea con el curso o los objetivos de aprendizaje. En la Tabla 10 se muestra y explican las fases del ABR según Apple.

El reporte de Edu trends (2015) afirma que el Centro de Investigación en Ingeniería VaNTH ERC implementó un método que llamó Challenge Based Instruction (CBI, por sus siglas en inglés), éste es un conjunto de innovaciones educativas con dos pilares:

- a) Un marco de referencia llamado How People Learn, integrando el aprendizaje centrado en el estudiante, en el conocimiento, en la evaluación y en la comunidad; y
- b) diseño de instruccional llamado Software Technology Action Reflection Legacy Cycle.

Este ciclo pretende que el alumno, de manera colaborativa, solucione un problema a través de las fases de reto, generación de ideas, aportación de visiones, investigación, prueba de la destreza y publicación de soluciones.

Tabla 10*Fases del Aprendizaje Basado en Retos de Apple (2015, p. 3)*

Fases	Descripción
Gran Idea	Un concepto amplio que puede explorarse de múltiples maneras es atractivo y tiene importancia para los estudiantes y la sociedad en general.
Pregunta esencial	Un proceso de personalización y localización de los conceptos importantes dentro de la gran idea.
Reto	Un llamado a la acción diseñado por profesores y estudiantes para crear una solución que pueda resultar en acciones concretas.
Preguntas orientadoras	Una serie de preguntas desarrolladas por la comunidad de aprendizaje, identificando y representando el conocimiento y las habilidades necesarias para desarrollar una solución exitosa.
Actividades y recursos orientadores	Las actividades y recursos que los alumnos identifican participan y utilizan para responder las preguntas orientadoras.
Análisis	Un proceso para explorar las respuestas a las preguntas orientadoras e identificar temas y conceptos generales. Esto sienta las bases para las soluciones.
Solución	Una idea concreta, accionable y claramente articulada para resolver el desafío. Los desafíos complicados a menudo tendrán múltiples soluciones.
Implementación	Esto es cuando las soluciones se ponen en acción con una audiencia auténtica.
Evaluación	Los alumnos evalúan su proceso a través de los resultados de la implementación y refinan su solución.

Este capítulo intenta dar a conocer un panorama amplio sobre las necesidades de enfrentar los desafíos mundiales a partir de la formación de estudiantes universitarios, específicamente de ingeniería. Estas problemáticas llevan al campo de la educación a replantearse sus acciones para la formación efectiva de los alumnos. El gran desafío se centra en trabajar en la formación de estudiantes que, en el futuro, cuando egresen de la universidad, deberán resolver problemas que aún no se han identificado; con metodologías que no se han inventado, con tecnología que aún no se ha desarrollado.

El trabajo de investigación de este estudio se enfoca en la modelación matemática como una estrategia didáctica que pretende desarrollar no solo competencias disciplinares

sino transversales como el pensamiento crítico. Retoma el trabajo previo por Rodríguez (2016) que modifica la enseñanza de las Matemáticas en nivel superior a través de la experimentación en aula de clase de modelación de fenómenos reales.

Tomando en cuenta la importancia de la modelación matemática, la evaluación de este proceso se sitúa como objetivo primordial en el aula de clase. Es necesario observar y reconocer el proceso de los alumnos en las etapas de este ciclo para la mejora y desarrollo de sus habilidades de modelación y su aprendizaje de las matemáticas. De esta manera uno de los objetivos de este estudio es el de aportar el diseño de una rúbrica que articule a la modelación matemática y el pensamiento crítico y demostrar que la modelación puede ayudar a desarrollar la competencia de pensamiento crítico en el aula.

En este capítulo se ha abordado la Modelación Matemática, sus perspectivas teóricas, su importancia y sus sub-competencias, se presenta una revisión de literatura sobre la misma y algunos hallazgos con relación a los estudiantes y profesores que participaron en diferentes investigaciones; además de instrumentos de evaluación de la modelación.

En la sección del Pensamiento Crítico se definió lo que es una competencia transversal, la importancia de la competencia mencionada y algunos instrumentos para su evaluación. Además, la formación de ingenieros se trató desde una visión integrada a través de la perspectiva de STEM. Finalmente, se habló sobre la tecnología como herramienta de apoyo en la formación de futuros ingenieros.

El marco teórico de este capítulo fue base fundamental para responder a la pregunta de investigación a partir del conocimiento de la modelación matemática como estrategia pedagógica, reconociendo su proceso cíclico y sus competencias. En el caso de

la competencia de pensamiento crítico, las habilidades y disposiciones de investigadores como Ennis, Paul, Elder y Facione, establecen la guía para la orientación teórica necesaria para el análisis de los datos que se recolectarán. La educación integrada y el uso de la tecnología revisada en este capítulo enriquecerán la intervención del estudio.

Una vez expuestas todas las vertientes sobre los conceptos y establecido una postura teórica sobre los cuatro conceptos fundamentales de este estudio: la modelación matemática, el pensamiento crítico, la formación de ingenieros y el uso de tecnología, en siguiente capítulo se presentará el planteamiento del problema.

Capítulo 2: Planteamiento del problema

En la actualidad, en este siglo XXI, muchos y muy grandes son los desafíos a los que la sociedad deberá enfrentarse. Uno de estos retos es el crecimiento de la población que da lugar a grandes dificultades en campos como la alimentación, energía, agua y otros más. La ciencia y la tecnología se han considerado como un camino efectivo para encarar estos desafíos, por lo que la formación de ingenieros se convierte en un estado urgente para todos los países.

El interés de esta investigación es abordar el tema de la formación de ingenieros a partir del papel de la disciplina de las Matemáticas, específicamente, la modelación matemática, en los campos de la ciencia y la tecnología y sobre la competencia de pensamiento crítico, considerada como la competencia más importante para la formación de los estudiantes.

Considerando el interés de este estudio, la finalidad de este capítulo es dar a conocer el origen de la problemática que se estudia, cuál es su relevancia y los alcances de la investigación. Este capítulo se estructura en cinco apartados en los cuales se abordan: los antecedentes del problema, su planteamiento, las preguntas de investigación, los objetivos, la justificación y la delimitación del estudio.

2.1 Antecedentes del problema

De acuerdo con los datos presentados por la División de Población del

Departamento de Asuntos Económicos y Sociales de la Secretaría de las Naciones Unidas (UNDESA por sus siglas en inglés), en el 2013 la población mundial llegó a los 7.2 mil millones de habitantes y se espera que para el año 2025 se sumen mil millones más de personas (UNDESA, 2013). Con esta tendencia de crecimiento se puede concluir que muchas serán las dificultades que se deberán enfrentar.

El crecimiento de la población trae consigo retos mundiales como abastecimiento de agua, producción agrícola, el suministro de energía y otros más, que deberán salvarse a partir del desarrollo de la ciencia y la tecnología, por lo que existe un interés latente en la capacidad de la fuerza laboral en el mundo (Kelley y Knowles, 2016).

Es debido a estos desafíos del siglo XXI y la manera en que se considera que se pueden superar, que la formación de ingenieros es de interés y preocupación para la sociedad. El cuestionamiento en el ámbito educativo sobre la formación de los estudiantes, especialmente en ingeniería, se centra en qué dominios y competencias debe desarrollar un alumno de profesional de tal manera que sea exitoso en la vida laboral y pueda, por consiguiente, hacer frente a los retos de la población (Esteve y Gisbert, 2013).

Además del dominio del área de estudio de los alumnos graduados, el ambiente laboral espera que su nivel de desempeño esté en función de habilidades de análisis, solución de problemas y toma de decisiones (Muraski, 2014). Como se puede observar, además de los conocimientos técnicos, podemos inferir que un profesional requiere desarrollar habilidades y actitudes que le permitan participar de manera efectiva en sus actividades laborales.

Hoy en día, el nivel de especialización es muy alto, por lo tanto, el trabajo colaborativo es indispensable en el mundo laboral. Esta habilidad permitirá a los

profesionales un trabajo más robusto y completo. Las aportaciones pueden ser muy valiosas y nutridas de tal manera que los proyectos y trabajos sean exitosos.

También, es imprescindible contar con un buen nivel de la habilidad de comunicación dentro del lugar de trabajo, así como fuera de ella. Al trabajar de manera colaborativa, se requiere de una comunicación efectiva para lograr el éxito en las metas propuestas. Por otro lado, la globalización ha llevado a borrar las barreras físicas y cada vez más, la interacción con personas de otras culturas va en aumento. Podemos afirmar entonces que, la comunicación juega un papel relevante.

Como se ha expuesto, el panorama sobre los desafíos de este siglo XXI, depende de los avances de la ciencia y la tecnología, así como de las innovaciones en estos campos. Sin embargo, en este mismo grado de importancia es que las actitudes los profesionales que enfrenten estos retos globales deberán estar encaminadas a tomar en cuenta temas como la sustentabilidad, cuidado de los recursos, distribución del ingreso, la salud, la ética, la justicia y equidad social y el bienestar común.

La toma de decisiones deberá estar sustentada bajo una evaluación detallada, objetiva, reflexiva que permita hacer juicios de tal manera que las posturas que se adquieran sean en función de las necesidades de la sociedad y no solo de unos cuantos.

2.2 Planteamiento del problema

Frente al gran desarrollo de la información y la tecnología, la sociedad ha cambiado su visión sobre la formación de las personas, especialmente en el ámbito educativo (Arsevan, 2015). De acuerdo con Coskun (2017), el objetivo más importante

de los programas educativos, para toda nación, es procurar el desarrollo de los alumnos de tal manera que puedan acceder, interpretar, procesar y usar el conocimiento. Más aún, afirma que: “aquellas personas que pueden usar sus procesos mentales de manera efectiva y creativa pueden obtener y dar sentido al conocimiento y, por lo tanto, hacer avanzar a su sociedad más que sus contemporáneos” (2017, p. 19).

Las matemáticas son un lenguaje formal que nos permite expresar nuestros pensamientos abstractos (Citlas e Isik, 2014). Hemos visto que, una forma de abrirse a los desarrollos y los cambios en la tecnología y la ciencia es la capacidad de utilizar la técnica matemática y los procesos mentales también. Debido a esto, la sociedad espera que los profesores de matemáticas puedan privilegiar el desarrollo de los alumnos para que sean capaces de lograr soluciones efectivas. Por lo tanto, uno de los retos que los maestros deben encarar es cómo involucrar a los alumnos en la solución de problemas que impliquen sistemas complejos dentro de un contexto interdisciplinario (English, 2009).

Desde hace algunos años, investigadores en el campo escolar han visto la integración de la modelación matemática en la enseñanza de las matemáticas, como una opción para propiciar el pensamiento analítico, la solución de problemas; además de que permite una relación con el uso de tecnologías que son comunes en la sociedad (Kertil y Gurel, 2016).

La modelación matemática puede ser pensada como una herramienta para interpretar información de la realidad, identificar problemas potenciales, establecer modelos matemáticos y considerar la posible existencia de errores en el proceso de la solución matemática, de tal manera que los alumnos pueden mejorar sus modelos

matemáticos y validarlos con la realidad. Este proceso va más allá de la enseñanza tradicional que solo llega a la representación de problemas y soluciones matemáticas (Huang, 2012).

La modelación como estrategia en la enseñanza de las matemáticas, lleva al alumno a relacionar el mundo de la vida real con el mundo matemático, por lo que puede situar al estudiante frente a las problemáticas sociales. Este proceso cíclico pone a trabajar de manera activa a los estudiantes en el desarrollo de habilidades de pensamiento de manera activa a los estudiantes en el desarrollo de habilidades de pensamiento para interpretar la realidad, traducirla a un modelo matemático, resolverlo y validarlo en ese mundo real (Dundar, Gokkurt y Soylu, 2012).

Hoy en día, además del dominio de conocimientos, es necesario que los alumnos aprendan a aplicarlos y desarrollen una actitud reflexiva y crítica ante ellos (Marici, Spijunovic y Lazic, 2016) de tal manera que puedan solucionar problemas de la vida diaria deliberando sobre sus ideas y juicios (Asku y Koruklu, 2015).

Debido a que los problemas en la vida real son complejos, es necesario que los estudiantes, especialmente aquellos en el ámbito de la ingeniería, desarrollen la capacidad de pensar (Osman, Abu, Mohammad y Mokhtar 2016). Además, los retos que la sociedad debe enfrentar en la actualidad, como los continuos cambios tecnológicos y la globalización, exigen de manera integral la formación de ingenieros desde el punto de vista educativo y laboral (Kindelán y Martín, 2008).

Considerando la importancia de la relación entre la estrategia de modelación matemática y la competencia de pensamiento crítico, la finalidad de esta investigación fue dar respuesta a preguntas que permitan plantear una propuesta teórica y metodológica

sobre el desarrollo del pensamiento crítico a través de la modelación matemática en la formación de ingenieros. De manera que, a partir de la propuesta que se construyó, ésta se centró en aportar desde una perspectiva teórica, cómo se concibe a la modelación matemática y, desde una perspectiva metodológica, poder plantear elementos para mirar estos procesos en el aula.

El problema de investigación se puede establecer a partir de la siguiente pregunta general: ¿Cuáles son las contribuciones de la modelación matemática en el desarrollo de la competencia de pensamiento crítico cuando se implementa en una clase de matemáticas para futuros ingenieros?

De la pregunta general se desprenden seis preguntas subordinadas:

- ¿Qué elementos de la modelación matemática se puede observar en una clase de matemáticas para futuros ingenieros?
- ¿Cuál es el nivel de pensamiento crítico que se desarrolla en un curso de matemáticas para futuros ingenieros?
- ¿Cuáles son las habilidades de pensamiento crítico que la estrategia de modelación matemática puede contribuir a su desarrollo en una clase de matemáticas para futuros ingenieros?

La pregunta general y las subordinadas expuestas plantean el problema que se estudia y representan el qué de la investigación. Los objetivos que se presentan en el siguiente apartado, al igual que las preguntas subordinadas, colaboran en el logro de esa claridad al establecer qué pretende la investigación de manera general y de manera específica.

2.3 Objetivos de la investigación

Para dar respuesta a la pregunta general y las preguntas subordinadas, esta investigación estableció los objetivos que son las guías del estudio. El objetivo general de la investigación es: Determinar las contribuciones de la modelación matemática en el desarrollo de la competencia de pensamiento crítico en una clase de futuros ingenieros.

De este objetivo general se desprenden seis objetivos específicos los cuales tienen la finalidad de concretizar a lo que se aspira en el objetivo general. Estos son:

- Identificar elementos de la modelación matemática que se puede observar en una clase de matemáticas para futuros ingenieros.
- Determinar el nivel de pensamiento crítico que es desarrollado en un curso de matemáticas para futuros ingenieros.
- Caracterizar las habilidades de pensamiento crítico que la modelación matemática puede contribuir a desarrollar en una clase de matemáticas para futuros ingenieros.

Una vez establecidos los alcances de este proyecto a través del objetivo general y los objetivos específicos, en el siguiente apartado se ofrece una explicación sobre la necesidad de llevar a cabo esta investigación y cuál es su relevancia. Es decir, se presenta el para qué y porqué del estudio.

2.4 Justificación de la investigación

En la actualidad, el ámbito educativo apuesta por una visión hacia la educación STEM, que es la enseñanza y el aprendizaje en los campos de la ciencia, la tecnología, la ingeniería y las matemáticas (Kennedy y Odell, 2014; Hernández et al, 2013). Esta visión se centra en tomar a la ciencia y las matemáticas como estrategias para la tecnología y la ingeniería (Bell, 2016).

Según Kertil y Gurel (2016), las diferentes perspectivas acerca de la educación STEM integrada, por lo general, hacen énfasis en el uso de tareas contextuales las cuales, involucra a los estudiantes con múltiples procesos tales como el diseño, construcción, análisis, matematización, verificación, revisión y comunicación; por lo que, en cierta manera, el modelado matemático como un proceso, está involucrado en todas las aplicaciones relacionadas con STEM. Además, llegan a la conclusión de que, no todas las actividades de STEM son actividades de modelado, sin embargo, en muchas de estas actividades los alumnos pueden experimentar la modelación.

Aunque existe un conocimiento y experiencia basados en la investigación sobre modelos matemáticos en educación, no se ha encontrado estudios que indaguen sobre la posible vinculación entre la modelación matemática y la competencia transversal del Pensamiento Crítico desde una visión de competencia del siglo XXI. Como se ha comentado, por un lado, la modelación puede ser presentada como una excelente estrategia para la implementación de una educación STEM integrada y, por otro lado, la competencia de pensamiento crítico es considerado como una de las competencias de mayor importancia en la formación de los alumnos, especialmente en el campo de la

ingeniería. Es debido a estos beneficios que se considera de gran relevancia el estudio del desarrollo del pensamiento crítico en la modelación matemática para la formación de ingenieros.

2.5 Marco contextual

El estudio se llevó cabo durante el semestre de agosto- diciembre de 2020. Los participantes en la investigación se componen de 36 alumnos de ingeniería de las clases de Ecuaciones Diferenciales (tercer y cuarto semestre) de una institución privada ubicada en Monterrey, Nuevo León, México. Esta universidad privada se fundó en 1943 con el propósito de transformar a México y al mundo a través de la educación. Su oferta educativa abarca los niveles de bachillerato, carreras profesionales y posgrados. En el nivel profesional cuenta con programas académicos en las áreas de Ingeniería, Tecnologías de Información, Negocios, Humanidades y Ciencias Sociales, Arquitectura, Arte y Diseño, y Ciencias de la Salud (Modelo Educativo Tec21, 2018).

Debido al cambiante entorno global, la institución estableció un modelo de transformación que pudiera alinear los elementos clave de su visión, organización y cultura. La visión de la universidad es formar líderes con espíritu emprendedor, sentido humano y competitivos internacionalmente. En su Plan Estratégico 2011, la institución estableció como iniciativa estratégica el Modelo Educativo Tec20.

La transformación de la realidad es propuesta desde la base de un sentido humano, es decir, fortaleciendo el compromiso con la ética, la participación ciudadana y la puesta del talento personal al servicio de los demás. Este desarrollo de competencias

disciplinares y transversales permite desarrollar en los estudiantes la capacidad para desempeñarse de manera exitosa en el marco de un escenario global.

El interés por el desarrollo de habilidades tanto disciplinares como transversales, particularmente la modelación matemática y el pensamiento crítico, abarca desde un enfoque de la enseñanza (profesores) y desde un enfoque del aprendizaje (estudiantes), este estudio se centra en los estudiantes y cómo la modelación matemática puede contribuir en el desarrollo de habilidades de pensamiento crítico; tendencia que toma la institución desde esa visión mundial que considera la necesidad de formar a los ingenieros en ambas disciplinas.

En un inicio de la investigación, se llevaron a cabo observaciones presenciales en el aula, así como la validación de un instrumento que se diseñó para la recolección de datos, éste fue una rúbrica articulada de modelación matemática y el pensamiento crítico. No obstante, la situación de pandemia que se surgió a partir de inicios del año 2020 obligó a realizar cambios en la planeación de la recolección de datos cambiando de modalidad presencial a modalidad remota. Sabemos que hay variables que pueden influir en este cambio de modalidad, sin embargo, esta situación no fue foco de investigación.

Esta situación del cambio de modalidad influyó en el tamaño de las muestras estudiadas. Se contó con un grupo experimental y un grupo control de 18 alumnos cada uno. Este número de participantes fue resultado de una percepción por parte de los estudiantes sobre la falta de tiempo para su participación en el estudio debido a que se sintieron saturados de trabajos, proyectos y exámenes finales. En un inicio la respuesta fue muy buena, sin embargo, al avanzar el curso, algunos de los alumnos que participaron en la preprueba ya no pudieron hacerlo al final del curso en la posprueba.

Por lo tanto, las muestras se formaron con los estudiantes voluntarios que participaron de manera completa en el estudio.

En relación con la competencia transversal del pensamiento crítico, éste se conforma de dos grandes grupos, las disposiciones y habilidades. Esta investigación se enfocó en estudiar las habilidades de pensamiento crítico, dejando de lado las disposiciones para otras investigaciones futuras.

Por último, es importante aclarar que las situaciones problema presentadas a los estudiantes para trabajar en su solución de manera colaborativa, son actividades muy cercanas a la realidad, por lo tanto, los resultados obtenidos están en función de estos problemas y es importante considerarlo si es de interés indagar desde esta propuesta.

En este capítulo se han expuesto los desafíos mundiales de la sociedad actual y el papel tan importante de la ingeniería para el crecimiento económico y el bienestar social de cada país. Se presenta la necesidad de buscar nuevas estrategias para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y el desarrollar de competencias transversales en los estudiantes, específicamente, el pensamiento crítico.

En esta sección se habla de la modelación matemática como una estrategia para el aprendizaje de las Matemáticas y el interés de indagar sobre la articulación de esta estrategia y la competencia de pensamiento crítico, siendo el objetivo general: Determinar las contribuciones de la modelación matemática en el desarrollo de la competencia de pensamiento crítico en una clase de futuros ingenieros. En el siguiente capítulo se presenta el método utilizado en la investigación, las técnicas e instrumentos para la recolección de datos y los procedimientos que se llevaron a cabo.

Capítulo 3: Método

En este capítulo se presenta el desarrollo de la metodología que se utilizó para abordar el problema de estudio que se estableció a partir del objetivo general: determinar las contribuciones de la modelación matemática en el desarrollo de la competencia de pensamiento crítico en una clase de futuros ingenieros.

Para dar respuesta a la pregunta de investigación se propuso una metodología de métodos mixtos con un diseño de triangulación concurrente. Este método de la investigación se explicará a través de cinco apartados los cuales son: propuesta metodológica, marco contextual, aproximación cuantitativa, la cual corresponde a los pasos 1 y 5 de los procedimientos que se presentan al final del capítulo, aproximación cualitativa correspondiente a los pasos 2, 3 y 4, y los procedimientos.

En estos apartados se explica las técnicas que se utilizaron para la recolección de datos, los instrumentos que se usaron: una prueba de pensamiento crítico, actividades y proyecto de modelación matemática, rúbrica de modelación matemática y pensamiento crítico, entrevistas a estudiantes y la población y muestras donde se aplicaron los instrumentos.

3.1 Propuesta metodológica

Tanto la investigación cualitativa como la cuantitativa han llevado a cabo aportaciones significativas al avance del conocimiento de todas las ciencias, no obstante,

durante más de un siglo, se pudo observar una gran disputa entre los defensores de los dos paradigmas de investigación (Hernández, Fernández y Baptista, 2010).

Los puristas cuantitativos consideran que la investigación en ciencias sociales debe ser objetiva, por lo que las generalizaciones libres de tiempo y contexto son deseables y posibles; creen que las observaciones sociales deben tratarse como entidades de la misma manera que los científicos físicos tratan a los fenómenos físicos, que el observador debe estar separado de todo lo que se observa y consideran que los investigadores educativos deben eliminar sus prejuicios, permanecer desconectados emocionalmente y no involucrarse con los objetos de estudio (Johnson y Onwuegbuzie, 2004).

Por el contrario, los puristas cualitativos sostienen que existen una gran cantidad de realidades de construcción múltiple por lo que las generalizaciones libres de tiempo y contexto no son deseables ni posibles, que es imposible diferenciar por completo las causas y los efectos, que el conocedor y lo conocido no pueden separarse porque el conocedor subjetivo es la única fuente de realidad. Además, se caracterizan por una aversión a un estilo de escritura desapegado y pasivo, siendo este estilo de escritura formal utilizada por los puristas cuantitativos, y prefieren una descripción detallada y rica, escrita directamente (Johnson y Onwuegbuzie, 2004).

Durante varios años, algunos investigadores consideraban que estos métodos eran opuestos, contaban con sus propias premisas, partían de diferentes visiones del mundo y por ello eran irreconciliables (llamados separatistas); otros investigadores se inclinaban por uno de los dos métodos y desdeñaban al otro (llamados fundamentalistas). Ambas posturas coincidían en que, la idea de emplear los enfoques cuantitativo y cualitativo en una misma investigación no era posible o conveniente mezclarlos debido a que partían de

paradigmas epistemológicos diferentes (Hernández, Fernández y Baptista, 2010).

Por otro lado, había investigadores (llamados integradores) que opinaban que, aún y cuando los métodos eran distintos, resultan en sí mismos construcciones sociales por lo que pueden tener cierto grado de integración; e investigadores (llamados pragmáticos) que brindan el mismo estatus al enfoque cuantitativo, cualitativo y mixto; y que es el planteamiento del problema y las circunstancias los que establecen el método. Por ello consideran que el uso de ambos enfoques es conveniente si es este método mixto que puede ayudar de la mejor manera a contestar las preguntas de investigación del estudio (Hernández, Fernández y Baptista, 2010).

Johnson y Onwuegbuzie (2004, p. 17) definen a la investigación de métodos mixtos como: “la investigación en la que el investigador mezcla o combina técnicas, métodos, enfoques, conceptos o lenguaje de investigación cuantitativa y cualitativa en un solo estudio”. Su premisa central es que, al combinar el uso de los dos enfoques, se puede obtener una mayor comprensión del problema que se investiga (Valenzuela y Flores, 2012). Los métodos mixtos se fundamentan en un paradigma pragmático, su lógica de investigación incluye el uso de la inducción, la deducción y la abducción; ésta última consiste en descubrir y confiar en las mejores explicaciones para comprender los resultados (Johnson y Onwuegbuzie, 2004).

De acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2010, p. 553), el pragmatismo se debe entender como “la búsqueda de soluciones prácticas y trabajables para efectuar investigación, utilizando los criterios y diseños que son más apropiados para un planteamiento, situación y contexto en particular”. Los métodos cuantitativos y cualitativos se han desarrollado de manera muy distinta y siguen representando

paradigmas diferentes, sin embargo, esto no impide que se puedan combinar en un mismo estudio obedeciendo a un propósito de complementación (Hernández, Fernández y Baptista, 2010).

El pragmatismo asume los investigadores tienen valores y creencias diferentes en relación con lo personal y a los enfoques de investigación, por lo que no pretende estandarizar sus visiones y estas ópticas diversas no son consideradas como problema, sino como una posible fortaleza para la indagación (Johnson y Onwuegbuzie, 2004).

En relación con el nombre del enfoque mixto, la discusión sobre cómo llamarlo se ha prolongado por varias décadas. De acuerdo con la cronología, en 1959 le llamaron “investigación multi-rasgos/multi-métodos”, en 1986 se le llamó “métodos híbridos”, en 1994 se le llamó “metodología mixta” y finalmente el nombre que tiene en la actualidad de “métodos mixtos” (Valenzuela y Flores, 2012).

Para construir un diseño de método mixto, el investigador debe cuestionarse: a) qué clase de datos tienen prioridad o si tienen el mismo estatus, b) cuál tipo de recolección de datos cuantitativos y cualitativos es más apropiada para la investigación, de manera simultánea o secuencial, c) cuál es el propósito de la integración de los datos cuantitativos y cualitativos, triangulación, complementación, exploración o explicación y, d) en qué parte del proceso es conveniente que se inicie y desarrolle la estrategia mixta (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). En la Figura 14 se muestran nueve diseños de métodos mixtos propuestos por Johnson y Onwuegbuzie (2004) considerando los cuestionamientos sobre el querer operar dentro de un paradigma dominante o no y sobre cómo se llevarán las etapas, de manera concurrente o secuencial (cuestionamientos a y b)

Figura 14

Diseños de métodos mixtos en función del tiempo y énfasis del paradigma (Johnson y Onwuegbuzie, 2004, p.22)

		Decisión de orden de tiempo	
		Concurrente	Secuencial
Decisión sobre el énfasis del paradigma	Estatus equitativo	QUAL + QUAN	QUAL → QUAN QUAN → QUAL
	Estatus dominante	QUAL + quan	QUAL → quan qual → QUAN
		QUAN + qual	QUAN → qual quan → QUAL

Nota: qual = cualitativo, quan = cuantitativo, + representa concurrente, → representa secuencial, letras mayúsculas representan alta prioridad de peso y letras minúsculas representan baja prioridad de peso

Además de considerar el estatus de cada enfoque y el orden del tiempo (concurrente o secuencial), se pueden encontrar dos diseños más: diseños mixtos de conversión y diseños mixtos de integración. Los primeros se refieren a que uno de los propósitos más importantes de estos diseños es la transformación de los datos para su análisis. Es decir, un tipo de datos es convertido a otro, por ejemplo, cuantificar datos cualitativos, y después se analizan ambos tipos de datos a través de dos análisis, cuantitativo y cualitativo. En los diseños mixtos de integración, las dos aproximaciones se entremezclan en todo el proceso de la investigación, o en la mayor parte del proceso (Hernández, Fernández y Baptista, 2010).

En el desarrollo de los métodos mixtos se han creado varias clasificaciones, entre

estas tipologías Hernández, Fernández y Baptista (2010) presentan una tipología de diseños mixtos específicos que son:

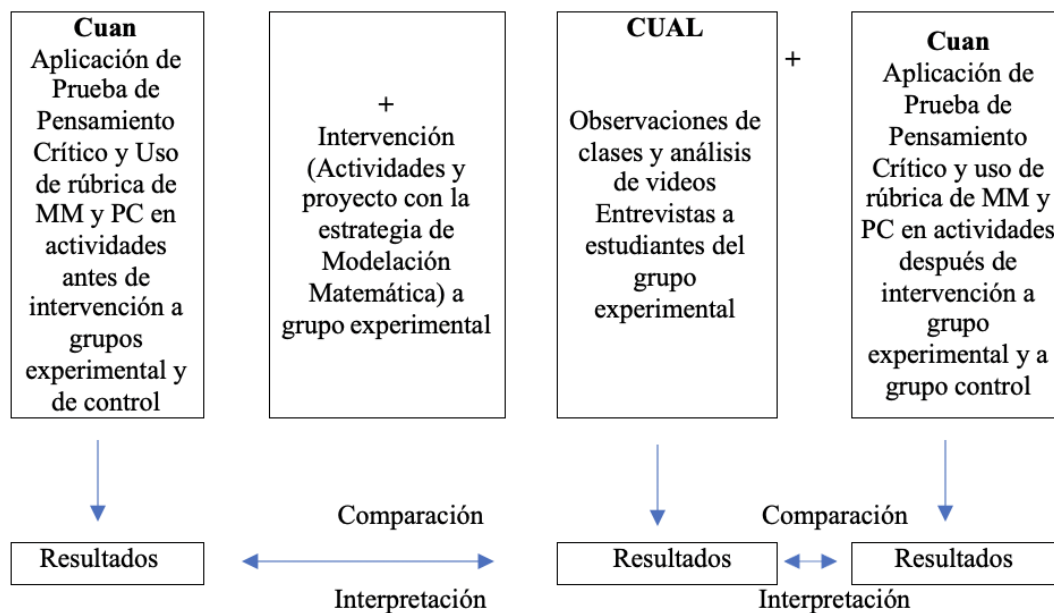
- Diseño exploratorio secuencial (DEXPLOS). El diseño implica una fase inicial de recolección y análisis de los datos cuantitativos seguida de otra donde se recaban y analizan datos cualitativos (p. 564)
- Diseño explicativo secuencial (DEXPLIS). El diseño se caracteriza por una primera etapa en la cual se recaban y analizan datos cuantitativos, seguida de otra donde se recogen y evalúan datos cualitativos. La mezcla mixta ocurre cuando los resultados cuantitativos iniciales informan a la recolección de los datos cualitativos (p. 566)
- Diseño transformativo secuencial (DITRAS). Este diseño incluye dos etapas de recolección de datos. La prioridad y fase inicial puede ser la cuantitativa o cualitativa, o bien, otorgarles a ambas la misma importancia y comenzar por alguna de ellas. Lo que la diferencia de las anteriores es que una perspectiva teórica amplia (teorización) guía el estudio (p. 569).
- Diseño de triangulación concurrente (DITRIAC). Este modelo se utiliza cuando el investigador pretende confirmar o corroborar resultados y efectuar validación cruzada entre datos cuantitativos y cualitativos, así como aprovechar las ventajas de cada método y minimizar sus debilidades. Puede ocurrir que no se presente la confirmación o corroboración (p. 570).

Para dar respuesta a la pregunta de investigación de este estudio: ¿Cuáles son las contribuciones de la modelación matemática en el desarrollo de la competencia de pensamiento crítico cuando se implementa en una clase de matemáticas para futuros

ingenieros?, se propone una metodología de métodos mixtos con un diseño de triangulación concurrente ya que a través de la interpretación y comparación de resultados cuantitativos y cualitativos se puede abordar a esta problemática. Por un lado, el enfoque cualitativo puede ofrecer información sobre los niveles de pensamiento crítico de los estudiantes, en qué secciones existen mayores fortalezas y en cuáles son más débiles. Por otro lado, el enfoque cualitativo puede enriquecer esta información explicando cómo son estas fortalezas y debilidades. En la Figura 15 se presenta el diseño mixto de triangulación concurrente que se propone para esta investigación.

Figura 15

Diseño mixto de triangulación concurrente de acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2010)



Nota: qual = cualitativo, quan = cuantitativo, + representa concurrente, → representa secuencial, letras mayúsculas representan alta prioridad de peso y letras minúsculas representan baja prioridad de peso

En los siguientes apartados sobre las aproximaciones se explicará con más profundidad las fases, la población, las muestras, los participantes y los instrumentos.

3.2 Aproximación cuantitativa

Esta aproximación cuenta con tres etapas, la primera consiste en la validación de la traducción de la prueba de Pensamiento Crítico de Cornell (Prueba de PC de Cornell, o bien, prueba de Cornell) y su prueba piloto, la segunda consiste en la aplicación de la prueba de Cornell antes y después de la intervención para comparar sus medias para los grupos experimental y de control; y la tercera etapa corresponde a la comparación de las pospruebas de los grupos experimental y de control.

3.2.1 Etapa 1: Traducción de prueba y validación

Existen diversos estudios que han diseñado y validado pruebas para medir la competencia de pensamiento crítico (Arviana y Prabatawo, 2019; Basri, Purwato, Asári Y Sisworo, 2019), además, hay una cantidad de investigaciones donde se utilizan pruebas ya establecidas o validadas (Watson-Glaser Critical Thinking, Halpern Critical Thinking Assessment, Cornell Test of Critical Thinking). Tomando en consideración lo anterior, se analizó las diferentes posibilidades que existen para medir el pensamiento crítico (PC) para elegir una de estas pruebas y aplicarla a los estudiantes participantes.

El primer paso que se llevó a cabo fue el de contactarse con investigadores autores

de publicaciones en las cuales el diseño de una prueba para la medición de la competencia fue parte de del procedimiento del método de investigación. Se tuvo contacto con dos investigadores a través de Researchgate; sin embargo, no se obtuvo una respuesta positiva de ellos.

Descartado este paso, se investigó sobre algunas de las más importantes pruebas que miden el pensamiento crítico y se analizó la factibilidad de su aplicación. Estas pruebas son: a) Watson-Glaser Critical Thinking (JobTestPrep, 2019), b) Prueba de pensamiento crítico de Halpern (HCTA, por sus siglas en inglés, 2016), c) Prueba de Habilidades de Pensamiento Crítico de California (CCTST, por sus siglas en inglés) (Insights Assessment,2019) y d) Prueba de Pensamiento Crítico de Cornell (Ennis, Millman y Tomko, 2005); en el capítulo 1 se describieron las características más importantes de cada una de ellas.

De las pruebas mencionadas, se eligió la Prueba de Pensamiento Crítico de Cornell (Ennis, Millman y Tomko, 2005) por varias razones. Una de ellas es que el autor principal de esta prueba es Robert Ennis y el marco teórico de este estudio se basa primordialmente en la concepción de del pensamiento crítico de Ennis. Para Ennis (1985), hay una variedad de formas de subcategorizar el pensamiento crítico; distinguiendo tres tipos de inferencias para las creencias: inducción, deducción y evaluación. Además, establece cuatro tipos de bases para esas inferencias: los resultados de otras inferencias, observaciones, declaraciones hechas por otros y supuestos.

Otra razón para elegir esta prueba fue que la respalda alrededor de cuarenta años de investigación, cuenta con resultados de aplicación del instrumento en variedad de ambientes escolares y su fiabilidad en estas muestras se llevaron a cabo calculando el

coeficiente de Spearman Brown, Kuder-Richardson (20 y 21) dando resultados muy aceptables ya que los valores van de 0.72 a 0.90.

Finalmente, es una prueba que se puede comprar por unidad y se tiene el permiso de aplicarla a varios participantes si los datos se usan en investigaciones para fines educativos como lo es en este caso. Las otras pruebas son en línea o se debe acudir a un centro de aplicación y esto representaría un costo muy oneroso y de difícil aplicación. Es importante destacar que, el estado de pandemia fue otra razón para la selección de esta prueba. La prueba de Cornell, una vez traducida y validada, se pudo aplicar de manera remota a los estudiantes participantes.

En la fase inicial y la final se recolectaron datos cuantitativos utilizando la Prueba de Pensamiento Crítico de Cornell (Ennis, Millman y Tomko, 2005) al aplicarla a estudiantes de ingeniería. A continuación, se describen los participantes, el instrumento que se utilizó y el proceso de aplicación de esta prueba.

3.2.2.1 Instrumento: Prueba de Pensamiento Crítico de Cornell.

Este instrumento se ofrece para dos niveles, Prueba de Pensamiento Crítico de Cornell, Nivel X, y Prueba de pensamiento crítico de Cornell, Nivel Z. El Nivel X está dirigido a estudiantes en los grados 4-14, Nivel Z en estudiantes de preparatoria avanzados y superdotados, estudiantes universitarios, estudiantes graduados y otros adultos.

El nivel X, el cual fue elegido para la recolección de datos cuantitativos, es una

prueba de 71 ítems de opción múltiple, que evalúan las habilidades de: a) inducción, b) credibilidad de una fuente, c) observación, d) semántica, e) deducción, e f) identificación de hipótesis. Cada ítem en cada prueba tiene tres opciones y una respuesta clave.

La prueba consta de cuatro partes. La primera evalúa inducción (evaluación de hipótesis) y la conforman los ítems del 3 al 25. La segunda evalúa la observación y credibilidad de las fuentes, conformada por los ítems del 27 al 50. La tercera evalúa deducción con ítems del 52 al 65 y la cuarta, evalúa identificación de supuestos en los ítems del 67 al 76. Según los diseñadores de la prueba, consideran que el 85% de aciertos en las secciones de inducción y credibilidad demuestra dominio para los estudiantes. Además, se recomienda calcular el puntaje restando, al total de respuestas correctas, la mitad del puntaje de las respuestas incorrectas.

Los instrumentos de medición o recolección de datos deben reunir tres requisitos esenciales: confiabilidad, validez y objetividad (Hernández, Fernández y Sampieri, 2010). La confiabilidad se refiere a la exactitud y a la precisión de los procedimientos de medición (Namakforoosh, 2013, p. 227) y la validez se refiere al grado en que un instrumento realmente mide la variable que se pretende medir (Hernández, Fernández y Sampieri, 2010). Namakforoosh (2013, p. 227) coincide con estos autores con respecto a la confiabilidad y validez y establece un tercer requisito: factibilidad; ésta se refiere a factores tales como los económicos, de conveniencia y otros que determinan la posibilidad de que se pueda realizar.

La prueba de Pensamiento Crítico de Cornell cumple con los requisitos de confiabilidad y validez. Con relación a la validez de la prueba de Pensamiento Crítico de Cornell, los diseñadores afirman que es necesario considerar el supuesto de condiciones

estándar y, se basan en la evidencia de validez relacionada con el criterio y la evidencia de validez relacionada con el contenido. Para evaluar la primera, llevaron a cabo correlaciones con otras pruebas y para evaluar la segunda, se basan en la vasta experiencia y conocimiento de Ennis sobre pensamiento crítico.

Para evaluar la consistencia de la prueba los investigadores que la diseñaron llevaron a cabo análisis psicométricos calculando los coeficientes de Spearman-Brown y Kuder- Richardson (20 y 21) para diferentes muestras, tales como 49 participantes, 110, 200, 634 y 1,673, entre otras más. Los rangos estimados van desde 0.67 a 0.90. Según los diseñadores de la prueba, en el caso de una discusión general sobre la validez de una prueba, las circunstancias para adjuntarse a la prueba normalmente son las condiciones estándar para su administración. En consecuencia, en una discusión general, la validez es la medida en que la prueba mide lo que se supone que debe medir en condiciones estándar. Se consideraron tres tipos de validación: de contenido, de criterio y de constructo. Estos análisis y otros más se pueden ver en profundidad en el Manual de Administración de Cornell Critical Thinking Test (2005).

3.2.2.2 Validación de la traducción de la prueba

Debido a que esta prueba fue diseñada en inglés, para mantener la validación del instrumento se llevó a cabo la traducción de la prueba por una persona que su lengua materna es el español, pero tiene un nivel alto de dominio del idioma inglés. Después de la traducción, se solicitó a una experta del idioma inglés, profesora de esta lengua por más de veinte años, la revisión de la traducción. Se hicieron algunos cambios una vez

que las dos personas llevaron a cabo un análisis y llegaron a un acuerdo final de la traducción.

Aún y cuando la traducción de la prueba se llevó a cabo por personas con alto dominio del inglés, queda el cuestionamiento sobre si la traducción es lo suficientemente fiel para transmitir las mismas ideas en el idioma español. Esta idea de la validación de la traducción requirió de realizar una prueba piloto del instrumento.

Para la validación de la prueba , ésta se aplicó a estudiantes de diferentes carreras de ingeniería que cursaban Matemáticas II y Ecuaciones Diferenciales en el semestre de agosto – diciembre de 2019. Se invitó a los alumnos de los dos grupos a participar en la prueba de manera virtual a través de la plataforma de Survey Monkey. En esta prueba se les preguntó estar de acuerdo en su participación, se les pidió la edad y el género. Los estudiantes que estuvieron de acuerdo en participar fueron 47, de los cuales 26 fueron mujeres y 21 varones. El rango de edad está entre 18 y 21 años. En la Tabla 11 se muestra la información de los participantes por género y edad.

Tabla 11

Información de participantes por género y edad

		<i>Edades de participantes</i>				<i>Total</i>
		18 años	19 años	20 años	21 años	
<i>Género</i>	Mujeres	4	6	13	3	26
	Varones	2	8	8	5	23
	Total	6	14	21	8	49

La validación cuantitativa de la traducción se llevó a cabo a partir de la prueba de signos, que es una prueba no paramétrica. No obstante que cada pregunta tiene tres opciones de respuesta, éstas se pueden considerar dicotómicas si se consideran como dos opciones: a) un par formado por la respuesta correcta con una incorrecta y b) el otro par formado por las dos incorrectas.

Ejemplo de pregunta:

1. ¿En qué opción se sugiere encontrar la respuesta correcta del texto: ...?

1. ¿En qué opción se sugiere encontrar la respuesta correcta del texto: ...?

1 A (es la correcta) “...”

o

B (es una incorrecta) “...”

2 B (es una incorrecta) “...”

o

C (es una incorrecta) “...”

Esta combinación representa la situación real de que el encuestado pueda contestar bien o mal

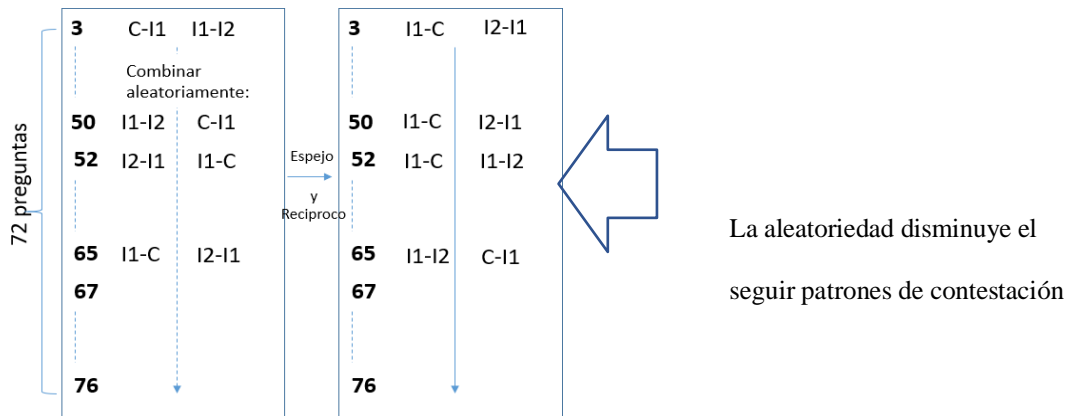
Esta combinación representaría la situación de que el encuestado se vea inducido a contestar completamente mal

Con lo anterior se puede asociar la opción pareada que combina la respuesta correcta con la incorrecta con un signo “más” (+) y la opción que contiene las respuestas incorrectas con un signo “menos” (-). La presentación de las opciones de respuesta en las pruebas es:

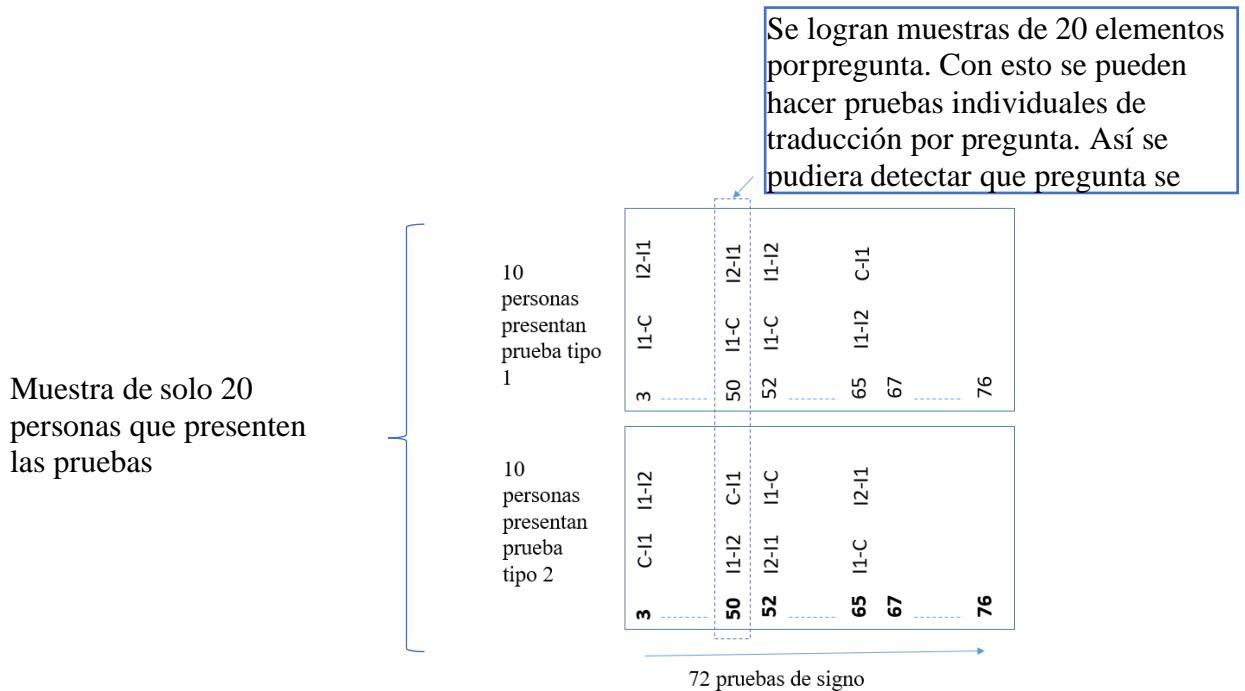
C = Correcta

I1 = Incorrecta

I2 = Incorrecta



La prueba se puede aplicar por lo menos a 20 personas o más, en esta prueba piloto los participantes fueron 49 estudiantes.



La prueba de los signos muestra señales de que las traducciones de cada pregunta y de sus opciones de respuesta no provocan que el participante tienda a contestar las

respuestas incorrectas (las respuestas que se identifican con signo menos “-”). Si se presentan más resultados “-’s” que los “+’s” entonces puede sospecharse que la traducción de la pregunta y de sus opciones de respuestas provocan esa tendencia. Por el tamaño de la muestra se puede manejar para la prueba de los signos la aproximación de la distribución binomial a la normal estándar.

Para el estadístico de prueba, primero se cuentan de las $n = 20$ respuestas la cantidad de signos “-” menos. Si la cantidad de “-s” es $> n/2$ (10) entonces se usa:

$$z = \frac{(x - 0.5) - 0.50n}{0.50\sqrt{n}}$$

y si la cantidad de “-s” es $< n/2$ (10) entonces se usa:

$$z = \frac{(x + 0.5) - 0.50n}{0.50\sqrt{n}}$$

Si el estadístico de prueba $z > 1.28$ entonces se rechaza H_0 y entonces la traducción de la pregunta y sus opciones si puede estar causando una tendencia a contestar erróneamente.

Si estadístico de prueba $z < 1.28$ entonces se acepta H_0 y entonces la traducción de la pregunta y sus opciones no causa tendencia a contestar erróneamente. En la Figura 16 presenta las hipótesis nula y alternativa.

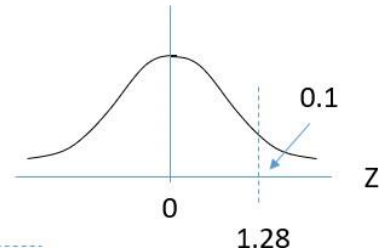
Figura 16

Hipótesis nula y alternativa prueba piloto

H0: La proporción de signos negativos es $(P) \leq 0.5$

H1: La proporción de signos negativos es $(P) > 0.5$

Nivel de significancia $\alpha = 0.1$



El análisis estadístico de los datos recolectados de la prueba piloto se realizó utilizando hojas de Excel para los cálculos. El rango de valores de z de los ítems de la prueba que se obtuvo fue de entre -7 y 1 . De este rango, solamente dos reactivos obtuvieron el valor de 1 y dos más, el valor de 0 . Todos los demás valores de z fueron negativos. Por lo tanto, se puede afirmar que la traducción de la pregunta y sus opciones no causa tendencia a contestar erróneamente. En la Figura 17 se muestra una parte de una hoja de Excel donde aparece algunos de los ítems, los cálculos y valores de z.

Figura 17

Muestra de hoja de Excel con cálculos para obtener el valor de z (prueba piloto)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO	AP	AQ	AR	
40		A	C		A	+		B	+		C	+		A	+		A	+		C	+		B	+		B	+		C	+		A	+		A	+		A	+		A	+		A	+
41		A	C		A	+		B	+		C	+		A	+		B	-		A	+		C	+		B	+		C	+		B	+		A	+		A	+		A	+		A	+
42		A	C		A	+		B	+		C	+		A	+		B	-		A	+		C	+		B	+		C	+		B	+		A	+		A	+		A	+		A	+
43		A	C		A	+		B	+		C	+		A	+		B	-		A	+		C	+		B	+		C	+		B	+		A	+		A	+		A	+		A	+
44		B	A		A	+		C	+		A	-		B	-		A	+		C	+		A	-		C	+		A	-		B	+		A	+		B	+		A	+			
45		A	C		A	+		C	+		C	+		B	+		B	-		A	+		C	+		B	+		C	+		B	+		A	+		A	+		A	+			
46		A	C		C	+		C	+		C	+		B	+		B	-		A	+		C	+		B	+		C	+		B	+		A	+		A	+		A	+			
47		A	C		A	+		C	+		C	+		B	+		A	+		A	+		C	+		B	+		C	+		C	+		A	+		A	+		A	+			
48		A	C		A	+		C	+		C	+		B	+		C	+		A	+		C	+		B	+		C	+		C	+		A	+		A	+		A	+			
49		A	C		C	+		B	+		C	+		B	-		B	-		C	+		C	+		C	+		C	+		B	+		A	+		A	+		A	+			
50		A	C		A	+		C	+		C	+		C	+		A	+		A	+		C	+		C	+		C	+		C	+		A	+		A	+		A	+			
51		A	C		A	+		B	+		C	+		C	+		A	+		A	+		C	+		C	+		B	+		B	+		A	+		A	+		A	+			
52																																													
53	CANT (n)	47	47		47			47			47			47			47			47			47			47			47			47			47			47			46				
54	+				+ 19	23		+ 20	23		+ 17	22		+ 20	14		+ 21	23		+ 20	18		+ 13	21		+ 12	20		+ 23	21		+ 21	19		+ 21	19		+ 21	19						
55	-				- 5	0		- 4	0		- 7	1		- 4	9		- 3	0		- 4	5		- 11	2		- 12	3		- 1	2		- 2	4		- 2	4		- 2	4						
56	Lim crítico Z				1.28			1.28			1.28			1.28			1.28			1.28			1.28			1.28			1.28			1.28			1.28			1.28			1.28				
57	# - > n/2				-5.54			-5.83			-4.67			-3.21			-6.13			-4.38			-3.21			-2.63			-6.13			-5.16			-5.16			-5.16							
58	# - < n/2				-5.25			-5.54			-4.38			-2.92			-5.83			-4.08			-2.92			-2.33			-5.83			-4.87			-4.87			-4.87							
59	# - ; n/2 : est				5	24	-5		4	24	-6		8	24	-4		13	24	-3		3	24	-6		9	24	-4		13	24	-3		15	24	-2		3	24	-6		6	23	-5		
60	Hip aceptada				H0			H0			H0			H0			H0			H0			H0			H0			H0			H0			H0			H0			H0				

3.2.2.3 Confiabilidad de la traducción de la prueba

Para la confiabilidad de la prueba piloto se calculó el coeficiente de Kuder Richardson (KR20). Los cálculos para obtener el valor de este coeficiente se llevaron a cabo en hojas de Excel. El valor del coeficiente de Kuder Richardson fue de 0.83 por lo que el instrumento tiene alta confiabilidad y, por lo tanto, se puede aplicar el instrumento. En la Figura 18 se muestra una parte de una hoja de Excel donde aparece algunos de los ítems, los cálculos y el valor del coeficiente.

Figura 18

Muestra de hoja de Excel con cálculos para obtener el valor de KR20

The image shows a screenshot of an Excel spreadsheet. The main area contains a grid of data from row 20 to 55 and column A to AR. Each row represents a subject, with columns for gender (e.g., 'Hombre', 'Mujer') and subject area (e.g., 'Ecuaciones', 'Matemáticas'). The data cells contain 0s and 1s, indicating correct or incorrect responses for each item. At the bottom of the spreadsheet, a summary table is visible, showing the KR20 coefficient value as 0.83.

Item	Gender	Subject Area	Response
20	Hombre	Ecuaciones	1
21	Mujer	Ecuaciones	0
22	Mujer	Ecuaciones	1
23	Mujer	Ecuaciones	0
24	Mujer	Ecuaciones	0
25	Hombre	Ecuaciones	1
26	Hombre	Ecuaciones	1
27	Mujer	Ecuaciones	0
28	Hombre	Matemáticas	0
29	Mujer	Ecuaciones	1
30	Hombre	Matemáticas	0
31	Mujer	Matemáticas	0
32	Mujer	Matemáticas	0
33	Hombre	Matemáticas	0
34	Hombre	Matemáticas	0
35	Mujer	Ecuaciones	0
36	Mujer	Matemáticas	4
37	Mujer	Matemáticas	4
38	Hombre	Matemáticas	3
39	Hombre	Matemáticas	4
40	Mujer	Ecuaciones	3
41	Mujer	Matemáticas	3
42	Hombre	Matemáticas	4
43	Mujer	Matemáticas	4
44	Mujer	Matemáticas	3
45	Hombre	Ecuaciones	0
46	Mujer	Ecuaciones	0
47	Mujer	Matemáticas	3

49	p =	proporción de aciertos que tienen un ítem concreto sobre el total de ítem	0.766	0.702	0.574	0.511	0.809	0.538	0.468	0.383	0.915	0.786	0.915	0.447	0.404	0.191	0.489	0.786	0.489	0.596	0.786	0.638	0.596	0.723	0.723	0.656	0.664	0.702	0.426	0.787	0.638	0.723	0.851	0.787	0.255	0.787	0.234	0.489
50	q =	porcentaje de personas que respondieron incorrectamente a cada ítem	0.234	0.298	0.426	0.489	0.191	0.362	0.532	0.617	0.085	0.234	0.085	0.553	0.596	0.809	0.511	0.234	0.511	0.404	0.234	0.362	0.277	0.277	1	0.34	0.896	0.298	0.574	0.213	0.362	0.277	0.149	0.213	0.745	0.213	0.786	0.511
51	n =	Número de ítems del instrumento	0.178	0.209	0.244	0.269	0.155	0.231	0.249	0.238	0.078	0.178	0.078	0.247	0.241	0.155	0.250	0.179	0.250	0.241	0.179	0.231	0.241	0.200	0.200	0.000	0.225	0.860	0.209	0.244	0.167	0.231	0.200	0.127	0.167	0.166	0.167	0.250
52	ΣXi	Varianza total del instrumento	75.21																																			
53			47																																			
54	KR20	k	-																																			
55		k - 1	-																																			
56			KR20 = 0.83																																			

Finalmente, en esta aproximación cuantitativa, se propuso aplicar a los estudiantes la prueba de Pensamiento Crítico de Cornell al finalizar el curso para ver si hay un cambio significativo en el nivel de la competencia de PC. Para establecer la significancia del cambio, se hicieron comparaciones de los datos de las preprueba y posprueba, para este análisis se calculó la prueba de Wilcoxon. Es decir, se hizo una comparación de medianas dependientes.

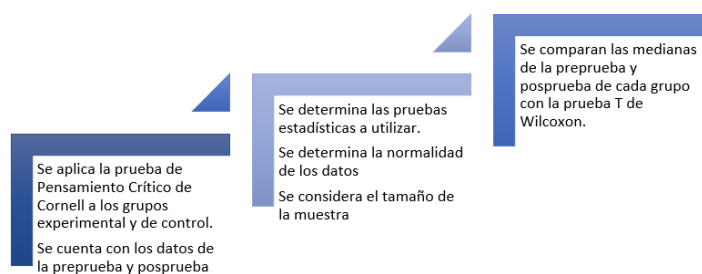
3.2.2 Etapa 2: Aplicación de la Prueba de Pensamiento Crítico de Cornell

En esta etapa, la intervención de la estrategia de modelación matemática debe haber terminado y se habrá aplicado la prueba de Pensamiento Crítico de Cornell. La aplicación de esta prueba se llevó a cabo al inicio del semestre del curso, por lo tanto, las dos aplicaciones representan la prueba y posprueba para cada grupo de estudio, experimental y control. Es importante mencionar que la prueba piloto se aplicó de manera virtual, por lo que la situación de pandemia no afectó en los resultados de la investigación.

Una vez que se obtuvieron los datos, se llevó a cabo la comparación de la preprueba y posprueba (pruebas relacionadas) a partir de análisis estadístico no paramétrico. Este análisis estadístico se llevó a cabo con el uso de la prueba T de Wilcoxon para medianas dependientes, ya que el tamaño de las muestras es menor a treinta; además, no se determinó la normalidad en los datos de la posprueba del grupo control. En la Figura 19 se establecen los pasos para esta segunda etapa de la aproximación cuantitativa.

Figura 19

Aproximación cuantitativa: Etapa 1



3.2.3 Etapa 3: Comparación de las pospruebas de los grupos experimental y de control

En esta etapa, se llevó a cabo una comparación de medias de las pospruebas de la prueba de Pensamiento Crítico de Cornell entre el grupo experimental y el de control. Para determinar si hay diferencias significativas entre grupos, se utilizó la prueba estadística no paramétrica U de Mann - Whitney. Durante estas secciones se ha hablado de dos grupos, el experimental y de control. La razón para estudiar dos grupos es debido a que se espera compararlos y observar si existe diferencias significativas entre las pruebas de éstos y asociarlo a la intervención.

3.2.4 Establecimiento del diseño experimental

Una vez que se ha descrito el diseño de la investigación para la aproximación cuantitativa se establece la tipología del diseño experimental que se eligió para esta parte cuantitativa de la investigación. Se explicará el diseño y se presenta un esquema de cómo se diagrama el tipo elegido.

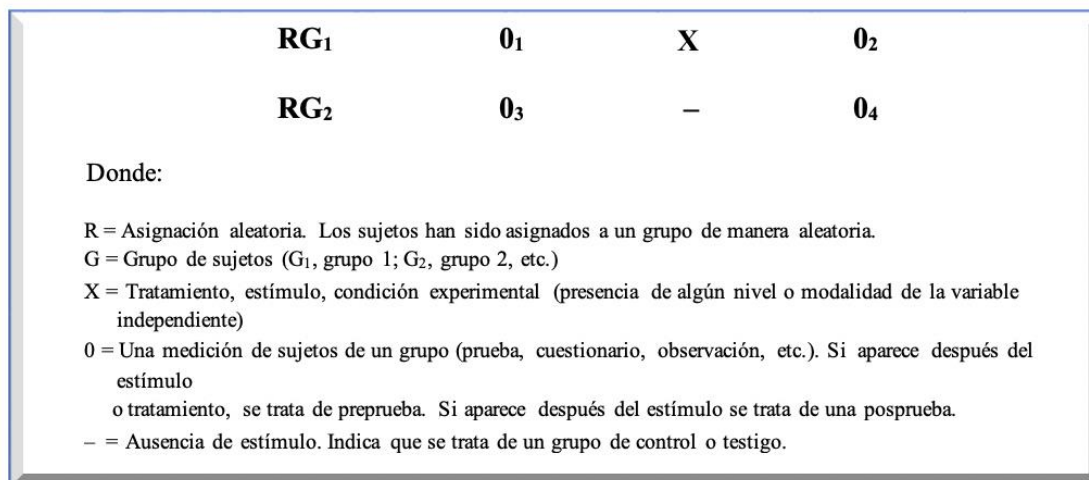
De acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2010), el diseño se refiere a un plan o estrategia para recolectar toda la información que se necesita para llevar a cabo una investigación y, de manera general, se puede clasificar los diseños en experimentales y no experimentales. Los estudios de intervención son llamados experimentos (Creswell, 2009) debido a que se propicia una situación para lograr explicar el efecto que tiene en los participantes con relación a otros que no lo hacen. De acuerdo con Hernández,

Fernández y Baptista (2010, p. 121), “los experimentos manipulan tratamientos, estímulos, influencias o intervenciones (denominadas variables independientes) para observar sus efectos sobre otras variables (las dependientes) en una situación de control”.

Uno de los tipos de la clasificación de los diseños experimentales que se eligió para este estudio es el diseño cuasi experimental. Este tipo de diseño cuenta con grupos de comparación (manipulación de la variable independiente) y equivalencia de grupos; pueden utilizar prepruebas y pospruebas para analizar la evolución de los grupos antes y después del tratamiento experimental. Para esta investigación se utilizó un diseño con preprueba, posprueba y grupo de control. En la Figura 20 se diagrama este diseño.

Figura 20

Diseño experimental puro del estudio



Con relación al estudio, el grupo 1 (G₁) es el grupo donde se aplicó la estrategia de modelación matemática, el grupo 2 (G₂) es el grupo con ausencia de estímulo. Los símbolos **0₁** y **0₃**, representan las prepruebas de los grupos experimental y de control

respectivamente. Los símbolos θ_2 y θ_4 , representan las pospruebas de los grupos experimental y de control respectivamente. Por último, la X representa la estrategia de modelación matemática.

En resumen, en estas secciones se han descrito las etapas de la aproximación cuantitativa que consta de la validación de la traducción del instrumento, su aplicación como preprueba y posprueba de los grupos experimental y de control y comparación de sus medianas del mismo grupo y entre los grupos. Finalmente se establece que para la aproximación cuantitativa el diseño de la investigación fue un diseño cuasi experimental, con preprueba, posprueba y grupo de control. En el siguiente apartado se hablará sobre la parte cualitativa de la metodología del estudio.

3.3 Aproximación cualitativa

Con relación al enfoque cualitativo, se adoptó una metodología de investigación basada en diseños o estudio de diseño. Este tipo de metodología se enfoca en la exploración de problemas educativos para abordar la cuestión de vincular la teoría y la práctica en la investigación educativa (Kennedy-Clark, 2013). De acuerdo con Garelo, Rinaudo y Donolo (2011), algunas de las características de los estudios de diseño son:

- Se sustentan en teorías que ayudan a justificar, orientar interpretar y contextualizar.
- Los nuevos conceptos promueven un conocimiento sobre el mundo real que puede ser aplicado en contextos variados y fomenta la reflexión constante sobre la práctica.

- Se espera que la intervención esté enfocada a transformar de algún modo el ambiente educativo; implementando cambios en los métodos de enseñanza, al currículum, los materiales de consulta, etc. Pueden generar productos o recursos que se pueden volver a utilizar.
- Se orientan siguiendo metas específicas, que se justifican explícitamente basándose en teorías y en investigaciones previas, pero a su vez la intervención puede contener elementos innovadores.
- Lo esencial en este tipo de metodología es la recolección y el análisis cualitativo de datos. Aunque aparecen, en menor cantidad, enfoques cuantitativos.

3.3.1 Participantes e instrumentos

Con respecto a los participantes, son estudiantes con un rango de edad entre 18 y 21 años, del área de ingeniería de las clases de Ecuaciones Diferenciales (segundo y tercer semestre). Los estudiantes pertenecen a diferentes carreras de ingeniería. Los grupos son por conveniencia ya que éstos se conformaron de acuerdo con la disponibilidad de los cursos según horarios que se ofrecen. La muestra también fue de voluntarios lo cual permitirá más adelante observar algunas circunstancias durante la implementación de la prueba.

Para esta investigación se contó con dos grupos de alumnos, un grupo experimental y otro grupo de control. Con respecto al grupo experimental este se conformó a partir de una convocatoria presentada a dos grupos de Ecuaciones Diferenciales solicitando voluntarios para participar en el estudio. De estos dos grupos se formó un grupo que para

efectos prácticos se le llamó grupo experimental. En relación con el grupo control, este grupo de estudiantes cursaron Ecuaciones Diferenciales sin la aplicación de la estrategia de modelación matemática.

Una vez que se aplicó la prueba de PC de Cornell, durante el curso que llevaron los alumnos del grupo experimental, éstos trabajaron con actividades de modelación matemática durante las 16 semanas del curso y llevaron a cabo un proyecto final para el curso basado en modelación de fenómenos reales haciendo uso de un simulador en particular. Para describir los elementos de la modelación matemática que pueden contribuir en el desarrollo de la competencia de pensamiento crítico, se realizaron observaciones de estas actividades a través del uso de una rúbrica diseñada para evaluar la modelación matemática y el pensamiento crítico.

Además, se llevaron a cabo entrevistas semiestructuradas a cuatro estudiantes que aceptaron participar y se analizaron reflexiones que nueve alumnos realizaron de manera voluntaria. En la Figura 21 se muestran los instrumentos que se utilizaron para la recolección de datos, tales como las observaciones en clase y sesiones de trabajo colaborativo, las entrevistas a estudiantes al finalizar el curso y la aplicación de la prueba de Pensamiento Crítico de Cornell.

Figura 21

Instrumentos y momentos relevantes del estudio para análisis y recolección de datos



Como se observó en el diseño metodológico que se muestra al inicio de este capítulo, se mantuvo el diseño mixto, siendo la aproximación cualitativa aquella de mayor peso. La aproximación cuantitativa permitió corroborar los hallazgos en el análisis de aproximación cualitativa. Los instrumentos que se utilizaron con el grupo experimental son la prueba de Pensamiento Crítico de Cornell (se utilizó como preprueba y posprueba), las observaciones realizadas por la investigadora durante las sesiones de clase y en el trabajo colaborativo de los alumnos, las entrevistas a cuatro estudiantes y las nueve reflexiones realizadas por ellos. A continuación, se describen los instrumentos mencionados.

3.3.1.1. Rúbrica para evaluar la modelación matemática y el pensamiento crítico.

En la revisión de literatura se encontró que algunas investigaciones que utilizaron una metodología cualitativa, se diseñaron rúbricas para evaluar la modelación matemática y el pensamiento crítico, sin embargo, en los artículos sólo se mencionan las rúbricas, o bien, apenas se muestran ejemplos sobre algunos indicadores. Como se mencionó con anterioridad, se solicitó a dos investigadores el acceso a las rúbricas que diseñaron para sus estudios, pero no se logró la autorización de sus colegas para darlas a conocer.

Es importante resaltar que como parte importante de esta investigación se diseñó una rúbrica que evalúa tanto la modelación matemática, como la competencia de pensamiento crítico; en realidad se pretende concluir con un modelo teórico articulado para evaluar ambos constructos. Para el diseño de la rúbrica se consideraron cuatro rúbricas, establecidas y validadas, propuestas por instituciones y asociaciones de gran prestigio, las cuales se consideran las más representativas y accesibles. Con relación a la modelación matemática éstas fueron: Association of American Colleges and Universities (AAC&U, 2009) y Consortium for Mathematics and Its Applications (COMAP) y Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM); y con relación al pensamiento crítico fueron: Association of American Colleges and Universities (AAC&U, 2009) y Universidad de Deusto en España (1999). En las secciones 1.1.6 y 1.2.6 se describen cada una de ellas.

El diseño de la rúbrica se basa en las fases propuestas por los expertos en modelación matemática en la revisión de literatura, específicamente en Blum y Kaiser (1997), Blum y Leib (2006), Hall (2006) y Rodríguez (2007, 2016) y las rúbricas

mencionadas anteriormente. Además, el diseño se basa en la revisión de literatura sobre el pensamiento crítico, especialmente en Ennis (1995) y Elder y Paul (2010) y las rúbricas mencionadas en los párrafos anteriores.

Posterior al estudio de todo, se decidió establecer cuatro fases o dimensiones de la modelación matemática: a) Formulación, b) Resolución, c) Interpretación y d) Validación. En cada fase, a excepción de la fase de Resolución, se encuentran indicadores tanto de modelación matemática, como de pensamiento crítico. Las fases y los indicadores se presentan en la Tabla 12, la rúbrica completa, es decir, con cuatro niveles de medición por indicador, se puede revisar en el Anexo 6.

Tabla 12

Fases e indicadores de la rúbrica de MM-PC

FASES				
	Formulación	Resolución	Interpretación	Validación
INDICADORES	Identifica el problema o situación del mundo real	Hace suposiciones y reconoce limitaciones	Ofrece una solución clara	Reflexiona en relación con la resolución del problema, considerando la posibilidad de mejorarlo
	<i>Explicación del problema o situación</i>	Determina variables y parámetros para construir un modelo matemático	Formula explicaciones	Reflexionar sobre otras formas de resolver el problema o desarrollar las soluciones existentes de diferentes maneras
	Identifica las partes o datos relevantes del problema para su solución	Genera un modelo matemático para representar el problema	<i>Conclusiones y resultados relacionados (implicaciones y consecuencias)</i>	Análisis y evaluación del modelo con la realidad
	Identifica estrategias para abordar el problema para su solución	Realiza cálculos y resuelve el modelo matemático		<i>Hace una valoración de las implicaciones prácticas de las decisiones y propuestas</i>
	<i>Influencia del contexto y suposiciones</i>			<i>Actúa con coherencia y responsabilidad en sus decisiones y conductas</i>
	Propone soluciones/ hipótesis			
	<i>Punto de vista del alumno (perspectiva, tesis / hipótesis)</i>			
	<i>Evidencia: Seleccionar y usar información para investigar un punto de vista o conclusión</i>			

La rúbrica se validó con la presentación de un proyecto final de modelación matemática de una clase de Ecuaciones Diferenciales de estudiantes de ingeniería en el semestre de agosto – diciembre 2019 . Se encontró que se dificultaba el uso de la rúbrica debido a que el proyecto era por equipos al igual que la presentación de sus resultados por lo que no era posible una evaluación por competencias, metodológicamente era difícil establecer quién avanzó. Además, el tiempo de exposición no era suficiente para evaluar cada indicador de la rúbrica. Estos hallazgos se obtuvieron después de las observaciones y discusión que llevaron a cabo dos profesores una vez que se utilizó la rúbrica en el proyecto final.

Considerando las dificultades de recolección de datos en las presentaciones de proyectos en la validación de la rúbrica, se optó por utilizar la rúbrica en la observación del proceso del trabajo colaborativo de los estudiantes del semestre agosto – diciembre 2020, de quienes se recolectaron los datos para la investigación.

Las observaciones se realizaron a profundidad debido a que se tuvo la posibilidad de grabar las sesiones ya que los cursos se dieron a distancia por la situación de pandemia mundial que se vive en la actualidad. Es importante mencionar que la situación de pandemia llevó a cambios debido a dificultades para la recolección de datos. En un inicio de la planeación se contempló llevar a cabo las observaciones de clase dentro del aula, sin embargo, todo cambió de presencial a virtual.

Esta modalidad dificultó lograr una mayor cantidad de participantes en relación con la cantidad de alumnos a quienes se les propuso participar. En un inicio la respuesta fue muy buena, sin embargo, en el transcurso del semestre el estrés de tener todas las clases en línea afectó al interés por participar en el estudio. Los alumnos se sentían

abrumados y cansados al tener que llevar todas sus clases en línea. Específicamente, en la recolección de datos de la posprueba, el tiempo de los estudiantes que podían dedicar a contestar la prueba era poco ya que tenían que llevar a cabo proyectos de sus cursos y tenían que prepararse para sus exámenes finales.

3.3.1.2 Entrevista semiestructurada.

Uno de los instrumentos que se utilizó para la recolección de los datos fue la entrevista debido a que, cuando en una investigación no se puede observar desde fuera las variables de estudio debido a su naturaleza, tales como actitudes, opiniones, expectativas; nada mejor que los sujetos de estudio para que nos muestren lo que piensan (Hernández, Fernández y Baptista, 2010, Valenzuela y Flores, 2012).

La entrevista que se utilizó cuenta con una serie de preguntas estructuradas y otras no estructuradas, de tal manera que se pueden utilizar de forma flexible y así, se pudieron añadir otras preguntas de acuerdo con lo que surgió en los encuentros con los entrevistados. Debido a la situación de pandemia, las entrevistas que se realizaron fueron en línea a través del servicio de videoconferencia llamado Zoom. Las preguntas que se plantearon son:

1. ¿Consideras que el curso de Matemáticas II o Ecuaciones Diferenciales se llevó a cabo de una manera diferente a otros cursos de Matemáticas? ¿Qué diferencias y similitudes encuentras?
2. ¿Qué actividades te parecieron más interesantes y por qué?
3. ¿Consideras que el aprendizaje y aplicación de las matemáticas son importantes para tu carrera profesional? ¿Por qué?

4. En las actividades de la clase, ¿cómo es que pudiste identificar el problema o situación a solucionar?
5. ¿De qué manera identificas la información relevante para construir un modelo matemático para solucionar el problema?
6. ¿Qué tan importante consideras tomar en cuenta las opiniones de otros para la solución de problemas?
7. Una vez que identificas los datos relevantes del problema, ¿qué otros factores tomas en cuenta para la construcción de un modelo matemático?
8. ¿Qué dificultades consideras que puedes encontrar en la resolución de un modelo matemático?
9. Cuando estás resolviendo un problema o situación a través de un modelo matemático, ¿Qué elementos tomas en cuenta al interpretar el resultado de tus cálculos matemáticos?
10. Cuando obtienes un resultado como solución para un problema propuesto, ¿Cómo abordas la viabilidad y confiabilidad de la solución?
11. ¿Consideras que la reflexión e inclusión de las consecuencias e implicaciones en la solución de situaciones problemáticas debe ser parte indispensable en la solución de problemas? ¿Por qué?
12. ¿Qué ventajas encuentras en el aprendizaje de las matemáticas a través de la modelación matemática? ¿Qué te costó más trabajo en el aprendizaje del curso con esta estrategia de modelación matemática?

Estas preguntas se diseñaron en base a los indicadores de la rúbrica articulada de modelación matemática y pensamiento crítico de tal manera que se pudiera lograr la mayor información posible para su estudio. Para evitar sesgos en las entrevistas, se puso especial atención en que los entrevistados tuvieran claro las preguntas, si había dudas por parte del participante, se le aclaraba y/o planteaba nuevamente la pregunta; también se puso atención en buscar respuestas lo más completas posibles de parte del estudiante.

Con respecto a la interpretación de las respuestas, para evitar la subjetividad, en respuestas con poca claridad o con dudas, se les repetía lo que respondían para confirmar que fuera correcta la información.

3.3.1.3 Reflexión final del curso por los alumnos del grupo experimental.

Como se comentó, uno de los instrumentos fue la reflexión que realizaron alumnos del grupo control de manera voluntaria al finalizar el curso de Ecuaciones Diferenciales. Estas reflexiones son importantes debido a que los estudiantes pueden detenerse a repensar los aprendizajes del curso, sus dificultades, las aplicaciones que pudieron llevar a cabo y hasta qué punto relacionan la utilidad de las ecuaciones diferenciales y la herramienta tecnológica Vensim en su campo de trabajo. Se obtuvieron nueve reflexiones y las preguntas que se plantearon fueron:

- a) ¿Cómo te has sentido en el curso?
- b) ¿Qué aprendí en el curso después de estos días de intenso trabajo? Menciona algunas ideas relevantes de los temas vistos.
- c) ¿Cuáles son los retos o áreas de oportunidad que tienes?
- d) ¿Cuáles son los retos o áreas de oportunidad que percibo en el curso (diseño, impartición, etc.?)

Respecto el uso de otro lenguaje gráfico para representar a las ED con Pensamiento Sistémico; dinámica de sistemas y software como Vensim, responde lo siguiente:

- e) Señala ventajas que encuentres en la incorporación de una nueva forma de ver las cosas.
- f) Señala desventajas que encuentres en la incorporación de una nueva forma de ver las cosas.

g) ¿Qué aportes consideramos tiene un software como VENSIM en la moderación de fenómenos diversos?

3.3.1.4 Situaciones problema de la clase de Ecuaciones Diferenciales.

Las observaciones del trabajo colaborativo de los alumnos se basaron en la realización de dos situaciones problema planteadas en el curso en los cuales se requiere de la simulación para lidiar con la representación, modelación y complejidad de estos. Los estudiantes trabajaron en la construcción de una propuesta pasando por la elaboración de:

- a) Comprender el enunciado y lo que se pide
- b) Esbozar en un diagrama causal de la problemática
- c) Establecer un diagrama bloques-flujos (representación gráfica)
- d) Llevar el diagrama anterior a un modelo de simulación en un software específico como Vensim, la mayoría de los alumnos omiten el paso anterior y lo llevan directamente al software.
- e) Se debe tener en mente el modelo matemático en términos de ecuaciones diferenciales del problema y la explicación de la solución matemática del modelo (de la ED) en función del contexto original.

El simulador utilizado por los alumnos, llamado Vensim, es un software que se utiliza para simular situaciones donde el cambio esté presente desde una técnica muy particular del pensamiento sistémico, llamada Dinámica de Sistemas. De acuerdo con

Bourguet y Pérez (2005), los modelos dinámicos y ecuaciones diferenciales son dos representaciones efectivas para expresar cambios de cosas a través del tiempo. Permiten reforzar la importancia de las conexiones para interpretar las ecuaciones.

A continuación, se describe con mayor detalle las dos situaciones problema propuestas a los alumnos en esas dos sesiones.

a) Sesión 1 de 3.

Hablaremos poco sobre esta primera parte del proyecto final. Es importante decir que cada sesión dura 1.5 horas, 80 minutos efectivos. En esta primera sesión se tiene la intención de sensibilizar al alumno en cuanto a la idea de pensamiento sistémico como una manera de abordar problemas de cierta complejidad, que dentro de esta filosofía de modelar problemas reales se puede usar una técnica llamada Dinámica de Sistemas y se explica sus aportes.

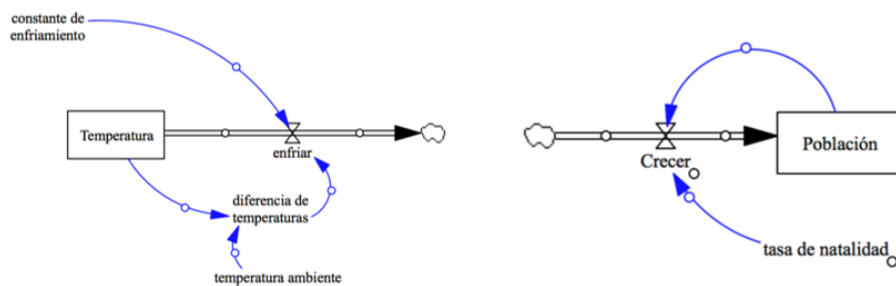
Se revisitan dos problemas ya expuestos en el curso en las primeras semanas donde el crecimiento exponencial está presente y se usa por primera vez el software Vensim que es el simulador donde se explica la representación gráfica donde se modela el problema. Es importante decir que por lo pronto el alumno ya conoce el modelo, lo resolvió simbólicamente al inicio del curso (semanas 1-3) y que en este tema es verlo representado y resuelto desde este nuevo punto de vista.

Se pide que el alumno realice solo un segundo problema muy conocido, llamado modelado de temperatura de un objeto. El alumno explora solo en algunos minutos de la sesión el hacer una variante a un modelo base. No se describirá de esta parte en el escrito ya que es meramente introductoria y pretende solo que el alumno conozca esta nueva manera de pensar, de representar y resolver gráficamente el modelo matemático de la

ED. Se esperaba que el alumno realizara algunos bosquejos como los que se muestra a continuación (Figura 22). Una tabla de interés que muestra la traducción de lo matemático a lo gráfico está en Fisher (2011).

Figura 22

Modelación de problemas de temperatura y población en simulador

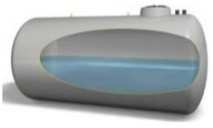


b) Sesión 2 de 3: modelando la concentración de sal en un tanque con agua.

La razón de ser de esta situación es que es un problema que los alumnos estudiaron junto con su profesor en la semana 4-5 del curso de 16 semanas. El proyecto final donde se implementa nuestra secuencia de actividades ocurrió en las semanas 14 – 15 del semestre. Esto es, los alumnos estudiaron a detalle este contexto. En clase se les invita en un primer momento a proponer por ellos mismos la situación. Generalmente este es un contexto conocido por algunos de las ingenierías presentes como los ingenieros químicos. En clase la profesora fue guiando en su momento la propuesta de la ED para modelar este fenómeno y explicó a detalle el por qué la estructura matemática se reduce a representar el cambio de la sal en el tanque igual a la sal que entra menos la que sale. La Figura 23 muestra la situación problema de mezclas.

Figura 23

Problema de mezclas para simulación propuesto a estudiantes



Problema: Modelando un tanque

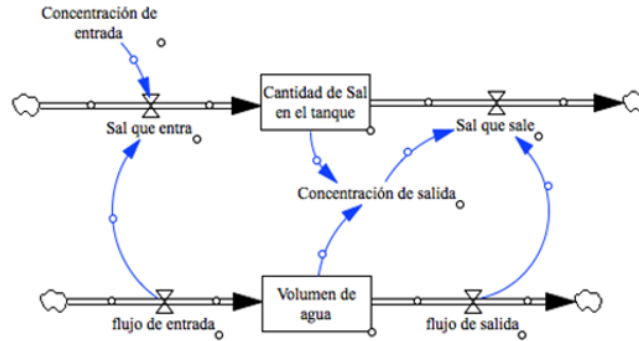
Considera un tanque con capacidad de 500 galones que contiene originalmente 200 galones de agua. Se introduce agua al tanque conteniendo agua a una velocidad de 3 galones por minuto y la mezcla sale del tanque a una velocidad de 6 galones por minuto. Encuentra un modelo de cajas – flujos en Vensim para mostrar el cambio de la cantidad de agua en el tanque en todo tiempo.

Al estudiar el fenómeno desde la dinámica de sistemas usando el software Vensim observamos que este sería un contexto intuitivo y de fácil acceso a todos los estudiantes independientemente de sus antecedentes. Al representar gráficamente con un diagrama de bloques-flujos este problema es posible observar con mayor facilidad los diferentes elementos del problema (bloques) y cómo éstos se relacionan entre sí (flechas azules) de los elementos bloques o variables en juego como sal o concentración respecto a las razones de cambio (flujos). Esto se puede ver representado en el siguiente diagrama. Veremos un ejemplo de un diagrama esperado por los alumnos. Esta sesión será la central en nuestro análisis del capítulo IV, ya que consideramos es un contexto idóneo y previamente trabajado por los estudiantes desde lo simbólico.

Se espera que la mayoría de los equipos realicen este problema de manera grupal. Un ejemplo de lo cómoda de la notación se ve en el diagrama expuesto en la Figura 24.

Figura 24

Representación gráfica de diagrama de bloques – flujos de situación problema



Las ecuaciones serían:

$$\frac{dS}{dt} = C_E f_E - C_S f_S; S(t=0) = S_0$$

$$\frac{dS}{dt} = (C_E f_E) - (C_S f_S)$$

$$\frac{dS}{dt} = (C_E f_E) - \left(\left(\frac{S(t)}{V(t)} \right) * f_S \right)$$

$$\frac{dS}{dt} = (C_E f_E) - \left(\left(\frac{S(t)}{V_0 + (f_E - f_S) * t} \right) * f_S \right)$$

con

$$S(t=0) = S_0$$

Donde:

$V = V(t)$ = volumen de agua

f_E = flujo de entrada

f_S = flujo de salida

$S = S(t)$ = cantidad de sal en el tanque

C_E = concentración de entrada

C_S = concentración de salida, ésta

es igual a $\frac{\text{cantidad de sal}}{\text{volumen de agua}}$

c) Sesión 3 de 3.

La situación contextual 3 es un caso que se expone a los alumnos a manera de estudio de caso. Comentamos en este apartado la historia de este caso compartido en Rodríguez y Bourguet (2015) de manera preliminar. El ejercicio del cual se inspira se basa en el ejercicio del autor Blanchard, Devaney y Hall (2006). En su capítulo 1 el autor propone un ejercicio de 3 incisos para que los alumnos visualicen gráficamente 3 escenarios. Partiendo de esta idea se presenta un caso en el cual se añade una pregunta fundamental: ¿Cuál escenario podrías ser menos dañino al medio ambiente pero que sea económicamente sustentable? (ver Figura 25). El caso invita a los alumnos a reflexionar

una toma de decisiones sobre cuánto se debe pescar en un lago para mantener un negocio sin dañar el medio ambiente.

Se considera que este tercer y último nivel ya permite estudiar a los alumnos en un escenario anteriormente no visto en la clase. Previo a este trabajo se les platica el modelado de una población donde un virus está presente, se presenta la estructura logística y se les invita a reflexionar sobre nuevas estructuras. Se considera que los equipos que puedan llegar a este nivel presentarán de manera más amplia las fases de modelación y de pensamiento crítico de acuerdo con la rúbrica articulada que se presenta en la sección 3.3.1. Se estudiarán a detalle ambos problemas y la solución de los alumnos usando esta rúbrica.

Figura 25

Problema de peces para simulador propuestos a estudiantes



Problema: El lago y sus peces

El lago ha sido evaluado en su dinámica de población de peces. Se estima que su tasa máxima de recuperación es aproximadamente del 30% anual con una capacidad de carga de 2500. Actualmente, este es el número de peces que tiene la población total. El sistema ecológico del lago se ha mantenido en equilibrio por varios años. Sin embargo, la calidad de vida de la gente que vive alrededor puede mejorarse significativamente con escuelas, pavimentación de caminos, un centro de salud. Empezar una iniciativa para generar riqueza a través de una fábrica de pescado enlatados ha sido bien visto por la comunidad. Usted ha trabajado el proyecto y sus inversionistas le escucharán pasado mañana.

Las recomendaciones para extracción de pescados del lago provienen del corporativo, específicamente, de los departamentos de planeación, ingeniería y vinculación con la comunidad. El primero recomienda pescar un tercio de la población total cada año. Esto con base a su tasa de recuperación máxima; el segundo, ha propuesto con base en sus cálculos de balance de masas que la extracción del 30% de la raíz cuadrada de la población actual de peces es la apropiada para una máxima obtención de utilidades y cuidado del medio ambiente. Y finalmente, el tercero, ha propuesto sólo sacar 100 peces cada año, pues es la manera convencional en que han trabajado los pescadores de la comunidad aledaña por muchos años.

Su departamento de cuidado ambiental ha realizado la modelación en computadora de la dinámica poblacional de los peces en el lago. La curva logística ha logrado capturar la dinámica dominante de esta población. Ahora es momento de incluir las recomendaciones que tiene en el modelo y encontrar el nuevo punto de equilibrio, si es que hay alguno. La pregunta por responder es: ¿Qué estrategia causa menos daño a la población de peces con el fin de poder tener un negocio sustentable por muchos años?

La pregunta por responder es: ¿Qué estrategia causa menos daño a la población de peces con el fin de poder tener un negocio sustentable por muchos años?

A continuación, definiremos a mayor detalle el proceso para el análisis de estos 2 ejercicios (sesión 2 y 3) usando diversos instrumentos de recolección de datos en los equipos. Se espera que los equipos sean de 3 personas como máximo.

3.3.1.5 Análisis de los datos.

Los datos recolectados para su análisis cualitativo se obtuvieron a partir de entrevistas realizadas a los estudiantes, observaciones durante el trabajo colaborativo de los alumnos resolviendo problemas a partir de la modelación matemática (videos de dos sesiones de hora y media de duración cada una, un promedio de 3 horas de grabación por equipo) y sus reflexiones personales escritas sobre el trabajo durante el curso.

Estos datos se analizaron a partir de un proceso de construcción de categorías llamado mixto, a través del cual se tomaron como categorías de partida las existentes, formulando alguna más cuando este repertorio de partida se mostró ineficaz, es decir, que no contenga dentro de su sistema de categorías ninguna capaz de cubrir alguna unidad de registro. En el caso de este estudio, las categorías existentes son las fases de la modelación matemática, otras que se encontraron son uso de tecnología y trabajo colaborativo.

El proceso del análisis de contenido se llevó a cabo a partir de los siguientes pasos:

- Transcripción literalmente de las interacciones del trabajo colaborativo, de las respuestas de las entrevistas y las reflexiones de los alumnos.
- Asignación de una clave de pertenencia a uno o varios de los siguientes subgrupos:

- a) Fase de formulación
 - b) Fase de resolución
 - c) Fase de interpretación
 - d) Fase de validación
-
- Proceso de despliegue de datos: duplicar o triplicar aquellos párrafos que tienen dos o tres letras de clasificación y ordenar los párrafos para que queden juntos los de una misma categoría. Es decir, a cada unidad de análisis se le da una clave, por ejemplo, si un enunciado se considera que pertenece a la fase de formulación, se le asigna clave de F. Si se considera que pertenece a la fase de Resolución, se le da una clave R. Algunos enunciados pueden pertenecer a varias fases, entonces se le da cantidad de claves según la cantidad de fases u otras categorías (como tecnología) tenga ese reactivo.

 - Interpretación de datos: tomar cada párrafo y darle la asignación de una categoría basada en una postura teórica. Para analizar los datos y resolver las preguntas de investigación se llevó a cabo una relación de las posturas teóricas de la modelación matemática y el pensamiento crítico. Esta relación se encuentra en el Apartado E.

3.4 Procedimiento

Con el interés de dar claridad al planteamiento de la metodología y de establecer cada una de las fases que vinculan los enfoques cuantitativo y cualitativo, se presenta una

descripción del procedimiento a través de los siguientes pasos:

1. Se aplicó a los estudiantes de los grupos experimental y de control la prueba de Pensamiento Crítico de Cornell al inicio del curso. A estas pruebas se le llaman prepruebas y se aplicó la prueba de Ryan - Joiner, la prueba de Anderson – Darling y la de Shapiro – Wilk para determinar la normalidad de los datos.
2. Se calculó los puntajes de los alumnos del grupo experimental de la preprueba. Se establecieron tres categorías de acuerdo con el nivel de resultados de la preprueba. Se eligieron dos equipos de estudiantes por cada categoría (bajo, intermedio y alto) de pensamiento crítico y se recolectó información de cada uno de ellos a través de las observaciones de clase, de actividades de modelación, videos y, al final del curso, a través de entrevistas. Es decir, se hizo un rastreo transversal durante la intervención. El desarrollo del curso se fundamentó en actividades de modelación matemática (situaciones problemáticas), estas actividades representan la intervención de la estrategia de modelación matemática y se analizó a partir de la rúbrica de modelación matemática y pensamiento crítico (aproximación cualitativa).
3. Se realizaron cuatro entrevistas semiestructuradas a alumnos del grupo experimental que llevaron el curso. Esta información se estudió a través de un análisis de contenido relacionando la teoría sobre pensamiento crítico y modelación matemática.
4. Se aplica la prueba de PC de Cornell a los dos grupos. A estas pruebas se le llaman pospruebas y se les aplicó la prueba de Ryan – Joiner, la prueba de Anderson – Darling y de Shapiro - Wilk para determinar la normalidad de los datos.
5. Se compararon las puntuaciones entre la preprueba y posprueba de cada grupo para

ver si había una diferencia significativa. Se determinaron la normalidad de los datos de las preprueba y posprueba del grupo experimental, sin embargo la posprueba del grupo control no se determinó la normalidad de los datos; por lo tanto, se utilizó la prueba T de Wilcoxon.

6. Se diseñaron preguntas para las entrevistas semiestructuradas de tal manera que permitieran coleccionar datos sobre cada una de las competencias de las fases de modelación matemática y las habilidades de pensamiento crítico.
7. Se pidió la colaboración voluntaria a los alumnos para realizar entrevistas y se estableció horario para llevarlas a cabo a través del servicio de videoconferencia llamado Zoom.
8. Se realizaron las transcripciones de los datos obtenidos en los videos del trabajo colaborativo de las situaciones problemáticas y de las entrevistas.
9. Se asignó las claves a cada categoría a los enunciados significativos en las transcripciones.
10. Se analizaron los enunciados y se relacionaron con el marco teórico sobre modelación matemática y pensamiento crítico. Este estudio se fundamentó en el marco teórico de Blum y Kaiser (1997) sobre las competencias de la modelación matemática (sección 1.1.2) y Ennis (1985) y Paul y Elder (2005) sobre las habilidades y elementos de pensamiento crítico.
11. Se trianguló la información que se obtuvo de los datos recolectados de las observaciones realizadas durante las actividades de modelación en la sesión 2 y 3, los videos de 3 horas aproximadamente por equipo y las entrevistas realizadas posteriormente para dar respuesta a preguntas de investigación. También se

consideraron algunas observaciones previas en sesiones del curso y reflexiones finales escritas por los alumnos sobre el proyecto en sí y sobre el curso en general.

12. Se compararon las pospruebas de los grupos experimental y de control para ver si hay una diferencia significativa entre grupos. Se utilizó la prueba U de Mann - Whitney.

13. Se compararon y analizaron resultados cuantitativos y cualitativos para contestar las preguntas de investigación. En la Figura 26 se presenta a manera de resumen los pasos de la metodología.

Figura 26

Pasos de aproximaciones metodológicos de los métodos mixtos del estudio



Con relación a las preguntas de la entrevista semi estructurada y los indicadores de las fases de la rúbrica de modelación matemática y pensamiento crítico, en la Tabla 13 se presentan cada fase con las preguntas de la entrevista con las que se relaciona.

Tabla 13

Relación de las fases de modelación y las preguntas de entrevista

Relación de fases de la Rúbrica MM PC y preguntas de entrevista			
Fase: Formulación	Preguntas	Fase: Resolución	Preguntas
Identifica el problema o situación del mundo real Explicación del problema o situación	En las actividades de la clase, ¿cómo es que pudiste identificar o comprender el problema o situación a solucionar?	Hace suposiciones y reconoce limitaciones	¿Qué dificultades consideras que puedes encontrar en la resolución de un modelo matemático?
Identifica las partes o datos relevantes del problema para su solución Identifica estrategias para abordar el problema para su solución	¿De qué manera identificas la información relevante para construir un modelo matemático para solucionar el problema?	Determina variables y parámetros para construir un modelo matemático	Cuando estás resolviendo un problema o situación a través de un modelo matemático, ¿Qué elementos tomas en cuenta al interpretar el resultado de tus cálculos matemáticos?
Influencia del contexto y suposiciones Propone soluciones/ hipótesis	¿Qué tan importante consideras tomar en cuenta las opiniones de otros para la solución de problemas?	Genera un modelo matemático para representar el problema	¿De qué manera el conocimiento previo es necesario para establecer tu modelo matemático?
Punto de vista del alumno (perspectiva, tesis / hipótesis)	Una vez que identificas los datos relevantes del problema, ¿qué otros factores tomas en cuenta para la construcción de un modelo matemático?	Realiza cálculos y resuelve el modelo matemático	
Evidencia: Seleccionar y usar información para investigar un punto de vista o conclusión			

Relación de fases de la Rúbrica MMPC y preguntas de entrevista			
Fase: Interpretación	Preguntas	Fase: Validación	Preguntas
Ofrece una solución clara Formula explicaciones, conclusiones y resultados relacionados (implicaciones y consecuencias)	Cuando obtienes un resultado como solución para un problema propuesto, ¿Cómo abordas la viabilidad y confiabilidad de la solución? ¿Consideras que la reflexión e inclusión de las consecuencias e implicaciones en la solución de situaciones problemáticas debe ser parte indispensable en la solución de problemas? ¿Por qué?	Reflexiona en relación con la resolución del problema, considerando la posibilidad de mejorarlo Reflexionar sobre otras formas de resolver el problema o desarrollar las soluciones existentes de diferentes maneras Análisis y evaluación del modelo con la realidad Hace una valoración de las implicaciones prácticas de las decisiones y propuestas Actúa con coherencia y responsabilidad en sus decisiones y conductas	En una situación propuesta, ¿qué es lo que llevas a cabo para compararlo con el contexto de la situación planteada? ¿Qué acciones llevaría a cabo si al contrastar tus resultados en la solución de un problema planteado te das cuenta que no has resuelto del todo el problema? ¿Consideras que las soluciones a las que llegaste en tus actividades de modelación podrían considerarse útiles si fuera la realidad? En la resolución de los problemas planteados, ¿consideras que es importante tomar en cuenta que haya coherencia en la responsabilidad de las decisiones a las que llegas? ¿Por qué lo crees así?

Se dio respuesta a la pregunta de investigación: ¿Qué elementos de modelación matemática se pueden observar en una clase de matemáticas para futuros ingenieros? a través de las fases e indicadores de la rúbrica articulada de modelación matemática y pensamiento crítico. En las observaciones y entrevistas se puso atención en destacar aquellos elementos que aparecen en el trabajo colaborativo de los estudiantes con las situaciones problemas planteadas, las dificultades a las que se enfrentan y las habilidades que se ponen de manifiesto.

Con respecto a la pregunta: ¿Cuál es el nivel de pensamiento crítico que es desarrollado en un curso de matemáticas para futuros ingenieros? se hizo uso de los resultados de la prueba de Pensamiento Crítico Cornell de como primer paso, identificando equipos de trabajo en diferentes niveles de esta competencia de

pensamiento crítico y se profundizó con las observaciones del trabajo colaborativo, las entrevistas y las reflexiones.

Sobre la pregunta de investigación: ¿Cuáles son las habilidades de pensamiento crítico que una clase de matemáticas para futuros ingenieros puede contribuir a su desarrollo a través de la modelación matemática? Se analizaron los resultados de la prueba de Pensamiento Crítico de Cornell en las diferentes secciones así como los resultados de las observaciones, entrevistas y reflexiones haciendo uso de la rúbrica articulada.

Finalmente, es importante establecer que, en la investigación educativa, cómo en otras disciplinas, la ética profesional es irrenunciable al realizar cualquier estudio ya que éste influye de manera directa o indirecta con los derechos de las personas. Por ello, se tomaron en cuenta elementos importantes que se deben considerar en este tema (Álvarez- Gayou, 2012, pp. 210 y 211):

- El consentimiento informado. Se refiere a que se debe informar a las personas que participan en la investigación de manera general sobre ella.
- Confidencialidad, es decir, la información personal de los participantes no se divulgará.
- Se deberán evaluar las consecuencias de la realización del estudio de tal manera que se decida si se lleva a cabo o no.
- El papel del investigador se refiere a la sensibilidad del investigador para identificar un problema ético y la responsabilidad de actuar en función de los hallazgos.

Capítulo 4: Resultados

En este capítulo se presenta los resultados del análisis de los datos cualitativos y cuantitativos recolectados durante el estudio con el interés de responder a la pregunta de investigación: ¿Cuáles son las contribuciones de la modelación matemática en el desarrollo de la competencia de pensamiento crítico en futuros ingenieros? Al inicio del capítulo se muestran los resultados del análisis de la aproximación cuantitativa y se continua con los resultados del análisis de la aproximación cualitativa. Finalmente, para cerrar el capítulo, se lleva a cabo una discusión de los resultados a partir de una comparación de los enfoques a la luz de la pregunta de investigación y los objetivos de ésta.

4.1 Aproximación cuantitativa

En el inicio del curso y, una vez que se llevó a cabo la traducción, validación y pilotaje de la prueba de Pensamiento Crítico de Cornell, ésta se aplicó a los grupos experimental y de control. La aplicación de la prueba, además de aplicarse al inicio (preprueba), también se aplicó al final (posprueba) del curso.

De los 74 alumnos que constituyeron el grupo experimental (40 alumnos de un grupo y 34 del segundo grupo a los cuales se les propuso la participación voluntaria), 52 estudiantes respondieron la preprueba. Al finalizar el curso, 18 alumnos accedieron a contestar la posprueba. Como se ha comentado con antelación, el cambio de una clase

presencial a una clase en línea dificultó significativamente la cantidad de participantes.

Al inicio los alumnos estuvieron de acuerdo y entusiasmados por participar, sin embargo, el hecho de llevar todas sus clases en modalidad virtual representó un esfuerzo mayor para los alumnos sintiéndose en muchas ocasiones cansados, abrumados y con dificultades para adaptarse a este estilo de clases. Considerando esta situación, se les pidió a los alumnos contestar la posprueba en un momento del día en el que pudieran dedicar el tiempo necesario y que evitaran distractores para concentrarse en sus respuestas.

El grupo control se formó con 40 estudiantes, de los cuales 24 respondieron la preprueba. Al finalizar el curso el interés por participar voluntariamente disminuyó, esto debido a la falta de tiempo por parte de los estudiantes ya que al finalizar el curso se encontraban con proyectos y exámenes finales. Se llevó a cabo una ardua labor de convencimiento y 18 estudiantes consintieron dar respuesta a la posprueba. En la Tabla 14 se muestra esta información sobre los participantes.

Tabla 14

Estudiantes de los grupos experimental y control que aplicaron al instrumento

	Total de integrantes	Cantidad de estudiantes que contestaron	
		Preprueba	Posprueba
Grupo experimental	74	52	18
Grupo control	40	24	18

4.1.1 Comparación de medianas del grupo experimental

Con los datos recolectados, se llevó a cabo una comparación de medianas de las preprueba y posprueba a partir del análisis estadístico. Como primer paso, se trató de

determinar la normalidad de los datos de las pruebas a través de las pruebas de Anderson Darling (AD), Ryan – Joiner (RJ) y Shapiro- Wilk (SW).

Las hipótesis planteadas para la normalidad de los datos son:

H₀: Los datos siguen una distribución normal

H₁: Los datos no siguen una distribución normal

El valor – p que resultó de las pruebas fueron: AD = 0.219, RY > 0.100 y SW = 0.140. Como el valor – p de cada una de las tres pruebas es mayor al nivel de significancia 0.05, se acepta la hipótesis nula, es decir, los datos de la preprueba siguen una distribución normal.

Para determinar la normalidad de los datos recolectados de la posprueba, se llevó a cabo el mismo procedimiento de la preprueba. El valor – p que resultó de las pruebas fueron: AD = 0.469, RY = 0.219 y SW = 0.063. Como el valor – p de cada una de las tres pruebas es mayor al nivel de significancia 0.05, se acepta la hipótesis nula, es decir, los datos de la posprueba siguen una distribución normal.

Aún y cuando los resultados estadísticos del valor – p muestran que los datos de las pruebas aplicados a los alumnos provienen de una distribución normal, se utilizarán pruebas no paramétricas en el estudio debido a dos razones. Por un lado, como veremos en la siguiente sección, la posprueba de grupo control no sigue una distribución normal y; por otro lado, el tamaño de cada muestra es menor a 30 datos, por lo que es recomendable el uso de pruebas no paramétricas.

Una vez que se determinó la normalidad de los datos, se llevó a cabo una comparación de las medianas de la preprueba y posprueba a partir de la prueba T de

Wilcoxon. Esta prueba es muy utilizada para conocer el efecto ante determinados tratamientos o procedimientos. Las hipótesis planteadas para indagar si hay diferencia significativa fueron:

H₀: No hay diferencia significativa en el nivel de pensamiento crítico antes y después de la intervención.

H₁: Hay diferencia significativa en el nivel de pensamiento crítico antes y después de la intervención.

En la Figura 27 se muestran estadísticas descriptivas y el valor – p de la prueba del grupo experimental.

Figura 27

Valor – p de la prueba de Wilcoxon para medianas relacionadas del grupo experimental

Prueba de clasificación con signos de Wilcoxon: Dif. G-Ex

Método

η: mediana de Dif. G-Ex

Estadísticas descriptivas

Muestra	N	Mediana
Dif. G-Ex	18	-4

Prueba

Hipótesis nula H₀: η = 0
 Hipótesis alterna H₁: η ≠ 0

Muestra	Número de Estadística		Valor p
	prueba de Wilcoxon		
Dif. G-Ex	17	0.00	0.000

Dado que el valor – p (0.000) es menor que el nivel de significancia $\alpha = 0.5$, se puede afirmar que hay una diferencia significativa en el nivel de pensamiento crítico después de la intervención.

4.1.2 Comparación de medianas del grupo control

Con los datos recolectados, se llevó a cabo una comparación de medianas de las preprueba y posprueba a partir del análisis estadístico. Como primer paso, se trató de determinar la normalidad de los datos de las pruebas a través de las pruebas de Anderson Darling (AD), Ryan – Joiner (RJ) y Shapiro- Wilk (SW).

Las hipótesis planteadas para la normalidad de los datos son:

H₀: Los datos siguen una distribución normal

H₁: Los datos no siguen una distribución normal

El valor – p que resultó de las pruebas fueron: AD = 0.127, RY > 0.100 y SW = 0.134. Como el valor – p de cada una de las tres pruebas es mayor al nivel de significancia 0.05, se acepta la hipótesis nula, es decir, los datos de la preprueba siguen una distribución normal.

Para determinar la normalidad de los datos recolectados de la posprueba, se llevó a cabo el mismo procedimiento de la preprueba. El valor – p que resultó de las pruebas fueron: AD = 0.086, RY > 0.100 y SW = 0.046. A pesar de que el valor – p de cada una de las primeras dos pruebas es mayor al nivel de significancia 0.05, no se acepta la hipótesis nula debido a que el valor – p de la prueba SW es menor al nivel de significancia; además, por ser el tamaño de la muestra menor a 30 es recomendable el uso de pruebas no paramétricas.

Una vez que se determinó la normalidad de los datos, se llevó a cabo una comparación de las medianas de la preprueba y posprueba a partir de la prueba T de

Wilcoxon. Las hipótesis planteadas para indagar si hay diferencia significativa fueron:

H₀: No hay diferencia significativa en el nivel de pensamiento crítico al finalizar el curso.

H₁: Hay diferencia significativa en el nivel de pensamiento crítico al finalizar el curso.

En la Figura 28 se muestran estadísticas descriptivas y el valor – p de la prueba del grupo control.

Figura 28

Valor – p de la prueba de Wilcoxon para medianas relacionadas del grupo control

Prueba de clasificación con signos de Wilcoxon: Dif. G-Ctrol

Método

η : mediana de Dif. G-Ctrol

Estadísticas descriptivas

Muestra	N	Mediana
Dif. G-Ctrol	18	-1

Prueba

Hipótesis nula H₀: $\eta = 0$

Hipótesis alterna H₁: $\eta \neq 0$

Muestra	Número de prueba de Wilcoxon	Estadística	Valor p
Dif. G-Ctrol	17	36.50	0.062

Dado que el valor – p (0.062) es mayor que el nivel de significancia $\alpha = 0.5$, se puede afirmar que no hay una diferencia significativa en el nivel de pensamiento crítico al finalizar el curso.

4.1.3 Comparación de pospruebas entre grupo experimental y control

Con los datos recolectados, se llevó a cabo una comparación de medianas de las pospruebas de los grupos experimental y de control a partir del análisis estadístico.

Se calculó la prueba U de Mann - Whitney para muestras independientes para ver si hay diferencias significativas entre las medianas de las pospruebas de los grupos experimental y de control.

Las hipótesis planteadas para indagar si hay diferencia significativa fueron:

H₀: No hay diferencia significativa entre las medianas de las pospruebas de los grupos experimental y control

H₁: Hay diferencia significativa entre las medianas de las pospruebas de los grupos experimental y control

También se planteó una hipótesis alternativa donde se establece que la mediana del grupo experimental no solo es diferente, sino que es mayor al grupo control. Las hipótesis quedan de esta manera:

H₀: No hay diferencia entre las medianas de las pospruebas de los grupos experimental y control.

H₁: La mediana de la posprueba del grupo experimental es mayor que la mediana de la posprueba del grupo control.

En la Figura 29 se muestra el valor – p para cada planteamiento de hipótesis sobre las pospruebas de las muestras de los grupos experimental y de control.

Figura 29

Valor – p de la prueba U Mann – Whitney para medianas de las pospruebas de los grupos experimental y de control

Mann-Whitney: Posp G-Ex, Posp G-Ctrol

Método

η_1 : mediana de Posp G-Ex
 η_2 : mediana de Posp G-Ctrol
 Diferencia: $\eta_1 - \eta_2$

Estadísticas descriptivas

Muestra	N	Mediana
Posp G-Ex	18	46.0
Posp G-Ctrol	18	40.5

Estimación de la diferencia

Diferencia	IC para la diferencia	Confianza lograda
7	(1, 14)	95.20%

Prueba

Hipótesis nula $H_0: \eta_1 - \eta_2 = 0$
 Hipótesis alterna $H_1: \eta_1 - \eta_2 \neq 0$

Método	Valor W	Valor p
No ajustado para empates	402.00	0.030
Ajustado para empates	402.00	0.030

Mann-Whitney: Posp G-Ex, Posp G-Ctrol

Método

η_1 : mediana de Posp G-Ex
 η_2 : mediana de Posp G-Ctrol
 Diferencia: $\eta_1 - \eta_2$

Estadísticas descriptivas

Muestra	N	Mediana
Posp G-Ex	18	46.0
Posp G-Ctrol	18	40.5

Estimación de la diferencia

Diferencia	Límite inferior para la diferencia	Confianza lograda
7	2	95.16%

Prueba

Hipótesis nula $H_0: \eta_1 - \eta_2 = 0$
 Hipótesis alterna $H_1: \eta_1 - \eta_2 > 0$

Método	Valor W	Valor p
No ajustado para empates	402.00	0.015
Ajustado para empates	402.00	0.015

Como el Valor – p (0.030) es inferior al valor $\alpha = 0.05$, podemos afirmar que existen diferencias significativas en las pospruebas, específicamente se puede afirmar que estadísticamente la mediana de la posprueba del grupo experimental es mayor que la mediana de la posprueba del grupo control (Valor – p = 0.015). Por lo tanto la estrategia de modelación matemática contribuye al desarrollo de pensamiento crítico en los alumnos del grupo experimental.

4.1.4 Resultados por niveles y secciones de la prueba de pensamiento crítico

Además de aplicar la prueba de Wilcoxon para determinar si hay una diferencia significativa en el nivel de pensamiento crítico después de la intervención de la estrategia de modelación matemática, se establecieron tres niveles de pensamiento crítico para la prueba de Pensamiento Crítico de Cornell. Estos niveles, permitieron clasificar los resultados de los estudiantes y facilitaron las observaciones de los datos. Los intervalos de clase que se establecieron fueron:

- a) Bajo $X < 43$
- b) Intermedio $43 \leq X \leq 50$
- c) Alto $X > 50$

Además se calcularon los resultados de la prueba por cada sección por alumno que contestó la preprueba y posprueba. La prueba de Cornell tiene cuatro secciones y cada una de ellas cuenta con una cantidad de ítems diferente. Estas secciones evalúan lo siguiente:

- a) Sección I. Inducción (23 ítems). En términos generales, el apoyo a una hipótesis proviene de su capacidad para explicar hechos que son inconsistentes con los competidores de la hipótesis, de cosas que apoyan la plausibilidad general de la hipótesis y de información que está en conflicto con cosas que podrían debilitar el sustento de una hipótesis.
- b) Sección II. Credibilidad de las fuentes y observación (24 ítems). Las decisiones acerca de las creencias o las acciones suelen ocurrir con el contexto de un problema

y deben partir de algún fundamento. Este fundamento pueden ser observaciones, afirmaciones hechas por alguna fuente, y/o algunas proposiciones hechas previamente aceptadas. Los juicios sobre credibilidad son juicios sobre si creer, y en qué medida, la afirmación de otra persona, generalmente en una situación en la que el que enjuicia no tiene acceso directo a la base de la afirmación.

c) Sección III. Deducción (14 ítems). En general, estos elementos de deducción no están cargados de emociones, pero requieren interpretación en el lenguaje cotidiano. Las explicaciones se limitan al uso de términos como "antecedente" y "consecuente" (La parte "si" de un enunciado "si-entonces" es el antecedente. La otra parte es el consecuente).

d) Sección IV. Identificación de supuestos (10 ítems). Un criterio básico para una suposición es que llena un vacío en el razonamiento. En cada uno de estos elementos, una declaración llena el vacío más completamente que las otras dos.

Es importante aclarar que, aún y cuando las secciones establecen lo que se evalúa, existe un traslape e interdependencia entre ellas en el proceso del pensamiento crítico. Por ejemplo, la deducción es útil para identificar posibles candidatos para un supuesto en una línea de razonamiento determinada. La predicción para evaluar una hipótesis también requiere deducción. Esto lleva a establecer que el pensamiento crítico no es un concepto unidimensional.

Los puntajes por sección de los estudiantes que contestaron la preprueba y posprueba se muestran en la Tabla 15. En ella se presenta la cantidad de ítems correctos por sección y el porcentaje que representa en relación con el total de ítems que cuenta la sección.

Tabla 15*Puntajes por sección de estudiantes de preprueba y posprueba*

	PREPRUEBA		POSPRUEBA		PREPRUEBA		POSPRUEBA		PREPRUEBA		POSPRUEBA		PREPRUEBA		POSPRUEBA	
	Sec. I	%	Sec. I	%	Sec. II	%	Sec. II	%	Sec. III	%	Sec. III	%	Sec. IV	%	Sec. IV	%
Alum 1	15	65.2	14	60.9	8	33.3	14.0	58.3	12	85.7	12	85.7	6	60	6	60
Alum 2	16	69.6	16	69.6	15	62.5	19.0	79.2	10	71.4	12	85.7	5	50	7	70
Alum 3	13	56.5	15	65.2	10	41.7	14.0	58.3	11	78.6	12	85.7	4	40	5	50
Alum 4	17	73.9	20	87.0	12	50.0	9.0	37.5	9	64.3	11	78.6	2	20	2	20
Alum 5	18	78.3	14	60.9	11	45.8	15.0	62.5	10	71.4	11	78.6	6	60	6	60
Alum 6	17	73.9	17	73.9	16	66.7	19.0	79.2	9	64.3	12	85.7	5	50	8	80
Alum 7	12	52.2	18	78.3	15	62.5	13.0	54.2	12	85.7	13	92.9	6	60	5	50
Alum 8	15	65.2	16	69.6	13	54.2	15.0	62.5	10	71.4	11	78.6	7	70	8	80
Alum 9	17	73.9	12	52.2	8	33.3	11.0	45.8	12	85.7	13	92.9	2	20	5	50
Alum 10	15	65.2	13	56.5	10	41.7	9.0	37.5	10	71.4	11	78.6	3	30	7	70
Alum 11	16	69.6	23	100.0	12	50.0	14.0	58.3	12	85.7	13	92.9	7	70	5	50
Alum 12	15	65.2	12	52.2	11	45.8	12.0	50.0	9	64.3	10	71.4	5	50	6	60
Alum 13	17	73.9	19	82.6	15	62.5	14.0	58.3	12	85.7	13	92.9	8	80	8	80
Alum 14	17	73.9	16	69.6	10	41.7	11.0	45.8	7	50.0	10	71.4	2	20	6	60
Alum 15	16	69.6	14	60.9	17	70.8	21.0	87.5	11	78.6	12	85.7	7	70	8	80
Alum 16	8	34.8	9	39.1	7	29.2	8.0	33.3	6	42.9	6	42.9	1	10	1	10
Alum 17	17	73.9	20	87.0	15	62.5	17	70.8	13	92.9	12	85.7	7	70	6	60
Alum 18	13	56.5	13	56.5	7	29.2	7	29.2	5	35.7	8	57.1	4	40	5	50

De manera general, se puede observar que las secciones con mayor dominio corresponden a la Sección III: Deducción, con un rango de 71% a 93% y en segundo término a la Sección I: Inducción con un rango de 52% a 100%. La Sección II: Credibilidad de las fuentes y observación se muestra más baja, de 38% a 88% y, aún y cuando el valor máximo es 88%, nueve estudiantes de 17 no pasan del 60%. En la Sección IV: Identificación de supuestos, se observa el mayor aumento entre la preprueba y la posprueba. En esta sección con diez ítems los incrementos van de uno a cuatro ítems correctos entre pruebas, diez de dieciocho alumnos se encuentran en esa situación, cinco notuvieron cambio y en tres disminuyó su puntaje. Cabe mencionar que no se consideró el puntaje de un alumno (#16) que difiere significativamente con respecto a los demás.

Desde la perspectiva de analizar los datos a partir del nivel de pensamiento crítico de los alumnos, los resultados se clasificaron en tres niveles. En el nivel bajo (puntaje menor a 43) se encontró que la sección con más alto nivel es la de Deducción (sección III). Se observó que sólo un estudiante quedó con el mismo puntaje, los otros cinco aumentaron en esta habilidad. Esta situación también se observa en la sección de identificación de supuestos (sección 4), es decir, solo un alumno quedó con el mismo puntaje y los demás los aumentaron.

Con respecto a la sección de inducción (sección I), se observó que hay diferencias de puntajes, dos aumentaron, uno permaneció igual y tres disminuyeron. Las disminuciones son más significativas que los aumentos por lo que se puede afirmar que para los estudiantes es difícil generar una conclusión general a partir de circunstancias particulares. En la sección de credibilidad de las fuentes y observación se encontró que hay aumentos y disminuciones. Esto se puede asociar con la dificultad para reconocer las variables relevantes. En la Tabla 16 se muestra los datos de puntajes de los estudiantes con nivel bajo.

Tabla 16

Puntajes de la prueba de Pensamiento Crítico de Cornell por secciones de estudiantes de nivel bajo.

	PREPRUEBA		POSPRUEBA		PREPRUEBA		POSPRUEBA		PREPRUEBA		POSPRUEBA		PREPRUEBA		POSPRUEBA		PREPRUEBA		POSPRUEBA	
	Sec. I	%	Sec. I	%	Sec. II	%	Sec. II	%	Sec. III	%	Sec. III	%	Sec. IV	%	Sec. IV	%	Total	%	Total	%
Alum 4	17	73.9	20	87.0	12	50.0	9.0	37.5	9	64.3	11.0	78.6	2	20	2	20	40	56.3	42	59.2
Alum 9	17	73.9	12	52.2	8	33.3	11.0	45.8	12	85.7	13.0	92.9	2	20	5	50	39	54.9	41	57.7
Alum 10	15	65.2	13	56.5	10	41.7	9.0	37.5	10	71.4	11.0	78.6	3	30	7	70	38	53.5	40	56.3
Alum 12	15	65.2	12	52.2	11	45.8	12.0	50.0	9	64.3	10.0	71.4	5	50	6	60	40	56.3	40	56.3
Alum 16	8	34.8	9	39.1	7	29.2	8.0	33.3	6	42.9	6.0	42.9	1	10	1	10	22	31.0	24	33.8
Alum 18	13	56.5	13	56.5	7	29.2	7	29.2	5	35.7	8	57.1	4	40	5	50	29	40.8	32	45.1

Con respecto al nivel intermedio, se pudo observar que la sección III de Deducción es la que tiene más alto rango y todos los estudiantes aumentaron su puntaje. De acuerdo con estos datos, se puede afirmar que en este grupo los alumnos establecieron hipótesis tratando de explicar o solucionar los problemas propuestos intentando deducir consecuencias o resultados que se pudieran validar en la experimentación, en este caso, la simulación a través del software Vensim.

En la sección IV identificación de supuestos, se observó que no hubo disminuciones en los puntajes entre la preprueba y posprueba. Dos estudiantes permanecieron igual y tres aumentaron su puntaje. En relación con la sección I de inducción y la sección II de credibilidad de las fuentes y observación, se encontró que en ambas secciones hay aumentos y disminuciones, por lo que se concluye que los alumnos requieren fortalecer estas áreas. A pesar de que no se encontró un patrón, la sección I tiene un mejor puntaje que la sección II y sus rangos son pequeños, es decir, los puntajes de los estudiantes difieren muy poco. En la Tabla 17 se muestra los datos de puntajes de los estudiantes con nivel intermedio.

Tabla 17

Puntajes de la prueba de Cornell por secciones de estudiantes de nivel intermedio

	PREPRUEBA		POSPRUEBA		PREPRUEBA		POSPRUEBA		PREPRUEBA		POSPRUEBA		PREPRUEBA		POSPRUEBA		PREPRUEBA		POSPRUEBA	
	Sec. I	%	Sec. I	%	Sec. II	%	Sec. II	%	Sec. III	%	Sec. III	%	Sec. IV	%	Sec. IV	%	Total	%	Total	%
Alum 1	15	65.2	14	60.9	8	33.3	14	58.3	12	85.7	12	85.7	6	60	6	60	41	57.7	46	64.8
Alum 3	13	56.5	15	65.2	10	41.7	14	58.3	11	78.6	12	85.7	4	40	5	50	38	53.5	46	64.8
Alum 5	18	78.3	14	60.9	11	45.8	15	62.5	10	71.4	11	78.6	6	60	6	60	45	63.4	46	64.8
Alum 7	12	52.2	18	78.3	15	62.5	13	54.2	12	85.7	13	92.9	6	60	5	50	45	63.4	49	69.0
Alum 8	15	65.2	16	69.6	13	54.2	15	62.5	10	71.4	11	78.6	7	70	8	80	45	63.4	50	70.4
Alum 14	17	73.9	16	69.6	10	41.7	11	45.8	7	50.0	10	71.4	2	20	6	60	36	50.7	43	60.6

Para el grupo de estudiantes de nivel alto, la sección con mayor puntaje es la sección III de Deducción. En esta sección se observó aumento de puntaje de cinco de seis estudiantes. Además, en la posprueba, todos los puntajes están por arriba de 85% lo cual significa que los alumnos alcanzaron el dominio de esta sección al finalizar el curso. Con respecto a la sección II credibilidad de las fuentes y observación, se encontró que, a excepción de un alumno, los demás aumentaron su puntaje con más de un ítem. Este resultado lleva a la afirmación que en este grupo los estudiantes reconocieron las variables relevantes y encontraron problemas que pudieron relacionarlos con aquellos propuestos para buscar pasos similares en el proceso para su solución.

En la sección I inducción, el rango de los puntajes que se encontró fue de 61% a 100%, tres alumnos aumentaron sus puntajes con más de un ítem, dos permanecieron igual y sólo uno bajó su puntaje. Sobre la sección IV identificación de supuestos, un alumno disminuyó su puntaje y otro se mantuvo igual; los cuatro restantes aumentaron su puntaje. En la Tabla 18 se muestra los datos de puntajes de los estudiantes con nivel alto.

Tabla 18

Puntajes de la prueba de Cornell por secciones de estudiantes de nivel alto

	PREPRUEBA		POSPRUEBA		PREPRUEBA		POSPRUEBA		PREPRUEBA		POSPRUEBA		PREPRUEBA		POSPRUEBA		PREPRUEBA		POSPRUEBA	
	Sec. I	%	Sec. I	%	Sec. II	%	Sec. II	%	Sec. III	%	Sec. III	%	Sec. IV	%	Sec. IV	%	Total	%	Total	%
Alum 2	16	69.6	16	69.6	15	62.5	19	79.2	10	71.4	12	85.7	5	50	7	70	46	64.8	54	76.1
Alum 6	17	73.9	17	73.9	16	66.7	19	79.2	9	64.3	12	85.7	5	50	8	80	47	66.2	56	78.9
Alum 11	16	69.6	23	100.0	12	50.0	14	58.3	12	85.7	13	92.9	7	70	5	50	47	66.2	55	77.5
Alum 13	17	73.9	19	82.6	15	62.5	14	58.3	12	85.7	13	92.9	8	80	8	80	52	73.2	54	76.1
Alum 15	16	69.6	14	60.9	17	70.8	21	87.5	11	78.6	12	85.7	7	70	8	80	51	71.8	55	77.5
Alum 17	17	73.9	20	87.0	15	62.5	17	70.8	13	92.9	12	85.7	7	70	6	60	52	73.2	55	77.5

De manera general se puede observar que sólo un alumno permaneció con el mismo puntaje entre la preprueba y posprueba, todos los demás aumentaron su puntaje al finalizar el curso. En los casos donde los alumnos permanecen en un mismo nivel, hay un aumento de puntaje. Para nivel bajo, este aumento es en general de 2 puntos; en el nivel intermedio hay aumento de cuatro y cinco puntos y en el nivel alto hay un aumento de 2 a 4 puntos. En base a estos resultados se puede afirmar que el nivel de pensamiento crítico de los alumnos del grupo experimental mejoró durante el desarrollo del curso.

En relación con los alumnos que pasaron de nivel intermedio a alto, se encontró que fueron los puntajes con mayor cambio positivo. Con respecto a los estudiantes que desde el inicio del curso se encontraban en nivel alto, se observa que sigue aumentando su puntaje. En la Tabla 19 se muestra los niveles de pensamiento crítico al inicio y al final del curso y los cambios en los puntajes de cada alumno.

Tabla 19

Puntajes por niveles de pensamiento crítico y cambios al inicio y finalización del curso

Alum	Preprueba		Posprueba		Preprueba			Posprueba			Preprueba		Posprueba		Δ
	Total	%	Total	%	Nivel	Nivel	Δ	Alum	Total	%	Total	%	Nivel pre	Nivel pos	
4	40	56.3	42	59.2	Bajo	Bajo	+2	5	45	63.4	46	64.8	Intermedio	Intermedio	+1
9	39	54.9	41	57.7	Bajo	Bajo	+2	7	45	63.4	49	69.0	Intermedio	Intermedio	+4
10	38	53.5	40	56.3	Bajo	Bajo	+2	8	45	63.4	50	70.4	Intermedio	Intermedio	+5
12	40	56.3	40	56.3	Bajo	Bajo	=	2	46	64.8	54	76.1	Intermedio	Alto	+8
16	22	31.0	24	33.8	Bajo	Bajo	+2	6	47	66.2	56	78.9	Intermedio	Alto	+9
18	30	42.2	29	40.8	Bajo	Bajo	+2	11	47	66.2	55	77.5	Intermedio	Alto	+8
1	41	57.7	46	64.8	Bajo	Intermedio	+5	13	52	73.2	54	76.1	Alto	Alto	+2
3	38	53.5	46	64.8	Bajo	Intermedio	+8	15	51	71.8	55	77.5	Alto	Alto	+4
14	36	50.7	43	60.6	Bajo	Intermedio	+7	17	52	73.2	55	77.5	Alto	Alto	+3

4.2 Aproximación cualitativa

En relación con el trabajo colaborativo de los alumnos, las sesiones de trabajo de las situaciones problema (la etapa de mezclas/sesión 2 y la etapa del caso de la pesca en el lago/sesión 3) fueron grabadas ya que el curso se impartió 100% en formato virtual por cuestiones de pandemia (anteriormente era presencial), estas grabaciones fueron hechas y entregadas por los mismos alumnos que formaron los equipos en la aplicación de Zoom, así como un reporte sobre la decisión a la que llegaron.

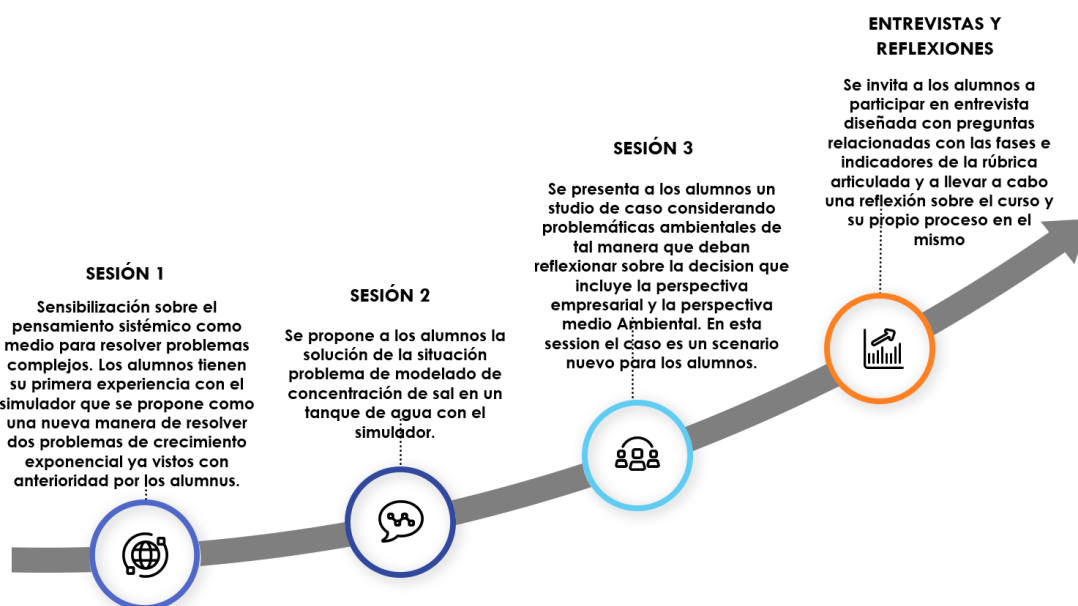
Para las entrevistas semiestructuradas realizadas a los estudiantes se elaboró una lista de preguntas que se relacionaron con las fases e indicadores de la rúbrica articulada (ver sección 3.4). Con respecto a las reflexiones de los estudiantes, la profesora a cargo del curso ofreció una serie de preguntas que les sirvieran de retroalimentación a los estudiantes. Estas preguntas, tanto de la entrevista como de las reflexiones se presentan en el capítulo 3 en la sección 3.4., cabe mencionar que se propusieron como algo totalmente voluntario para los alumnos. Como se puede observar, se cuenta con los instrumentos de observaciones del trabajo colaborativo de los alumnos, las entrevistas, las reflexiones y la prueba de Pensamiento Crítico de Cornell para llevar a cabo la triangulación y análisis.

La comprensión de las competencias y habilidades de modelado matemático está relacionada con la definición de su proceso (Maass, 2006) por lo que en este análisis se relacionan los datos a partir de las competencias de modelación matemática de Blum y Kaiser (1997) que se presentan en la sección 1.1.2 y las habilidades de pensamiento crítico según Ennis (1985) y Paul y Elder (2005) expuestas en la sección 1.2.4.

El proceso que se llevó a cabo se explica con mayor profundidad en la sección 3.3.2, sin embargo, en este apartado se resume para tenerlo presente y claro. El ambiente del curso se da en las sesiones que se llevaron a cabo y se explican, como se ha dicho, en el capítulo anterior. En estas sesiones se va presentando al alumno una modelación básica, como en la primera sesión y va avanzando a una modelación intermedia y situaciones intencionadas donde se hace énfasis, por ejemplo, en la traducción del modelo, en la solución de éste, o bien, en la interpretación de la solución. Este resumen se puede ver en la Figura 30.

Figura 30

Resumen del proceso de trabajo con los alumnos participantes



A continuación y de acuerdo con la rúbrica mostrada en la sección 3.3.1.1 (p. 149) procedemos a realizar a detalle el análisis cualitativo.

4.2.1 Fase de formulación de modelación matemática

En esta primera fase del proceso de modelación matemática, de acuerdo con Blum y Kaiser (1997), se encuentran las competencias para comprender el problema real y establecer un modelo basado en la realidad. Estas competencias las contempla Ennis (1985) como aquellas habilidades que llevan a la aclaración del problema o situación. Afirma que si no se tiene claro lo que se va a hacer o decir, resultará muy difícil reaccionar, proponer o juzgar.

De acuerdo con Ennis (2005), para aclarar la información, la primera habilidad que se requiere es identificar el aspecto central de un tema, de una cuestión o conclusión ya que, si no se sabe a qué se debe prestar atención, no se sabrá qué hacer con todo lo demás. Otra de las habilidades es analizar argumentos identificando razones o premisas, suposiciones, lo que es o no relevante, ver la estructura del argumento y resumir dicha información. Ennis establece que se debe ser capaz de hacerse preguntas que aclaren o desafíen, la pregunta básica del pensamiento crítico es: ¿por qué? Además, es necesario concebir y juzgar definiciones e identificar proposiciones implícitas que se dan por sentadas como base para un argumento o una acción.

Así mismo, Paul y Elder (2005) establece como elementos del pensamiento crítico, el propósito u objetivo, el problema o asunto y la información como datos, hechos, observaciones o experiencias. De acuerdo con estos autores, todo razonamiento tiene un propósito, es decir, es un intento de solucionar un problema, resolver una pregunta o explicar algo; y se fundamenta en supuestos. Para llevar a cabo estos elementos del pensamiento crítico en esta fase es necesario cuestionarse qué se trata de lograr, cuál es

el tema central, qué información se está usando para llegar a esa conclusión, qué información se necesita para resolver el problema o situación, cuál es la idea central y si se es capaz de explicarla, qué se está dando por sentado.

En la Tabla 20 se muestran los indicadores de la rúbrica que articulan las sub-competencias de la modelación matemática de la primera fase de su ciclo (fase de formulación) y las habilidades de pensamiento crítico que se relacionan. Esta articulación o engranaje, nos permite concertar las competencias de la modelación matemática y el pensamiento crítico evidenciando, de esta manera, sus sub-competencias. En los siguientes fragmentos del trabajo colaborativo, de las entrevistas y de las reflexiones de los estudiantes que se presentan en las subsecciones de cada competencia se describe cómo trabajan en común las competencias de modelación y pensamiento crítico.

Tabla 20

Descripción técnica de indicadores de rúbrica, competencias y habilidades de MM y PC para fase de formulación

Rúbrica	Modelación Matemática	Pensamiento crítico	
Fase de formulación	Competencias para comprender el problema real y establecer un modelo basado en la realidad (Blum y Kaiser, 1997).	Habilidades que implican la aclaración del problema o situación (Ennis, 1985). Como elementos del pensamiento crítico: propósito del pensamiento crítico, pregunta o asunto en cuestión e información (Paul y Elder, 2005)	
Indicadores:	Sub competencias:		
Identifica el problema o situación del mundo real	Comprender el problema real y construir relaciones entre las variables.	Identificar el aspecto central del tema, de la pregunta o de la conclusión	Identificar o formular una pregunta. Identificar o formular un criterio para juzgar posibles respuestas. Tomar en cuenta la situación.
Explicación del problema o situación	Buscar información disponible y diferenciar entre información relevante e irrelevante	Analizar argumentos	Identificando conclusiones. Identificar las razones declaradas y no declaradas. Ver similitudes y diferencias. Identificar y manejar la irrelevancia. Ver la estructura de un argumento. Resumir.

Identifica las partes o datos relevantes del problema para su solución	Reconocer cantidades que influyen en la situación, nombrarlas e identificar variables clave	Definir términos, juzgar definiciones	Identificar los conceptos claves y explicarlos con claridad. Considerar conceptos o definiciones alternos de los conceptos.
Identifica estrategias para abordar el problema para su solución	(Cuestionarse es una habilidad que se utiliza en todas las competencias aquí enlistadas)	Hacer y contestar preguntas que aclaran o desafían	¿Por qué? ¿Qué quieres decir con _____? ¿Qué puede ser un ejemplo? ¿Cómo se puede aplicar a esta situación? ¿Qué diferencia hace? ¿Cuáles son los hechos? ¿Es esto lo que estás diciendo ____ ?
Influencia del contexto y suposiciones	Hacer suposiciones para el problema y simplificar situación	Identificar suposiciones no hechas	Razones no declaradas Necesidad de suposiciones: reconstrucción de los argumentos. Identificar claramente los supuestos y determinar si son justificables.

Las sub-competencias de modelación matemática articuladas con las habilidades de pensamiento crítico que se encontraron en las diferentes etapas del curso, es decir, de los datos del trabajo colaborativo de los estudiantes con los problemas planteados, las entrevistas y sus reflexiones se presentan a continuación con una descripción del hallazgo.

4.2.1.1 Sub-competencia: Para comprender el problema real y construir relaciones entre las variables.

Al iniciar el trabajo colaborativo para solucionar los problemas, se observaron dos caminos que tomaban los estudiantes para comprender el problema e identificar las variables. Por un lado, había equipos que leían por su cuenta la situación propuesta y comenzaban a trabajar directo en el software Vensim. Uno de ellos se hacía cargo de armar el modelo en el software y entre todos establecían cuales eran las variables necesarias para construir el modelo y se planteaban cuál es la situación por resolver. Esto se observa en las siguientes conversaciones durante el trabajo colaborativo:

E1: Bueno el problema está aquí. Los 500 galones, va a ser una variable, es como la población total.

Se observa que E1 identifica los 500 galones como información que se debe usar para resolver el problema. E2 hace una relación entre esta situación problema y está dando por sentado que puede hacer una relación de las variables en una situación problema que trabajó con anterioridad. E1 continúa identificando variables y E2 se incorpora a esta identificación relacionando con otra situación que vieron en común con la profesora.

E2: Sí, como el total de la población en el otro problema, sí, es cierto.

*E1: Capacidad del tanque. Luego, contiene originalmente 200 galones. Esto es el primero, como la cantidad inicial... ¡Ah ya! **Primero hay que leer todo.***

*E2: Sí, lo ponemos, sería como el nivel inicial y luego pondríamos el final y luego viene el flujo. **Después debemos describir las variables** como lo hizo la profe, es decir, cómo va variando el flujo.*

E1 sigue trabajando en la identificación de las variables y E2 se cuestiona el aspecto central del tema y llega a una conclusión. La situación problema encamina a que los estudiantes puedan desarrollar las sub-competencias para comprender el problema real y enfocarse en establecer un modelo basado en esta realidad.

*E1: **El flujo es... primero las variables, se me hace que van a ser las libras de sal.** Ponemos en el cuadro los 200 galones, una variable va a ser las 100 libras de sal y luego se introduce el agua al tanque conteniendo una libra de sal por galón. Al final la mezcla del tanque que sería...*

*E2: **No te pide nada en sí, como, ¿qué?, me imagino que es calcular la concentración de sal final.***

(Equipo 9)

En este equipo también se puede observar la identificación de variables; E2 busca encontrar relaciones en un problema de un video con la situación problema que van a

resolver. E1 se une a la identificación de las variables y establece qué información es clave para enfocarse en el modelo matemático.

E2: ...le puse volumen del tanque y en el video hay dos tasas, uno es flujo de salida y otro flujo de entrada.

E1: Lo que nos importa es el volumen del tanque y las entradas van a ser...

E2: Sí, porque es una capacidad de 500 galones que contiene originalmente 200 de agua y tiene 100 libras de sal. Se introduce el agua y sal. Sí, si hay un flujo de entrada y otro de salida.

E1: Ésta no tiene sal.

E2: Si, si tiene 100 libras de sal. Contiene 200 galones de agua. Nada más son estas 3.

E1: En base a eso vamos a construirlo

E2: Hay que poner las ecuaciones como en el tanque. Pues si no, sería flujo de entrada y de salida y el valor inicial es 200 y en unidades son galones, ¿no? (Equipo 1)

La entrevista con el estudiante 2, nos ofrece información que corrobora lo anterior al afirmar que se enfocaba en reflexionar sobre las variables, en sus unidades.

Yo me fijaba mucho en las variables, cómo afectaban esas variables y también me ayudaba el conocer qué unidades tenía para poder armar una respuesta en base a eso.

(Entrevista estudiante 2)

El segundo camino que se observó es que los alumnos leían por su cuenta el problema y posteriormente ya reunidos iniciaban platicando sobre éste de tal manera que trataban de llegar a un consenso en su interpretación y en la identificación de parámetros y variables. En el siguiente fragmento se puede observar el proceso de consenso:

E1: lo que tenemos que hacer es un modelado de mezclas de los primeros problemas que habíamos hecho y es un tanque con una capacidad de 500 galones que contiene originalmente 200 galones de agua en los cuales hay disueltos 100 libras de sal. Se introduce agua al taque conteniendo 1 libra de sal por un galón a una velocidad de 3 galones/min y la mezcla sale del tanque a una velocidad de 6 galones/min... ¿Alguien tiene una idea o algo?

E2: Déjame comparto pantalla. ¿Si lo pueden ver?

E1: Si podemos ver tu pantalla.

E2: **Tenemos $V_{max}=500$, $V_0=200$, $M=100$, $Q_0=3$ gal/min y $Q_f=6$** Bueno ... por un lado tengo la masa, que es una variable, luego el volumen ...

E3: **El volumen cambia así que tiene que ser una caja.**

E2: Sí, ¿es esta no? ... es volumen inicial... y mis variables dependientes son lo que entra y sale que sería 3 y 6 galones.

(Equipo 2)

Yo relacionaba parte del problema con la variable, subrayaba de diferentes colores, al momento de poner una fórmula la ponía del mismo color. Antes de llegar con el equipo, revisaba el problema, identificaba que fórmulas se parecían, buscaba comparar con otras problemáticas que se puedan relacionar. De ahí escribo paso 1, paso 2. en mis procesos, para tener como una guía y poner en esa guía las partes. Con base en un proceso empiezo a montar un esquema.

(Entrevista Estudiante 4)

En entrevistas y reflexiones de los alumnos se pudo observar que existen dificultades para comprender el problema. Se encontró que la comprensión del problema e identificación de variables tomaba hasta una tercera parte del tiempo que se llevaba solucionar el problema planteado. Esto se observó tanto en equipos que se preparaban con anticipación leyendo el problema, como aquellos que se enfocaban directo a trabajar en el software. Por ejemplo, en el siguiente fragmento de la reflexión del estudiante 2, se observa que el mismo estudiante se da cuenta la dificultad que tenía para entender el problema planteado.

Los retos con los que me enfrenté fueron poder relacionar los problemas con los procesos de resolución que necesitan, el reconocer el tipo de problema correctamente desde el inicio.

(Reflexión Estudiante 2)

En la entrevista con el estudiante 1, éste reconoce que la mayor dificultad que tuvieron en el trabajo colaborativo fue relacionar las variables, es decir, reconocer aquella relevantes.

*Primero nos íbamos por lo más fácil, como por ejemplo, el último reto que nos decían: la población final de los peces va a ser el 30% de la población, nos basamos en eso que era lo más fácil, pensabas cien entre 30 y lo implementabas. **Lo más difícil lo relacionábamos con cosas que ya habíamos visto, y sí, si se nos dificultaba relacionar esta parte inicial con la parte de en medio y la parte final. Nuestro error y dificultad era que la parte inicial la relacionábamos con la parte final pero no con lo de en medio. Creo que eso fue nuestro mayor problema. Relacionar variables y procesos.** (Entrevista Estudiante 1)*

Este alumno nos muestra que se cuestiona sobre el problema, lo trata de entender a través de el reconocimiento de variables relevantes y sus relaciones. El alumno considera que puede haber varios errores en este proceso, sin embargo, se ayuda buscando similitudes con otras problemáticas.

*Primero trato de observar o de identificar todos los factores que pueden influir en el fenómeno físico. Por ejemplo en el caso de una viga, influye el perfil de la viga, material, el tipo de carga. Como que trato de identificar como en los tanques, la concentración de sal, por ejemplo, tengo estos factores, **me pregunto cómo puedo traducir esto.** Después de identificar lo que yo creo que influye trato de explicarlo, o de traducirlo en algún modelo que conozca, que haya manejado antes. Obviamente es muy propenso a errores porque no puedes así cualquier fenómeno traducirlo a algo que ya conoces. Ya después de eso trato de investigar si hay algún otro modelo. Como ir tomando pequeñas pistas o basarme en un fenómeno parecido para relacionarlo. (Entrevista Estudiante 3)*

El siguiente equipo después de trabajar en la comprensión del problema y las variables relevantes, siguen analizando los datos para obtener las variables, borran todo lo que llevan en el simulador y comienzan de nuevo. Después de trabajar en el problema,

la profesora va con el equipo para ver sus avances y les pregunta sobre las dificultades que se encontraron.

¿Qué dificultades tuvieron chicos?

O: Mas que nada la lógica de las variables, los valores, las ecuaciones.

M: Como que la parte de decir qué es variable, qué es constante, fue un poquito el problema. Fue un poco de pensar y que las unidades armonizaran. Y ya fue la formade sacarlo.

(Equipo 1)

4.2.1.2 Sub-competencia: Buscar información disponible y diferenciar entre información relevante e irrelevante.

Los alumnos se esforzaban en buscar y relacionar otros problemas que ya habían resuelto con anterioridad, también trataban de encontrar si había una similitud en la problemática para tomar alguna parte del proceso de resolución. En este fragmento del trabajo colaborativo los estudiantes tratan de asociar una situación problema vista en clase sobre temperatura y utilizar esas similitudes con las variables de la nueva situación problema.

E1: Yo solo tengo una duda, no sé si se acuerdan del modelo Vensim de temperatura.

¿Se acuerdan de que había una entrada y una salida?

E3: ¿De la clase pasada?

E1: Si, donde había una entrada y una salida para el cambio ... perdón no es temperatura, es nivel de agua y es donde tienes una flecha después una variable y otra flecha de salida. Pensando en eso yo me imagino que si había una entrada y una salida puede ser que se pueda modelar solo la parte de la entrada para los 3 gal/min y la salida de 6 gal/min muy similar a esa.

E2: Si, si me acuerdo ... bueno entonces ... si vas en lo correcto entonces tendríamos que la constante sería la masa y el volumen máximo, ¿no?

E3: Si

E2: y mis variables dependientes son lo que entra y sale que sería 3 y 6 galones.
(Equipo 2)

Estos fragmentos son del trabajo colaborativo, de entrevista y reflexión; se puede observar que los alumnos se enfocaban en reconocer las variables relevantes, se apoyaban en las unidades de estas variables y buscaban relacionarlas entre sí.

Profesora: ¿Qué dificultades tuvieron chicos?

E2: Más que nada la lógica de las variables, los valores, las ecuaciones

E1: Como que la parte de decir qué es variable, qué es constante, fue un poquito el problema. Fue un poco de pensar y que las unidades armonizaran. Y ya fue la forma de sacarlo.

O: Nos apoyamos un poquito con las unidades para cancelarlas y ver qué podíamos multiplicar con qué...

(Equipo 1)

Primero leíamos bien el problema, bueno esto es un problema parecido a otros problemas que trabajamos anteriormente. Checaba como lo solucionamos matemáticamente en mi libreta... Íbamos relacionando las variables. (Reflexiones Estudiante 1)

Yo me fijaba mucho en las variables, cómo afectaban esas variables y también me ayudaba mucho en conocer qué unidades tenían, y así podía armar una respuesta en base a eso.

(Entrevista Estudiante 2)

4.2.1.3 Sub-competencia: Reconocer cantidades que influyen en la situación, nombrarlas e identificar variables clave.

Los alumnos después de revisar el problema analizaban los datos que encontraban en el mismo. Trataban de reconocer entre variables y parámetros, así como flujos de cambio que debían establecer en el simulador. De vez en cuando perdían de vista las unidades de los datos que podían ayudarles en el reconocimiento de variables y parámetros.

Nuevamente reconocían la importancia de las unidades y buscaban relacionarlas de

manera lógica para encontrar las variables.

*E1: Pues tiene concentración de entrada, flujo de entrada, concentración de salida, flujo de salida; pero la **concentración de salida la tenemos como incógnita**, entonces, es lo que no entiendo*

E3: ¿Es la que nos falta, la concentración de sal?

E1: No entiendo como lo tenemos que modelar

E2: ¿Cómo lo asociamos en el programa, para simular el cambio?

*E1: Ya entendí, **tenemos que poner los 200 galones que sería el contenido inicial**. Luego...*

E2: El 500 lo pones en el dato final

*E1: **Si porque no puedes pasar de 500***

E1: Tenemos que poner que se está introduciendo una libra de sal por galón

E2: Y sale los 6 galones por minuto de la...

(Equipo 6)

Como se puede observar, al inicio, toman los datos de variables pensando que es muy fácil y lógico. Sin embargo, se van dando cuenta que es necesario reflexionar más sobre estas variables y qué representa la cantidad y las unidades. Por ejemplo, cuando reconocen que 500 galones es un dato que te dice que es la cantidad máxima a la que puede llegar a tener y los 200 galones al considerarlos como contenido “original”, se refieren que es un valor inicial.

*E1: ... **primero las variables, se me hace que van a ser las libras de sal.***

*Ponemos en el cuadro los 200 galones **una variable va a ser las 100 libras de sal** y luego se introduce el agua al tanque conteniendo una libra de sal por galón.*

Del tanque sale al final la mezcla que sería...

E2: No te pide nada en sí, como que ¿qué?, Me imagino que es calcular la concentración de sal final.

*E1: Si (está leyendo el problema). **Son 200 galones de agua al principio** y luego le meten 300 galones de agua, ¿no?*

*E2: No hay que definirlo, se deja tal cual así, porque ya los 500 te define como hasta dónde llegaría, **Los 500 es como tu carga máxima porque no se puede pasar porque llega hasta 500, Nada más es como definir las variables, con qué ritmo entra y con qué ritmo sale.** Y la concentración me imagino como que en otra variable aparte*

*E1: **Por mientras podemos decir que una de nuestras cajas va a ser de que 200 galones de agua como contenido original***

(Equipo 9)

*Yo me fijaba mucho en las variables, cómo afectaban esas variables y también me ayudaba el **conocer qué unidades tenía** para poder armar una respuesta en base a eso.*

(Entrevista estudiante 2)

*Entendí cómo se construyen los modelos, **todas las variables que se ven involucradas y todos los usos y aplicaciones que éstas tienen.***

(Reflexión estudiante 3)

4.2.1.4 Sub-competencia: Hacer suposiciones para el problema y simplificar situación

Los alumnos al identificar la información relevante hacían supuestos sobre la misma. Estos supuestos les daban forma a sus puntos de vista y a partir de ellos iban transformando el problema en el simulador. Por ejemplo, en el problema de mezclas, suponían que el tanque se vaciaba porque después de analizar la información de la cantidad de agua que entraba y salía llegaban a esa conclusión. Esa idea la tomaban como cierta y les servía de base a un razonamiento o discusión.

E1: Debemos de ver que se vacía.

E2: Si se vacía, porque sale más de lo que entra pero, aquí el problema es la sal. Una libra de sal por galón.

*E1: Pero por ejemplo, el flujo de salida va a ser lo que haya en el momento cero va a haber desconcentración de salida. Entonces eso no afecta, **lo importante son la entrada y salida para saber en cuanto a las condiciones de sal.** Porque dice: se introduce una libra de sal por galón a una velocidad... O sea la relación de entrada es de 1 libra de sal por galón.*

E2: Entonces entra una libra de sal por galón, entonces en los 3 galones hay 3 libras de sal. Y la mezcla sale de un tanque igual 6 galones de agua y 6 libras de sal.

E1: No sale lo que se está mezclando...

E2: Ah, porque el tanque ya tiene sal. Entonces si entran 3 galones agua, entran 3 libras de sal, pero salen más de 6 libras de sal por lo que ya tenía el tanque adentro

E1: Exacto
E2: Que tenía 100
E1: Entonces ahí sería una variable
E2: Si, si, la sal(Equipo 1)

Los alumnos con ayuda de la herramienta tecnológica (el simulador Vensim) podían trabajar con diferentes supuestos, cambiando y/o agregando variables de tal manera que iban construyendo su modelo.

*Con el programa podías cambiar las variables y podías hacer gráficas de los años, eso te da más de una respuesta final. Puedes controlar para que sea de años futuros o diferentes variables y te ayuda a ver como que más real, **qué pasa si cambias esto, pero se queda aquello igual; o dejamos lo mismo pero traemos otra variable.***

(Entrevista estudiante 1)

*...logras comprender diferentes problemas o ver qué es lo que está sucediendo en un sistema en todo momento además de **contar con los “Ifs” o supuestos** y ver de forma más variada cada situación, **permitiendo un análisis más sencillo, además de poder añadir más variables...***

(Reflexión estudiante 4)

En la Tabla 21 se presentan fragmentos de las observaciones, entrevistas y reflexiones con los tipos de habilidades como se identifican en la fase de formulación

Tabla 21

Observaciones, entrevistas y reflexiones y sus habilidades en la fase de formulación

Datos	Tipo	Competencias MM	Habilidades PC
<p>E1: Bueno el problema está aquí. Los 500 galones, va a ser una variable, es como la población total. E2: Si, como el total de la población en el otro problema, si es cierto. E1: Capacidad del tanque. Luego, contiene originalmente 200 galones. Esto es el primero, como la cantidad inicial...</p>	Trabajo colaborativo	Comprender el problema real y construir relaciones entre las variables.	Identificar o formular un criterio para juzgar posibles respuestas. Tomaren cuenta la situación.
<p>E1: Ah ya! Primero hay que leer todo. E2: Si lo ponemos, sería como el nivel inicial y luego pondríamos el final y luego viene el flujo. Después debemos describir las variables como lo hizo la profe, es decir, cómo va variando el flujo.</p>	Trabajo colaborativo	Buscar información disponible y diferenciar entre información relevante e irrelevante	Identificando conclusiones. Identificar las razones declaradas y no declaradas. Ver similitudes y diferencias. Identificar y manejar la irrelevancia.
<p>E1: El flujo es... primero las variables, se me hace que van a ser las libras de sal. Ponemos en el cuadro los 200 galones una variable va a ser las 100 libras de sal y luego se introduce el agua al tanque conteniendo una libra de salpor galón del tanque sale al final la mezcla del tanque quesería.</p>	Trabajo colaborativo	Reconocer cantidades que influyen en la situación, nombrarlase identificar variables clave.	Identificar los conceptos claves y explicarlos con claridad. Considerar conceptos o definiciones alternos de los conceptos.
<p>E2: No te pide nada en sí, como que qué, Me imagino que es calcular la concentración de sal final. (Observación Equipo 9)</p>	Trabajo colaborativo	Hacer suposiciones para el problema y simplificar situación.	Razones no declaradas Necesidad de suposiciones: reconstrucción de los argumentos. Identificar claramente los supuestos y determinar si son justificables.
		Comprender el problema real y construir relaciones entre las variables.	Identificar o formular un criterio para juzgar posibles respuestas. Tomaren cuenta la situación.
<p>E1: Lo que nos importa es el volumen del tanque y las entradas van a ser... E2: Si, porque es una capacidad de 500 galones, que contiene originalmente 200 de agua y tiene 100 libras de sal se introduce el agua y sal, sí, si hay un flujo de entraday otro de salida. E1: Esta no tiene sal E2: Si, si tiene 100 libras de sal. Contiene 200 galones de agua. Nada más son estas 3 E1: En base a eso vamos a construirlo</p>	Trabajo colaborativo	Reconocer cantidades que influyen en la situación, nombrarlas e identificar variables clave.	Identificar los conceptos claves y explicarlos con claridad. Considerar conceptos o definiciones alternos de los conceptos.
<p>E2: Hay que poner las ecuaciones como en el tanque. Pues si no, sería flujo de entrada y de salida y el valor inicial es 200 y en unidades son galones, no? (Observación Equipo 1)</p>	Trabajo colaborativo	Hacer suposiciones para el problema y simplificar situación.	Razones no declaradas Necesidad de suposiciones: reconstrucción de los argumentos. Identificar claramente los supuestos y determinar si son justificables.

<p>Yo relacionaba parte del problema con la variable, subrayaba de diferentes colores, al momento de poner una fórmula la ponía del mismo color. Cómo lo hubiera hecho. Construir un modelo para solucionar. Antes de llegar con el equipo, revisar el problema, identificar que fórmulas se parecían, buscar comparar con otras problemáticas que se puedan relacionar. De ahí escribo paso 1, paso 2. En mis procesos para tener como una guía y poner en esa guía las partes. Con base en un proceso empiezo a montar un esquema. (Entrevista Estudiante 4)</p>	Entrevista	Reconocer cantidades que influyen en la situación, nombrarlas e identificar variables	Identificar los conceptos claves y explicarlos con claridad. Considerar conceptos o definiciones alternos de los conceptos
<p><i>Los retos con los que me enfrenté fueron poder relacionarlos problemas con los procesos de resolución que necesitan, el reconocer el tipo de problema correctamente desde el inicio.</i> (Reflexión Estudiante 2)</p>	Reflexión	Comprender el problema real y construir relaciones entre las variables	Identificar o formular un criterio para juzgar posibles respuestas. Tomar en cuenta la situación
<p><i>Primero nos íbamos por lo más fácil, como por ejemplo, el último reto que nos decían: la población final de los peces va a ser el 30% de la población, nos basamos en eso que era lo más fácil, pensabas cien entre 30 y lo implementabas. Lo más difícil lo relacionábamos con cosas que ya habíamos visto, y sí, si se nos dificultaba relacionar esta parte inicial con la parte de en medio y la parte final. Nuestro error y dificultad era que la parte inicial la relacionábamos con la parte final pero no con la de en medio. Creo que eso fue nuestro mayor problema. Relacionar variables y procesos.</i> (Entrevista Estudiante 1)</p>	Entrevista	Reconocer cantidades que influyen en la situación, nombrarlas e identificar variables	Identificar los conceptos claves y explicarlos con claridad. Considerar conceptos o definiciones alternos de los conceptos
<p><i>Primero trato de interpretar o de identificar todos los factores que pueden influir en el fenómeno físico. Por ejemplo en el caso de una viga, influye el perfil de la viga, material, el tipo de carga. Como que trato de identificar como en los tanques, la concentración de sal, por ejemplo, tengo estos factores, cómo puedo traducir esto. Después de identificar lo que yo creo que influye trato de explicarlo, o de traducirlo en algún modelo que conozca, que haya manejado antes. Obviamente es muy propenso a errores porque no puedes así cualquier fenómeno traducirlo a algo que ya conoces. Ya después de eso trato de investigar si hay algún otro modelo. Como ir tomando pequeñas pistas o basarme en un fenómeno parecido para relacionarlo.</i> (Entrevista Estudiante 3)</p>	Entrevista	Comprender el problema real y construir relaciones entre las variables	Identificar o formular un criterio para juzgar posibles respuestas. Tomar en cuenta la situación
<p><i>¿Qué dificultades tuvieron chicos? O: Mas que nada la lógica de las variables, los valores, las ecuaciones M: Como que la parte de decir qué es variable, qué es constante, fue un poquito el problema. Fue un poco de pensar y que las unidades armonizaran. Y ya fue la forma de sacarlo.</i> (Equipo 1)</p>	Trabajo colaborativo	Reconocer cantidades que influyen en la situación, nombrarlas e identificar variables	Identificar los conceptos claves y explicarlos con claridad. Considerar conceptos o definiciones alternos de los conceptos
<p><i>E1: Yo solo tengo una duda, no sé si se acuerdan del modelo venzan de temperatura. ¿Se acuerdan de que había una entrada y una salida? E3: ¿De la clase pasada? E1: Sí, donde había una entrada y una salida para el cambio ... perdón no es temperatura, es nivel de agua y es donde una flecha después una variable y otra flecha de salida. Pensando en eso yo me imagino que si había una entrada y una salida puede ser que se pueda modelar solo la parte de la entrada para los 3 gal/min y la salida de 6 gal/min muy similar a esa.</i></p>	Trabajo colaborativo	Buscar información disponible y diferenciarla entre información relevante e irrelevante	Identificando conclusiones. Identificar las razones declaradas y no declaradas. Ver similitudes y diferencias. Identificar y manejar la irrelevancia. Ver la estructura de un argumento. Resumir

<p>E2: Si, si me acuerdo ... bueno entonces ... si vas en lo correcto entonces tendríamos que la constante sería la masa y el volumen máximo, ¿no? E3: Si E2: y mis variables dependientes son lo que entra y sale que sería 3 y 6 galones. (Equipo 2)</p>		Reconocer cantidades que influyen en la situación, nombrarlas e identificar variables	Identificar los conceptos claves y explicarlos con claridad. Considerar conceptos o definiciones alternos de los conceptos
<p>Profesora: <i>¿Qué dificultades tuvieron chicos?</i> E2: <i>Más que nada la lógica de las variables, los valores, las ecuaciones</i> E1: Como que la parte de decir qué es variable, qué es constante, fue un poquito el problema. Fue un poco de pensar y que las unidades armonizaran. Y ya fue la forma de sacarlo O: <i>Nos apoyamos un poquito con las unidades para cancelarlas y ver qué podíamos multiplicar con qué... (Equipo 1)</i></p>	Trabajo colaborativo	Reconocer cantidades que influyen en la situación, nombrarlas e identificar variables	Identificar los conceptos claves y explicarlos con claridad. Considerar conceptos o definiciones alternos de los conceptos
<p><i>Primero leíamos bien el problema, bueno esto es un problema parecido a otros problemas que trabajamos anteriormente. Checaba como lo solucionamos matemáticamente en mi libreta... Íbamos relacionándolas variables. (Reflexiones Estudiante 1)</i></p>	Reflexión	Buscar información disponible y diferenciar entre información relevante e irrelevante	Identificando conclusiones. Identificar las razones declaradas y no declaradas. Ver similitudes y diferencias. Identificar y manejar la irrelevancia. Ver la estructura de un argumento. Resumir
<p><i>Yo me fijaba mucho en las variables, cómo afectaban esas variables y también me ayudaba mucho en conocer qué unidades tenían, y así podía armar una respuesta en base a eso. (Entrevista Estudiante 2)</i></p>	Entrevista	Reconocer cantidades que influyen en la situación, nombrarlas e identificar variables	Identificar los conceptos claves y explicarlos con claridad. Considerar conceptos o definiciones alternos de los conceptos
<p>E1: Pues tiene concentración de entrada, flujo de entrada, concentración de salida, flujo de salida; pero la concentración de salida la tenemos como incógnita, entonces es lo que no entiendo E3: <i>Es la que nos falta, la concentración de sal? E1: No entiendo como lo tenemos que modelar</i> E2: <i>Cómo lo asociamos en el programa, para simular el cambio</i> E1: <i>Ya entendí, tenemos que poner los 200 galones que sería el contenido inicial. Luego...</i> E2: <i>El 500 lo pones en el dato final E1: Si porque no puedes pasar de 500</i> E1: Tenemos que poner que se está introduciendo una libra de sal por galón E2: <i>Y sale los 6 galones por minuto de la... (Equipo 6)</i></p>	Trabajo colaborativo	Reconocer cantidades que influyen en la situación, nombrarlas e identificar variables	Identificar los conceptos claves y explicarlos con claridad. Considerar conceptos o definiciones alternos de los conceptos
<p>R: ... primero las variables, se me hace que van a ser las libras de sal. Ponemos en el cuadro los 200 galones una variable va a ser las 100 libras de sal y luego se introduce el agua al tanque conteniendo una libra de sal por galón del tanque sale al final la mezcla del tanque que sería J: <i>No te pide nada en sí, como que qué, Me imagino que es calcular la concentración de sal final.</i> R: <i>Si (está leyendo el problema). Son 200 galones de agua al principio y luego le meten 300 galones de agua, no?</i> J: <i>No hay que definirlo tal cual así porque ya los 500 te define como hasta dónde llegaría, Los 500 es como tu carga máxima porque no se puede pasar porque llega hasta 500, Nada más es como definir las variables, con qué ritmo entra y con qué ritmo sale. Y la concentración me imagino como que en otra variable aparte</i></p>	Trabajo colaborativo	Reconocer cantidades que influyen en la situación, nombrarlas e identificar variables	Identificar los conceptos claves y explicarlos con claridad. Considerar conceptos o definiciones alternos de los conceptos

4.2.2 Fase de resolución de modelación matemática

En esta siguiente fase de resolución del proceso de modelación matemática, de acuerdo con Blum y Kaiser (1997), se encuentran las competencias para configurar un modelo matemático a partir de un modelo real. Estas competencias se pueden relacionar con aquellas habilidades vinculadas a la capacidad de elaborar un juicio sobre la fiabilidad de las informaciones, es decir, juzgar la credibilidad de una información, identificar los presupuestos implícitos, juzgar la validez lógica de una argumentación. Estas competencias involucran la base de la decisión (Ennis, 1985).

Cuando los problemas son especialmente complicados, resulta de gran utilidad a la hora de pensar, proceder de forma ordenada. Algunas orientaciones genéricas que pueden ayudar a alcanzar ordenadamente una decisión, acerca de lo que hacer o creer, son por ejemplo las diversas especificaciones de los pasos a dar en la resolución de problemas (Ennis, 2001). Algunas preguntas que pueden contribuir para la solución de problemas son aquellas que se cuestionan si la información es precisa, cómo se puede verificar, cómo se desarrollan los datos, cuestionarse si puede haber algunos datos que se necesitan considerar; entre otros (Paul y Elder, 2002).

En la Tabla 22 se muestran los indicadores de la rúbrica que articulan las sub-competencias de la modelación matemática de la segunda fase de su ciclo (fase de resolución) y las habilidades de pensamiento crítico que se relacionan.

Tabla 22

Descripción técnica de indicadores de rúbrica, competencias y habilidades de MM y PC para fase de resolución

Rúbrica	Modelación Matemática	Pensamiento crítico	
Fase de resolución	Competencias para configurar un modelo matemático a partir de un modelo real.	Habilidades que implican la credibilidad de las fuentes y observar y juzgar los informes de los datos como bases para la decisión (Ennis, 1985).	
Indicadores:	Sub competencias:	Como elementos del pensamiento crítico: Información datos, hechos, observaciones, experiencias (Paul y Elder, 2005)	
Hace suposiciones y reconoce limitaciones	Para matematizar cantidades relevantes y sus relaciones	Juzgar la credibilidad de las fuentes	Limitarse a afirmaciones apoyadas por los datos que tenga
Determina variables y parámetros para construir un modelo matemático	Para simplificar las cantidades relevantes y sus relaciones si es necesario y reducir su número y complejidad	Observar y juzgar los informes de los datos	Asegurarse que toda la información usada es clara, precisa y relevante a la pregunta en cuestión
Genera un modelo matemático para representar el problema	Para elegir notaciones matemáticas apropiadas y representar situaciones gráficamente	Hacer y contestar preguntas que aclaran o desafían	Asegurarse que se ha recopilado suficiente información
Realiza cálculos y resuelve el modelo matemático	Para utilizar estrategias heurísticas como la división del problema en problemas parciales, establecer relaciones con problemas similares, reformular el problema de una forma diferente, variar las cantidades o los datos disponibles, etc. Para utilizar el conocimiento matemático para resolver el problema	Considerar y razonar premisas, motivos, suposiciones, puntos de partida y otras proposiciones, con las que no se está de acuerdo o se tienen dudas, sin que estos dos estados interfieran con el propio pensamiento (“pensamiento suposicional”) Proceder de forma ordenada de acuerdo con la situación, por ejemplo: Seguir los pasos en la resolución de problemas. Supervisar el propio pensamiento.	Todo razonamiento es un intento de solucionar un problema, resolver una pregunta o explicar algo.

Las sub-competencias de modelación matemática articuladas con las habilidades de pensamiento crítico en la fase de resolución que se encontraron en las diferentes etapas del curso, se presentan a continuación con una descripción del hallazgo.

4.2.2.1 Sub-competencia: elegir notaciones matemáticas apropiadas y representar situaciones gráficamente

Durante el proceso para resolver los problemas planteados, los alumnos buscaron fórmulas que se usaron en la solución de otros problemas que pudieran relacionarse con el problema en cuestión. Además, en el simulador graficaron las variables para confirmar la solución matemática del problema. Estas actividades se pueden observar a continuación:

E1: Si, si me acuerdo ... bueno entonces ... si vas en lo correcto entonces tendríamos que la constante sería la masa y el volumen máximo, ¿no?

E2: Si

E1: Y mis variables dependientes son lo que entra y sale que sería 3 y 6 galones.

E3: ¿Que esto no se hacía con otra fórmula? Cancelabas los galones y al final te quedan libras/min.

E1: ¿No tendrás esa fórmula?

E3: Si. Es que multiplicabas lo de libras/galones por galones/min por el mismo volumen.

(Equipo 4)

En este fragmento se observa como revisan la gráfica y van encontrando la relación con la solución matemática, es decir, le van dando significado a la gráfica y comprueban sus resultados.

*E1: Al principio **decrece la concentración de sal**, entre que van pasando los minutos va decreciendo.*

E2: Cuando se estabiliza la exponencial yo creo que ya es el resultado, pero me imagino que es lo mismo. Con ver la gráfica

E1: Con ver la gráfica ya sabes que primero decrece y luego crece

(Equipo 9)

Los alumnos trabajan con diferentes escenarios, cambian variables, agregan variables, esto les ayuda a preguntarse “qué pasa si”, cambian el tiempo del proceso, etc.

Visualizar estos cambios y relaciones a través de las gráficas, es muy valorado por los estudiantes ya que consideran que los ayuda a entender mejor cómo interactúan estas variables.

*Con el programa podías **cambiar las variables y podías hacer gráficas** de los años, eso **te da más de una respuesta final**. Puedes controlar para que sea de años futuros o diferentes variables y **te ayuda a ver como que más real, qué pasa si cambias esto pero se queda aquello igual o dejamos lo mismo pero traemos otra variable**. (Entrevista estudiante 1)*

*El poder **visualizar gráficamente las relaciones entre variables y ver como éstas cambian cuando se modifican**, ayuda al entendimiento y a comprender las aplicaciones que se les puede dar...*
(Reflexión estudiante 2)

4.2.2.2 Sub-competencia: Utilizar estrategias heurísticas como la división del problema en problemas parciales, establecer relaciones con problemas similares, reformular el problema de una forma diferente, variar las cantidades o los datos disponibles

Al tratar de resolver los problemas propuestos, los estudiantes trataban de encontrar similitudes con otros problemas, relacionaban variables, parámetros y fórmulas. Trataban de encontrar una simulación que los llevara a solucionar el problema variando cantidades y buscando comprender lo que se estaba haciendo.

E2: Checa si en el problema de contagios (otro problema) hay un valor inicial

E1: En enfermarse o qué? Hay un valor inicial en personas susceptibles y personas contagiadas

E2: ¿De cuánto?

E1: De 99 para susceptibles y 1 para infectados

E2: ¿Por qué?

E1: Así lo dijeron. A una de las de acá le podemos poner un valor inicial

Al tratar de solucionar el problema, se dan cuenta que no se reconocieron las variables relevantes y reflexionan al respecto. Se cuestionan y hacen cambios para ver si es suficiente para el modelo.

E2: El error dice que está incompleto pero no sé por qué está incompleto

E1: A ver, ¿y si ahí le pones 2500 / 3?

E2: Por qué entre 3, por qué es el 30% o qué?

E1: Por la tercera parte que se va a quitar

E2: Ah, pues ya corrió

E1: Ya verdad? (54:28). A ver simúlalo, a lo mejor no era 2500 entre 3, pero...

E2: Pero se ocupa valor inicial para que corra

E1: Viste cuánto salió, está como 800, a ver gráfico. (Equipo 1)

Los estudiantes reconocen que las alternativas con las que trabajan les permite encontrar otros caminos para solucionar la problemática, siempre que tengas claro las variables relevantes y cuál es tu objetivo.

*Una ventaja que encuentro de este sistema es que, al acostumbrarnos a modelar las ecuaciones de la forma vista en clases, **nos reta a buscar la manera de emplear esos conocimientos de una forma distinta**, por lo que es bueno para desarrollar nuestra capacidad de pensamiento crítico y lógico.*

(Reflexión estudiante 5)

*En el problema de los peces se buscaba lograr una pesca sostenible en el tiempo pero a la vez lograr la mayor venta de pescado, o sea, un balance y en base a eso ir modelando o buscando un equilibrio. **La modelación te puede ayudar a entender eso, qué variables puedes alterar o modificar para obtener un resultado óptimo**, dependiendo qué es lo que quieres, cuál es tu objetivo por desarrollar.*

(Entrevista estudiante 2)

4.2.2.3 Sub-competencia: Utilizar el conocimiento matemático para resolver el problema

Con relación al conocimiento matemático de los estudiantes, se observó en el

trabajo colaborativo que la mayoría del tiempo se enfocaban en las unidades que se utilizaban en las variables. Por otro lado, examinaban fórmulas utilizadas en otros problemas para asegurarse que eran las adecuadas para solucionar el problema. Se cuestionaban si los datos eran variables o un parámetro que no tenía cambio y al graficar la simulación, ponían especial atención en el tipo de gráfica que les resultaba para relacionarla con los datos y ver si tenían sentido matemáticamente y en la realidad. Se cuestionaban sobre la dependencia de una variable con otra y cuál era su relación.

E1: Por ejemplo la tasa de crecimiento es una variable que está en función de la cantidad de población que hay. Y la pesca también está en función de la población mira ahí dice 30% de la raíz cuadrada de la población actual. Como que las dos dependen de la cantidad de peces que haya en el momento nomas que uno va a restar y otro va a sumar

E2: La primera variable va a ser capacidad de carga, luego tenemos tasa de crecimiento y lo que te quede de la fracción, va a ser un tercio, o los 100 peces. ¿Cómo le ponemos? Fracción, es lo más simple. Como nombramos a la fracción, tercio de la población?(Equipo 9)

En estas afirmaciones se puede ver que relacionan las variables y cómo tiene sentido la solución matemática y la realidad.

Debes entender qué pasa si la variable es negativa, si tiene sentido; si mi modelo lo puedo aceptar... puedes meter más variables y en la gráfica puedes ver que va a suceder...

(Entrevista estudiante 2)

Ver de manera gráfica cómo actúa una ecuación diferencial... cómo va creciendo o decreciendo la gráfica y así es más fácil saber si tienes la ecuación bien o mal. (Reflexión estudiante 6)

En la Tabla 23 se presentan fragmentos de las observaciones, entrevistas y reflexiones con los tipos de habilidades como se identifican en la fase de resolución.

Tabla 23

Observaciones, entrevistas y reflexiones y sus habilidades en la fase de resolución

Datos	Tipo	Competencias MM	Habilidades PC
<p>E1: Si, si me acuerdo ... bueno entonces ... si vas en lo correcto entonces tendríamos que la constante sería la masa y el volumen máximo, ¿no?</p> <p>E2: Si</p> <p>E1: Y mis variables dependientes son lo que entra y sale que sería 3 y 6 galones.</p> <p>E3: Que esto no se hacía con otra fórmula? Cancelabas los galones y al final te quedan libras/min.</p> <p>E1: ¿No tendrás esa fórmula?</p> <p>E3: Si. Es que multiplicabas lo de libras/galones por galones/min por el mismo volumen.</p> <p>(Equipo 4)</p>	Trabajo colaborativo	<p>Reconocer cantidades que influyen en la situación, nombrarlas e identificar variables</p> <p>Simplificar las cantidades relevantes y sus relaciones si es necesario y reducir su número y complejidad</p>	<p>Identificar los conceptos claves y explicarlos con claridad.</p> <p>Considerar conceptos alternos o definiciones alternas de los conceptos</p> <p>Observar y juzgar los informes de los datos</p>
<p>E1: Al principio decrece la concentración de sal, entre que van pasando los minutos va decreciendo</p> <p>E2: Cuando se estabiliza la exponencial yo creo que ya es el resultado, pero me imagino que es lo mismo. Con ver la gráfica</p> <p>E1: Con ver la gráfica ya sabes que primero decrece y luego crece</p> <p>(Equipo 9)</p>	Trabajo colaborativo	<p>Para elegir notaciones matemáticas apropiadas</p> <p>representar situaciones gráficamente</p>	<p>Hacer y contestar preguntas que aclaran o desafían</p> <p>Asegurarse que se ha recopilado suficiente información</p>
<p>Con el programa podías cambiar las variables y podías hacer gráficas de los años, eso te da más de una respuesta final. Puedes controlar para que sea de años futuros o diferentes variables y te ayuda a ver como que más real, qué pasa si cambias esto pero se queda aquello igual o dejamos lo mismo pero traemos otra variable.</p> <p>(Entrevista estudiante 1)</p>	Entrevista	<p>Para elegir notaciones matemáticas apropiadas</p> <p>representar situaciones gráficamente</p> <p>Para utilizar estrategias heurísticas como la división del problema en problemas parciales, establecer relaciones con problemas similares, reformular el problema de una forma diferente, variarlas cantidades o los datos disponibles, etc.</p>	<p>Hacer y contestar preguntas que aclaran o desafían</p> <p>Asegurarse que se ha recopilado suficiente información</p> <p>Considerar y razonar premisas, motivos, suposiciones, puntos de partida y otras proposiciones, con las que no se está de acuerdo o se tienen dudas, sin que estos dos estados interfieran con el propio pensamiento</p>
<p>El poder visualizar gráficamente las relaciones entre variables y ver como éstas cambian cuando se modifican, ayuda al entendimiento y a comprender las aplicaciones que se les puede dar...</p> <p>(Reflexión estudiante 2)</p>	Reflexión	<p>Para elegir notaciones matemáticas apropiadas</p> <p>representar situaciones gráficamente</p> <p>Para utilizar estrategias heurísticas como la división del problema en problemas parciales, establecer relaciones con problemas similares, reformular el problema de una forma diferente, variarlas cantidades o los datos disponibles, etc</p>	<p>Hacer y contestar preguntas que aclaran o desafían</p> <p>Asegurarse que se ha recopilado suficiente información</p> <p>Considerar y razonar premisas, motivos, suposiciones, puntos de partida y otras proposiciones, con las que no se está de acuerdo o se tienen dudas</p>
<p>E2: Checa si en el problema de contagios (otro problema) hay un valor inicial</p> <p>E1: En enfermarse o qué? Hay un valor inicial en personas susceptibles y personas contagiadas</p> <p>E2: De cuánto?</p>	Trabajo colaborativo	<p>Establecer relaciones con problemas similares</p>	<p>Considerar y razonar premisas, motivos, suposiciones, puntos de partida y otras proposiciones, con las que no se está de acuerdo o se tienen dudas</p>

E1: De 99 para susceptibles y 1 para infectados
 E2: Por qué?
 E1: Así lo dijeron. A una de las de acá le podemos poner un valor inicial
 E2: **El error dice que está incompleto pero no sé porqué está incompleto**
 E1: A ver, ¿y si ahí le pones 2500 / 3?
 E2: Por qué entre 3, porque es el 30% o qué? M: Por la tercera parte que se va a quitar O: Ah, pues ya corrió
 E1: Ya verdad? (54:28). **A ver simúlalo, a lo mejor no era 2500 entre 3, pero...**
 E2: pero se ocupa valor inicial para que corra M: Viste cuánto salió, está como 800, a ver grafícalo. (Equipo 1)
 Una ventaja que encuentro de este sistema es que, al acostumbrarnos a modelar las ecuaciones de la formavista en clases, **nos reta a buscar la manera de emplear esos conocimientos de una forma distinta**, por lo que es bueno para desarrollar nuestra capacidad de pensamiento crítico y lógico.
 (Reflexión estudiante 5)

Reflexión

Reformular el problema de una forma diferente, variarlas cantidades o los datos disponibles, etc
 Hacer y contestar preguntas que aclaran o desafían
 Asegurarse que se ha recopilado suficiente información
 Para elegir notaciones matemáticas apropiadas y representar situaciones gráficamente

Reformular el problema de una forma diferente, variarlas cantidades o los datos disponibles, etc
 Considerar y razonar premisas, motivos, suposiciones, puntos de partida y otras proposiciones, con las que no se está de acuerdo se tienen dudas, sin que estos dos estados interfieran con el propio pensamiento

En el problema de los peces se buscaba lograr una pesca sostenible en el tiempo pero a la vez lograr la mayor venta de pescado, o sea, un balance y en base a eso ir modelando o buscando un equilibrio. La modelación te puede ayudar a entender eso, qué variables puedes alterar o modificar para obtener un resultado óptimo, dependiendo qué es lo que quieres, cuál es tu objetivo por desarrollar.
 (Entrevista estudiante 2)

Entrevista

Comprender el problema real y construir relaciones entre las variables
 Identificar o formular un criterio para juzgar posibles respuestas. Tomar en cuenta la situación
 Reformular el problema de una forma diferente, variarlas cantidades o los datos disponibles, etc
 Considerar y razonar premisas, motivos, suposiciones, puntos de partida y otras proposiciones, con las que no se está de acuerdo se tienen dudas, sin que estos dos estados interfieran con el propio pensamiento

E1: Por ejemplo la tasa de crecimiento es una variable que está en función de la cantidad de población que hay. Y la pesca también está en función de la población mira ahí dice 30% de la raíz cuadrada de la población actual. Como que las dos dependen de la cantidad de peces que haya en el momento nomas que uno va a restar y otro va a sumar
 E2: **La primera variable va a ser capacidad de carga, luego tenemos tasa de crecimiento y lo que te quedede la fracción, va a ser un tercio, o los 100 peces.**
 Cómo le ponemos? Fracción, es lo más simple.
 Como nombramos a la fracción, tercio de la población? (Equipo 9)

Trabajo colaborativo

Reconocer cantidades que influyen en la situación, nombrarlas
 Identificar los conceptos claves y explicarlos con claridad.
 Considerar conceptos alternos o definiciones alternas de los conceptos
 e identificar variables
 Utilizar el conocimiento matemático para resolver el problema
 Proceder de forma ordenada de acuerdo con la situación, por ejemplo: Seguir los pasos en la resolución de problemas.
 Supervisar el propio pensamiento

Entonces la concentración de entrada que es una libra por galón, la velocidad de entrada que es 3 galones por minuto se multiplica para saber cuánta sal entra. La concentración de sal es la entrada menos salida pero sabemos que el inicio "value" es 100 y ya lo que hice fue la tasa de salida que es la velocidad de salida de agua con sal sobre la cantidad de agua inicial que era 200 y luego le sumas la velocidad de entrada menos la velocidad de salida y luego lo multiplicas por el tiempo que quieras. El tiempo es una variable más bien, le puedes poner 120 y ya te lo multiplica. La

Entrevista

Reconocer cantidades que influyen en la situación, nombrarse identificar variables
 Identificar los conceptos claves y explicarlos con claridad.
 Considerar conceptos alternos o definiciones alternas de los conceptos
 Utilizar el conocimiento matemático para resolver el problema
 Proceder de forma ordenada de acuerdo con la situación, por ejemplo: Seguir los pasos en la resolución de problemas.

velocidad de agua de la salida es 6 galones, la cantidad inicial de agua eran 200 galones. Ya cuando pasa esta operación ya tiene la respuesta y la salida de sal es nada más la tasa de salida por la concentración de sal que era la sal inicial. (Equipo 3)

Debes entender qué pasa si la variable es negativa, si tiene sentido; si mi modelo lo puedo aceptar ... tú puedes meter más variables y en la gráfica puedes ver que va a suceder...

(Entrevista estudiante 2)

Ver de manera gráfica cómo actúa una ecuación diferencial... cómo va creciendo o decreciendo la gráfica y así es más fácil saber si tienes la ecuación bien o mal. (Reflexión estudiante 6)

Reflexión

	Supervisar el propio pensamiento
Reconocer cantidades que influyen en la situación, nombrarlas e identificar variables	Identificar los conceptos claves y explicarlos con claridad. Considerar conceptos alternos o definiciones alternas de los conceptos
Para elegir notaciones matemáticas apropiadas y representar situaciones gráficamente	Hacer y contestar preguntas que aclaran o desafían Asegurarse que se ha recopilado suficiente información
Utilizar el conocimiento matemático para resolver el problema	Proceder de forma ordenada de acuerdo con la situación, por ejemplo: Seguir los pasos en la resolución de problemas. Supervisar el propio pensamiento

4.2.3 Fase de interpretación de modelación matemática

En esta siguiente fase de interpretación del proceso de modelación matemática, de acuerdo con Blum y Kaiser (1997), se encuentran las competencias para interpretar resultados matemáticos en una situación real. Se refiere a las habilidades relacionadas con la capacidad de evaluar las informaciones, esto es, obtener conclusiones apropiadas, realizar generalizaciones, inferir, formular hipótesis, generar y reformular de manera personal una argumentación, un problema, una situación o una tarea (Ennis, 1981).

De acuerdo con Paul y Elder (2003), todo razonamiento contiene inferencias o interpretaciones por las cuales se llega a conclusiones y que dan significado a los datos. Para llevar a cabo estas inferencias e interpretaciones, recomiendan inferir sólo aquello que se desprenda de la evidencia, verificar que las inferencias sean consistentes entre sí e identificar las suposiciones que llevan a formular las inferencias. También sugieren cuestionarse cómo se llegó a esa conclusión y si habrá otra forma de interpretar la

información.

En la Tabla 24 se muestran los indicadores de la rúbrica que articulan las sub-competencias de la modelación matemática de la tercera fase de su ciclo (fase de interpretación) y las habilidades de pensamiento crítico que se relacionan.

Tabla 24

Descripción técnica de indicadores de rúbrica, competencias y habilidades de MM y PC para fase de interpretación

Rúbrica	Modelación Matemática	Pensamiento crítico	
Fase de interpretación	Competencias para interpretar resultados matemáticos en una situación real	Habilidades relacionadas con la capacidad de evaluar las informaciones, esto es, obtener conclusiones apropiadas, realizar generalizaciones, inferir, formular hipótesis, generar y reformular de manera personal una argumentación, un problema, una situación o una tarea (Ennis, 1981).	
Indicadores:	Sub competencias:	Como elementos del pensamiento crítico: Inferencias o interpretaciones por las cuales se llega a conclusiones y que dan significado a los datos (Paul y Elder, 2003)	
Ofrece una solución clara que es consistente con el problema original	Para interpretar resultados matemáticos en contextos extra matemáticos	Deducir y valorar deducciones	Llega a conclusiones y soluciones, probándolas con criterios y estándares relevantes
Formula explicaciones fundamentadas	Para generalizar soluciones que se desarrollaron para una situación especial	Inducir y valorar inducciones para generalizaciones Para conclusiones explicativas (incluyendo hipótesis)	Infiere sólo aquello que se desprende de la evidencia. Verificar que las inferencias sean consistentes entre sí. Identificar las suposiciones que llevaron a formular sus inferencias.
Al idear soluciones a problemas complejos, se comunica efectivamente	Para ver soluciones a un problema utilizando un lenguaje matemático apropiado y/o para comunicar sobre las soluciones	Utilizar estrategias retóricas adecuadas para la discusión y la presentación (oral o escrita).	Al idear soluciones a problemas complejos, se comunica efectivamente

Las sub-competencias de modelación matemática articuladas con las habilidades de pensamiento crítico en la fase de interpretación que se encontraron en las diferentes etapas del curso, se presentan a continuación con una descripción del hallazgo.

4.2.3.1 Sub-competencia: Interpretar resultados matemáticos en contextos extra matemáticos

Durante la identificación de las variables y parámetros relevantes, los alumnos reflexionaban sobre cada una de ellas, lo que representaban y como se asocia a la realidad. Buscaban interpretar los resultados, reconocer las limitantes y establecerlos como supuestos asociándolos a los aspectos del contexto de la situación problemática planteada.

En este fragmento se observa cómo el alumno está consciente que existen limitaciones en el modelo y, más aún, reconoce cuales pueden ser, como la muerte natural.

...no se incorpora la muerte natural ese un modelo más sofisticado... . O sea, la cantidad de pescados que hay en el lago entre la carga máxima que es el límite son los pescados que tiene disponibles. Porque así nunca te vas a pasar de los 2500. (Equipo 1)

En estos fragmentos también se observa que están conscientes de las limitantes y qué es importante interpretar los valores para saber si tiene sentido lo que se observa. En este caso se habla de un volumen negativo, el cual no es posible.

*Los datos que empezaban a salir negativos los veía como hasta donde se ve limitado el modelo. **Dónde empieza lo real y dónde empieza a ser lógico.** Partes de las variables... **no vas a tener un volumen negativo.** Debes entender que estás tratando con esas variables, o sea, **qué estás diciendo y si físicamente tiene sentido.** (Entrevista Estudiante 2)*

***Adquiere una nueva perspectiva de cómo interpretar y crear modelos matemáticos,** al ser una herramienta visual a muchos se les puede facilitar analizar un modelo; se puede sintetizar un problema en unos cuantos minutos y simular diferentes escenarios. (Reflexión estudiante 7)*

4.2.3.2 Sub-competencia: Generalizar soluciones que se desarrollaron para una situación especial

Para diseñar el modelo matemático, los alumnos buscaban problemas que pudieran relacionar con la situación problemática planteada. Indagaban sobre la fórmula utilizada y la contrastaban con los datos que tenían para ver si era posible utilizarla y solucionar también el problema nuevo.

E1: Por ejemplo, la tasa de crecimiento es una variable que está en función de la cantidad de población que hay. Y la pesca también está en función de la población mira ahí dice 30% de la raíz cuadrada de la población actual. Como que las dos dependen de la cantidad de peces que haya en el momento nomas que uno va a restar y otro va a sumar

*E2: La primera variable va a ser capacidad de carga, luego tenemos tasa de crecimiento y lo que te quede de la fracción, va a ser un tercio, o los 100 peces. ¿Cómo le ponemos? Fracción, es lo más simple.
(Equipo 9)*

*Con el programa podías cambiar las variables y hacer gráficas de varios años, porlo que no te da una respuesta final o número determinado, sino que puedes controlarlo... te ayuda a verlo más real, qué pasa si cambio esto y se queda esto otro igual...
(Entrevista estudiante 1)*

*El poder visualizar gráficamente las relaciones entre variables y ver cómo estas cambian cuando se modifican ayuda al entendimiento y a comprender las aplicaciones que se le puede dar a los temas.
(Reflexión estudiante 2)*

4.2.3.3 Sub-competencia: Ver soluciones a un problema utilizando un lenguaje matemático apropiado y/o para comunicar sobre las soluciones

Durante el proceso de solución del problema y en la etapa final, los alumnos

utilizaban un lenguaje matemático con el que expresaban sus conocimientos previos, también en los momentos de búsqueda de información que pudieran relacionar con el problema para su solución y al final cuando interpretaban los resultados de su modelo matemático, en las gráficas.

*E1: Vuelve a poner la gráfica del volumen del tanque. Nada más **hay que agregar una nota** de que bueno, **vemos que se vacía en este instante**, este. Después de este punto ya no tiene sentido agregarlo, **no hay volumen negativo** ... Aquí esto de abajo (marca el punto de intersección de la recta con el eje horizontal del tiempo) es basura por así decirlo. **A lo mejor podemos cambiar el modelo para que se vea más coherente**. Vete a modelo y cambia el tiempo final a 70
(Equipo 1)*

Como se observa, los estudiantes utilizan un vocabulario matemático fluido.

*E1: Creo **que hay que agregar otra variable** porque dice: construye un modelo de cajas-flujo en el software para simular el cambio de la cantidad de sal en el tanque todo el tiempo.*

E2: Te acuerdas de que para calcular ese cambio usábamos una formulita. De ahí sacábamos la ecuación diferencial

*E1: Creo que es volumen inicial más cambio. Volumen inicial + (flujo de entrada +flujo de salida)*tiempo. ¿Es esa?*

E2: Mmmm, creo que era una suma, pero se multiplicaban las entradas por las salidas. Más o menos me acuerdo de esa ecuación.

E3: Era cuando ya buscábamos la ecuación diferencial

(Equipo 2)

En la Tabla 25 se presentan fragmentos de las observaciones, entrevistas y reflexiones con los tipos de habilidades como se identifican en la fase de interpretación

Tabla 25

Observaciones, entrevistas y reflexiones y sus habilidades en la fase de interpretación

Datos	Tipo	Competencias MM	Habilidades PC
<p>...no se incorpora la muerte natural ese es un modelo más sofisticado... . O sea, la cantidad de pescados que hay en el lago entre la carga máxima que es el límite son los pescados que tiene disponibles. Porque así nunca te vas a pasar de los 2500. (Equipo 1)</p>	Trabajo colaborativo	Interpretar resultados matemáticos en contextos extra matemáticos	Deducir y valorar deducciones Llega a conclusiones y soluciones, probándolas con criterios y estándares relevantes
<p>Los datos que empezaban a salir negativos los veía como hasta donde se ve limitado el modelo. Dónde empieza lo real y dónde empieza a ser lógico. Partes de las variables... no vas a tener un volumen negativo. Debes entender que estás tratando con esas variables, o sea, qué estás diciendo y si físicamente tiene sentido. (Entrevista Estudiante 2)</p>	Entrevista	Interpretar resultados matemáticos en contextos extra matemáticos	Deducir y valorar deducciones Llega a conclusiones y soluciones, probándolas con criterios y estándares relevantes
<p>Adquiere una nueva perspectiva de cómo interpretar crear modelos matemáticos, al ser una herramienta visual a muchos se les puede facilitar analizar un modelo; se puede sintetizar un problema en unos cuantos minutos y simular diferentes escenarios. (Reflexión estudiante 7)</p>	Reflexión	Interpretar resultados matemáticos en contextos extra matemáticos Generalizar soluciones que se desarrollaron para una situación especial	Deducir y valorar deducciones Llega a conclusiones y soluciones, probándolas con criterios y estándares relevantes Inducir y valorar inducciones para generalizaciones Para conclusiones explicativas (incluyendo hipótesis)
<p>E1: Por ejemplo la tasa de crecimiento es una variable que está en función de la cantidad de población que hay. Y la pesca también está en función de la población mira ahí dice 30% de la raíz cuadrada de la población actual. Como que las dos dependen de la cantidad de peces que haya en el momento nomás que uno va a restar y otro va a sumar E2: La primera variable va a ser capacidad de carga, luego tenemos tasa de crecimiento y lo que te quede de la fracción, va a ser un tercio, o los 100 peces. (El uipo 9)</p>	Trabajo colaborativo	Generalizar soluciones que se desarrollaron para una situación especial	Inducir y valorar inducciones para generalizaciones Para conclusiones explicativas (incluyendo hipótesis)
<p>Con el programa podías cambiar las variables y hacer gráficas de varios años, por lo que no te da una respuesta final o número determinado, sino que puedes controlarlo... te ayuda a verlo más real, qué pasa si cambio esto y se queda esto otro igual... (Entrevista estudiante 1)</p>	Entrevista	Interpretar resultados matemáticos en contextos extra matemáticos Generalizar soluciones que se desarrollaron para una situación especial	Deducir y valorar deducciones Llega a conclusiones y soluciones, probándolas con criterios y estándares relevantes Inducir y valorar inducciones para generalizaciones Para conclusiones explicativas (incluyendo hipótesis)
<p>El poder visualizar gráficamente las relaciones entre variables y ver cómo estas cambian cuando se modifican ayuda al entendimiento y a comprender las aplicaciones que se le puede dar a los temas. (Reflexión estudiante 2)</p>	Reflexión	Generalizar soluciones que se desarrollaron para una situación especial	Inducir y valorar inducciones para generalizaciones Para conclusiones explicativas (incluyendo hipótesis)

<p>E1: Vuelve a poner la gráfica del volumen del tanque. Nada más hay que agregar una nota de que bueno, vemos que se vacía en este instante, este. Después de este punto ya no tiene sentido agregarlo, no hay volumen negativo... Aquí esto de abajo (8:38 marca el punto de intersección de la recta con el eje horizontal del tiempo) es basura por así decirlo. A lo mejor podemos cambiar el modelo para que se vea más coherente. Vete a modelo y cambia el tiempo final a 70 (Equipo 1)</p>	<p>Trabajo colaborativo</p>	<p>Interpretar resultados matemáticos en contextos extra matemáticos</p> <p>Ver soluciones a un problema utilizando un lenguaje matemático apropiado y/o para comunicar sobre las soluciones</p>	<p>Deducir y valorar deducciones Llega a conclusiones y soluciones, probándolas con criterios y estándares relevantes</p> <p>Utilizar estrategias retóricas adecuadas para la discusión y la presentación (oral o escrita).</p>
<p>E1: Creo que hay que agregar otra variable porque dice: construye un modelo de cajas-flujo en el software para simular el cambio de la cantidad de salen el tanque todo el tiempo. E2: Te acuerdas de que para calcular ese cambio, usábamos una formulita. De ahí sacábamos la ecuación diferencial E1: Creo que es volumen inicial más cambio. Volumen inicial + (flujo de entrada + flujo de salida)*tiempo. Es esa? E2: Mmmm, creo que era una suma pero se multiplicaban las entradas por las salidas. Más o menos me acuerdo de esa ecuación. E3: Era cuando ya buscábamos la ecuación diferencial (Equipo 2)</p>	<p>Trabajo colaborativo</p>	<p>Interpretar resultados matemáticos en contextos extra matemáticos</p> <p>Ver soluciones a un problema utilizando un lenguaje matemático apropiado y/o para comunicar sobre las soluciones</p>	<p>Deducir y valorar deducciones Llega a conclusiones y soluciones, probándolas con criterios y estándares relevantes</p> <p>Utilizar estrategias retóricas adecuadas para la discusión y la presentación (oral o escrita).</p>
<p>El modelo se puede adaptar para tomar una decisión correcta o más adecuada. Se pueden incluir más variables en el modelo matemático, graficar para ver que va a suceder y si tiene sentido. (Entrevista estudiante 2)</p>	<p>Entrevista</p>	<p>Ver soluciones a un problema utilizando un lenguaje matemático apropiado y/o para comunicar sobre las soluciones</p>	<p>Utilizar estrategias retóricas adecuadas para la discusión y la presentación (oral o escrita).</p>

4.2.4 Fase de validación de modelación matemática

En esta siguiente fase de interpretación del proceso de modelación matemática, de acuerdo con Blum y Kaiser (1997), se encuentran las competencias para validar la solución. Esto implica hacer y juzgar juicios de valor para reconocer las consecuencias de la solución que se toma; equilibrar, pesar y decidir considerando alternativas y finalmente hacer frente al error en caso de presentarse.

Según Paul y Elder (2002), es necesario revisar las implicaciones de las acciones según van emergiendo; de tal manera que se esté preparado para cambiar de estrategia, análisis o relación con el problema, o las tres cosas, según aparece más información sobre

el problema. Los autores sugieren cuestionarse cuáles serán las implicaciones si se decide actuar de esta manera en vez de la otra, si realmente se resolvió el problema o si todavía existe y, si se necesita cambiar la manera de lidiar con el problema o estrategia.

Tabla 26

Descripción técnica de indicadores de rúbrica, competencias y habilidades de MM y PC para fase de validación

Rúbrica	Modelación Matemática	Pensamiento crítico
Fase de validación	Competencia para validar la solución	Habilidades que implican hacer y juzgar juicios de valor (Ennis, 1985). Como elementos del pensamiento crítico: implicaciones y consecuencias (Paul y Elder, 2005)
Indicadores:	Sub competencias:	
Reflexiona correlación a la resolución del problema, considerando la posibilidad de mejorarlo	Para verificar críticamente y reflexionar sobre las soluciones encontradas, revisar algunas partes del modelo o volver a pasar por el proceso de modelado si las soluciones no se ajustan a la situación	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Hacer y juzgar juicios de valor: Consecuencias ▪ Aplicación prima facie (a primera vista) de principios aceptables ▪ Considerando alternativas
Reflexiona sobre otras formas de resolver el problema o desarrollar las soluciones existentes de diferentes maneras	Para reflexionar otras formas de resolver el problema o si las soluciones se pueden desarrollar de manera diferente	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Piensa con una mente abierta dentro de los sistemas alternos de pensamiento; reconoce y evalúa, según es necesario, los supuestos, implicaciones y consecuencias prácticas ▪ Identifique las implicaciones positivas y negativas ▪ Cuestionar implicaciones y consecuencias
Análisis y evaluación del modelo con la realidad	Para cuestionar en general el modelo	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Equilibrar, pesar y decidir ▪ Utilizar y reaccionar frente a las etiquetas de "error" de forma adecuada

Las sub-competencias de modelación matemática articuladas con las habilidades de pensamiento crítico en la fase de validación que se encontraron en las diferentes etapas del curso, se presentan a continuación con una descripción del hallazgo.

4.2.4.1 Sub-competencia: Verificar críticamente y reflexionar sobre las soluciones encontradas, revisar algunas partes del modelo o volver a pasar por el proceso de modelado.

En una primera instancia, más de la mitad de los alumnos optaban por utilizar un modelo con el que ya habían trabajado para solucionar otros problemas planteados. Tratando de relacionar las variables del problema anterior y el actual, iban sustituyendo los valores de las variables que relacionaban de un problema y otro. Más adelante, se daban cuenta que era mejor iniciar de cero con el diseño del modelo matemático. Al finalizar el modelo matemático, corrían el simulador y si no funcionaba, revisaban las variables, las flechas, las tasas y si veían que había errores importantes, dejaban el modelo matemático e iniciaban nuevamente desde el principio.

E1: Así lo dijeron. A una de las de acá le podemos poner un valor inicial

*E2: **El error dice que está incompleto** pero no sé por qué está incompleto*

E1: A ver, y si ahí le pones 2500 / 3

*E2: **Por qué entre 3, porque es el 30% o qué?***

E1: Por la tercera parte que se va a quitar

E2: Ah, pues ya corrió

E1: Ya verdad? (54:28). A ver simúlalo, a lo mejor no era 2500 entre 3, pero...

E2: pero se ocupa valor inicial para que corra

E1: Viste cuánto salió, está como 800, a ver, gráficalo.

E2: Ahí está

*E1: Ah, ya en 833, a ver, déjame nomás... A lo mejor no es, vamos a cambiar el valor inicial a 2500, **era eso lo que nos faltaba...***

(Equipo 1)

El estudiante tiene claro que como relacionar las gráficas con la realidad, debido a esto, por ejemplo, establece cómo se espera que se comporte una gráfica.

*Mi equipo y yo si usamos mucho el razonamiento matemático, es decir, da este resultado, entonces **nos basamos en el comportamiento de una gráfica exponencial y nos fijamos en que “debería comportarse así”**. Por ejemplo, en el proyecto final de población de peces, **sabes que no puede pasar de 2500 peces, tienes una asíntota ahí y no puede pasar de ahí**. Si te dice que se recupera el 30% de la población, **sabes que va a desaparecer esa población**. Te sienta las bases para validar, por lo menos **dices: debería pasar esto ...***
(Entrevista estudiante 3)

Esta estudiante muestra cómo relaciona la realidad con el modelo al pensar en diferentes cantidades de habitantes, da ejemplo de cómo se cuestiona qué sucede al cambiar esa variable.

El conocimiento general que ya tenemos, lo vas relacionando con todo lo que has visto en tu vida y eso te ayuda, te apoya. Todo va encajando, aunque a veces nos atoramos porque no lo usas diario. Como no lo vemos todos los días, te falta recordarlo bien a bien, pero te ayuda.
*En ese sentido lo que más nos ayudó es que podías cambiar las variables y podías controlar para poner más años. Como lo del virus, empezaba con 500 personas. **Pero si dices bueno si un país tiene 1000 personas cambias eso. Si otro país tiene el doble, pasa esto...***
(Entrevista estudiante 1)

4.2.4.2 Sub-competencia: Reflexionar otras formas de resolver el problema o si las soluciones se pueden desarrollar de manera diferente

En relación con el problema de mezclas, se observó que los estudiantes se cuestionaban sobre el modelo que diseñaban, revisaban las variables. Revisaban las unidades para ver relaciones lógicas. Se preguntaban si realmente funcionaba su modelo y verificaban las gráficas. Con frecuencia, borraban el diseño y comenzaban de cero.

Trataban de relacionar el modelo con la realidad y establecían supuestos. En el

caso del problema de los peces, en un primer momento, les parecía que era muy fácil tomar la decisión, pero al contrastar los resultados de cada una de las decisiones, se daban cuenta que había que tomar en cuenta situaciones del contexto, en este caso específico, la situación ambiental y la necesidad de los ingresos por las ventas de los peces.

*E1: Como que el modelo que teníamos estaba bien, nada más como que hay que agregarle eso, **concentrarnos en la sal**. Si tenemos un volumen relacionarlo con los parámetros que nos dan de la concentración de sal... , **estábamos tratando de buscar el agua pero el agua no era lo importante sino la concentración de sal**.*

*E2: Dejen simularlo, te va a salir aquí la concentración de sal. Aquí **como ven, entremás tiempo pasa la sal va subiendo más**; pero si le pones en tiempo aquí, en vez de 120 le pones 40 minutos, te va a salir que está decreciendo.*

Al principio decrece la concentración de sal, entre que van pasando los minutos va decreciendo.

(Equipo 3)

Tanto en la entrevista como en la reflexión se observa que los estudiantes consideran que elegir una solución lleva a buscar diferentes ópticas, considerar cada punto relevante para llegar a una buena solución. También toman en cuenta que la decisión tiene consecuencias que se deben considerar.

*No puedes ver el problema desde la perspectiva de negocios nada más empresarial porque estarías pasando por encima la perspectiva ambiental. Yo creo que es ahí donde se nutre mucho el tener un modelo, **tengo esta solución, pero no solo tener mi punto de vista sino también aquellos que involucre expertos**.*

*Si no empatamos con la cuestión del medio ambiente, el modelo no va a servir. **El modelo es bueno en un aspecto, pero no abarca la dimensión completa del problema. Puede ser buena en un aspecto, pero perjudica en otro. Debes optimizar en todo.***

(Entrevista estudiante 3)

***Facilita considerar diferentes modelos y tomar decisiones en base a ellos, es comoun análisis a largo plazo de las consecuencias que podrían tener estas decisiones.** (Reflexión estudiante 2)*

En la Tabla 27 se presentan fragmentos de las observaciones, entrevistas y reflexiones con los tipos de habilidades como se identifican en la fase de validación.

Tabla 27

Observaciones, entrevistas y reflexiones y sus habilidades en la fase de validación

Datos	Tipo	Competencias MM	Habilidades PC
<p>E1: Así lo dijeron. A una de las de acá le podemos poner un valor inicial</p> <p>E2: El error dice que está incompleto pero no sé porqué está incompleto</p> <p>E1: A ver y si ahí le pones 2500 / 3</p> <p>E2: Por qué entre 3, porque es el 30% o qué? E1: Por la tercera parte que se va a quitar E2: Ah, pues ya corrió E1: Ya verdad? (54:28). A ver simúlalo, a lo mejor no era 2500 entre 3, pero...</p> <p>E2: pero se ocupa valor inicial para que corra E1: Viste cuánto salió, está como 800, a ver gráficalo. E2: Ahí está E1: Ah, ya en 833, a ver, déjame nomás. A lo mejor no es, vamos a cambiar el valor inicial a 2500, era eso lo que nos faltaba...</p> <p>(Equipo 1)</p>	Trabajo colaborativo	<p>Utilizar el conocimiento matemático para resolver el problema</p> <p>Verificar críticamente y reflexionar sobre las soluciones encontradas, revisar algunas partes del modelo o volver a pasar por el proceso de modelado si las soluciones no se ajustan a la situación</p>	<p>Proceder de forma ordenada de acuerdo con la situación, por ejemplo: Seguir los pasos en la resolución de problemas. Supervisar el propio pensamiento</p> <p>Hacer y juzgar juicios de valor: <ul style="list-style-type: none"> ▪ Aplicación prima facie (a primera vista) de principios aceptables ▪ Considerando alternativas ▪ Equilibrar, pesar y decidir ▪ Utilizar y reaccionar frente a las etiquetas de "error" de forma adecuada </p>
<p>Mi equipo y yo si usamos mucho el razonamiento matemático, es decir, da este resultado, entonces nos basamos en el comportamiento de una gráfica exponencial y nos fijamos en que "debería comportarse así". Por ejemplo en el proyecto final de población de peces, sabes que no puede pasar de 2500 peces, tienes una asíntota ahí y no puede pasar de ahí. Si te dice que se recupera el 30% de la población, sabes que va a desaparecer esa población. Te sienta las bases para validar, por lo menos dices: debería pasar esto...</p> <p>(Entrevista estudiante 3)</p>	Entrevista	<p>Utilizar el conocimiento matemático para resolver el problema</p> <p>Para elegir notaciones matemáticas apropiadas y representar situaciones gráficamente</p> <p>Verificar críticamente y reflexionar sobre las soluciones encontradas, revisar algunas partes del modelo o volver a pasar por el proceso de modelado si las soluciones no se ajustan a la situación</p>	<p>Proceder de forma ordenada de acuerdo con la situación, por ejemplo: Seguir los pasos en la resolución de problemas. Supervisar el propio pensamiento</p> <p>Hacer y contestar preguntas que aclaran o desafían Asegurarse que se ha recopilado suficiente información</p> <p>Hacer y juzgar juicios de valor: <ul style="list-style-type: none"> ▪ Aplicación prima facie (a primera vista) de principios aceptables ▪ Considerando alternativas ▪ Equilibrar, pesar y decidir ▪ Utilizar y reaccionar frente a las etiquetas de "error" de forma adecuada </p>
<p>El conocimiento general que ya tenemos, lo vas relacionando con todo lo que has visto en tu vida y eso te ayuda, te apoya. Todo va encajando, aunque a veces nos atoramos porque no lo usas diario. Como no lo vemos todos los días, te falta recordarlo bien abien, pero te ayuda.</p> <p>En ese sentido lo que más nos ayudo es que podías cambiar las variables y podías controlar para poner más años. Como lo del virus, empezaba con 500 personas. Pero si dices bueno si un país tiene 1000 personas cambias eso. Si otro país tiene el doble, pasa esto...</p> <p>(Entrevista estudiante 1)</p>	Entrevista	<p>Utilizar el conocimiento matemático para resolver el problema</p> <p>Verificar críticamente y reflexionar sobre las soluciones encontradas, revisar algunas partes del modelo o volver a pasar por el proceso de modelado si las soluciones no se ajustan a la situación</p>	<p>Proceder de forma ordenada de acuerdo con la situación, por ejemplo: Seguir los pasos en la resolución de problemas. Supervisar el propio pensamiento</p> <p>Hacer y juzgar juicios de valor: <ul style="list-style-type: none"> ▪ Conclusiones ▪ Aplicación prima facie (a primera vista) de principios aceptables ▪ Considerando alternativas ▪ Equilibrar, pesar y decidir ▪ Utilizar y reaccionar frente a las etiquetas de "error" de forma adecuada </p>

<p>E1: Como que el modelo que teníamos estaba bien, nada más como que hay que agregarle eso, concentrarnos en la sal. Si tenemos un volumen relacionarlo con los parámetros que nos dan de la concentración de sal... , estábamos tratando de buscar el agua pero el agua no era lo importante sino la concentración de sal. E2: Dejen simularlo, te va a salir aquí la concentración de sal. Aquí como ven, entre más tiempo pasa la sal va subiendo más; pero si le pones tiempo aquí, en vez de 120 le pones 40 minutos, te va a salir que está decreciendo. Al principio decrece la concentración de sal, entre que van pasando los minutos va decreciendo. (Equipo 3)</p>	<p>Trabajo colaborativo</p>	<p>Verificar críticamente y reflexionar sobre las soluciones encontradas, revisar algunas partes del modelo o volver a pasar por el proceso de modelado si las soluciones no se ajustan a la situación</p>	<p>Equilibrar, pesar y decidir Utilizar y reaccionar frente a las etiquetas de "error" de forma adecuada Hacer y juzgar juicios de valor: Conclusiones Aplicación prima facie (a primera vista) de principios aceptables Considerando alternativas Equilibrar, pesar y decidir</p>
<p>No puedes ver el problema desde la perspectiva de negocios nada más empresarial porque estarías pasando por encima la perspectiva ambiental. Yo creo que es ahí donde se nutre mucho el tener un modelo, tengo esta solución pero no solo tener mi punto de vista sino también aquellos que involucre expertos. Si no empatamos con la cuestión del medio ambiente, el modelo no va a servir. El modelo es bueno en un aspecto pero no abarca la dimensión completa del problema. Puede ser buena en un aspecto pero perjudica en otro. Debes optimizar en todo. (Entrevista estudiante 3)</p>	<p>Entrevista</p>	<p>Reflexionar otras formas de resolver el problema o si las soluciones se pueden desarrollar de manera diferente</p>	<p>Utilizar y reaccionar frente a las etiquetas de "error" de forma adecuada</p>
<p>Facilita considerar diferentes modelos y tomar decisiones en base a ellos, es como un análisis a largo plazo de las consecuencias que podrían tener estas decisiones. (Reflexión estudiante 2)</p>	<p>Reflexión</p>	<p>Reflexionar otras formas de resolver el problema o si las soluciones se pueden desarrollar de manera diferente</p>	<p>Utilizar y reaccionar frente a las etiquetas de "error" de forma adecuada</p>

Es importante señalar que, en las observaciones del trabajo colaborativo de los alumnos, así como las entrevistas y las reflexiones, se destacan la competencia de trabajo colaborativo, el uso de la herramienta tecnológica Vensim y el hacer preguntas que aclaren o desafíen.

En relación con el trabajo colaborativo, se observó que los estudiantes analizaban varias propuestas sugeridas entre los miembros de los equipos. Daban sus argumentos, en ocasiones cambiaban sus opiniones o propuestas al escuchar otros argumentos y llegaban a conclusiones que de manera individual hubiera sido, en algunos casos, difícil de lograr. Es decir, el aprendizaje se daba entre los alumnos.

Se puede observar cómo un alumno (E2) no entiende el significado de una variable y su compañero (E1) le explica al relacionarlo con otra situación problema.

E2: Eso no lo entiendo, eso de la capacidad de carga de 2500, algo es pero no se

E1: Eso es que está topada la población, es como lo de Malthus que la población sigue creciendo y no le importa el terreno ni nada. Nunca va a ser más.

E2: Entonces lo máximo que va a haber es 2500 al año

E1: Se me hace que todavía faltan cosas. ¿Qué más?

Me imagino que también tiene que ver eso de capacidad de carga

Aquí también el estudiante 2 no entiende el significado de la capacidad de carga y su compañero le explica con un ejemplo:

*E2: Pero la capacidad de carga se refiere... **no entiendo eso de capacidad de carga***

E1: Has de cuenta que, velo como una tina que puede acumular un litro de agua. La vas regando, regando con agua, pero se va a desbordar porque lo máximo que puede tener es un litro.

*E2: Entonces es lo máximo que el lago puede tener de peces, ok
(Equipo 1)*

*E3: ¿no debería de ser agua en lo que está centrado en vez de sal? ... **porque se introduce agua a la sal***

E2: nos pide concentración y agua de sal, entonces deberíamos de trabajar alrededor de eso o sea la pura sal

E1: sí, debe de ser un flujo, no va a ser agua o sal

E2: pensando que el flujo de entrada y salida lo podemos poner en términos de las puras libras de sal, o sea si nos dicen que entra una libra de sal por galón a 3 galones por minuto puedo decir que entran 3 libras de sal por minuto, ¿no? Así dejarlo e ignorarlos galones

E1: digo aquí tenemos dos variables diferentes entonces tendría sentido separarlas, ¿no?

*E3: ah okay entonces podemos ponerle cantidad de sal en el tanque
(Equipo 3)*

Las opiniones de los estudiantes es que el trabajo colaborativo te lleva a tener una visión más completa y a una decisión más acertada. Además de ver que las diferentes

opiniones e ideas nutren el camino para solucionar la situación, también ven la ventaja de disminuir el tiempo dedicado cuando se trabaja colaborativamente.

*La idea de pensar no es la misma, la idea de llegar a solucionar un problema puede variar. Entonces, **ver otra perspectiva de otro compañero te puede ayudar si tu método no es el mejor o no estás llegando.** Ver si coinciden o no, ver el punto donde es diferente te puede ayudar. “Yo hice esta forma y llegué a este resultado”, ver si llegaron a lo mismo, y si no, **ver cuál es el más adecuado.** (Entrevista estudiante 2)*

*Si hay un problema en una empresa, la perspectiva de alguien de recursos humanos no va a ser la misma que la de un ingeniero. **El tener opinión de diferentes personas de diferentes campos te ayuda a encontrar una solución holística que abarque todos los aspectos de un problema.** Porque, si yo lo veo como ingeniero civil, voy a ver una parte y podría llegar un arquitecto y me dice: “te falta la parte estética o funcional”. **Una opinión siempre va a nutrir un trabajo, inclusive si la descartas, el tener ideas diferentes te ayuda a encontrar una solución y más si es un problema complejo.** Además, una sola persona va a trabajar muchísimo más tiempo que si es en equipo. (Entrevista estudiante 3)*

Con respecto al uso del simulador Vensim, se observó que los alumnos corrían el programa con ciertos parámetros y cambiaban los valores para ver que sucedía. Esto fue más sencillo al usar el simulador, además el poder visualizar la ecuación en una gráfica les permitía darle sentido a esta ecuación y entendían su aplicación. En los siguientes fragmentos se puede observar cómo descubren la aplicación de la ecuación a través de las gráficas.

E1: ...estábamos tratando de buscar el agua, pero el agua no era lo importante sino la concentración de sal. Entonces la concentración de entrada que es una libra por galón, la velocidad de entrada que es 3 galones por minuto se multiplica para saber cuánta sal entra. La concentración de sal es la entrada menos salida pero sabemos que el inicio value es 100 y ya lo que hice fue la tasa de salida que es la velocidad de salida de agua con sal sobre la cantidad de agua inicial que era 200 y luego le sumas la velocidad de entrada menos la velocidad de salida y luego

lo multiplicas por el tiempo que quieras. El tiempo es una variable más bien, le puedes poner 120 y ya te lo multiplica. La velocidad de agua de la salida es 6 galones, la cantidad inicial de agua eran 200 galones. Ya cuando pasa esta operación ya tiene la respuesta y la salida de sal es nada más la tasa de salida por la concentración de sal que era la sal inicial. **Dejen simularlo, te va a salir aquí la concentración de sal. Aquí como ven, entre más tiempo pasa la sal va subiendo más pero si le pones en tiempo aquí, en vez de 120 le pones 40 minutos, te va a salir que está decreciendo.** Al principio decrece la concentración de sal, entre que van pasando los minutos va decreciendo. E2: Cuando se estabiliza la exponencial yo creo que ya es el resultado, pero me imagino que es lo mismo. **Con ver la gráfica.**

E1: Con ver la gráfica ya sabes que primero decrece y luego crece.
(Equipo 9)

La aplicación es de mucha ayuda, es efectiva porque puedes meter más variables, **no solo la ves en simples números. Es un poco más gráfico, entonces es más amigable, puedes ver de mejor forma qué es lo que está sucediendo o va a suceder si tú haces X o Y.**
(Entrevista estudiante 2)

Adquieres una nueva perspectiva de cómo interpretar y crear modelos matemáticos con una herramienta como VENSIM, Al ser una herramienta visual a muchos les puede ser más fácil analizar un modelo, con herramientas como VENSIM se puede sintetizar un problema en unos cuantos minutos y simular diferentes escenarios.
(Reflexión estudiante 7)

Finalmente, con respecto a hacer preguntas que aclaren o desafían, se puede observar que a través de los cuestionamientos los estudiantes aclaraban sus dudas y lograban crear un argumento válido, o bien, fortalecían el que ya habían formado con antelación. A continuación, se observan cuestionamientos en el trabajo colaborativo y en la entrevista.

E2: Y dentro del tanque de agua, es ahí donde se hace la ecuación. **¿Dónde utilizaríamos la ecuación?** Concentración de salida igual quedaría en galones, no? Ah, no, no, no

Se supone que tenemos el flujo de salida, pero no tenemos la concentración de salida, que es lo que se supone que calculábamos, creo yo.

E1: Si

E1: ¿La concentración no se sacaría con fórmula?

*E2: La concentración es lo que calculábamos en ese ejercicio, calculábamos la concentración de sal de salida. ¿Entonces aquí que se hace? **Dentro del tanque de agua ¿qué pasa?***

E1: Es como viene ahí, flujo entrada menos flujo de salida

E2: Tienes razón

E1: Tiene sentido(Equipo 2)

*La matemática es lo que sustenta todo lo que hacemos en la vida, **siempre te cuestionas en función a cómo funcionará esto o si cambia esto otro ...** Y pues, la matemática te ayuda mucho, no sólo te ayuda a desarrollar el cerebro, sino que entiendes como va trabajando el mundo; **la matemática es la base de la física, la química, las finanzas, de muchas cosas que te cuestionas.***

(Entrevista estudiante 1)

4.2.5 Casos explicativos sobre las competencias de MM y habilidades de PC

En este apartado se presentan algunos casos específicos y representativos de cada uno de los niveles de puntaje de los resultados de la preprueba y posprueba de Pensamiento Crítico de Cornell en los cuales se hace el análisis de manera global sobre las competencias de modelación y las habilidades de pensamiento crítico articuladas en la rúbrica.

Caso de estudiante 1 / nivel bajo – medio

Durante las clases, el alumno se mostraba observador a lo que la profesora explicaba y frecuentemente hacía preguntas para aclarar dudas. En la entrevista comentaba que en el trabajo colaborativo se enfocaba en las variables, tomaba en cuenta las unidades y se preguntaba cómo se comportaban estas variables. Además, afirmaba

que: “la manera de solucionar un problema puede variar, entonces ver la perspectiva de otro compañero te puede ayudar si tu método no es el mejor...” Establecía que ver las coincidencias y el punto donde difieren te ayudan a tomar una mejor decisión. Cuando no coinciden o no se llega a lo mismo, se estudian las propuestas y se toma la más adecuada.

Durante las sesiones que tuvo para las situaciones problema, se observó cómo analizaba la situación a través del contexto de la situación y de las variables, haciendo énfasis en las unidades y buscando explicar la relevancia de las variables. Al paso de una sesión a otra había mayor reflexión con su compañero de equipo llegando a interpretar y validar el modelo a partir de las gráficas y haciendo inferencias. Por ejemplo, los estudiantes graficaron en el simulador la concentración de sal interpretando los resultados (ver Figura 31):

E2: Si me hace sentido porque entre más sal le vayas echando, más sal va saliendo, no?

*E1: Si, más sal va a salir porque menos concentración hay, sí. Digo menos concentración de agua y más sal que agua. **Si, pues entonces si hace sentido que se ve así. Que la concentración sube porque hay ya menos agua con que diluirla, pues sí.***

E2: Viéndolo así, tienes un tanque con agua, y ese tanque ya tiene sal, le estas echando más agua y más sal; por ende, la concentración y la cantidad de sal sube

*E1: **Exacto, aparte de que tienes un vaciado, ¿por qué?, porque sale más agua de la que entra***

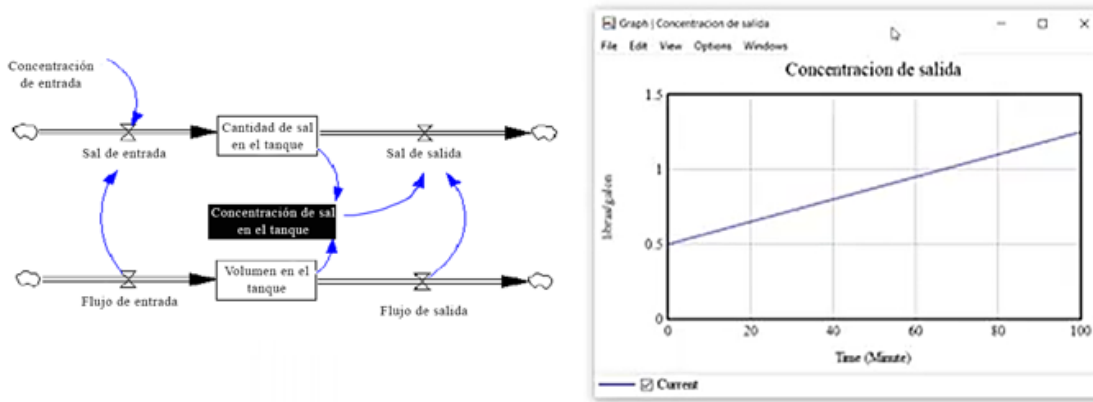
E2: Vamos a ver el flujo de salida, si, si, este se mantiene constante porque siempre sale 6

*E1: **Es la acumulación, el volumen en el tanque.***

E2: Si porque sale más de lo que entra

Figura 31

Modelo de situación problema de mezclas y gráfica de concentración de sal



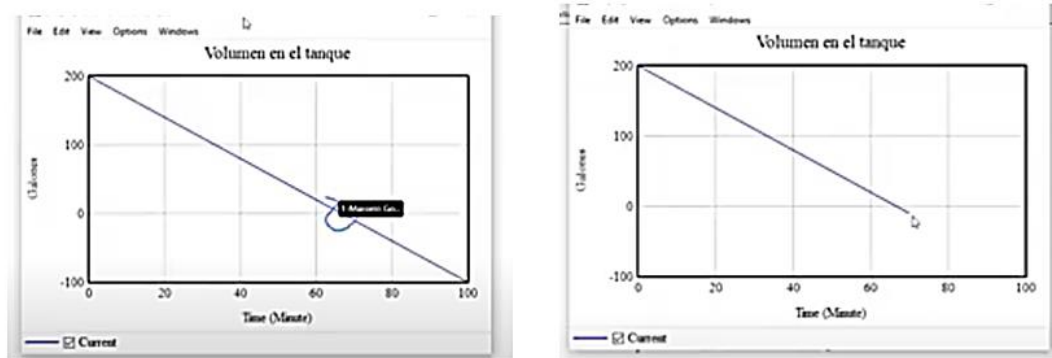
Como se puede observar, lo resaltado en negritas es la interpretación que el alumno le da a la gráfica de la Figura 31. Todavía va más allá y le pide a su compañero que ponga nuevamente la gráfica y que la observe. Comenta:

*El: Vuelve a poner la gráfica del volumen del tanque. Nada más **hay que agregar una nota de que bueno, vemos que se vacía en este instante, ¿si ves donde no? si ves que ya está vacío completamente. Más allá, ya no tiene sentido como que...** Aquí esto de abajo (marca el punto de intersección de la recta con el eje horizontal del tiempo) es basura por así decirlo. Es ver que en este momento ya no hay más. A lo mejor podemos cambiar el modelo para que quede más coherente. Vete a modelo y cambia el tiempo final a 70.*

En la Figura 32 se observa en la gráfica de la izquierda como marca el punto cero donde se vacía completamente. La gráfica de la derecha es como queda después de modificar el tiempo.

Figura 32

Interpretación y modificación de gráfica para mejorar el modelo



Iniciando con el análisis, en la fase de formulación la competencia a desarrollar es la comprender el problema real y construir relaciones entre variables articulado con la habilidad de pensamiento crítico que es identificar el aspecto central del tema. Se evidencian estas competencias en las observaciones del trabajo colaborativo de la entrevista y sus reflexiones.

Al hacer y hacerse preguntas, éstas le iban aclarando la situación planteada (habilidades de pensamiento crítico), relacionaba variables y podía establecer estrategias para solucionar el problema (competencias de modelación matemática). Otra de las competencias identificadas es el establecimiento de supuestos y la argumentación en el momento de interpretar y validar la solución; además se observa la habilidad de pensamiento crítico de su razonamiento desde una perspectiva que como bien comenta en la entrevista es importante para tomar una decisión adecuada. Busca el punto de vista de su compañero e identifica sus fortalezas y debilidades.

Las evidencias de las competencias en los datos cualitativos recolectados coinciden con los datos cuantitativos. El estudiante muestra un avance de nivel bajo a nivel medio en sus resultados en la prueba de Cornell, pero además, los datos por sección corroboran los hallazgos cualitativos. El estudiante tiene un avance en la sección II: Credibilidad de las fuentes y Observación y se evidencia en sus cuestionamientos, en el reconocimiento y relación de variables. También se observa un porcentaje de dominio en la sección III: Deducción, esto se puede observar en la interpretación y validación que lleva a cabo de la solución a la que llegan su compañero y él. En la Tabla 28 se observan las puntuaciones por ítems y por porcentajes del estudiante analizado.

Tabla 28

Resultados de la preprueba y posprueba de estudiante con avance bajo – medio

PREPRUEBA									
Sección I	%	Sección II	%	Sección III	%	Sección IV	%	Total	%
15	65.2	8	33.3	12	85.7	6	60.0	41	57.7

POSPRUEBA									
Sección I	%	Sección II	%	Sección III	%	Sección IV	%	Total	%
14	60.9	14	58.3	12	85.7	6	60	46	64.8

Caso 2 de estudiante 2 / nivel bajo – bajo

Durante el inicio del trabajo de la situación problema el alumno y su compañero de equipo trataron de aclarar los datos que tenían, revisaban la libreta y buscaban fórmulas

y se esforzaban en reconocer y relacionar las cantidades. Durante la entrevista el alumno menciona: “veíamos bien el problema, me iba a la libreta y checaba como lo solucionaba matemáticamente; agarramos ideas del primer ejemplo pero sobre todo nos apoyamos en la libreta...” los alumnos iban probando con ciertas cantidades que reconocían como variables o parámetros y las relacionaban entre sí, observaban sus unidades y trataban de utilizar fórmulas para armar su modelo.

En el proceso el alumno se daba cuenta que no tenía claro como afectaban las cantidades entre sí y cómo se relacionaban entonces buscaba alguna fórmula y le decía a su compañero que dejara algunos valores y que hiciera cambios en otros para ver cómo se comportaba el simulador. En sus reflexiones comenta: “uno de los retos que tuve fue saber o más bien tener la intuición para seguir un problema, porque yo sentía que empezaba muy bien al resolver el problema pero al llegar a la mitad sentía que me atoraba o no comprendía los siguientes pasos que se necesitaban para resolver un problema...”

El hecho de trabajar en equipo le permitía reconsiderar las variables, los flujos y las unidades. Sin embargo, no llegaba a la solución. Reconocía los puntos importantes que tomaban en cuenta en su proceso: “ya agregamos lo importante, que es la cantidad de sal, relacionamos las variables pero queremos simular y no sale...” . La guía de la profesora los llevó a descubrir el error sobre considerar un parámetro como variable cuando no lo era y no utilizar los flujos de entrada y salida. Sin embargo, no se observa una comprensión muy profunda y falta una mayor interpretación. Se esforzaban por encontrar una respuesta casi general en los apuntes, las fórmulas y los problemas vistos con anterioridad.

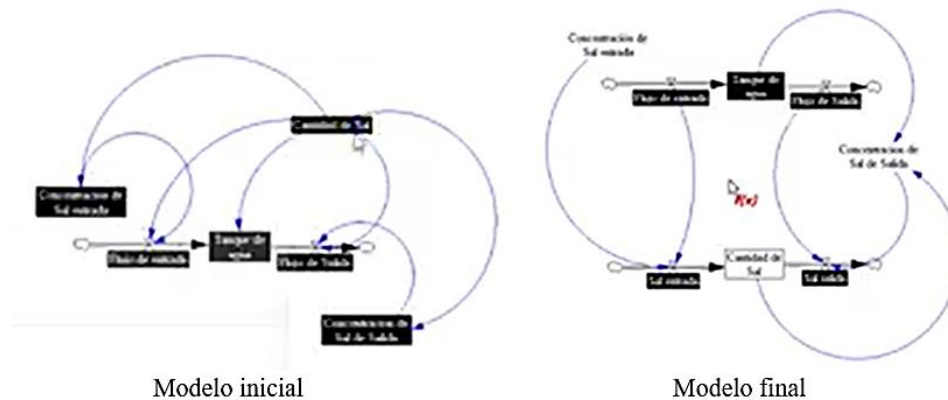
No obstante el alumno comentó como ventaja el trabajar en colaboración ya que sintió apoyo al escuchar la opinión y las propuestas de su compañero, considerando que le permitía seguir adelante y no estancarse en una sola idea.

De acuerdo con Ennis (1985), las decisiones acerca de las creencias o acciones suelen ocurrir en el contexto de un problema y deben partir de algún fundamento. Este fundamento pueden ser observaciones, afirmaciones hechas por alguna fuente y algunas proposiciones previamente aceptadas. A la hora de tomar decisiones la persona debe tener claro lo que va a obtener y ser capaz de ponderar otros puntos de vista. Una de las competencias de la modelación matemática es identificar las partes relevantes del problema, reconocer la influencia del contexto y establecer suposiciones y formular explicaciones del problema.

A pesar de no tener total reconocimiento de las variables, el alumno manipulaba el simulador para ver si encontraba de esta manera la solución, cambiaba cantidades para ver que sucedía y al dudar preguntaba a su compañero sobre estas cantidades. Con ayuda de la profesora pudo aumentar su conocimiento sobre las relaciones de las variables, entender los flujos y reconocer las diferencias de un parámetro y una variable. En la Figura 33 a la derecha se puede ver el modelo inicial con el que trabajó el alumno y su compañero y a la izquierda se observa el modelo que finalmente lograron diseñar con apoyo de la profesora que pudo solucionar la situación problemática. Establecen la concentración de sal como una variable de nivel y no un parámetro, establecen los valores y los flujos de entrada y la sal de entrada afectan a la concentración de sal.

Figura 33

Modelo diseñado con apoyo de profesora a alumnos de nivel bajo



En los resultados de los puntajes de las pruebas de Cornell se puede corroborar los datos cualitativos de la entrevista, el trabajo colaborativo y la reflexión ya que se puede observar como el puntaje bajo de la sección II: Credibilidad de las fuentes y Observación coincide con el nivel bajo de la competencia de comprensión del problema y reconocimiento y relación de variables relevantes que se observó en los cualitativos mencionados. La dificultad para establecer supuestos que permitieran dar interpretación a las gráficas y los flujos se evidencia en el porcentaje de la sección IV: Identificación de supuestos. Más que supuestos, se observó que se trabajaba a prueba y error. En la Tabla 29 se presentan los puntajes por sección del estudiante de este caso.

Tabla 29*Resultados de puntajes en pruebas de Cornell de alumno con niveles bajo – bajo*

PREPRUEBA									
Sección I	%	Sección II	%	Sección III	%	Sección IV	%	Total	%
17	73.9	12	50.0	9	64.3	2	20	40	56.3
POSPRUEBA									
Sección I	%	Sección II	%	Sección III	%	Sección IV	%	Total	%
20	87.0	9	37.5	11	78.6	2	20	42	59.2

Caso de estudiante 3 / nivel medio – alto

El alumno inicia con su equipo revisando los datos del problema, observa las variables, las unidades, cómo se relacionan estas variables y revisa en su libreta información de problemas similares. Busca fórmulas y comienza a hacer preguntas sobre los flujos y las flechas: “Entonces qué se pone de datos, donde está lo de la ecuación? Según yo son dos ecuaciones diferentes porque nos pide el cambio de la cantidad de sal y otro del cambio de la concentración de sal y aquí tengo las dos ecuaciones...”

Se observa competencias matemáticas de identificación de las partes relevantes, explicación del problema y comienza a buscar estrategias para diseñar el modelo. Otra competencia es la de seleccionar y usar información para investigar puntos de vista con sus compañeros, determina variables y parámetros para construir el modelo.

Analiza los supuestos propios y de sus compañeros. Va proponiendo poco a poco la construcción del modelo y la solución. Explica la relación de ciertas variables.

Una vez que van avanzados en el modelo, reciben retroalimentación de la profesora y cuando la profesora comienza a describir lo que hicieron para el modelo, el alumno va formulando explicaciones de lo que hicieron, reconoce errores y corrige expresando claramente dónde está el error y qué debe modificar para que el modelo funcione, es decir, reflexiona con respecto a la solución del problema considerando la posibilidad de mejorarlo.

Otras competencias que se evidencian es que su razonamiento tiene un propósito claro, formula preguntas para clarificar su alcance, identifica supuestos de llenado y vacío, de unidades de medida. Reconoce fortalezas y debilidades del modelo y cuestiona para y hace afirmaciones para reafirmar su razonamiento y conocimientos.

El alumno y sus compañeros vuelven a hacer el modelo, más sencillo y con los argumentos que establecen logran solucionarlo.

Estas competencias que se evidencian con claridad en las intervenciones del alumno en el trabajo colaborativo y con la profesora se contrastan con los puntajes de las pruebas de Cornell y se encuentra que son congruentes los datos cualitativos y cuantitativos recolectados. En la Tabla 30 se presentan los puntajes de la preprueba y posprueba. Como se puede observar de las cuatro secciones de la prueba sólo la sección de Inducción se mantiene en el mismo puntaje, no obstante, el valor es alto. Las otras tres secciones, Credibilidad de las fuentes y observación, Deducción e Identificación de supuestos van en aumento y la sección de Deducción llega a nivel de dominio.

Tabla 30*Puntajes de las pruebas de Cornell de alumno de nivel medio – alto*

PREPRUEBA									
Sección I	%	Sección II	%	Sección III	%	Sección IV	%	Total	%
17	73.9	16	66.7	9	64.3	5	50	47	66.2
POSPRUEBA									
Sección I	%	Sección II	%	Sección III	%	Sección IV	%	Total	%
17	73.9	19	79.2	12	85.7	8	80	56	78.9

Es importante destacar que aquellos alumnos que no tuvieron cambio de nivel en los puntajes entre la preprueba y la posprueba sí tuvieron un aumento en el puntaje entre pruebas, incluso, algunos de ellos quedaron justo en la línea límite del intervalo de nivel. Esto se observó a en los niveles de intermedio y alto. El nivel bajo hubo diferencias en los casos. Este curso evidencia que las situaciones problemas y el uso de un simulador contribuyen al ejercicio y desarrollo de competencias de modelación matemática y pensamiento crítico, no obstante, es necesario que el alumno se enfrente a este tipo de situaciones con regularidad para que lo hagan pensar continuamente, es decir, que se provoque en él un razonamiento intencionado.

Por último es necesario hacer mención sobre otras competencias que se observaron durante el trabajo colaborativo de los alumnos, las entrevistas y sus reflexiones. Por un lado el trabajo colaborativo es una competencia de la cual los alumnos se beneficiaron. Al llevar a cabo discusiones sobre las situaciones problema, los alumnos hablaban de la situación, trataban de comprender el problema y el analizar el problema desde diferentes puntos de vista permitía cuestionarse, repensar las posturas, las estrategias y la búsqueda

de información para solucionar el problema. Por ejemplo, un alumno comenta que: “Una opinión más siempre nutre un trabajo, inclusive si la descartas. El tener ideas diferentes te ayuda a encontrar una solución, y más si es un problema complejo...”

Una alumna afirmó que: “trabajar en colaboración es valioso, a mí me gustan mucho las matemática pero de repente me “atoro” y la opinión de otros me ayuda a seguir adelante y no seguir en donde mismo. Tener puntos de vista diferentes te lleva a encontrar mejores soluciones porque se proponen diferentes caminos, tienes más opciones...”.

Con respecto al uso de tecnología, específicamente el simulador Vensim, fue una herramienta que los alumnos consideraron muy útil, una manera diferente e innovadora de solucionar problemas. De todas las reflexiones y entrevistas, ningún estudiante vio desventajas en este software. Estas son algunas opiniones de los alumnos:

Facilita considerar diferentes modelos y tomar decisiones en base a ellos, es como un análisis a largo plazo de las consecuencias que podrían tener estas decisiones

Ayuda a entender bien lo que se está haciendo al resolver ecuaciones diferenciales, en vez de solo seguir un proceso sin realmente saber lo que está sucediendo.

Una ventaja que encuentro de este sistema es que, al acostumbrarnos a modelar las ecuaciones de la forma vista en clases, nos reta a buscar la manera de emplear esos conocimientos de una forma distinta, por lo que es bueno para desarrollar nuestra capacidad de pensamiento crítico y lógico.

De acuerdo con alumnos, esta herramienta del Vensim, les permite comprender las ecuaciones diferenciales de una manera más visual y te ayuda a ver resultados a largo plazo o con muchas variables que te llevan a modelar situaciones reales.

4.2.6 Triangulación entre el análisis cuantitativo y cualitativo de los datos

Tal como se dijo en el capítulo 3, se realizó un estudio mixto concurrente del tipo cuan-CUAL-cuan por lo que se llevó a cabo una triangulación de los hallazgos en cada una de las aproximaciones metodológicas con el interés de corroborar resultados y efectuar una validación cruzada entre los datos cuantitativos y cualitativos.

En relación con la fase de Formulación que aparece en la rúbrica que se relaciona con las competencias de modelación matemática para comprender el problema real y establecer un modelo basado en la realidad (Blum y Kaiser, 1997) y habilidades de pensamiento crítico que implican la aclaración del problema o situación (Ennis, 1985) y elementos del pensamiento crítico, tales como el propósito del pensamiento crítico, pregunta o asunto en cuestión e información (Paul y Elder, 2005) se encontraron las siguientes relaciones:

- En las observaciones del trabajo colaborativo de los equipos se encontró que los alumnos se les dificultaba comprender el problema e identificar variables. Estas observaciones influyen en los puntajes de los estudiantes en la sección II credibilidad de las fuentes y observaciones, ya que el rango de puntajes es el más bajo de toda la prueba. Los alumnos hacían observaciones sobre los datos que encontraban en la situación problemática y buscaban información de otras situaciones o fuentes que pudieran ser de ayuda para solucionar el problema. El trabajo colaborativo llevó a los alumnos a plantear sus ideas, conocimientos y reflexionar para lograr una comprensión de la situación problema.
- Con respecto a los caminos que tomaban para iniciar con el proceso de solución del

problema, se encontró que los equipos que leían el problema y que iniciaban dedicando tiempo a comentar el problema para comprenderlo y en consenso identificar las variables y parámetros, fueron equipos con niveles bajos en el puntaje de la prueba de Cornell de pensamiento crítico. El rango de aciertos en esta sección I: Credibilidad de las fuentes y observación fue de 29% a 50%, esto a pesar de dedicar un espacio especialmente para la comprensión del problema.

- En los casos de los equipos con niveles intermedios y altos, también se observó que tuvieron dificultades con la comprensión del problema y la identificación de variables y parámetros. El hecho de no dedicar un tiempo a reflexionar y compartir ideas al respecto los llevaba a regresar a la búsqueda de esas variables y de fuentes que pudieran ayudar en la solución del problema. A pesar de que los rangos de los puntajes de esta sección I: Credibilidad de las fuentes y observación en estos equipos es mayor que aquellos con niveles bajos, es la sección con el rango más bajo.
- En las observaciones del trabajo colaborativo se observó que los estudiantes establecían supuestos y partiendo de ellos simulaban en software Vensim, esta herramienta tecnológica les permitió experimentar con más facilidad cambiando los supuestos cuando veían que no funcionaba la solución. Los alumnos comentan esta práctica como algo de mucha ayuda ya que les permitía ver el comportamiento de la ecuación diferencial y entendían su aplicación. Como se puede observar, en la sección IV de identificación de supuestos, se encontró el mayor aumento entre la preprueba y posprueba. Solo el 17% de los alumnos (3) disminuyó su puntaje en un ítem de diez, el 55% (10) de los alumnos aumentó el puntaje, algunos de ellos, considerablemente y el 28% (5) no tuvo cambio. Algunos ejemplos que dan

evidencia de esta habilidad de pensamiento crítico en los alumnos son, por ejemplo, con la interpretación de la gráfica de la cantidad de sal de la situación problemas de mezclas donde suponen que el modelo funciona pero que éste llega un punto donde se supone se vacía. En la situación problema de los peces los alumnos se cuestionaban sobre otras variables que no se consideraban o que, por el momento, en estos primeros acercamientos con el simulador, se dejaban de lado. Una de estas variables era la muerte de los peces por otras causas diferentes a ser atrapados.

Respecto a la fase de Resolución de la modelación matemática y que aparece en la rúbrica se relaciona con las competencias de modelación matemática para configurar un modelo matemático a partir de un modelo real (Blum y Kaiser, 1997) y habilidades de pensamiento crítico como la credibilidad de las fuentes y observar y juzgar los informes de los datos como bases para la decisión (Ennis, 1985), así como elementos del pensamiento crítico, tales como la información datos, hechos, observaciones, experiencias (Paul y Elder, 2005).

En los datos cualitativos se encontró que los alumnos buscaban fórmulas que se utilizaban en otros problemas que consideraban que se podían relacionar y utilizar en la solución del problema, trataban de generalizar el uso de la fórmula y de teorías matemáticas aplicadas en su modelo matemático. Al apoyarse en teorías probadas o aceptadas para describir el fenómeno que se estaba estudiando pudieron hacer inferencias sobre él. Estas estrategias de razonamiento lógico se corroboran en las secciones I y II, inducción y deducción respectivamente, que fueron las secciones de mayor puntaje. Una vez que lograban aclarar el problema e identificaban las variables y parámetros, pudieron

configurar el modelo matemático para resolver el problema planteado.

En relación con la fase de Interpretación del proceso de MM que aparece en la rúbrica que se relaciona con las competencias de modelación matemática para interpretar resultados matemáticos en una situación real (Blum y Kaiser, 1997) y que se relaciona con las habilidades de pensamiento crítico que tiene que ver con la capacidad de los alumnos para evaluar las informaciones, esto es, obtener conclusiones apropiadas, realizar generalizaciones, inferir, formular hipótesis, generar y reformular de manera personal una argumentación, un problema, una situación o una tarea (Ennis, 1981) y como elementos del pensamiento crítico, tales como inferencias o interpretaciones por las cuales se llega a conclusiones y que dan significado a los datos (Paul y Elder, 2003); se encontró que los alumnos realizaban simulaciones e interpretaban el resultado.

Por ejemplo, analizaban las gráficas e interpretaban la forma de la curva, interpretando si aumentaba la concentración de sal o disminuía; en qué punto de la gráfica se vaciaba el tanque de la mezcla. A partir de un conocimiento establecido que el volumen no puede tener un valor negativo, concluían en qué tiempo se vaciaba el tanque. O bien, para el problema de peces, en qué momento se extinguían los peces.

Esto se puede relacionar como en la fase anterior, en las secciones I y II de inducción y deducción. Nuevamente, en este punto los alumnos comentaban en las entrevistas y sus reflexiones que la herramienta tecnológica les permitía analizar visualmente sus resultados, llegar a una mayor comprensión y conclusiones. Sus argumentos los tenían claros y cuando no era así, regresaban al modelo matemático y, nuevamente revisaban las variables, las unidades, sus supuestos. De esta manera los alumnos obtenían información o llevaban a cabo conclusiones que no estaban se

manifestaban de manera explícita.

Con respecto a la fase de Validación de la rúbrica que se relaciona con las competencias para validar la solución y habilidades de pensamiento crítico que implican hacer y juzgar juicios de valor (Ennis, 1985) e implicaciones y consecuencias (Paul y Elder, 2005); se encontró que los estudiantes validaban sus soluciones considerando el contexto y las implicaciones que resultaban de esa solución. Por ejemplo, en el problema de los peces, los alumnos argumentaban que no era suficiente considerar sólo la perspectiva empresarial, sino que era necesario ver los efectos adversos en el ecosistema. En este caso, las secciones de inducción y deducción se relacionan con esta fase de validación. Como se ha expuesto anteriormente, en general los puntajes en estas secciones aumentaron significativamente.

Capítulo 5: Conclusiones

Las matemáticas son un lenguaje formal que nos permite expresar nuestros pensamientos abstractos (Citlas e Isik, 2014). Hemos visto que, una forma de abrirse a los desarrollos y los cambios en la tecnología y la ciencia es la capacidad de utilizar la técnica matemática y los procesos mentales también. Debido a esto, la sociedad espera que los profesores de matemáticas puedan privilegiar el desarrollo de habilidades en los alumnos para que sean capaces de lograr soluciones efectivas. Por lo tanto, uno de los retos que los profesores deben enfrentar, es cómo involucrar a los alumnos en la solución de problemas que impliquen sistemas complejos dentro de un contexto interdisciplinario (English, 2009).

Desde hace algunos años, investigadores expertos en modelación matemática han visto su integración en la enseñanza de las matemáticas como una opción para propiciar el pensamiento analítico y la solución de problemas y para propiciar una relación con el uso de tecnologías que son comunes en la sociedad (Molina-Toro, Villa-Ochoa y Suárez-Téllez, 2018; Hidiroglu y Güzel, 2017; Kertil y Gurel, 2016; Daher y Shahbari, 2015). Al mismo tiempo, consideran que la modelación como estrategia en la enseñanza de las matemáticas, lleva al alumno a relacionar el mundo de la vida real con el mundo matemático, por lo que puede situar al estudiante frente a las problemáticas sociales (Dundar, Gokkurt y Soyulu, 2012).

Tomando en cuenta que en la formación de ingenieros el desarrollo de habilidades matemáticas y de pensamiento son de gran relevancia, esta investigación abordó el tema

de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la formación de ingenieros al usar como estrategia la modelación matemática y de cómo ésta puede contribuir al desarrollo de las habilidades de una competencia transversal como lo es el pensamiento crítico. En consecuencia el problema de investigación se estableció a partir de la pregunta general: ¿Cuáles son las contribuciones de la modelación matemática en el desarrollo de la competencia de pensamiento crítico en futuros ingenieros?

Como inicio del estudio, se llevó a cabo una búsqueda de literatura sobre modelación matemática. En esta búsqueda se encontró que el estudio de la modelación lleva más de cuarenta años y cada vez el interés es mayor. No obstante, en esta búsqueda realizada en dos bases de datos (Scopus y Web of Science), no se encontraron estudios que relacionaran directamente la modelación matemática y el pensamiento crítico desde una perspectiva de competencias del siglo XXI, sólo se encontraron estudios donde se relaciona el pensamiento crítico con las matemáticas en general.

Este estudio, desde una perspectiva teórica de modelación educativa, toma como base el ciclo de modelación de Rodríguez (2007, 2010, 2016), que es concebido como un proceso cíclico que relaciona el dominio del mundo real con el dominio matemático. Entre ellos se identifican el dominio pseudo-concreto, en donde se consideran las magnitudes de interés y a través de hipótesis implícitas y/o explícitas se lleva a cabo una reducción o simplificación de la situación real; el dominio físico donde se da la comprensión de los fenómenos físicos abordados en la problemática inicial. Conjuntamente esta investigación se basa en las competencias de modelación matemática de Blum y Kaiser (1991).

Con relación a la competencia de pensamiento crítico, las principales aproximaciones que se han desarrollado en el marco teórico de esta investigación provienen de los trabajos de Robert Ennis (2011, 1985), Richard Paul y Linda Elder (2005, 2003), Peter Facione (2007) quienes defienden el pensamiento crítico como un pensamiento reflexivo y razonable que se centra en qué creer o hacer.

Para dar respuesta a la pregunta de investigación, el estudio siguió una metodología de métodos mixtos con un diseño de triangulación concurrente ya que a través de la interpretación y comparación de resultados cuantitativos y cualitativos se puede abordar a esta problemática. Los participantes de la investigación fueron estudiantes del área de ingeniería de las clases de Ecuaciones Diferenciales. Se contó con un grupo experimental y un grupo de control.

Para el enfoque cuantitativo, se validó la traducción de la prueba de pensamiento crítico de Cornell y se aplicó como preprueba y posprueba a los dos grupos de estudiantes para comparar sus medias e indagar si hubo una mejoría significativa del nivel de pensamiento crítico de los alumnos del grupo experimental. Se obtuvieron los puntajes de los alumnos participantes y se clasificaron en tres diferentes grupos. En el enfoque cualitativo, se llevaron a cabo observaciones a seis equipos de su trabajo en clase, se realizaron entrevistas a cuatro alumnos y se obtuvieron nueve reflexiones a solicitud de la profesora de la clase. Se analizaron los datos y se compararon con los hallazgos cuantitativos.

Esta triangulación de los hallazgos cuantitativos y cualitativos permitieron dar respuesta a la pregunta general de investigación y las tres preguntas subordinadas a ellas. A continuación, se presentan dichas preguntas y sus respuestas.

¿Qué elementos de la modelación matemática se puede observar en una clase de matemáticas para futuros ingenieros?

Durante esta investigación se diseñó una rúbrica que pudiera apoyar en las observaciones del trabajo colaborativo de los alumnos. En la clase se les propuso a los estudiantes y se analizaron la solución a dos situaciones problema específicos adaptados a las necesidades pedagógicas para la enseñanza del curso, pero cercanos a la realidad. Para solucionar los problemas, hicieron uso de una herramienta tecnológica, un simulador, llamado Vensim. Esto se explicó con detalle en la sección 3.3.1.4.

En la fase de formulación que evalúa competencias para comprender el problema real y establecer un modelo basado en la realidad, se pudo observar que el identificar el problema y los datos relevantes para la solución del problema hubo dificultades en los equipos de trabajo. No obstante, los alumnos se cuestionaban cuál era el problema que debían resolver, ya que no estaba explícito en la problemática propuesta.

Algunas de las estrategias para abordar el problema fue buscar información útil, como las fórmulas utilizadas en otros problemas que relacionaron con el que trabajaban, relacionaban las variables de uno con las variables del otro, los parámetros; reconocieron qué cantidades influyen y tomaron en cuenta el contexto haciendo suposiciones para crear su modelo matemático. Esta fase se puede observar en lo que Rodríguez (2010) llama el dominio pseudo concreto.

En la fase de resolución se encuentran las competencias para configurar un modelo matemático a partir de un modelo real. Este modelo matemático se diseñaba a partir de

ecuaciones diferenciales, una vez que se comprendía el problema y se identificaban los datos relevantes se construía el modelo considerando conocimientos partiendo del dominio físico donde se da la comprensión de los fenómenos físicos abordados en la problemática inicial, lo que Rodríguez (2010) llama dominio físico.

En la fase de interpretación, se encuentran las competencias para interpretar resultados matemáticos en una situación real. Es decir traducir el resultado matemático a la realidad, lo que Rodríguez(2010) llama dominio matemático y dominio real. En esta fase los estudiantes observaban los resultados matemáticos y lo asociaban a la situación real. Por ejemplo, la forma y la dirección de una gráfica “la traducían” como el aumento o disminución de concentración de sal. Generalizaban a partir de la respuesta encontrada o al contrario, a partir de conocimientos previos de los fenómenos inferían el resultado.

La fase de validación es donde los alumnos validaban la solución con la realidad. Esta fase se pudo observar a los alumnos reflexionando sobre la solución y la posibilidad de mejorar esa solución. Este análisis y evaluación del modelo se les facilitaba al usar el simulador. La tecnología jugó un papel importante para la evaluación de la solución ya que el simulador es una herramienta visual de modelaje que permitió a los estudiantes construir modelos a través de diagramas causales, permitiendo comparar resultados y superponiendo gráficos de distintas variables, cambiar escalas y periodos de estudio Los alumnos, sin el conocimiento de programación, podían construir su simulador desde cero y establecer relaciones y parámetros que los llevara a construir su modelo matemático para solucionar la problemática propuesta. En resumen, los elementos o habilidades de modelación matemáticas que se observaron en clase fueron la identificación y explicación del problema, identificación de los datos relevantes búsqueda de información

disponible, reconocimiento de la influencia del contexto y suposiciones. El uso de fórmulas para el diseño de un modelo matemático, interpretación de expresiones matemáticas y gráficas. Reconocimiento de la realidad, el contexto y la solución encontrada.

¿Cuál es el nivel de pensamiento crítico que es desarrollado en un curso de matemáticas para futuros ingenieros?

La aplicación de la prueba de Pensamiento Crítico de Cornell a los alumnos como preprueba y posprueba permitió ubicar su nivel de pensamiento crítico de manera general y en cuatro subgrupos: inducción, credibilidad de las fuentes y observación, deducción e identificación de supuestos. Se establecieron tres intervalos de clase para los niveles de la competencia; bajo, intermedio y alto.

Se encontró que en general los mejores puntajes fueron los de deducción e inducción y, también de manera general, el más bajo fue el de credibilidad de las fuentes y observación. Esto se confirma con las observaciones, entrevistas y reflexiones de los estudiantes donde se puede ver la gran dificultad para comprender, explicar e identificar los datos relevantes. También se observó que los alumnos hicieron inferencias a partir de una situación particular o del conocimiento de teorías generales a la solución del problema, particularmente.

Otro hallazgo es que los equipos clasificados de nivel bajo iniciaban el proceso de solucionar el problema reflexionando sobre el mismo. Buscaban llegar a un consenso sobre los datos relevantes y la manera de diseñar el modelo matemático. No obstante,

tuvieron dificultades para lograrlo. En el caso de los equipos de nivel alto o intermedio, los alumnos iniciaban “sobre la marcha” el análisis de la situación problemática planteada. Sin embargo, el hecho de no dedicar un espacio especialmente a la reflexión les hacía regresar al inicio y hacer ajustes al modelo con frecuencia.

¿Cuáles son las habilidades de pensamiento crítico que la estrategia de modelación matemática puede contribuir a su desarrollo en una clase de matemáticas para futuros ingenieros?

Aún y cuando el comprender y explicar el problema y la identificación de variables relevantes les llevó tiempo a los estudiantes para lograrlo, la estrategia de modelación matemática propició el desarrollo de esta habilidad debido a que los problemas que se plantean en clase son muy cercanos a la realidad. Esto lleva al estudiante a reflexionar ya que el problema que se plantea no contiene preguntas cerradas que se deban responder como solución de la situación problemática.

Para que se logre la comprensión conceptual matemática en los estudiantes los contextos deben ser matematizados, es decir, organizar la realidad utilizando ideas y conceptos matemáticos, usando estrategias informales para describir y resolver problemas, tales como, descubrir relaciones y regularidades, reconocer similitudes en diferentes problemas y pasar a una matematización vertical, esto es, probar estas regularidades en un modelo matemático, representar una relación en una fórmula, etc. (Almuna, 2017). Esto se puede encontrar en las observaciones del trabajo colaborativo de los alumnos, de tal manera que, hasta que logran la comprensión de la situación

matemática, es cuando pueden construir sus modelos matemáticos y avanzan en su propio diseño de simulación.

De acuerdo con Paul y Elder (2005), todo razonamiento tiene un propósito y es precisamente ese propósito lo que los estudiantes se cuestionaban: ¿Qué trato de lograr? ¿Qué me piden? Este razonamiento se fundamenta en datos, información y evidencia, los estudiantes trabajaron en la identificación de cantidades que influían en el problema y en la búsqueda de información sobre problemas que ya habían resuelto que pudieran relacionar con la situación planteada para tomar estrategias y/o fórmulas que ayudaran a la solución.

Los alumnos se cuestionaron qué suposiciones los llevaban a cierta conclusión, hacían inferencias a partir de una situación particular o el conocimiento de teorías aplicables a la solución del problema, particularmente. Analizaban sus argumentos identificando las razones que daban, las similitudes y diferencias entre un problema y otro. También consideraban el contexto, la viabilidad e implicaciones de la solución propuesta.

En resumen, los elementos del pensamiento crítico que Paul y Elder (2005) establecen como: el propósito u objetivo, el problema o asunto (la pregunta en cuestión), la información como datos, hechos observaciones y experiencias; la interpretación e inferencia, los conceptos (teorías, principios, leyes), los supuestos que se aceptan, las implicaciones y consecuencias y, los puntos de vista tanto personales como de otros; se pudieron observar en el trabajo colaborativo de los estudiantes y en sus respuestas de las entrevistas y reflexiones.

Es importante mencionar que las herramientas tecnológicas pueden ser de gran utilidad al trabajar con la estrategia de modelación matemática. Esto se observó cuando los alumnos regresaban a su modelo matemático y trataban de mejorarlo, algunos iniciaban nuevamente con otro diseño. El hecho de poder hacer cambios en los parámetros y hacer suposiciones al hacer estos cambios, les permitía buscar diferentes y más soluciones que se adecuaban a la realidad.

Otro aspecto importante de reconocer es que el trabajo colaborativo permitió aprendizajes en proceso de solución de las situaciones problema. Los alumnos al reflexionar entre ellos les permitía confirmar sus argumentos o bien, cambiar de postura a una más robusta. Con frecuencia surgían oportunidad para considerar aspectos que algunos estudiantes no habían contemplado.

Como ya se ha comentado, la competencia del pensamiento crítico es una de las competencias transversales considerada como de las más importante en la actualidad y la modelación matemática como una estrategia que lleva a relacionar el mundo matemático con la realidad por lo que esta articulación que se ha estudiado en esta investigación aporta desde una perspectiva teórica cómo se concibe a la modelación matemática y, desde una perspectiva metodológica se plantean elementos para mirar estos procesos en el aula. Otra aportación es la rúbrica para evaluar las diferentes competencias de modelación matemática y de pensamiento crítico que puede utilizar el profesor interesado en propiciar el desarrollo de competencias tan necesarias.

Por otro lado, esta investigación enfrentó algunas limitaciones. Una de ellas fue que, a pesar de que al inicio del semestre hubo una buena respuesta de participación en contestar la prueba de Pensamiento Crítico de Cornell por parte de los estudiantes, al

finalizar el curso, la respuesta disminuyó significativamente por lo que los resultados no pueden ser generalizados. La situación de pandemia obligó a cambiar el curso de presencial a un curso a distancia.

Este curso finalizó con el año de pandemia el cual se caracterizó por una baja motivación y cansancio por parte de los alumnos, dificultades en su estado de ánimo y la saturación de clases en línea. No obstante, este acercamiento nos da información importante tanto de competencias de modelación como de pensamiento crítico. Otra limitante, relacionada con la anterior, es que se observaron dos equipos por nivel de pensamiento crítico, lo cual también dificulta la generalización de los resultados.

Es necesario reconocer que la competencia de pensamiento crítico es una competencia que no se desarrolla de manera espontánea, solo con el paso del tiempo. Además, este desarrollo implica un tiempo y un ejercicio. Son disposiciones y habilidades las que lo constituyen, por lo que no se puede afirmar que este cambio de nivel de pensamiento crítico observado en las pruebas de Cornell sea permanente. Sin embargo, el interés y el trabajo de los profesores por propiciar el desarrollo de estas competencias esenciales, hoy en día, justifican investigaciones relacionadas a estos constructos.

Pensando especialmente en aquellas personas interesados en la investigación y en estas competencias de modelación matemática y pensamiento crítico se ofrecen las siguientes sugerencias:

- Es de gran relevancia considerar el tipo de tarea de modelación matemática con la que se vaya a trabajar. En esta investigación, las situaciones problema se caracterizaron por presentar a los estudiantes ciertas problemáticas que, aún y

cuando no son totalmente reales, o más bien, se simplifica la realidad, ésta última puede ser imaginada y experimentada como reales por los alumnos. Estas actividades sitúan a los estudiantes en lo que Rodríguez (2016) llama el dominio pseudo-concreto.

- Tanto la modelación matemática como el pensamiento crítico son competencias formadas por diversas habilidades. Se sugiere trabajar enfocándose en una fase específica o priorizando dicha fase. Hay habilidades tan complejas que es suficiente enfocarse en ella sola; tal es el caso de la argumentación.
- Profundizar y experimentar la modelación matemática. Entre más se conozca sobre ella y se trabaje, serán más relevantes los hallazgos en el campo de la investigación y más significativos las oportunidades de desarrollo de las competencias.
- Incluir herramientas tecnológicas como simuladores, calculadoras y otros que puedan facilitar el desarrollo de las habilidades de modelación matemática y pensamiento crítico.
- Temas de investigación pueden ser, en relación con la tecnología como educación a distancia, simuladores, sensores, etc., y el estudio de alguna de las sub-competencias de modelación y pensamiento crítico.
- Relacionar otras competencias como el trabajo colaborativo, la comunicación escrita y oral y la modelación matemática.
- En el campo de la investigación y en la docencia, trabajar y relacionar la interdisciplinariedad con las competencias. Nada está aislado por lo que el trabajo interdisciplinario, aunque requiere de mucho esfuerzo y tiempo, será

muy fructífero tanto en aprendizajes para los estudiantes como para la indagación.

Es importante reconocer que optar por un enfoque cualitativo ofrece una riqueza en la investigación sobre competencias de modelación y pensamiento crítico. Estos constructos son complejos, están compuestos por sub-competencias por lo que evaluar las contribuciones que pueden aportar a partir de una medición de una prueba estaría dejando vacíos importantes al cuestionarse de qué manera se dan esas contribuciones. Como se ha evidenciado en esta investigación, el optar por un método mixto con énfasis en el enfoque cualitativo fortaleció los resultados del análisis del estudio.

En el estudio cuantitativo, nos habla de niveles del pensamiento crítico. Se pudo obtener información si permaneció igual después de la intervención, o bien, si aumentó o disminuyó y en qué secciones. Sin embargo, en el enfoque cualitativo, se pudo observar, por ejemplo, que dificultades tuvieron algunos de los alumnos para comprender el problema. Se pudo observar cómo los estudiantes analizaban las variables, sus unidades y cómo buscaban relaciones con otras situaciones similares. Estos ejemplos de “cómos”, son la riqueza del enfoque cualitativo.

Cabe mencionar que actualmente el interés por la calidad de la formación de ingenieros ha ido en aumento debido a que los problemas que enfrenta la sociedad ya no son locales, más bien, son desafíos globales que deben enfrentarse no solo con conocimientos disciplinares como lo son las matemáticas, sino también, con habilidades de pensamiento de orden superior y con valores éticos que lleven a la búsqueda de soluciones que se inclinen por el bienestar social. Es por lo que hoy la investigación y

las prácticas pedagógicas deben centrarse en competencias tan relevantes y necesarias como la modelación matemática y el pensamiento crítico.

Se espera que esta investigación sea el comienzo de un largo camino lleno de oportunidades para seguir aportando conocimiento y experimentando innovaciones educativas que lleven a experiencias y aprendizajes significativos.

Referencias

- Aizikovitsh-Udi, E., y Cheng, D. (2015). Developing Critical Thinking Skills from Dispositions to Abilities: Mathematics Education from Early Childhood to High School. *Creative Education*, 6, 455-462. <http://dx.doi.org/10.4236/ce.2015.64045>
- Aizikovitsh-Udi, E. y Star, J. (2011). The skill of asking good questions in mathematics teaching. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 15, 1354–1358. DOI: 10.1016/j.sbspro.2011.03.291
- Aksu, G. y Koruklu, N. (2015). Determination the effects of vocational high school students' logical and critical thinking skills on mathematic success. *Eurasian Journal of Educational Research*, 59, 181.
- Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2013). Problemas de estimación de grandes cantidades: modelización e influencia del contexto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16 (3): 289-315.
- Almuna, F. J. (2017). The role of context and context familiarity on mathematics problems. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 20(3), 265-292.
- Álvarez-Gayou, J. (2012), *Cómo hacer investigación cualitativa: Fundamentos y metodología*. México: Paidós.
- Anhalt, C. O. y Cortez, R. (2016). Developing understanding of mathematical modeling in secondary teacher preparation. *J Math Teacher Educ*, 19, 523–54.
- Arseven, A. (2015). Mathematical Modelling Approach in Mathematics Education. *Universal Journal of Educational Research*, 3(12), 973-980. DOI: 10.13189/ujer.2015.031204
- Arviana, R., Y Prabawanto, S. (2019). Critical Thinking of Female Students in Solving Mathematical Problems. *Jurnal Studi Guru Dan Pembelajaran*, 2(3), 178-185. <https://doi.org/10.30605/jsgp.2.3.2019.1392>
- Asari1, A. R., Mahmudi, A. y Nuerlaelah, E. (2017). Our prospective mathematic teachers are not critical thinkers yet. *Journal on Mathematics Education*, 8(2), 145-156. <http://dx.doi.org/10.22342/jme.8.2.3961.145-156>

- Asociación Iberoamericana de Instituciones de Enseñanza de la Ingeniería ASIBET (2014). Tendencias en la formación de ingenieros en Iberoamérica. Recuperado en <http://www.anfei.mx/public/files/ASIBEI/TFI.pdf>
- Association of American Colleges and Universities (AAC&U). (2009). *Critical Thinking VALUE rubric*. Recuperado de <https://www.aacu.org/value/rubrics/inquiry-analysis>
- Association of American Colleges and Universities (AAC&U). (2009). *Problem Solving VALUE rubric*. Recuperado de <https://www.aacu.org/value/rubrics/inquiry-analysis>
- Atabaki, A. M. S., Keshtiaray, N. y Yarmohammadian, M. H. (2015). Scrutiny of Critical Thinking Concept. *International Education Studies*, 8(3), 93-102.
- Aztekin S. y Zehra, T. (2015). The content analysis of mathematical modelling studies in turkey: a meta-synthesis study. *Education and Science*. 40(178), 139-161.
- Bagiati, A. et al. (2015). The landscape of PreK-12 engineering online resources for teachers: global trends. *International Journal of STEM Education*, 2(1), 1-15. DOI 10.1186/s40594-014-0015-3
- Baños, J. E., & Pérez, J. (2005). Cómo fomentar las competencias transversales en los estudios de Ciencias de la Salud: una propuesta de actividades. *Educación médica*, 8(4), 40-49.
- Basri, H., Purwanto, As'ari, A. R. y Sisworo. (2019). Investigating Critical Thinking Skill of Junior High School in Solving Mathematical Problem. *International Journal of Instruction*, 12(3), 745-758. [10.29333/iji.2019.12345a](https://doi.org/10.29333/iji.2019.12345a)
- Bell, D. (2016). The reality of STEM education, design and technology teachers' perceptions: a phenomenographic study. *International Journal of Technology and Design Education* (2016) 26, 61–79. DOI 10.1007/s10798-015-9300-9
- Bie, H., Wilhelm, H. P. y Van der Meij, H. (2015). The Halpern Critical Thinking Assessment: Toward a Dutch appraisal of critical thinking. *Thinking Skills and Creativity*, 17, 33–44.
- Bigozzi L. et al (2018) The Influence of Teaching Approach on Students' Conceptual Learning in Physics. *Frontiers in Psychology*. 9(2474). doi: 10.3389/fpsyg.2018.02474
- Blum, W. y Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58.

- Blum, W. y Kaiser, G. (1997). Vergleichende empirische Untersuchungen zu mathematischen Anwendungsfähigkeiten von englischen und deutschen Lernenden. Unpublished application to Deutsche Forschungsgesellschaft.
- Blum, W. y Leib, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? *Education, Engineering and Economics–ICTMA 12*, 222-231. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221>
- Blum, W y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational studies in mathematics*, 22, 1991, 37-68.
- Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM Mathematics Education*, 38 (2), 86 – 95.
- Borromeo, R. (2013). Mathematical Modelling in European Education. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, 4, 18-24.
- Brito-Vallina, M., Alemán-Romero, I., Fraga-Guerra, E., Para-García, J., y Arias-deTapia, R. (2011). Papel de la modelación matemática en la formación de los ingenieros. *Ingeniería Mecánica*, 14(2), 129-139.
- Brophy, S. P. (2016). *Developing flexibly adaptive skills through progressive design challenges*. Course Trabajo presentado en ASEE Annual Conference & Exposition, New Orleans, Louisiana, DOI: 10.18260/p.26759
- Búa, J., Fernández, M. y Salinas M. (2016). Competencia matemática de los alumnos en el contexto de una modelización: aceite y agua. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 19 (2): 135 - 163.
- Bybee, R. W. (2012). The case of STEM Education. Challenges and Opportunities. EE. UU.: National Science Teachers Association.
- Cabero-Almenara, J. y Costas, J. (2016). La utilización de simuladores para la formación de los alumnos. *Prisma Social*, (17), 343 – 372. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=353749552015>
- Camarena, P. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias. *Innovación Educativa*, 9(6),15-25. Recuperado de: <http://www.redalyc.org/pdf/1794/179414894003.pdf>
- Carberry, A. y Mc Kenna A. (2014). Exploring student conceptions of modeling and modeling uses in engineering design. *Journal of Engineering Education*. 103(1), 77-90).

- Cargas, S., Williams, S. y Rosenberg, M. (2017). An approach to teaching critical thinking across disciplines using performance tasks with a common rubric. *Thinking Skills and Creativity*, 26, 24–37.
- Celik, H. C. (2017). Mathematical modelling research in Turkey: A content analysis study. *Educational Research and Reviews*, 12(1), 19 – 27.
- Ciltas, A. e Isik, A. (2013). The Effect of Instruction through Mathematical Modelling on Modelling Skills of Prospective Elementary Mathematics Teachers. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 13(2), 1187-1192.
- Clegg, J. R. y Diller, K. R. (2018, June), *Evolution of Biomedical Engineering Students' Perceptions of Problem Solving and Instruction Strategies During a Challenge-Based Instruction Course* Trabajo presentado en 2018 ASEE Annual Conference & Exposition, Salt Lake City, Utah. <https://peer.asee.org/30458> Contreras, G., García, R. y Ramírez, M. (2010).
- Contreras, G. A., y Carreño, P. (2012). Simuladores en el ámbito educativo: un recurso didáctico para la enseñanza. *Ingenium Revista de la facultad de ingeniería*, 13(25), 107-119.
- Contreras, G. A., García R. y Ramírez, M. S. (2010). Uso de simuladores como recurso digital para la transferencia de conocimiento. *Apertura* 2(1).
- Coskun, H. (2017). Mathematical modelling research in Turkey: A content analysis study. *Educational Research and Reviews*, 12(1), 19-27. DOI: 10.5897/ERR2016.3077
- Craig, D. (2001). *Desarrollo Psicológico*. México: Pearson Educación.
- Creswell, J.W. and Poth, C.N. (2018) *Qualitative Inquiry and Research Design Choosing among Five Approaches*. 4th Edition, SAGE Publications, Inc., Thousand Oaks.
- Czocher, J. (2017). How can emphasizing mathematical modeling principles benefits students in a traditionally taught differential equations course? *Journal of Mathematical Behavior*, 45, 78-94.
- Daher, W. M. y Shahbari, J. A. (2015). Pre-service teachers' modelling processes through engagement with model eliciting activities with a technological tool. *International Journal of Science and Mathematics Educatio*, 13(Suppl. 1), 25-46.
- Devesh, S. (2015). Mathematical Competencies in Higher Education in Oman: A Critical Review. *International Journal of Applied Engineering Research*, 10(18), 38989-38994.

- Díaz, F. y Hernández, G. (2010). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. México: Mc Graw Hill.
- Doerr, H., Arleback, J. y Castello, A. (2014). Design and effectiveness of modeling-based mathematics in a summer bridge program, *Journal of Engineering Education*, 103(1), 92–11.
- Doruk, B. K. (2012). Mathematical modeling activities as a useful tool for values education. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 12(2), 1667 – 1672.
- Dundar, S., Gokkurt, B. y Soyly, Y. (2012). Mathematical modelling at a glance: a theoretical study. *Social and Behavioral Sciences*, 46, 3465-3470.
- El Universal (2017). México tiene deficit de ingenieros. Recuperado de <http://www.eluniversal.com.mx/articulo/nacion/politica/2017/01/10/mexico-tiene-deficit-de-ingenieros>
- Elder, L. y Paul, R. (2010). Critical Thinking: Competency Standards Essential for the Cultivation of Intellectual Skills, Part 1. *Journal of Developmental Education* 34(2), 38-39.
- Emerson, M. (2013). *A Model for Teaching Critical Thinking*. Recuperado de: files.eric.ed.gov/fulltext/ED540588.pdf.
- English, L. D. (2009). Promoting interdisciplinarity through mathematical modelling. *ZDM Mathematics Education*, 41, 161–181.
- English, L. D. (2016). STEM education K-12: perspectives on integration. *International Journal of STEM Education*, 3(3), 1-8. DOI 10.1186/s40594-016-0036-1
- English, L.D. and King, D. T. (2015). STEM learning through engineering design: fourth-grade students' investigations in aerospace. *International Journal of STEM Education*, 2(14), 18. DOI 10.1186/s40594-015-0027-7
- Ennis, R. H. (2005). Pensamiento crítico: un punto de vista racional. *Revista de Psicología y Educación*, 1(1), 47-64.
- Ennis, R. H. (1985). A Logical Basis for Measuring Critical Thinking Skills. *Educational Leadership*, 43(2) p44-48.
- Ennis, R. H., Millman, J. y Tomko, T. N. (1985). Cornell critical thinking tests level X & level Z: Manual. Boise, ID: Midwest Publications.

- Erbas, A. et al (2014). Mathematical modeling in mathematics education: basic concepts and approaches. *Educational Sciences: Theory & Practice* 14(4), 1621-1627.
- Esteve, F. M. y Gisbert, M. (2013). Explorando el potencial educativo de los entornos virtuales 3D. *Teoría de la Educación. Educación y cultura en la era de la información.* 14(3), 5-327.
- Facione, P. (2007). Pensamiento Crítico ¿Qué es y por qué es importante?. *California Academic Press*. Recuperado de <https://eduteka.icesi.edu.co/modulos/6/134/733/1?url=6/134/733/1>
- Fahim, M. and Masouleh, N. S. (2012). Critical Thinking in Higher Education: A Pedagogical Look. *Theory and Practice in Language Studies*, 2(7), 1370-1375.
- Fidalgo, A., Sein-Echaluce, M. L. y García-Peñalvo, F. J. (2017). Aprendizaje Basado en Retos en una asignatura académica universitaria. *Revista Iberoamericana de Informática Educativa.* (8), 1-8.
- Firdaus, F., Kailani, I. B., Bakar, M. N., Bakry, B. A. (2015). Developing Critical Thinking Skills of Students in Mathematics Learning. *Journal of Education and Learning.* Vol. 9(3) pp. 226-236. DOI: 10.11591/edulearn.v9i3.1830
- Firouzian, S., Kashefi, H., Yusof, Y. M., Ismail, Z. y RAHMAN, R. A. Mathematical Competencies as Perceived by Engineering Students, Lecturers, and Practicing Engineers. *International Journal of Engineering Education*, 32(6), 2434–2445.
- Fisher, D. (2017). Reorganizing Algebraic Thinking: An Introduction to Dynamic System Modeling. *Mathematics Enthusiast*, 14(1-3), 347-370.
- Fisher, D. (2011). *Modeling Dynamics Systems: Lessons for a First Course.* 3rd Edition. Estados Unidos: ISEE SYSTEMS.
- GAIMME: Guidelines for Assessment and Instruction in Mathematical Modeling Education, Second Edition.* (2019). Sol Garfunkel and Michelle Montgomery, editors, COMAP and SIAM, Philadelphia. Recuperado de <https://www.siam.org/Publications/Reports/Detail/guidelines-for-assessment-and-instruction-in-mathematical-modeling-education>
- Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática.* 2(3), 11-44.
- Garello, M.; Rinaudo, M. y Donolo, D. (2011). Valoración de los Estudios de diseño como metodología innovadora en una investigación acerca de la construcción del conocimiento en la universidad. *Revista de Educación a Distancia- Docencia Universitaria en la Sociedad del Conocimiento*, 5, 1 – 34.

- Gaskins, W. B., Johnson, J., Maltbie, C., y Kukreti, A. (2015). Changing the Learning Environment in the College of Engineering and Applied Science Using Challenge Based Learning. *International Journal of Engineering Pedagogy (iJEP)*, 5(1), 33-41. Recuperado de: [http:// journals.sfu.ca/onlinejour/index. ph](http://journals.sfu.ca/onlinejour/index.ph)
- Gelves, G. A. C., Torres, R. G y Ramírez, M. S. (2010). Uso de simuladores como recurso digital para transferencia de conocimiento. *Apertura*, 2(1) 86 - 100.
- Gómez, M. (2016). El lugar del pensamiento en la educación. Textos de Mathew Lipman. Recuperado en: <http://otrasvoceeneducacion.org/wp-content/uploads/2019/01/El-lugar-del-pensamiento-en-la-educación-Textos-de-Matthew-Lipman-Manuela-Gómez-Pérez.pdf>
- Guerrero, O. (2007). Teoría crítica y Educación Matemática. *Evaluación e Investigación*, 2(1)
- Guerrero, C., O. (2008). Educación matemática crítica. Influencias teóricas y aportes. *Evaluación e Investigación*, 1(3), 1 – 14.
- Hé Hernández, P. R., Bodin, R., Elliot, J. W., Ibrahim, B., Rambo-Hernández, K. E., Chen, T. W. y de Miranda, M. A. (2014). Connecting the STEM dots: measuring the effect of an integrated engineering design intervention. *International Journal of STEM Education*, 24, 107-120. DOI 10.1007/s10798-013-9241-0
- Hafni, R. N., Sari, D. M. y Nurlaelah, E. (2019). Analyzing the effect of students' habits of mind to mathematical critical thinking skill. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1211. [https:// doi.org/10.1088/1742-6596/1211/1/012074](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1211/1/012074)
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México: Mc Graw Hill.
- Hernandez-Martinez, P. y Vos, P. “Why do I have to learn this?” A case study on students' experiences of the relevance of mathematical modelling activities. *ZDM Mathematics Education*, 50, 245–257 <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0904-2>
- Hidiroglu, N. y Guzel, E. B. (2017). The Conceptualization of the Mathematical Modelling Process in Technology-Aided Environment. *International Joournal of Technology in Mathematics Education*, 24(1), 17-36.
- Hohmann, J. W. y Grillo, M. C. (2014) Using Critical Thinking Rubrics to Increase Academic Performance, *Journal of College Reading and Learning*, 45:1, 35-51, DOI: 10.1080/10790195.2014.949551

- Holzer, H. J. (2012). Good workers for good jobs: improving education and workforce systems in the US. *IZA Journal of Labor Policy*, 1(5), 1-19.
- Houston, K. (2006). Assessing the "Phases" of Mathematical Modelling. En *Modelling and Applications in Mathematics Education* (págs. 249-264). New York, USA: Springer.
- Huang, C.-H. (2012). Investigating engineering students' mathematical modelling competency. *World Transactions on Engineering and Technology Education*, 10(2), 99-104.
- Husin, W. N. F. W., Arsad, N. M., Othman, O., Halim, L., Rasul, M. S., Osman, R. e Iksan, Z. (2016). "Fostering Students' 21st Century Skills through Project Oriented Problem Based Learning (POPBL) in Integrated STEM Education Program. Asia - Pacific Forum on Science Learning and Teaching 17(1). 1-17.
- Hidayat, D., Nurlaelah, E. y Dahlan, J. A. (2017). *Rigorous Mathematical Thinking Approach to Enhance Students' Mathematical Creative and Critical Thinking Abilities*. Trabajo presentado en International Conference on Mathematics and Science Education, Bandung, Indonesia. DOI: 10.1088/1742-6596/895/1/012087
- Hynes, M., Portsmouth, M. Dare, E., Milton, E., Rogers, C., Hammer, D. y Carberry, A. (2011). Infusing Engineering Design into High School STEM Courses. National Center for Engineering and Technology Education. Recuperado en file:///D:/FORMACI%C3%93N%20DE%20INGENIEROS/Infusing_Engineering_Hynes_2011.pdf
- Husnaeni (2016). The Enhancement of Mathematical Critical Thinking Ability of Aliyah Madrasah Student Model Using Gorontalo by Interactive Learning Setting Cooperative Model. *Journal of Education and Practice*, 7(8), 159-164.
- Ibañez-Martí, J. J. (2018). La Ciencia en Latinoamérica: Tendencias y patrones. *Revista de la Facultad de Ciencias*, 7(1), 23-39.
<https://doi.org/10.15446/rev.fac.cienc.v7n1.69409>
- Jacobs, G. J. y Durandt, R. (2017). Attitudes of Pre-Service Mathematics Teachers towards Modelling: A South African Inquiry. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education*, 13(1), 61-84. DOI 10.12973/eurasia.2017.00604a
- Jang, H. Identifying 21st Century STEM Competencies Using Workplace Data. *Journal of Science Education and Technology* 25, 284–301 (2016). DOI:10.1007/s10956-015-9593-1

- Johnson, R. B. y Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. *Educational Researcher*, 33(7), 14 – 26.
Recuperado de: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=80634409>.
- Jou, M., Hung, C. K. y Lai, S. H. (2010). Application of Challenge Based Learning Approaches in Robotics Education. *International Journal of Technology and Engineering Education*, 7(2), 1-42.
- Juang, H. (2016). Identifying 21st Century STEM Competencies Using Workplace Data. *Journal of Science Education and Technology*, 25(2), 284–301.
- Julie, C., & Mudaly, V. (2007). Mathematical Modelling of Social Issues in School Mathematics in South Africa Chapter. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (Vol. 10, pp. 503–510). Boston, MA: Springer US. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1>
- Insight Assessment (2010) Recuperado el 5 de marzo de 2019, de <https://www.insightassessment.com/Products/Products-Summary/Critical-Thinking-Skills-Tests/California-Critical-Thinking-Skills-Test-CCTST>. 217 La Cruz Ave. Millbrae, CA 94030.
- Jang, H. (2016). Identifying 21st Century STEM Competencies Using Workplace Data. *Journal of Science Education and Technology*, 25, 284–301 DOI 10.1007/s10956-015-9593-1
- JobTestPrep (2019). Recuperado de https://www.jobtestprep.com/watson-glaser-test?utm_source=wikijob&utm_medium=nav-link&utm_content=watson-glaser&utm_campaign=jobtestprep-com.
- Kaiser, G. y Srirman, B. (2006). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *ZDM Mathematics Education*, 38(3), 302-310.
- Kastner J., Kukreti A., y Torsella J. (2014). Using challenged based learning to teach the fundamentals Recuperado de: http://ceas.uc.edu/content/dam/ceas/documents/CEEMS/ASEENC_Paper46_FinalDraft.pdf
- Kelley, T. R. y Knowles, J. G. (2016). A conceptual framework for integrated STEM education. *International Journal of STEM Education*, 3-11. DOI 10.1186/s40594-016-0046-z

- Kennedy-Clark, S. (2015). Research by design: Design-based research and the higher degree research student. *Journal of Learning Design*, 8(3), 108 – 122.
- Kennedy, T. J. and Odell, M. R. L. (2014). Engaging Students In STEM Education *Science Education International*, 25(3), 246-258.
- Kertil, M. & Gurel, C. (2016). Mathematical modeling: A bridge to STEM education. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 4(1), 44-55.
- Kim, K., Sharma, P., Land, S. M. y Furlong, K. P. (2012). Effects of Active Learning on Enhancing Student Critical Thinking in an Undergraduate General Science Course. *Innovation in High Education* 38, 223–235. DOI 10.1007/s10755-012-9236-x
- Kindelán, M. P. y Martín, A. M. (2008). Ingenieros del siglo XXI: importancia de la comunicación y de la formación estratégica en la doble esfera educativa y profesional del ingeniero. *ARBOR Ciencia, Pensamiento y Cultura*, CLXXXIV (732), 731-742.
- Lagos, R. y Camus, M. (2016). Experimentos integrados: utilización de sensores en plantas de la galvanotecnia. *Educación Química*, 27, 264-268
- Lebedeva, A., Krupaa, T and Rezakov, M. (2016). Structures of Mathematical Modeling of Metathematic and Metacognitive Skills and Abilities' Typology. *International Journal of Environmental & Science Education* 11(15), 7880-7887.
- Lozano, A. y Herrera, J. A. (2013). *Diseño de programas educativos basados en competencias*. Monterrey, México: Editorial Digital del Tecnológico de Monterrey
- Lyon, J. y Magana, A. (2020). A Review of Mathematical Modeling in Engineering Education. *International Journal of Engineering Education*. 36(1) 101-116.
- Maricic, S., Špijunovic, K. y Lazić, B. (2016). The Influence of Content on the Development of Students' Critical Thinking in the Initial Teaching of Mathematics. *Croatian Journal of Education*. 18(1/), 11-40. doi: 10.15516/cje.v18i1.1325
- Marques, R., Tenreiro-Vieira, C., Martins, I. (2011). Critical thinking: Conceptual clarification and its importance in science education. *ScienceEducation International*. 22(1), 43-54.
- Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento y Gestión*. (20), 168-193.

- Maulidiya, M. y Nurlaelah, E. (2018, mayo). *The effect of problem based learning on critical thinking ability in mathematics education*. Trabajo presentado en International Conference on Mathematics and Science Education ICMSCE, Bandung, Indonesia.
- Mohamad, M. M., Jamali, A. R., Ahmad, A. y Gusau, N. M. B. (2018). Assessing Critical Thinking and The Differences Among Engineering Students. *Herald NAMSCA*. (1), 486-490.
- Molina, J. A. (2017). Experiencia de modelación matemática como estrategia didáctica para la enseñanza de tópicos de cálculo. *Uniciencia*. 31(2), 46 - 61.
- Molina, J. A. (2015). Experiencia basada en la triada TICs, enseñanza por proyectos y modelado para la enseñanza de sistemas de ecuaciones diferenciales Uniciencia. 29(2), 46-61. DOI: <http://dx.doi.org/10.15359/ru.29-2.4>
- Morales, A., Mena, J., Vera, F. y Rivera, R. (2012). El rol del tiempo en un proceso de modelación utilizando videos de experimentos físicos. *Enseñanza de las Ciencias*, 30 (3), 237-256.
- Morales, Y. y Salas, O. (2010). Incorporación de la tecnología para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. 5(6). 155-172.
- Molina-Toro, J. F., Rendón-Mesa, P. A., & Villa-Ochoa, J. A. (2019). Research Trends in Digital Technologies and Modeling in Mathematics Education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15(8), em1736. <https://doi.org/10.29333/ejmste/108438>
- Mumcu, H. Y. (2016). Using Mathematics, Mathematical Applications, Mathematical Modelling, and Mathematical Literacy: A Theoretical Study. *Journal of Education and Practice*, 7(36), 80-96.
- Murawski, L. M. (2014). Critical Thinking in the Classroom...and Beyond. *Journal of Learning in Higher Education*, 10(1), pp. 25-30.
- Namakforoosh, M. (2013). *Metodología de la Investigación*. México: Limusa.
- National Science Foundation Blue Ribbon Panel. (2006). Simulation – Based Engineering Science. Revolutionizing Engineering Science through Simulation. Recuperado de: [NSF_2006.pdf](#)
- Niss, M. A. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish KOM project. In A. Gagatsis, & S. Papastavridis (Eds.), 3rd

- Mediterranean Conference on Mathematical Education - Athens, Hellas 3-4-5 January 2003* (pp. 116-124). Athen: Hellenic Mathematical Society.
- Niss, M. A., Blum, W. y Galbraith, P. (2007). Introduction. En *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (págs. 3-32). New York, USA: Springer.
- Nourallah, N. S. y Farzad, B. (2012). Mathematical modelling in university, advantages and challenges. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(7), 34-49.
- Olivares, S. y Heredia, Y. (2012). Desarrollo de pensamiento crítico en ambientes de aprendizaje basado en problemas en estudiantes de educación superior. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 17(54), 759-778.
- Orlich, D., Harder, R., Callahan, R., Kauchak, D. (1995). *Técnicas de Enseñanza: Modernización del aprendizaje*. México: Limusa.
- Osman, S. et al. (2016). Identifying Pertinent Elements of Critical Thinking and Mathematical Thinking Used in Civil Engineering Practice in Relation to Engineering Education. *The Qualitative Report 2016*, 21(2), 212-227.
- Paolucci, C. and Wessels, H. (2017). An Examination of Preservice Teachers' Capacity to Create Mathematical Modeling Problems for Children. *Journal of Teacher Education*, 68(3), 330-344.
- Paul, R., & Elder, L. (2005). Estándares de competencia para el pensamiento crítico. *Estándares, Principios, Desempeño, Indicadores y Resultados. Con una Rubrica maestra en el pensamiento crítico. Recuperado el*, 20(3), 2015.
- Paul, R. y Elder, L. (2003). La mini-guía para el Pensamiento Crítico. Conceptos y herramientas. Recuperado de <https://www.criticalthinking.org/resources/PDF/SP-ConceptsandTools.pdf>
- Plaza, L. (2017). Modelación matemática en ingeniería. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, 7(13), 47-57.
- Plaza, L. (2016). Obstáculos presentes en modelación matemática. Caso ecuaciones diferenciales en la formación de ingenieros. *Revista científica*, 25, 176-187.
- Poondej, C. y Lerdpornkulrat, T. (2015). The reliability and construct validity of the critical thinking disposition scale. *Journal of Psychological and Educational Research*, 23 (1), 23-36.

- Quiroz, S. y Rodríguez, R. (2015). Análisis de praxeologías de modelación matemática en libros de texto de educación primaria. *Educación Matemática*, 27(3), 45 – 79.
- Quweider, M. K., & Khan, F. (2016, June), *Implementing a Challenge-Based Approach to Teaching Selected Courses in CS and Computational Sciences* Trabajo presentado en 2016 ASEE Annual Conference & Exposition, New Orleans, Louisiana. DOI: 10.18260/p.25589
- Rahaju, R., Purwanto, P., Parta, I. N. y Rahardjos, S. (2019). Students' critical thinking skills in making mathematical problems. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1318. <https://10.1088/1742-6596/1318/1/012094>
- Ramírez-Velarde, R., Alexandrov, N., Pérez-Cázares, R. y Barba- Jiménez, C. (2015). Mathematical Modelling Based Learning Strategy. *International Conference on Computational Science*, 51, 1694-1704.
- Raths, L., Wasserman, S. (1991) *Cómo enseñar a pensar. Teoría y aplicación*. Barcelona, España: Paidós.
- REAL ACADEMIA ESPAÑOLA: *Diccionario de la lengua española*, 23.^a ed., [versión 23.4 en línea]. <<https://dle.rae.es>> [30/05/2021]. Disponible en: <https://dle.rae.es/similar?m=form>
- Rendón – Mesa, P. A., Esteban, P. C. y Villa – Ochoa J. A. (2016). Articulación entre la matemática y el campo de acción de un futuro ingeniero de diseño de producto. componentes de un proceso de modelación matemática. *Revista de la Facultad de Ingeniería U.C.V.*,31(2), 21-36.
- Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid, España: Alianza Editorial.
- Roa, N. (2013). Uso de herramientas tecnológicas en el aprendizaje de las matemáticas. *Inventum*,14, 35-43.
- Rodríguez, R. (2017). El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*. 8(15), 69-85.
- Rodríguez, R., y Quiroz, S. (2016). EL papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 19(1), 99-124. doi:10.12802/relime.13.1914

- Rodríguez, R. y Quiroz, S. (2016). El rol de la experimentación en la modelación matemática. *Educación Matemática*. ISSN: 1666-5825 <http://www.revista-educacion-matematica.com>
- Romieu, S. M. (2014). La importancia de las funciones en la formulación de modelos matemáticos utilizando tecnología: implementación del modelo 1 a 1. Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. 1-14.
- Romo-Vázquez, A., Barquero, B., y Bosch, M. (2019). El desarrollo profesional online de profesores de matemáticas en activo: una unidad de aprendizaje sobre la enseñanza de la modelización matemática. *Uni-pluriversidad*, 19(2), 161-183. doi: 10.17533/udea.unipluri.19.2.09
- Rosa, M., & Orey, D. C. (2019). Mathematical Modelling as a Virtual Learning Environment for teacher education programs. *Uni-pluriversidad*, 19(2), 80-102. doi: 10.17533/udea.unipluri.19.2.04
- Rott, B., & Leuders, T. (2017). Mathematical competencies in higher education: Epistemological beliefs and critical thinking in different strands of pre-service teacher education. *Journal for Educational Research Online / Journal Für Bildungsforschung Online*, 9(2), 115–136.
- Sánchez, B. J. y Torres, J. (8 a 10 de octubre 2009). *Educación Matemática crítica: un abordaje desde la perspectiva sociopolítica a los ambientes de aprendizaje*. Comunicación presentada en 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Pasto, Colombia
- Santos, A. R., Sales, A., Fernandes, P. y Nichols, M. (2015). Combining Challenge-Based Learning and Scrum Framework for Mobile Application Development. In *Proceedings of the 2015 ACM Conference on Innovation and Technology in Computer Science Education* (pp. 189-194). Nueva York, EUA: ACM.
- Santos, L. F. (2017). The Role of Critical Thinking in Science Education. *Journal of Education and Practice*, 8(20), 159-173.
- Schukajlow, S., Kolter, J. and Blum, B. (2015). Scaffolding mathematical modelling with a solution plan. *ZDM Mathematics Education* 47:1241–1254.
- Seventika, S. Y., Sukestiyarno, Y. L. y Mariani, S. (2017). Critical thinking analysis based on Facione (2015) – Angelo (1995) logical mathematics material of vocational high school (VHS). *International Conference on Mathematics, Science and Education Journal of Physics: Conference Series* 983. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/983/1/012067>

- Shahbari, J. A., y Tabach, M. (2016). Developing modelling lenses among practicing. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(5), 717-732.
- Shernoff, D. J., Sinna, S., Bressler D. M. y Ginsburg, L. (2017). Assessing teacher education and professional development needs for the implementation of integrated approaches to STEM education. *Journal of STEM Education*, 4(13), 1-16. DOI 10.1186/s40594-017-0068-1
- Sithole, A. et al. (2017). Student Attraction, Persistence and Retention in STEM Programs: Successes and Continuing Challenges. *Higher Education Studies*, 7(1).
- Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica* (P. Valero, Trans.). Bogotá: una empresa docente
- Socas, Martín (2007). *Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico*. En Camacho, Matías; Flores, Pablo; Bolea, María Pilar (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 19-52). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Socas, M. M., Ruano, R. M. y Hernández, J. (2016). Análisis didáctico del proceso matemático de modelización en alumnos de secundaria. *Avances de investigación en educación matemática*, (9), 21-41
- Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Ediciones Morata, S. L.
- Tecnológico de Monterrey. (2018). Modelo de evaluación del aprendizaje. Recuperado de: [Folleto-ModeloEvalAprentec21 copy.pdf](#)
- Tecnológico de Monterrey (2015). Reporte Edu Trends “Aprendizaje basado en retos” [Documento PDF]. Disponible en <https://goo.gl/dA3ux8>.
- The Halpern Critical Thinking Assesment (2006). Recuperado de <https://sites.google.com/site/dianehalperncmc/home/research/halpern-critical-thinking-assessment>
- Tobón, S., Pimienta, J. y García J. (2010). *Secuencias Didácticas: Aprendizaje y Evaluación de Competencias*. México: Pearson.
- Tong D.H., Loc N.P., Uyen B.P., Son T.H. (2020). Enhancing Creative and Critical Thinking Skills of Students in Mathematics Classrooms: An Experimental Study of Teaching the Inequality in High Schools. *Universal Journal of Educational Research* 8(2), 477-489. DOI: 10.13189/ujer.2020.080219

- Tropper, N., Leiss, D y Hänze, M. (2015). Teachers' temporary support and worked-out examples as elements of scaffolding in mathematical modeling. *ZDM Mathematics Education*, 47, 1225–1240.
- Turana, H., Kolayisb, H. y Ulusoyc, Y. U. (2012). Comparison of the faculty of education students' critical thinking disposition. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 46, 2020 – 2024. DOI: 10.1016/j.sbspro.2012.05.421
- UN DESA. (2013). *World Population Prospects: The 2012 Revision, Highlights and Advance Tables*. ONU, United Nations Department of Economic and Social Affairs/Population Division. New York: United Nations. Retrieved 01 30, 2015, from http://esa.un.org/unpd/wpp/Documentation/pdf/WPP2012_HIGHLIGHTS.pdf
- Valenzuela, J. R. y Flores, M. (2012). *Fundamentos de investigación educativa*. Monterrey, México: Editorial Digital del Tecnológico de Monterrey.
- Vargas, D. (2015). Evidence of Critical Thinking in High School Humanities Classrooms. *Gist Education and Learning Research Journal*, (11), 26-44.
- Vásquez, J. A. (2014). STEM -Beyond the Acronym. *Educational Leadership*, 72(4), 10-15.
- Vega-González, L. R. (2013). La educación en ingeniería en el contexto global: propuesta para la formación de ingenieros en el primer cuarto del Siglo XXI. *Ingeniería Investigación y Tecnología*, XIV(2), 177-190.
- Vidal M. J., Avello R., Rodríguez M.A. y Méndez, J. A. (2019). Simuladores como medios de enseñanza. *Revista Cubana de Educación Médica Superior*, 33(4), 37-49.
- Villa, A. y Poblete, M. (2007). *Aprendizaje basado en Competencias. Una propuesta para la evaluación de las competencias genéricas*. Bilbao, España: Ediciones Mensajero.
- Villa-Ochoa, J. A., Sánchez-Cardona, J., & Rendón-Mesa, P. A. (2021). Formative Assessment of Pre-Service Teachers' Knowledge on Mathematical Modeling. *Mathematics*, 9(8), 851. <https://doi.org/10.3390/math9080851>
- Villalobos, V., Ávila, J. E. y Olivares, S. L. (2016). O.Aprendizaje basado en problemas en química y el pensamiento crítico en secundaria. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 21(69), 557-581.

- Wake, G. (2014). Making sense of and with mathematics: the interface between academic mathematics and mathematics in practice. *Educ Stud Math*, 86, 271–290.
- Wake, G. (2015). Preparing for workplace numeracy: a modelling perspective. *ZDM Mathematics Education*, 47, 675–689.
- Wang, X. y Zheng, H. (2016). Reasoning critical thinking: I it born or made? *Theory and Practice in Language Studies*, 6(6), 1323-1331, DOI: <http://dx.doi.org/10.17507/tpls.0606.25>
- Yenmez, A. A., Erbas, A. K., Cakiroglu, E. y Alacaci, C. (2017). Developing teachers' models for assessing students' competence in mathematical modelling through lesson study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(6), 895 – 912.
- Zaldívar, J. D., Londoño, N. y Medina, G. (2017). Modelación y Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas a nivel Bachillerato: un ejemplo de Situación de Aprendizaje. *El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*, 8, 18-30.
- Zavalani, A. y Kacani, J. (2012). Mathematical Modelling and Simulation in Engineering Education. Paper presented at the 1-5. 10.1109/ICL.2012.6402066
- Zeytun, A. S., Cetinkaya, B., y Erbas, A. K. (2017). Understanding Prospective Teachers' Mathematical Modeling Processes in the Context of a Mathematical Modeling Course. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education*, 13(3), 691-722.

Anexos

Anexo 1. Rúbrica resolución de problemas de la Asociación Americana de Colegios y Universidades (AACU)

	Capstone 4	Milestones 3	2	Benchmark 1
Define Problem Definir el problema	Demonstrates the ability to construct a clear and insightful problem statement with evidence of all relevant contextual factors. Demuestra la habilidad de construir de manera clara y con entendimiento el planteamiento de un problema con evidencia de todos los factores contextuales relevantes.	Demonstrates the ability to construct a problem statement with evidence of most relevant contextual factors, and problem statement is adequately detailed. Demuestra la habilidad de construir el planteamiento de un problema con evidencia de la mayoría de los factores contextuales más relevantes, y el planteamiento de problema está adecuadamente detallado.	Begins to demonstrate the ability to construct a problem statement with evidence of most relevant contextual factors, but problem statement is superficial. Comienza a demostrar la capacidad de construir el planteamiento del problema con la evidencia de los factores contextuales más relevantes, pero la declaración de problemas es superficial.	Demonstrates a limited ability in identifying a problem statement or related contextual factors. Demuestra una capacidad limitada para identificar el planteamiento del problema o factores contextuales relacionados.
Identify Strategies Identificar Estrategias	Identifies multiple approaches for solving the problem that apply within a specific context. Identifica diversas maneras de abordar el problema para resolverlo aplicadas dentro de un contexto específico.	Identifies multiple approaches for solving the problem, only some of which apply within a specific context. Identifica diversas maneras de abordar el problema para resolverlo, de las cuales solo algunas se aplican dentro de un contexto específico.	Identifies only a single approach for solving the problem that does apply within a specific context. Identifica solo una manera de abordar el problema para resolverlo la cual se aplica dentro de un contexto específico.	Identifies one or more approaches for solving the problem that do not apply within a specific context. Identifica uno o más maneras de abordar el problema para resolverlo, la cual no se aplica dentro de un contexto específico.
Propose Solutions/Hypotheses Proponer Soluciones/ Hipótesis	Proposes one or more solutions/hypotheses that indicates a deep comprehension of the problem. Solution/hypotheses are sensitive to contextual factors as well as all of the following: ethical, logical, and cultural dimensions of the problem. Propone una o más soluciones / hipótesis que indican una comprensión profunda del problema. Las soluciones / hipótesis son	Proposes one or more solutions/hypotheses that indicates comprehension of the problem. Solutions/hypotheses are sensitive to contextual factors as well as the one of the following: ethical, logical, or cultural dimensions of the problem. Propone una o más soluciones / hipótesis que indican la comprensión del problema. Las soluciones / hipótesis son sensibles a los factores	Proposes one solution/hypothesis that is “off the shelf” rather than individually designed to address the specific contextual factors of the problem. Propone una solución / hipótesis que está "lista para usar" en lugar de estar diseñada individualmente para abordar los factores contextuales específicos del problema.	Proposes a solution/hypothesis that is difficult to evaluate because it is vague or only indirectly addresses the problem statement. Propone una solución / hipótesis que es difícil de evaluar porque es vaga o solo aborda indirectamente la declaración del problema.

	sensibles a los factores contextuales, así como a todas las siguientes: dimensiones éticas, lógicas y culturales del problema.	contextuales, así como uno de los siguientes: dimensiones éticas, lógicas o culturales del problema.		
Evaluate Potential Solutions	Evaluation of solutions is deep and elegant (for example, contains thorough and insightful explanation) and includes, deeply and thoroughly, all of the following: considers history of problem, reviews logic/reasoning, examines feasibility of solution, and weighs impacts of solution.	Evaluation of solutions is adequate (for example, contains thorough explanation) and includes the following: considers history of problem, reviews logic/reasoning, examines feasibility of solution, and weighs impacts of solution.	Evaluation of solutions is brief (for example, explanation lacks depth) and includes the following: considers history of problem, reviews logic/reasoning, examines feasibility of solution, and weighs impacts of solution.	Evaluation of solutions is superficial (for example, contains cursory, surface level explanation) and includes the following: considers history of problem, reviews logic/reasoning, examines feasibility of solution, and weighs impacts of solution.
Evaluar posibles soluciones	La evaluación de las soluciones es profunda y elegante (por ejemplo, contiene una explicación exhaustiva y precisa) e incluye lo siguiente: considera los antecedentes del problema, revisa la lógica / razonamiento, examina la factibilidad de la solución y evalúa los impactos de la solución.	La evaluación de las soluciones es adecuada (por ejemplo, contiene una explicación detallada) e incluye lo siguiente: considera los antecedentes del problema, revisa la lógica / razonamiento, examina la factibilidad de la solución y evalúa los impactos de la solución.	La evaluación de las soluciones es breve (por ejemplo, la explicación carece de profundidad) e incluye lo siguiente: considera los antecedentes del problema, revisa la lógica / razonamiento, examina la factibilidad de la solución y evalúa los impactos de la solución.	La evaluación de soluciones es superficial (por ejemplo, contiene una explicación apresurada y superficial) e incluye lo siguiente: considera los antecedentes del problema, revisa la lógica / razonamiento, examina la factibilidad de la solución y evalúa los impactos de la solución.
Implement Solution	Implements the solution in a manner that addresses thoroughly and deeply multiple contextual factors of the problem.	Implements the solution in a manner that addresses multiple contextual factors of the problem in a surface manner.	Implements the solution in a manner that addresses the problem statement but ignores relevant contextual factors.	Implements the solution in a manner that does not directly address the problem statement.
Implementar la solución	Implementa la solución de una manera que aborda exhaustiva y profundamente diversos factores contextuales del problema.	Implementa la solución de una manera que aborda diversos factores contextuales del problema de manera superficial.	Implementa la solución de una manera que aborda el planteamiento del problema pero ignora los factores contextuales relevantes.	Implementa la solución de una manera que no aborda directamente el planteamiento del problema.
Evaluate Outcomes	Reviews results relative to the problem defined with thorough, specific considerations of need for further work.	Reviews results relative to the problem defined with some consideration of need for further work.	Reviews results in terms of the problem defined with little, if any, consideration of need for further work.	Reviews results superficially in terms of the problem defined with no consideration of need for further work
Evaluar resultados	Revisa los resultados en relación con el problema definido con consideraciones detalladas y específicas de la necesidad de trabajo adicional.	Revisa los resultados en relación con el problema definido con alguna consideración de la necesidad de trabajo adicional.	Revisa los resultados en términos del problema definido con poca o ninguna consideración de la necesidad de trabajo adicional.	Revisa los resultados superficialmente en términos del problema definido sin tener en cuenta la necesidad de trabajo adicional

Anexo 2. Rúbrica genérica para la evaluación en educación en modelación matemática de SIAM y COMAP

DEFINE THE MODELING PROBLEM (3 POINTS TOTAL)			
IDEAL	SATISFACTORY	NEEDS IMPROVEMENT	INCOMPLETE
(3 points) Concise problem statement that indicates exactly what the output of the model will be and, if appropriate, identifies the audience and/or perspective of the modeler. Statement is presented early in the paper.	(2 points) Problem statement is easily identifiable but not precise or consistent with other statements in paper.	(1 point) Problem statement is difficult to understand or is buried in the text.	(0 points) No problem statement is given.

Definición del problema			
Ideal	Satisfactorio	Necesita mejorar	Incompleto
(3 puntos) Planteamiento conciso del problema que indica exactamente lo que el resultado del modelo será y, si se considera apropiado, identifica la audiencia y / o perspectiva del modelador. El planteamiento es presentado desde el inicio en la actividad.	(2 puntos) El planteamiento del problema es fácilmente identificable pero no es conciso o consistente con otros planteamientos en la actividad.	(1 punto) El planteamiento del problema es difícil de entender o está oculto en el texto.	(0 puntos) No se establece el planteamiento del problema.

BUILDING THE MODEL: MAKE ASSUMPTIONS AND ACKNOWLEDGE LIMITATIONS (3 POINTS TOTAL)			
IDEAL	SATISFACTORY	NEEDS IMPROVEMENT	INCOMPLETE
(3 points) Primary assumptions used to develop the model are clearly identified, easy-to-read and well justified. Limitations due to simplification are stated when appropriate.	(2 points) Primary assumptions are noted; justification or readability is lacking.	(1 point) Assumptions and justification exist, but are difficult to identify in the text.	(0 points) No assumptions –or justification for lack of assumptions is provided.

Construyendo el modelo: Hacer suposiciones y reconocer limitaciones			
Ideal	Satisfactorio	Necesita mejorar	Incompleto
(3 puntos) Los supuestos utilizados para desarrollar el modelo están claramente identificados, son fáciles de leer y están bien justificados. Las limitaciones debidas a la simplificación se establecen cuando corresponde.	(2 puntos) Se observan supuestos; falta justificación o legibilidad.	(1 punto) Existen suposiciones y justificaciones, pero son difíciles de identificar en el texto.	(0 puntos) No se proporcionan suposiciones o justificación por falta de estas

BUILDING THE MODEL: DEFINE VARIABLES AND IDENTIFY PARAMETER (3 POINTS TOTAL)			
IDEAL	SATISFACTORY	NEEDS IMPROVEMENT	INCOMPLETE
(3 points) Notes and rationalizes the need for the primary factors that influence the phenomena being modeled in a readable format; proper units are specified.	(2 points) Important parameters and variables are listed properly but without sufficient explanation.	(1 point) Variables/parameters are wither barely mentioned or hard for the reader to identify in the text.	(0 points) No variables or parameters are identified.

Construyendo el modelo: Defina variables e identifica parámetros			
Ideal	Satisfactorio	Necesita mejorar	Incompleto
(3 puntos) Toma nota y racionaliza la necesidad de los factores principales que influyen en los fenómenos que se modelan en un formato legible; Se especifican las unidades apropiadas.	(2 puntos) Los parámetros y variables importantes se enumeran correctamente, pero sin una explicación suficiente.	(1 punto) Las variables / parámetros están apenas mencionados o son difíciles de identificar para el lector en el texto.	(0 puntos) No se identifican variables o parámetros.

SOLUTION: MODEL USES MEANINGFUL MATHEMATICS (4 POINTS TOTAL)			
IDEAL	SATISFACTORY	NEEDS IMPROVEMENT	INCOMPLETE
(4 points) Provides a readable glimpse into the mathematical method(s) used to solve the problem. Plausible approach and outcome is presented.	(3 or 2 points) Mathematical approach is stated, but aspects of the method(s) are inconsistent, difficult to understand or incomplete.	(1 point) Model is stated and/or contains fixable mathematical errors.	(0 points) Model is not presented or contains significant errors.

Solución: El modelo usa matemáticas significativas			
Ideal	Satisfactorio	Necesita mejorar	Incompleto
(4 puntos) Proporciona una visión clara de los métodos matemáticos utilizados para resolver el problema. Enfoque argumentado y se presenta el resultado.	(2 o 3 puntos) El enfoque matemático está establecido, pero los aspectos del método (s) son inconsistentes, difíciles de entender o incompletos	(1 punto) El modelo se indica y / o contiene errores matemáticos corregibles.	(0 puntos) El modelo no se presenta o contiene errores significativos.

SOLUTION: RESULTS ARE ACCESSIBLE TO THE AUDIENCE (4 POINTS TOTAL)			
IDEAL	SATISFACTORY	NEEDS IMPROVEMENT	INCOMPLETE
(4 points) Clearly presents a solution that is consistent with the original problem statement. If appropriate, a useful visual aid/graphic is included.	(3 or 2 points) Answer is stated, but aspects of the solution(s) are inconsistent, difficult to understand or incomplete (e.g. fail to identify units of measure).	(1 point) Answer is given without contextual background (i.e. appropriate graphics, proper units, etc.).	(0 points) Solution is not provided.

Solución: Los resultados son comprensibles a la audiencia			
Ideal	Satisfactorio	Necesita mejorar	Incompleto
(4 puntos) Presenta claramente una solución que es consistente con la declaración del problema original. Si es apropiado, se incluye una ayuda visual / gráfico útil.	(2 o 3 puntos) La respuesta se indica, pero los aspectos de la (s) solución (es) son inconsistentes, difíciles de entender o incompletos (por ejemplo, fallan en identificar las unidades de medida).	(1 punto) La respuesta se da sin fondo contextual (es decir, gráficos apropiados, unidades apropiadas, etc.)	(0 puntos) No se proporciona la solución.

Anexo 3. Rúbrica de pensamiento crítico de la Asociación Americana de Colegios y Universidades (AACU)

	Capstone 4	Milestones 3	2	Benchmark 1
Explanation of issues Explicación de problemas o situaciones	<p>Issue/problem to be considered critically is stated clearly and described comprehensively, delivering all relevant information necessary for full understanding.</p> <p>La situación / problema a ser considerado críticamente se establece claramente y se describe en forma integral, entregando toda la información relevante necesaria para una comprensión completa.</p>	<p>Issue/problem to be considered critically is stated, described, and clarified so that understanding is not seriously impeded by omissions.</p> <p>La situación / problema que debe considerarse críticamente se establece, describe y aclara de manera que la omisión no obstaculice seriamente la comprensión.</p>	<p>Issue/problem to be considered critically is stated but description leaves some terms undefined, ambiguities unexplored, boundaries undetermined, and/or backgrounds unknown.</p> <p>La situación / problema que debe considerarse críticamente se indica, pero la descripción deja algunos términos sin definir, las ambigüedades sin explorar, los límites sin determinar y los antecedentes desconocidos.</p>	<p>Issue/problem to be considered critically is stated without clarification or description.</p> <p>La situación / problema a ser considerado críticamente se expone sin aclaración o descripción.</p>
Evidence <i>Selecting and using information to investigate a point of view or conclusion</i> Evidencia <i>Seleccionar y usar información para investigar un punto de vista o conclusión</i>	<p>Information is taken from source(s) with enough interpretation/evaluation to develop a comprehensive analysis or synthesis.</p> <p>Viewpoints of experts are questioned thoroughly.</p> <p>La información se toma de la (s) fuente (s) con suficiente interpretación / evaluación para desarrollar un análisis o síntesis integral. Los puntos de vista de los expertos son cuestionados a fondo.</p>	<p>Information is taken from source(s) with enough interpretation/evaluation to develop a coherent analysis or synthesis.</p> <p>Viewpoints of experts are subject to questioning.</p> <p>Fuente (s) con suficiente interpretación / evaluación para desarrollar un análisis o síntesis coherente. Los puntos de vista de los expertos están sujetos a cuestionamiento.</p>	<p>Information is taken from source(s) with some interpretation/evaluation, but not enough to develop a coherent analysis or synthesis.</p> <p>Viewpoints of experts are taken as mostly fact, with little questioning.</p> <p>La información se toma de la (s) fuente (s) con alguna interpretación / evaluación, pero no lo suficiente como para desarrollar un análisis o síntesis coherente. Los puntos de vista de los expertos se toman principalmente como hechos, con poco cuestionamiento.</p>	<p>Information is taken from source(s) without any interpretation/evaluation.</p> <p>Viewpoints of experts are taken as fact, without question.</p> <p>La información se toma de la (s) fuente (s) sin ninguna interpretación / evaluación. Los puntos de vista de los expertos se toman como hechos, sin duda.</p>
Influence of context and assumptions Influencia del contexto y suposiciones	<p>Thoroughly (systematically and methodically) analyzes own and others' assumptions and carefully evaluates the relevance of contexts when presenting a position.</p> <p>Analiza exhaustivamente (sistemática y metódicamente) los supuestos propios y de otros y evalúa cuidadosamente la relevancia de los contextos al presentar una posición.</p>	<p>Identifies own and others' assumptions and several relevant contexts when presenting a position.</p> <p>Identifica los supuestos propios y de otros y varios contextos relevantes al presentar una posición.</p>	<p>Questions some assumptions. Identifies several relevant contexts when presenting a position. May be more aware of others' assumptions than one's own (or vice versa).</p> <p>Cuestiona algunas suposiciones. Identifica varios contextos relevantes al presentar una posición. Puede ser más consciente de los supuestos de los demás que el propio (o viceversa).</p>	<p>Shows an emerging awareness of present assumptions (sometimes labels assertions as assumptions). Begins to identify some contexts when presenting a position.</p> <p>Muestra una conciencia de las suposiciones actuales (a veces las aseveraciones se etiquetan como suposiciones). Comienza a</p>

				identificar algunos contextos al presentar una posición.
Student's position (perspective, thesis/hypothesis) Posición del alumno (perspectiva, tesis / hipótesis)	<p>Specific position (perspective, thesis/hypothesis) is imaginative, taking into account the complexities of an issue. Limits of position (perspective, thesis/hypothesis) are acknowledged. Others' points of view are synthesized within position (perspective, thesis/hypothesis).</p> <p>La posición específica (perspectiva, tesis / hipótesis) es imaginativa, teniendo en cuenta las complejidades de un tema. Se reconocen los límites de posición (perspectiva, tesis / hipótesis). Los puntos de vista de otros se sintetizan dentro de la posición (perspectiva, tesis / hipótesis).</p>	<p>Specific position (perspective, thesis/hypothesis) takes into account the complexities of an issue. Others' points of view are acknowledged within position (perspective, thesis/hypothesis).</p> <p>La posición específica (perspectiva, tesis / hipótesis) tiene en cuenta las complejidades de un tema. Los puntos de vista de otros se reconocen dentro de la posición (perspectiva, tesis / hipótesis).</p>	<p>Specific position (perspective, thesis/hypothesis) acknowledges different sides of an issue.</p> <p>La posición específica (perspectiva, tesis / hipótesis) reconoce los diferentes aspectos de un tema.</p>	<p>Specific position (perspective, thesis/hypothesis) is stated, but is simplistic and obvious.</p> <p>La posición específica (perspectiva, tesis / hipótesis) se establece, pero es simplista y obvia.</p>
Conclusions and related outcomes (implications and consequences) Conclusiones y resultados relacionados (implicaciones y consecuencias)	<p>Conclusions and related outcomes (consequences and implications) are logical and reflect student's informed evaluation and ability to place evidence and perspectives discussed in priority order.</p> <p>Las conclusiones y los resultados relacionados (consecuencias e implicaciones) son lógicos y reflejan la evaluación informada del alumno y su capacidad para colocar las pruebas y perspectivas discutidas en orden de prioridad.</p>	<p>Conclusion is logically tied to a range of information, including opposing viewpoints; related outcomes (consequences and implications) are identified clearly.</p> <p>La conclusión está ligada lógicamente a un rango de información, incluyendo puntos de vista opuestos; los resultados relacionados (consecuencias e implicaciones) se identifican claramente.</p>	<p>Conclusion is logically tied to information (because information is chosen to fit the desired conclusion); some related outcomes (consequences and implications) are identified clearly.</p> <p>La conclusión está ligada lógicamente a la información (porque la información se elige para que se ajuste a la conclusión deseada); Algunos resultados relacionados (consecuencias e implicaciones) se identifican claramente.</p>	<p>Conclusion is inconsistently tied to some of the information discussed; related outcomes (consequences and implications) are oversimplified.</p> <p>La conclusión está inconsistentemente vinculada a una parte de la información discutida; los resultados relacionados (consecuencias e implicaciones) están simplificados en exceso.</p>

Anexo 4. Rúbrica del pensamiento crítico de la Universidad de Deusto con tres niveles de dominio

NIVELES DE DOMINIO	INDICADORES	DESCRPTORES				
		1	2	3	4	5
Primer Nivel de dominio: <i>Hacerse preguntas sobre la realidad que le rodea a uno y participar activamente en los debates en torno a la misma, analizando los juicios que se formulan y reflexionando sobre las consecuencias de las decisiones propias y ajenas.</i>	Muestra una actitud crítica ante la realidad.	Nunca se cuestiona la situación o la realidad en la que vive.	Se cuestiona ciertas situaciones de la realidad en la que vive.	Muestra una actitud crítica ante la realidad en la que está inmerso.	Se hace preguntas e indaga en la realidad, reflexionando sobre la misma.	Formula sus propios juicios y valoraciones a partir de su reflexión sistemática sobre la realidad.
	Diferencia hechos de opiniones, interpretaciones, valoraciones, etc. en las argumentaciones de otros.	Asume como propios juicios o decisiones basadas en opiniones, valoraciones, etc. como si fueran hechos objetivos.	Acepta, no cuestiona, juicios o decisiones basadas en opiniones, valoraciones, etc. como si fueran hechos objetivos.	Cuestiona juicios o decisiones basadas en opiniones, valoraciones, etc.	Diferencia hechos objetivos de opiniones y valoraciones.	Analiza acertadamente juicios o decisiones basadas en opiniones, valoraciones, etc.
	Participa activamente en los debates.	Se mantiene pasivo en los debates.	Le cuesta participar en situaciones de debate.	Participa activamente en los debates.	Participa constructivamente en los debates, contribuyendo a la construcción de una reflexión rica y compartida.	En los debates es un punto de referencia constructivo para los demás.
	Hace una previsión de las implicaciones prácticas de las decisiones y propuestas.	Desconoce los efectos de las decisiones y propuestas.	Prescinde de las implicaciones prácticas de las decisiones y propuestas.	Prevé las implicaciones prácticas de las decisiones y propuestas.	Analiza los pros y los contras de los efectos de las decisiones propuestas.	Da importancia a la realización de una valoración adecuada de los pros y contras de las decisiones y propuestas.
	Reflexiona sobre las consecuencias y efectos que sus decisiones tienen sobre los demás.	No piensa sobre las consecuencias de sus acciones.	Se limita a asumir las observaciones y críticas de los demás en relación con su conducta.	Reflexiona sobre las consecuencias y efectos que sus decisiones tienen en los demás.	Reconoce y asume sus propios errores.	Pide, valora y toma en cuenta el feedback de los otros en relación a su conducta.

NIVELES DE DOMINIO	INDICADORES	DESCRPTORES				
		1	2	3	4	5
Segundo Nivel de dominio: <i>Analizar la coherencia de los juicios propios y ajenos, y valorar las implicaciones personales y sociales de los mismos.</i>	Formula juicios y valoraciones propias.	Es incapaz de emitir juicios y valoraciones propias.	Se deja influir al emitir sus propios juicios y valoraciones.	Formula sus propios juicios y valoraciones.	Sus juicios y valoraciones están bien fundamentados.	Defiende con convicción sus valoraciones y juicios.
	Considera los juicios de otros.	Muestra desinterés por los juicios u opiniones ajenas.	Acepta sin cuestionarse los juicios de otros.	Considera los juicios de otras personas.	Analiza y valora adecuadamente los puntos fuertes y débiles de los juicios u opiniones ajenas.	Incorpora en sus razonamientos y juicios ideas de otros.
	Emite juicios en función de criterios internos (consistencia interna, coherencia, congruencia, fiabilidad, etc.)	Juzga arbitrariamente las opiniones de otros.	A veces introduce criterios de consistencia interna y coherencia en sus opiniones.	Habitualmente en sus juicios introduce criterios de coherencia interna o congruencia.	Crítica con acierto la congruencia y consistencia de las argumentaciones.	Analiza la coherencia de una argumentación en relación con un modelo o patrón de referencia.
	Valora las implicaciones prácticas de las decisiones y propuestas.	Prescinde de las implicaciones prácticas.	Considera las implicaciones prácticas, sin valorarlas adecuadamente.	Valora qué implicaciones pueden tener las decisiones y propuestas.	Reconsidera las propuestas y decisiones en función de la reflexión y valoración de las implicaciones que tienen.	Mejora notablemente la propuesta / decisión por la valoración realizada.
	Ante un problema o propuesta identifica las implicaciones en cuanto a derechos de las personas (dignidad, autoestima, etc.)	Valora las situaciones para sus propios intereses.	En ocasiones expresa su desacuerdo ante situaciones que no respetan los derechos de los demás.	Normalmente identifica la relación entre ciertas situaciones y los derechos de las personas.	Toma posición en situaciones en las que están implicados los derechos de otras personas.	Defiende los derechos de las personas y grupos frente a posiciones e intereses particulares.

NIVELES DE DOMINIO	INDICADORES	DESCRIPTORES				
		1	2	3	4	5
Tercer Nivel de dominio: <i>Argumentar la pertinencia de los juicios que se emiten y analizar la coherencia de la propia conducta, fundamentándolos en los principios y valores que los sostienen.</i>	Fundamenta y argumenta los juicios que emite.	Carece de juicios, valoraciones u opiniones propias.	Formula juicios que no es capaz de defender.	Justifica los juicios y valoraciones que emite.	Fundamenta y argumenta tanto los puntos fuertes como los débiles de los juicios u opiniones que emite.	Con su capacidad de argumentación hace que otros se cuestionen sus ideas o creencias.
	Identifica ideas, principios, modelos y valores subyacentes en los juicios críticos.	Prescinde de lo que fundamenta una afirmación.	Asocia con poco rigor ciertas afirmaciones con determinadas posiciones.	Identifica los principios o ideas que sustentan un juicio.	Relaciona las afirmaciones y juicios con los valores que las sostienen.	Argumenta los juicios desde los modelos teóricos y los valores que los fundamentan.
	Emite juicios en función de criterios externos (utilidad, viabilidad, validez, etc.)	Prescinde de criterios externos al formular sus juicios.	En ocasiones se apoya en criterios externos al emitir sus juicios.	Valora los planteamientos en función de algún criterio externo.	Selecciona con acierto el criterio externo a utilizar a la hora de argumentar un juicio.	Analiza con los criterios apropiados la pertinencia y relevancia de argumentaciones y propuestas.
	Actúa con coherencia y responsabilidad en sus decisiones y conductas.	Evita reflexionar sobre su conducta.	Analiza a posteriori las consecuencias de sus acciones.	Asume la responsabilidad de sus acciones y conductas.	Analiza la coherencia entre sus creencias y sus acciones.	En su conducta busca la coherencia con los valores que declara.

Anexo 5. Rúbrica articulada de Modelación Matemática y Pensamiento Crítico

Fase	Indicadores	1	2	3	4
Formulación	Identifica el problema o situación del mundo real	No se establece el planteamiento del problema	El planteamiento del problema es difícil de comprender	El planteamiento del problema es fácilmente identificable, pero no es precisa o consistente con otros planteamientos de la actividad	Planteamiento conciso del problema que indica exactamente cuál será el resultado del modelo
	Explicación del problema o situación	La situación / problema a ser considerado críticamente se expone sin aclaración o descripción.	La situación / problema que debe considerarse críticamente se indica, pero la descripción deja algunos términos sin definir, las ambigüedades sin explorar, los límites sin determinar y los antecedentes desconocidos.	La situación / problema que debe considerarse críticamente se establece, describe y aclara de manera que las omisiones no obstaculicen seriamente la comprensión.	La situación / problema a ser considerado críticamente se establece claramente y se describe en forma exhaustiva, comunicando toda la información relevante necesaria para una comprensión completa.
	Identifica las partes o datos relevantes del problema para su solución	Todos los datos del problema son considerados relevantes	Toma algunos datos del problema como relevantes cuando no lo son	Identifica algunos datos relevantes del problema	Identifica todos los datos relevantes del problema
	Identifica estrategias para abordar el problema para su solución	Identifica diversas maneras de abordar el problema para resolverlo aplicadas dentro de un contexto específico.	Identifica diversas maneras de abordar el problema para resolverlo, de las cuales solo algunas se aplican dentro de un contexto específico.	Identifica solo una manera de abordar el problema para resolverlo la cual se aplica dentro de un contexto específico.	Identifica uno o más maneras de abordar el problema para resolverlo, la cual no se aplica dentro de un contexto específico.
	Influencia del contexto y suposiciones	Muestra una conciencia de las suposiciones actuales (a veces las aseveraciones se etiquetan como suposiciones). Comienza a identificar algunos contextos al presentar su punto de vista.	Cuestiona algunas suposiciones. Identifica varios contextos relevantes al presentar su punto de vista. Puede ser más consciente de los supuestos de los demás que el propio (o viceversa).	Identifica los supuestos propios y de otros y varios contextos relevantes al presentar su punto de vista.	Analiza exhaustivamente (sistemática y metódicamente) los supuestos propios y de otros y evalúa cuidadosamente la relevancia de los contextos al presentar su punto de vista.
	Propone soluciones/ hipótesis	Propone una solución / hipótesis que es difícil de evaluar porque es vaga o solo aborda indirectamente la declaración del problema.	Propone una solución / hipótesis que está "lista para usar" en lugar de estar diseñada individualmente para abordar los factores contextuales específicos del problema.	Propone una o más soluciones / hipótesis que indican la comprensión del problema. Las soluciones / hipótesis son sensibles a los factores contextuales, así como uno de los siguientes: dimensiones éticas, lógicas o culturales del problema.	Propone una o más soluciones / hipótesis que indican una comprensión profunda del problema. Las soluciones / hipótesis son sensibles a los factores contextuales, así como a todas las siguientes: dimensiones éticas, lógicas y culturales del problema.

	Punto de vista del alumno (perspectiva, tesis / hipótesis)	El punto de vista específico (perspectiva, tesis / hipótesis) se establece, pero es simplista y obvio.	El punto de vista específico (perspectiva, tesis / hipótesis) reconoce los diferentes aspectos de un tema.	El punto de vista específico (perspectiva, tesis / hipótesis) tiene en cuenta las complejidades de un tema. Los puntos de vista de otros se reconocen dentro del propio punto de vista (perspectiva, tesis / hipótesis).	El punto de vista específico (perspectiva, tesis / hipótesis) es imaginativo, teniendo en cuenta las complejidades de un tema. Se reconocen los límites del punto de vista (perspectiva, tesis / hipótesis). Los puntos de vista de otros se sintetizan dentro del propio punto de vista (perspectiva, tesis / hipótesis).
	<i>Evidencia Seleccionar y usar información para investigar un punto de vista o conclusión</i>	La información se toma de la (s) fuente (s) sin ninguna interpretación / evaluación. Los puntos de vista de los expertos se toman como hechos, sin duda.	La información se toma de la (s) fuente (s) con alguna interpretación / evaluación, pero no lo suficiente como para desarrollar un análisis o síntesis coherente. Los puntos de vista de los expertos se toman principalmente como hechos, con poco cuestionamiento.	Fuente (s) con suficiente interpretación / evaluación para desarrollar un análisis o síntesis coherente. Los puntos de vista de los expertos están sujetos a cuestionamiento.	La información se toma de la (s) fuente (s) con suficiente interpretación / evaluación para desarrollar un análisis o síntesis exhaustivo. Los puntos de vista de los expertos son cuestionados a fondo.
Resolución	Hace suposiciones y reconoce limitaciones	No se proporcionan suposiciones o justificación por falta de estas.	Existen suposiciones y justificaciones, pero son difíciles de identificar en el texto.	Se observan supuestos; falta justificación o legibilidad.	Los supuestos utilizados para desarrollar el modelo están claramente identificados, son fáciles de leer y están bien justificados. Las limitaciones debidas a la simplificación se establecen cuando corresponde.
	Determina variables y parámetros para construir un modelo matemático	No se identifican variables ni parámetros relevantes para construir el modelo matemático.	Enlista variables y parámetros, pero no todos son relevantes para construir el modelo matemático.	Todos los parámetros y las variables que enlista son relevantes, pero faltan otras que también lo son.	Enlista todas las variables y parámetros relevantes para construir el modelo matemático.
	Genera un modelo matemático para representar el problema	El modelo no se presenta o no representa el problema.	El modelo contiene errores matemáticos significativos.	El modelo se indica, pero contiene errores matemáticos corregibles.	Expresa el modelo matemático correctamente
	Realiza cálculos y resuelve el modelo matemático	No realiza cálculos	Realiza cálculos que no son pertinentes por lo que no llega a resolver el modelo matemático	Realiza cálculos pertinentes, pero tiene errores que no permiten llegar a resolver el modelo matemático	Realiza cálculos pertinentes y resuelve el modelo matemático
Interpretación	Ofrece una solución clara	No se proporciona la solución.	La respuesta se da sin fondo contextual (es decir, gráficos apropiados, unidades apropiadas, etc.)	La respuesta se indica, pero los aspectos de la (s) solución (es) son inconsistentes, difíciles de entender o incompletos (por ejemplo, fallan en identificar las unidades de medida).	Presenta claramente una solución que es consistente con la declaración del problema original. Si es apropiado, se incluye una ayuda visual / gráfico útil.

	Formula explicaciones	No puede explicar el problema	Reconoce que hay una explicación, pero no puede establecerla	Ofrece una explicación del problema, pero no es correcta o no está bien fundamentada	Ofrece una explicación del problema correctamente fundamentada
	Conclusiones y resultados relacionados (implicaciones y consecuencias)	La conclusión está inconsistentemente vinculada a una parte de la información discutida; los resultados relacionados (consecuencias e implicaciones) están simplificados en exceso.	La conclusión está ligada lógicamente a la información (porque la información se elige para que se ajuste a la conclusión deseada); Algunos resultados relacionados (consecuencias e implicaciones) se identifican claramente.	La conclusión está ligada lógicamente a un rango de información, incluyendo puntos de vista opuestos; los resultados relacionados (consecuencias e implicaciones) se identifican claramente.	Las conclusiones y los resultados relacionados (consecuencias e implicaciones) son lógicos y reflejan la evaluación informada del alumno y su capacidad para colocar la evidencia y perspectivas discutidas en orden de prioridad.
Validación	Reflexiona en relación con la resolución del problema, considerando la posibilidad de mejorarlo	Revisa los resultados superficialmente en términos del problema definido sin tener en cuenta la necesidad de trabajo adicional	Revisa los resultados en términos del problema definido con poca o ninguna consideración de la necesidad de trabajo adicional.	Revisa los resultados en relación con el problema definido con alguna consideración de la necesidad de trabajo adicional.	Revisa los resultados en relación con el problema definido con consideraciones detalladas y específicas de la necesidad de trabajo adicional.
	Reflexionar sobre otras formas de resolver el problema o desarrollar las soluciones existentes de diferentes maneras	No reflexiona sobre otras alternativas de solución	Afirma que hay otras alternativas para resolver el problema, pero no las puede enlistar ni detallar	Enlista otras alternativas para resolver el problema, pero no las detalla	Enlista y detalla otras alternativas para resolver el problema
	Análisis y evaluación del modelo con la realidad	No se incluye ningún análisis o evaluación del modelo en la reseña. Matemáticas incorrectas utilizadas en el análisis.	Se proporciona algún análisis, pero sin ningún sentido de perspectiva.	Se aborda, pero el análisis carece de dimensionalidad adecuada. Por ejemplo, se ignoran las consecuencias obvias del resultado declarado o se ignoran las comparaciones conocidas.	Se aborda la viabilidad y confiabilidad de la solución de modelado matemático. Por ejemplo, ¿qué tan sensible es el modelo a los cambios en los valores de los parámetros o las suposiciones alteradas? ¿Cómo se compara con otras soluciones o datos históricos?
	Hace una valoración de las implicaciones prácticas de las decisiones y propuestas	Prescinde de las implicaciones prácticas de las decisiones y propuestas	Prevé las implicaciones prácticas de las decisiones y propuestas	Analiza los pros y los contras de los efectos de las decisiones propuestas	Da importancia a la realización de una valoración adecuada de los pros y los contras de las decisiones y propuestas
	Actúa con coherencia y responsabilidad en sus decisiones y conductas	Evita reflexionar o analiza a posteriori las consecuencias de sus acciones	Asume la responsabilidad de sus acciones y conductas	Analiza la coherencia entre sus creencias y sus acciones	En su conducta busca la coherencia con los valores que declara

Currículum Vitae

Claudia Jaqueline Acebo Gutiérrez

Correo electrónico: jaqueline.acebo.gtz@gmail.com

Registro CVU 466426

Originaria de Monterrey, Nuevo León, México, Jaqueline Acebo Gutiérrez realizó estudios de Maestría en Estrategias Educativas Innovadoras con distinción de excelencia en el Instituto Mater, Maestría en Educación con acentuación en Procesos de Enseñanza y Aprendizaje en el Tecnológico de Monterrey y la Licenciatura en Economía en la Universidad de Monterrey.

En el ámbito educativo profesional, cuenta con más de 15 años de experiencia en la docencia en nivel educativo básico en las áreas de matemáticas y tutoría. Actualmente, forma parte del Grupo de Investigación e Innovación en Educación (GIIE) del Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey, en la línea de Estudios Socioculturales en Educación. Asimismo, sus proyectos de investigación están centrados en los temas de Modelación Matemática, Pensamiento Crítico y Educación STEM.

Esta tesis es la culminación del programa doctoral de Innovación Educativa del Tecnológico de Monterrey, en el cual fue reconocida con beca por el CONACYT y por el Tecnológico de Monterrey. Con mucho entusiasmo Jaqueline se inicia de esta manera en el campo laboral como profesora e investigadora.