


08 MAY 2003

184388

BIBLIOTECA



Este libro debe ser devuelto, a más tardar en la última fecha sellada. Su retención más allá de la fecha de vencimiento lo hace acreedor a las multas que fija el reglamento.



TECNOLÓGICO DE MONTERREY.

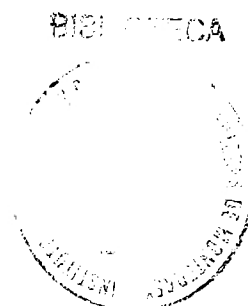
Fecha de devolución	Fecha de entrega
MAT-CIRC 22 JUN 2005	21 FEB 2006
22 JUN 2005	

211-15

**INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY
CAMPUS ESTADO DE MÉXICO**



184384



**TRANSFERENCIA DE CALOR Y MOMENTUM A
PARTÍCULAS ESFÉRICAS INYECTADAS EN UN CHORRO DE
PLASMA EN EL PROCESO DE RECUBRIMIENTO**

TESIS QUE PARA OPTAR EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS EN SISTEMAS DE MANUFACTURA
PRESENTA

OMAR LENGERKE PÉREZ

Asesor: Dr. ARMANDO BRAVO ORTEGA

Comité de Tesis: M. en I. VÍCTOR MANUEL ROMERO MEDINA
M. en C. SOFÍA FADDEVA

Jurado:	M. en C. SOFÍA FADDEVA	Presidente
	M. en I. VÍCTOR MANUEL ROMERO MEDINA	Secretario
	Dr. ARMANDO BRAVO ORTEGA	Vocal

Atizapán de Zaragoza, Edo. Méx., Mayo de 2002

Tesis

TS

158.6

.L46

2002

AGRADECIMIENTOS

Durante los últimos años he dedicado mis esfuerzos a realizar el objetivo que hoy orgullosamente alcanzo. Este importante logro nunca se hubiese realizado sin la confianza, apoyo, cariño y compañía de muchas personas a mi alrededor. Por esto, con toda mi gratitud dedico este trabajo:

A DIOS: por la vida y todas las oportunidades que siempre me ha obsequiado.

A mis padres Jorge y Susana, a mis hermanos Jorge, Susana y Janeth, a mis sobrinas Almita, Tata, Naty y lala, a mis cuñis, Willy y Alma Rosa, quienes por su amor y palabras de aliento constante me ayudaron a perseverar.

A mis amigos, que durante cada día en México me recordaron y ayudaron a cumplir con la razón por la que vine. Y los que me esperan en Colombia que aún en la distancia me animaron con su "AMOR".

A la familia Gómez Gómez, quienes me hicieron sentir como un hijo más de su hogar. A Becky, por los bellos detalles y momentos compartidos...

Al ITESM-CEM: por su soporte y en especial a los profesores que me dedicaron su tiempo y compartieron sus conocimientos.

A mis asesores de tesis por su tiempo y correcciones siempre oportunas.

Al Dr. Armando Bravo, quién más que director de tesis, considero un verdadero amigo.

A la UNAB, que me brindó su confianza e hizo posible esta oportunidad, en especial a los doctores Juan Carlos Acuña y Maritza Rendón.

"Lo esencial en esta vida es tener algo que hacer, algo que amar y algo que esperar". Jeremy Taylor

RESUMEN

En la actualidad, el diseño y construcción de máquinas, aeronaves, vehículos automotores, estructuras, dispositivos eléctricos y electrónicos, y en procesos de manufactura en general, se deben tomar en cuenta ciertos factores que no precisamente son secundarios a los del diseño convencional (diseño por carga, resistencia, fatiga), como lo es el factor ambiental entre otros, ya que éste puede ocasionar el deterioro y hasta la falla de las piezas, aún en condiciones normales de trabajo.

Actualmente, se realizan diversos esfuerzos científicos y tecnológicos para reducir los problemas ocasionados por los eventos presentados anteriormente. Entre estos esfuerzos destaca la aplicación de *RECUBRIMIENTOS PROTECTORES* de los materiales y componentes de maquinaria y equipo.

Para contribuir en la solución de problemas tecnológicos y económicos actuales, proponemos el presente proyecto de investigación básica y tecnológica, donde el resultado más importante es la metodología utilizada para la obtención de un modelo teórico que nos proporcione resultados óptimos para la transferencia de calor y momentum de partículas esféricas inyectas en un chorro de plasma en el proceso de recubrimiento.

Este estudio se basa en datos recopilados en la literatura especializada y representa sólo un análisis teórico. Sin embargo, se concluye que la aportación de este proyecto consiste en la posibilidad de aplicar el esquema de análisis desarrollado, a situaciones reales de tipo industrial, considerando que se cuente con la información adecuada.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS.....	8
LISTA DE TABLAS.....	10
NOMENCLATURA.....	11
CAPÍTULO 1.....	13
1 INTRODUCCIÓN.....	13
1.1 ANTECEDENTES.....	14
1.1.1 <i>RECUBRIMIENTO POR ROCIADO DE PLASMA (PLASMA SPRAYING)</i>	20
1.2 PROBLEMÁTICA.....	23
1.3 JUSTIFICACIÓN	24
1.4 OBJETIVOS	25
CAPÍTULO 2.....	26
2 FUNDAMENTOS DEL PLASMA.....	26
2.1 PLASMAS EN LA NATURALEZA.....	26
2.2 CONCEPTO DE PLASMA.....	26
2.3 DISPOSITIVOS GENERADORES DE PLASMA	28
2.3.1 <i>ANTORCHAS DE PLASMA DE CORRIENTE DIRECTA</i>	28
2.3.2 <i>ARCOS DE TRANSMISIÓN DE CORRIENTE DIRECTA</i>	28
2.3.3 <i>DESCARGAS ACOPLADAS POR INDUCCIÓN DE RF</i>	29
2.3.4 <i>ANTORCHA DE PLASMA HÍBRIDAS</i>	29
2.4 CONCEPTO DE TEMPERATURA.....	30
2.5 ESCUDO DE DEBYE	33
2.6 PARÁMETROS DEL PLASMA.....	36
2.7 MÉTODO PARA LA MEDICIÓN DE LA VELOCIDAD DE PARTÍCULAS	36
2.8 PROBLEMAS DE MEDICIÓN DE LAS PARTÍCULAS EN VUELO	36

2.9	DINÁMICA DE LAS PARTÍCULAS	37
2.9.1	<i>ECUACIONES DE MOVIMIENTO</i>	37
2.10	DIMENSIONES CARACTERÍSTICAS DEL PLASMA.....	37
2.10.1	<i>COLISIONES ELÁSTICAS</i>	40
2.10.1.1	Colisiones de Coulomb	42
2.10.1.2	Colisión Electrón-neutral	43
2.10.1.3	Colisiones Ión-neutral	45
2.10.2	<i>SENTIDO Y DIFUSIÓN DE PARTÍCULAS CARGADAS</i>	47
2.10.2.1	Movimientos de iones y electrones en un campo eléctrico	47
2.10.3	<i>PROCESOS INELÁSTICOS</i>	48
2.10.3.1	Procesos del electrón	49
2.11	CONCEPTOS TEÓRICOS DE PARTÍCULAS CARGADAS DE POLVOS.....	52
2.11.1	<i>SATURACIÓN DE CORRIENTES OML (ORBITAL MOTION LIMITED)</i>	52
2.11.2	<i>LA PARTÍCULA COMO UNA SONDA FLOTANTE</i>	57
2.11.2.1	Corrientes OML.....	57

CAPÍTULO 359

3 FENÓMENOS DE TRANSPORTE.....59

3.1	DINÁMICA DE FLUIDOS.....	59
3.1.1	<i>ESTRUCTURA MOLECULAR</i>	62
3.1.2	<i>MEDIO CONTINUO</i>	62
3.1.3	<i>PROPIEDADES Y CLASIFICACIÓN DE LOS FLUIDOS</i>	64
3.1.3.1	Presión.....	64
3.1.3.2	Densidad.....	65
3.1.3.3	Viscosidad	65
3.1.3.4	Fluido no viscoso en movimiento.....	69
3.1.3.5	Flujos laminares y turbulentos	69
3.1.4	<i>MOVIMIENTO DE UN FLUIDO</i>	71
3.1.4.1	Sistemas de referencia.....	72
3.1.4.2	Teorema de Transporte de Reynolds	73
3.1.5	<i>CONSERVACIÓN DE LA MASA</i>	74
3.1.6	<i>CONSERVACIÓN DEL MOMENTUM</i>	75
3.1.7	<i>ECUACIÓN DE ENERGÍA</i>	77
3.2	TRANSFERENCIA DE CALOR	79
3.2.1	<i>CONCEPTOS FUNDAMENTALES</i>	79
3.2.1.1	Conducción de calor. Ley de Fourier.....	79
3.2.1.2	Convección de calor. Ley de Enfriamiento de Newton.	82
3.2.1.3	Análisis de la Transferencia de Calor por Conducción.	83
3.2.2	<i>CONVECCIÓN FORZADA SOBRE SUPERFICIES EXTERIORES: ESFERAS</i> ..	84
3.2.3	<i>FLUJO Y ARRASTRE: ESFERAS</i>	86
3.2.3.1	Estelas	86
3.2.3.2	Arrastre en condiciones de flujo laminar	87
3.2.3.3	Obtención del coeficiente de arrastre.....	91
3.2.3.4	Sustentación.....	91
3.2.4	<i>FLUJO ALREDEDOR DE UNA ESFERA</i>	93

CAPÍTULO 4 103

4 MODELO TEÓRICO PROPUESTO..... 103

4.2	SISTEMA FÍSICO DE INTERÉS	103
4.2.1	<i>FLAMA DE PLASMA</i>	104
4.2.2	<i>PARTÍCULA</i>	105
4.3	SELECCIÓN DE UN SISTEMA DE REFERENCIA.....	106
4.4	CONDICIONES FÍSICAS DE LA FLAMA.....	106
4.5	CONDICIONES FÍSICAS DE LA PARTÍCULA.....	108
4.6	CONSIDERACIONES SOBRE EL FLUJO DE LA FLAMA.....	109
4.7	MOMENTUM FLAMA-PARTÍCULA	109
4.8	TRANSFERENCIA DE CALOR FLAMA-PARTÍCULA.....	110
4.9	GEOMETRÍA RELATIVA FLAMA-PARTÍCULA.....	110
4.10	MODELO TEÓRICO REDUCIDO.....	112

CAPÍTULO 5 118

5 SIMULACIÓN Y RESULTADOS 118

5.2	CREACIÓN DE LA GEOMETRÍA	121
5.3	GENERACIÓN DE MALLA	122
5.4	CONDICIONES DE FRONTERA	123
5.5	RESULTADOS Y DISCUSIÓN	126

CAPÍTULO 6 135

6 CONCLUSIONES 135

REFERENCIAS..... 137

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1. Industrias Manufactureras en México	15
Figura 1.2 Producción de la industria manufacturera en México.....	16
Figura 1.3 Diagrama esquemático del Proceso de recubrimiento por rociado de plasma.	19
Figura 1.4 Proceso de recubrimiento por rociado de plasma (Plasma Spraying).....	20
Figura 1.5 Funcionamiento de la antorcha en la operación de rociado con plasma.....	21
Figura 1.6 Distribución de temperaturas del plasma en un chorro de plasma	22
Figura 1.7 Mecanismo de transferencia básico involucrado en el calentamiento del plasma	23
Figura 1.8 Representación esquemática de los fenómenos de transferencia de momentum	25
Figura 2.1 Ilustración del gran rango de las fuerzas electrostáticas en el plasma.....	27
Figura 2.2 . Representación esquemática de una antorcha de plasma DC con un cátodo	29
Figura 2.3 Distribución de Velocidad Maxwelliana.....	30
Figura 2.4 Escudo de Debye	33
Figura 2.5 Conjunto de datos (rejilla o cuadrícula).....	34
Figura 2.6 Diagrama de plasmas en un n_e (m^{-3}) y n_e/n_a	39
Figura 2.7 Definición del diferencial de la sección cruzada	41
Figura 2.8 Secciones de cruce para esparcimientos elásticos	45
Figura 2.9 Sección cruzada para colisiones i-a	46
Figura 2.10 Tasas de ionización cuando la función de energía normalizada es T_e/E_{ion}	51
Figura 2.11 Trayectoria del ión con diferentes valores del parámetro de impacto b	53
Figura 2.12 Corrientes OML sobre una partícula de polvo para valores de temperaturas	57
Figura 3.1 Deformación resultante de la aplicación de una fuerza cortante constante.....	61
Figura 3.2 Propiedades intensiva y extensiva en un material homogéneo	63
Figura 3.3 Variaciones de la masa específica en función del volumen	64
Figura 3.4 Diagrama Reológico	66
Figura 3.5 Representación de distintos modelos de la relación	66
Figura 3.6 Modelo que ilustra la transferencia de momentum.....	68
Figura 3.7 Rango típico de conductividad térmica para varios materiales	80
Figura 3.8 Efecto de la temperatura en la conductividad térmica	81
Figura 3.9 Conductividad térmica de metales a bajas temperaturas.....	82
Figura 3.10 Coeficiente de retardo contra el número de Reynolds	84
Figura 3.11 Correlaciones de los coeficientes experimentales	85
Figura 3.12 Flujo alrededor de una esfera.....	87
Figura 3.13 Distribución de líneas de corriente y presión en un flujo alrededor de una esfera....	88
Figura 3.14 Variación del coeficiente de resistencia en función del número de Reynolds	92
Figura 3.15 Sección axial.....	98
Figura 3.16 Coeficiente de arrastre C_D de la esfera.....	102
Figura 4.1 Esquema de la interacción entre la flama de plasma y la partícula	104
Figura 4.2 Simplificación del modelo a un sistema bidimensional.....	106
Figura 4.3 Distribución de la temperatura y velocidad axial en la flama de plasma de Ar	107

Figura 4.4 Distribución de la velocidad axial de la flama de plasma de Ar	108
Figura 4.5 Distribución de la temperatura de la flama de Ar en función del tiempo	108
Figura 4.6 Figura comparativa del comportamiento	110
Figura 4.7 Distribución de partículas en el radio de la flama de plasma	111
Figura 4.8 Esquema de posicionamiento de las partícula	112
Figura 4.9 Coeficientes de arrastre para flujos alrededor de una esfera y un cilindro	114
Figura 4.10 Discretización de la velocidad relativa del flujo con respecto a la partícula	115
Figura 4.11 Densidad del Ar en función de la temperatura. (Capitelli, 1976)	116
Figura 4.12 Viscosidad dinámica de Ar en función de la temperatura (Capitelli, 1972)	116
Figura 4.13 Conductividad térmica de Ar en función de la temperatura (Capitelli, 1972)	117
Figura 5.1 Estructura básica de FLUENT	119
Figura 5.2 Geometría para una partícula de 20 μ m de diámetro	121
Figura 5.3 Geometría para una partícula de 100 μ m de diámetro	121
Figura 5.4 Malla para la partícula de 20 μ m	122
Figura 5.5 Malla para la partícula de 100 μ m	123
Figura 5.6 Representación de las condiciones de frontera modelo partícula de 20 μ m.	124
Figura 5.7 Representación de las condiciones de frontera modelo partícula de 100 μ m.	124
Figura 5.8 Especificación de medios continuos de la partícula de 20 μ m.	125
Figura 5.9 Especificación de medios continuos de la partícula de 100 μ m.	125
Figura 5.10 Contornos de temperatura etapa final de calentamiento (partícula de 20 μ m)	126
Figura 5.11 Contornos de temperatura etapa final de calentamiento (partícula de 60 μ m)	127
Figura 5.12 Contornos de temperatura para la etapa final de calentamiento	127
Figura 5.13 Contornos de temperatura para la etapa final de calentamiento	128
Figura 5.14 Vectores de velocidad para el tiempo final en la partícula de 20 μ m.	128
Figura 5.15 Vectores de velocidad para el tiempo final en la partícula de 60 μ m.	129
Figura 5.16 Vectores de velocidad para el tiempo final en la partícula de 100 μ m.	129
Figura 5.17 Vectores de velocidad para el tiempo final en la partícula de 250 μ m.	130
Figura 5.18 Distribución de temperaturas para la partícula de Ti de 20 μ m.	130
Figura 5.19 Distribución de temperaturas para la partícula de Ti de 60 μ m.	131
Figura 5.20 Distribución de temperaturas para la partícula de Ti de 100 μ m.	131
Figura 5.21 Distribución de temperaturas para la partícula de Ti de 150 μ m.	131
Figura 5.22 Distribución de temperaturas para la partícula de Ti de 250 μ m.	132
Figura 5.23 Distribución de velocidades para la partícula de Ti de 20 μ m	133
Figura 5.24 Distribución de velocidades para la partícula de Ti de 60 μ m	133
Figura 5.25 Distribución de velocidades para la partícula de Ti de 100 μ m	133
Figura 5.26 Distribución de velocidades para la partícula de Ti de 150 μ m	134
Figura 5.27 Distribución de velocidades para la partícula de Ti de 250 μ m	134

LISTA DE TABLAS

Tabla 1.1 Propiedades mecánicas, físicas, eléctricas, etc.	16
Tabla 1.2 Cuadro comparativo de las técnicas comúnmente empleadas en la protección	17
Tabla 2.1 Polarizabilidad escalar $\alpha' = \alpha/4\pi\epsilon_0$	43
Tabla 2.2. Potenciales flotantes normalizados $e\phi_f / kT_e$ en plasmas cuasineutrales.....	58
Tabla 3.1 Coeficientes de arrastre viscosos, a bajo número de Reynolds	89
Tabla 3.2 Dependencia de las fuerzas de arrastre en varios parámetros.....	89
Tabla 3.3 Arrastre alrededor de varios cuerpos bidimensionales.....	90
Tabla 3.4 Arrastre alrededor de objetos tridimensionales	91
Tabla 3.5 Arrastre alrededor de varios objetos.....	92
Tabla 4.1 Conductividad térmica k del Ar	104
Tabla 4.2 Viscosidad μ del Ar.....	104
Tabla 4.3 Propiedades termofísicas del Ar	104
Tabla 4.4 Variación de la temperatura, velocidad y grado de.....	105
Tabla 4.5 Propiedades termofísicas del Ti.	105
Tabla 4.6 Diámetros y espacios entre las partículas estudiadas.....	110
Tabla 4.7 Datos calculados para la determinación de la velocidad relativa de la partícula.....	114
Tabla 5.1 Mallado respectivo para cada caso estudiado.....	122

NOMENCLATURA

∇	Gradiente
$\overline{Nu_D}$	Número de Nusselt promedio
γ	Peso específico
τ	Vector de esfuerzo
α	Ángulo, difusividad térmica
ρ	Densidad de masa
σ	Tensor de esfuerzos
ε	Viscosidad de remolino
μ	Viscosidad, factor de proporcionalidad
σ_c	Sección de cruce efectivo de la partícula
μ_e	Movimiento de los electrones
ϕ_p	Función de potencia de la partícula
a	Aceleración
A	Área, constante
b	Parámetro de impacto
b'	Parámetro de impacto
C_D'	Coefficiente de arrastre viscoso
C_L	Coefficiente de sustentación
CVD	Deposición química de vapor
D	Diámetro
DC	Corriente directa
e	Energía
E	Energía interna
E_{av}	Media de la energía cinética
F	Fuerza
f	Fuerza total por unidad de masa
h	Coefficiente de transferencia local de calor por convección
j	Dirección
k	Conductividad térmica
k	Constante
k	constante de Boltzmann's
K	Grados Kelvin
K_{ea}	Coefficiente de reacción
l	Longitud en general
λ_D	Longitud de Debye
m	Masa
N	Número de partículas en una esfera Debye

OP	Vector de magnitud constante
p	Momentum total de un fluido
p	Presión
PIB	Producto interno bruto
q	Carga, flujo de calor que entra o sale del fluido
q''	Flujo de calor
R	Fuerza viscosa resistente
R	Radio
r	Vector de posición
Re	Número de Reynolds
T	Temperatura
t	Tiempo
T_f	Temperatura de un fluido
T_i	Titanio
T_w	Temperatura de un sólido
u	Velocidad promedio, velocidad de un fluido
ν	Viscosidad cinemática
V	Volumen
V_∞	Velocidad límite de la esfera en el fluido
\hat{i}	Vector unitario en la dirección x
v	Velocidad
W	Energía potencial
x	Coordenadas
y	Coordenadas
z	Coordenadas

CAPÍTULO 1

1 INTRODUCCIÓN

No es muy común que en la historia de la metalurgia y procesamiento de materiales, encontremos tecnologías que ofrezcan un nuevo horizonte para el desarrollo de materiales avanzados. Haciendo un minucioso estudio de la evolución del desarrollo del proceso, encontramos que las tecnologías progresan a pasos incrementales y evolutivos. De igual forma, son pocos los descubrimientos y procesos que han revolucionado radicalmente la manera y el método de producción.

El procesamiento de plasma es una tecnología relativamente nueva que nos ha permitido producir nuevos y avanzados materiales, así como la alteración del esquema del proceso, como en el caso de la metalurgia extractiva. [1]

El generador de plasma tipo *gerdien* se empezó a conocer en 1922, sólo hasta 1939 Reinecke produjo las primeras capas metalizadas usando las pistolas con plasma. A mediados de los años cincuenta, se utilizó el generador de plasma tipo *gerdien* principalmente en investigación y desarrollo para simular las condiciones de transbordadores espaciales y evaluar los materiales ablativos. En los años sesenta, la NASA llevó a cabo muchos trabajos de desarrollo para los sistemas de plasma y pistolas de plasma. También se observó la producción de dióxido de zirconio, procesos de halogenación, el *plasmamelt* (fusión del plasma), los procesos *plasmazinc*, reducción de óxidos por plasmas de hidrógeno, reducción de hálido por plasmas de hidrógeno, reducción de uranio del hexafluoruro de uranio y técnicas de fundición de acero. [2]

Desde un punto de vista global, el desarrollo de los procesos en la metalurgia que usan plasma ha florecido. Por ejemplo, el sector comercial ha empezado el desarrollo de la tecnología de procesos de plasma.

La "Edad Dorada" del desarrollo de plasma, el cual ha empezado su uso en aplicaciones de la metalurgia extractivas y químicas, ha seguido también un camino muy viable y con resultados satisfactorios en la aplicación industrial, teniendo como interés el proceso de la tecnología de plasma en recubrimientos.

Desde los años setenta, se han visto múltiples desarrollos y usos del proceso del plasma para cubrir diferentes componentes y ampliarse para una variedad de propósitos como corrosión, desgaste, barreras térmicas, etc. En los años ochenta, se usaban plasmas para producir materiales compuestos y realizar su proceso.

Al mismo tiempo que se utilizaba el plasma para procesar y producir materiales no monolíticos (compuestos), también estaban aplicándose plasmas para la producción de materiales monolíticos, los cuales eran metales muy limpios libre de inclusiones. Se emplearon plasmas en la fusión y refundición de metales reactivos y aleaciones tales como titanio y Ti 6Al4V. Cerca de los años noventa, se usaron plasmas para sintetizar a un grupo de nuevos materiales.

Como puede apreciarse, en los últimos 50 años el proceso del plasma ha hecho incursiones mayores en casi todas las áreas del proceso de los materiales. Es un proceso flexible y versátil, pero más pretenciosamente, es una tecnología habilitada que nos permite producir materiales más eficientes que nosotros no podríamos producir por métodos tradicionales.

En la última década, hemos visto un tremendo crecimiento del uso de los plasmas en el sector industrial. En 1990, el mercado anual de EE.UU. en el área de recubrimientos mediante el proceso de plasma se estimó alrededor de \$800 millones. La restauración y el mantenimiento segmentado de la industria, están viendo un crecimiento significativo.

Un estudio realizado por Gorham Advanced Materials Institute en 1990, indicaba que el mercado del uso del recubrimiento mediante la tecnología de rocío con plasma se vería incrementada durante la década entre 1990 y 2000, desde el punto de vista general, considerando Europa, mercado asiático etc. El mismo estudio estimaba que este mercado arrojaría una ganancia alrededor de los \$3 billones de dólares para el año 2000. Efectivamente, esos estudios fueron muy acertados ya que se han visto los grandes adelantos e innovaciones que ha tenido esta tecnología.

[1]

1.1 ANTECEDENTES

En la actualidad, existen distintos estudios científicos y tecnológicos para solucionar problemas y desarrollar métodos para el mejoramiento de las propiedades tribológicas del material, la resistencia al desgaste, sus características de fricción, optimización de propiedades mecánicas,

etc., lo cual, puede representar un gasto muy importante. Podemos analizar lo que sucede en España y Gran Bretaña, donde la corrosión es un factor importante en cuanto a pérdidas económicas, lo cual representa de un 2% y 3.5% del PIB. En México, se estima que estas pérdidas pueden representar hasta el 3 o 5% del PIB.

En la industria manufacturera, se han realizado esfuerzos para la solución de estos problemas, entre ellos se destaca la aplicación de revestimientos protectores mediante el rocío de plasma a los materiales y componentes de maquinaria y equipo. Sus beneficios más notables, son la mejora en la adhesión de los revestimientos con respecto a otros procesos, los revestimientos son de espesor uniforme, no hay necesidad de un maquinado o pulido final, la estructura de los revestimientos se puede controlar con parámetros accesibles al operador, es un proceso confiable, genera pocos residuos, son procesos no-tóxicos, entre otras características.

Sin embargo, en México esta tecnología no ha sido explotada a pesar que constituye un mercado fuerte para la producción y consumo de estos productos, también se resiente la falta de personal y de capacitación de profesionales para la investigación y la innovación tecnológica que este proceso conlleva. Si observamos la siguiente gráfica, el número de industrias en México, que eventualmente presentarán problemas de desgaste, corrosión, abrasión, erosión, entre otros (Fuente SECOFI, Bancomext 2001) es elevado.

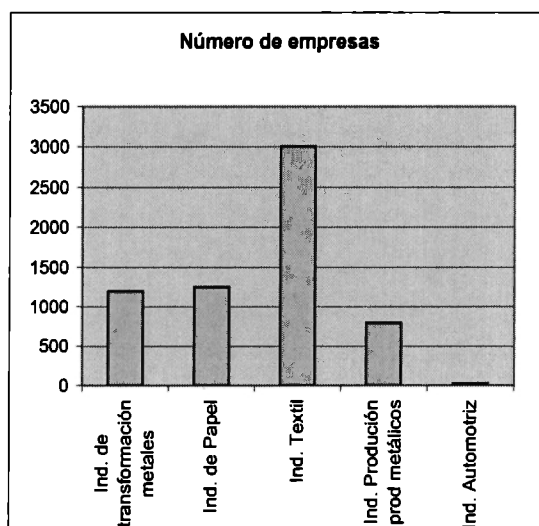


Figura 1.1. Industrias Manufactureras en México. (Fuente SECOFI, Bancomext 2001)

A su vez, en la siguiente gráfica se muestra la producción en valores básicos de la industria manufacturera por división industrial, 1999 (Miles de pesos) Fuente INEGI, en donde se puede analizar el campo de acción donde se puede utilizar este tipo de procesos. Como se puede observar, el estudio de esta tecnología se hace importante y a su vez es un factor relevante para la economía del país.

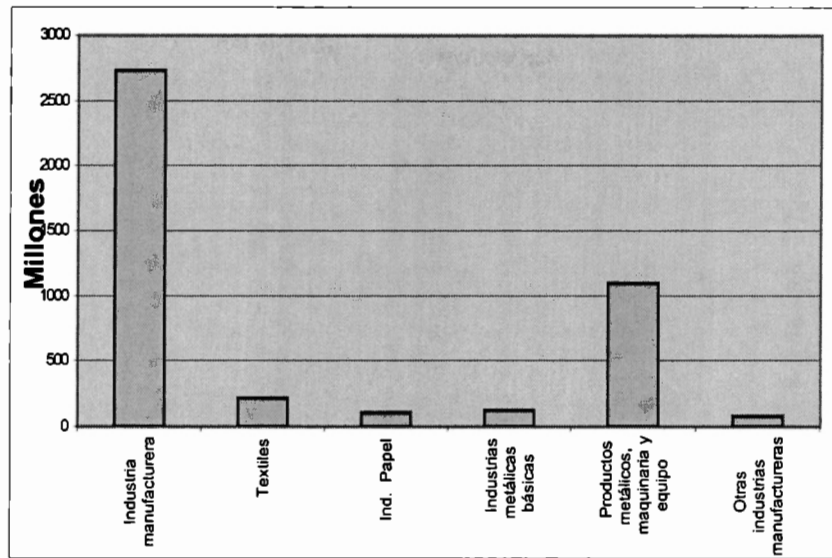


Figura 1.2 Producción de la industria manufacturera en México. (Fuente INEGI)

No obstante, a pesar del gran número de empresas que necesitan este tipo de tecnología y los grandes avances e importantes aplicaciones que se le ha dado, se ha visto que pasados 20 años, el número de las aplicaciones industriales ha venido en un crecimiento relativamente lento debido a:

- La sobrestimación en el potencial del proceso del plasma térmico, produciendo una inmensa desilusión.
- La falta de estudios básicos para apoyar al trabajo requerido por los ingenieros.
- Las condiciones del proceso son a menudo irreproducibles.
- El incremento de condiciones irreproducibles del proceso, llevan a tener con el tiempo insuficiencias en la evolución de las características del plasma.

La economía en procesos desfavorables como un impedimento de crecimiento, atropella a menudo la superioridad técnica del proceso del plasma. [3], [4]

En el sector industrial, existen algunas propiedades físicas, mecánicas, eléctricas, etc., que afectan equipos, maquinarias y componentes, entre ellas se encuentran:

Tabla 1.1 Propiedades mecánicas, físicas, eléctricas, etc., que afectan a equipos, maquinarias y componentes.

Propiedad	Aplicación
Resistencia al desgaste	Se hace común en componentes como casquillos y ejes de bombas, ejes de compresor, cierres mecánicos, rodillos, válvulas rotativas, anillos de sincronización, además en componentes de automatización, segmentos, embragues, bombas de vacío, y en maquinarias para papel y tabaco.
Aislante Eléctrico y Resistencia a altas temperaturas	Afectado a componentes como cámaras de combustión, barreras térmicas, pistones de motores, rodillos para homos, guías, termopares, sensores.
Resistencia a corrosión, abrasión y erosión	Concentra comúnmente su aplicación en componentes como turbinas, válvulas, rodillos deflectores, ejes.
Recuperación dimensional y mantenimiento de equipos	Dentro de las aplicaciones específicas se encuentran la Industria mecánica y recuperación de medidas en ejes desgastados.

Actualmente, se realizan diversos esfuerzos científicos y tecnológicos para reducir los problemas ocasionados por los eventos presentados anteriormente. Entre estos esfuerzos destaca la aplicación de recubrimientos protectores de los materiales y componentes de maquinaria y equipo, además las técnicas de aplicación de estos recubrimientos son diversas, y presentan ventajas y desventajas implícitas a cada proceso. Algunas son más baratas o caras, son tóxicas, son difíciles de controlar o reproducir, etc. A continuación se presenta un cuadro comparativo de aquellas técnicas que se emplean con mayor frecuencia, para la protección de los materiales o la mejora de sus propiedades.

Tabla 1.2 Cuadro comparativo de las técnicas comúnmente empleadas en la protección de los materiales.

RECUBRIMIENTO	APLICACIONES	VENTAJAS	DESVENTAJAS
CONVERSIÓN Químicos Anodizado Térmicos	Se usa en capas antidesgastantes, en protecciones que necesitan aumento de la resistencia eléctrica. Comúnmente es usado en acabados decorativos e identificación de partes	Permite producir capas con excelentes propiedades, comúnmente en materiales de Zinc, Aluminio, Acero. Utiliza una gama amplia de recubrimientos, entro los más empleados: óxido, Fosfato y Cromato.	El recubrimiento se realiza por inmersión. Se provocan reacciones químicas, por lo que se contamina Es un proceso Tóxico Se necesitan tanques para realizar estos procesos, lo cual limita su aplicación.
ELECTRO-DEPOSICIÓN Tambor Estantes Tiras	En protecciones frente a la corrosión, desgaste y mejora de la soldabilidad, además es usado en acabados decorativos, decorativos y Ajuste automotriz.	Produce uno de los recubrimientos más duros (evitar desgaste). Se utiliza en todo tipo de piezas (piezas pequeñas, grandes y complejas.)	Se necesita limpieza química al material antes de la deposición. El recubrimiento depende de la eficacia del cátodo. Es un proceso tóxico, el cual requiere de un estante específico para cada tipo de pieza.
DEPOSICIÓN FÍSICA DE VAPOR Evaporación al vacío Bombardeo de partículas atómicas Recubrimiento iónico	Recubrimientos antirreflejantes Resistencia al desgaste Películas delgadas	Se aplica a casi todos los materiales Costo inicial bajo Mejor descarga de energía Posible recubrir compuestos	Se trabaja con cámara al vacío por consiguiente se utiliza en piezas pequeñas. La adhesión del recubrimiento no es tan buena y la Velocidad de deposición varía lo cual no garantiza un buen recubrimiento
DEPOSICIÓN QUÍMICA DE VAPOR (CVD)	En capas antidesgastantes (TiN, TiC, etc.), capas lubricantes y capas ultraduras (diamante, B-C: H. En protecciones frente a la corrosión (SiC), erosión y choques térmicos.	Es un proceso versátil para el tratamiento o recubrimiento sobre un amplio rango de materiales (por ejemplo, metales, cerámicas, polímeros). Puede controlar el tamaño de grano, permitiendo producir capas con excelentes propiedades (por	Es un proceso tóxico debido a las reacciones químicas de los gases. Se realiza en una cámara de reacción química sellada, lo cual limita su aplicación a piezas de determinado tamaño. Es de naturaleza corrosiva y se necesita de un equipo de bombeo de

		<p>ejemplo, tipo diamante, nitruros y carburos complejos, C-N, etc.</p> <p>Es un proceso controlable y reproducible, además es un proceso a presión ambiente, con capas uniformes y densas, sin porosidad.</p>	<p>alto costo y con medidas de seguridad muy altas, además algunos de los ingredientes que utiliza son costosos.</p>
PLASMA	<p>En recubrimientos tribológicos y resistentes al desgaste.</p> <p>En protecciones anti-corrosivas, oxidación y corrosión a altas temperaturas.</p> <p>Barreras térmicas cerámicas.</p> <p>Recuperación dimensional de componentes.</p> <p>Favorece la biocompatibilidad de prótesis.</p>	<p>Produce recubrimientos con excelentes características de adherencia, cohesión y densidad interna.</p> <p>Es un proceso de fácil Automatización debido a la flexibilidad de sus componentes.</p> <p>Produce poco o nada de desechos.</p> <p>Es un proceso no tóxico</p> <p>Se puede utilizar en cualquier tipo de material y trabaja a presión atmosférica.</p> <p>Se puede controlar la porosidad y espesor de la capa de recubrimiento.</p> <p>Es usado en una amplia gama de materiales de recubrimiento y es aplicable para todo tipo de geometría, tamaño y peso</p>	<p>Su inversión inicial es alta.</p> <p>El proceso requiere altas temperaturas</p> <p>Los consumibles son de alto costo y la mayor parte de las refacciones y consumibles se deben importar.</p>

Las principales razones para cubrir un material son: proporcionar protección contra la corrosión del sustrato, mejorar el aspecto del sustrato, aumentar la resistencia al desgaste, disminuir la fricción de la superficie, modificar la resistencia eléctrica o térmica, preparar una superficie metálica para un procesamiento posterior y reconstruir las superficies gastadas o erosionadas durante el servicio.

De las técnicas de recubrimiento superficial del cuadro comparativo anterior se puede apreciar que varias de las técnicas de recubrimiento superficial son tóxicas, poco confiables, de difícil control, etc., lo que limita su uso, y sólo por razones históricas o económicas se siguen utilizando. Por otra parte, destacan las técnicas de recubrimiento por aplicación de plasmas. Sus ventajas más notables son la *no-toxicidad* de los procesos, los pocos residuos que se generan, lo confiable del proceso, que se pueden aplicar in-situ y con frecuencia sin necesidad de desmontar o parar maquinaria o equipo, entre otras características. Su mayor objeción es el alto costo o inversión inicial y lo poco que se conoce con profundidad el proceso. Sin embargo, lo caro del proceso está relacionado con el limitado conocimiento del mismo, lo que amerita un estudio más profundo de los procesos físicos que ocurren.

Existe una variedad de procesos de recubrimientos por plasma, que se citan a continuación:

- APS (Atmospherical plasma spraying). Es la técnica más económica y es recomendada cuando la oxidación del material en el proceso no se presenta, o bien el grado de oxidación es mínimo.
- IPS (Inert plasma spraying). Se utiliza cuando los materiales a recubrir tienen un alto grado de oxidación y para evitar esto, el proceso se realiza en una atmósfera que contiene un gas inerte.
- VPS (Vacuum plasma spraying). Es una mejora del método IPS y alguna de las ventajas que presenta es que puede limpiar y/o precalentar la superficie a recubrir.
- UPS (underwater plasma spraying). Este método ofrece ciertas ventajas en lo que se refiere a la salud, ya que el agua retiene las radiaciones, reduciéndolas al mínimo, también el agua atrapa los residuos.
- IPC (Inductive coupled plasma spraying). El plasma se forma por campos electromagnéticos, las ventajas son las de trabajar a menores temperaturas.

De los procesos citados anteriormente, el que ofrece mayores beneficios, por la calidad y variedad de aplicaciones, en comparación con la inversión, es el proceso de **RECUBRIMIENTO POR ROCIADO DE PLASMA (Plasma Spraying)**.

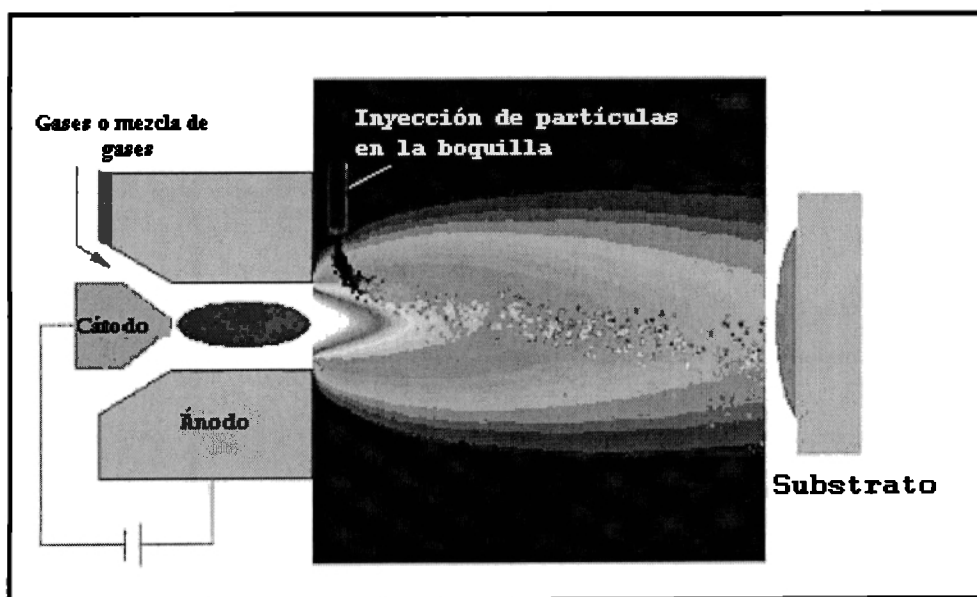


Figura 1.3 Diagrama esquemático del Proceso de recubrimiento por rociado de plasma.

La tecnología de recubrimiento de plasma mediante pistola con plasma ha crecido en los últimos 20 años por muchas razones [5]:

- La necesidad para el mundo industrial de desarrollar técnicas y procesos más eficaces;

- Por el muy atractivo costo de la energía eléctrica en algunos países, particularmente en Francia;
- El potencial por desarrollar nuevos materiales relacionados con nuevas tecnologías,
- Fortalecimiento por la cooperación entre los fabricantes, investigadores, obreros, industriales, y los productores de electricidad.

1.1.1 RECUBRIMIENTO POR ROCIADO DE PLASMA (PLASMA SPRAYING)

El recubrimiento por rociado por plasma es una tecnología que ha crecido rápida y progresivamente en las industrias aeronáuticas y nucleares, entre otras. Este crecimiento ha hecho que esta tecnología tienda a realizar nuevas investigaciones y métodos. Pero este crecimiento, ha llevado a tener un mejor control de la calidad y la reproducibilidad del recubrimiento, estos resultados se han obtenido gracias al estudio y entendimiento del fenómeno con el descubrimiento de técnicas de diagnóstico y el estudio minucioso de todos los factores y propiedades que el proceso conlleva. [6]

El recubrimiento por rociado con plasma, consiste en la inyección de partículas sólidas pequeñas (en el rango 5-100 μm) mediante un chorro de plasma donde se aceleran y se funden. Las gotas (en una fundición o en estado de semifundición) colapsan impactando en el sustrato preparado, resultando una capa delgada la cual se forma rápidamente (en unos microsegundos). El impacto de las siguientes gotas es una situación similar que ocurre dentro de los siguientes microsegundos sobre las miles de gotas ya solidificadas. La capa resultante de las miles de gotas, tiene una estructura laminar con propiedades generalmente diferentes a las del volumen del material, y su espesor generalmente está entre 50 μm y unos milímetros. [7]

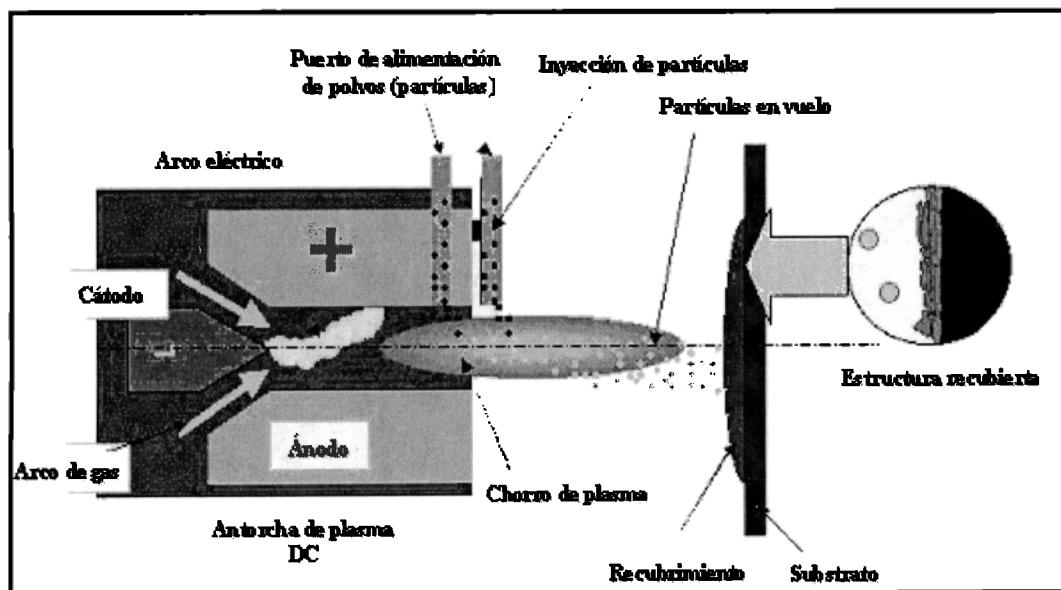
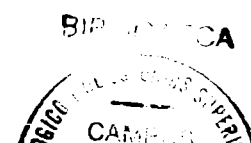


Figura 1.4 Proceso de recubrimiento por rociado de plasma (Plasma Spraying).

Las antorchas (torches) están principalmente compuestas de cátodos tipo aguja, y la inyección del polvo se realiza con un gas portador, el cual se pone dentro de la boquilla (abajo del arc root) o

114388



afuera. Las condiciones de operación típicas usan niveles de poder entre 40 y 60-Kw, diámetros de la boquilla de 6-8 mm, y el polvo alimenta proporciones de 3-5 kg/h.

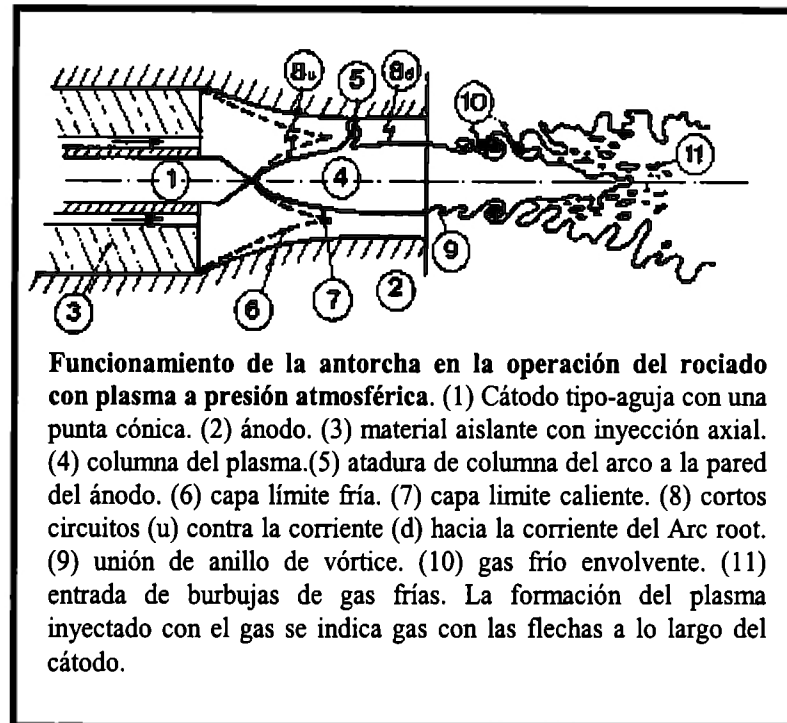


Figura 1.5 Funcionamiento de la antorcha en la operación de rociado con plasma a presión atmosférica.[5]

La eficacia de la deposición resultante normalmente está entre 50 y 60% pero varía dependiendo del material rociado. El esfuerzo principal se ha concentrado en la automatización del proceso, la inyección del polvo y el control de las temperaturas el sustrato, y las características del recubrimiento durante el rociado. Sin embargo, hace pocos años, se han proporcionado nuevas variables para el control del proceso, los cuales no están considerados en los parámetros de trabajo clásicos (movimientos relativos, las proporciones de flujo de gas, voltaje del arco, corriente del arco), especialmente el control directo de la temperatura de la partícula, velocidad y distribución de la trayectoria, [8], [9] lo cual debe mejorar la calidad de la capa y la confiabilidad del proceso.

En general, se ha determinado que la calidad del recubrimiento está influenciada por más de 50 interrelaciones de todos los parámetros de operación, lo que dificulta encontrar las condiciones óptimas de operación. Por tanto, esta complejidad obliga a realizar estudios cuidadosamente diseñados, basados en técnicas especiales de diseño de experimentos, para minimizar el trabajo experimental. Así por ejemplo, desde un punto de vista práctico, la calidad del recubrimiento se califica principalmente en función de: porosidad del recubrimiento, adhesión al sustrato, espesor de las capas y aspereza.

Por tanto, deberá ser preocupación fundamental el lograr mejorar las propiedades citadas anteriormente, para lo cual es importante conocer cuáles son aquellos parámetros de operación que afectan estas propiedades. Por ejemplo, se ha observado que la porosidad es función de la

temperatura del plasma, el tiempo de vuelo de las partículas, la velocidad de impacto contra el sustrato, enfriamiento en el sustrato y otras, por lo que estos parámetros deberán ser cuidados o conocidos con profundidad.

Por este motivo, existen grandes esfuerzos a escala mundial para conocer todos aquellos fenómenos que regulan la interacción de las partículas con el plasma, habiéndose propuesto diversos modelos teóricos que pretenden explicar tal situación.

Así, para caracterizar completamente el campo de flujo de las partículas, es necesario medir el tamaño de la partícula, su velocidad (longitudinal y radial), su temperatura y su densidad. Pero por otra parte, el campo de velocidades de las partículas en el plasma está regido por un régimen turbulento, lo que complica los cálculos. Esto se aprecia por las variaciones que existen en el tamaño, forma y temperatura de las flamas como se muestra en la *figura 1.5*.

Con este fin, en varios laboratorios y universidades del mundo, se han propuesto modelos teóricos, experimentales y numéricos que pretenden resolver estos fenómenos. Estos modelos incorporan ecuaciones de momentum, energía, de efectos electromagnéticos, de continuidad y de turbulencia. Ya existen soluciones para situaciones físicas simples, pero el caso general que considera fenómenos de difusión, turbulencia, transferencia de calor y momentum no han sido resueltos satisfactoriamente, y sigue siendo un campo muy activo de investigación.

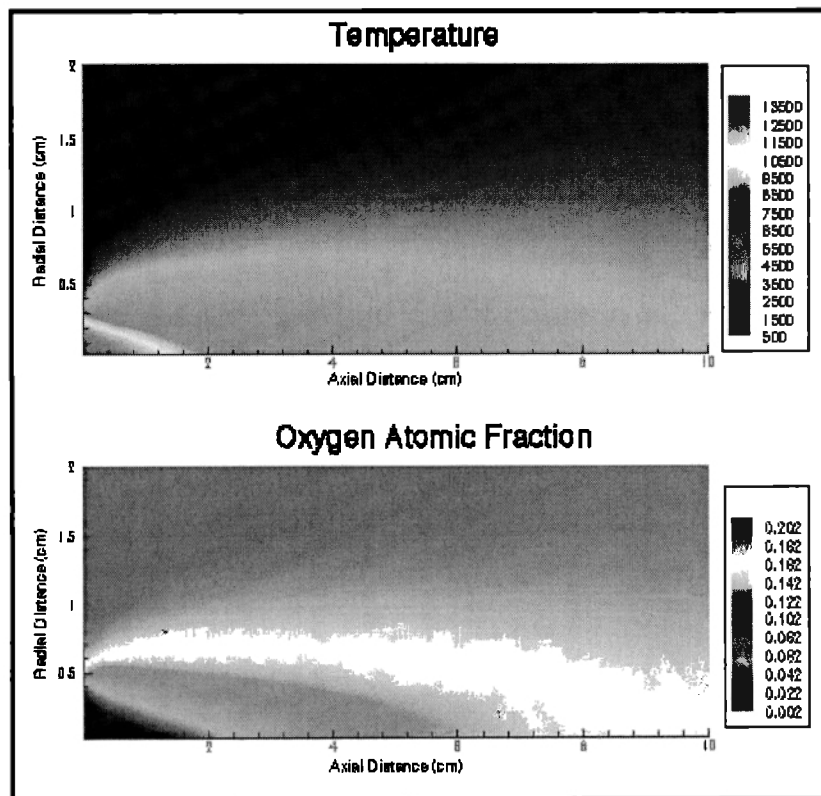


Figura 1.6 Distribución de temperaturas del plasma en un chorro de plasma de nitrógeno-hidrógeno.

1.2 PROBLEMÁTICA

Al poder controlar las variables del plasma (presión, velocidad y temperatura), es posible utilizar un mayor número de sustancias como recubrimiento, lo que permite una amplia variedad de recubrimientos. Por ejemplo, se pueden utilizar partículas de plástico cuando se trabaja a bajas temperaturas, o bien utilizar materiales cerámicos o metales de alto punto de fusión, cuando la temperatura del plasma es muy alta.

Es por ello, que para el presente trabajo se debe considerar el estudio de aquellas propiedades termomecánicas, los cuales dependen de ciertas características:

- El estado de fundición, velocidad, tamaño y densidad de las partículas que impactan sobre el sustrato. Estos parámetros se controlan por la cantidad de calor y la velocidad adquirida que se transfiere entre el chorro de plasma y las partículas y por otro lado la morfología de las partículas, tamaño y distribuciones de velocidad de la inyección.
- Las reacciones químicas de las partículas con la atmósfera circundante, sobre todo la entrada de aire, así como su posible descomposición o estallido en su penetración en el chorro de plasma.

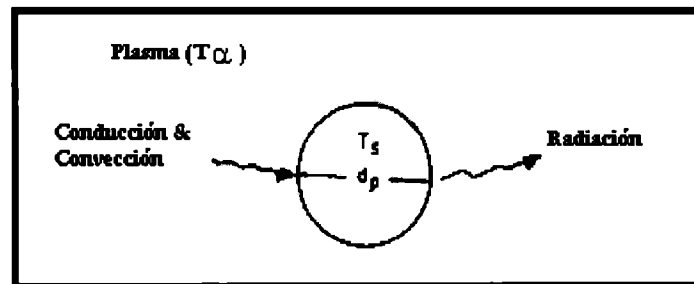


Figura 1.7 Mecanismo de transferencia básico involucrado en el calentamiento del plasma y fundición de partículas en vuelo. [12]

El calor y la transferencia de momentum entre el chorro de plasma y las partículas, entre otros parámetros, dependen de la temperatura y la distribución de la velocidad de los chorros de plasma, cantidades que, para el modelado y predicción, es obligatorio determinar. Sin embargo, muchos de estos problemas todavía están pendientes.

Como se citó anteriormente, el número de densidad, diámetro, velocidad y temperatura de las partículas en vuelo, son factores relevantes para tener un óptimo recubrimiento. No es bien conocido estudios e investigaciones que muestren resultados factibles, lo cual hace necesario el estudio de estos parámetros. [10]

1.3 JUSTIFICACIÓN

Varios procesos con plasma involucran tratamientos de materiales en el flujo del plasma. La aceleración y calentamiento de partículas dependerán de sus trayectorias que a su vez dependerán de las condiciones de la inyección. También, es de principal interés saber la ubicación del proceso de inyección, el estado de la turbulencia del flujo en el punto de acción, y el momentum relativo de la partícula con respecto al flujo del plasma.

El tamaño de la partícula y distribuciones de velocidad junto con la colisión en la pared, obtienen como resultado varias trayectorias de la partícula en el punto de inyección. Por consiguiente, las partículas experimentarán varios tiempos de alojamiento y evoluciones de tiempo-temperatura en el flujo.

El calor y la transferencia de masa entre el flujo y las partículas a lo largo de sus trayectorias, están indicados por las propiedades de los gases en la capa límite circundante de cada partícula. Esta capa límite es más compleja que en el caso de un gas ordinario, debido a la presencia de partículas elementales cargadas y los gradientes de temperatura que prevalecen entre el volumen de gas y la pared de la partícula.

La capa de gas que rodea una partícula puede exhibir un desvío brusco de la química y el equilibrio cinético. Es más, el efecto de discontinuidad puede modificar la transferencia entre el plasma y las partículas, cuando las últimas son pequeñas. Las trayectorias de las partículas inyectadas en un flujo de plasma bajo condiciones de carga diluidas, son generalmente calculadas en un marco lagrangeano. El cómputo es basado en un equilibrio de fuerza en partículas sencillas. Este equilibrio tiene en cuenta la fuerza de arrastre y la gravedad y posiblemente otras fuerzas.

La historia de temperaturas de las partículas es calculada por la solución de ecuaciones de transferencia de calor. En la mayoría de los trabajos reportados en la literatura, comentan que el método de capacidad de concentración de calor se usa, asumiendo temperaturas uniformes a lo largo de la partícula. Tal análisis puede esperarse arrojando estimaciones razonables cuando el número de Biot está por debajo de 0.1 (expresado como el radio de conductividad térmica del plasma para la conductividad térmica del material).

La concentración y la transferencia de calor de la partícula, son calculadas a partir de correlaciones propuestas para transferencia de partículas del gas (ejemplo, la ecuación de Ranz-Marshall para el coeficiente de transferencia de calor). Sin embargo, como el estado de la capa límite aún no se ha estudiado completamente, existen grandes diferencias en las correlaciones propuestas para las condiciones del plasma, sobre todo cuando se usan mezclas gaseosas o gases diatómicos.

También se tiene que el problema de la deposición y solidificación del recubrimiento ha recibido muy poca atención y el proceso no ha sido comprendido lo suficiente. Esta área sigue siendo terreno casi inexplorado y es recomendable iniciar estudios en este campo. Se sabe que la microestructura lograda en los depósitos, su espesor y su porosidad están relacionados con la

rapidez de la transferencia de calor ultrarrápida, por lo que se recomienda extensamente su estudio y experimentación.

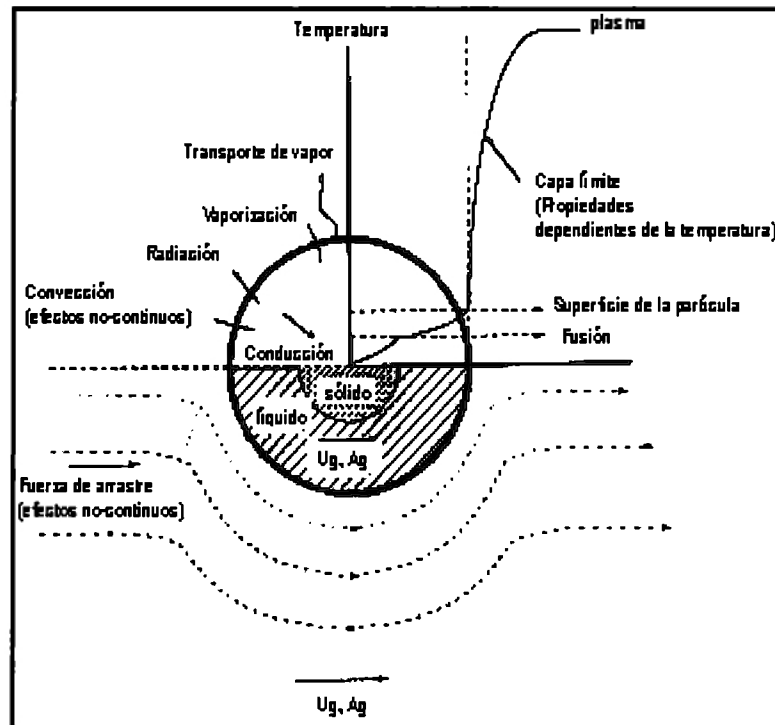


Figura 1.8 Representación esquemática de los fenómenos de transferencia de momentum, calor y masa involucrados en la partícula-plasma.[1]

Es por ello que para el presente estudio se puede expresar que ya existen soluciones para situaciones físicas simples, pero el caso general que considera fenómenos de difusión, turbulencia, transferencia de calor y momentum no han sido resueltos satisfactoriamente, y sigue siendo un campo muy activo de investigación, el cual se tiene como iniciativa para el actual proyecto, con el fin de arrojar resultados experimentales siguiendo una metodología estructurada para el cumplimiento del estudio.

1.4 OBJETIVOS

Reconociendo la importancia de los parámetros necesarios en las partículas para el recubrimiento por chorro con plasma, se han adoptado los siguientes objetivos para el desarrollo del siguiente trabajo:

- Desarrollar un modelo teórico que describa la transferencia de calor y momentum del plasma hacia las partículas inyectadas.
- Simular numéricamente con el paquete FLUENT V. 5.0, la dinámica de partículas antes, durante y después de la transferencia de calor y momentum.

CAPÍTULO 2

2 FUNDAMENTOS DEL PLASMA

2.1 PLASMAS EN LA NATURALEZA

Se ha dicho a menudo, que el 99% de la materia en el universo está en el estado del plasma; es decir, en la forma de un gas electrizado con los átomos disgregados en los iones positivos y electrones negativos. Esta estimación no puede ser muy exacta, pero es ciertamente razonable, en vista del hecho que los interiores estelares y atmósferas, nebulosas gaseosas, y la mayoría del hidrógeno interestelar son plasmas. En nuestra vida cotidiana podemos observar plasmas, por ejemplo, en un relámpago, la luz suave de la Aurora Boreal, el gas transportándose dentro de un tubo fluorescente o señal de neón, y la cantidad ligera de ionización en una descarga de un cohete.

2.2 CONCEPTO DE PLASMA

Un plasma es un gas “cuasineutral”, cargado y con partículas neutras, las cuales muestran un “comportamiento colectivo”.

Para definir “cuasineutral”, debemos referirnos al concepto de escudo de Debye que se expondrá más adelante y el “comportamiento colectivo” que se refiere a lo siguiente: Considerando las

fuerzas que actúan en una molécula de aire ordinario, seguido de la molécula que es neutra, no existe ninguna fuerza electromagnética en ella, y la fuerza de gravedad es despreciable.

Las moléculas se mueven tranquilamente hasta que chocan con otra molécula, y estas colisiones son las que controlan el movimiento de las partículas.

Cuando las cargas se mueven por todas partes, pueden generar concentraciones locales de cargas positivas o negativas, que da lugar a campos electromagnéticos. El movimiento de las cargas también genera corrientes y campos magnéticos. Estos campos afectan al movimiento de otras partículas cargadas que se encuentran aisladas.

Considérese el efecto sobre dos regiones cargadas ligeramente de plasma, separadas por una distancia r (Figura 2.1). La fuerza de Coulomb entre A y B disminuye de acuerdo a $1/r^2$, donde $l = \Delta r + r$. Sin embargo, para un ángulo sólido dado (es decir, $\Delta r/r = \text{constante}$), el volumen de plasma en B que puede afectar A aumenta tanto como r^3 . Por consiguiente, los elementos del plasma ejercen una fuerza entre sí, incluso hacia adelante a distancias mayores.

Es esta fuerza de Coulomb y los rangos prolongados, los que dan lugar a un gran conjunto de movimientos posibles del plasma y con llevan a enriquecer un campo de estudio conocido como "física de plasma". De hecho, los resultados más interesantes involucran a las llamadas "colisiones" de los plasmas, donde el gran rango de fuerzas electromagnéticas es más grande debido a las colisiones locales ordinarias las cuales pueden ser despreciables.

A través del "comportamiento colectivo" se quiere expresar movimientos que no sólo dependen de condiciones locales, sino también del estado del plasma en regiones remotas.

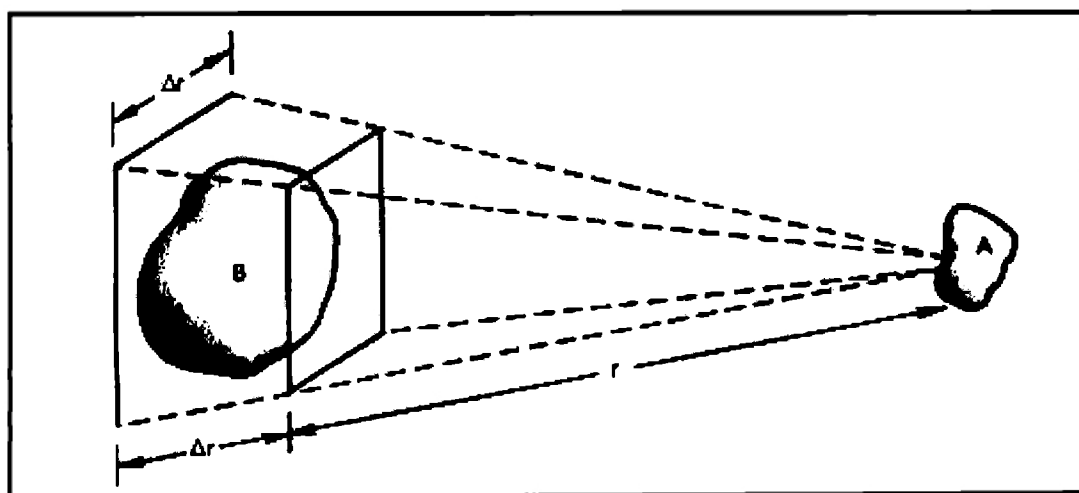


Figura 2.1 Ilustración del gran rango de las fuerzas electrostáticas en el plasma.[11]

Un plasma entonces, consiste en una mezcla de electrones, iones y especies neutras, las cuales son producidas por descargas eléctricas. Un plasma puede ser clasificado en las siguientes dos categorías:

Plasmas “térnicos” o “en equilibrio”, los cuales son caracterizados por su densidad de alta-energía y la igualdad entre las temperaturas de las partículas T_h y la de los electrones T_e .

El segundo tipo de plasmas, es conocido como plasma “frío” o “no-equilibrado”. Es caracterizado por su baja densidad de energía comparada con los plasmas termales y por la gran diferencia entre las temperaturas del electrón y la de las partículas ($T_e \gg T_h$). Este tipo de plasma, se produce por varios tipos de descargas de luz o en descargas a baja presión.

Cada una de estas dos categorías de plasmas tienen propiedades particulares y da lugar a condiciones diferentes del proceso. El proceso del plasma térmico, es caracterizado por la partícula, la densidad (del orden de $10^{23} - 10^{21} \text{ m}^{-3}$) y la energía baja del electrón que se encuentra normalmente en el rango de 1 a 2 eV (1 eV corresponde a una temperatura de partícula aproximadamente de $8000 \text{ }^{\circ}\text{K}$). Por el contrario, los plasmas no-equilibrados son caracterizados por densidades bajas del electrón o de las partículas (menos de 10^{20} m^{-3}) y por temperaturas altas del electrón (del orden de varios eV). [11]

2.3 DISPOSITIVOS GENERADORES DE PLASMA

Entre los dispositivos comúnmente usados en la generación de plasma se encuentran: las antorchas de plasma dc (corriente directa), antorchas de plasma acopladas inductivamente (RF, Radio Frecuencias), y combinaciones híbridas de ellas. Cada uno involucra un mecanismo de acoplamiento de energía básico y las características principales del flujo y campos de temperaturas en el plasma. Se debe hacer énfasis en los diferentes dispositivos generadores de plasma, ya que estos dan lugar a condiciones del proceso substancialmente diferentes. Lo que sucede en una aplicación de tecnología de plasma en el proceso del material, depende de la relación entre los requerimientos del proceso y las características del dispositivo generador de plasma. [12]

2.3.1 ANTORCHAS DE PLASMA DE CORRIENTE DIRECTA

Las antorchas de plasma DC producen un chorro de plasma a alta temperatura, en la cual el material a ser procesado puede inyectarse mediante vaporización y una fundición en vuelo. Dos tipos principales de antorchas de plasma de dc son usados dependiendo de la configuración y el tipo de material del electrodo.

2.3.2 ARCOS DE TRANSMISIÓN DE CORRIENTE DIRECTA

Los arcos de transmisión se caracterizan por una separación relativamente grande entre el cátodo y ánodo, que puede ir desde unos centímetros a casi 1 m en hornos industriales de alta potencia. Esto permite que aumente del voltaje de operación y por consiguiente la potencia del plasma para el arco presente, sea la misma. Este último, es un parámetro importante que tiene una influencia fuerte en la eficiencia de la energía del arco y la vida del electrodo.

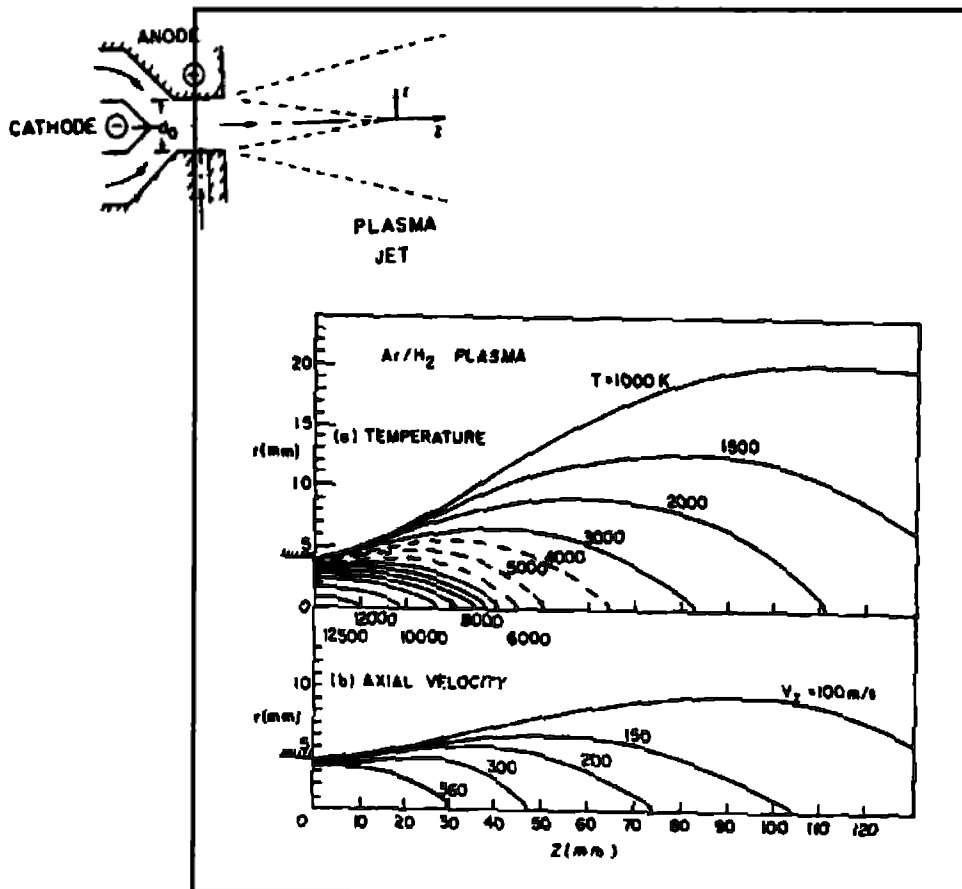


Figura 2.2 . Representación esquemática de una antorcha de plasma DC con un cátodo y la asociación de los campos de velocidad y temperatura para atmósfera de inyección de plasma de Ar/H₂. Potencia del plasma = 29 Kw. Proporción de flujo de gas = 75 L/min (Ar) y 15 L/min (H₂), $d_o = 8$ mm. [13]

2.3.3 DESCARGAS ACOPLADAS POR INDUCCIÓN DE RADIO FRECUENCIAS (RF)

En antorchas de plasma de RF [15], la energía que acopla al plasma es consumida a través del campo electromagnético de la bobina inducida. El gas del plasma no entra en contacto con los electrodos, eliminando así posibles fuentes de contaminación y permitiendo el funcionamiento de tales antorchas del plasma con una amplia gama de gases, incluyendo gases inertes, reducción, oxidación, y otras atmósferas corrosivas. El argón puro o su mezcla con otros gases, es aún una opción usual para el gas del plasma, debido a su facilidad de ionización. La frecuencia de la excitación está típicamente entre 200 kHz y 40 MHz. Los niveles de potencia están en el orden de 30-50 KW, en unidades industriales a gran escala han tenido pruebas de niveles de gran potencia, arriba de 1 MW. [16]

2.3.4 ANTORCHA DE PLASMA HÍBRIDAS

Las antorchas de plasma híbridas han sido desarrolladas por la superposición de más de un dispositivo generador de plasma, como en la combinación de antorchas de plasma DC y las RF

desarrolladas por Yoshida y Akashi [17] y la combinación de dos antorchas de plasma RF, las cuales operan a dos frecuencias diferentes [18]. Tales sistemas híbridos son más flexibles y ofrecen varias ventajas en el procesamiento del material.

2.4 CONCEPTO DE TEMPERATURA

Un gas en equilibrio térmico tiene partículas que se mueven a diferentes velocidades, y la distribución más probable de estas velocidades es conocida como la distribución Maxwelliana. Por simplicidad, se considera un gas, en el que las partículas sólo pueden moverse en una dimensión. (Esto no es completamente trivial; un campo magnético fuerte, por ejemplo, puede reprimir electrones para que sólo se muevan en las líneas del campo). La distribución Maxwelliana en una dimensión está dada por:

$$f(u) = A \exp\left(-\frac{1}{2} mu^2 / kT\right) \quad (2.1)$$

donde fdu es el número de partículas por m^3 que se mueve a una velocidad entre u y $u+du$, $\frac{1}{2}mu^2$ es la energía cinética, y k es la constante de Boltzmann,

$$k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{K}$$

La densidad n , o número de partículas por m^3 , está dada por (Figura 2.3):

$$n = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du \quad (2.2)$$

la constante A está relacionada con la densidad n por:

$$A = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \quad (2.3)$$

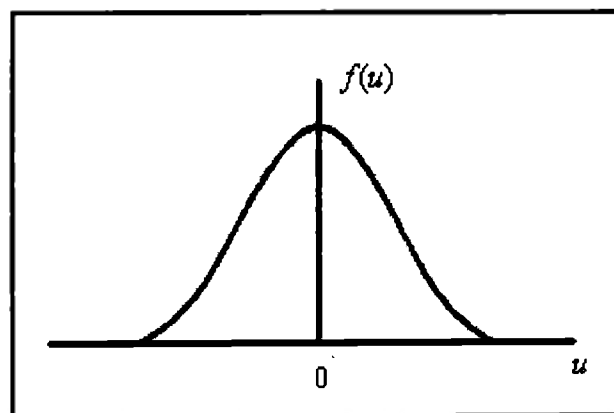


Figura 2.3 Distribución de Velocidad Maxwelliana.

El ancho de la distribución está caracterizado por la temperatura. Para ver el significado exacto de T , se calcula la media de la energía cinética de las partículas en la siguiente distribución:

$$E_{av} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} mu^2 f(u) du}{\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du} \quad (2.4)$$

definiendo:

$$v_{th} = (2kT/m)^{1/2} \quad y \quad y = u/v_{th} \quad (2.5)$$

la ecuación (2.1), puede escribirse como:

$$f(u) = A \exp(-u^2/v_{th}^2)$$

y la ecuación (2.4) como:

$$E_{av} = \frac{\frac{1}{2} m A v_{th}^3 \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(-y^2)] y^2 dy}{A v_{th} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy}$$

La integral en el numerador es integrable por partes;

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot [\exp(-y^2)] y dy &= \left[-\frac{1}{2} [\exp(-y^2)] y \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{2} \exp(-y^2) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy \end{aligned}$$

cancelando las integrales, tenemos:

$$E_{av} = \frac{\frac{1}{2} m A v_{th}^3 \frac{1}{2}}{A v_{th}} = \frac{1}{4} m v_{th}^2 = \frac{1}{2} kT \quad (2.6)$$

Así, la media de la energía cinética es $\frac{1}{2}kT$.

Entonces, extendiendo este resultado a tres dimensiones, la distribución de Maxwell es:

$$f(u, v, w) = A_3 \exp\left[-\frac{1}{2} m(u^2 + v^2 + w^2) / KT\right] \quad (2.7)$$

donde,

$$A_3 = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \quad (2.8)$$

La media de la energía cinética es:

$$E_{av} = \frac{\iiint_{-\infty}^{\infty} A \frac{1}{32} m(u^2 + v^2 + w^2) \exp\left[-\frac{1}{2} m(u^2 + v^2 + w^2) / Kt\right] dudvdw}{\iiint_{-\infty}^{\infty} A_3 \exp\left[-\frac{1}{2} m(u^2 + v^2 + w^2) / kt\right] dudvdw}$$

Se puede observar que la expresión es simétrica en u , v , y w , puesto que la distribución Maxwelliana es isotrópica. Por consiguiente, cada uno de los tres términos en el numerador es el mismo que los otros. Sólo se necesita evaluar el primer término y multiplicar por tres:

$$E_{av} = \frac{3A_3 \int \frac{1}{2} mu^2 \exp\left(-\frac{1}{2} mu^2 / kT\right) du \iint \exp\left(-\frac{1}{2} m(v^2 + w^2) / kT\right) dvdw}{A_3 \int \exp\left(-\frac{1}{2} mu^2 / kT\right) du \iint \exp\left(-\frac{1}{2} m(v^2 + w^2) / kT\right) dvdw}$$

Usando el resultado anterior, se tiene:

$$E_{av} = \frac{3}{2} kT \quad (2.9)$$

El resultado general es que E_{av} es igual a $1/2 kT$ por cada grado de libertad.

Puesto que T y E_{av} se relacionan estrechamente, es de costumbre en el campo de los plasmas físicos, proporcionar las temperaturas en unidades de energía. En este caso, E_{av} es la energía correspondiente a kT que es usada para expresar la temperatura. Para $kT = 1eV = 1.6 \times 10^{-19} J$, tenemos:

$$T = \frac{1.6 \times 10^{-19}}{1.38 \times 10^{-23}} = 11,600 K$$

Así, el factor de conversión es:

$$1 eV = 11,600 K \quad (2.10)$$

Para un plasma de 2-eV se puede decir que $kT = 2\text{ eV}$, o $E_{av} = 3\text{ eV}$ en tres dimensiones. Es interesante notar, que un plasma puede tener varias temperaturas al mismo tiempo, pues pasa a menudo que los iones y los electrones tienen distribución Maxwelliana separadas con temperaturas diferentes T_i y T_e .

2.5 ESCUDO DE DEBYE

Una característica fundamental del comportamiento de un plasma es su habilidad de escudar o proteger externamente potenciales eléctricos que se aplican a éste. Suponiendo que se intenta poner un campo eléctrico dentro de un plasma, insertando dos bolas cargadas, conectadas a su vez por una batería (Figura 2.4). Las bolas atraen partículas de carga opuesta, y casi inmediatamente una nube de iones rodea la bola negativa y una nube de electrones rodearía la bola positiva.

Si el plasma está frío y no hay ningún movimiento térmico, existirán muchas cargas tanto en la nube como en la bola; el escudo sería perfecto, y ningún campo eléctrico estaría presente en el cuerpo fuera de las nubes del plasma. Por otro lado, si la temperatura es finita, esas partículas que están en el borde de la nube donde el campo eléctrico es débil, tendrán suficiente energía térmica para escapar del pozo potencial electrostático. El "borde" de la nube entonces estaría en el radio donde la energía potencial es aproximadamente igual a la energía térmica kT de las partículas, y el escudo no estaría completo. Los potenciales del orden de kT/e pueden fluir en el plasma y causan campos eléctricos finitos.

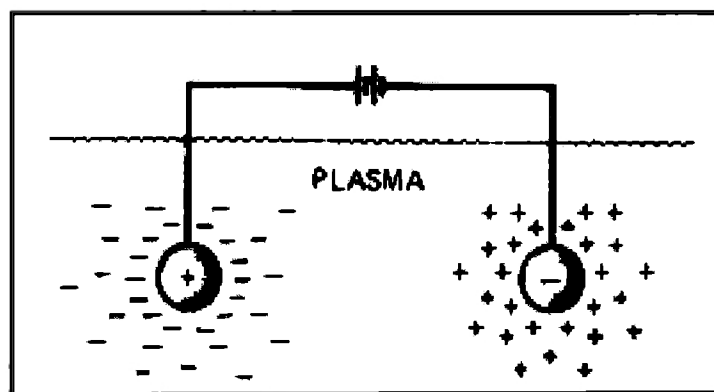


Figura 2.4 Escudo de Debye. [19]

Se calcula el espesor aproximado de la nube cargada o saturada. Se puede imaginar que el potencial ϕ sobre el plano $x = 0$ se mantiene en un valor ϕ_0 para un conjunto de datos (rejilla) absolutamente transparentes (Figura 2.5) se necesita calcular $\phi(x)$. Para simplicidad, se asume que la proporción de masa del ión-electrón M/m es infinita para que los iones no se muevan, pero formen un fondo uniforme de carga positiva.

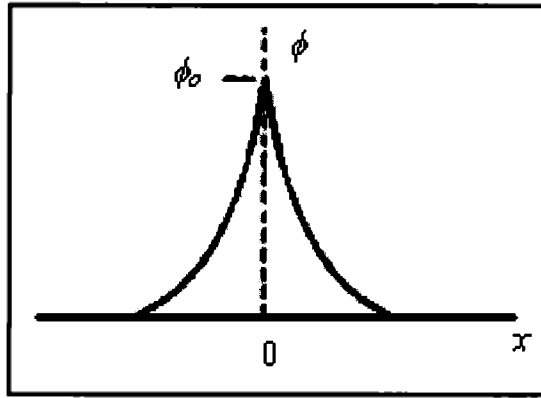


Figura 2.5 Conjunto de datos (rejilla o cuadrícula) de una distribución potencial en un plasma. [19]

La ecuación de Poisson en una dimensión es:

$$\epsilon_0 \nabla^2 \phi = \epsilon_0 \frac{d^2 \phi}{dx^2} = -e(n_i - n_e) \quad (Z = 1) \quad (2.11)$$

Si la densidad es n_α , tenemos:

$$n_i = n_\infty$$

En presencia de una energía potencial $q\phi$, la función de distribución del electrón es

$$f(u) = A \exp \left[- \left(\frac{1}{2} mu^2 + q\phi \right) / kT_e \right]$$

Esto significa que existen menos partículas en los lugares donde la energía potencial es grande, puesto que no todas las partículas tienen suficiente energía para llegar allí. Integrando $f(u)$ sobre u , suponiendo que $q = -e$ y notando que $n_e(\phi \rightarrow 0) = \alpha$, tenemos:

$$n_e = n_\infty \exp(e\phi / kT_e)$$

Sustituyendo por n_i y n_e en la (2.11), se obtiene:

$$\epsilon_0 \frac{d^2 \phi}{dx^2} = en_\infty \left\{ \left[\exp \left(\frac{e\phi}{kT_e} \right) \right] - 1 \right\}$$

En la región donde $|e\phi/kT_e| \ll 1$, se puede expandir el exponencial en una serie de Taylor:

$$\epsilon_0 \frac{d^2 \phi}{dx^2} = en_\infty \left[\frac{e\phi}{kT_e} + \frac{1}{2} \left(\frac{e\phi}{kT_e} \right)^2 + \dots \right] \quad (2.12)$$

Ninguna simplificación es posible para la región cerca de la rejilla, donde $|e\phi/kT_e|$ puede ser grande. Afortunadamente, esta región no contribuye mucho al espesor de la nube (llamada funda o envoltura), porque las caídas potenciales allí, son muy rápidas. Guardando sólo los términos lineales en la ecuación (2.12), se obtiene:

$$\epsilon_0 \frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{e^2 n_\infty}{kT_e} \phi \quad (2.13)$$

definiendo:

$$\lambda_D = \left(\frac{e_0 kT_e}{ne^2} \right)^{1/2} \quad (2.14)$$

donde n resiste para n_∞ , por consiguiente se puede escribir la solución de la ecuación como:

$$\phi = \phi_0 \exp(-|x|/\lambda_D) \quad (2.15)$$

La cantidad λ_D , es llamada la longitud de Debye, es una medida de la distancia cubierta o también llamada el espesor de la funda.

Se puede observar que cuando la densidad aumenta, λ_D disminuye, como es de esperarse, ya que cada capa de plasma contiene más electrones. Además, λ_D aumenta con incrementos de kT_e . Sin agitación térmica, la nube cargada se colapsaría en una capa infinitamente delgada. Finalmente, es la temperatura del electrón la que se usa en la definición de λ_D porque los electrones, siendo más móviles que los iones, generalmente hacen el escudo por movimientos para crear un sobrante o déficit de carga negativa. Sólo en ciertas situaciones especiales no es verdadero.

Las siguientes son las formas más usadas de la (2.14):

$$\begin{aligned} \lambda_D &= 69(T/n)^{1/2} \text{ m}, & T \text{ en } ^\circ K \\ \lambda_D &= 7430(kT/n)^{1/2} \text{ m}, & kT \text{ en } eV \end{aligned} \quad (2.16)$$

Analizando lo anterior, se puede definir “cuasineutra”. Si las dimensiones L de un sistema son más grande que λ_D , entonces, siempre que las concentraciones locales incrementen cargas o potenciales externos son introducidos en el sistema, éstos se protegen afuera en una distancia corta comparada con L , dejando el volumen del plasma libre de potenciales o campos eléctricos grandes. Fuera de la envoltura, sobre la pared o en un obstáculo, $\nabla^2 \phi$ es muy pequeño, y n_i es igual a n_e , típicamente, para mejorar una parte en 10^6 . Esto, toma sólo un desequilibrio de carga pequeño para dar lugar a los potenciales del orden de kT/e . El plasma es “cuasineutral”; es decir, lo suficientemente neutral para que alguno pueda tomar $n_i \approx n_e \approx n$, donde n es una densidad común llamada la densidad del plasma. [19]

2.6 PARÁMETROS DEL PLASMA

El cuadro del escudo de Debye que se analizó, sólo es válido si hay bastantes partículas en la nube cargada. Pero, si existen tan sólo una o dos partículas en la región protegida, el escudo de Debye no sería un concepto válido estadísticamente. Usando la ecuación (2.16), se puede calcular el número N_D de partículas en una “esfera Debye”:

$$N_D = n \frac{4}{3} \pi \lambda_D^3 = 1.38 \times 10^6 T^{3/2} / n^{1/2} \quad (\text{T en K}) \quad (2.17)$$

adicionalmente, para $\lambda_D \ll L$, el “comportamiento colectivo” requiere que:

$$N_D \gg \gg 1 \quad (2.18)$$

2.7 MÉTODO PARA LA MEDICIÓN DE LA VELOCIDAD DE PARTÍCULAS

El velocímetro láser se ha usado para medir velocidades de partículas sólidas del plasma térmico. En la mayoría de los gases, generalmente se supone que la velocidad de las partículas delgadas ($< 5 \mu\text{m}$) asemeje la velocidad del gas, pero éste no puede ser el caso en el flujo de plasma, donde el efecto de Knudsen se refuerza. La velocidad del chorro de plasma del argón, ha sido determinada observando los cambios Doppler de líneas de fluorescencia, pero los valores obtenidos parecen ser sobrestimados. [20], [21].

A su vez, las sondas de Pitot se han usado y han determinado con éxito una velocidad promedio en distancias cercanas a la terminación de la boquilla. [22]

2.8 PROBLEMAS DE MEDICIÓN DE LAS PARTÍCULAS EN VUELO

Los problemas de esta medición son complejos, entre ellos tenemos:

- Las altas temperaturas (9000 a 15000 K en el centro del chorro de plasma) resultan muy intensas en la emisión del plasma, lo cual hace difícil detectar el rayo difundido o el rayo emitido a tan altas temperaturas para las partículas. Lo anterior, produce una limitación del tamaño para detectar el rayo difundido por las partículas en el centro del plasma, el cual depende de la potencia del láser usado. [23]
- Las altas velocidades (mas de 400 m/s) y los tiempos de estancia de las partículas, son muy cortas en volúmenes pequeños, lo cual hace difícil observar los picos del gradiente de velocidad. [23]

- Las partículas tienen diferentes trayectorias debido a su tamaño y por las distribuciones de la velocidad en la inyección, por consiguiente, las partículas alcanzan diferentes tamaños, velocidades y temperaturas en la superficie y en el mismo volumen. [24]

2.9 DINÁMICA DE LAS PARTÍCULAS

2.9.1 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

El vector de posición $r(t)$ describe la historia de tiempos de los movimientos de una partícula en un punto. El vector velocidad $v(t)$ es definido por:

$$v(t) = \frac{dr(t)}{dt} = \dot{r}(t)$$

la ecuación no relativística del movimiento de una partícula de masa m y carga q en un campo magnético y eléctrico es:

$$m \dot{v}(t) = q \left(E + \frac{v(t) \times B}{c} \right)$$

la anterior ecuación de movimiento puede ser resuelta para diferentes condiciones y configuraciones de campos.

2.10 DIMENSIONES CARACTERÍSTICAS DEL PLASMA

Existe una gran variedad de plasmas como se expone en la *figura 2.6*, en la que se despliegan varios plasmas en términos de la densidad del electrón n_e , la proporción de ionización y la tasa entre la densidad del electrón y la densidad del gas neutral, n_a . La densidad del electrón, es la característica primaria de los parámetros del plasma. Esta varía sobre muchas disposiciones de magnitud y está directamente relacionada con la densidad de la potencia aplicada. También es de considerar la temperatura del electrón, T_e , que depende ligeramente de la presión.

En la *figura 2.6*, se observan los plasmas con y sin campos magnéticos, con colisiones o confinamiento magnético respectivamente. Al primer grupo, pertenecen por ejemplo las descargas acopladas RF (gd = descargas resplandecientes) usadas para corrosión en superficies químicas y deposiciones, la descarga de microonda (μd), plasmas de ondas de superficie (s), los anomalous brillantes (ag), el plasma inductivamente acoplado atmosférico (icp), el arco de vacío (va), y los plasmas termales (t). Se puede observar que estos (no magnetizados) plasmas, se agrupan a lo largo de la línea diagonal.

El segundo grupo de la *figura 2.6*, corresponde a los plasmas con densidades del electrón altas a densidades de gas más bajas. La mayoría son plasmas magnetizados: resonancia de ciclotrón electrón (*ecr*), RF de fuentes de plasma acopladas inductivamente (*rfi*), llamados también plasma transversalmente acoplados (*tcp*), descargas helicoidales (*h*), y el arco del cátodo hueco (*hca*). Estos plasmas pueden mantenerse a presiones más bajas, ya que la difusión está limitada por un confinamiento magnético, en lugar de colisiones.

En la *figura 2.6*, también puede hacerse distinción de los plasmas de proporción de ionización baja ($n_e/n_a < 10^{-2}$) y los plasmas de proporción de ionización alta ($n_e/n_a > 10^{-2}$), que se encuentran en la línea horizontal. Los primeros plasmas, son dominados por colisiones con partículas neutras, los segundos, son por colisiones de Coulomb controladas. En otras palabras, en la primera clase prevalecen las colisiones neutras del electrón, considerando que en el segundo grupo las colisiones del ión de Coulomb determinan el transporte del electrón, así como su caracterización, que es dada por las distribuciones de energía de Maxwell, en virtud de la rapidez de las colisiones maxwellianas de Coulomb.

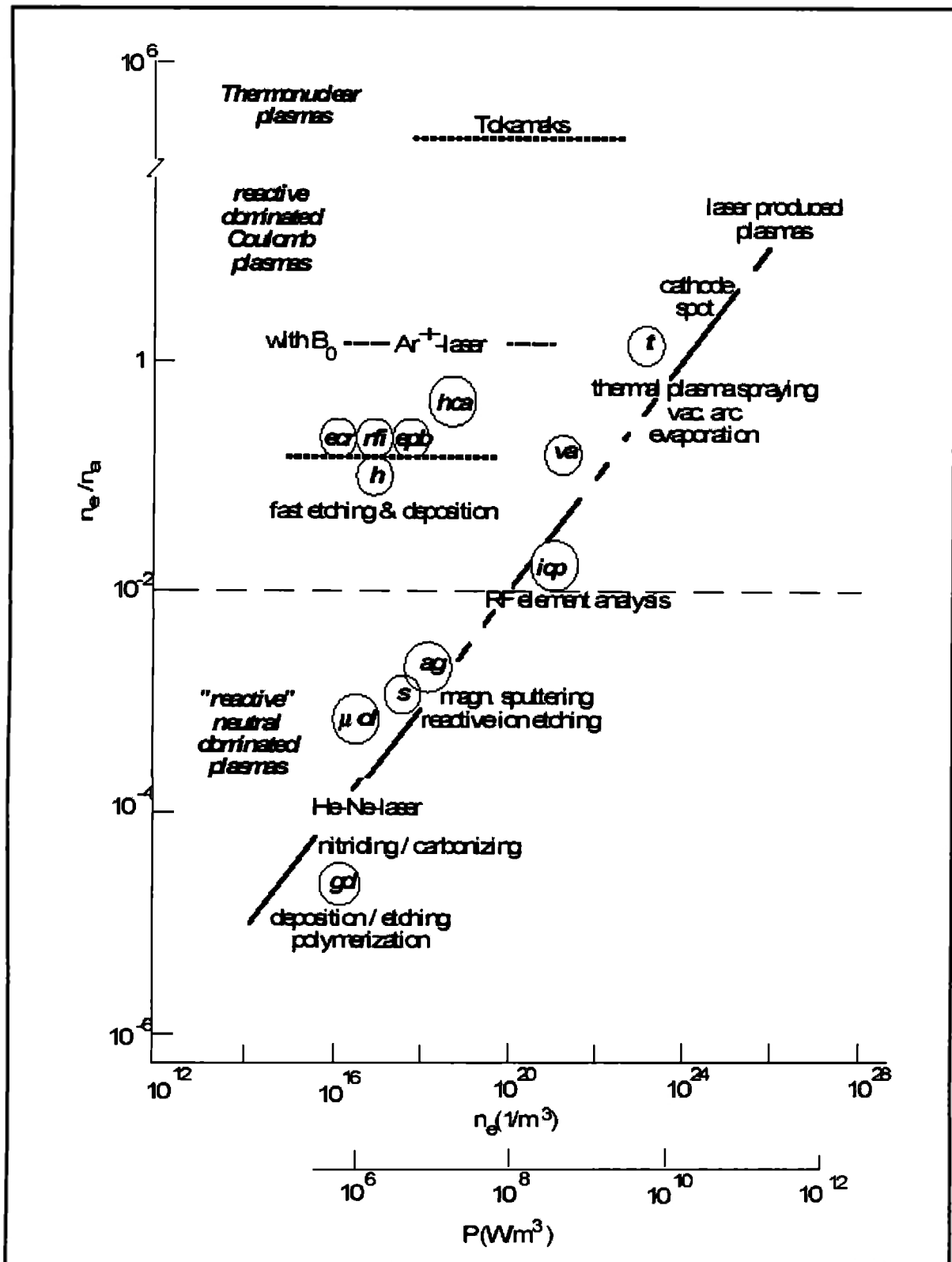


Figura 2.6 Diagrama de plasmas en un n_e (m^{-3}) y n_e/n_a . [25]

2.10.1 COLISIONES ELÁSTICAS

Las colisiones elásticas son importantes para las propiedades de transporte de plasmas, entre ellas se encuentran: la difusión, conductividades eléctricas y de calor, transferencia de energía, viscosidad y desplazamientos. Dos tipos de colisiones elásticas predominan: Las colisiones de Coulomb entre las partículas cargadas y colisiones de tipo bipolar inducido, y entre partículas cargadas y partículas neutras. Las interacciones entre las partículas, son caracterizadas por la energía potencial $W(r)$, que describe el cambio de energía potencial en función de la distancia, r , entre las dos colisiones asociadas. La energía potencial puede escribirse, como una ley de potencia $W(r)=C/r^n$ en donde, la potencia n depende del tipo de interacción. La fuerza $F(r)$ puede derivarse de $W(r)$ por $F(r)=-dW(r)/dr$. Considerando dos tipos de colisiones: Colisiones de Coulomb entre las partículas cargadas y las colisiones bipolares inducidas entre partículas cargadas y neutras:

$$\text{Coulomb} : W(r) \sim \frac{1}{r}; F(r) \sim \frac{1}{r^2}$$

$$\text{Bipolar} : W(r) \sim \frac{1}{r^4}; F(r) \sim \frac{1}{r^5}$$

Las colisiones entre partículas distintas, llevarán una velocidad y transferencia de energía lo cual es importante para la difusión, conductibilidad, y transferencia de energía, considerando que las colisiones entre las partículas controlan la termalización, la conducción de calor y la viscosidad.

Se pueden considerar colisiones entre las siguientes asociaciones:

- e-i – Transferencia de energía desde los electrones a los iones.
- e-e – Relajación de la energía del electrón, conducción de calor del electrón.
- i-i – Maxwellización de $f(v_i)$, conducción de calor del ión, viscosidad.
- e-a – Transferencia de momentum desde los electrones a los átomos e isotropismo de $f(v_e)$.
- Momentum y transferencia de energía desde los iones a los átomos (incluyendo transferencia de carga simétrica).

Las primeras tres son colisiones de Coulomb, considerando que las últimas dos son del tipo bipolar inducido.

Los cálculos de la colisión de la sección eficaz o transversal, la tasa, la frecuencia, el tiempo e inicio del camino libre considerando un solo evento de la colisión, deben ser considerados para una energía potencial de atracción como se muestra en la *figura 2.7*. La colisión, es caracterizada por la energía inicial y el parámetro de impacto, b . Los resultados de la colisión en un ángulo de

dispersión X y la pérdida de momentum relativo que dependen de la interacción potencial $W(r)$, están dados por $1 - \cos X$.

El intercambio de velocidad, es la cantidad importante para las colisiones elásticas y el efecto de la colisión tiene que ser cargado con el cambio de velocidad relativo adquirido $\sigma_{diff}^m(v) = \sigma_{diff}^T(X, v)(1 - \cos X)$. El diferencial de la sección cruzada, describe la probabilidad de dispersión sobre un ángulo X para las partículas con parámetro de impacto b ; el cuál, está dado por: $\sigma_{diff}^T(X) = \frac{b}{\sin X} \frac{db}{dX}$. La relación entre b y X , depende de la potencia de dispersión $W(r)$; una vez especificado lo anterior, el diferencial de la sección cruzada puede ser calculado.

Por lo anterior, la transferencia de momentum de la sección cruzada $\sigma^m(v)$, se define como el momentum adquirido del diferencial de carga integrado en la sección cruzada sobre el ángulo de colisión X . (o sobre el parámetro de impacto b , lo cual es equivalente)

$$\sigma^m(v) = \int_0^\pi (1 - \cos X) \sigma_{diff}^T(X, v) 2\pi \sin X dX = \int_0^\pi \sigma_{diff}^m(X, v) 2\pi \sin X dX$$

El producto σv tiene que ser integrado sobre los espacios de velocidad de las partículas colisionadas, para obtener la proporción de la colisión:

$$K = \langle \sigma v \rangle = \int \sigma^m(v) v f(\vec{v}) d\vec{v},$$

Donde v es la velocidad relativa y $f(\vec{v})$ es la distribución de velocidad normalizada de las dos partículas colisionadas. La proporción de colisión k_{12} entre las partículas 1 con las partículas 2, es relacionada con la frecuencia de la colisión, ν_{12} , el tiempo de la colisión, t_{12} , y el camino libre significativo $\lambda_{1,2}^{mfp}$ dado como:

$$\nu_{12} = n_2 \langle \sigma v \rangle_{12} = n_2 k_{12}; \tau_{12} = \frac{1}{\nu_{12}} \quad \lambda_{12}^{mfp} = \frac{v_1}{n_2 k_{12}} \sim \frac{1}{n_2 \sigma}$$

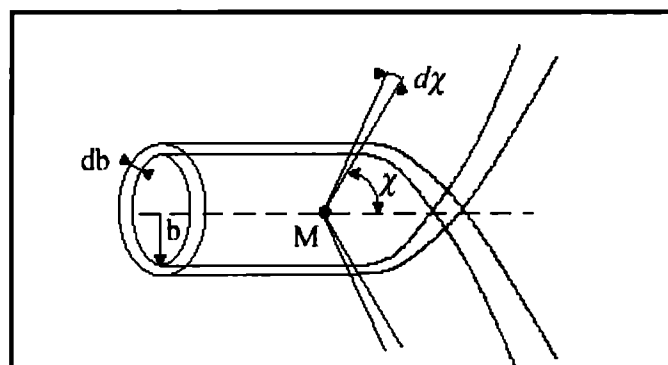


Figura 2.7 Definición del diferencial de la sección cruzada $\frac{d\sigma}{d\Omega}$. [25]

2.10.1.1 Colisiones de Coulomb

El “tamaño” de las interacciones de Coulomb directas (colisiones duras), se define por el parámetro de impacto mínimo b_0 , que es la distancia en la que la energía potencial es igual a la energía cinética de pre-colisión de las partículas vecinas en choque:

$$b_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v^2} \cong \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 3k_B T_e} = \frac{0.5 \cdot 10^{-9}}{T_e}$$

En esta expresión, la masa reducida $m_r = \frac{m_e M_i}{m_e + M_i}$ ha sido fijada igual a m_e . En la anterior expresión la energía cinética $\frac{1}{2} m_e v^2$, se ha reemplazado por la energía térmica $\frac{3}{2} kT_e$.

Para las colisiones de Coulomb, la relación entre el ángulo de dispersión y parámetro de impacto b , está dada por:

$$b = b_0 \cot \frac{X}{2}$$

aparentemente b_0 es la medida para una desviación sencilla de 90° en el centro del sistema de masa. Sin embargo, para las interacciones de Coulomb, el efecto de colisiones de ángulos pequeños múltiples (con parámetros de impacto grandes y del mismo modo el diferencial mayor en las secciones cruzadas) es más grande que el de las colisiones duras simples. El resultado final es que la sección cruzada total es igual a: $4 \ln \Lambda_c$ tiempos más grandes que para una desviación de colisión sencilla de 90° :

$$\sigma^m = 4\pi b_0^2 \ln \left(\frac{\lambda_D}{b_0} \right) = 4\pi b_0^2 \ln \Lambda_c \quad (2.19)$$

En la ecuación (2.19), el logaritmo de Coulomb aparece $\ln \Lambda_c = \ln \frac{\lambda_D}{b_0}$. El argumento está directamente relacionado con el número de electrones en la esfera de Debye: $\ln \Lambda = \ln \lfloor 9N_{\lambda_D} \rfloor$ y esto es mayor que 1. Las expresiones para el coeficiente de la proporción, el tiempo de la colisión y la frecuencia y el camino libre promedio, son obtenidas por integración propia sobre el espacio de la velocidad. También, las desviaciones de las distribuciones de velocidad y el efecto de las otras colisiones, tienen que ser consideradas. Todo estos efectos, proporcionan factores de corrección de orden uno. Es conveniente limitarse a usar las expresiones de Braginskii, las cuales relacionan a los tiempos de relajación por la velocidad perpendicular a un campo magnético aplicado. En esta opción (qué es una magnitud arbitraria) no es segura la isotropía, debido al movimiento del ciclotrón alrededor del campo magnético. Para las propiedades de transporte paralelas al campo y las propiedades termodinámicas de los factores numéricos que aparecen, son

tabuladas por Braginskii. Por otro lado, la conductibilidad de un plasma controlado de Coulomb podría ser tratado como:

$$\tau_{ei} = \frac{3.5 \cdot 10^{11} T_e^{3/2}}{n_e \ln \Lambda}; \lambda_{ei} = \frac{2 \cdot 10^{17} T_e^2}{n_e \ln \Lambda}$$

$$\tau_{ii} = \frac{2 \cdot 10^{13} T_i^{3/2} A_i^{1/2}}{n_e \ln \Lambda}; \lambda_{ii} = \frac{2.8 \cdot 10^{17} T_i^2}{n_e \ln \Lambda} \quad (2.20)$$

En la ecuación (2.20), A_i es el número de masa del ión, es decir, es la proporción entre la masa del ión y la masa del átomo de hidrógeno. El número de carga Z_i , tiene el valor de $Z_i=1$, ya que solo se consideran iones de carga única. En la transferencia de momentum, el tiempo de colisión sólo es una cantidad pequeña $2m_e/M_i$ de energía que es transmitida. Por consiguiente, el tiempo de colisión en la transferencia de energía τ_{ei}^e es $M_i/2M_e$ veces más extenso. Esto realmente, está cerca del tiempo constante para los iones a transferencia de su momentum en colisión con electrones: $\tau_{ie} \approx \tau_{ei}^e$. Por lo tanto, las distintas constantes de tiempo de Coulomb se relacionan así:

$$\tau_{ee} \sim \tau_{ei}^m \ll \tau_{ii} \ll \tau_{ei}^e \sim \tau_{ie}^m$$

$$1: \sqrt{\frac{M_i}{m_e}} \cdot \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} : \frac{M_i}{2m_e} \quad (2.21)$$

2.10.1.2 Colisión Electrón-neutral

La interacción entre electrones y partículas neutras (o neutrales), es del tipo bipolar inducido y su escala de polarizabilidad del átomo juega un papel muy importante. En la (Tabla 2.1), la polarizabilidad de los distintos átomos y moléculas están expuestos en términos de un volumen efectivo, lo cual es de dimensiones atómicas.

Tabla 2.1 Polarizabilidad escalar $\alpha' = \alpha/4\pi\epsilon_0$. [25]

Elemento	polarizabilidad α' (10^{-30} m^3)	Elemento	polarizabilidad α' (10^{-30} m^3)
He	0.206	H ₂	0.806
Ne	0.408	CO	1.94
Ar	1.64	NO	1.70
Kr	2.49	N ₂	1.74
Xe	4.02	O ₂	1.57

Una primera estimación para la sección cruzada, puede ser obtenida a partir de una dimensión característica, basada en el volumen de polarizabilidad efectivo $\alpha' = \left(\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \right)$ y el rango característico del electrón interactuando, $2b_0$:

$$b_a = \left(\frac{2e^2\alpha}{(4\pi\epsilon_0)^2 E_0} \right)^{1/4} = \left(2b_0 \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \right) \quad (2.22)$$

Una estimación para la sección cruzada, es llamada el límite de Langevin, que es igual a: πb_a^2 , donde b_a es el parámetro de impacto límite, para colisiones en la órbita. En el límite de Langevin, el coeficiente de reacción K_{ea} puede ser escrito como:

$$K_{ea} = \pi b_a^2 v_e = \pi \sqrt{\frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e}} = 0.71 \cdot 10^{-13} \sqrt{\alpha} \text{ m}^3/\text{s}$$

en donde, α' es la polarizabilidad en 10^{-30} m^3 . El coeficiente de reacción, K_{ea} , es independiente de, el cual está provisto de una colisión bipolar inducida. La estimación es razonable por la velocidad del electrón mayor y sus temperaturas. En los efectos de la mecánica cuántica con temperaturas bajas, empiezan a influir derivaciones como la longitud de onda De Broglie $b_{\min} = \frac{h}{mv_e}$, la cual llega a ser del mismo orden y produciendo a su vez interferencias destructivas, las cuales hacen que la sección cruzada sea más pequeña que lo estimado en el Langevin.

El resultado es conocido como el mínimo de Ramsauer, el cual puede ser observado en la *figura 2.8*, donde varias secciones cruzadas son mostradas para gases nobles. La temperatura del electrón, es baja, lo cual significa que la aproximación de Langevin que está dada por la condición $\frac{1}{2} b_{\min} \approx b_a$ no es válida; resultando $T_e^{\text{crit}} \cong 16/\alpha' \approx 10 \text{ eV}$. Por lo tanto, para temperaturas bajas del electrón, el coeficiente de proporción de Langevin tienen que ser multiplicado por $\left(\frac{\alpha'}{16} \right) T_e$; éste se incrementa linealmente con T_e .

Después de la integración de σv_e sobre la distribución de velocidad maxwelliana (la cual solo es válida para un radio de ionización altamente deficiente $\frac{n_e}{n_a} \geq 10^{-3}$) aparecen unos coeficientes de proporción, K_{ea} , los cuales crecen linealmente con T_e , obteniendo:

$$K_{ea} = \langle \sigma v \rangle_{ea}^{Ar} \sim \frac{T_e}{3.5 \cdot 10^{13}}$$

$$\tau_{ea}^m \cong 3.5 \cdot 10^{13} \frac{1}{n_a \hat{T}_e}$$

para este tipo de colisiones, la temperatura del electrón varía, desde 0.1 eV para plasmas recombinados y hasta 10 eV para plasmas ionizados. Comparando las proporciones para colisiones $e-i$ y $e-a$, se puede concluir, que los plasmas son dominados por Coulomb si el radio de ionización se acerca a :

$$\tau_{ei}^m < 1 \rightarrow \frac{n_e}{n_a} > 10^{-3} \hat{T}_e$$

lo cual es indicado por la línea dibujada en la *figura 2.8*, para $\hat{T}_e \approx 3 \text{ eV}$.

Para plasmas dominados por las colisiones de Coulomb, las propiedades de transporte del electrón son controladas por las colisiones del electrón-ión, las cuales se consideran como condiciones que son determinadas por el dominio de las colisiones del electrón-ión. Las frecuentes colisiones del electrón-electrón, garantizan una distribución maxwelliana de energía del electrón para plasmas dominados o controlados por Coulomb.

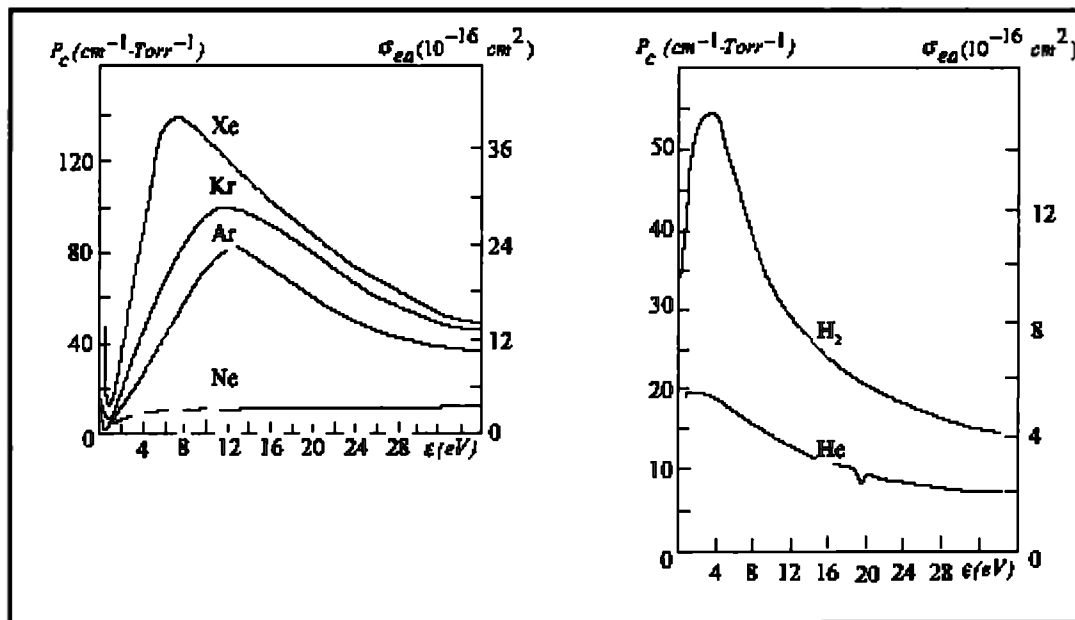


Figura 2.8 Secciones de cruce para esparcimientos elásticos de $e\text{-Ar}$, Ne , Kr , Xe , He , H_2 . [25]

2.10.1.3 Colisiones Ión-neutral

Existen dos tipos de interacciones ión-neutral en un gas protegido: las colisiones elásticas y los cambios de cargas simétricas. Sólo para los cambios de cargas simétricas entre un ión y su progenitor neutral, puede ser considerado como de tipo elástico, de esta forma es como el número de iones y átomos neutros son conservados. El cambio de carga simétrica es un proceso resonante

de energía y tiene secciones de cruce grandes (Figura 2.9), que son normalmente grandes, comparados con la sección de cruce de colisiones elásticas. Así mismo, el efecto de cambio de carga es grande: aproximadamente ocurren transferencias de energía y cambios de momentum completos.

Como una estimación para el proceso elástico, nuevamente la sección cruzada de Langevin puede ser utilizada: (E_0 es la energía cinética en el sistema reducido)

$$\sigma_{orb} = \pi b_a^2 = \pi \left| \frac{2e^2 \alpha}{(4\pi\epsilon_0)^2 E_0} \right|^{1/2} \quad (2.23)$$

para partículas pesadas, la longitud de onda De Broglie es más pequeña, la cual es una estimación semi-clásica suficiente. Varios ejemplos son dados en la figura 2.9 para la sección de cruce total incluyendo la contribución de transferencia de carga.

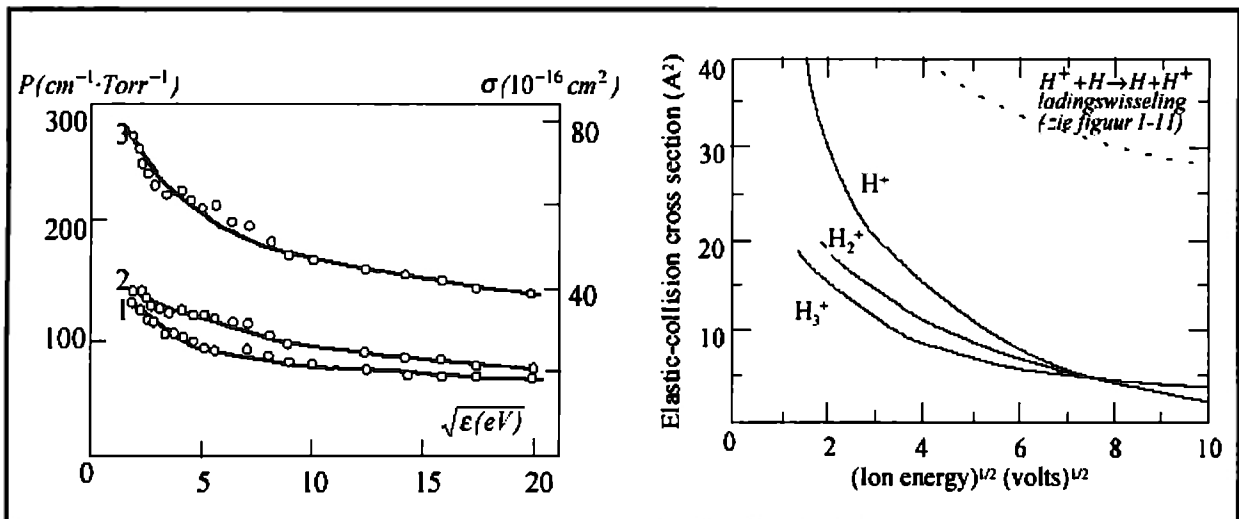


Figura 2.9 Sección cruzada para colisiones i - a de: a) $\text{Ar}^+ - \text{Ar}$ y b) para ión-hidrógeno en un gas hidrógeno (y $\text{H}^+ - \text{H}$). [25]

se puede observar que para el argón, la siguiente relación se mantiene:

$$\langle \sigma v \rangle_{i,a}^{\text{Ar}} \cong \frac{T_i^{1/2}}{6 \cdot 10^{14}}; (\sigma_{i,a} \sim 10^{-18} \text{ m}^2!)$$

si la proporción entre los tiempos de colisión del ión-ión e ión-neutral es menor que uno, entonces, los iones son dominados por las colisiones de Coulomb. La proporción de ionización mínima es:

$$\frac{\tau_{ii}}{\tau_{ia}} < 1; \frac{n_e}{n_a} > 2 \cdot 10^{-2} T_i^2$$

Esta condición es aproximadamente la misma para las colisiones de electrones, ya que la temperatura del ión está normalmente por debajo de la temperatura del electrón. Para proporciones de ionización mayores comparadas con este valor, las colisiones ión-ión prevalecen sobre las colisiones ión-neutral y la función de distribución de energía es maxwelliana. Cabe notar, que las colisiones ión-neutral, a pesar de todo son importantes para transporte de plasma como en las colisiones de primer orden entre partículas que no contribuyen en la difusión (el momentum total es conservado).

2.10.2 SENTIDO Y DIFUSIÓN DE PARTÍCULAS CARGADAS

Los plasmas son sistemas no equilibrados; la energía tiene que ser disipada para hacer y sostener el plasma. La temperatura de los electrones tienen que ser más alta que la temperatura ambiente, típicamente en el rango de eV contra $300\text{ K} = 0.03\text{ eV}$.

Para mantener la energía del plasma, se debe proveer de corrientes de microondas, DC o RF, las cuales calientan los electrones principalmente. Como la transferencia de energía de los electrones a las partículas pesadas (iones y neutras) normalmente es un proceso lento, la temperatura del electrón es más alta que la temperatura de la partícula pesada y la ionización dirige a los nuevos electrones, provocando gradientes en la densidad del electrón y la temperatura. La partícula y el transporte de energía por difusión y conductividad de calor es por consiguiente procesos inevitables en plasmas.

2.10.2.1 Movimientos de iones y electrones en un campo eléctrico

El sentido de la velocidad, W , de las partículas cargadas en una aplicación o generadas en el mismo campo magnético, puede ser obtenido desde la ecuación de momentum (con $v_e = v_{ea} + v_{ei}$):

$$W_e = -\frac{e}{m_e v_e} E = -\mu_e E; \quad \mu_e = \frac{e}{m_e v_e} \quad (2.24)$$

el movimiento de los electrones, μ_e , (definido como una cantidad positiva) es solo en primera instancia, independiente a la fuerza del campo eléctrico. En particular, las fuerzas mayores del campo de distribución de velocidad y su proporción de colisión, dependen del campo del electrón. Solo para colisiones del tipo bipolar inducido, la tasa o proporción de colisión σv es independiente de la velocidad, la cual resulta de un movimiento independiente de la fuerza del campo eléctrico. El movimiento del ión, es igual a la raíz cuadrada de la masa de menor proporción y el movimiento del electrón:

$$\mu_i = \frac{e}{m_i v_{ia}}; \quad \frac{\mu_e}{\mu_i} \sim \sqrt{\frac{M_i}{m_e}}$$

como la densidad de la corriente es proporcional al sentido de la velocidad, la corriente predominante en la carga del electrón es:

$$\underline{j} = -n_e e \mu_e \underline{E} + n_i e \mu_i \underline{E} \cong n_e e \mu_e \underline{E}$$

la conductividad σ es una primera aproximación proporcional al movimiento del electrón:

$$\sigma = \mu_e n_e e = \frac{n_e e^2}{m_e \nu_e} \quad (2.25)$$

Si la ionización proporcional es mayor que la condición de Coulomb, entonces también las colisiones de ión-electrón tienen que ser incluidas en la pérdida de frecuencia del momentum del electrón. :

$$\nu_e = \nu_{ea} + \nu_{ia} \quad (2.26)$$

Como las colisiones neutras del ión son también la pérdida del momentum del ión (colisiones ión-ión hacen que no cambie el momentum del ión en primer orden) entonces, el movimiento del electrón decrece.

La conductividad de los plasmas dominados por colisiones de Coulomb ($n_e / n_a > 10^{-2}$) para los cuales, la dominancia de las colisiones ión electrón es igual a:

$$\sigma_{||} = \xi \frac{n_e e^2 \tau_{ei}^m}{m_e} \cong \xi \frac{10^4 T_e^{3/2}}{\ln \Lambda} \quad (2.27)$$

En esta ecuación un factor ξ es adicionado, en donde los efectos de la energía cinética ocasionan que la conductividad pueda ser más alta que el valor basado en la distribución de velocidad del electrón de Maxwell. Además, la fricción causada por las colisiones e-i de Coulomb, decrecen con la energía del electrón (y sus velocidades), el movimiento de los electrones regresan al campo eléctrico con una velocidad mayor y sobre todo con menos fricciones y cargas en una parte apreciable de la corriente. Es decir, que el efecto de estas perturbaciones en la distribución de la velocidad del electrón, es comparada con el maxwelliano aproximado a un factor de dos (factor=1.96).

2.10.3 PROCESOS INELÁSTICOS

Las colisiones inelásticas son importantes para la producción de partículas cargadas y partículas de radicales activos químicamente. Para muchos procesos inelásticos, el coeficiente de proporción, es un producto de la sección cruzada de las dimensiones atómicas, la velocidad térmica del electrón y el factor de Boltzmann, el cual para los procesos endotérmicos potentes es

< 1. Esta es una regla general para los procesos inelásticos, donde frecuentemente son menores que las colisiones elásticas. Es de señalar, que los procesos que regularmente requieren menos energía como la recombinación disociativa, pueden tener proporciones en el mismo orden de las tasas de las colisiones elásticas.

2.10.3.1 Procesos del electrón

2.10.3.1.1 Ionización y excitación

La excitación de los electrones puede estar estimada por el uso de la aproximación hidrogénica para secciones cruzadas. Por ejemplo, se asume cuando la excitación teórica toma el lugar en un gas con átomos de hidrógeno. La representación más simple de la excitación o ionización del electrón, esta basado en la interacción de Coulomb, con el electrón bajo condiciones de un átomo de hidrógeno. En este caso, una colisión fuerte es requerida para que la energía de ionización o de excitación, haya sido la suficiente. La estimación para la sección cruzada de acuerdo a lo expuesto anteriormente, se realiza donde b_0 haya sido evaluada como la energía requerida para la excitación, E_{exc} o ionización, E_{ion} :

$$\sigma_{lp}^{exc} = f_{pi} \cdot g_p \pi [b_0(E_{lp}^{exc})]^2 \quad \sigma^{ion} = g^{ion} \pi [b_0(E_l^{ion})]^2 \quad (2.28)$$

Además, la probabilidad de excitación o ionización, es proporcional al peso estadístico del estado de excitación o estado fundamental del ión. Los pesos estadísticos son $g_p = 2p^2$ para átomos de hidrógeno (e iones hidrogénicos) y son iguales a $g_p = 2J+1$ para otros átomos con divisiones de los niveles finitas.

Para la excitación de la sección cruzada, tiene que ser corregida por la fuerza oscilante, f_{pi} , la cual se toma en cuenta dentro de la estructura del salto del electrón en el átomo. Por lo tanto, para la sección cruzada, la excitación desde el nivel 1 al nivel p, es:

$$\sigma_{lp} = f_{pi} \cdot g_p \pi [b_0(E_l^{exc})]^2 \quad (2.29)$$

en la cual, b_0 ha sido evaluada para la energía de excitación, E_{lp} , desde el nivel 1 al nivel p:

$$E_{lp} = E_l^{ion} - E_p^{ion} \approx E_l^{ion} = \frac{Ry}{p_{l,eff}^2} \quad (2.30)$$

En la ecuación (2.30), $p_{l,eff}$, es el número quantum efectivo del estado del campo neutral. El número quantum efectivo, $p_{l,eff}$, puede ser usado para la generalización de los átomos no hidrogénicos. Esto es indicado para la energía de sujeción en el estado del campo, tal y como es comparado para los átomos de hidrógeno ($1Ry = 13.6 eV$), así:

$$P_{1_{eff}}^2 = \frac{R_y}{E_1^{ion}} \quad (2.31)$$

en donde E_p^{ion} es la energía de ionización para el nivel 1.

El valor del coeficiente para la excitación, puede ser obtenido de la multiplicación de la sección cruzada por la velocidad del electrón excitado e integrando sobre el resultado sobre la distribución Maxwelliana:

$$K_{lp}(\hat{T}_e) = f_{p1} g_p \pi [b_0(E_{1p}^{exc})]^2 \cong f_{p1} g_p 2 \cdot 10^{-14} \sqrt{\hat{T}_e} \exp\left[-\frac{\hat{E}_{ip}}{\hat{T}_e}\right] \quad (2.32)$$

usando el principio de balanceo, se obtiene que para el valor del coeficiente, la excitación desde el estado excitado p al estado del campo l , será:

$$K_{pl} \cong f_{p1} g_l \frac{e^2 v_{the}}{(4\pi\epsilon_0)^2 (E_1^{ion})} \approx f_{p1} g_l 2 \cdot 10^{-14} \sqrt{\hat{T}_e} \quad (2.33)$$

En la anterior ecuación, se puede observar, que para la excitación aparece el factor de Boltzmann, el cual indica, que solo los electrones en lo posterior del maxwelliano tienen suficiente energía para excitar los átomos. También, el valor del coeficiente depende del peso estadístico del estado superior.

La ionización de los átomos en el estado del campo para electrones, puede nuevamente ser asumido por el número quantum efectivo y el peso estadístico del estado del campo.

Como una estimación para el “tamaño” de la sección de cruce del estado del campo del átomo $\pi(a_0 P_{1_{eff}}^2)^2$ y el peso estadístico del ión en el estado del campo, se obtiene:

$$k^{ion} \cong g^+ \pi (a_0 P_{1_{eff}}^2)^2 v_e \exp\left[-\frac{E_{ion}}{kT_e}\right] \quad (2.34)$$

La cual, es la misma aproximación usada para la excitación (como $b_0(R_y) = a_0$).

Por último, se puede observar el factor de Boltzmann, comúnmente usado para un proceso en el cual se involucran grandes cantidades de electrones.

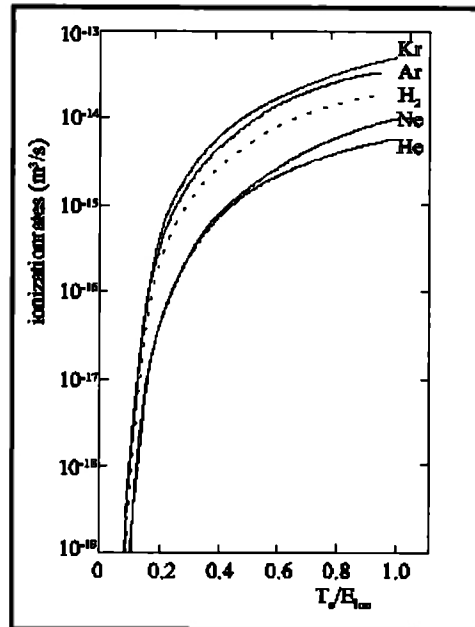


Figura 2.10 Tasas de ionización cuando la función de energía normalizada es T_e/E_{ion} . [25]

2.10.3.1.2 Ionización

la ionización de los electrones puede ser vista como el proceso inverso de la recombinación de tres partículas:



La recombinación de tres partículas, principalmente se dirige a los estados altamente excitados. Se puede estimar que el valor del coeficiente para la recombinación de tres partículas, puede observarse como un proceso de dos partículas estables con la presencia de una tercera partícula, la cual es otro electrón. El proceso de las dos partículas, es caracterizado por el valor del coeficiente de la colisión de Coulomb $k_{ei} = n_e \tau_{ei}$.

El efecto de la presencia de la tercera partícula, puede ser representado por una estimación de volumen $V_e = \frac{4}{3} \pi b_0^3$, con $b_0 = 5.10^{-9} / \hat{T}_e$. El valor de la proporción en la colisión de la tercer partícula puede ser obtenido como:

$$k_{+rec}^{3d} = 1.1 \cdot 10^{-39} \ln \Lambda \hat{T}_e^{-9/2} \left[m^6 / s \right]$$

esta estimación es realmente utilizada para valores experimentales:

$$k_{+rec}^{3d} = 3.3 \cdot 10^{-21} T_e^{-9/2} = 1.710^{-39} \hat{T}_e^{-9/2} \left[m^6 / s \right]$$

Se puede observar, que para plasmas con presiones bajas, la proporción o la tasa para la recombinación de tres partículas es demasiado bajo. Solo para las densidades del electrón altas, temperatura del electrón baja, plasmas recombinados, esta puede ser una representación. [25]

2.11 CONCEPTOS TEÓRICOS DE PARTÍCULAS CARGADAS DE POLVOS

Una partícula cargada o saturada es, desde el punto de vista teórico, una de las más interesante pero también una de las tareas más difíciles, si uno intenta tomar en cuenta, todas las peculiaridades del proceso de saturado, al querer atrapar partículas de polvos en el ambiente no-equilibrado y altamente no-neutral con la presencia de corrientes de iones.

En las siguientes derivaciones, las partículas de polvo(s) son consideradas como una sonda esférica con potencial flotante y la primera tarea podría ser, determinar el potencial flotante ϕ_f . Esto puede encontrarse de la condición que, a cierta potencia flotante, la suma de todas las corrientes o flujos de las partículas desaparece:

$$\sum_q I_q(\phi_f) = 0 \quad (2.35)$$

Las corrientes de la partícula pueden levantarse de la afluencia de iones y electrones del plasma y emisión de electrones y fotoelectrones secundarios. El conjunto de iones y electrones dominarán en los experimentos hechos con plasmas en un laboratorio, considerando que la emisión del electrón también podría ser importante bajo condiciones astrofísicas. Por consiguiente, primero que todo, la saturación del conjunto de corrientes será analizada.

2.11.1 SATURACIÓN DE CORRIENTES OML (ORBITAL MOTION LIMITED)

Para el caso ideal de un plasma maxwelliano isotrópico en reposo, las corrientes para la partícula pueden ser descritos por el modelo OML (Orbital Motion Limited) deducido primero por Mott-Smith y Langmuir en 1926 [26]. Los principios básicos de la derivación del modelo de saturación de corrientes OML asumen que llegan iones y electrones desde el infinito que golpean la partícula y son capturados por la misma.¹

Para el caso usual en que los iones son atraídos y los electrones son la especie rechazada, la potencia de la partícula es negativa con respecto a la potencia del plasma ($\phi_p < 0$), la corriente OML del ión y el electrón son dadas por las expresiones siguientes:

¹ **Derivación de las corrientes OML:** para empezar los cálculos, se considera que los iones vienen desde el infinito. Un ión que tiene un parámetro de impacto $b < b_c$ golpearía la partícula, por otro lado uno con $b > b_c$ fallaría. El parámetro crítico b_c es el límite de incidencia. En infinito, el momentum angular del ión es $m_i v_i b_c$ y el límite de incidencia o de roce es $m_i v_i a$. El momentum angular es asumido para ser conservado sobre la trayectoria del ión.

$$I_i = \pi a^2 n_i e \sqrt{\frac{8kT_i}{\pi m_i}} \left(1 - \frac{e\phi_p}{kT_i}\right) \quad \phi_p < 0$$

$$I_e = -\pi a^2 n_e e \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}} \exp\left(\frac{e\phi_p}{kT_e}\right) \quad \phi_p < 0 \quad (2.36)$$

Donde a es el radio de la partícula, n_i , n_e , es la densidad del ión y el electrón respectivamente, T_i , T_e , las temperaturas respectivas y m_i , m_e , sus masas. Para potencias de partículas positiva ($\phi_p > 0$) las corrientes serán:

$$I_i = \pi a^2 n_i e \sqrt{\frac{8kT_i}{\pi m_i}} \exp\left(-\frac{e\phi_p}{kT_i}\right) \quad \phi_p < 0 \quad (2.37)$$

$$I_e = -\pi a^2 n_e e \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}} \left(1 + \frac{e\phi_p}{kT_e}\right) \quad \phi_p < 0 \quad (2.38)$$

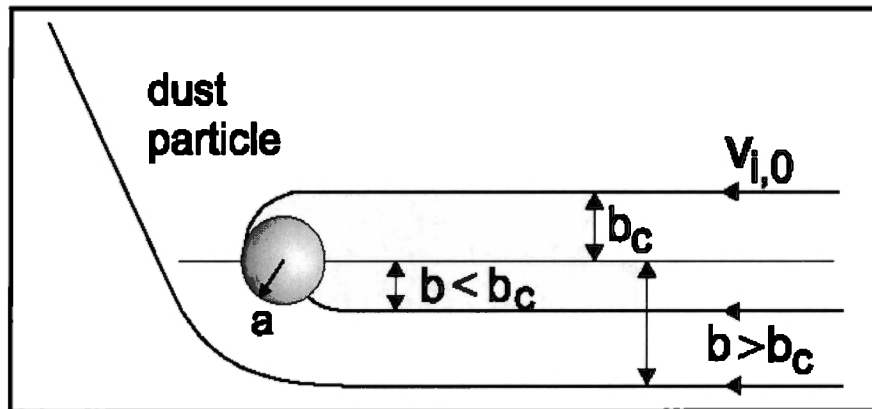


Figura 2.11 Trayectoria del ión con diferentes valores del parámetro de impacto b . [31]

El balance de energía del ión, es igual a la suma de la energía cinética y potencial. El potencial electrostático de la partícula de polvo (particle dust) es:

$$\frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i v_{i,0}^2 + e\phi_p$$

Usando la conservación de momentum angular, el balance de energía puede ser escrito como:

$$\frac{1}{2} m_i v_{i,0}^2 = \frac{1}{2} m_i v_i^2 \left(\frac{v_i^2}{v_{i,0}^2} + \frac{e\phi_p}{\frac{1}{2} m_i v_{i,0}^2} \right) = \left(\frac{b_c^2}{a^2} + \frac{e\phi_p}{\frac{1}{2} m_i v_{i,0}^2} \right)$$

y de esta manera:

$$b_c^2 = a^2 \left(1 - \frac{2e\phi_p}{m_i v_{i,0}^2} \right) \equiv \sigma_c \quad (2.39)$$

eso significa, que la sección eficaz o transversal σ_c de la partícula para la captura del ión, se aumenta debido a la atracción ($\phi_p < 0$).

La corriente cargada de iones hacia la partícula, entonces es:

$$dI_i = \sigma_c n_i e v_i f(v_i) dv_i$$

donde $f(v_i)$ es la función de distribución de los iones, que en la siguiente ecuación es asumida para el caso maxwelliano isotrópico:

$$f(v_i) = 4\pi v_i^2 \left(\frac{m_i}{2\pi k T_i} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\frac{1}{2} m_i v_i^2}{k T_i} \right) \quad \text{con} \quad \int_0^{\infty} f(v_i) dv_i = 1$$

La corriente cargada es entonces obtenida, por la integración de la distribución de velocidad maxwelliana:

$$I_i = 4\pi a^2 n_i e \left(\frac{m_i}{2\pi k T_i} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{2e\phi_p}{m_i v_i^2} \right) v_i^3 \exp\left(-\frac{\frac{1}{2} m_i v_i^2}{k T_i} \right) dv_i \quad (2.40)$$

reorganizando se tiene que:

$$I_i = 4\pi a^2 n_i e \left(\frac{m_i}{2\pi k T_i} \right)^{3/2} \left[\int_0^{\infty} v_i^3 \exp\left(-\frac{\frac{1}{2} m_i v_i^2}{k T_i} \right) dv_i - \int_0^{\infty} \frac{2e\phi_p}{m_i v_i^2} v_i \exp\left(-\frac{\frac{1}{2} m_i v_i^2}{k T_i} \right) dv_i \right]$$

esta integral es evaluada resultando:

$$I_i = \left[-\frac{k T_i}{m_i} v_i^2 \exp\left(-\frac{\frac{1}{2} m_i v_i^2}{k T_i} \right) \right]_0^{\infty} - \left[-\frac{2(k T_i)^2}{m_i^2} v_i^2 \exp\left(-\frac{\frac{1}{2} m_i v_i^2}{k T_i} \right) \right]_0^{\infty} = \frac{2(k T_i)^2}{m_i^2}$$

$$I_2 = \frac{2e\phi_p}{m_i} \left[-\frac{kT_i}{m_i} \exp\left(-\frac{\frac{1}{2}m_i v_i^2}{kT_i}\right) \right]_0^\infty = \frac{kT_i}{m_i} \frac{2e\phi_p}{m_i} = \frac{2(kT_i)^2}{m_i^2} \frac{e\phi_p}{kT_i}$$

La corriente del ión OML, finalmente es:

$$I_i = \pi a^2 n_i e \sqrt{\frac{8kT_i}{\pi m_i}} \exp\left(-\frac{e\phi_p}{kT_i}\right)$$

esta relación, puede interpretarse como un flujo térmico de iones con la velocidad térmica del ión $v_{th,i} = (8kT_i / \pi m_i)^{1/2}$ sobre una partícula de polvo. El término $a^2 \left(1 - \frac{e\phi_p}{kT_i}\right)$ describe el incremento de la sección cruzada por la partícula de polvo para la energía típica del ión kT_i .

La corriente del electrón puede ser calculada en analogía para los iones. La sección que cruza las partículas de polvo para los electrones, es:

$$b_c^2 = a^2 \left(1 + \frac{2e\phi_p}{m_e v_{e,0}^2}\right)$$

resultando una reducción del área efectiva de la partícula de polvo. La corriente del electrón (con electrones Maxwellianos) es entonces determinada por:

$$I_e = -4\pi a^2 n_e e \left(\frac{m_p}{2\pi kT_e}\right)^{3/2} \int_{\sqrt{-2e\phi_p/m_e}}^{\infty} \left(1 + \frac{2e\phi_p}{m_e v_e^2}\right) v_e^3 \exp\left(-\frac{\frac{1}{2}m_e v_e^2}{kT_e}\right) dv_e \quad (2.41)$$

El término inferior de la integral $\sqrt{-2\phi_p/m_e}$ es diferente de cero, a partir de esto, sólo los electrones que son bastante energéticos pueden alcanzar la partícula de polvo, $m_e v_e/2 > -e\phi_p$.

Para las corrientes del electrón, la analogía de las integrales $I_1 + I_2$ resulta:

$$I_i = \left[-\frac{kT_e}{m_e} v_e^2 \exp\left(-\frac{\frac{1}{2}m_e v_e^2}{kT_e}\right) \right]_{\sqrt{-2e\phi_p/m_e}}^{\infty} - \left[-\frac{2(kT_e)^2}{m_e^2} \exp\left(-\frac{\frac{1}{2}m_e v_e^2}{kT_e}\right) \right]_{\sqrt{-2e\phi_p/m_e}}^{\infty}$$

$$= \frac{2(kT_e)^2}{m_e^2} \exp\left(\frac{e\phi_p}{kT_e}\right) \left(1 - \frac{e\phi_p}{kT_e}\right)$$

$$I_2 = \frac{2e\phi_p}{m_e} \left[-\frac{kT_e}{m_e} \exp\left(-\frac{\frac{1}{2}m_e v_e^2}{kT_e}\right) \right]_{\sqrt{-2e\phi_p/m_e}}^{\infty} = \frac{2(kT_e)^2}{m_e^2} \frac{e\phi_p}{kT_e} \exp\left(\frac{e\phi_p}{kT_e}\right)$$

la corriente del electrón finalmente es:

$$I_e = -\pi a^2 n_e e \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}} \left(1 + \frac{e\phi_p}{kT_e}\right) \quad (2.42)$$

La distribución Maxwelliana del electrón y el ión y las trayectorias de las partículas colisionadas (en vista de la conservación del momentum angular), son ingredientes esenciales en el cálculo de las corrientes OML. Un punto que hasta hace poco fue reconocido, es que un obstáculo del momentum angular previene que los iones de un cierto rango de energía choquen el grano del polvo, aunque su parámetro de impacto sea $b < b_c$. [27] [28] Sin embargo, para el caso en que el polvo es más pequeño que la longitud de Debye ($a \ll \lambda_D$), ese fragmento de iones es despreciable y los resultados de OML aún son válidos.

En muchos casos, en el ambiente envolvente de una descarga, los iones experimentan una tendencia a una velocidad u_i que pueden ser más grandes que la velocidad térmica del ión $v_{th,i}$. Whipple [29] ha demostrado que la corriente del ión para una partícula de polvo puede escribirse de la forma:

$$I_i = \pi a^2 n_i e u_i f(u_i)$$

donde $f(u_i)$ es una función de la dirección de la velocidad de los iones bastante complicada. Si la dirección de la velocidad es más grande que la velocidad del ión térmica $u_i \gg v_{th,i}$, la corriente del ión se reduce a [30]:

$$I_i = \pi a^2 n_i e u_i \left(1 - \frac{2e\phi}{m_i u_i^2}\right) \quad (2.43)$$

Lo cual se obtiene por substitución de la energía térmica del ión kT_i en la ecuación (2.36), donde la energía cinética de los iones tiende a ser $\frac{m_i u_i^2}{2}$.

2.11.2 LA PARTÍCULA COMO UNA SONDA FLOTANTE

2.11.2.1 Corrientes OML

El potencial flotante de la partícula, es determinado a partir de la condición en que todas las corrientes sobre la partícula desaparecen, $\sum_q I_q(\phi_f) = 0$, en descargas hechas en laboratorios. Entonces tenemos que:

$$1 - \frac{e\phi_f}{kT_i} = \sqrt{\frac{m_i T_e n_e}{m_e T_i n_i} \exp\left(\frac{e\phi_f}{kT_e}\right)} \quad (2.44)$$

La ecuación (2.44), puede ser resuelta numéricamente para ϕ_f con valores dados de los parámetros del plasma. En la tabla 2.2 el cálculo del potencial flotante está dado por las distintas condiciones de descarga. Las corrientes del ión y el electrón como una función de potencia de partícula ϕ_p son mostradas en la figura 2.12. En esta figura 2.12, el potencial flotante es encontrado por la intersección del electrón y las corrientes del ión. [31]

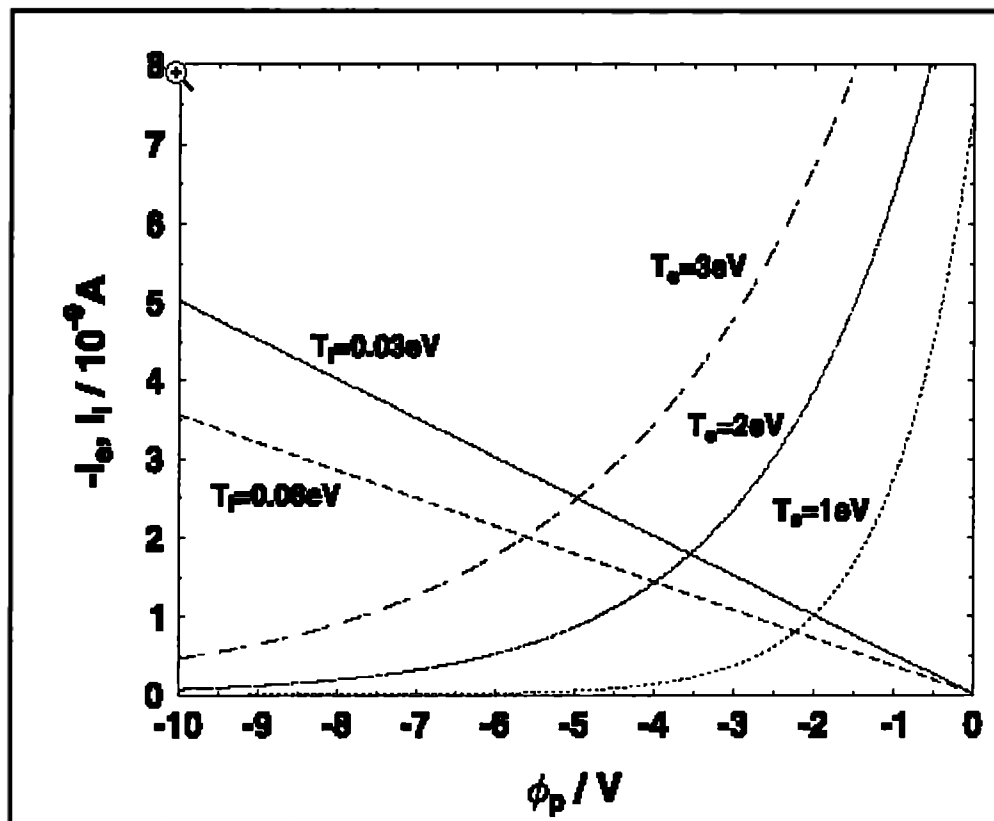


Figura 2.12 Corrientes OML sobre una partícula de polvo para valores de temperaturas diferentes. La intersección de las corrientes del ión y el electrón proporcionan el potencial flotante (la corriente del electrón negativa es mostrada como positiva en la figura). Otros parámetros son $a = 4.7 \mu\text{m}$ y $n_i = n_e = 1 \times 10^9 \text{ cm}^{-3}$, lo cual influye sólo en la magnitud absoluta de las corrientes, pero sobre el potencial flotante. [31]

Tabla 2.2. Potenciales flotantes normalizados $e\phi_f / kT_e$ en plasmas cuasineutrales $n_e = n_i$ en hidrógeno, helio y argón para diferentes radios de temperatura electrón a ión.[31]

T_e/T_i	1	2	5	10	20	50	100
H	-2.504	-2.360	-2.114	-1.909	-1.700	-1.430	-1.236
He	-3.052	-2.885	-2.612	-2.388	-2.160	-1.862	-1.645
Ar	-3.994	-3.798	-3.491	-3.244	-2.992	-2.660	-2.414

CAPÍTULO 3

3 FENÓMENOS DE TRANSPORTE

3.1 DINÁMICA DE FLUIDOS

Los principios básicos del movimiento de los fluidos, se desarrollaron lentamente a través de los siglos XVI y XIX como resultado del trabajo de muchos científicos como Da Vinci, Galileo, Torricelli, Pascal, Bernoulli, Euler, Navier, Stokes, Kelvin, Reynolds y otros que hicieron interesantes aportes teóricos a lo que se denomina hidrodinámica. Hacia fines del siglo XIX, la hidrodinámica y la hidráulica experimental presentaban una cierta rivalidad. Por una parte, la hidrodinámica clásica aplicaba con rigurosidad principios matemáticos para modelar el comportamiento de los fluidos, para lo cual debía recurrir a simplificar las propiedades de éstos. Así se hablaba de fluido ideal. Esto hizo que los resultados no fueran siempre aplicables a casos reales. Por otra parte, la hidráulica experimental acumulaba antecedentes sobre el comportamiento de fluidos reales sin dar importancia a la formulación de una teoría rigurosa.

La mecánica de fluidos moderna aparece a principios de los siglos XX como un esfuerzo por unir estas dos tendencias: experimental y científica. Generalmente se reconoce como fundador de la mecánica de fluidos moderna al alemán L. Prandtl (1875-1953). Esta es una ciencia relativamente joven, en la cual aún hoy se están haciendo importantes contribuciones. La ciencia de la ingeniería de la mecánica de fluidos se ha desarrollado gracias al entendimiento de las

propiedades de los fluidos, a la aplicación de las leyes básicas de la mecánica y la termodinámica y a una experimentación ordenada. Las propiedades de densidad y viscosidad juegan papeles principales en flujos de canales abiertos y cerrados y en flujos alrededor de objetos sumergidos. Los efectos de tensión superficial son importantes en la formación de gotas, en el flujo de pequeños chorros y en situaciones donde ocurren interfaces líquido-gas-sólido o líquido-líquido-sólido, al igual que en la formación de ondas capilares. La propiedad de presión de vapor, la cual considera los cambios de fase de líquido a gas, se vuelve importante cuando se encuentran presiones bajas. [32]

En muchos problemas en que intervienen los fluidos, se pueden encontrar soluciones adecuadas si se plantean los principios básicos de la mecánica y la termodinámica aplicados a valores promedio de las variables, considerando el conjunto del sistema donde actúa el fluido. Esto es especialmente útil cuando lo que importa es la interacción entre el fluido y el medio externo, donde interesa evaluar cantidades globales de esta interacción y no el detalle del comportamiento del fluido. La dinámica de fluidos estudia el movimiento de los fluidos, y el de los objetos en el seno de éstos. Hay dos formas distintas de describir el movimiento de un fluido:

- Dividir el fluido en elementos de volumen infinitesimales (partículas), y seguir su movimiento. Sería necesario conocer, para cada partícula, $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$. Método de Lagrange.
- Especificando la densidad y la velocidad del fluido en cada punto del espacio, y en cada instante de tiempo, es decir, especificando $\rho(\vec{r}, t)$ y $\vec{v}(\vec{r}, t)$. Método de Euler. Equivale a hacer una fotografía instantánea del fluido.

La materia puede ser agrupada en dos clases: fluidos y sólidos. Un *fluido* es una sustancia la cual puede *fluir*. Esto significa que sus partículas constituyentes pueden cambiar continuamente su posición relativa con respecto a las otras partículas.

Un fluido tiene la cualidad de que no ofrece resistencia a ningún tipo de esfuerzo cortante, sin importar la magnitud del mismo. Un esfuerzo cortante es la componente de fuerza tangente a la superficie, y esta fuerza dividida por el área de la superficie es el esfuerzo cortante promedio sobre dicha superficie. El esfuerzo cortante en un punto es el valor límite de la fuerza por unidad de área a medida que el área se reduce a un punto. Un fluido se distingue de un sólido en que, adquiere la forma del contenedor en que se encuentra y reacciona inmediatamente a las fuerzas que actúan sobre él.

Los fluidos se pueden subdividir en *líquidos* y *gases*. Una característica de los líquidos es que poseen volumen definido y que varía ligeramente con la temperatura y la presión. Si la capacidad del volumen que contiene al líquido es mayor al volumen definido, entonces el líquido ocupa parte del contenedor y se forma una interfase que separa el líquido de su mismo vapor, la atmósfera o cualquier otro gas presente.

Por otro lado, una cantidad fija de un gas en un contenedor, *siempre* se expandirá hasta ocupar el volumen completo del contenedor y sólo en ese momento se considera que existe un estado de equilibrio.

La diferencia más importante entre líquidos y gases es que, los primeros son prácticamente incompresibles y los segundos son fácilmente compresibles.

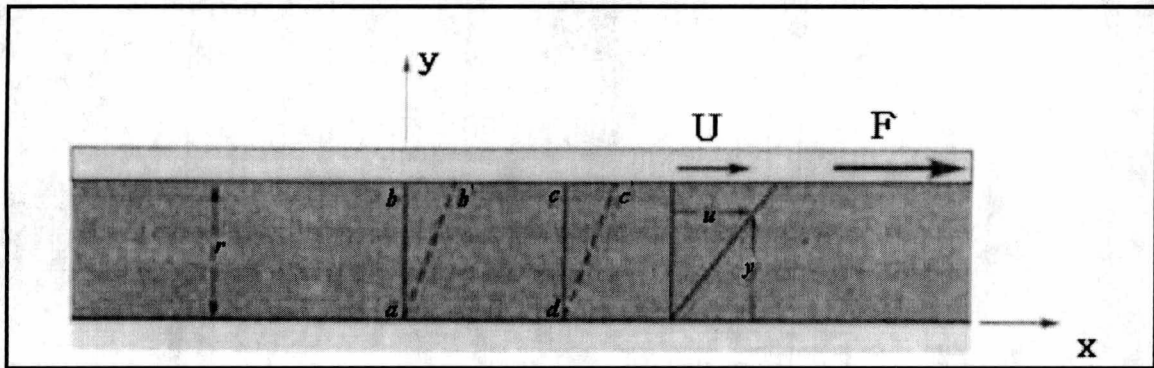


Figura 3.1 Deformación resultante de la aplicación de una fuerza cortante constante. [33]

En la figura 3.1 se ha colocado una sustancia entre dos placas paralelas muy cercanas, tan grandes que las condiciones en sus bordes pueden ser despreciadas. La placa inferior se fija y se aplica una fuerza F a la placa superior, la cual ejerce un esfuerzo cortante F/A sobre cualquier sustancia que se encuentre entre las placas. A es el área de la placa superior. Si la fuerza F hace que la placa superior se mueva con una velocidad permanente (diferente de cero) sin importar qué tan pequeña sea la magnitud de F , la sustancia entre las dos placas es un fluido. El fluido en contacto inmediato con una frontera sólida tiene la misma velocidad que la frontera; es decir, no existe deslizamiento en la frontera. Esta es una observación experimental que ha sido verificada en numerosas pruebas con diferentes clases de fluidos y de materiales sólidos en las fronteras. El fluido en el área $abcd$ fluye a la nueva posición $ab'c'd'$, cada una de las partículas de los fluidos se mueve paralelamente a la placa y la velocidad u varía uniformemente desde cero en la placa fija hasta U en la placa superior. Los experimentos demuestran que, manteniendo otras cantidades constantes, F es directamente proporcional a A y a U y es inversamente proporcional al espesor t .

En forma de ecuación:

$$F = \mu \frac{AU}{t} \quad (3.1)$$

donde μ es el factor de proporcionalidad, el cual incluye el efecto del fluido particular. Si $\tau = F/A$ para el esfuerzo cortante,

$$\tau = \mu \frac{U}{t}$$

la relación U/t es la velocidad angular de la línea ab o la *tasa de deformación angular* del fluido, es decir, la tasa de decrecimiento del ángulo bad . También se puede escribir la velocidad angular como du/dy , ya que tanto U/t como du/dy expresan el cambio de velocidad dividido por la distancia en que éste ocurre. Sin embargo du/dy es más general debido a que se mantiene para aquellas situaciones en las cuales la velocidad angular y el esfuerzo cortante cambian con y . El gradiente de velocidad du/dy también puede visualizarse como la tasa a la cual una de las capas se mueve con relación a otra adyacente. En forma diferencial,

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (3.2)$$

es la relación entre el esfuerzo cortante y la tasa de deformación angular para el flujo unidimensional de un fluido. El factor de proporcionalidad μ se conoce como la *viscosidad* del fluido y la ecuación (3.2) es la *ley de viscosidad de Newton*. [33]

3.1.1 ESTRUCTURA MOLECULAR

La diferencia entre las características de líquidos, gases y sólidos resultan de diferencias en la estructura molecular. En sólidos y líquidos la cantidad de partículas contenidas por unidad de volumen es mayor que en los gases, por tanto la separación intermolecular en sólidos y líquidos es menor que en gases.

En un gas, el movimiento molecular es mayor. Esto permite que las moléculas se desplacen distancias mayores antes de encontrar otra molécula con la cual interactuar. Las fuerzas de atracción molecular, que son inversamente proporcionales a la sexta potencia de su distancia de separación, son prácticamente despreciables y de este modo las moléculas tienen la libertad para moverse y alejarse entre ellas hasta ser detenidas por una frontera sólida o líquida.

Si un líquido está confinado en el espacio y entonces es comprimido, exhibe propiedades elásticas como las de un sólido bajo compresión. Sin embargo, debido a la cercanía de las moléculas del líquido, existe una gran resistencia a la compresión. A diferencia de esto, un gas que tiene grandes separaciones intermoleculares, es altamente compresible.

3.1.2 MEDIO CONTINUO

Desde el punto de vista de la mecánica de fluidos interesa el comportamiento del material en un sentido global, macroscópico, considerándolo en su conjunto como un medio continuo y por ende sin vacíos intermedios. Esto es en contraposición a considerarlo como un sistema de partículas individuales aisladas que actúan como grupo.

Un medio continuo se caracteriza porque sus átomos – o moléculas – están tan próximos unos de otros, que el conjunto puede considerarse macroscópicamente como una masa homogénea, cuyo

comportamiento puede preverse sin tener en cuenta el movimiento de cada una de las partículas elementales que lo componen. En este sentido se supone que no existen vacíos o separaciones entre las partículas. Por supuesto, esto no es cierto para el caso de un gas a muy baja presión, para el cual las distancias intermoleculares son apreciables en comparación con las dimensiones representativas del sistema en estudio.

En un medio continuo pueden definirse propiedades intensivas y extensivas. Las propiedades intensivas, o de intensidad, no dependen de la cantidad de materia involucrada, de modo que pueden asociarse a un punto. Ejemplos son la temperatura, humedad, color, presión, porosidad, elasticidad y otros similares.

Las propiedades extensivas, o de extensión, dependen de la cantidad de materia que se considere. Este es el caso del calor, peso, masa, energía, volumen de huecos, forma y otras.

En la práctica, muchas veces interesa asignar a un punto una propiedad del tipo extensiva, de manera que esa propiedad sea cuantitativamente independiente de la cantidad de materia. Para ello se divide la propiedad por la cantidad de materia involucrada, representada por el volumen, la masa o el peso, y se agrega el calificativo de “específica”. Así se tienen propiedad como la masa específica, calor específico y energía específica entre otras. Esto solamente puede hacerse con materiales homogéneos.

Si se tiene una cierta cantidad homogénea de materia M , con una propiedad intensiva y otra extensiva de valores P_i y P_e respectivamente, al extraer de ella una pequeña porción m la propiedad intensiva tendrá el mismo valor en ambas partes mientras que la extensiva se habrá dividido en la proporción correspondiente. (Figura 3.2)

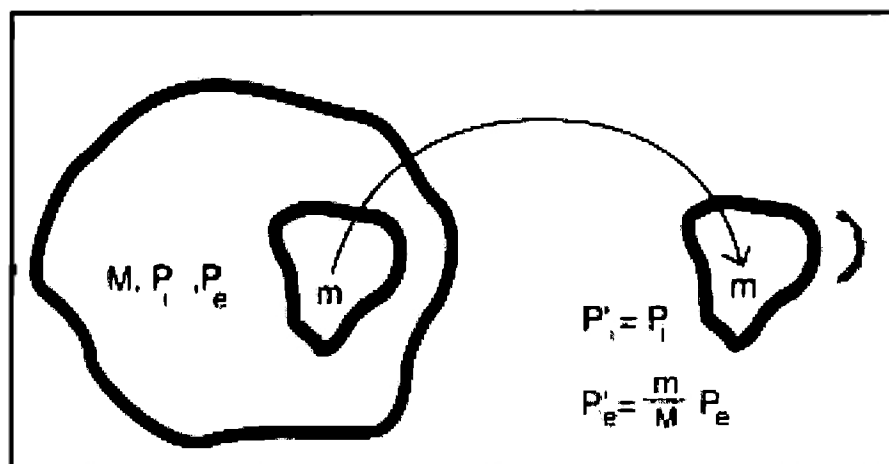


Figura 3.2 Propiedades intensiva y extensiva en un material homogéneo. [34]

Si en lugar de un medio continuo se considera un sistema de partículas y en él se desea definir una propiedad puntual, surge la pregunta de cuál debe ser el tamaño adecuado del volumen mínimo tal que existan suficientes partículas en su interior como para que la definición de la propiedad tenga sentido. Por ejemplo, Prandtl y Tietjens discuten el caso de la masa específica, que corresponde a la cantidad de materia por unidad de volumen. Al hacer tender el volumen a cero para que represente un punto, es posible que se alcance un volumen del tamaño de la

trayectoria media de las partículas de tal manera que el resultado es variable dependiendo de la cantidad de partículas que se encuentren en su interior. Esto ocurrirá a menos que el volumen sea tan que la cantidad de partículas en él no varíe prácticamente por hecho de que existan algunas que entran y otras que salen. Lo que ocurre con la masa específica así definida en función del volumen puede apreciarse en la figura 3.3.

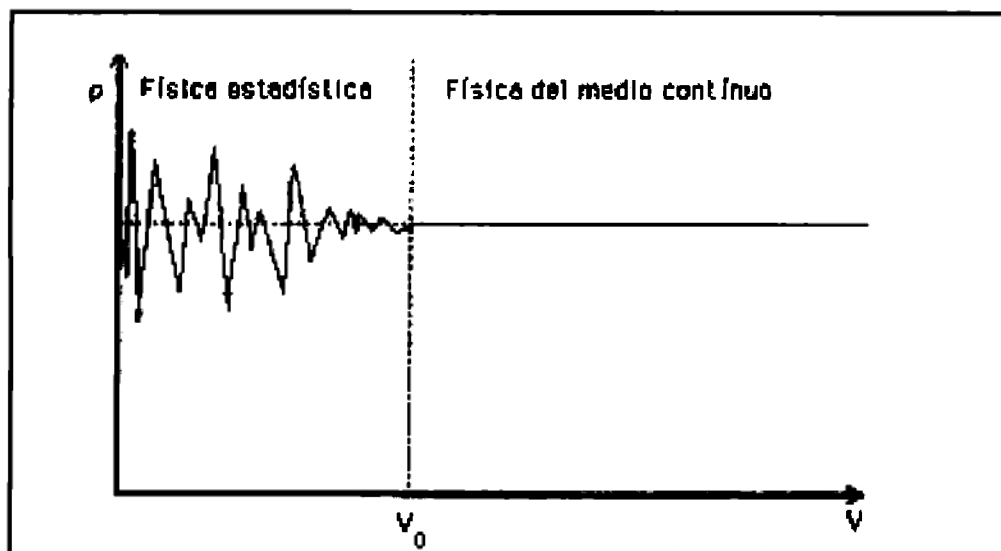


Figura 3.3 Variaciones de la masa específica en función del volumen. [34]

Si es posible elegir ν mayor a ν_0 el sistema se comporta como un medio continuo. En la práctica si se considera el caso de los fluidos, ν_0 resulta ser tan pequeño en dimensiones que perfectamente puede representar un punto, y el fluido puede considerarse sin errores como un medio continuo.[34]

3.1.3 PROPIEDADES Y CLASIFICACIÓN DE LOS FLUIDOS

Para comprender el movimiento de un fluido, es necesario utilizar varios términos o definiciones, para describir el estado físico del mismo. A continuación se presentan algunos conceptos esenciales para tal descripción y un esquema de clasificación de los fluidos.

3.1.3.1 Presión

La presión se define como la fuerza por unidad de área ejercida en la dirección normal a tal área. En un fluido en reposo, la presión es igual en todas direcciones.

La presión en un punto es causada por una fuerza normal que empuja contra un plano definido en el fluido o contra una superficie plana que está en contacto con el fluido. La presión en un punto es la relación entre la fuerza normal y el área del plano a medida que dicha área se aproxima a un valor muy pequeño que incluya el punto. La presión, p , tiene unidades de fuerza por unidad de área, las cuales pueden ser newtons por metro cuadrado, llamadas pascales (Pa), libras por pie cuadrado (psf) o libras por pulgada cuadrada (psi).

Normalmente los líquidos no pueden soportar esfuerzos de tensión porque se vaporizarían. Por consiguiente, las presiones absolutas nunca se utilizan negativas, debido a que esto implicaría que el fluido está soportando un esfuerzo de tensión. Con frecuencia, los líquidos pueden soportar una presión considerable o una fuerza de compresión con un pequeño o ningún cambio observable en la densidad. Sin embargo, no existen relaciones universales entre la presión y la densidad para un líquido.

3.1.3.2 Densidad

La densidad se define como la cantidad de masa contenida en una unidad de volumen y es designada por el símbolo ρ . La densidad, como otras propiedades del fluido, es función de la temperatura, la presión y la posición. Para el caso de los gases, la densidad depende enormemente de estas propiedades, sin embargo los líquidos dependen ligeramente.

Frecuentemente, se considera que la densidad de un líquido es constante, en tal caso se dice que el fluido es *incompresible*, de otra forma se dice que es *compresible* como ocurre generalmente con los gases.

3.1.3.3 Viscosidad

Cuando un esfuerzo cortante τ actúa sobre un fluido, las capas de éste se deslizarán unas sobre otras a diferentes velocidades v , ocasionando que el fluido se deforme. En esta situación se ha observado que la velocidad de deslizamiento de las capas es directamente proporcional a τ y a la separación de las capas y , con respecto a una superficie fija a la cual la capa inmediata se adhiere, además es inversamente proporcional al coeficiente de viscosidad, μ , el cual representa la resistencia del fluido a moverse bajo la influencia de agentes externos. Matemáticamente podemos expresar el concepto anterior como,

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad (3.3)$$

En un fluido newtoniano existe una relación lineal entre la magnitud del esfuerzo cortante aplicado y la tasa de deformación resultante (μ en la ecuación (3.3) es constante), tal como se muestra en la figura 3.4. En un fluido no newtoniano existe una relación no lineal entre la magnitud del esfuerzo cortante aplicado y la tasa de deformación angular. La distinción entre fluidos newtonianos y fluidos no-newtonianos se basa básicamente en la diferente relación que existe en unos y otros entre la aplicación de un esfuerzo tangencial y la velocidad con que se deforman.

Un fluido Newtoniano, también llamado fluido verdadero es aquel que, sometido a un esfuerzo tangencial o cortante, se deforma con una velocidad que es proporcional directamente al esfuerzo

aplicado. Dicho de otra forma: si se aplica un esfuerzo tangencial a un fluido newtoniano, este se pondrá en movimiento sin importar cuán pequeño sea el esfuerzo tangencial y se generará una cierta distribución de velocidad en el fluido. Ese esfuerzo tangencial y el gradiente de velocidad que se produce serán directamente proporcionales a la constante de proporcionalidad y se le define como viscosidad.

Contrariamente a los fluidos anteriormente descritos, que exhiben una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación, algunos fluidos muestran una relación esfuerzo cortante, velocidad de deformación como la que se indica en la *figura 3.5*.

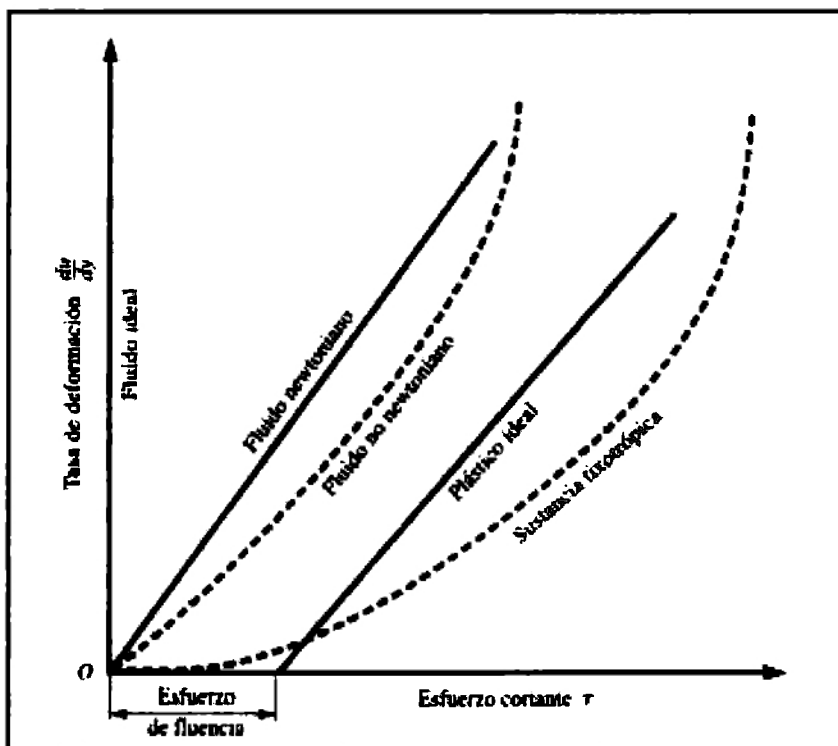


Figura 3.4 Diagrama Reológico

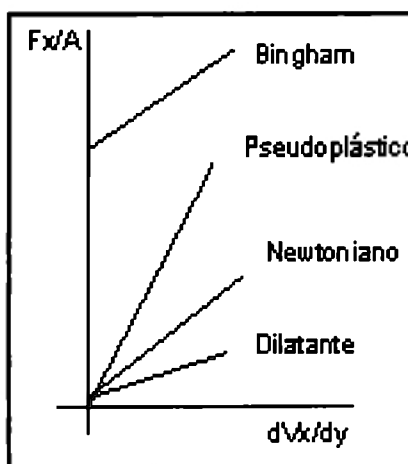


Figura 3.5 Representación de distintos modelos de la relación velocidad de esfuerzos vs. Velocidad de deformación

Al *modelo de Bingham*, que representa aceptablemente bien a las pinturas, barnices y algunos productos alimenticios, corresponde, en el supuesto de flujo dentro de una tubería el desarrollo de un perfil de velocidad "normal" en cercanías de las paredes, donde el esfuerzo cortante es mayor y un perfil completamente plano en la cercanía del eje de la tubería, donde el esfuerzo cortante se encontraría por debajo de un valor crítico.

El *modelo pseudoplástico* que representa adecuadamente el comportamiento de algunas suspensiones como pulpa de papel, napalm en kerosene, etc., corresponde el desarrollo de un perfil de velocidad aplanado en el centro, semejante a la representación de los perfiles turbulentos. El modelo dilatante que represente el comportamiento de algunas pastas corresponde al desarrollo de un perfil de velocidad cónico.

Un *plástico ideal* tiene un esfuerzo de fluencia definido y una relación lineal constante de τ a du/dy . Una sustancia *tixotrópica*, tal como la tinta de una impresora, tiene una viscosidad que depende de la deformación angular inmediata anterior de la sustancia y tiene una tendencia a solidificarse cuando se encuentra en reposo. Los gases y los líquidos más comunes tienden a ser fluidos newtonianos, mientras que los hidrocarburos espesos y de cadenas largas pueden ser no newtonianos.

Además de la clasificación anterior, también se distinguen los *fluidos estacionarios* o también conocidos como *fluidos permanentes* y *los fluidos no-estacionarios*. En el primer caso, el fluido no cambia su estado de equilibrio al transcurrir el tiempo, a diferencia del segundo tipo de fluidos que sí lo hace.

3.1.3.3.1 Viscosidad absoluta

La viscosidad es aquella propiedad del fluido mediante la cual éste ofrece resistencia al esfuerzo cortante. La ley de viscosidad de Newton (*Ecuación (3.3)*) establece, que para una tasa dada de deformación angular del fluido, el esfuerzo cortante es directamente proporcional a la viscosidad. La viscosidad de un gas se incrementa con la temperatura, mientras que la de un líquido disminuye. Estas variaciones causadas por la temperatura pueden explicarse examinando las causas de la viscosidad. La resistencia de un fluido al corte, depende de su cohesión y de la tasa de transferencia de momentum molecular. Un líquido, con moléculas mucho más cercanas que un gas, tiene fuerzas cohesivas mayores que las de un gas. Por consiguiente la cohesión parece ser la causa predominante de la viscosidad en un líquido y puesto que disminuye con la temperatura, la viscosidad también lo hace. Un gas, por otro lado, tiene fuerzas cohesivas muy pequeñas. La mayoría de su resistencia al esfuerzo cortante es el resultado de la transferencia de momentum molecular.

Dentro de un fluido siempre existe transferencia de moléculas a través de cualquier superficie ficticia dibujada en él. Cuando una capa se mueve con respecto a otra adyacente, la transferencia de momentum molecular mueve momentum de un lado a otro, de tal manera que se genera un esfuerzo cortante aparente que resiste el movimiento relativo y tiende a igualar las velocidades de

las dos capas adyacentes de forma análoga a la de la *figura 3.6*. La medida del movimiento de una capa con respecto a la capa adyacente es du/dy .

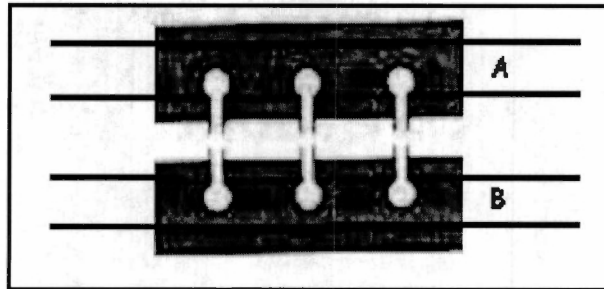


Figura 3.6 Modelo que ilustra la transferencia de momentum. [33]

La actividad molecular causa un esfuerzo cortante aparente en gases, que es más importante que el de las fuerzas cohesivas, y puesto que la actividad molecular se incrementa con la temperatura, la viscosidad del gas también. Para presiones ordinarias, la viscosidad es independiente de la presión y depende únicamente de la temperatura. Para presiones muy grandes, los gases y la mayoría de los líquidos muestran variaciones erráticas de la viscosidad con la presión.

Un fluido en reposo o en movimiento de tal manera que ninguna capa se mueva con respecto a las capas adyacentes, no generará fuerzas cortantes aparentes, a pesar de la viscosidad, debido a que du/dy es cero a través del fluido. Por consiguiente, en el estudio de la *estática de fluidos* no se pueden considerar fuerzas cortantes debido a que ellas no ocurren en un fluido estático, y los únicos esfuerzos que permanecen son los normales, o presiones. Esto simplifica notablemente el estudio de la *estática de fluidos*, debido a que cualquier cuerpo libre de un fluido puede tener únicamente fuerzas gravitacionales y fuerzas normales a sus superficies que actúan sobre él.

Las dimensiones de la viscosidad se determinan utilizando la ley de viscosidad de Newton *ecuación 3.3*. Resolviendo para la viscosidad μ :

$$\mu = \frac{\tau}{du/dy} \quad (3.4)$$

e insertando las dimensiones F , L y T para fuerza, longitud y tiempo, respectivamente:

$$\tau : FL^{-2} \quad u : LT^{-1} \quad y : L$$

muestra que μ tiene las dimensiones $FL^{-2}T$. Con la dimensión fuerza expresada en términos de masa, utilizando la segunda ley de movimiento de Newton, $F = MLT^{-2}$, las dimensiones de la viscosidad pueden expresarse como $ML^{-1}T^{-1}$.

La unidad de viscosidad del SI, newton-segundo por metro cuadrado ($N*s/m^2$) o kilogramo por metro-segundo ($kg/m*s$), no tiene nombre. La unidad de viscosidad USC (también sin nombre) es

1 lb*s/pie² o 1 slug/pie*s (estas dos son idénticas). Una unidad común de viscosidad en el sistema cgs, se conoce como el poise (P); este es 1 dina*s/cm² o 1 g/cm*s. La unidad SI es 10 veces mayor que la unidad Poise.

3.1.3.3.2 Viscosidad cinemática

La viscosidad μ frecuentemente se conoce como viscosidad *absoluta* o viscosidad *dinámica* para evitar confundirla con la viscosidad *cinemática* ν , que es la relación de la viscosidad con la densidad de masa:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (3.5)$$

La viscosidad cinemática aparece en muchas aplicaciones, por ejemplo, en el número adimensional de Reynolds para el movimiento de un cuerpo dentro de un fluido, Vl/ν , en donde V es la velocidad el cuerpo y l es una medida lineal representativa del tamaño de éste.

La viscosidad es prácticamente independiente de la presión y depende únicamente de la temperatura. La viscosidad cinemática de los líquidos y de los gases a una presión dada es sustancialmente una función de la temperatura. [33]

3.1.3.4 Fluido no viscoso en movimiento

Un fluido con una viscosidad teóricamente igual a cero se conoce como un fluido no viscoso. Debido a que en regiones de muchos flujos los efectos viscosos son insignificantes, esta idealización, con sus simplificaciones resultantes, puede utilizarse a menudo con grandes ventajas. Se aplicará la ley de movimiento de Newton para una masa prismática infinitesimal de fluido dentro del flujo. Es decir que un fluido es no viscoso cuando no existen fuerzas de rozamiento entre las capas del fluido. Además, para un fluido no viscoso en movimiento, al igual que en el caso de un fluido en reposo o fluidos viscosos con movimientos uniforme, el esfuerzo en un punto es una cantidad escalar.

3.1.3.5 Flujos laminares y turbulentos

Es conocido que la viscosidad afecta a los fluidos cuando estos fluyen y se pueden identificar dos casos, los cuales pueden ser, en algunas ocasiones, observados en el mismo fluido. Tomando por ejemplo el humo de un cigarrillo el cual se observa que al desprenderse del cigarrillo lo hace en forma casi constante y uniforme a corta distancia de la fuente y que después cambia abruptamente su comportamiento para formar un patrón irregular e inestable. A la primera situación se le conoce como flujo laminar y a la segunda como flujo turbulento.

En general se puede afirmar que un flujo es laminar cuando las capas adyacentes del mismo “resbalan” o fluyen una sobre la otra sin dificultad, sin que exista de forma aparente un

intercambio de masa, energía o momentum en dirección normal a las líneas de flujo del fluido. Por otra parte, el flujo turbulento sí presenta transporte de masa entre capas y en consecuencia existe transferencia no sólo de masa, sino también de momentum y energía.

Es conocido que la velocidad, junto con la densidad y la viscosidad del fluido son los elementos que determinan la transición de un flujo laminar a un flujo turbulento. En 1883 Osborne Reynolds al estudiar las diferencias entre flujos laminar y turbulento, observó que el tipo de flujo dependía del parámetro adimensional VD/ν , donde V es la velocidad promedio del fluido en un tubo de diámetro D y $\nu \equiv \mu_m/\rho$ es la viscosidad cinemática del fluido en movimiento. Más generalmente, el *número de Reynolds* se define como:

$$Re \equiv \frac{Vl}{\nu} \quad (3.6)$$

donde l es una longitud característica. Generalmente en un tubo el movimiento del fluido es turbulento para $Re > 2000$. en un flujo sobre una placa plana, cuando la longitud de la placa se toma como la longitud característica, la transición de flujo laminar a flujo turbulento ocurre generalmente cuando $300000 < Re < 600000$. La velocidad en el flujo turbulento consta del valor promedio \bar{V} y de una parte fluctuante V' :

$$V = \bar{V} + V' \quad (3.7)$$

promediando sobre un período largo de tiempo, tendremos:

$$\bar{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} V dt \quad (3.8)$$

es decir, que las fluctuaciones se cancelan a la larga. Cualquier propiedad del fluido, como la viscosidad, μ , puede promediarse de la misma forma con respecto al tiempo: $\mu = \bar{\mu} + \mu'$.

La ecuación para el esfuerzo cortante en un flujo laminar es:

$$\tau = \mu_f \frac{du}{dy} \quad (3.9)$$

no es válida si el flujo es turbulento. La relación se complica por la *viscosidad de remolino* ϵ , que es una función del movimiento de flujo y de la densidad del líquido:

$$\tau = \left(\mu_f + \frac{\rho}{g_c} \epsilon \right) \frac{du}{dy} \quad (3.10)$$

la viscosidad de remolino ε no es una propiedad del fluido como sí lo es la viscosidad absoluta μ . [35]

3.1.4 MOVIMIENTO DE UN FLUIDO

Existen tres formas básicas de atacar un problema de flujo de un fluido, por análisis integral o de volúmenes de control, análisis diferencial o de sistemas infinitesimales y análisis dimensional o experimentación.

En todos los casos el flujo debe satisfacer las tres leyes básicas de conservación de la mecánica (masa, momentum y energía), una relación termodinámica de estado, por ejemplo $\rho = \rho(p, T)$, y condiciones de frontera asociadas en las superficies, interfaces, ductos de entrada, salida, etc.

En los análisis integral y diferencial, estas cinco condiciones son modeladas matemáticamente y resueltas por métodos computacionales. En el análisis experimental, el fluido se comprueba que cumpla las condiciones sin necesidad de desarrollos matemáticos. En otras palabras, las condiciones mencionadas son cumplidas por todos los fluidos conocidos.

Un volumen de control es una región finita, elegida cuidadosamente por el investigador, con fronteras abiertas, a través de las cuales la masa, el momentum y la energía pueden cruzar libremente. El investigador realiza un balance entre las entidades físicas entrantes y salientes del fluido y los cambios totales dentro del volumen de control. El resultado es una herramienta muy poderosa pero algo burda, pues en ocasiones parte de la información se pierde cuando los cambios ocurren a nivel local.

Cuando las leyes de conservación son escritas para un sistema infinitesimal en el fluido que se mueve, se obtienen las ecuaciones diferenciales básicas que describen el movimiento del fluido. Para aplicarlas a un problema específico, uno debe de integrar estas ecuaciones, las cuales están sujetas a las condiciones de frontera. En ocasiones es posible obtener soluciones analíticas exactas, pero generalmente esto ocurre en situaciones con geometrías simples. De no ser así, debemos recurrir a soluciones numéricas en computadora.

Para lograr esta descripción, se supone la existencia de un medio continuo, como se presentó en el capítulo anterior, pero aún resta determinar el sistema de referencia con respecto al cual se derivarán las ecuaciones propuestas. Para este fin, existen dos posibilidades, el sistema de referencia de Euler y el de Lagrange.

Posteriormente, al tener determinado el sistema de referencia, se presentará el teorema de transporte de Reynolds, el cual expresa las derivadas de un sistema de control en los fluidos en términos de integrales de volumen y superficie.

3.1.4.1 Sistemas de referencia

Supóngase la existencia de un fluido que se mueve con una velocidad promedio \mathbf{u} y el cual nos interesa analizar. Para tal fin concentraremos nuestra atención en un volumen de control a través del cual la masa, el momentum y la energía pueden cruzar libremente. Para este sistema simplificado, existen dos posibilidades de análisis pero que deben conducir a resultados iguales. La primera posibilidad consiste en que el volumen de control infinitesimal sea constante y que además este fijo en el tiempo y en el espacio y donde el número de partículas puede variar dentro del volumen. Esto significa que la cantidad de partículas que entran es diferente al número que sale. A esta representación se le llama Sistema de Referencia de Euler. En otras palabras, el observador está fijo y el volumen de control es constante.

La segunda posibilidad es la de un volumen de control infinitesimal pero variable que contenga una cantidad constante de partículas, y que el observador se mueve junto con el elemento de volumen. A esta representación se le conoce como Sistema de Referencia de Lagrange.

Ahora bien, supóngase la existencia de un fluido que se mueve con velocidad promedio $\mathbf{u} \equiv (u_x, u_y, u_z)$. Nos interesa conocer cómo una variable representativa del campo, α , cambia en el tiempo. Para este fin, elegimos el sistema de referencia de Euler, en el que el observador está fijo, el volumen de control es constante y la variable α cambia en la posición y en el tiempo.

De las consideraciones anteriores tenemos,

$$\delta\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial t} \delta t + \frac{\partial\alpha}{\partial x} \delta x + \frac{\partial\alpha}{\partial y} \delta y + \frac{\partial\alpha}{\partial z} \delta z \quad (3.11)$$

pero los cambios infinitesimales en la posición deben ser relacionados directamente con la velocidad del fluido $\delta\mathbf{s} = \mathbf{u} \delta t$,

$$\frac{\delta\alpha}{\delta t} \equiv \frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + u_x \frac{\partial\alpha}{\partial x} + u_y \frac{\partial\alpha}{\partial y} + u_z \frac{\partial\alpha}{\partial z} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha \quad (3.12)$$

Debe notarse sin embargo, que $D\alpha/Dt$ representa en el sistema de referencia de Lagrange la derivada total, pues es la única variable independiente, por lo que la última ecuación nos muestra la forma de transformar del sistema euleriano al lagrangiano, mediante el operador conocido como derivada substancial, material o convectiva,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \quad (3.13)$$

donde el primer término representa la variación local, que en el caso de un fluido estacionario desaparece y el segundo término representa la variación convectiva la cual describe la variación de una variable del campo cuando existe un cambio en la posición. Debe notarse que este término

puede inducir grandes cambios aún cuando el fluido sea estacionario, además matemáticamente presenta una complicación, pues se trata de un término no lineal que introduce algunas dificultades matemáticas.

3.1.4.2 Teorema de Transporte de Reynolds

Para convertir el análisis de un sistema completo en el análisis en un volumen de control, deduciremos un método que nos permita convertir las leyes físicas y matemáticas que gobiernan a las partículas individuales del sistema, en nuevas expresiones que serán aplicables a la región específica de interés.

Esta técnica de conversión se conoce como “teorema de transporte de Reynolds” y puede ser aplicado a todas las leyes básicas que rigen el comportamiento de los fluidos. Además si observamos con cuidado, notaremos que todas las leyes que gobiernan a los fluidos involucran la derivada con respecto al tiempo del sistema de interés.

Supóngase que se tiene la variable de campo α (que puede ser densidad, masa, temperatura, velocidad, etc.) y que nos interesa investigar cómo evoluciona en el tiempo pero desde un punto de vista global, esto es, en todo el volumen del fluido bajo investigación. Para este fin, se utilizan integrales de volumen como se muestra a continuación,

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha(t) dV &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_{V(t+\delta t)} \alpha(t+\delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(t) dV \right] \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta t} \left[\int_{V(t+\delta t)} \alpha(t+\delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(t+\delta t) dV \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\delta t} \left[\int_{V(t)} \alpha(t+\delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(t) dV \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Debe notarse que los primeros dos términos representan una integral de volumen resultante de la variable de campo α , evaluada al tiempo $t + \delta t$.

También debe notarse, que los últimos dos términos representan integrales sobre el mismo volumen V al tiempo t , y que la variable de campo α es evaluada a los tiempos t y $t + \delta t$, por lo que representan la integral de volumen de la derivada de la variable de campo α con respecto al tiempo. Entonces ahora se tiene,

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha(t) dV = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int_{V(t+\delta t)-V(t)} \alpha(t+\delta t) dV + \int_{V(t)} \frac{\partial \alpha(t)}{\partial t} dV \quad (3.15)$$

Debe notarse que la diferencial de volumen está dada como $dV = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \delta t dS$, que expresa el cambio de volumen entre los tiempos t y $t + \delta t$. De este modo se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \alpha(t) dV &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \int_{s(t)} \alpha(t + \delta t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{v(t)} \frac{\partial \alpha(t)}{\partial t} dV \\ &= \int_{s(t)} \alpha(t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{v(t)} \frac{\partial \alpha(t)}{\partial t} dV \end{aligned} \quad (3.16)$$

También al utilizar el teorema de la divergencia se tiene la siguiente expresión,

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \alpha(t) dV = \int_{v(t)} \left[\frac{\partial \alpha(t)}{\partial t} + \nabla \cdot \alpha(t) \mathbf{u} \right] dV \quad (3.17)$$

Las últimas dos ecuaciones son conocidas como el *Teorema de Transporte de Reynolds*.

3.1.5 CONSERVACIÓN DE LA MASA

Es bien conocido, que un sistema físico debe obedecer las leyes de la mecánica, tales como conservación de masa, conservación del momentum y conservación de energía.

Por tanto, para analizar como se comportan los fluidos al transcurrir el tiempo, es importante expresar las leyes de mecánica, en términos de integrales de volumen de control.

Para este fin, utilizaremos el teorema de transporte de Reynolds, el cual establece una relación entre la derivada total con respecto al tiempo del sistema e integrales de superficie y volumen.

La aplicación inicial de las leyes fundamentales de la mecánica a los fluidos, es la ley de conservación de la masa para un volumen general de control, que por conveniencia elegimos en el sistema de referencia de Lagrange, pues sabemos que la cantidad de partículas es constante y por tanto, tenemos que la masa no se crea ni se destruye. En otras palabras, significa que la masa es constante, por lo que se puede expresar de manera adecuada con el teorema de transporte de Reynolds, donde la variable de campo α es la masa, por tanto, se tiene,

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = \int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \right] dV = 0 \quad (3.18)$$

Como se trata de un volumen de control arbitrario, significa que el integrando es el que se anula, por tanto, la ley de conservación de la masa para un control de volumen infinitesimal es,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \quad (3.19)$$

Esta ecuación es frecuentemente llamada *Ecuación de Continuidad* porque no requiere de más suposiciones que la de considerar a la densidad y la velocidad como funciones continuas. Esto significa que esta ecuación es válida para flujo estacionario o no estacionario, viscoso o no viscoso, compresible o incompresible. Pero sin embargo, esta ecuación es una fuerte restricción para la existencia de fuentes o sumideros dentro del volumen de control infinitesimal.

Ahora bien, es posible simplificar aún más la ecuación anterior. Consideremos la existencia de un fluido incompresible, esto es, la densidad es constante y diferente de cero, por tanto la ecuación que gobierna el movimiento de un fluido incompresible es,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.20)$$

3.1.6 CONSERVACIÓN DEL MOMENTUM

La segunda de las leyes físicas fundamentales en la que se basa el análisis del flujo de fluidos es la segunda ley de Newton del movimiento,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (3.21)$$

donde F_{ext} es la fuerza resultante externa que actúa sobre el fluido y modifica su movimiento y p es el momentum total del fluido en estudio. Por simplicidad, las fuerzas se clasifican en dos grupos, las electromagnéticas y gravitacionales y las debidas a la presión y a la viscosidad.

Consideremos el primer grupo de fuerzas representadas aquí por una fuerza resultante por unidad de masa, f , por lo que la fuerza neta total del primer grupo será,

$$\int_V \rho \mathbf{f} dV \quad (3.22)$$

Por otra parte, el segundo grupo de fuerzas, representadas por una fuerza resultante por unidad de área, P , producen una fuerza neta total,

$$\int_S \mathbf{P} dS \quad (3.23)$$

Por otro lado, si se representa el momentum por unidad de volumen como $\mathbf{p} = \rho \mathbf{u}$, donde u es la velocidad del fluido, se tiene que el momentum total p está dado por,

$$\int_V \rho \mathbf{u} dV \quad (3.24)$$

De este modo, la variación de la cantidad de movimiento total con respecto al tiempo, está dada por:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_S \mathbf{P} dS + \int_V \rho \mathbf{f} dV \quad (3.25)$$

La ecuación anterior por simplicidad la expresamos en componentes,

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u_i dV = \int_S P_i dS + \int_V \rho f_i dV \quad (3.26)$$

Las fuerzas debidas a presión y viscosidad, pueden ser representadas mediante un tensor, el llamado tensor de esfuerzos σ , de modo que $P_i = \sigma_{ji} n_j$, donde n_j es el vector normal unitario a la superficie en la dirección j . De acuerdo con lo anterior, la ecuación de movimiento puede ser escrita como,

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u_i dV = \int_S \sigma_{ji} n_j dS + \int_V \rho f_i dV \quad (3.27)$$

Aplicando el teorema de transporte de Reynolds y el teorema de la divergencia, se obtiene,

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_i u_j \right] dV = \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV + \int_V \rho f_i dV \quad (3.28)$$

y puesto que se trata de un volumen arbitrario, se puede expresar finalmente en forma diferencial, como sigue,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_i u_j = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (3.29)$$

expandiendo se tiene,

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_j \right] + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (3.30)$$

y al aplicar la ecuación de continuidad, el término en corchetes desaparece, por lo que la ecuación de movimiento o de conservación del momentum se transforma en,

$$\rho \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (3.31)$$

y en forma vectorial se tiene,

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right] = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} \quad (3.32)$$

3.1.7 ECUACIÓN DE ENERGÍA

La última ecuación básica de interés es la ecuación de energía y para obtenerla aplicaremos el teorema de transporte de Reynolds a la Primera Ley de la Termodinámica.

Para obtener esta expresión necesitamos primero establecer la existencia de ciertas cantidades físicas, como son:

- La energía del fluido por unidad de masa E , que está formada por

$$E = e_{\text{interna}} + e_{\text{cinética}} + e_{\text{potencial}} + e_{\text{otras}}$$

- La velocidad del fluido u .
- La fuerza total por unidad de masa f , que actúa sobre el fluido.
- El flujo de calor q , que entra o sale del fluido.
- La fuerza superficial por unidad de área P , que actúa sobre el fluido.

La 'energía' e_{otras} puede incluir reacciones químicas, reacciones nucleares, y efectos magnéticos y eléctricos, los cuales no consideraremos en nuestro estudio. Además, para nuestros fines no incluiremos la contribución de $e_{\text{potencial}}$, aunque en caso necesario podría considerarse formando parte de la e_{interna} . Por tanto, sólo analizaremos la contribución a la energía interna y cinética que de ahora en adelante llamaremos e_{int} y e_k .

La Primera Ley de la Termodinámica está dada como:

$$dU = dW - dQ \quad (3.33)$$

donde U es la energía total del fluido, W el trabajo realizado sobre el fluido o por el fluido y Q el calor intercambiado en los procesos, el cual si es necesario puede ser estudiado en detalle, al considerar transferencia de calor por conducción, convección y radiación.

En el presente caso observamos lo siguiente:

- La energía total del fluido es,

$$\int_V \rho(e_{\text{int}} + e_k) dV = \int_V \left(\rho e_{\text{int}} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) dV \quad (3.34)$$

- El trabajo realizado por unidad de tiempo sobre el fluido es,

$$\int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{P} dS + \int_V \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{f} dV \quad (3.35)$$

- El calor neto emitido por unidad de tiempo es,

$$\int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.36)$$

Con la información anterior la Primera Ley de la Termodinámica se puede transformar en,

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left(\rho e_{\text{int}} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) dV = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{P} dS + \int_V \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{f} dV - \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.37)$$

a esta última expresión le aplicamos el teorema de transporte de Reynolds y obtenemos,

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e_{\text{int}} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) + \nabla \cdot \left(\rho e_{\text{int}} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{u} \right] dV = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} - \nabla \cdot \mathbf{q}) dV \quad (3.38)$$

donde hemos utilizado el teorema de la divergencia y la definición de fuerzas superficiales en términos del tensor de esfuerzos.

Puesto que no hemos especificado las características del volumen de integración, significa que es arbitrario y por tanto el integrando es el que es nulo, por tanto tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e_{\text{int}} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) + \nabla \cdot \left(\rho e_{\text{int}} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (3.39)$$

La ecuación anterior la podemos simplificar aún más si aplicamos la ley de continuidad y la ley de conservación del momentum. Después de realizar este procedimiento obtenemos *la expresión de la Ecuación de Energía*,

$$\rho \left(\frac{\partial e_{\text{int}}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla e_{\text{int}} \right) = \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (3.40)$$

o expresada en forma de componentes tenemos, [36]

$$\rho \left(\frac{\partial e_{\text{int}}}{\partial t} + u_k \frac{\partial e_{\text{int}}}{\partial x_k} \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \quad (3.41)$$

3.2 TRANSFERENCIA DE CALOR

3.2.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

La *energía* es una cantidad física que define el estado dinámico (translación, rotación, vibración), de un sistema. El calor es un tipo de energía transferida entre las partículas (átomos, moléculas o electrones libres) de un sistema, desde las regiones de mayor temperatura hacia las regiones de menor temperatura.

La *Termodinámica* es la ciencia que establece las relaciones físicas entre el calor y otras formas de energía, relacionando los estados de equilibrio iniciales y finales del sistema. A diferencia de este caso, la transferencia de calor analiza la rapidez de la transferencia de calor entre las partes del sistema, considerando la evolución del mismo durante el transcurso del tiempo.

La *temperatura* es una propiedad física que cuantifica la cantidad de energía cinética de las partículas que componen un sistema. Experimentalmente se ha observado que existe flujo de calor, desde la región de mayor a la de menor temperatura. El *flujo de calor* es la cantidad de calor transferido por unidad de área por unidad de tiempo y su magnitud es proporcional a la magnitud del gradiente de temperatura en el sistema.

Los mecanismos de transferencia de calor en un sistema son: Conducción, Convección y Radiación.

3.2.1.1 Conducción de calor. Ley de Fourier.

La conducción de calor se presenta en cuerpos sólidos. El calor se transfiere desde las zonas de mayor temperatura hacia las zonas de menor temperatura, por medio de la interacción e intercambio de energía entre las partículas, las cuales oscilan rápidamente y al chocar con partículas vecinas, les ceden energía y les transfieren movimiento. El proceso se repite continuamente y se propaga a través de todo el sistema.

En un sólido homogéneo e isotrópico (la conductividad térmica k es independiente de la dirección), el flujo de calor está dado por la Ley de Fourier:

$$\dot{q}''(\mathbf{r}, t) = -k\nabla T(\mathbf{r}, t) \quad (3.42)$$

donde:

Flujo de calor	q''	W/m ²
Temperatura	T	K, °C
Conductividad térmica	k	W/mK W/m °C

3.2.1.1.1 Rango Típico de Conductividad Térmica para Varios Materiales

Normalmente, los materiales sólidos conducen el calor con mayor facilidad y los fluidos conducen el calor con menor facilidad. La propiedad que caracteriza esta facilidad para transmitir el calor, se conoce como *conductividad térmica*.

Los sólidos, entre los que destacan los metales, poseen un mayor valor de la conductividad térmica.

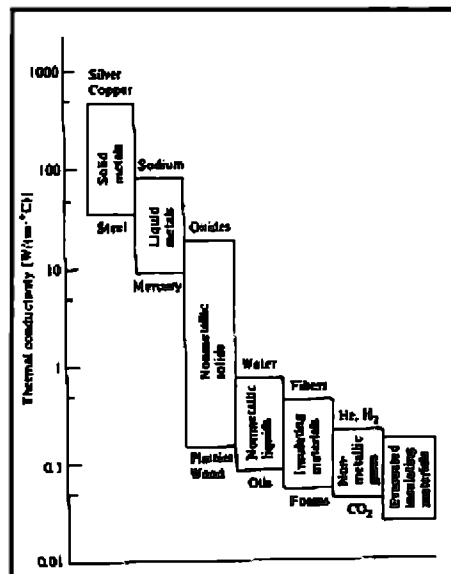


Figura 3.7 Rango típico de conductividad térmica para varios materiales. [45]

3.2.1.1.2 Efecto de la Temperatura en la Conductividad Térmica de los Materiales

Experimentalmente se ha observado, que la conductividad térmica no posee un valor constante, sino que debido a diversas condiciones, esta propiedad varía. A continuación se muestra la dependencia de la conductividad térmica con respecto a la temperatura.

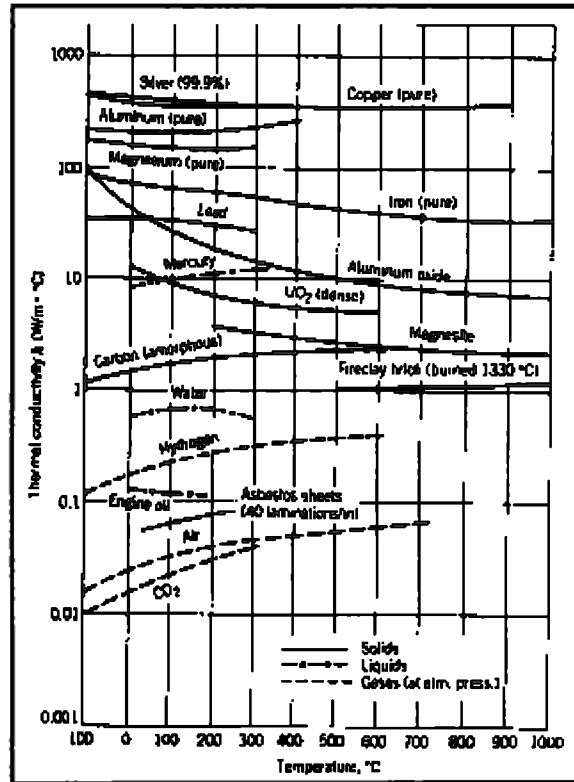


Figura 3.8 Efecto de la temperatura en la conductividad térmica de los materiales. [45]

3.2.1.1.3 Conductividad Térmica de Metales a Bajas Temperaturas

También se ha observado experimentalmente, que los metales, quienes poseen un mayor valor de la conductividad térmica, varía su valor a temperaturas muy bajas, como se muestra a continuación.

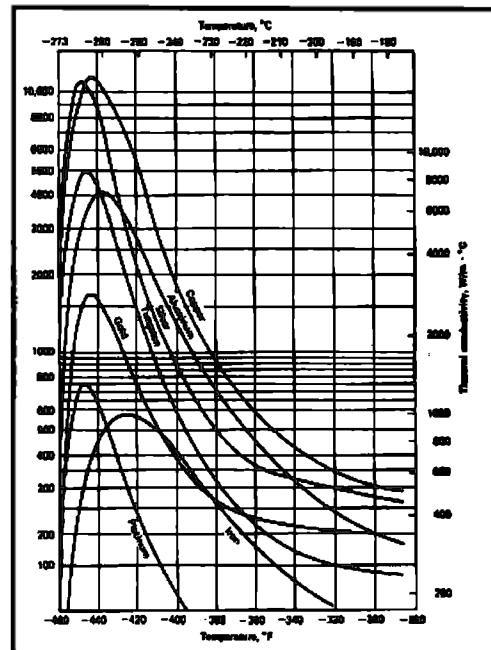


Figura 3.9 Conductividad térmica de metales a bajas temperaturas. [45]

3.2.1.2 Convección de calor. Ley de Enfriamiento de Newton.

La convección de calor ocurre cuando un fluido se mueve sobre un cuerpo sólido o dentro de un canal y cuando las temperaturas del fluido y el sólido son diferentes.

La convección forzada ocurre cuando el fluido es movido por medios externos mecánicos, tales como bombas, ventiladores, etc. La convección natural ocurre cuando el fluido se mueve por efectos de flotación, como resultado de diferencia de densidades y causado por diferencia de temperaturas.

La transferencia de calor por convección de una superficie caliente a temperatura T_w hacia un fluido frío que fluye sobre aquella con temperatura T_f , está dada por la *Ley de Enfriamiento de Newton*:

$$\dot{q}''(\mathbf{r}, t) = h(T_w - T_f) \quad (3.43)$$

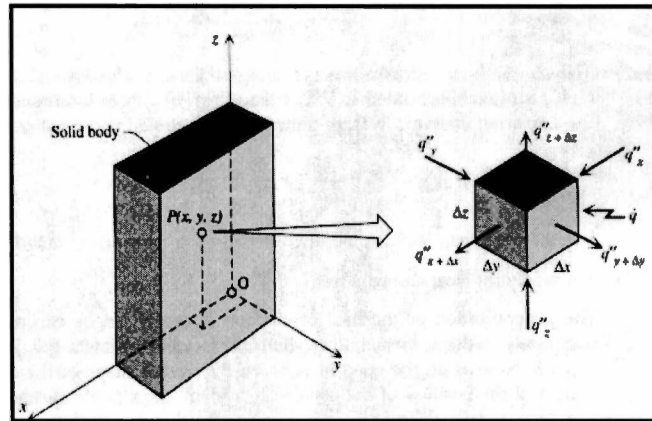
donde h está expresado en unidades $W/(m^2K)$ o $W/(m^2\ ^\circ C)$.

3.2.1.2.1 Efecto de la Temperatura sobre el Coeficiente de Transferencia h

El coeficiente de transferencia de calor h varía con respecto a: el tipo de fluido (laminar o turbulento), la geometría del cuerpo y el área de paso del fluido, propiedades físicas del fluido, temperatura promedio, posición relativa con respecto al sólido y mecanismo de convección (natural o forzada).

3.2.1.3 Análisis de la Transferencia de Calor por Conducción.

Se analiza la cantidad de calor que cruza una unidad de volumen y se realiza un balance de energía en este volumen de control: [46]



Rapidez de calor neto que
cruza la superficie del
volumen de control

+

Rapidez de generación
de calor en el volumen
de control

=

Rapidez de almacenamiento
de energía en el volumen de
control

$$-\int_A \mathbf{q}'' \cdot \mathbf{n} dA + \int_V g(\mathbf{r}, t) dv = \int_V \rho C_p \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dv$$

$$\int_V \left[-\nabla \cdot \mathbf{q}''(\mathbf{r}, t) + g(\mathbf{r}, t) - \rho C_p \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] dv = 0 \quad (3.44)$$

y se puede expresar como:

$$-\nabla \cdot \mathbf{q}''(\mathbf{r}, t) + g(\mathbf{r}, t) = \rho C_p \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (3.45)$$

y aplicando la Ley de Fourier, se tiene:

$$\nabla \cdot [k \nabla T(\mathbf{r}, t)] + g(\mathbf{r}, t) = \rho C_p \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (3.46)$$

Esta ecuación es válida para k con dependencia espacial y con respecto a la temperatura. Cuando k es constante, se tiene:

$$\nabla^2 T(\mathbf{r}, t) + \frac{g(\mathbf{r}, t)}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (3.47)$$

donde $\alpha = k/\rho C_p$ es la difusividad térmica. Su significado físico está asociado con la rapidez de propagación de calor en el sólido, durante cambios de temperatura con respecto al tiempo. A mayor difusividad térmica, más rápida es la propagación de calor en el medio. [36]

3.2.2 CONVECCIÓN FORZADA SOBRE SUPERFICIES EXTERIORES: ESFERAS

Es importante conocer las características de transferencia de calor hacia o desde cuerpos esféricos para predecir el desempeño térmico de sistemas donde se calientan o enfrían nubes de partículas en una corriente de fluido. Suele resultar necesario entender la transferencia de calor de partículas aisladas antes de intentar correlacionar los datos de arreglos empaquetados, nubes de partículas, o de otras situaciones en las que las partículas pueden interactuar. Cuando las partículas tienen una forma irregular, los datos para esferas darán resultados satisfactorios si el diámetro de la esfera se reemplaza por un diámetro equivalente; es decir, si D se considera como el diámetro de una partícula esférica cuya área es igual a la de la partícula irregular.

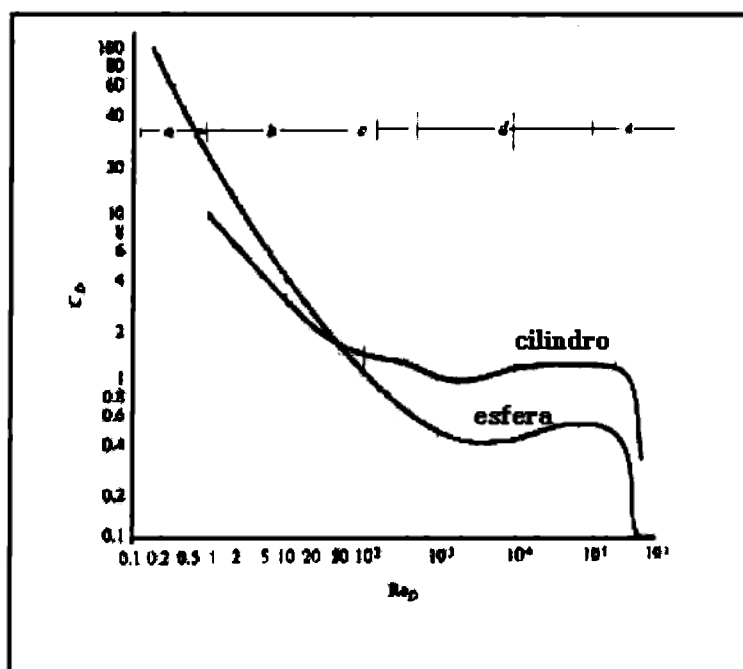


Figura 3.10 Coeficiente de retardo contra el número de Reynolds en cilindros circulares y esferas, expuestos a flujo transversal. [39]

En la *figura 3.10** se muestra el coeficiente de retardo total de una esfera como una función del número de Reynolds para corriente libre y en la *figura 3.11* se encuentran los datos correspondientes de transferencia de calor entre una esfera y el aire. En el intervalo de número de Reynolds que está entre 25 y 100,000, la ecuación recomendada por McAdams [37] para calcular el coeficiente promedio de transferencia de calor para esferas calentadas o enfriadas por un gas es:

* Cuando la esfera es arrastrada por una corriente (por ejemplo, una gota de líquido en un gas), la velocidad pertinente para el número de Reynolds es la diferencia de velocidad entre la corriente y el cuerpo.

$$\overline{Nu}_D = \frac{\bar{h}_c D}{k} = 0.37 \left(\frac{\rho D U_\infty}{\mu} \right)^{0.6} = 0.37 Re_D^{0.6} \quad (3.48)$$

Con números de Reynolds entre 1.0 y 25, es posible utilizar la ecuación:

$$\bar{h}_c = c_p U_\infty \rho \left(\frac{2.2}{Re_D} + \frac{0.48}{Re_D^{0.5}} \right) \quad (3.49)$$

que puede ser utilizada para la transferencia de calor en un gas. Para transferencia de calor en líquidos y gases, la ecuación:

$$\overline{Nu}_D = \frac{\bar{h}_c D}{k} = 2 + \left(0.4 Re_D^{0.5} + 0.06 Re_D^{0.67} \right) Pr^{0.4} \left(\frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0.25} \quad (3.50)$$

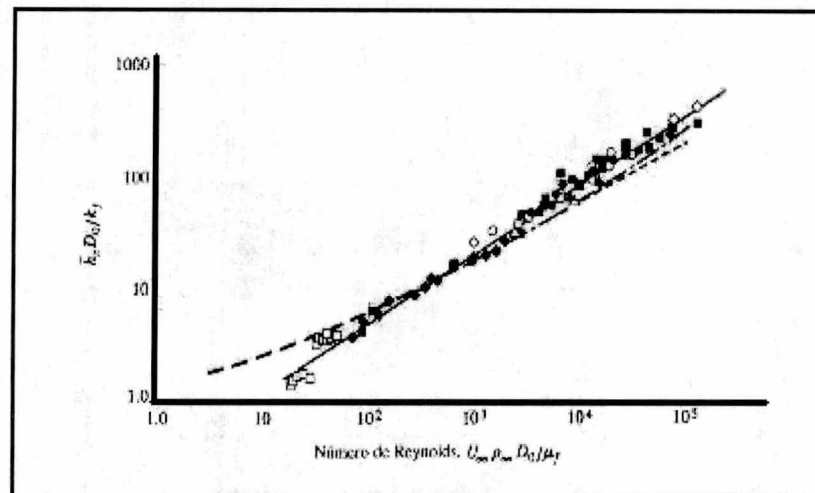


Figura 3.11 Correlaciones de los coeficientes experimentales promedio de transferencia de calor para un flujo sobre una esfera (autorización de W.H. Mc Adams) [37]

correlaciona los datos disponibles en los intervalos del número de Reynolds entre 3.5 y 7.6×10^4 y los números de Prandtl entre 0.7 y 380 [37].

Achenbach midió la transferencia de calor promedio de una esfera a una temperatura superficial constante en aire con números de Reynolds por encima del valor crítico. Con números de Reynolds por debajo del valor crítico $100 < Re_D < 2 \times 10^5$, encontró que: [38]

$$\overline{Nu}_D = 2 + \left(\frac{Re_D}{4} + 3 \times 10^{-4} Re_D^{1.6} \right)^{1/2} \quad (3.51)$$

lo cual puede compararse con los datos tomados de las fuentes que se muestran en la *figura 3.11*. Para el caso límite donde el número de Reynolds es menor que la unidad, Johnston y colaboradores demostraron con base en consideraciones teóricas, que el número de Nusselt tiende a un valor constante de 2 con número de Prandtl unitario, a menos que las esferas tengan diámetros del orden de la trayectoria media de las moléculas en el gas [39]. Mas allá del punto crítico, $4 \times 10^5 < Re_D < 5 \times 10^6$, Achenbach recomendó que:

$$\overline{Nu}_D = 430 + 5 \times 10^{-3} Re_D + 0.25 \times 10^{-9} Re_D^2 - 3.1 \times 10^{-17} Re_D^3 \quad (3.52)$$

3.2.3 FLUJO Y ARRASTRE: ESFERAS

3.2.3.1 Estelas

Cuando la presión a lo largo de una placa o de un perfil de ala va creciendo progresivamente, la capa límite se ensancha progresivamente (gradientes de presión adversa, en la parte posterior del cuerpo); si al mismo tiempo el contorno es finito, por ejemplo un ala de avión, la variación de presión se resuelve mediante un movimiento del fluido de la parte inferior del ala hacia la parte superior y que dan lugar a torbellinos libres o de escape, también conocidos como estelas.

Así pues las estelas son producto de la separación de la capa límite del contorno (*Figura 3.12*); tanto las estelas como la separación tienen gran importancia en la presión de arrastre sobre los cuerpos.

Si se consigue evitar la separación en el flujo sobre un cuerpo, la capa límite permanece delgada, disminuyendo la presión de arrastre. Por otro lado, la naturaleza laminar comparada con la turbulencia de la capa límite es importante para modificar la situación del punto de separación. Así una gran transferencia de cantidad de movimiento dentro de la capa límite turbulenta requiere un gradiente de presión adversa más grande para causar la separación, que el flujo laminar más ordenado.

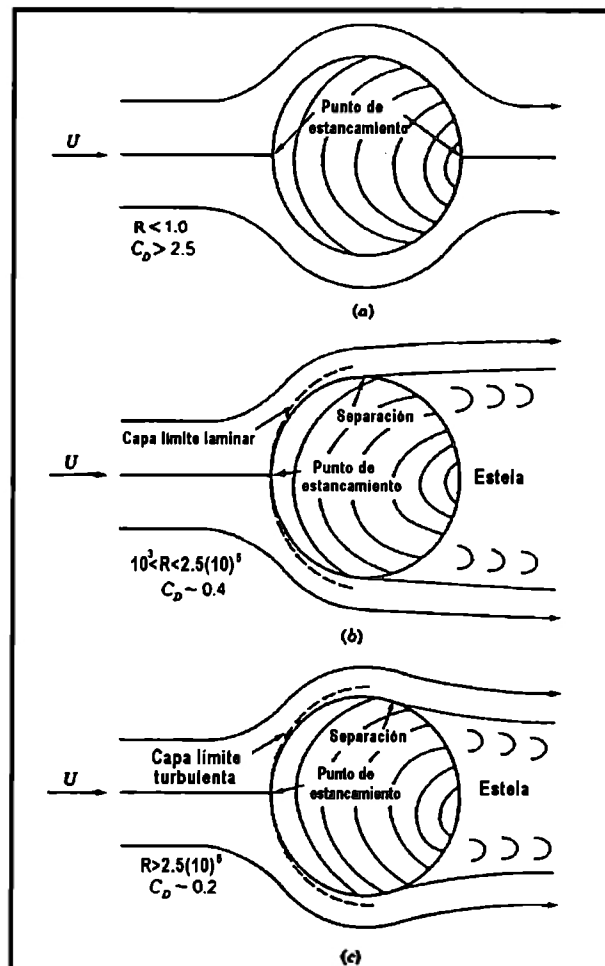


Figura 3.12 Flujo alrededor de una esfera. [40]

3.2.3.2 Arrastre en condiciones de flujo laminar

El movimiento de un cuerpo en el seno de un fluido está relacionado con los componentes de arrastre y sustentación de la fuerza dinámica resultante, ejercida por el fluido sobre el cuerpo. En flujos de carácter bidimensional, el arrastre es la componente de la fuerza en la dirección del flujo relativo.

Los mecanismos de resistencia son completamente distintos para un número de Reynolds bajo y para un número alto. El concepto de capa límite válido para flujos con un número de Reynolds alto, deja de serlo para un número de Reynolds pequeño. En este último caso las fuerzas viscosas están limitadas a una zona de pequeño espesor junto al cuerpo, y para números de Reynolds muy bajos (inferiores a 1), las fuerzas de inercia son despreciables, existiendo únicamente fuerzas debidas a la presión y a las tensiones, en este caso el flujo es laminar.

El caso más simple de flujo laminar a bajo número de Reynolds es el estudio del flujo alrededor de una esfera (Figura 3.13), ya realizado por G. G. Stokes en 1851.

Las líneas de corriente (Figura 3.13) se disponen simétricamente alrededor de la esfera, sin embargo la distribución de presión es enormemente asimétrica.

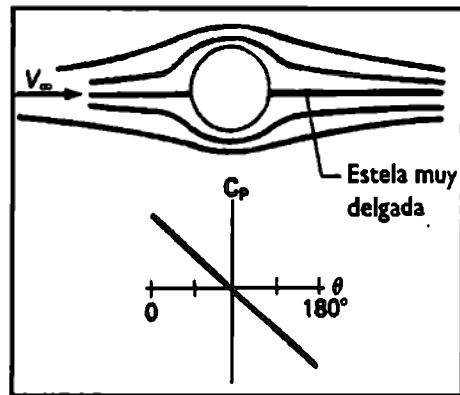


Figura 3.13 Distribución de líneas de corriente y presión en un flujo alrededor de una esfera a bajo número de Reynolds. [40]

Stokes demostró que el arrastre sobre una esfera, a bajo número de Reynolds, viene dado por la expresión:

$$R = 3 \cdot \pi \cdot \mu \cdot V_\infty \cdot D \quad (3.53)$$

- R : fuerza viscosa resistente
 D : diámetro
 μ : viscosidad dinámica
 V_∞ : velocidad límite de la esfera en el fluido.

En la ecuación (3.53), o ley de Stokes, el arrastre se debe no sólo a la fricción, sino también a la presión. El coeficiente de arrastre para una esfera, en estas condiciones, viene dado por la expresión:

$$C_D = \frac{R}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_\infty^2 \left(\frac{\pi D^2}{4} \right)} = \frac{24 \cdot \mu}{\rho V_\infty D} = \frac{24}{\text{Re}} \quad (3.54)$$

Otro coeficiente utilizado es el llamado coeficiente de arrastre viscoso (C'_D), que viene definido por:

$$C'_D \equiv \frac{R}{\mu \cdot V_\infty \cdot L} \approx \frac{\text{Fuerzas de arrastre}}{\text{Fuerzas viscosas}} \quad (3.55)$$

Para una esfera, al ser $L = D$, tenemos que la ecuación (3.55) se transforma en:

$$C'_D = 3 \cdot \pi \quad (3.56)$$

El coeficiente de arrastre viscoso (C'_D) en flujos a bajo número de Reynolds es una constante que sólo depende de la forma del cuerpo.

En la *tabla 3.1* aparecen distintos coeficientes de arrastre para una serie de formas simples. En la *tabla 3.2* se compara el arrastre en un flujo a bajo Reynolds y a elevado Reynolds, estas comparaciones están basadas en las siguientes aproximaciones:

$$R \text{ (alto Re)} \approx (\text{constante}) (\rho V_{\infty}^2 / 2) (\text{Area}) \quad (3.57)$$

$$R \text{ (bajo Re)} = (\text{constante}) (\mu V_{\infty}) (\text{longitud}) \quad (3.58)$$

Tabla 3.1 Coeficientes de arrastre viscosos, a bajo número de Reynolds. [40]






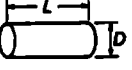


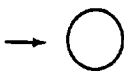






Forma	Longitud de C_D referencia
Esfera → 	D 3π
Semiesfera → 	D 8.7
Disco normal → 	D 8
Disco paralelo → 	D $\frac{16}{3}$
Barra normal → 	L $\frac{4\pi}{\ln(2L/D) + 0.5}$
Barra paralela → 	L $\frac{2\pi}{\ln(2L/D) - 0.72}$

Tabla 3.2 Dependencia de las fuerzas de arrastre (R) en varios parámetros para altos y bajos números de Reynolds (Re). [40]

Parámetro	Flujo a Re elevado	Flujo a Re bajo
Velocidad (V)	V^2	V
Densidad (ρ)	ρ	Ninguna
Viscosidad (μ)	De ligera a ninguna	μ
Tamaño (ℓ)	ℓ^2	ℓ

Tabla 3.3 Arrastre alrededor de varios cuerpos bidimensionales.[40]

Forma		Número de Reynolds	C_D
Placa plana paralela		$> 10^5$	0.002-0.014
Placa plana normal		$> 10^3$	2.0
Cilindro circular		$> 10^5$	0.2-1
Barra cuadrada		$> 10^4$	2.0
Barra cuadrada		$> 10^4$	1.50
Barra de triángulo equilátero		$> 10^4$	Extremo afilado hacia delante: 1.40 Cara plana hacia delante: 2.0
Sección C		$> 10^4$	2.30
Sección C		$> 10^4$	1.20
Perfil aerodinámico		Varios	

Es importante resaltar que los factores que influyen en las fuerzas de arrastre a elevado número de Reynolds son poco efectivos o tienen efectos contrarios en flujos a bajo de Reynolds.

Para flujos a número de Reynolds intermedio ($10 < Re < 10^3$), no suele ser válido el concepto de capa límite, debido a la importancia de las fuerzas de inercia. En estos casos el arrastre se expresa con términos de C_D , siendo éste y el coeficiente de arrastre viscoso función del número de Reynolds:

$$C'_D = C_D \cdot Re \quad (3.59)$$

3.2.3.3 Obtención del coeficiente de arrastre

A excepción del flujo a muy bajo número de Reynolds, el Coeficiente de arrastre (C_D) se obtiene por vía experimental. Algunos coeficientes de cuerpos simples aparecen en las *tablas 3.3, 3.4 y 3.5*. Los valores que aparecen en las tablas mencionadas se basan en datos experimentales obtenidos con flujos con un número de Reynolds superior a 10^4 y contienen una incertidumbre aproximada del 5%.

Los valores de coeficiente de arrastre (C_D) para situaciones no contempladas en las *tablas 3.3, 3.4 y 3.5* pueden estimarse a partir de los datos allí expuestos. Así para un cuerpo con flujo bidimensional sería aplicable el coeficiente correspondiente a una placa plana.

En el caso de un cilindro finito cuyo eje es perpendicular al flujo, se puede establecer una proporcionalidad entre la razón de coeficientes de un cilindro finito y uno infinito con la placa plana normal al flujo.

3.2.3.4 Sustentación

La sustentación es la componente ortogonal de la fuerza fluida sobre un cuerpo a la velocidad relativa de aproximación.

El coeficiente de sustentación (C_L) se define como:

$$\text{Sustentación} = C_L A \frac{\rho V^2}{2} \quad (3.60)$$

En el diseño de cuerpos de sustentación (perfiles aerodinámicos, alabes, etc.) el objetivo es crear una fuerza normal al flujo lo suficientemente grande, y al mismo tiempo disminuir el arrastre.[40]

Tabla 3.4 Arrastre alrededor de objetos tridimensionales

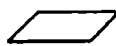









Coeficientes de resistencia para diversos cuerpos tridimensionales.			
Forma		Número de Reynolds	C_D
Placa plana paralela (ancho finito)		$> 10^5$	0.002-0.014
Placa normal		$> 10^3$	1-1.5
Cubo		$> 10^4$	1.10
Cubo		$> 10^4$	0.81

Tabla 3.5 Arrastre alrededor de varios objetos.[40]

Forma	Número de Reynolds	C_D
Esfera → 	Todos	0.01-100
Cilindro o disco ($L = 0$) → 	$> 10^4$	$L/D = 0$ 1.17
		$L/D = 0.5$ 1.15
		$L/D = 1$ 0.90
		$L/D = 2$ 0.85
		$L/D = 4$ 0.87
$L/D = 8$ 0.99		
Lámina semiesférica → 	$> 10^4$	1.40
Lámina semiesférica → 	$> 10^4$	0.40
Cono de 60° → 	$> 10^4$	0.50
Paracaídas 	$> 10^5$	1.2

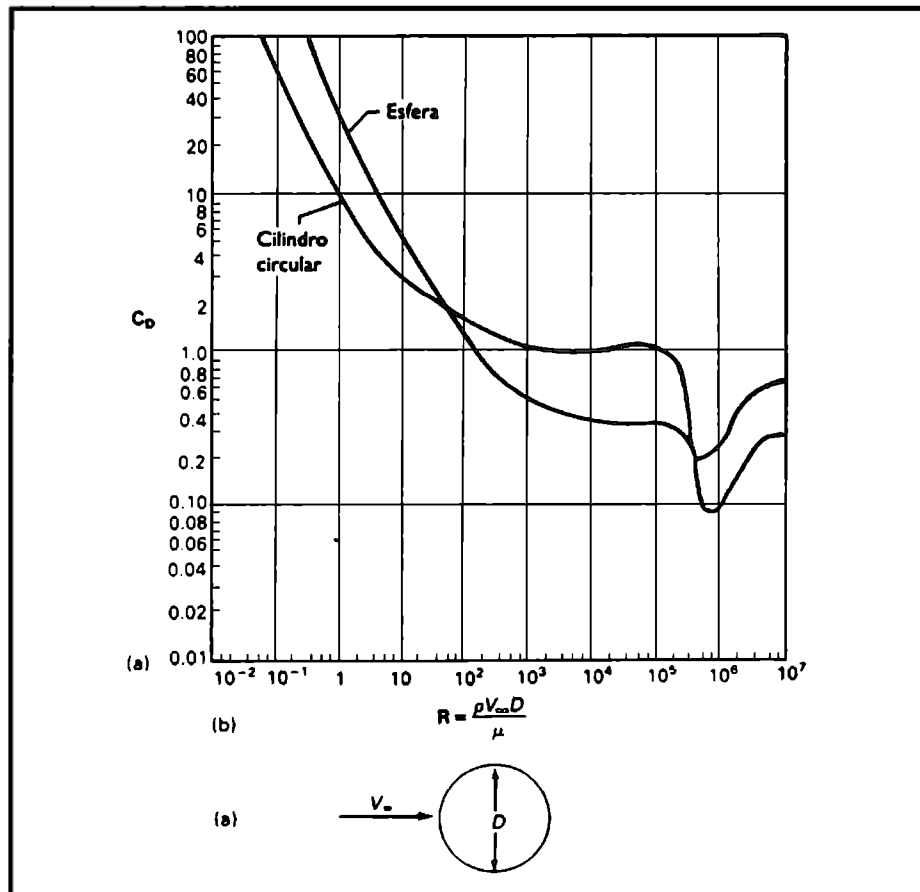


Figura 3.14 Variación del coeficiente de resistencia (C_D) en función del n° de Reynolds(R), para el caso del cilindro circular y la esfera. Se han empleado datos experimentales procedentes de fluidos en líquidos y gases y cuerpos sólidos de distinto tamaño. Nótese la brusca variación de C_D para Re próximo a $3,5 \cdot 10^5$ en la transición de la capa límite laminar a turbulenta.[40]

3.2.4 FLUJO ALREDEDOR DE UNA ESFERA

El escurrimiento lento alrededor de una esfera fue estudiado primero por Stokes (1851) y perfeccionado posteriormente por Ossen (1910). El siguiente análisis corresponde a la teoría de Ossen, pero el método de exposición se debe esencialmente a Lamb.[41]

Considerando una esfera sólida de radio R con centro en el origen, y el flujo permanente alrededor de ella de un líquido viscoso indefinido, animado por una *velocidad asintótica uniforme* $-v_{\infty}\hat{i}$; su velocidad v en cualquier punto puede descomponerse en:

$$v = v' - v_{\infty}\hat{i} \quad (3.61)$$

a su vez v' se descompone en dos sumandos, uno irrotacional dotado de un potencial φ y otro rotacional v'' que, en vista de la lentitud del flujo, se debe exclusivamente a efectos viscosos:

$$v' = \nabla\varphi + v'' \quad (3.62)$$

suponiendo que la velocidad v así definida satisfaga la *ecuación de Navier-Stokes* con fuerzas externas despreciables:

$$a = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2 v \quad (3.63)$$

reemplazando la *ecuación 3.61* en la ecuación de aceleración, obtenemos

$$\bar{a} = \frac{\partial v'}{\partial x}(v'_x - v_{\infty}) + \frac{\partial v'}{\partial y}v'_y + \frac{\partial v'}{\partial z}v'_z$$

o bien, considerando que, debido a la lentitud del movimiento, las componentes de v' son despreciables en comparación con v_{∞} ,

$$a = -v_{\infty}\frac{\partial v'}{\partial x} = -v_{\infty}\frac{\partial}{\partial x}(\nabla\varphi + v'')$$

por otro lado se puede observar que:

$$\nabla^2 v = \nabla^2 v''$$

y luego reemplazando en la *ecuación (3.63)*:

$$\nu_{\infty} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \varphi + v'') = \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \nabla^2 v'' \quad (3.64)$$

en cuanto a la *presión*, la experiencia comprueba que es prácticamente la misma que se tendría si el fenómeno fuera irrotacional, o sea, como resulta de la *ecuación 3.64* eliminando v'' ,

$$\nabla p = \rho \nu_{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \nabla \varphi$$

reemplazando en la *ecuación (3.64)*, obtenemos finalmente:

$$\nu_{\infty} \frac{\partial v''}{\partial x} = -\nu \nabla^2 v'' \quad (3.65)$$

considerando la simetría del flujo con respecto al eje x , se llega a la conclusión de que las líneas vorticosas han de ser circunferencias colocadas en planos normales al eje x y con centro sobre él, y que por tanto:

$$\nabla \times v'' \cdot i = 0 \quad (3.66)$$

es decir $\partial v''_z / \partial y = \partial v''_y / \partial z$. Esta ecuación admite la solución:

$$v'' = \chi i \quad (3.67)$$

siendo χ una función cualquiera de las coordenadas x y

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

función que también satisface la condición (*ecuación (3.65)*) si:

$$\nu_{\infty} \frac{\partial \chi}{\partial x} = -\nu \nabla^2 \chi \quad (3.68)$$

siendo que el rotacional de un gradiente es nulo, una solución más general de la *ecuación (3.66)*:

$$v'' = \nabla \xi + \chi i \quad (3.69)$$

en donde $\xi = \xi(x, r)$. Veamos cómo ha de ser ξ para que satisfaga también la *ecuación (3.65)*; se tiene:

$$\nu_{\infty} \frac{\partial v''}{\partial x} = \nu_{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x} \nabla \xi + \frac{\partial \chi}{\partial x} i \right) = \nu_{\infty} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} i + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} j + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} k + \frac{\partial \chi}{\partial x} i \right),$$

$$\begin{aligned}
 -\nu \nabla^2 v'' &= \nu \nabla \times v'' = \nabla \times v'' = \nu \nabla \times \chi i \nabla \times \chi i = \nu \nabla \times \left[\frac{\partial \chi}{\partial z} j - \frac{\partial \chi}{\partial y} k \right] = \\
 &= \nu \left[\left(-\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} i + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} k \right) - \left(-\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} i + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} j \right) \right]
 \end{aligned}$$

igualando estas dos expresiones y tomando en cuenta la ecuación (3.68), queda:

$$\nu_{\infty} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} i + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} j + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} k \right) = \nu \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} i + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} j + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} k \right)$$

siendo una solución de esta ecuación:

$$\xi = \frac{\nu}{\nu_{\infty} \chi}$$

Reemplazando en la ecuación (3.69) esta expresión de ξ se tiene:

$$v'' = \frac{\nu}{\nu_{\infty}} \nabla \chi + \chi i \tag{3.70}$$

y pasando a la ecuación (3.62):

$$v' = \nabla \varphi + \frac{\nu}{\nu_{\infty}} \nabla \chi + \chi i \tag{3.71}$$

Calculando ahora el Laplaciano:

$$\nabla^2 (e^{\nu_{\infty} x / 2\nu} \chi)$$

Escribiendo por sencillez:

$$\frac{\nu_{\infty}}{2\nu} = k \tag{3.72}$$

y aplicando la fórmula que da el laplaciano del producto de dos escalares, se llega a:

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 (e^{kx} \chi) &= e^{kx} \nabla^2 \chi + \chi \nabla^2 e^{kx} + 2 \nabla e^{kx} \cdot \nabla \chi = \\
 &= e^{kx} \nabla^2 \chi + k^2 \chi e^{kx} + 2k e^{kx} \frac{\partial \chi}{\partial x}
 \end{aligned}$$

y, tomando en cuenta las ecuaciones (3.68) y (3.72):

$$\nabla^2(e^{kx}\chi) = k^2(e^{kx}\chi) \quad (3.73)$$

esta ecuación es sustancialmente equivalente a la ecuación (3.68), pero tiene la ventaja de que en ella no aparecen derivadas primeras de χ .

Considerando la ecuación (3.73) como una ecuación diferencial en la variable $e^k\chi$, vemos que es análoga a la del movimiento armónico simple. Comprobando que admite la solución:

$$e^{kx}\chi = C \frac{e^{-kr}}{r} \quad (3.74)$$

siendo C una constante cualquiera. En efecto, aplicando la fórmula del laplaciano del producto, obtenemos:

$$\nabla^2 \frac{e^{-kr}}{r} = e^{kx} \nabla^2 \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \nabla^2 e^{-kr} - 2k e^{-kr} \nabla r \cdot \nabla \frac{1}{r}$$

pero $\nabla^2 \frac{1}{r} = 0$, y además:

$$\nabla r \cdot \nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} (\nabla r)^2 = -\frac{1}{r^2}$$

y finalmente:

$$\nabla^2 e^{-kr} = \frac{d^2 e^{-kr}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{de^{-kr}}{dr} = k^2 e^{-kr} - 2k \frac{e^{-kr}}{r}$$

de modo que, reemplazando, resulta:

$$\nabla^2 \frac{e^{-kr}}{r} = \frac{k^2}{r} e^{-kr}$$

es decir la expresión (3.74) satisface la ecuación (3.73). De la ecuación (3.74) se deduce el desarrollo en serie:

$$\chi = \frac{C}{r} e^{-k(r+x)} = C \left(\frac{1}{r} - k - \frac{kx}{r} + \dots \right) \quad (3.75)$$

siendo muy pequeños los términos del desarrollo que no se escribieron por haberse supuesto lento el flujo (v_∞ , y luego k , pequeños). De aquí se obtiene:

$$\begin{aligned}
\nabla \chi &= C \left(\nabla \frac{1}{r} - k \nabla \frac{x}{r} + \dots \right) = \\
&= C \left(\nabla \frac{1}{r} - kx \nabla \frac{1}{r} - \frac{k}{r} i + \dots \right) = \\
&= C \left(\nabla \frac{1}{r} + \frac{k}{3} r^2 \frac{\partial}{\partial x} \nabla \frac{1}{r} - \frac{2k}{3r} i + \dots \right)
\end{aligned}$$

siendo:

$$\begin{aligned}
\frac{k}{3} r^2 \frac{\partial}{\partial x} \nabla \frac{1}{r} &= \frac{k}{3} r^2 \nabla \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = -\frac{k}{3} r^2 \nabla \frac{x}{r^3} = \\
&= -\frac{k}{3} r^2 \left(\frac{3x}{r^2} \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} i \right) = -kx \nabla \frac{1}{r} - \frac{k}{3r} i
\end{aligned}$$

y finalmente reemplazando en la ecuación (3.70):

$$\begin{aligned}
v'' &= \frac{1}{2k} \nabla \chi + \chi i = \\
&= C \left(\frac{1}{2k} \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{6} r^2 \frac{\partial}{\partial x} \nabla \frac{1}{r} + \dots + \frac{2}{3} \frac{1}{r} i + \dots \right) \quad (3.76)
\end{aligned}$$

suponiendo por otro lado que el *potencial* φ pueda desarrollarse en una serie del tipo:

$$\varphi = A_0 \frac{R}{r} + A_1 \frac{R^2}{r^2} Y_1 + A_2 \frac{R^3}{r^3} Y_2 + \dots$$

siendo las Y_n *funciones esféricas* convenientes. Precisamente, en vista de la simetría axial del flujo, se puede admitir que dichas funciones esféricas son las que resultan de la derivación con respecto a la variable x de la función $1/r$, o sea se puede escribir:

$$Y_n = r^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{1}{r}$$

entonces la expresión de φ se puede escribir:

$$\varphi = A_0 \frac{R}{r} + A_1 R^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} + A_2 R^3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} + \dots$$

y luego resulta:

$$\nabla \varphi = A_0 R \nabla \frac{1}{r} + A_1 R^2 \frac{\partial}{\partial x} \nabla \frac{1}{r} + \dots$$

reemplazando este desarrollo y la ecuación (3.76) en la ecuación (3.62), se obtiene:

$$v' = \frac{2C}{3r} i + \left(A_0 R + \frac{C}{2k} \right) \nabla \frac{1}{r} + \left(A_1 R^2 + \frac{1}{6} C r^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla \frac{1}{r} + \dots \quad (3.77)$$

si ahora imponemos la condición de que sobre la esfera, o sea para $r = R$, la velocidad v sea nula, allí ha de ser por la ecuación 3.61 $v' = v_\infty i$, y reemplazando en el desarrollo la ecuación (3.77) en el cual se desprecian los términos no escritos,

$$\frac{2C}{3R} = v_\infty \quad \text{de donde} \quad C = \frac{2}{3} v_\infty R \quad (3.78)$$

$$A_0 = -\frac{C}{3kR} = -\frac{3v_\infty}{4k} \quad \text{de donde} \quad A_0 = -\frac{3}{2} v_\infty$$

$$A_1 = -\frac{1}{6} C = -\frac{1}{4} v_\infty R$$

y sustituyendo en la ecuación (3.77) resulta finalmente la fórmula de Oseen

$$v' = v_\infty \left[\frac{R}{r} i + \frac{1}{4} R (r^2 - R^2) \frac{\partial}{\partial x} \nabla \frac{1}{r} + \dots \right] \quad (3.79)$$

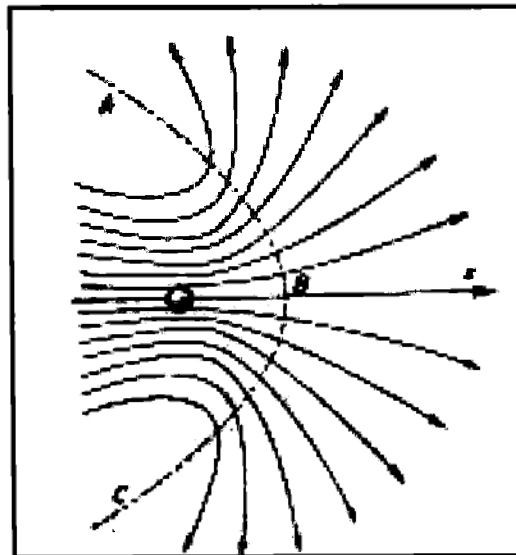


Figura 3.15 Sección axial[41]

La *figura 3.15* muestra en sección axial el aspecto de las líneas de corriente de velocidad v' según resulta de la *ecuación (3.79)*; para obtener las correspondientes al flujo de velocidad v , hay que sumar en cada punto la velocidad $-v_{\infty}i$, en vista de la *fórmula (3.61)*, con lo que el flujo se invierte y se concentra más hacia el eje x . Las curvas en la figura salen de la izquierda en haz bastante cerrado, pero en proximidad de la esfera se abren como si ésta fuese el centro de una fuente tridimensional. La zona de la izquierda difiere también sustancialmente de la de la derecha debido a sus características rotacionales. En efecto, por la *ecuación (3.69)*:

$$\bar{\nabla} \times v = \bar{\nabla} \times v' = \bar{\nabla} \times v'' = \frac{\partial \chi}{\partial z} j - \frac{\partial \chi}{\partial y} k$$

y luego,

$$(\bar{\nabla} \times v)^2 = \left(\frac{\partial \chi}{\partial r} \right)^2 \left[\left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z} \right)^2 \right] = \left(\frac{\partial \chi}{\partial r} \right)^2 \frac{y^2 + z^2}{r^2} = \left(\frac{\partial \chi}{\partial r} \right)^2 \frac{h^2}{r^2}$$

siendo h la distancia al eje x . De aquí resulta:

$$|\bar{\nabla} \times v| = \left| \frac{\partial \chi}{\partial r} \right| \frac{h}{r}$$

y expresando χ por medio de la *ecuación 3.74*:

$$|\bar{\nabla} \times v| = C(1 + kr)e^{-k(r+x)} \frac{h}{r^3}$$

se deduce que los efectos rotacionales empiezan notándose tras una frontera donde

$$r + x = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + x$$

adquiera un valor m bastante pequeño. Siendo que la *ecuación*

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + x = m \tag{3.80}$$

representa un *paraboloide de revolución* cuyo vértice está próximo al centro de la esfera y cuyo eje está orientado como el semieje de las x negativas, se puede concluir que es posible delimitar toscamente el movimiento vorticoso al interior de una zona paraboloidal que encierra la esfera sólida, zona que corresponde también al haz cerrado de líneas de corriente. Viceversa el movimiento en fuente de la derecha puede considerarse prácticamente irrotacional. Una vez que la adición del vector $-v_{\infty}i$ haya invertido el sentido de la corriente, la zona vorticiosa

paraboloidal puede considerarse en cierto sentido como la estela de la esfera, aunque en realidad incluya un pequeño espacio aguas arriba de ella.

Finalmente, se quiere calcular la *presión total* que el líquido ejerce sobre la esfera. Partiendo de la *ecuación (3.63)* que da el esfuerzo normal en un punto P cualquiera de la superficie, fórmula que en este caso se puede simplificar debido a que allí la velocidad v es nula, escribiéndose:

$$RT(n) = pOP - \mu R \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (3.81)$$

siendo p la presión, que se supone constante en la proximidad inmediata de la esfera. Ahora se tiene por la *ecuación (3.61)* y *(3.79)*:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)_{r=R} = \left(\frac{\partial v'}{\partial r} \right)_{r=R} = v_{\infty} \left[-\frac{R}{r^2} i + \frac{1}{2} R r \frac{\partial}{\partial x} \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{4} R (r^2 - R^2) \frac{\partial^2}{\partial x \partial r} \nabla \frac{1}{r} + \dots \right]_{r=R}$$

el último término escrito se anula para $r = R$; el penúltimo, haciendo $r = R$, se escribe

$$\frac{1}{2} R^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \nabla \frac{1}{r} \right]_{r=R} = -\frac{1}{2} R^2 \nabla \frac{x}{R^3} = -\frac{1}{2R} \nabla x = -\frac{1}{2R} i$$

y reemplazando en la fórmula anterior, que se supone se puede limitar a los términos escritos, llegamos a:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)_{r=R} = v_{\infty} \left[-\frac{R}{r^2} i - \frac{1}{2R} i \right]_{r=R} = -\frac{3}{2} \frac{v_{\infty}}{R} i$$

sustituyendo en la *ecuación (3.81)*, queda:

$$RT(n) = p \cdot OP + \frac{3}{2} \mu v_{\infty} i$$

la *fuerza total de arrastre* sobre la superficie Σ de la esfera es por lo tanto:

$$F_D = \int_{\Sigma} T(n) d\Sigma = \frac{p}{R} \int_{\Sigma} OP d\Sigma + \frac{3}{2} \frac{\mu v_{\infty}}{R} i \int_{\Sigma} d\Sigma$$

pero la primera integral es nula, por ser OP un vector de magnitud constante sobre la esfera y que toma direcciones opuestas de dos en dos; la última integral no es sino la superficie de la esfera $4\pi R^2$, de modo que se obtiene:

$$F_D = 6\pi \mu v_{\infty} R i \quad (3.82)$$

fórmula debida a Stokes. Ossen intentó perfeccionar esta fórmula introduciendo un término en v_∞^2 , en vista de que, como se sabe, la resistencia ofrecida por un medio viscoso al avance de un cuerpo sólido, para velocidades del orden de algunos metros por segundo, es proporcional al cuadrado de la velocidad; obtuvo la expresión más general:

$$F_D = \left(6\pi\mu v_\infty R + \frac{9}{4} \pi\rho v_\infty^2 R^2 \right) i \quad (3.83)$$

puesto que la sección aparente de la esfera es $A = \pi R^2$, podemos deducir de la ecuación (3.83) la siguiente expresión del coeficiente de arrastre:

$$C_D = \frac{2F_D}{A\rho v_\infty^2} = \frac{12\pi\mu v_\infty R + \frac{9}{2} \pi\rho v_\infty^2 R^2}{\pi R^2 \rho v_\infty^2} = \frac{12\nu}{v_\infty R} + \frac{9}{2}$$

o sea, llamando D el diámetro de la esfera e introduciendo el número de Reynolds:

$$R = \frac{v_\infty D}{\nu} = 2 \frac{v_\infty R}{\nu}$$

$$C_D = \frac{24}{R} + \frac{9}{2} \quad (3.84)$$

se obtiene así que hay una relación lineal entre C_D y $1/R$, que, si se compara con la figura 3.16, se realiza con buena aproximación para valores de R no mayores que 5. Este es por tanto el límite de validez de la teoría de Oseen.

Una aplicación importante de la ecuación (3.82) de Stokes es la siguiente. Suponiendo que una esferita de peso específico γ_e caiga verticalmente por efecto de su propio peso dentro de un líquido quieto, de peso específico γ y viscosidad μ . En cuanto la esferita alcance un régimen de velocidad uniforme v_0 , la resistencia $-F_D$ que ella encuentra en su bajada, ha de ser igual y opuesta a la fuerza motriz. Pero esta última es la diferencia entre el peso de la esfera y el empuje de Arquímedes:

$$\frac{4}{3} \pi R^3 (\gamma_e - \gamma)$$

de modo que se tiene por la ecuación (3.82):

$$6\pi\mu v_\infty R = \frac{4}{3} \pi R^3 (\gamma_e - \gamma)$$

o sea,

$$\mu v_{\infty} = \frac{2}{9} R^2 (\gamma_e - \gamma) \quad (3.85)$$

si se deja caer la esferita y medimos la velocidad v_{∞} , la aplicación de esta fórmula permite, si se conoce el coeficiente μ , determinar el peso específico del material que la forma, o bien, conocido el peso específico, *determinar la viscosidad del fluido*. [41]

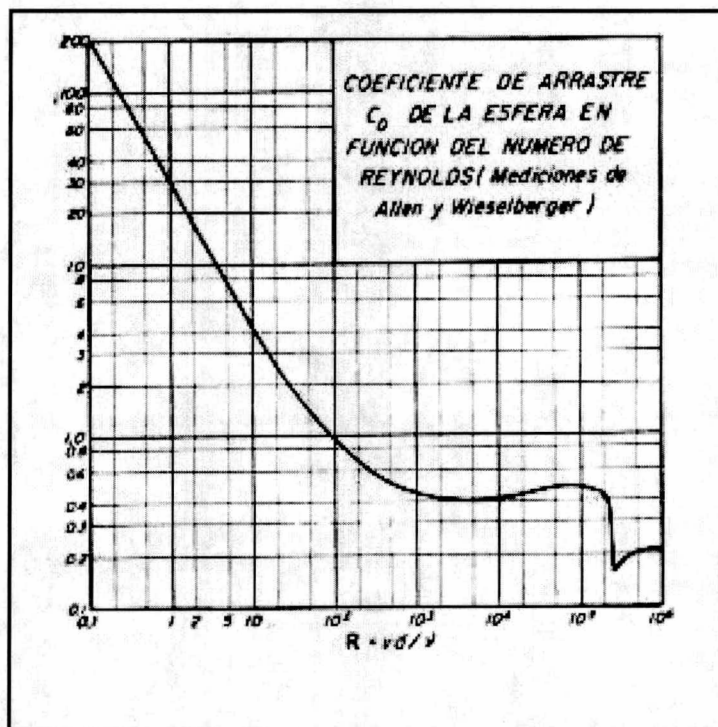


Figura 3.16 Coeficiente de arrastre C_D de la esfera en función del número de Reynolds. [41]

CAPÍTULO 4

4 MODELO TEÓRICO PROPUESTO

En este capítulo, presentaremos un modelo teórico simplificado, que permita describir la interacción entre la flama del plasma y las partículas sólidas que serán utilizadas como recubrimientos.

Se justificarán aquellas simplificaciones que presentará el modelo simulado en el paquete Fluent, como también aquellos parámetros de entrada utilizados para la simulación.

El modelo presentado y discutido en nuestro trabajo, está basado en un estudio experimental [42], el cual, después de haber sido estudiado detenidamente, nos permitirá deducir una serie de valores, parámetros y variables, para determinar las características de la velocidad, temperatura, etc., los cuales serán empleados como datos de condiciones de frontera e iniciales en Fluent.

4.2 SISTEMA FÍSICO DE INTERÉS

Reconociendo que parte del objetivo de este trabajo es la interacción del plasma y las partículas inyectadas, se reconoce que lo más importante son la flama de plasma, la partícula y un sistema

de referencia que permita describir la interacción existente entre ellos, como se ilustra en la figura 4.1.

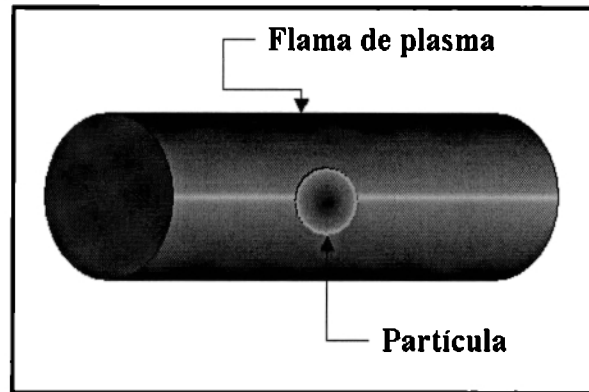


Figura 4.1 Esquema de la interacción entre la flama de plasma y la partícula

4.2.1 FLAMA DE PLASMA

Como se observó en el capítulo 2, el plasma es un estado de ionización cuyas características principales entre otras son la alta temperatura y la energía cinética muy elevada, por lo tanto, a la flama se le reconoce como un sistema portador de energía y momentum cuyas propiedades más importantes son las que se muestran a continuación. Las propiedades varían dependiendo del tipo de gas utilizado en la flama. En este estudio, tomaremos como referencia el gas de argón el cual es usado para el análisis y obtención de resultados:

Tabla 4.1 Conductividad térmica k del Ar. [42]

T(K)	313	333	353	373	393
$k \times 10^2$ ($Wm^{-1}K^{-1}$)	1.677	1.729	1.781	1.850	1.902

Tabla 4.2 Viscosidad μ del Ar. [42]

T(K)	373	473	575	674	766	857	987	1060
$\mu \times 10^5$ ($kg\ m^{-1}\ K^{-1}$)	2.695	3.223	3.685	4.115	4.484	4.815	5.257	5.632

Tabla 4.3 Propiedades termofísicas del Ar [43]

Densidad ($Kg\ m^{-3}$)	Entalpía de vaporización ($kJ\ mol^{-1}$)	Entalpía de fusión ($kJ\ mol^{-1}$)
1.7824 (0 C)	6.53	1.21

Tabla 4.4 Variación de la temperatura, velocidad y grado de ionización inicial del plasma de Ar [42].

Corriente de plasma (A)	Tasa de flujo (l min ⁻¹)	Presión (kPa)	Temperatura (K)	Velocidad (m s ⁻¹)	Grado de ionización
500	35	15	1,0472	1,780	0.025
700	35	15	1,1913	2,025	0.084
850	35	15	1,2654	2,151	0.141
950	35	15	1,3081	2,,224	0.185
700	15	15	1,2787	1,321	0.154
700	25	15	1,2299	1,681	0.111
700	45	15	1,1588	2,356	0.066
700	35	15	1,1743	1,370	0.074
700	35	15	1,2404	1,613	0.119
700	35	15	1,2283	1,761	0.110
700	35	15	1,1540	2,270	0.063
700	35	5	1,1299	5,763	0.090
700	35	25	1,2210	1,245	0.081
700	35	35	1,2410	904	0.079

4.2.2 PARTÍCULA

Como se mencionó en el capítulo 2, en el proceso de recubrimiento se utilizan partículas sólidas, las cuales durante el proceso absorben calor y momentum de la flama, esta interacción con la flama, modificará el comportamiento de las partículas y algunas propiedades de las mismas que son ilustradas en la *figura 1.8*. A continuación presentaremos las propiedades de las partículas de Titanio (Ti), que serán usadas para el desarrollo del presente estudio:

Tabla 4.5 Propiedades termofísicas del Ti. [43]

Densidad	4.5 g cm ⁻³
Calor específico	528 J kg ⁻¹ K ⁻¹
Tamaño de partícula	20 – 250 μm
Punto de fusión	1933 K
Punto de ebullición	3287 C
Temperatura inicial aproximada	300 K

4.3 SELECCIÓN DE UN SISTEMA DE REFERENCIA

Por razones de simplicidad teórica, experimental y numérica, es conveniente definir como primer caso, un sistema de referencia cilíndrico, donde consideraremos que el eje de la flama y el eje de coordenadas Z coinciden y que a su vez, la flama presenta simetría azimutal o axial, es decir, que tomando como referencia Z , en ϕ no depende, gracias a esta selección del sistema de referencia conjuntamente, nos permitirá reducir el estudio teórico y numérico a un estudio bidimensional. (figura 4.2)

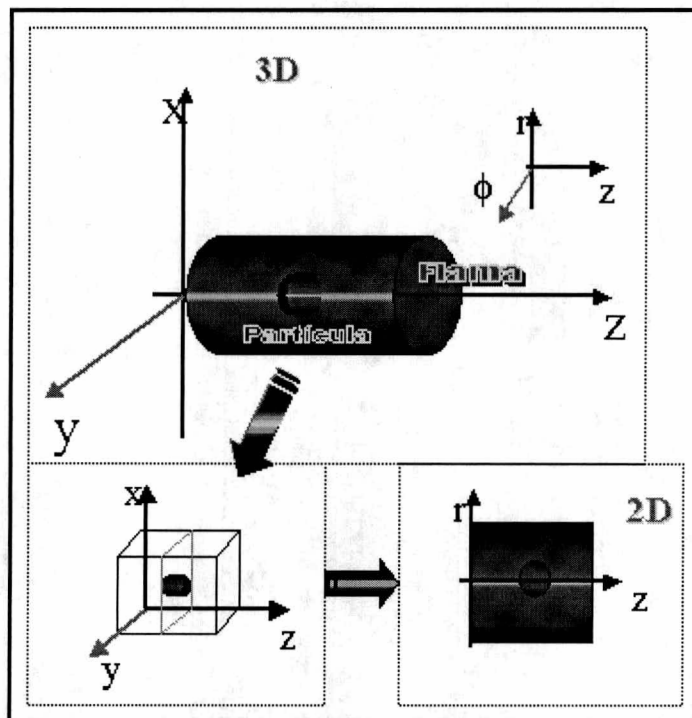


Figura 4.2 Simplificación del modelo a un sistema bidimensional

Con respecto a la partícula se puede suponer con alto grado de precisión que las partículas son homogéneas. Adicionalmente, consideraremos que las partículas serán estudiadas en condiciones especiales que consiste en que están alineadas a lo largo del eje de la flama, lo cual garantizará que la transferencia de calor y momentum serán máximas, además de que también nos permitirá reducir el problema a un problema en 2D.

También se adopta un sistema de referencia Lagrangiano en el que la velocidad de la partícula es nula.

4.4 CONDICIONES FÍSICAS DE LA FLAMA

Para el desarrollo de esta sección, utilizaremos los resultados experimentales realizados por un grupo de investigadores, obteniendo velocidades y temperaturas como se muestra a continuación (figura 4.3): [42]

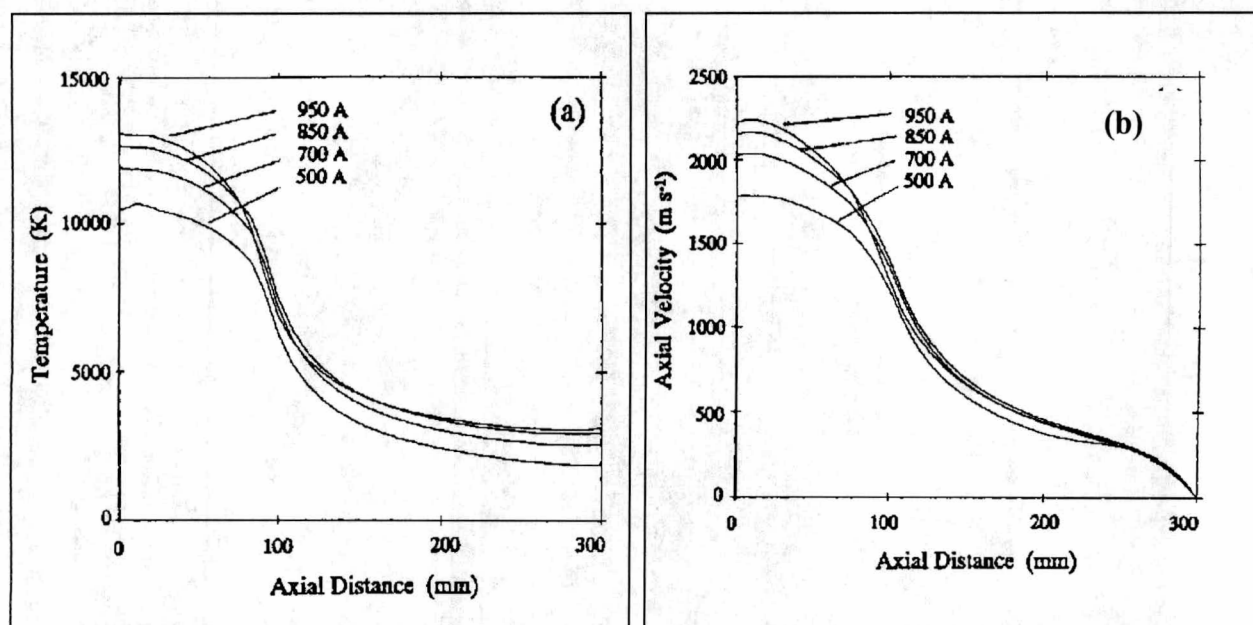


Figura 4.3 Distribución de la temperatura (a) y velocidad axial (b) en la flama de plasma de Ar para diferentes corrientes.[42]

De acuerdo a los estudios y experimentos realizados por el grupo de investigadores, se debe tomar en cuenta que las condiciones de frontera más críticas son: la temperatura, la velocidad y la composición en la entrada del plasma; esta última condición se refiere al orificio de salida de la pistola de plasma, el cual, depende de la geometría de la boquilla y de los parámetros de procesamiento de APS.

La mayoría de los mecanismos de transferencia de calor entre la flama y las partículas sumergidas dentro de una flama son: la conducción, la convección y la radiación. Los documentos de Meyer (1962 y 1964) mencionan que un factor importante de transferencia de calor, es la actividad catalítica del material de la partícula, lo cual conduciría a una recombinación de átomos de flamas moleculares sobre su superficie, produciendo la transferencia de calor. Sin embargo, nosotros no consideramos este aspecto en nuestro estudio.

Una contribución de nuestro modelo consiste en el ajuste matemático de la mejor curva que replique todos los puntos experimentales, ya que con estas curvas ajustadas numéricamente, nos permitirá realizar pronósticos que se utilizarán en la simulación del modelo. Posteriormente, con estas curvas ajustadas, podremos generar una serie de valores nuevos de interés y utilidad para la simulación numérica.

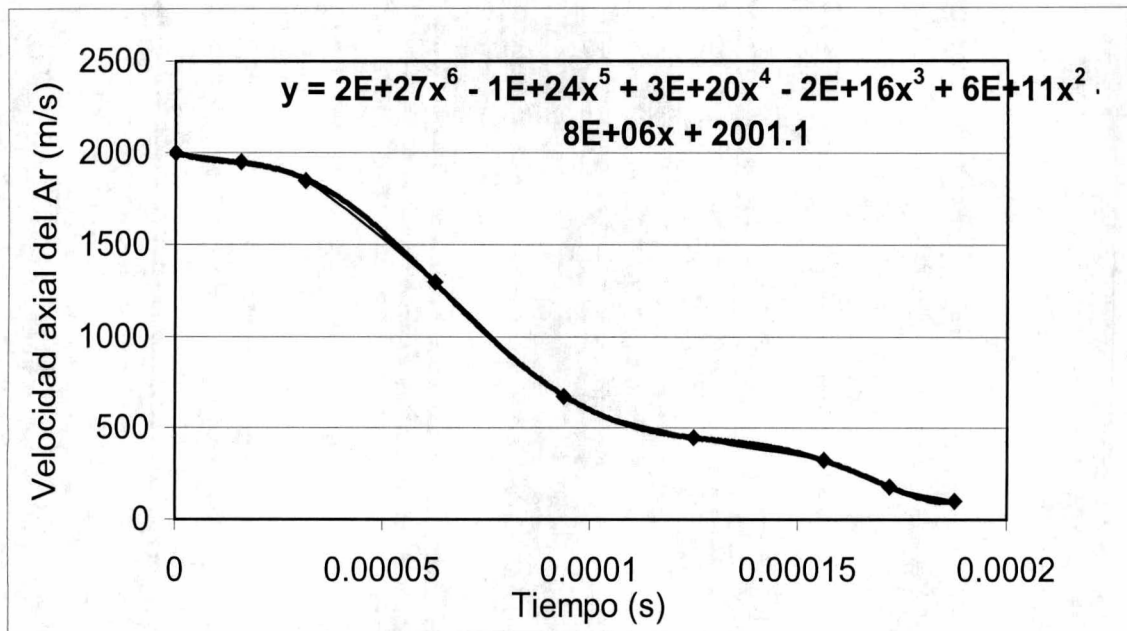


Figura 4.4 Distribución de la velocidad axial de la flama de plasma de Ar en función del tiempo[42]

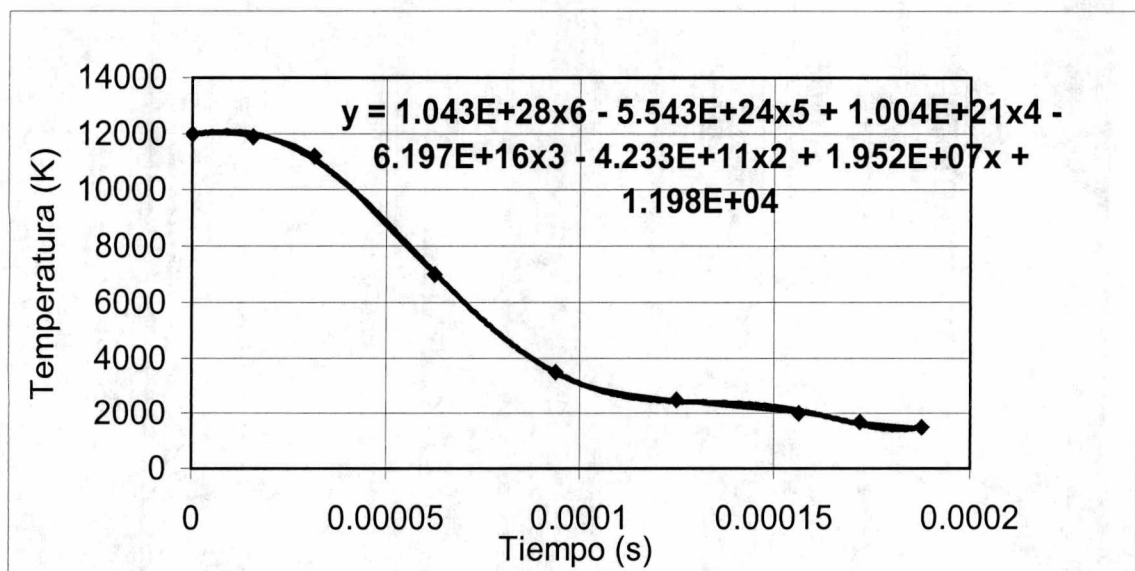


Figura 4.5 Distribución de la temperatura de la flama de Ar en función del tiempo [42]

Los resultados obtenidos en esta nueva gráfica (figura 4.4 y 4.5) serán utilizados como condiciones iniciales y de frontera para la simulación en CFD.

4.5 CONDICIONES FÍSICAS DE LA PARTÍCULA

El procedimiento para definir la dinámica de las partículas y el flujo de las mismas, ha sido investigado para un conjunto de partículas, obteniendo las siguientes condiciones: [42]

- Las partículas son esféricas y su distribución de temperatura posee simetría esférica. En la práctica las partículas no son esféricas, pero sí con una geometría muy aproximada.

- Las partículas no interactúan con otras.
- Las trayectorias de las partículas no son afectadas por las fluctuaciones de turbulencia en la flama de plasma.

Por otro lado, la densidad de las partículas de titanio tienen una densidad de 4.5 g cm^{-3} , y han sido divididas en 5 grupos con tamaños de 20, 60, 100, 150 y $250 \mu\text{m}$ y un flujo de masa de 0.016, 0.084, 0.16, 0.08 y 0.06 g s^{-1} respectivamente, cada grupo es dividido en 12 partículas para ser inyectadas en la flama de plasma.

4.6 CONSIDERACIONES SOBRE EL FLUJO DE LA FLAMA

- El flujo de la flama posee propiedades laminares las cuales fueron presentadas en el capítulo 3.
- Las ecuaciones que muestran la interacción entre la flama y la partícula ha sido estudiada con anterioridad bajo la acción de un flujo en el capítulo 3.
- Para fines de este modelo, las anteriores consideraciones ya están incorporados en el software de simulación Fluent.

4.7 MOMENTUM FLAMA-PARTÍCULA

En la práctica, la inyección de las partículas en el plasma se realiza de la siguiente manera: [44]

- El tipo de alimentador de partículas puede ser: gravitacional, cama fluidizada, vibracional, etc.
- La tasa de alimentación de partículas, está usualmente en el rango de 50 – 100 g/min.
- El ángulo de inyección es usualmente 90 grados, algunas veces 60 grados hacia atrás o hacia delante de la flama de plasma.
- El puerto de inyección puede estar localizado dentro o fuera de la antorcha. El largo y diámetro del puerto de inyección, influye en la velocidad de inyección de las partículas.

Pero para fines prácticos, la velocidad de deposición de las partículas es despreciable con la velocidad supersónica de la flama, por lo tanto, sin temor a equivocarnos, podemos considerar que las partículas inicialmente están en reposo a un tiempo inicial $t = 0$. Esta circunstancia nos permite utilizar el sistema de referencia de Lagrange.

Posteriormente, durante la evolución del proceso, la partícula incrementa su velocidad y debido al tiempo tan corto de la interacción ($1.875 \times 10^{-4} \text{ s}$) la velocidad de la partícula será una fracción de la velocidad del flujo del plasma y ésta es consecuencia del arrastre del flujo en la esfera, como se citó en el capítulo 3.

El comportamiento de la velocidad de la flama y la partícula es mostrado en la *figura 4.10*, donde se puede apreciar el comportamiento de este parámetro y su influencia en cada uno de los entes involucrados en el presente estudio.

4.8 TRANSFERENCIA DE CALOR FLAMA-PARTÍCULA

Como se citó anteriormente, los mecanismos de conducción, convección y radiación fueron tratados en el capítulo 3, los cuales ya están incorporados dentro el paquete de simulación Fluent. A continuación se muestra el comportamiento tanto de la flama como la partícula durante el proceso estudiado (figura 4.6)

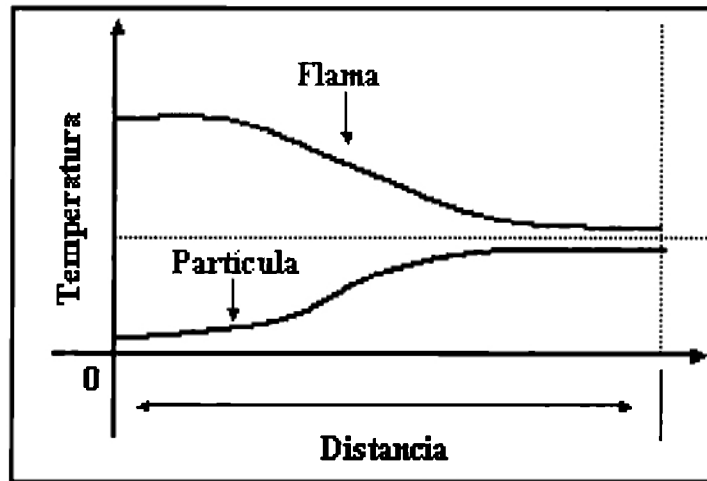


Figura 4.6 Figura comparativa del comportamiento de la temperatura en la flama y la partícula

4.9 GEOMETRÍA RELATIVA FLAMA-PARTÍCULA

Para el desarrollo de esta parte del trabajo, utilizamos nuevamente los datos experimentales de los autores *Zhao, Grant y Cantor* [42], donde utilizan partículas de diferentes diámetros, las cuales se distribuyen en cinco grupos con tamaños de 20, 60, 100, 150 y 250 μm . Considerando que normalmente la boquilla de una antorcha de plasma es de 10 a 12 mm de diámetro y la inyección de las partículas en la flama será de una forma secuencial, se observaron los siguientes resultados:

Tabla 4.6 Diámetros y espacios entre las partículas estudiadas

Diámetros de las partículas (μm)	Distancia entre centros de las partículas (μm)	Distancia libre entre las partículas (μm)
20	500	480
60	500	440
100	500	400
150	500	350
250	500	250

Se observó, que bajo este experimento controlado con una distribución dosificada de partículas, el espacio medio libre entre las partículas, permite construir alrededor de cada una de ellas, cajas o volúmenes de control que garantizarán que sólo habrá una sola partícula en tal caja de control. A continuación se muestran las dimensiones de estas cajas en función de las dimensiones de las partículas inyectadas.

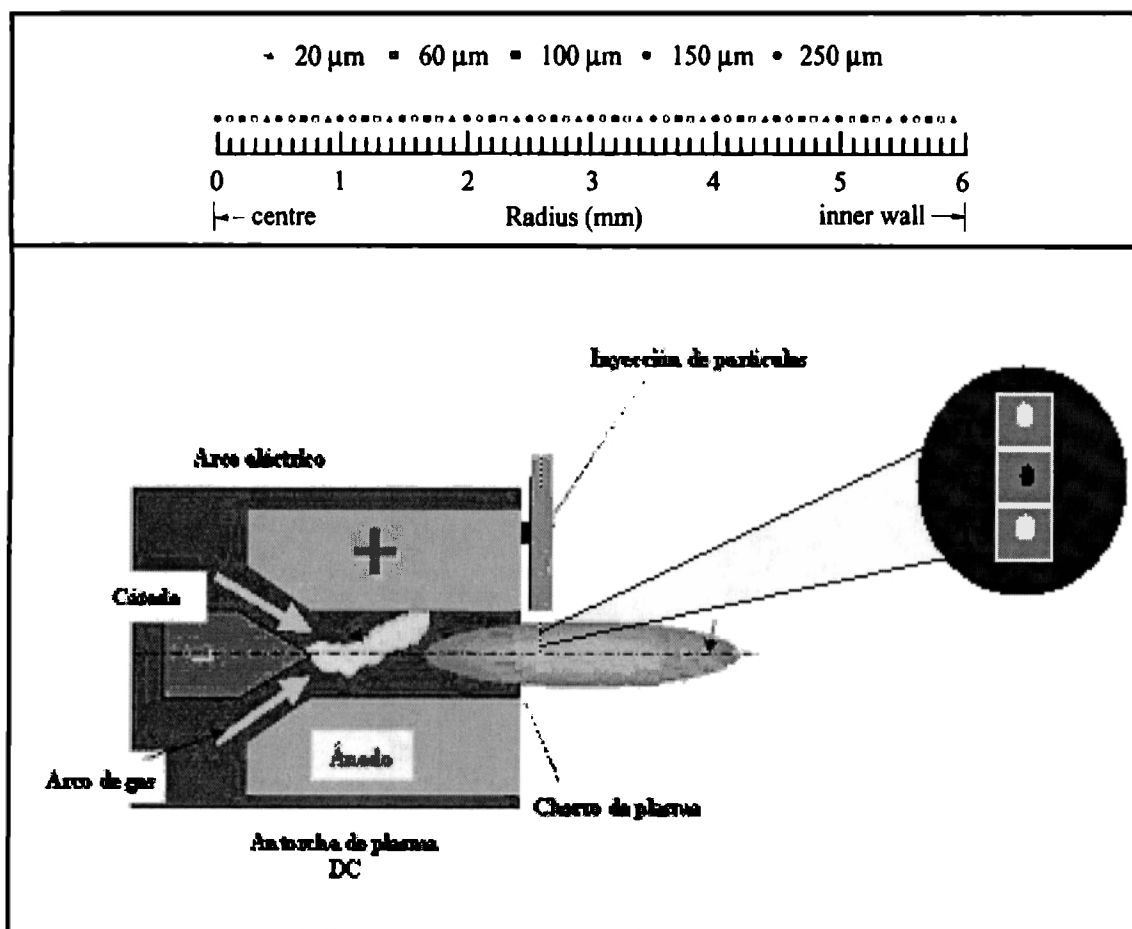


Figura 4.7 Distribución de partículas en el radio de la flama de plasma

Como se puede observar en la *figura 4.7 y 4.8* a cada partícula le corresponde una caja de control idéntica, independiente de su diámetro. Este tamaño de caja se aplica para cualquier partícula en cualquier posición de la flama del plasma.

Conviene reflexionar en este punto acerca del perfil de temperatura de la flama, pues se sabe que la temperatura a diferentes radios en la flama será diferente, lo que significa que cada partícula está sujeta a diferentes temperaturas. Esto en principio obliga a pensar que las temperaturas que se utilicen en una simulación CFD deberá ser variable, sin embargo, esta complicación puede ser evitada al considerar que hipotéticamente y bajo las condiciones de nuestro modelo, se puede estudiar una sola caja de control con una sola partícula, donde en principio, la temperatura de la pared por donde entra la flama será constante, para esa pared, de esa caja en particular.

Los fenómenos de transporte serán semejantes para todas las partículas, lo variable serán los parámetros de entrada que identifican a cada partícula.

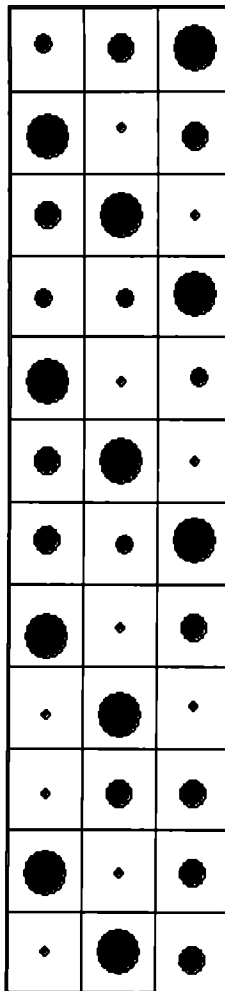


Figura 4.8 Esquema de posicionamiento de las partículas a lo largo de la sección transversal de la flama

4.10 MODELO TEÓRICO REDUCIDO

Como se mencionó anteriormente, el modelo a desarrollar se obtiene mediante discretización con respecto al tiempo y se supone que las propiedades son constantes en ese intervalo de tiempo. La discretización realizada se hace de acuerdo a los estudios realizados por grupos de investigadores, llevando a determinar un modelo de Lagrange con una velocidad relativa de la interacción de la partícula con la flama, y así mediante ecuaciones mencionadas en el capítulo tres, como el teorema de Reynolds donde podemos llevar nuestro modelo de Lagrange a un modelo de Euler y así obtener simplificaciones y resultados óptimos en el desarrollo del presente estudio.

El sistema del modelo a estudiar se reduce a una esfera sólida de titanio de diferentes tamaños (20, 60, 100, 150 y 250 μm) dentro de una caja cuadrada de lados iguales a 250 μm . La velocidad relativa de la partícula es determinada mediante la discretización de datos obtenidos en un estudio de investigación [42] como se mencionó en el comienzo de este capítulo. La velocidad relativa de la partícula con respecto a la flama es mostrada en la *figura 4.10*, estos datos son obtenidos de acuerdo al siguiente modelo matemático:

La suma de fuerzas externas actuando sobre las partículas, les induce una aceleración dada por:

$$\boxed{\sum F = ma}$$
(4.1)

donde la fuerza externa es la fuerza de arrastre, determinada por:

$$\boxed{F = \frac{1}{2} \rho_g v_r^2 A C_D}$$
(4.2)

donde ρ_g , es la densidad del gas, v_r es la velocidad relativa de la partícula, A es el área transversal de la partícula y C_D es el coeficiente de arrastre. Despejando y reemplazando podemos calcular la aceleración a de la partícula en la flama.

$$a = \frac{1}{2m} \rho_g v_r^2 \pi R^2 C_D$$
(4.3)

el coeficiente de arrastre es calculado de acuerdo al número de Reynolds, que está dado por:

$$\boxed{\text{Re} = \frac{\rho_g D_p v_p}{\mu_g}}$$
(4.4)

y de acuerdo a la *figura 4.9* es calculado el coeficiente de arrastre (C_D). La velocidad de la partícula v_p , es calculada siguiendo un esquema de movimiento uniformemente acelerado:

$$\boxed{v_p = v_o + at}$$
(4.5)

por consiguiente, la velocidad relativa del flujo con respecto a la partícula v_r , es calculada de acuerdo a:

$$\boxed{v_r = v_g - v_p}$$
(4.6)

donde v_g es la velocidad del gas en el intervalo de tiempo de interés y v_p es la velocidad de la partícula.

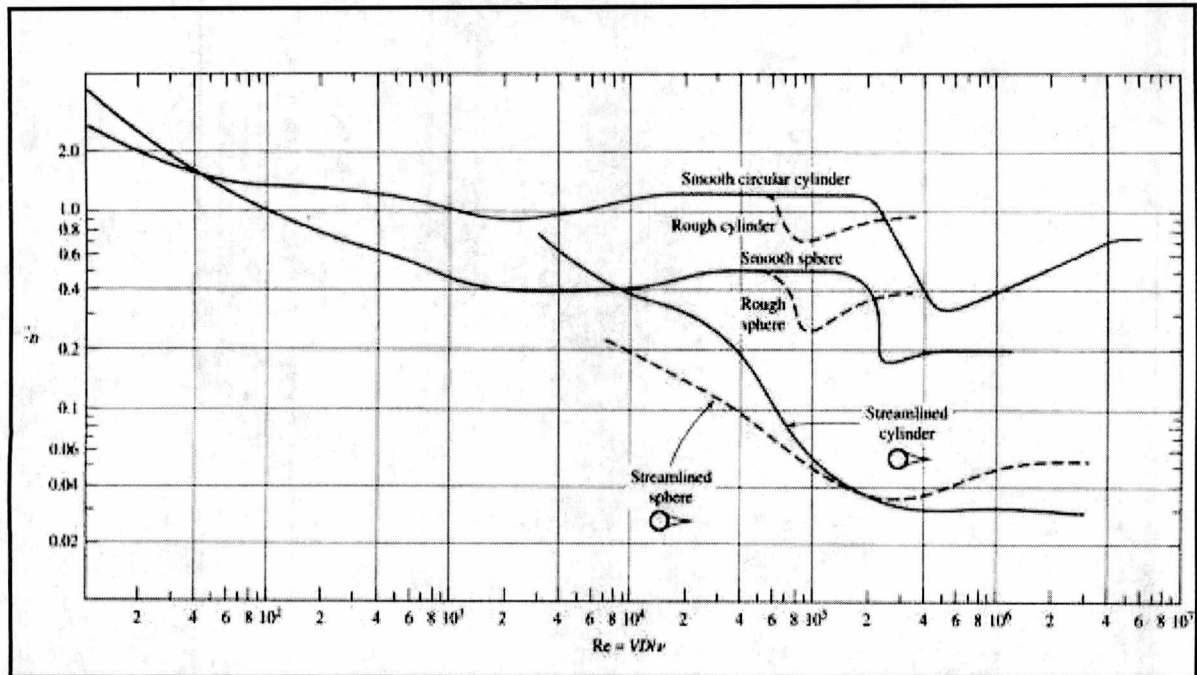


Figura 4.9 Coeficientes de arrastre para flujos alrededor de una esfera y un cilindro [50]

Por medio del modelo anteriormente descrito, podemos obtener la velocidad relativa del flujo con respecto a la partícula y así poder determinar las distribuciones de velocidad necesarias para la simulación y desarrollo del modelo propuesto. A continuación se muestra la tabla de datos para una partícula de $10 \mu\text{m}$, estos resultados fueron obtenidos de acuerdo al modelo matemático propuesto anteriormente (tabla 4.7):

Tabla 4.7 Datos calculados para la determinación de la velocidad relativa de la partícula

Tiempo (s)	Temperatura (K)	Velocidad flama (m/s)	Densidad flama (T) Kg/m^3	V_D (m/s)	V_r (m/s)	C_D	Re	Aceleración de la partícula (m/s^2)
0	12,000	2,000	0.3	0	2,000	0.2	9,798	4,639.18
1.56E-05	11,900	1,950	0.35	0.07	1,949.93	0.2	9,798	5,276.86
3.13E-05	11,200	1,850	0.38	0.16	1,849.84	0.2	9,798	5,435.08
6.25E-05	7,000	1,300	0.6	0.34	1,299.66	0.2	9,798	6,029.35
9.38E-05	3,500	675	1.5	0.57	674.43	0.2	9,798	7,822.05
1.25E-04	2,500	450	1.85	0.98	449.02	0.2	9,798	6,422.87
1.56E-04	2,000	325	2.4	1.00	324.00	0.2	9,798	6,012.30
1.72E-04	1,700	180	2.6	1.03	178.97	0.2	9,798	3,597.78
1.88E-04	1,500	100	2.7	0.67	99.33	0.2	9,798	2,073.55

Una vez obtenidos los valores de la velocidad relativa del flujo con respecto a la partícula, discretizamos los datos en una gráfica de velocidad relativa con respecto al tiempo y obtenemos

la función de aproximación como se muestra en la *figura 4.10*, la cual es usada como parámetro de entrada para la velocidad relativa del flujo contra la partícula, de la misma forma que la temperatura de la flama determinada mediante discretización en la *figura 4.5*. La temperatura inicial de la partícula es tomada de la temperatura ambiental que para este caso es de 300 K.

Para determinar la longitud que alcanza la flama antes de llegar al sustrato, nos basamos en estudios experimentales [42] donde coinciden que la longitud de la flama alcanza una distancia de 300 mm aproximadamente, lo cual nos indica que la flama utiliza tiempos muy cortos debido a la velocidad a la cual se desplaza. El radio promedio de la flama está determinado por estudios avanzados donde se demuestra que la flama alcanza un radio de aproximadamente 6 mm.

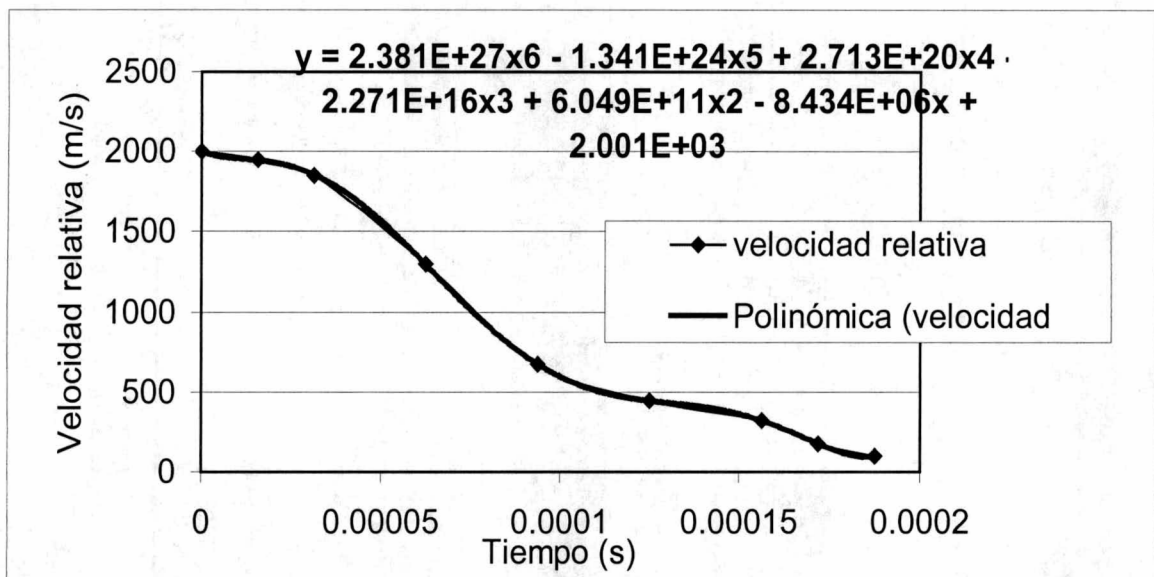


Figura 4.10 Discretización de la velocidad relativa del flujo con respecto a la partícula en función del tiempo

Para la determinación de los parámetros de densidad, conductividad térmica y viscosidad dinámica se remitió a valores experimentales realizados por un grupo de investigadores [44], donde establecieron curvas aproximadas para los datos calculados. Estos parámetros son usados como condiciones iniciales del material como se muestra en la *figura 4.11*, *4.12* y *4.13*.

Una vez teniendo las condiciones de iniciales y parámetros establecidos en el modelo, se procede a generar las geometrías, mallas y simulaciones para obtener los resultados deseados en el presente estudio, para ello en el siguiente capítulo se determinará con detalle el proceso de simulación y obtención de resultados del presente estudio.

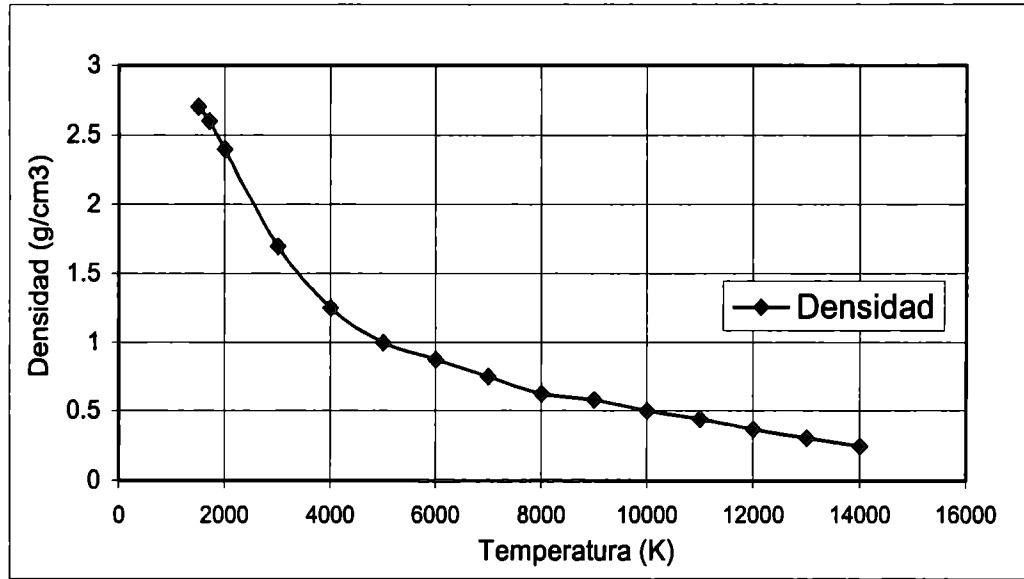


Figura 4.11 Densidad del Ar en función de la temperatura. (Capitelli, 1976)[44]

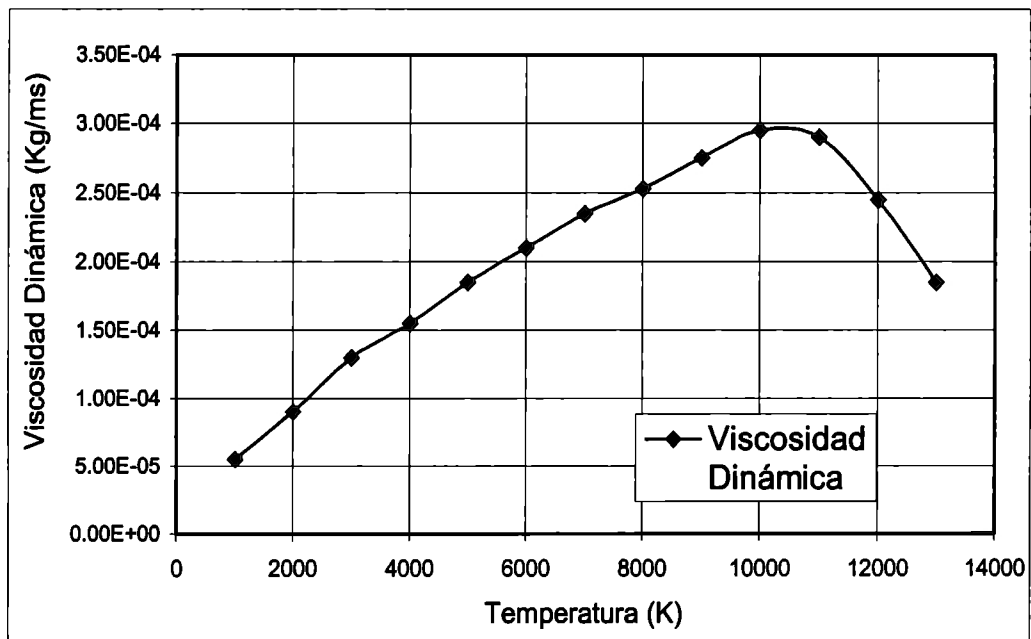


Figura 4.12 Viscosidad dinámica de Ar en función de la temperatura (Capitelli, 1972) [44]

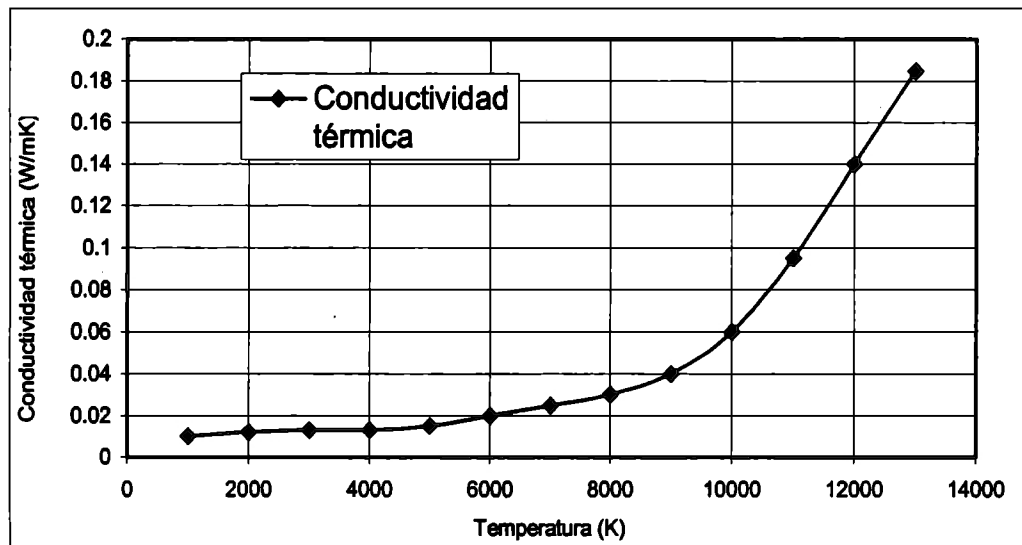


Figura 4.13 Conductividad térmica de Ar en función de la temperatura (Capitelli, 1972) [44]

CAPÍTULO 5

5 SIMULACIÓN Y RESULTADOS

El modelado y la simulación de la transferencia de calor y momentum hacia las partículas esféricas metálicas, sumergidas en un flujo a altas temperaturas se realizará en un software de Dinámica de Fluidos Computacional (CFD) denominado “FLUENT”, el cual es un paquete sofisticado que se utiliza para modelar flujos de fluidos y transferencia de calor. Provee de una completa flexibilidad, resolviendo problemas de flujo con mallas no estructuradas, las cuales pueden ser generadas a partir de geometrías irregulares con relativa facilidad. El módulo de mallado incluye dos dimensiones utilizando triángulos y cuadriláteros en la discretización y en tres dimensiones tetraedros, hexaedros y mallas híbridas.

Una de las ventajas de Fluent es el permitir refinar o ajustar las mallas creadas y generar soluciones adaptables, las cuales son particularmente útiles para predecir comportamientos en los que se requiere alta precisión, como flujos en celdas o regiones con amplios gradientes de presiones, velocidades, temperaturas u obtención de capa límite; además es un programa que se caracteriza por trabajar en un ambiente muy eficiente y por manejar una amplia variedad de datos estructurados. Adicionalmente, cuenta con una sólida arquitectura computacional que hace posible la operación de varios procesos de manera simultánea.

La estructura básica del programa consta de las siguientes etapas (*Figura 5.1*):

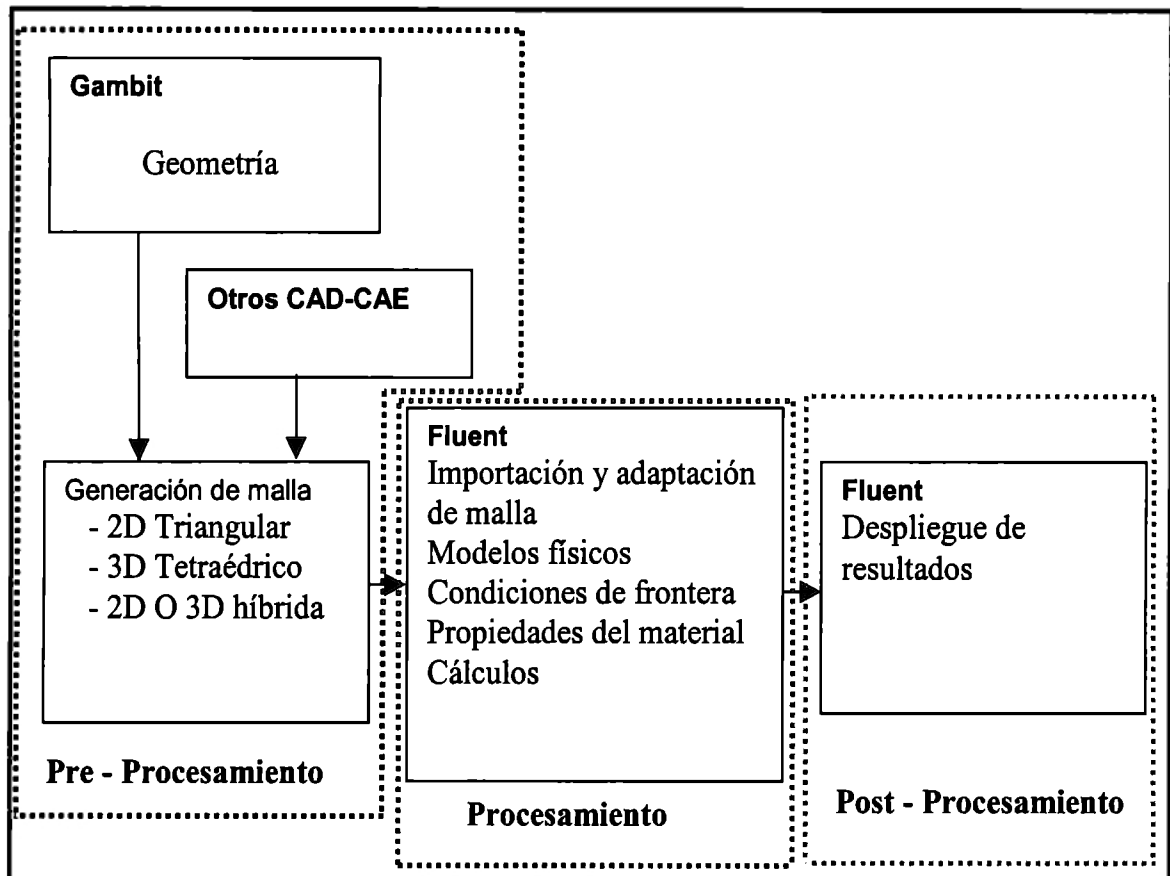


Figura 5.1 Estructura básica de FLUENT.[49]

- **Pre-procesamiento:** Módulo GAMBIT, utilizado para generar la geometría: empleando puntos, líneas y curvas, con referencia a un plano cartesiano (x,y,z), para posteriormente realizar el mallado del modelo, el cual consiste en un conjunto de celdas y nodos con ubicaciones (i,j,k). Es un ambiente flexible que permite la manipulación del modelo, aun cuando éste presenta cierta irregularidad o complejidad en cuanto a formas o dimensiones.
- **Procesamiento:** Módulo FLUENT, trabaja con el modelo discretizado proveniente de GAMBIT, o de algún otro software CAD. Consiste básicamente en la lectura de la malla y la introducción de datos importantes para realizar los cálculos como: condiciones de operación, materiales utilizados, condiciones iniciales y de frontera, mecanismos de transferencia de calor o dinámica de fluidos.
- **Post-Procesamiento:** Después de un número determinado de iteraciones en el modelo, es posible lograr la convergencia de las variables involucradas. FLUENT permite la visualización de resultados a través del despliegue de diversos gráficos o diagramas que muestran el comportamiento del modelo analizado.

Fluent es capaz de resolver los siguientes tipos de modelos:

- Flujos en geometrías de dos y tres dimensiones, utilizando soluciones adaptables con elementos: tetraédricos, triangulares o mezcla de ellos en dos dimensiones, así como prismas, tetraedros y mallas híbridas en tres dimensiones.
- Flujos compresibles e incompresibles.
- Análisis estacionarios o transitorios.
- Flujos laminares o turbulentos.
- Flujos en fluidos newtonianos y no newtonianos.
- Transferencia de calor convectiva, incluyendo convección natural o forzada.
- Transferencia de calor por radiación.
- Fenómenos de combustión.
- Flujos a través de medios porosos.
- Fuentes volumétricas arbitrarias de calor, masa, turbulencia y especies químicas.
- Intercambio de calor por medio de aletas.
- Flujos en dos fases, incluyendo fenómenos de cavitación.
- Flujos en superficies libres con complejas formas en la superficie.

Estas ventajas del paquete, pueden ser utilizadas en una amplia variedad de aplicaciones, como las que se muestran a continuación:

- Elementos generadores de potencia
- Aplicaciones en turbomaquinaria e industria aeroespacial.
- Industria automotriz.
- Intercambiadores de calor.
- Aplicaciones en electrónica y procesamiento de materiales.

Dentro del módulo Fluent, el procedimiento que se recomienda aplicar para el análisis de problemas es el siguiente:

1. Crear el modelo y generar una malla adecuada: El proceso requiere de un modelado en la geometría y la generación de la malla, para lo cual se utiliza GAMBIT.
2. Elegir el solucionador más adecuado en dos o tres dimensiones.
3. Importar la malla.
4. Verificar la malla creada.
5. Seleccionar la formulación del solucionador.
6. Escoger las ecuaciones básicas a resolver: Flujos laminares o turbulentos, especies químicas o reacciones, modelos de transferencia de calor, etc. Así como identificar modelos adicionales necesarios como: Aletas, Intercambiadores de calor, medios porosos, etc.
7. Especificación de propiedades del material.
8. Establecer condiciones de frontera.
9. Ajustar la solución de acuerdo a parámetros de control.
10. Inicializar los parámetros.
11. Calcular la solución.
12. Examinar resultados.

5.2 CREACIÓN DE LA GEOMETRÍA

Para la creación de la geometría se tomaron en cuenta aquellos parámetros y dimensiones consideradas en el capítulo 4, todo esto para una simplificación del modelo y así poder realizar un análisis óptimo de la transferencia de calor y momentum y por consiguiente encontrar una distribución confiable de temperaturas y velocidades.

Una consideración para el modelo en estudio, es que puede asumirse simétrico, lo que simplifica los cálculos.

La geometría resultante para la simulación del modelo, depende del tamaño de la partícula analizar; cabe notar que como se determinó en el capítulo anterior, el tamaño del volumen de control es igual para cualquier modelo de partícula a estudiar. La *figura 5.2 y 5.3* muestra la geometría particular para los tamaños de partículas de $20\ \mu\text{m}$ y $100\ \mu\text{m}$ respectivamente.

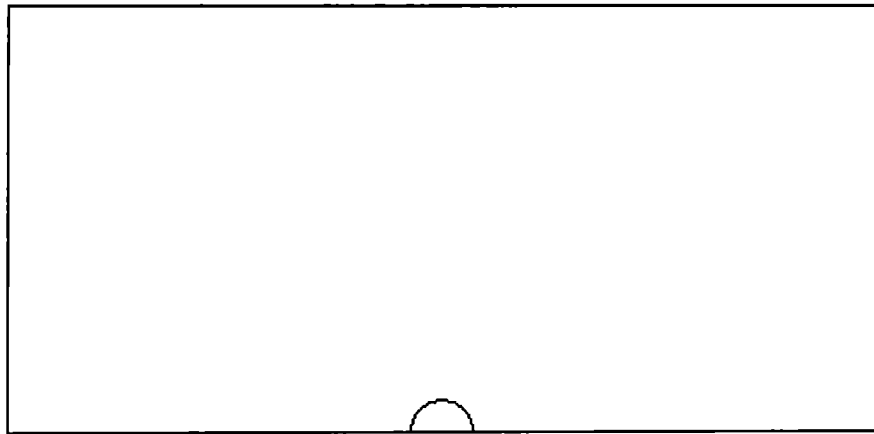


Figura 5.2 Geometría para una partícula de $20\ \mu\text{m}$ de diámetro

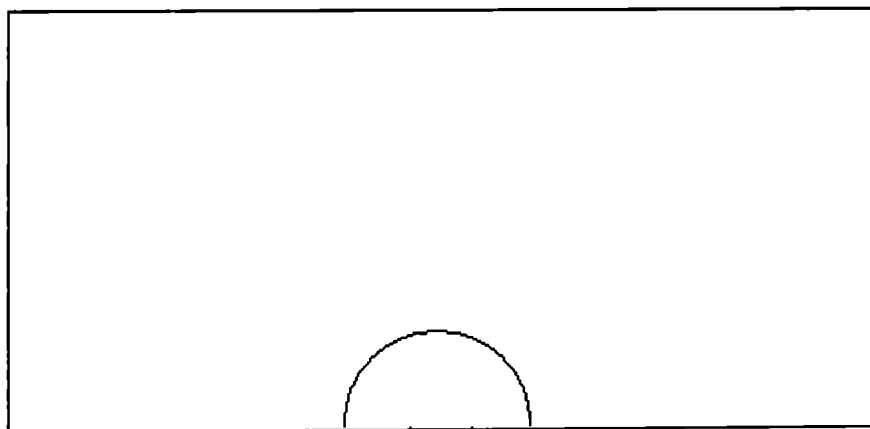


Figura 5.3 Geometría para una partícula de $100\ \mu\text{m}$ de diámetro

Como se puede observar en las *figuras 5.2 y 5.3*, los tamaños de los volúmenes de control son idénticos ($250\ \mu\text{m}$ de alto y $500\ \mu\text{m}$ de ancho) de acuerdo a lo establecido en el capítulo 4.

5.3 GENERACIÓN DE MALLA

Para obtener resultados óptimos, se requiere escoger un buen mallado para la geometría a ser analizada; entre más fina es la malla, los resultados que se van a obtener son muy buenos, así que para la geometría del modelo a analizar se generó una malla bajo el esquema de PAVE, el cual viene incluido dentro del paquete de simulación Fluent; donde el mallado se realiza automáticamente de acuerdo a la geometría diseñada, los parámetros estipulados para el tamaño de intervalo es de 1.0000 y 5.000 para las dos geometrías mostrada en las *figuras 5.4 y 5.5*.

El número de nodos generados para los modelos en estudio fueron los siguientes:

Tabla 5.1 Mallado respectivo para cada caso estudiado

Diámetro de partícula (μm)	Nodos de la malla (flama)	Caras de la malla (flama)	Caras de la malla (partícula)	Nodos de la malla (partícula)
100	4951	4794	256	289
20	758	697	108	129

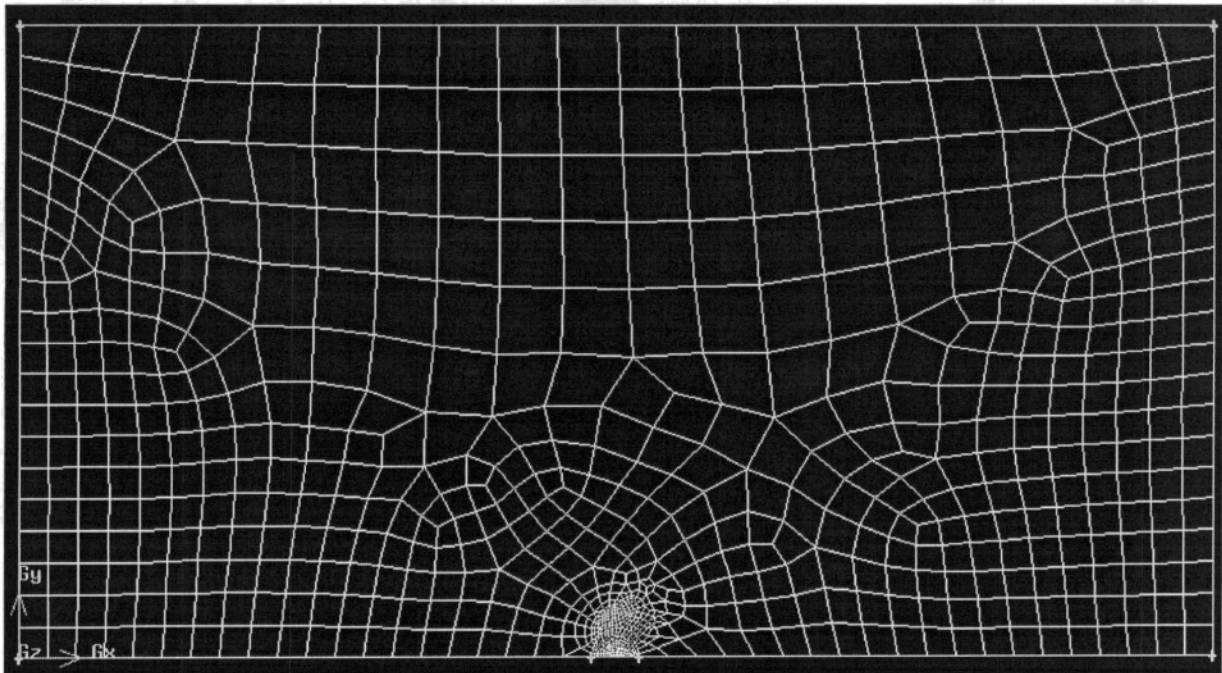


Figura 5.4 Malla para la partícula de $20\mu\text{m}$

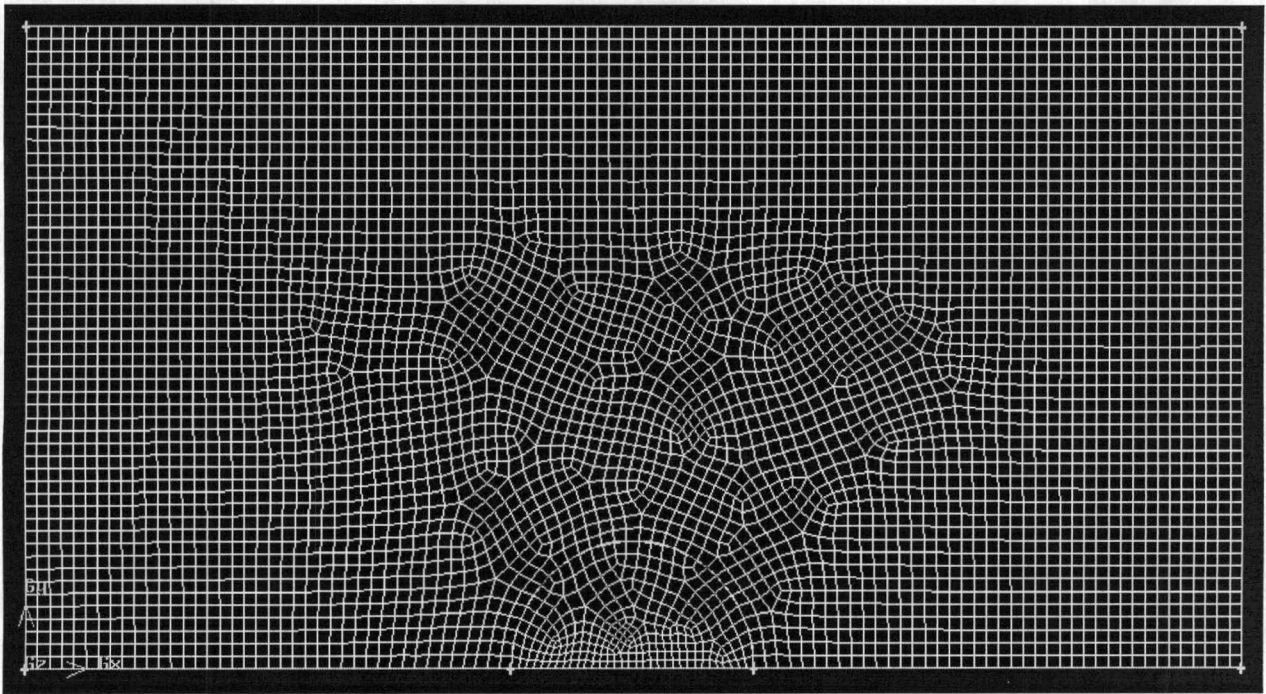


Figura 5.5 Malla para la partícula de 100 μm

5.4 CONDICIONES DE FRONTERA

Las condiciones de frontera se clasifican en las siguientes categorías:

- ◆ **Límites de flujo de entrada - salida:** Presiones, velocidades o flujo másico.
- ◆ **Paredes:** Simétricas, periódicas o ejes.
- ◆ **Zonas internas:** Sólidos, fluidos o medios porosos.
- ◆ **Fronteras de caras internas:** Interior, Pared, Aletas, Medios porosos, etc. Son definidas sobre zonas que no tienen establecido un espesor “finito” y ello implica un tratamiento diferente al de otras regiones. Se utilizan en la implementación de modelos físicos representados por aletas, membranas porosas, etc.
- ◆ **Condiciones de un cuerpo sólido:** Una región sólida es un grupo de celdas, en donde el material analizado no será afectado por situaciones de convección. Lo único que se requiere introducir es el tipo de material del que están fabricadas las zonas del cuerpo y posibles fuentes de transferencia de calor, especificando el flujo. También se puede definir movimiento en el sólido o límites periódicos rotatorios en zonas adyacentes a él, para lo cual se requiere incluir el eje de rotación. Cuando se modelan flujos de calor por radiación, utilizando el método de ordenadas discretas, es necesario especificar si el sólido participa o no en la radiación.
- ◆ **Condiciones de un fluido:** Una zona fluida es un conjunto de celdas, en las que todas las ecuaciones de movimiento se encuentran involucradas. Sólo se requiere especificar el tipo de fluido en cada una de las regiones del modelo. Existen opciones que permiten definir masa,

momento, turbulencia y mezclas. Es posible definir regiones de movimiento en el fluido y límites rotatorios en algunas celdas adyacentes.

En el presente análisis se consideran las condiciones de frontera mostradas en la *figura 5.6* y *5.7* y la especificación de medios continuos utilizados *figura 5.8* y *5.9*, de acuerdo a las geometrías y especificaciones encontradas en cada una de ellas y analizadas en el capítulo tres y cuatro.

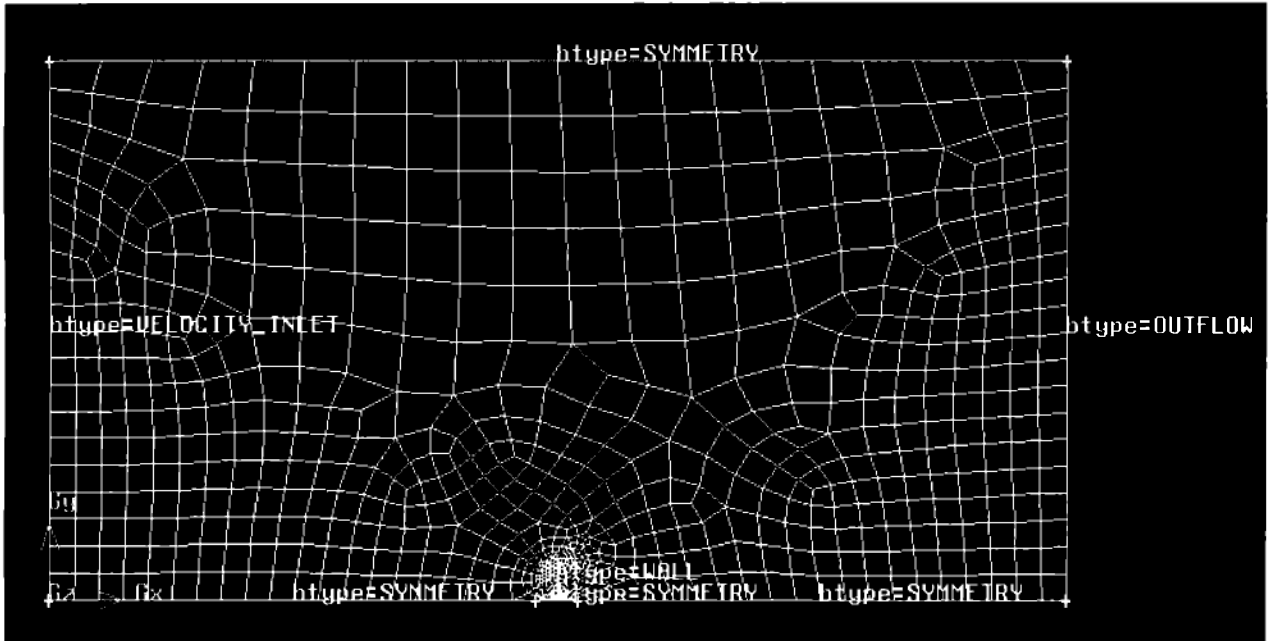


Figura 5.6 Representación de las condiciones de frontera en el modelo generado para una partícula de $20 \mu\text{m}$.

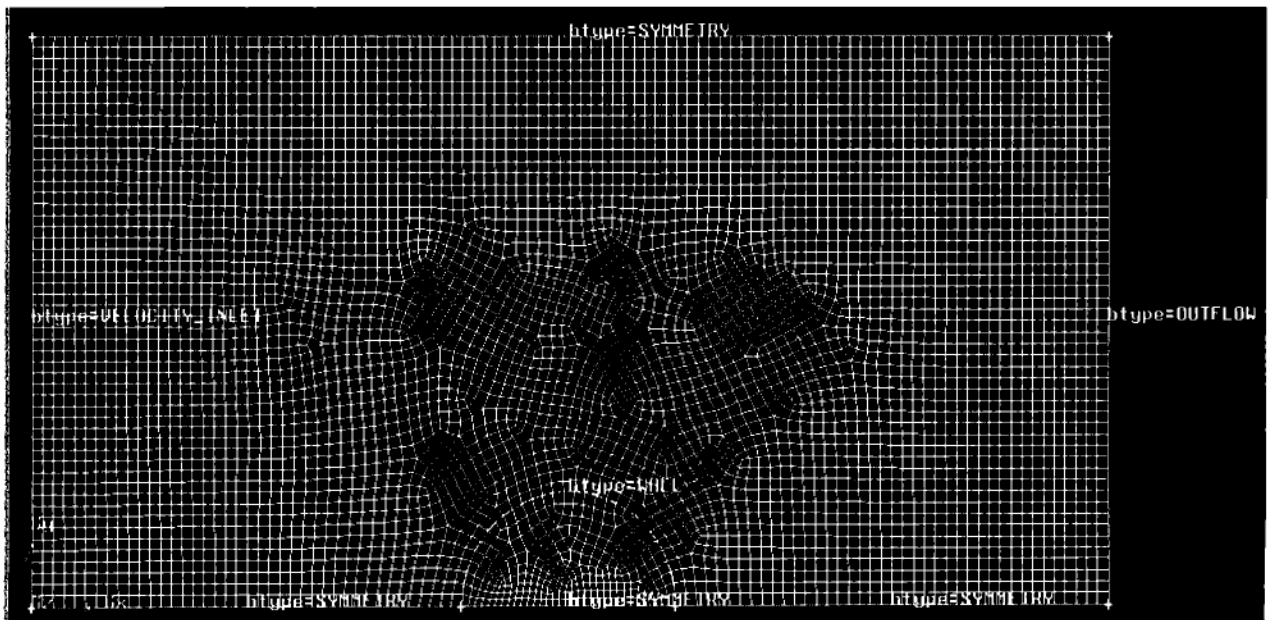


Figura 5.7 Representación de las condiciones de frontera en el modelo generado para una partícula de $100 \mu\text{m}$.

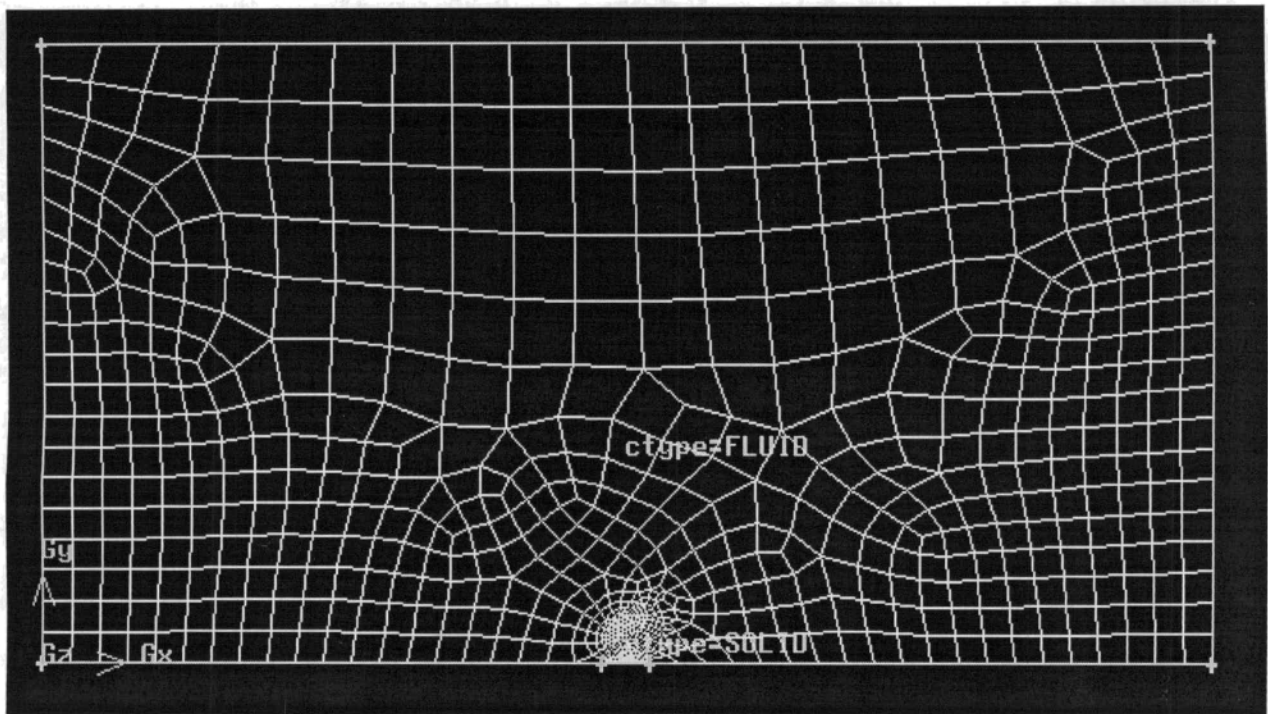


Figura 5.8 Especificación de medios continuos de la partícula de 20 μ m.

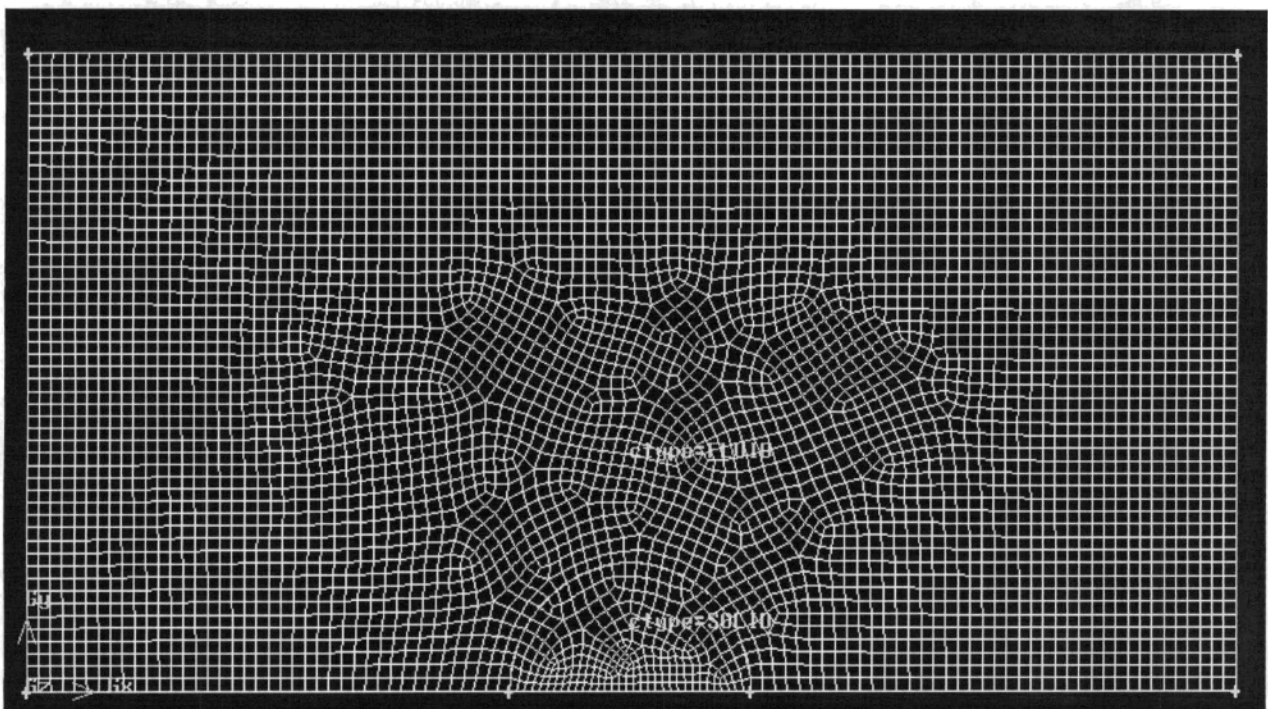


Figura 5.9 Especificación de medios continuos de la partícula de 100 μ m.

De acuerdo a lo establecido en el capítulo cuatro, las condiciones de frontera determinadas para el proceso en estudio, incluye las curvas, funciones y aproximaciones resultantes del análisis y estudio propuesto en dicho capítulo.

Para la determinación del tiempo de simulación se discretizó en fracciones de tiempos aproximados de 0.000015625 segundos, para así en 12 iteraciones poder cubrir el tiempo total que la flama viaja antes de llegar al sustrato a ser recubierto, esta determinación del tiempo está

basada en los análisis hechos en el capítulo cuatro y de acuerdo a estudios y experimentos avanzados.

5.5 RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La parte medular de todo estudio es sin duda alguna la obtención, análisis e interpretación de los resultados obtenidos, de ello depende el éxito o fracaso del proyecto realizado.

Su relevancia estriba en el hecho de proporcionar bases y fundamentos para determinar el grado de confiabilidad en un proceso, identificar posibles áreas de oportunidad o mejora, realizar ajustes para el control del desempeño de algunas tareas y extrapolar dichos resultados al resto de las áreas.

Por lo anteriormente descrito, es conveniente recordar que para el desarrollo del modelo propuesto, en el capítulo cuatro se determinaron algunas restricciones sujetas a sustentaciones válidas para obtener resultados confiables.

Los resultados obtenidos en la simulación del proceso de transferencia de calor y momentum de una partícula esférica se muestran en las siguientes figuras en un corte transversal, debido a que se considera una sección completa y representativa del comportamiento de las temperatura y velocidades en todos los elementos que intervienen en el modelo.

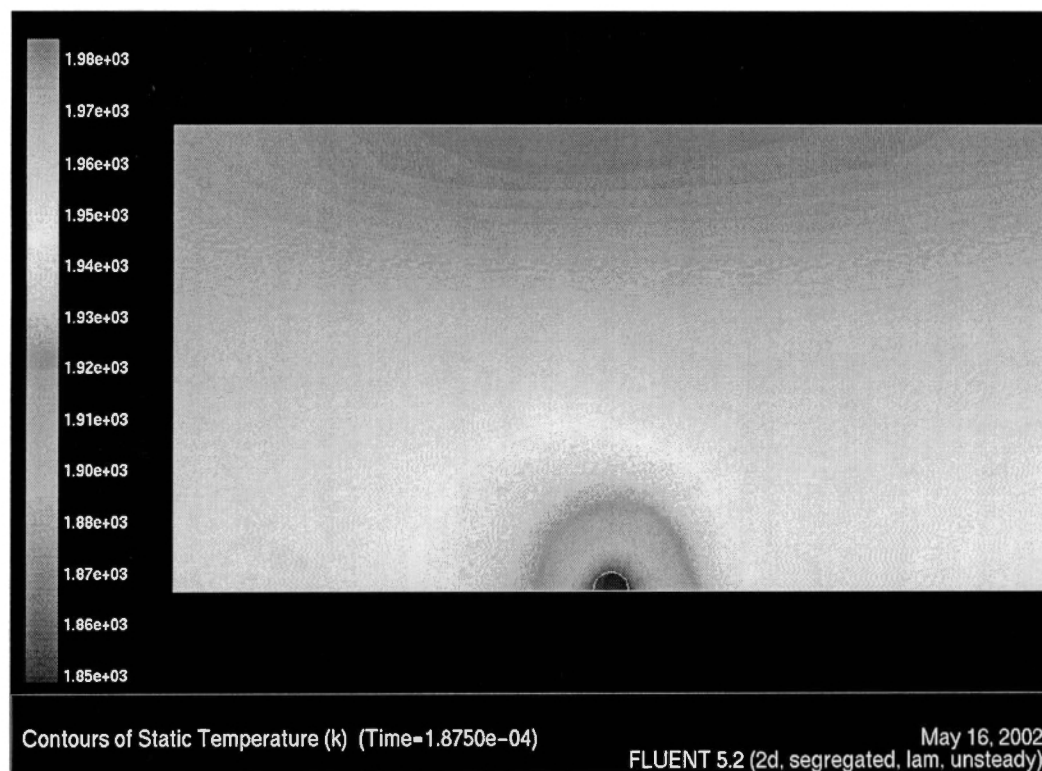


Figura 5.10 Contornos de temperatura para la etapa final de calentamiento (partícula de 20 μm).

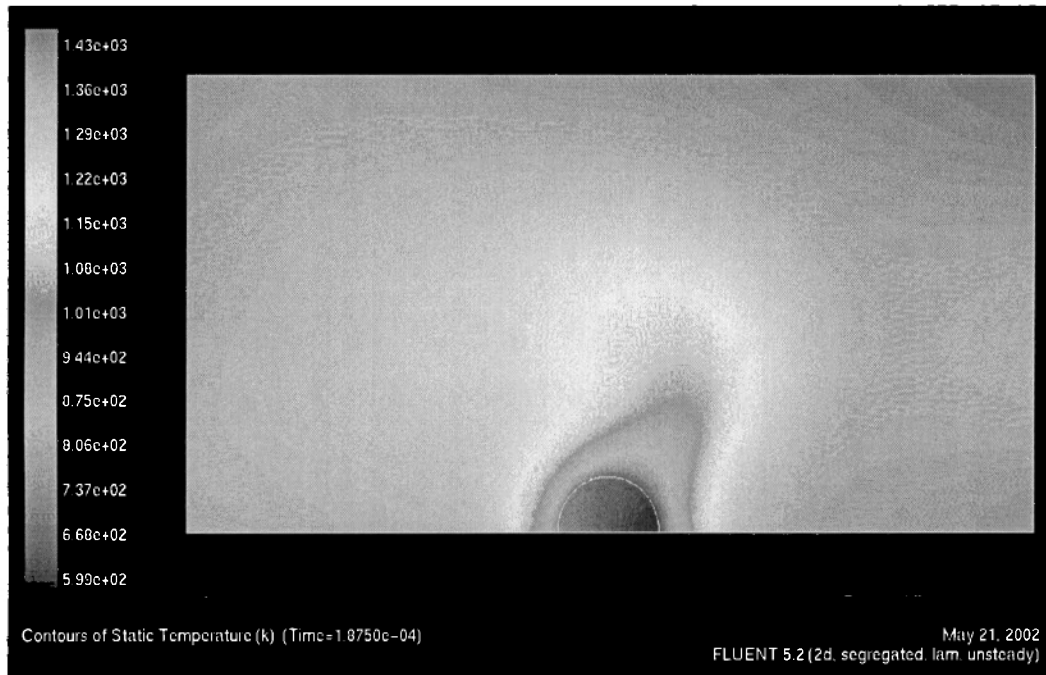


Figura 5.11 Contornos de temperatura para la etapa final de calentamiento (partícula de 60 μm).

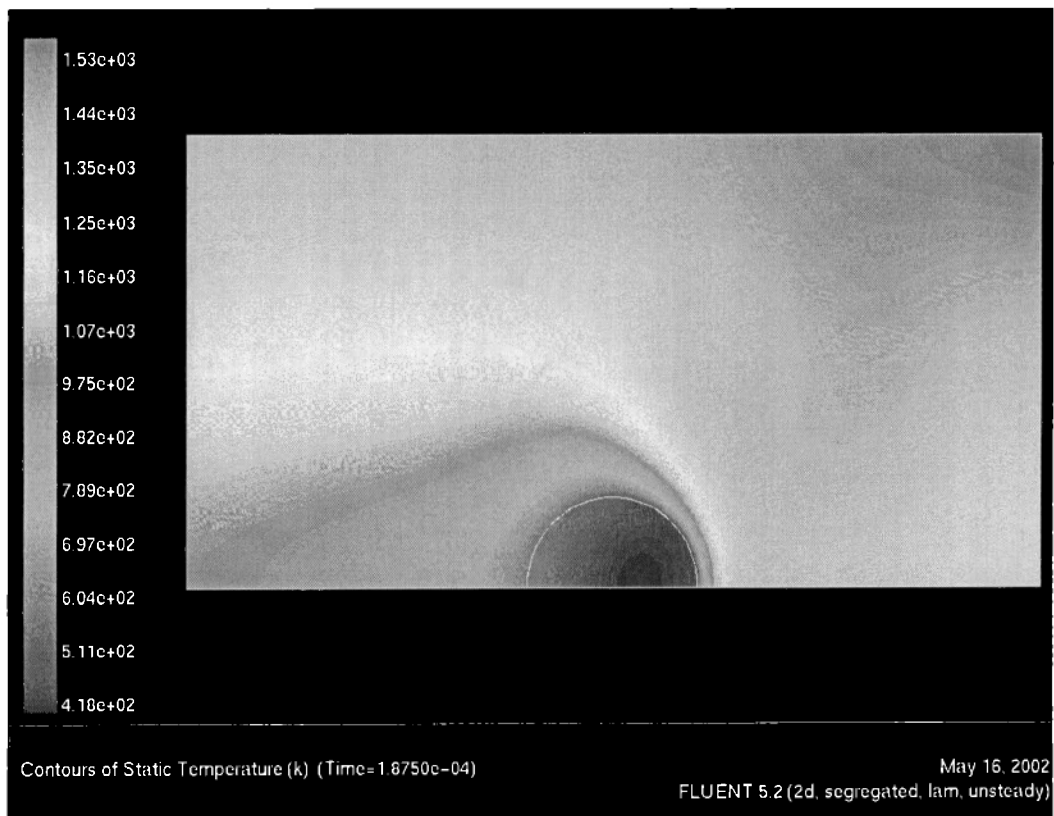


Figura 5.12 Contornos de temperatura para la etapa final de calentamiento (partícula de 100 μm).

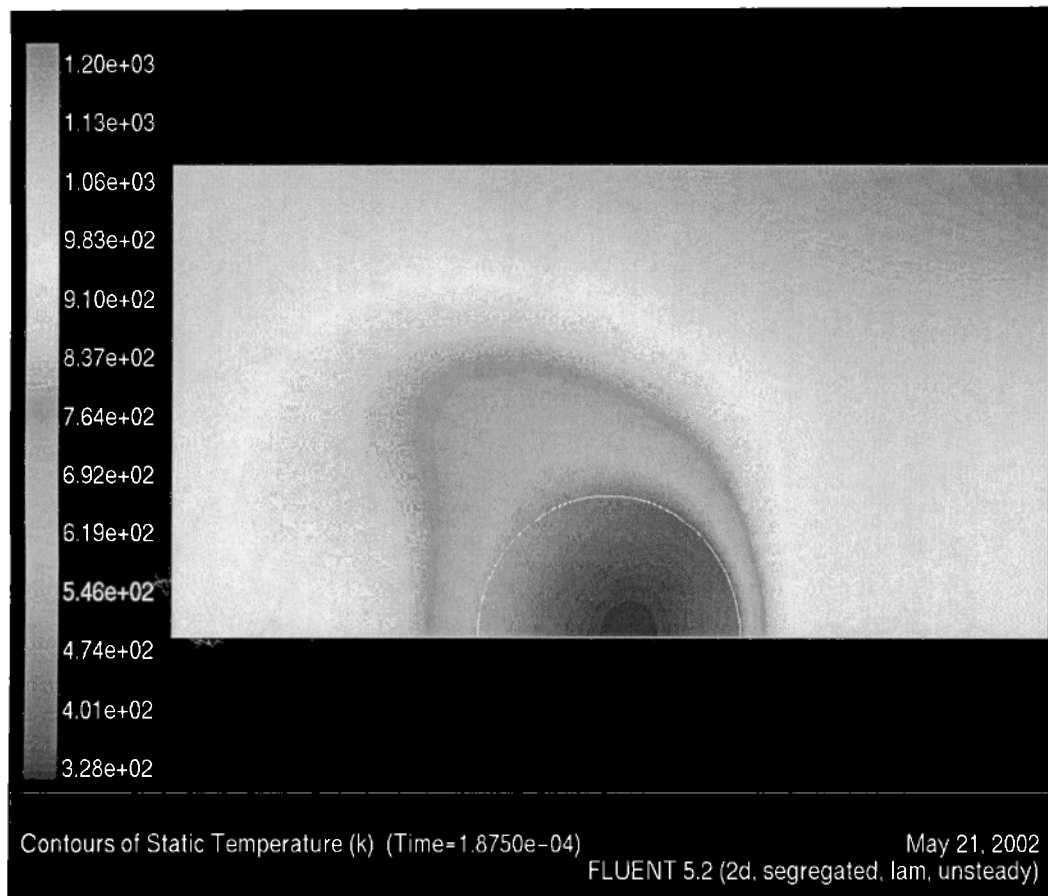


Figura 5.13 Contornos de temperatura para la etapa final de calentamiento (partícula de 150 μm).

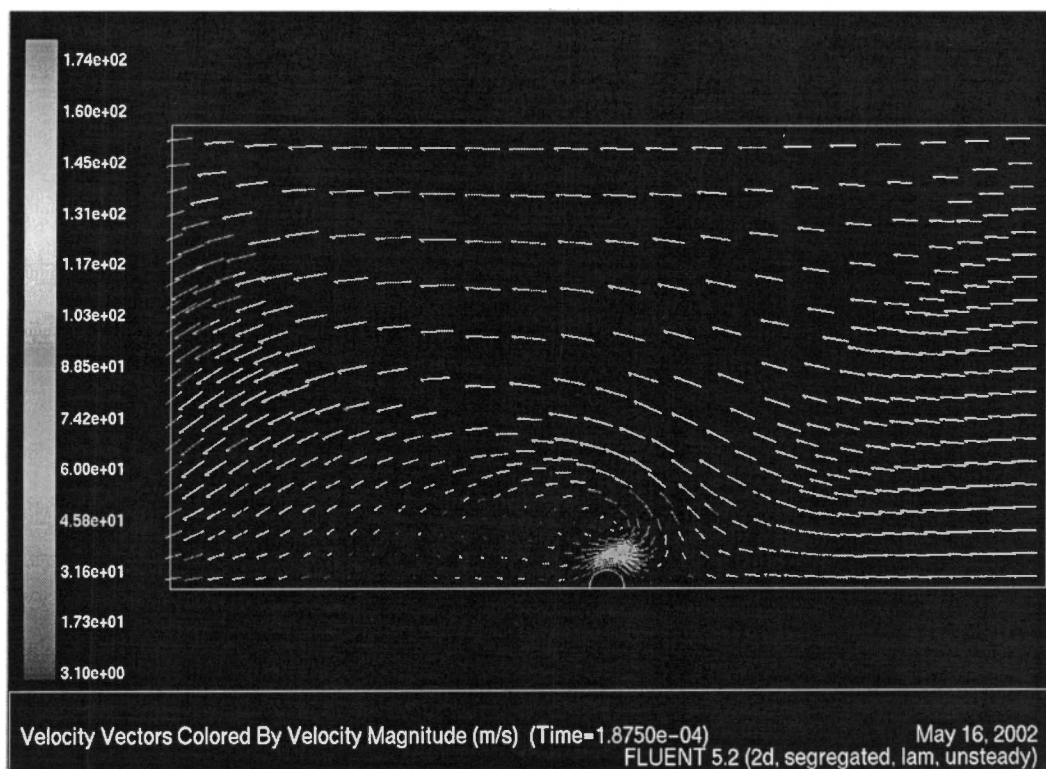


Figura 5.14 Vectores de velocidad para el tiempo final en la partícula de 20 μm .

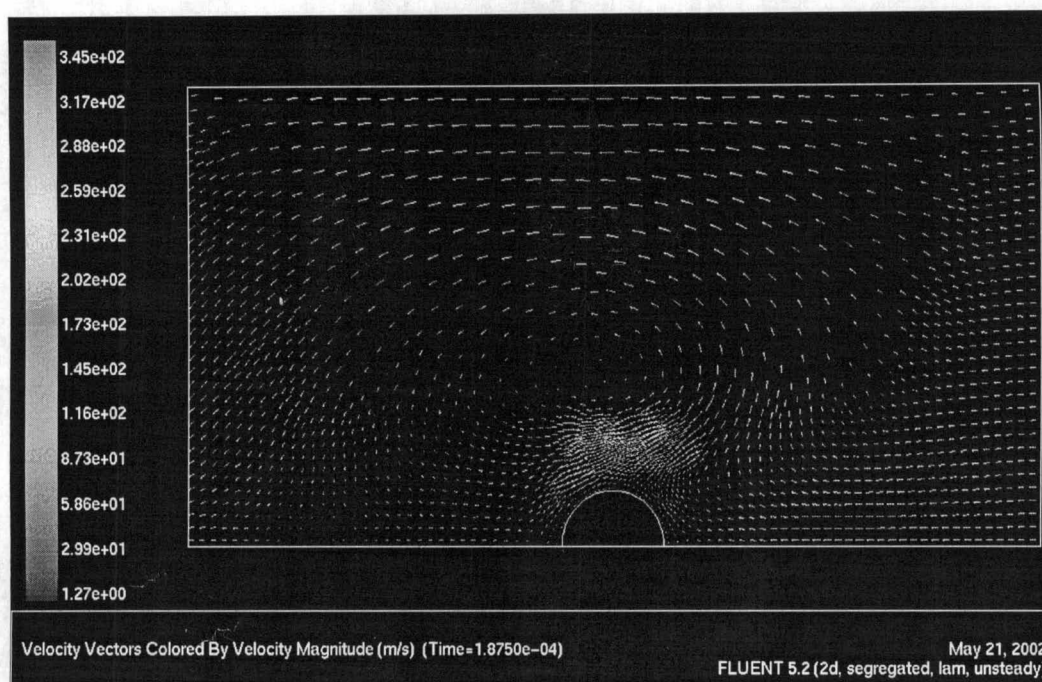


Figura 5.15 Vectores de velocidad para el tiempo final en la partícula de $60 \mu\text{m}$.

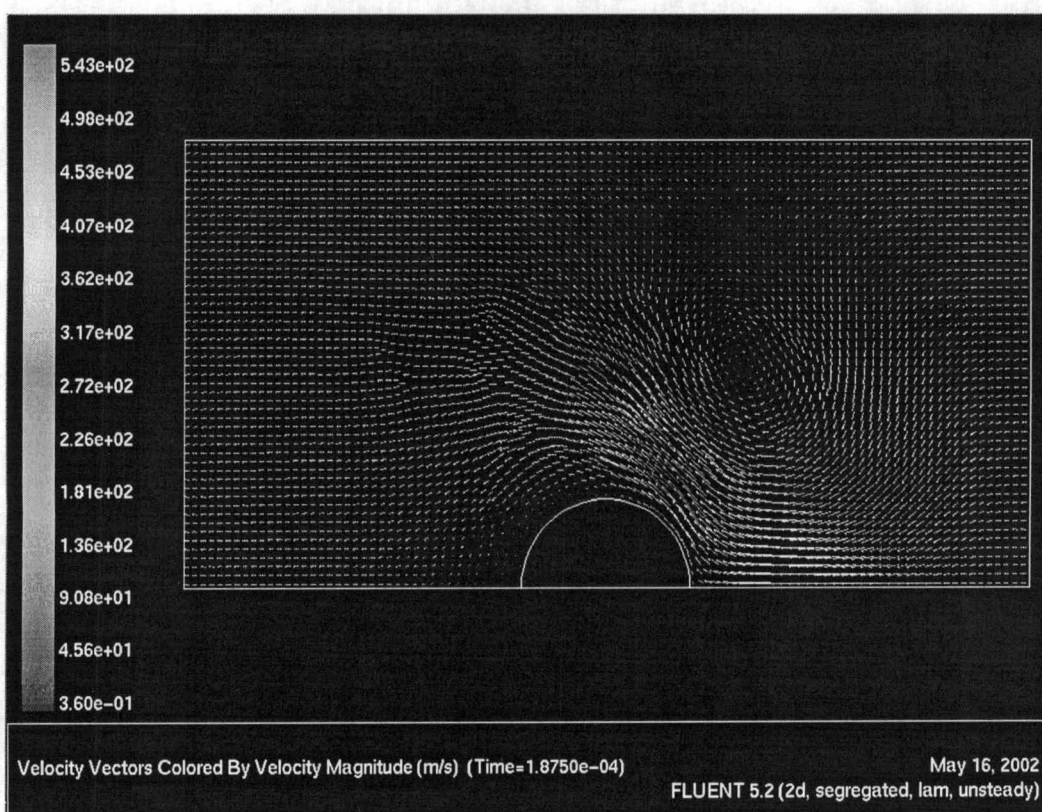


Figura 5.16 Vectores de velocidad para el tiempo final en la partícula de $100 \mu\text{m}$.

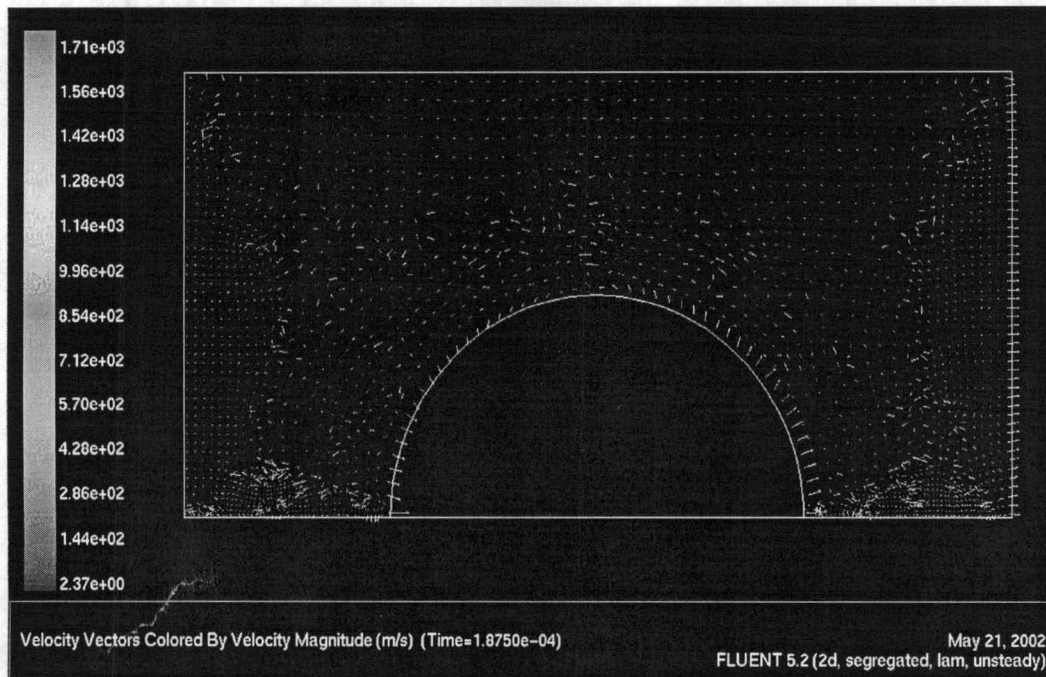


Figura 5.17 Vectores de velocidad para el tiempo final en la partícula de 250 μm .

Los resultados obtenidos, de acuerdo a la transferencia de calor y momentum de las partículas en estudio, presentan algunas características, las cuales son determinadas de acuerdo a los resultados obtenidos en cada una de las simulaciones, para ello en las siguientes figuras se muestran las distribuciones de temperaturas resultantes para cada tamaño de partícula estudiada:

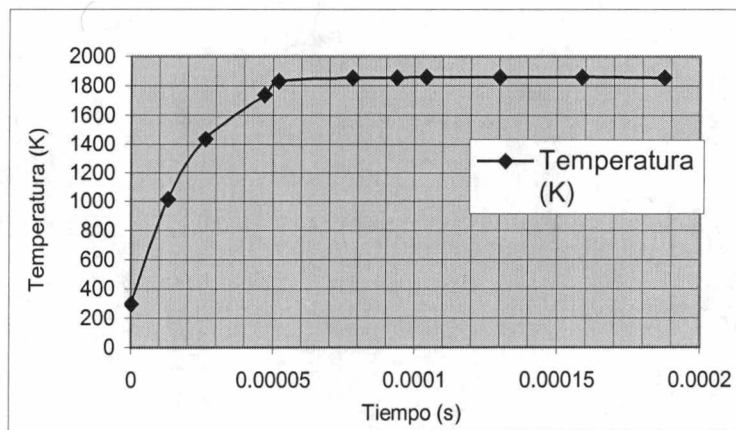


Figura 5.18 Distribución de temperaturas para la partícula de Ti de 20 μm .

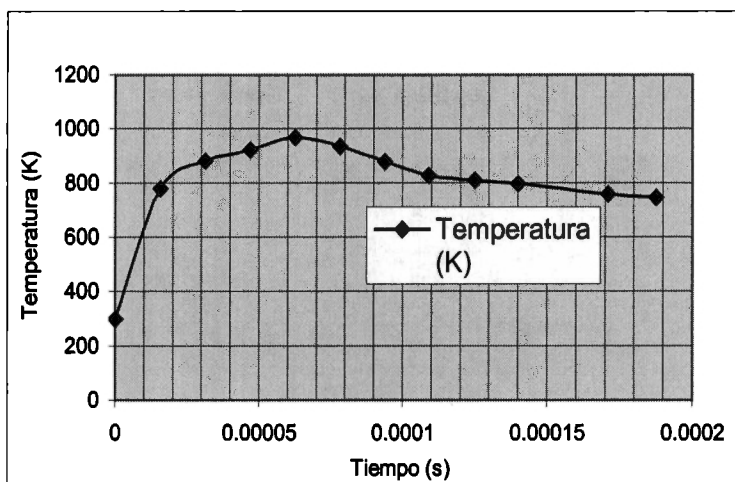


Figura 5.19 Distribución de temperaturas para la partícula de Ti de 60 μm .

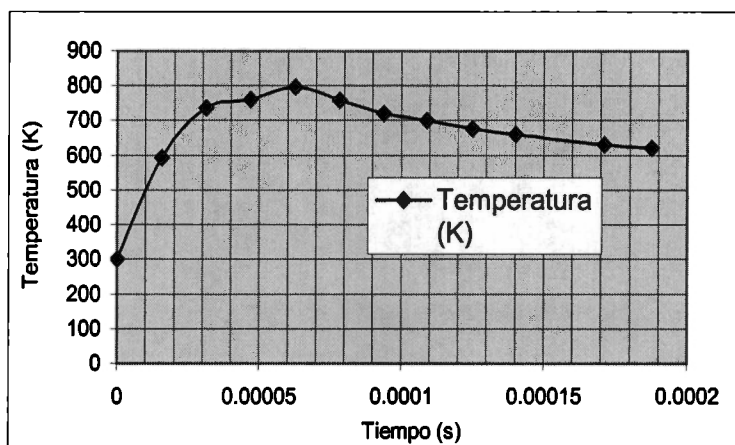


Figura 5.20 Distribución de temperaturas para la partícula de Ti de 100 μm .

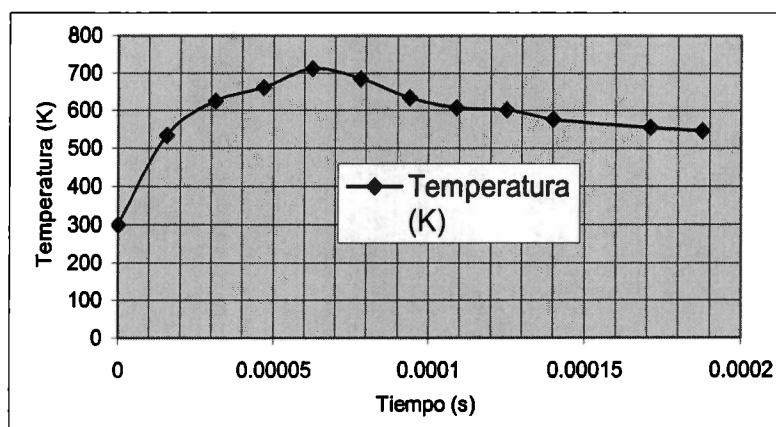


Figura 5.21 Distribución de temperaturas para la partícula de Ti de 150 μm .

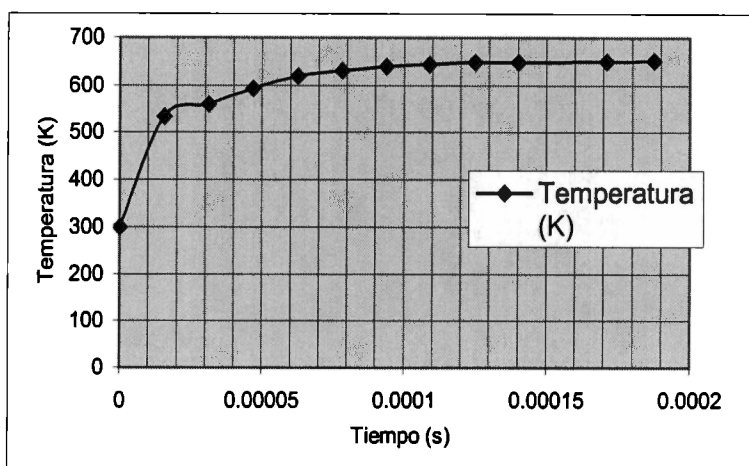


Figura 5.22 Distribución de temperaturas para la partícula de Ti de 250 μm .

De acuerdo a los resultados obtenidos en las simulaciones correspondientes, se puede determinar que la temperatura de la partícula es inverso al tamaño de la partícula, esto se puede observar claramente en las figuras anteriores, donde la temperatura para las partículas más grandes decrece, por ejemplo la partícula de 20 μm alcanza una temperatura de 1854 K en comparación con la partícula de 250 μm , que alcanza una temperatura de 651 K. Esto se puede explicar por la cantidad de masa que posee cada partícula, ya que en las más pequeñas el calor se transfiere más rápido que en las de mayor cantidad de masa, todo esto es apreciable y válido de acuerdo a la revisión de investigaciones que se han realizado y que fueron analizadas en los capítulos tres y cuatro.

De acuerdo a lo planteado en el capítulo 4, se pudo comprobar que la transferencia de calor del flujo de la flama hacia la partícula estuvo presente de acuerdo a lo observado en las figuras 5.10, 5.11, 5.12 y 5.13; esto se puede reflejar en la disminución de la temperatura de la flama y el aumento en la temperatura de la partícula, lo que conlleva a que el modelo y la teoría propuesta en el capítulo cuatro es una buena aproximación para la determinación de parámetros de transferencia de calor, ya que allí se explicó que la flama tiende a disminuir su temperatura y la partícula a ganar esa energía que es transferida por la flama.

También podemos observar en las figuras de los resultados de temperaturas, que las partículas adquieren la mayor cantidad de temperatura en los primeros 100 mm aproximadamente, es decir en un tiempo aproximado de 0.00005 segundo, esto es importante de señalar, ya que con ello se puede hacer una buena determinación para la distancia a la cual la temperatura de la partícula es mayor y así tener una aproximación de la distancia a la cual tenemos que colocar el material a ser recubierto.

Por otro lado, los resultados obtenidos del comportamiento de la velocidad de la partícula y la flama, son observados en las figuras 5.14, 5.15, 5.16 y 5.17, donde, las partículas debido a su densidad, son arrastradas fácilmente por la flama hasta cierto punto y así alcanzar su misma velocidad, encontrando con ello que la transferencia de momentum de la partícula y la flama están presentes en este fenómeno, lo cual nos hace considerar la velocidad como un factor de control como se determinó en los capítulos tres y cuatro.

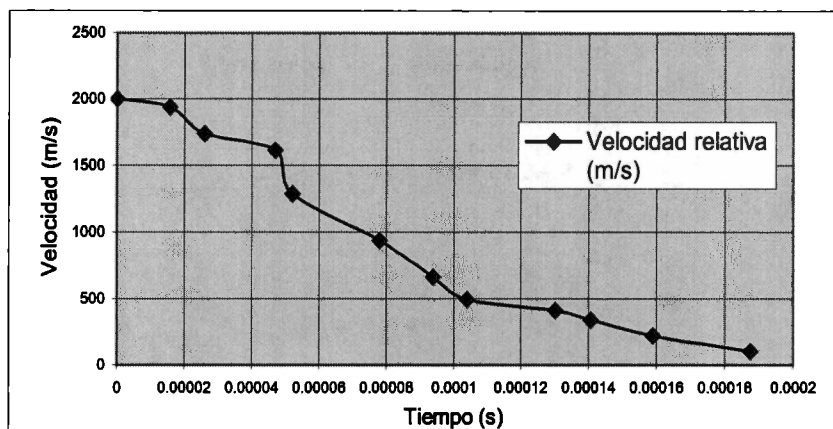


Figura 5.23 Distribución de velocidades para la partícula de Ti de 20 μm

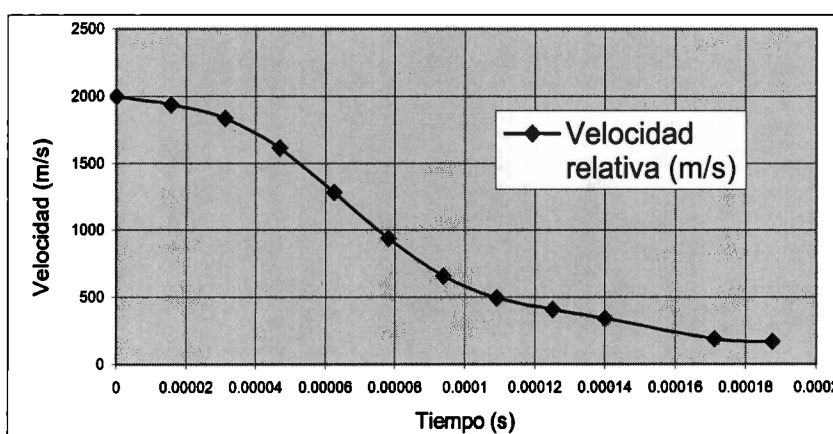


Figura 5.24 Distribución de velocidades para la partícula de Ti de 60 μm

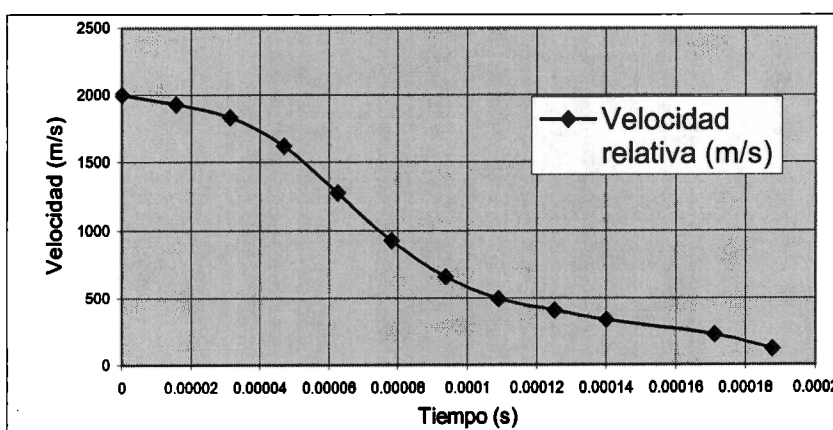


Figura 5.25 Distribución de velocidades para la partícula de Ti de 100 μm

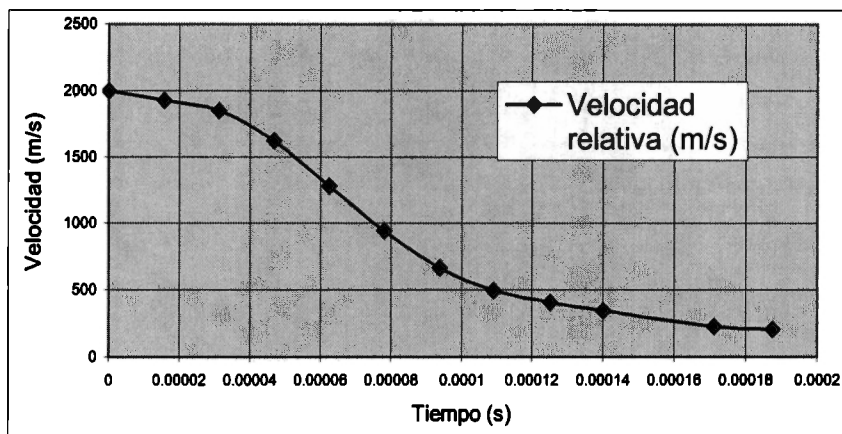


Figura 5.26 Distribución de velocidades para la partícula de Ti de 150 μm

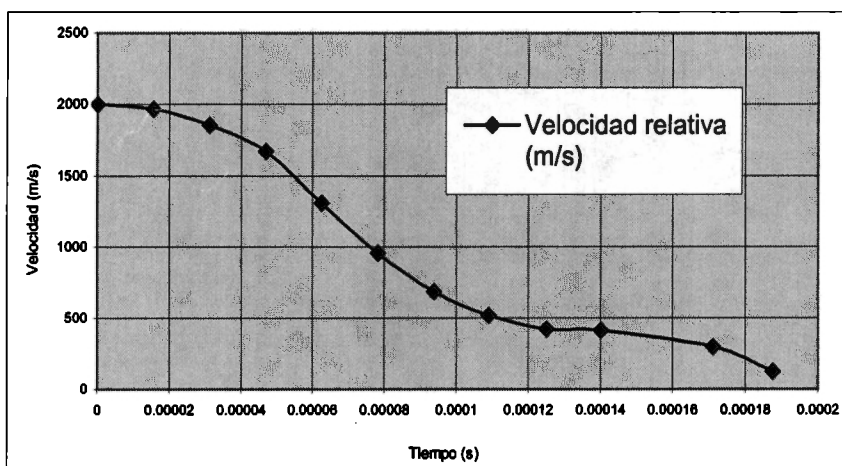


Figura 5.27 Distribución de velocidades para la partícula de Ti de 250 μm

CAPÍTULO 6

6 CONCLUSIONES

El objetivo del presente estudio, fue el desarrollar una metodología de investigación para el cálculo de la transferencia de calor y momentum a partículas esféricas, necesarios en los procesos de recubrimientos, como un aporte para la solución de problemas que existen en la industria manufacturera, tanto en el diseño de los productos como en sus procesos de manufactura, (la corrosión, desgaste, abrasión, erosión, choques térmicos, etc.).

Durante el desarrollo de esta tesis se estableció un modelo teórico, el cual fue obtenido por medio de una revisión bibliográfica de los estudios y conceptos relacionados con el tema a estudiar entre los que se encuentran, fenómenos de transporte (Dinámica de fluidos, transferencia de calor, etc.), fundamentos del plasma, etc., así como la obtención de un modelo cilíndrico bajo un concepto Lagrangiano y bidimensional, construido mediante discretización de resultados experimentales; considerando las partículas de forma esférica y homogéneas.

Posteriormente, se desarrolló el modelo teórico propuesto en el capítulo cuatro, donde se tomaron como base, aquellos conceptos estudiados en los capítulos dos y tres.

Después de la determinación del modelo, en el capítulo cinco se realizaron las simulaciones a partículas de titanio en un flama de argón, para los tiempos establecidos de acuerdo a la distancia de la flama (300 mm). Los tamaños de las partículas a estudiar fueron de 20 μm , 60 μm , 100 μm , 150 μm y 250 μm , donde se variaron los parámetros de densidad, viscosidad y conductividad

térmica de la flama de Argón, determinadas mediante discretización de resultados de estudios realizados por otros investigadores.

Posteriormente, analizando y asimilando los resultados obtenidos, presentamos las siguientes conclusiones:

Se desarrolló el modelo teórico para describir la transferencia de calor y momentum del plasma hacia las partículas inyectadas, y se simuló numéricamente con el paquete FLUENT V. 5.0, la dinámica de partículas antes, durante y después de la transferencia de calor y momentum, obteniendo resultados coherentes y que sirven de punto de partida para la obtención de datos para el mejoramiento del proceso de recubrimiento por plasma.

Durante todo el proceso de simulación, se encontraron complicaciones al simular el modelo con conductividad térmica, densidad y viscosidad dinámica de la flama constantes, esto nos llevo a obtener resultados no confiables, por lo que se decidió tomar referencia de estudios realizados y obtener curvas aproximadas de estos parámetros y así tener resultados válidos y que comparados con las investigaciones acerca de las partículas son muy aproximados.

Se notó en la simulación que por ejemplo para las partículas de titanio de 20 μm y 100 μm , se obtuvieron temperaturas de 1854 K y 651 K respectivamente, de acuerdo a estos resultados se determina que el efecto del tamaño de la partícula es un factor a considerar en el proceso de recubrimiento. Además la temperatura y la velocidad de la partícula se incrementan rápidamente en los primeros 100 mm del chorro de plasma.

La transferencia de calor hacia la partícula fue observada y confirmada por la disminución de la temperatura de la flama y el aumento de la temperatura de la partícula, ya que como se ilustró en la *figura 4-6* las temperaturas de los dos entes tiende a equilibrarse.

Por otra parte, se sugiere como mejoría al modelo, realizar una inyección de partículas aleatoriamente, para así poder determinar una mejor aproximación del comportamiento de las partículas en el plasma, como también se sugiere simular más partículas de diferentes materiales, tamaños con diferentes plasmas y llevar una base datos que ayuden más adelante a tomar buenas decisiones en la utilización de sustancias y substratos en el proceso de recubrimiento.

Este estudio es basado en datos recopilados en la literatura especializada y representa sólo un análisis teórico. Sin embargo, la aportación de este proyecto consiste en la posibilidad de aplicar el esquema de análisis desarrollado, a situaciones reales de tipo industrial, considerando que se cuenta con la información adecuada.

REFERENCIAS

- [1] EL-KADDAH N. Thermal Plasma Applications in Materials and Metallurgical Processing. Materials Synthesis: A New Horizon For Plasma Processing. Diran Apelian. March 1992. p. 3-9.
- [2] V. DEMBOVSKY. Plasma Metallurgy – The Principles. New York. 1985.
- [3] FAUCHAIS P. High Temp Chem. Proc. Vol. 1. No. 1. 1992 p. 1-43.
- [4] PFENDER E. Pure. Appl. Chem. Vol. 60. No. 5. 1988. p. 591-610.
- [5] FAUCHAIS AND ARMELLE VARDELLE. Thermal Plasmas. IEEE Transactions On Plasma Science. Vol. 25. No. 6. December 1997. p. 1262.
- [6] COUDERT J. F., VARDELLE M. VARDELLE A. FAUCHAIS P. Diagnostics Of Thermal Spraying Plasma Jets. Laboratoire de Ceramiques Nouvelles. University of Limoges – France. 1992
- [7] FAUCHAIS P. AND ARMELLE VARDELLE. Pure. Appl. Chem. Vol. 66. No. 6. 1994. p. 1247-1258.
- [8] W.D. SWANK, J.R. FINCKE, AND D.C. HAGGARD, In Thermal Spray Science and Technology. C.C. Berndt and S. Sampath, Eds. Ohio: ASM Int. 1995. p. 111-116.
- [9] P. GOUGEON, C. MOREAU, AND F. RICHARD, In Thermal Spray Science and Technology. C.C. Berndt and S. Sampath, Eds. Ohio: ASM Int. 1995. p 149-155.
- [10] COUDERT J. F., VARDELLE M. VARDELLE A. FAUCHAIS P. Diagnostics Of Thermal Spraying Plasma Jets. Laboratoire de Ceramiques Nouvelles. University of Limoges – France. 1992. p. 32.
- [11] CHEN F. FRANCIS. Introduction to plasma physics and controlled fusion. Volumen 1. plasma physics. Segunda Edición. 1984. p. 1-4.
- [12] MAHER I. BOULOS. Thermal Plasma Processing. IEEE Transactions On Plasma Science. Vol. 19. No. 6. December 1991. p. 1080-1082
- [13] FAUCHAIS P. VARDELLE M. VARDELLE A. and M.I BOULOS. “Plasma-particle momentum and heat transfer: modelling and measurement,” Amer. Inst. Chem. Eng. J., Vol 29. 1983. p. 236-253.

- [14] YOUNG R.M. CHYOU P. FLECK E. AND PFENDER E. "An experimental arc plasma reactor for the synthesis of refractory materials," in proc. 66th int. Symp. On plasma chem. (Montreal, PQ, Can.) 1983, Vol. 1, p. 211-218.
- [15] BOULOS M.I. "the inductively coupled RF (Radio Frequency) plasma". Pure Appl. Chem., 1985, vol. 57, p. 1321-1352.
- [16] MOSTAGHIMI J. P. PROULX AN M.I. BOULOS, "Parametric study of the flow and temperature fields in an inductively coupled RF plasma Torch". Plasma chem., plasma process, Vol. 4, 1984, p. 199-217.
- [17] T. YOSHIDA, T. TAWI, H. NISHIMURA, AND AKASHI, "Characterization of a hybrid plasma and its application to a chemical synthesis," J. Appl. Phys., vol. 54, p. 640, 1983.
- [18] T. KAMEYAMA AND K. FUKUDA, "Development of an all solid-state RF-RF induction plasma system, 30 kW, 1-15 MHz," Nat. Chem. Lab. For industry, Tsukub, Japan, Internal Rep.,21, No. 4, 1986.
- [19] CHEN F. FRANCIS. Introduction to plasma physics and controlled fusion. Volumen 1. plasma physics. Segunda Edición. 1984. p. 5-11.
- [20] FAUCHAIS P. GRIMAUD A. VADELLE M. in plasma diagnostics. Academic Press Inc. 1980. p. 349.
- [21] CHYOU Y.P. PFENDER E. plasma chemistry, plasma processing. 1989. p. 291.
- [22] CAPETTI A. PFENDER E. plasma chemistry, plasma processing. 1989. p. 107.
- [23] FAUCHAIS P. VARDELLE M. COUDERT J.F. in plasma diagnostics (pub.) Academic press Inc. 1989. p 349.
- [24] FAUCHAIS P. VARDELLE M. COUDERT J.F VARDELLE A. Metallurgical transactions. 1989. p 263.
- [25] SCHARAM C. DANIEL. Plasma Characteristic dimensions and time constants. Department of Applied Physics, Eindhoven University of Technology. P. 1-30.
- [26] H.M. MOTT-SMITH AND I. LANGMUIR, "Theory of collectors in gaseous discharges", Phys. Rev. 28. p. 727. 1996.
- [27] ALLEN J. B.M. ANNARATONE AND U. DE ANGELIS. "On the orbital motion limited theory for a small body at floating potential in a plasma maxwelliana", J. Plasma Phys. 63. p. 63. 2000.

- [28] LAMPE M., G. JOYCE AND G. GANGULI. "Interactions between dust grains in a dusty plasma", *Phys. Plasmas* 7. p. 3851. 2000
- [29] WHIPPLE E.C. "Potentials of surfaces in space", *Rep. Prog. Phys.* 44. p. 1197. 1981
- [30] NITTER T. "Levitation of dust in rf and dc glow discharges", *plasma sources sci. Technol.* 5. p. 93. 1996
- [31] ANDRÉ MELZER. "Particle charging, interaction potentials and vertical ordering in complex plasmas. Master class on hot topics in plasma physics and technology: dusty plasmas". October 2001.
- [32] FERNANDEZ L. BONIFACIO. "Introducción a la Mecánica de Fluidos". Segunda Edición. Ed. Alfaomega, p. 18-19. 1999.
- [33] STREETER VICTOR, WYLIE BENJAMIN, BEDFORD KEITH. "Mecánica de Fluidos". Novena Edición. Ed. Mc Graw-Hill, p. 3-11, 2000.
- [34] FERNANDEZ L. BONIFACIO. "Introducción a la Mecánica de Fluidos". Segunda Edición. Ed. Alfaomega, p. 19-22. 1999.
- [35] PITTS DONALD, SISSOM LEIGHTON, GAMBA SANTIAGO, DUARTE TORRES ALBERTO. "Teoría y Problemas de Transferencia de Calor". Ed. Mc Graw-Hill, p. 109-111. 1977
- [36] BRAVO ORTEGA ARMANDO. "Curso de Fenómenos de Transporte – Dinámica de Fluidos y Transferencia de Calor ".Capítulo 2 - 4. , 2000.
- [37] W. H. McAdams. "Heat transmission dusty plasmas". 3d. ed. Mc Graw-Hill, New York, 1953.
- [38] S. WHITAKER. "Forced convection heat transfer correlations for flow in pipes, past flat plates, single cylinders, single spheres and for flow in packed beds and tube bundles". *AICHE J.* m Vol. 18, p. 361-371, 1972.
- [39] FRANK KREITH AND MARK S. BOHN. "Principios de Transferencia de Calor. Sexta edición, Editorial Thomson Learning, p. 423-439. 2001.
- [40] Departamento de Mecánica de Fluidos de la escuela de Ingenieros Industriales de Terrassa, (UPC).
- [41] LEVI ENZO. "Mecánica de los Fluidos, introducción teórica a la hidráulica moderna". Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, p. 300-312.

- [42] ZHAO Y.Y., GRANT P.S. AND CANTOR B. "Modelling and experimental analysis of vacuum plasma spraying. Part II: prediction of temperatures and velocities of plasma gases and Ti particles in a plasma jet". Oxford Centre for Advanced Materials and Composites, Department of Materials, University of Oxford. January 2000.
- [43] SHAFFER JAMES, SAXENA ASHOK, ANTOLOVICH STEPHEN, SANDERS THOMAS, WARNER STEVEN. "The science and design of engineering materials". Mc.Graw-Hill Companies, Inc. p. 71, .680. 1999.
- [44] LECH PAWLOWSKI, "The science and engineering of thermal spray coating". John Wiley & Sons. p. 69-107. 1995.
- [45] ÖZİŞİK NECATI M. "Heat conduction". Department of mechanical and aerospace engineering. Segunda edición. John Willey & Sons, Inc. 1993
- [46] BEJAN ADRIAN. "Heat transfer". John Willey & Sons, Inc.p. 1-29. 1993
- [47] LESINSKI J., MIZERA-LESINSKA B., FANTON J.C., BOULOS M. I. AICHe Jnl., 27, 3, 358-364. 1981.
- [48] McKELLIGET JOHN, TRAPAGA GERARDO, GUTIERREZ ERNESTO, CYBULSKY MICHAEL. "An integrated mathematical model of the plasma Spraying process". University of Massachusetts at Lowell, Cambridge, Hartford and Windsor. P. 1-11.
- [49] Manual Fluent: Estructura básica
- [50] POTTER MERLE, WIGGERT DAVID. "Mechanics of fluids". Brooks cole Ed. P. 355. 2002.

Otras Fuentes

BENOIT DAVIES AND GERVAIS SOUCY. Experimental Study of The Heat and Mass Transfer in a High-Frequency Thermal Plasma Reactor. Thermal Plasma Processing. IEEE Transactions On Plasma Science, Vol. 25. No 5. October 1997.

BOENIG HERMAN V. Plasma Science And Technology. Cornell University Pres. 1982

E. LUGSCHEIDER AND T. WEBER. Plasma Spraying-An Innovative Coating Technique: Process Variants And Applications. IEEE Transactions On Plasma Science, Vol. 18. No 6. December 1990.

FLEMINGS MERTON C. Materials Science and Engineering Series. Solidification Processing. Mc.Graw-Hill. p. 134-349. 1974.

H.D. STEFFENS, Z. BABIAK, AND M.WEWEL. Recent Developments In Arc Spraying. IEEE Transactions On Plasma Science, Vol. 18. No 6. December 1990.

LAMBERT M.A. AND FLETCHER L.S. Thermal Contact Conductance Of Spherical Rough Metals. Transactions of The ASME. Vol. 119 November 1997. p 684-690

MATHER I. BOULOS. Thermal Plasma Processing. IEEE Transactions On Plasma Science, Vol. 19. No 6. December 1991.

MICHAEL KEIDAR, ISAK I. BEILIS, RAYMOND L. BOXMAN, fellow, IEEE, SAMUEL GOLDSMITH. Transport Of Macroparticles in Magnetized Plasma Ducts. Thermal Plasma Processing. IEEE Transactions On Plasma Science, Vol. 24. No 1. February 1996.

PAULY HANS. Atom, Molecule and Cluster Beams I. Basic Theory, Production and Detection of Thermal Energy Beams.

<http://www.haydencorp.com>

<http://www.icfes.gov.co/revistas/revcolfi>

<http://www.me.umn.edu/divisions.html>

<http://www.nationalthermospray.com>

<http://jmckelliget.eng.uml.edu>

<http://www.plasmas.org>

<http://www.hypetherm.com>