

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Campus Monterrey

Escuela de Ingeniería y Ciencias



Implementación en Swift de elementos tetraedro, hexaedro, placa y cascarón

Tesis presentada por

Roberto David García Granda

sometida a la

Escuela de Ingeniería y Ciencias

como un requisito parcial para obtener el grado académico de

Maestro en Ciencias

en

Ingeniería y Administración de la Construcción

Monterrey Nuevo León, 4 de Diciembre de 2017

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

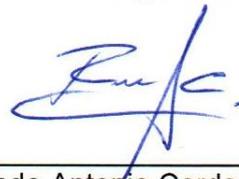
Campus Monterrey

Escuela de Ingeniería y Ciencias

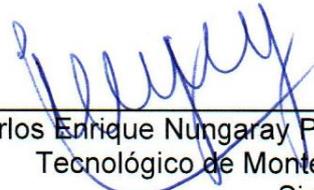
Los miembros del comité recomendamos que la presente tesis de Roberto David García Granda sea aceptada como requisito parcial para obtener el grado académico de Maestro en Ciencias en Ingeniería y Administración de la Construcción



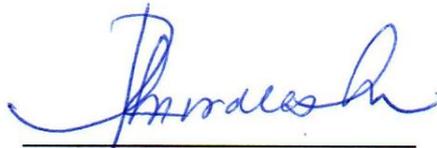
Dr. Sergio Gallegos Cázares
Tecnológico de Monterrey
Asesor



Dr. Raymundo Antonio Cordero Cuevas
Tecnológico de Monterrey
Sinodal



M. C. Carlos Enrique Nungaray Pérez
Tecnológico de Monterrey
Sinodal



Dr. Rubén Morales Menéndez
Director Nacional de Posgrado
Escuela de Ingeniería y Ciencias



Monterrey Nuevo León, 4 de Diciembre de 2017

Declaración de autoría

Yo, Roberto David García Granda, declaro que esta tesis titulada, 'Implementación en Swift de elementos tetraedro, hexaedro, placa y cascarón', y el trabajo que se presenta en ella es de mi autoría. Adicionalmente, confirmo que:

- Realice este trabajo en su totalidad durante mi candidatura al grado de maestría en esta universidad.
- He dado crédito a cualquier parte de esta tesis que haya sido previamente sometida para obtener un grado académico o cualquier otro tipo de titulación en esta o cualquier otra universidad.
- He dado crédito a cualquier trabajo previamente publicado que se haya consultado en esta tesis.
- He citado el trabajo consultado de otros autores, y la fuente de donde los obtuve.
- He dado crédito a todas las fuentes de ayuda utilizadas.
- He dado crédito a las contribuciones de mis coautores, cuando los resultados corresponden a un trabajo colaborativo.
- Esta tesis es enteramente mía, con excepción de las citas indicadas.



Roberto David García Granda

Monterrey Nuevo León, 4 de Diciembre de 2017

Dedicatoria

A la memoria de mi abuelita Chavica por ser una persona maravillosa, ahora cuida a todos sus nietos desde muy lejos, ya no podré abrazarla al regresar a Ecuador pero siempre estará en mi corazón.

A mi madre Magdalena y a mi padre Guillermo, por enseñarme que cada día es una oportunidad para cumplir tus sueños, gracias a las bases que ellos formaron en mi puedo hoy finalizar mis estudios de maestría.

A mis sobrinos, Mateo, Sebastián porque su sonrisa y palabras me dan animó para seguir adelante y a mi tercer sobrino, aquel que me lo regalo la vida, Rubén Contreras, por su empeño, por su dedicación en cada tarea que realiza, por las risas, por las lágrimas que hemos derramado en cada conversación, por ser el mexicano más chingón que puede existir pero más importante por tener un corazón muy noble.

A mis hermanos, Guillo, Beto, y Vero quienes siempre han estado en los momentos más felices y en los momentos más difíciles de mi vida, y a mi hermano menor el veracruzano que me recibió en su país como el hermano siempre quiso.

A mi amigo Ricky, quien hace muchos años nos dejo repentinamente, su carisma, su alegría y sus valores siempre están presentes en mi corazón.

Reconocimientos

A **Dios**, por darme vida y salud.

Deseo agradecer a mi asesor, **Dr. Sergio Gallegos Cázares** primero por ser un gran maestro y permitirme trabajar bajo su tutoría en este documento, gracias a su entrega, conocimiento, retroalimentación y constante motivación la realización de este documento fue posible.

Al programa de la Secretaría de Educación Superior, Ciencia, Tecnología e Innovación **SENESCYT**, por auspiciar mi beca de estudios en México, gracias por creer en la educación como una pieza fundamental para el desarrollo del país.

Quiero expresar mi gratitud al **Tecnológico de Monterrey** por ser una institución de calidad, que proporciono las herramientas necesarias para que mis estudios de maestría se llevaran a cabo.

A mis amigos de **México** y **Ecuador**, y a todas las personas que llegue a conocer, gracias a quienes mi estadía en este país fue inolvidable.

Implementación en Swift de elementos tetraedro, hexaedro, placa y cascarón.

por

Roberto David García Granda

Resumen

El presente trabajo se ha desarrollado para la implementación de elementos finitos mediante el lenguaje Swift de Apple, este lenguaje se basa en programación orientada a objetos POO, en el programa Xplore. Los elementos finitos a implementar serán tres: elementos sólidos tetraedro y hexaedro con la formulación de energía potencial, e implementación de un elemento laminar con formulación de Hellinger-Reissner para análisis de placas y cascarones. La formulación de los elementos que se implementa fue desarrollada por (Gallegos Sergio, 2008), se usa la forma matricial de cada elemento para implementarlos en Xplore, se válida cada elemento con pruebas de parcela y ejemplos prácticos.

Lista de Figuras

Fig. 1. Xplore	5
Fig. 2. Descriptor del Problema (ProblemDescriptor)	5
Fig. 3. Modelo Algebraico (AlgebraicModel)	6
Fig. 4. Elementos (FemElement)	6
Fig. 5. Elemento tetraédrico lineal de 4 nodos	10
Fig. 6. Elemento hexaédrico trilineal de ocho nodos	15
Fig. 7. Parcela de elementos Sólidos	19
Fig. 8. Desplazamiento Parcela U, V, W y Esfuerzo Sxx	21
Fig. 9. Malla empleada en la prueba sensibilidad a la distorsión hexaedro	22
Fig. 10. Malla empleada en la prueba sensibilidad a la distorsión tetraedro	22
Fig. 11. Prueba 1, sensibilidad a la distorsión, Tetraedro	23
Fig. 12. Prueba 1, sensibilidad a la distorsión, Hexaedro	23
Fig. 13. Prueba 2, sensibilidad a la distorsión, Tetraedro	24
Fig. 14. Prueba 2, sensibilidad a la distorsión, Hexaedro	24
Fig. 15. Viga alabeada en voladizo (malla 2x6x36) GID	25
Fig. 16. Fuerzas internas resistentes producidas dentro de una placa	27
Fig. 17. Parcela de Placas	36
Fig. 18. Parcela placa, curvatura constante, dirección X	37
Fig. 19. Parcela placa, curvatura constante, dirección Y	38
Fig. 20. Parcela Placa, alabeo constante	39
Fig. 21. Parcela MacNeal y Harder	39
Fig. 22. Parcela MH, desplazamiento W	40
Fig. 23. Parcela MH, rotación x	40
Fig. 24. Parcela MH, rotación y	40
Fig. 25. Placa cuadrada con carga uniforme	41
Fig. 26. Placa empotrada (malla 16x16), Desplazamiento Vertical	42
Fig. 27. Placa empotrada (malla 16x16), Momento Mxx	43
Fig. 28. Plano medio del cascarón y sistema de referencia	48
Fig. 29. Posición de puntos de muestreo para la regla de cinco puntos	50
Fig. 30. Parcela de cuadriláteros	52
Fig. 31. Parcela MH, cascarón desplazamiento U	54
Fig. 32. Prueba parcela MH, cascarón desplazamiento V	54
Fig. 33. Prueba parcela MH, cascarón Giro z	55
Fig. 34. Prueba parcela, cascarón Fuerza Nxx	55
Fig. 35. Prueba MH, cascarón Fuerza Nxy	55

Lista de Tablas

Tabla 1. Resumen de Datos - Q4 2017 Apple Inc.	2
Tabla 2. Numeración de las caras, tetraedro	14
Tabla 3. Numeración de las caras, hexaedro	18
Tabla 4. Coordenadas nodales de la parcela de sólidos	20
Tabla 5. Comparación Desplazamientos, solución teórica versus Xplore	20
Tabla 6. Prueba 1, sensibilidad a la distorsión, sólidos	23
Tabla 7. Prueba 2, sensibilidad a la distorsión, sólidos	24
Tabla 8. Viga alabeada en voladizo, Hexaedro	25
Tabla 9. Viga alabeada en voladizo, Tetraedros.....	26
Tabla 10. Aportaciones Placa y Membrana al elemento.....	33
Tabla 11. Restricciones en nodos perimetrales para producir alabeo	38
Tabla 12. Coordenadas de los nodos y resultados MacNeal y Harder.....	39
Tabla 13. Relación de espesores, cargas y constantes para la placa cuadrada	41
Tabla 14. Solución al centro de la placa simplemente soportada	41
Tabla 15. Solución al centro de la placa empotrada	42
Tabla 16. Placa soportada en las esquinas	42
Tabla 17. Coordenadas nodales y resultados.....	54

Contenido

Resumen	VI
Lista de Figuras	VII
Lista de Tablas	VIII
Capítulo 1	1
Introducción.....	1
1.1 Objetivo General.....	2
1.2 Objetivos Específicos	2
1.3 Justificación	3
1.4 Estructura del documento.....	3
1.5 Marco Teórico.....	3
1.5.1 Swift.....	4
1.5.2 Xplore	4
1.5.3 Creación de nuevos elementos en la clase FemElement	7
1.5.3.1 Stiffness Matrix	7
1.5.3.2 Update Variables	7
1.5.3.3 Internal Force	8
1.5.3.4 Load Vector	8
Capítulo 2.....	9
2.1 Sólidos.....	9
2.1.1 Forma fuerte	9
2.1.2 Forma débil.....	9
2.1.3 Forma matricial.....	10
2.2 Tetraedro lineal de cuatro nodos.....	10
2.2.1 Métodos sobrescritos	12
2.2.1.1 Método stiffnessMatrix.....	13
2.2.1.2 Método externalLoad.....	13
2.2.1.3 Método updateVariables.....	14
2.2.1.4 Método internalForce.....	15
2.3 Hexaedro lineal de ocho nodos	15
2.3.1 Métodos sobrescritos	17
2.3.1.1 Método stiffnessMatrix.....	17
2.3.1.2 Método externalLoad	18
2.3.1.3 Método updateVariables.....	19
2.3.1.4 Método internalForce.....	19
2.4 Validación	19
2.4.1 Pruebas de la parcela	19
2.4.2 Pruebas de sensibilidad a la distorsión	22
2.4.3 Viga alabeada en voladizo	24
Capítulo 3.....	27

3.1	Placas	27
3.1.1	Forma Fuerte	27
3.1.2	Forma débil.....	28
3.1.3	Forma matricial.....	28
3.2	Métodos sobrescritos	31
3.2.1.	Método stiffnessMatrix.....	31
3.2.2.	Método externalForces	33
3.2.3.	Método updateVariables.....	34
3.2.4.	Método internalForce.....	36
3.3.	Validación del elemento	36
3.3.1.	Prueba de la Parcela	36
3.3.1.1.	Desplazamiento vertical del cuerpo rígido.....	37
3.3.1.2.	Rotación de cuerpo rígido alrededor del eje x.....	37
3.3.1.3.	Rotación de cuerpo rígido alrededor del eje y.....	37
3.3.1.4.	Curvatura constante en dirección X	37
3.3.1.5.	Curvatura constante en dirección Y	38
3.3.1.6.	Alabeo Constante	38
3.3.2.	Prueba de la Parcela de MacNeal y Harder	39
3.3.3.	Placa cuadrada con carga uniforme.....	40
Capítulo 4	44
4.1	Cascarones como láminas planas	44
4.1.1	Ecuaciones gobernantes para membranas con rotaciones de taladro	44
4.1.2	Forma débil (Hellinger-Reissner).....	45
4.1.3	Forma matricial	45
4.2	Métodos sobrescritos	48
4.2.1	Método stiffnessMatrix.....	48
4.2.2	Método externalLoad	50
4.2.3	Método updateVariables.....	51
4.2.4	Internal Force	52
4.3	Validación	52
4.3.1	Parcela	52
4.3.1.1	Desplazamiento vertical de cuerpo rígido	53
4.3.1.2	Desplazamiento horizontal de cuerpo rígido	53
4.3.1.3	Rotación de cuerpo rígido	53
4.3.1.4	Deformación constante en x.....	53
4.3.1.5	Deformación constante en y.....	53
4.3.1.6	Deformación constante en xy	53
4.3.2	Prueba de la parcela de MacNeal y Harder	53
Capítulo 5	56
5.1	Conclusiones	56
Bibliografía	58

Capítulo 1

Introducción

La capacidad de procesamiento de información ha crecido desde que Intel lanzaba al mundo el primer microprocesador en 1971 con un espacio de memoria de hasta 640 bytes, actualmente esas características son superadas enormemente y mejoradas constantemente, ahora los equipos son accesibles a millones de usuarios que año a año renuevan sus equipos para tener las mejores características disponibles en el mercado.

En Ingeniería Civil existen códigos de diseño para los diferentes elementos estructurales, estos códigos simplifican el análisis de los problemas, pero son guías para el diseño o revisión de elementos, con la capacidad actual de procesamiento de información de los dispositivos electrónicos es factible el análisis de elementos estructurales mediante elementos finitos en una forma rápida y en la que se podrán apreciar diferentes esfuerzos de forma gráfica que en muchos casos son ignorados por ser valores muy pequeños en comparación a las fuerzas actuantes en los elementos, pero que si generan efectos en los elementos como fisuras.

El modelamiento de elementos estructurales mediante elementos finitos se usa actualmente para evitar grandes costos en la construcción de modelos a escala de los proyectos, adicionalmente se pueden modelar diversos fenómenos en investigaciones sin la necesidad de invertir grandes cantidades de dinero en la elaboración de modelos físicos, y así de una manera eficiente resolver los problemas y generar las bases para el diseño de varios proyectos.

El desarrollo de materiales compuestos por varias ramas de la ingeniería en los años recientes, y su aplicación en estructuras, hacen que el diseño mediante elementos finitos sea una herramienta indispensable para el diseño de estructuras seguras y adecuadas para su uso.

En el mercado tenemos diversas plataformas, la que domina es Windows, y en la que ya se cuenta con numerosas aplicaciones de análisis mediante elementos finitos. En macOS de Apple hay un número más reducido de aplicaciones y en el sistema iOS de los aparatos móviles es inexistente, a pesar de tener un número creciente de usuarios que disponen de productos provenientes de Apple.

Apple revolucionó la tecnología personal con el lanzamiento del Macintosh en 1984. Hoy, Apple cuenta con varios productos como son: iPhone, el iPad, el Mac, Apple Watch y Apple TV. Las aplicaciones desarrolladas en el lenguaje de Swift son compatibles para ser usadas en computadoras portátiles Mac, en tabletas electrónicas o hasta en dispositivos celulares como el iPhone, lo que permite que las aplicaciones desarrolladas puedan ser utilizadas tanto en computadoras de escritorio como en dispositivos móviles.

Apple ha anunciado los resultados financieros del cuarto trimestre fiscal 2017, cerrado el 30 de septiembre de 2017. En la Tabla 1, se puede ver que las unidades vendidas

entre iPad y Mac superan ya los 15 millones para el cuarto trimestre fiscal del 2017, se incrementaron un 9,92% en comparación con las unidades vendidas el año pasado durante el mismo trimestre. La presencia mundial del Apple se incrementa en un mercado dominado principalmente por Microsoft. Apple ha tenido que hacer mejoras sustanciales al sistema y a la forma intuitiva en la que los usuarios se comunican con el sistema para ser un sistema competitivo y atractivo a los usuarios.

Tabla 1. Resumen de Datos - Q4 2017 Apple Inc. [1]

Resumen de Productos	Q4 2017		Q3 2017		Q4 2016	
	Unidades	Ingresos	Unidades	Ingresos	Unidades	Ingresos
iPhone	46,677	\$28,846	41,026	\$24,846	45,513	\$28,160
iPad	10,326	4,831	11,424	4,969	9,267	4,255
Mac	5,386	7,170	4,292	5,592	4,886	5,739
Servicios		8,501		7,266		6,325
Otros Productos		3,231		2,735		2,373
Total Apple		\$52,579		\$45,408		\$46,852

1.1 Objetivo General

El objetivo de este trabajo es la implementación de elementos finitos mediante el lenguaje Swift de Apple, en el programa Xplore [2]. Los elementos finitos a implementar serán tres: elementos sólidos tetraedro y hexaedro, e implementación de un elemento laminar para análisis de placas y cascarones.

1.2 Objetivos Específicos

Del objetivo general, se derivan los siguientes objetivos específicos de este trabajo:

- Adecuado pre procesamiento y post procesamiento de información de forma gráfica mediante GID [4] de los elementos a ser implementados.
- Implementación de un elemento sólido tetraedro, lineal con cuatro nodos, con la formulación de Energía Potencial.
- Implementación de un elemento sólido hexaedro, lineal con ocho nodos, con la formulación de Energía Potencial.
- Implementación de un elemento laminar que se comporte como placa y como un cascarón plano, lineal con 4 nodos, con formulación de Hellinger-Reissner.

- Resolución de problemas de parcelas para comprobar la resolución adecuada de los problemas.
- Resolución de ejemplos prácticos en donde se usen elementos sólidos y de superficie.

1.3 Justificación

Para el análisis de estructuras mediante elementos finitos es necesario tener una aplicación que permita modelar los problemas, en esta tesis se empleará Xplore, que es un programa desarrollado por el Dr. Sergio Gallegos en lenguaje Swift bajo el paradigma de objetos. El programa cuenta inicialmente con elementos barra y marco únicamente. Como el programa está orientado a objetos se deberán crear las clases correspondientes a los nuevos elementos que se implementarán aquí.

La programación orientada a objetos permite que fácilmente los nuevos investigadores puedan interactuar con los objetos existentes y crear nuevos objetos para modelar nuevas características.

Este desarrollo es útil para poder realizar simulación de elementos finitos en las plataformas móviles de Apple, lo cual puede abrir una serie de nuevas aplicaciones, basadas en simulación.

1.4 Estructura del documento

Esta tesis se encuentra estructurada de la siguiente manera, en el capítulo 1 se presenta la introducción al documento, en donde se encuentra el objetivo del presente documento, también se encuentra el marco teórico, se muestra de forma esquemática el funcionamiento de Xplore, basado en la programación orientada a objetos, se finaliza con la metodología para implementar un elemento a Xplore.

En los capítulos 2, 3, y 4 se inicia con la presentación de la formulación empleada en cada elemento, forma fuerte, forma débil y forma matricial, la implementación de cada elemento en Xplore, y su correspondiente validación. En el capítulo 2 se presentan los sólidos de la forma tetraédrica y los hexaedros, el capítulo 3 corresponde a placas, y el capítulo 4 a cascarones como láminas planas.

En el capítulo 5 se presentan las conclusiones de cada elemento.

1.5 Marco Teórico

A continuación, se presentará el marco teórico el cual constará de tres secciones generales, en primer lugar, se hará una breve introducción al lenguaje Swift. Posteriormente se analizará el funcionamiento del programa de elementos finitos Xplore y finalmente se describirá como agregar un elemento a Xplore.

1.5.1 Swift

Swift es un lenguaje de programación intuitivo creado por Apple para crear aplicaciones para iOS, Mac, Apple TV y Apple Watch. Está diseñado para dar a los desarrolladores más libertad que nunca, es fácil de usar y de código abierto. [3] Fue presentado en el WWDC 2014 en San Francisco.

Swift es un lenguaje orientado a objetos (POO), esta basado en una jerarquía de clases y las instancias de esas clases son los objetos.

Los objetos son entidades que combinan un estado (es decir, datos) y un comportamiento (esto es, procedimientos o métodos). Estos objetos se comunican entre ellos para realizar tareas. [5]

1.5.2 Xplore

Xplore [2] es un programa desarrollado por el Dr. Sergio Gallegos en el 2016 escrito en lenguaje de Swift, que se basa en una programación orientada a objetos. Los objetos son instancias de una clase. La clase principal es Xplore, la cual se basa en 3 métodos principales:

- translator
- solve
- writer

En la Fig. 1 se puede ver un mapa que representa la estructura principal de Xplore. El usuario utiliza el pre procesador GID [4], para representar gráficamente un problema estructural, este programa se encarga de generar un archivo con toda la información introducida por el usuario. El objeto Translator de Xplore, traduce el archivo generado por GID al descriptor del problema ProblemDescriptor. Si el problema fue correctamente modelado en GID, la aplicación continuara con la solución, en caso contrario nuestro análisis ha finalizado. La sub clase GidXploreTranslator de Translator se encarga de traducir la información generada en GID. Una vez que se tiene un descriptor el método solve de Xplore se encarga de generar el objeto AlgebraicModel, que transforma el problema en un sistema de ecuaciones lineales. Para este fin emplea un modelo computacional que es el objeto FemModel. El resultado de resolver las ecuaciones será obtener los desplazamientos, esfuerzos y deformaciones que se almacenan en el descriptor. Finalmente, Xplore utiliza el objeto Writer para generar un archivo alfanumérico con la información del descriptor conteniendo la solución. Este archivo es leído por el post procesador y puede ser procesado gráficamente para que el usuario lo interprete.

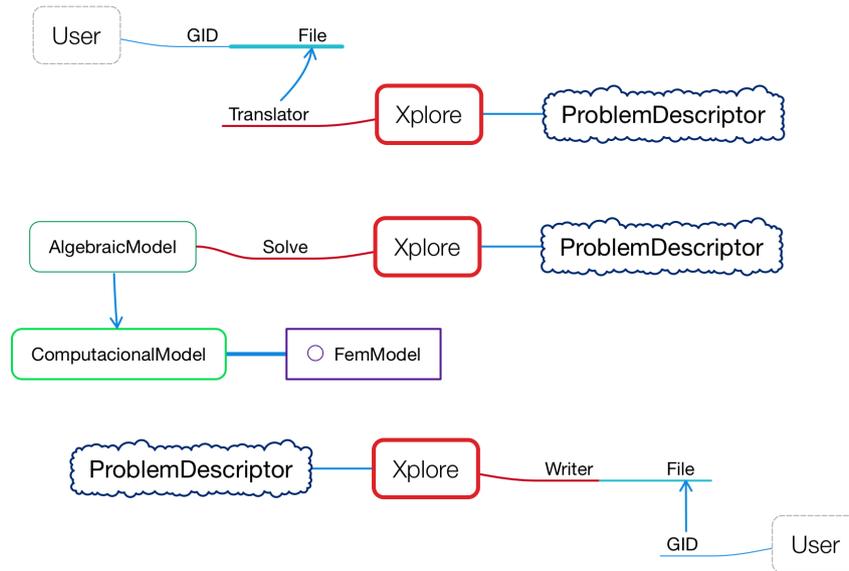


Fig. 1. Xplore

El objeto ProblemDescriptor que se muestra en la Fig. 2, es la clase más importante dentro de Xplore. Su objetivo es representar toda la información que define un problema de ingeniería, incluyendo datos y la solución mediante tres objetos: MeshDescriptor, ControlDescriptor y una lista de objetos StepControl. En la descripción de la malla, MeshDescriptor emplea cuatro propiedades, los nodos que forman la geometría del problema, las incidencias de los elementos, las propiedades del material, y la descripción de los sistema de referencia. En la descripción de los mecanismos de solución, ControlDescriptor almacena información referente al tipo de análisis que se realiza, el esquema de la solución y los parámetros de la solución. Finalmente, cada StepDescriptor encapsula la descripción de las restricciones al movimiento, de las cargas y se la solución misma.

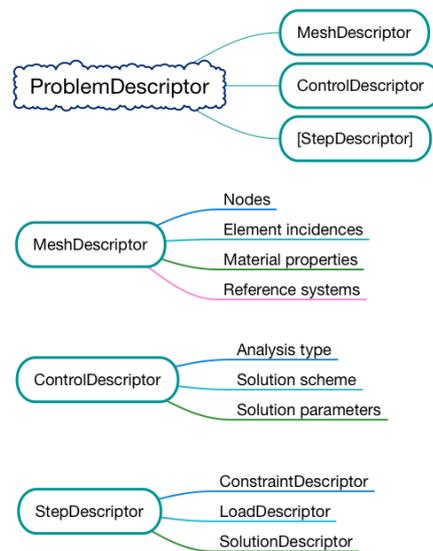


Fig. 2. Descriptor del Problema (ProblemDescriptor)

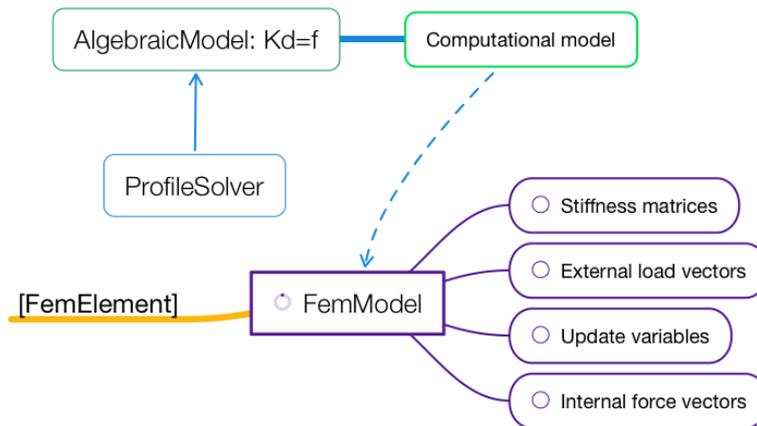


Fig. 3. Modelo Algebraico (AlgebraicModel)

En la Fig. 3, se muestra el modelo algebraico AlgebraicModel, cuyo objetivo es crear el sistema de ecuaciones $Kd = f$ que representa al problema en turno. La estructura particular del sistema algebraico depende del esquema seleccionado, por ejemplo, ProfileSolver es una sub clase que encapsula este procedimiento para el método de perfil.

Para la formulación de las ecuaciones el modelo algebraico usa un modelo computacional que se basa en Elementos Finitos (FemModel) ver Fig. 3, este objeto será el encargado de crear los elementos finitos que se hayan definido en la malla, para ello utiliza la clase FemElement. En la Fig. 4 se observa como los diferentes tipos de elementos finitos serán subclases de esta clase inicial

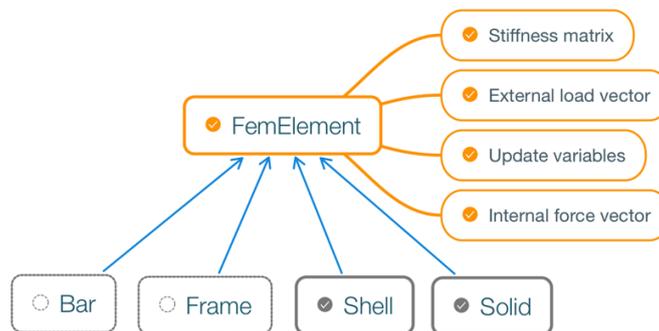


Fig. 4. Elementos (FemElement)

Cada elemento debe sobrescribir los siguientes métodos de FemModel:

- Stiffness Matrix
- External Load Vector
- Update Variables
- Internal forcé Vector

1.5.3 Creación de nuevos elementos en la clase FemElement

Esta sección tiene como objetivo principal la creación de nuevos elementos dentro de la aplicación por lo que es necesario conocer como se los crearán y cuales son los métodos que se deben sobrescribir para el correcto funcionamiento

En la Fig. 4, se muestra la clase FemElement que es la clase madre de todos los elementos. Los elementos que se agregarán en este trabajo son subclases de esta. Los elementos con los que cuenta Xplore antes de empezar nuestro trabajo son:

- LinearPEBar (Bar)
- LinearHWFrame (Frame)

Los elementos que se crearán en el esta tesis son:

- linearPETetrasolid (tetraedro sólido)
- linearPEHexaSolid (hexaedro sólido)
- linearHRQuadShell (placa y cascarón)

Los métodos que se deben sobrescribir de la clase FemElement son los siguientes:

1.5.3.1 Stiffness Matrix

Se creara una matriz cuadrada, cuyos elementos son la matriz de rigidez de cada uno de los elementos definidos en la malla. Se calcula la rigidez en coordenadas locales de cada elemento para luego transformarlas en coordenadas globales, el ensamblaje se realizará según los arreglos de destino correspondientes.

Formato Swift: override func stiffnessMatrix() -> SquareMatrix?

1.5.3.2 Update Variables

El modelo algebraico se encarga de calcular los incrementos de desplazamiento y se los ha almacenado en el vector (incrementalDisplacement), para luego en este método calcular las deformaciones y los esfuerzos correspondientes en cada uno de los puntos de muestreo, los puntos de muestreo pueden ser diferentes para el calculo de las fuerzas internas que los necesarios para presentar en resultados. Los puntos de muestreo necesarios para resultados en cada elementos serán los puntos de superconvergencia.

El resultado de este método será verdadero o falso, los resultados de la deformación y de los esfuerzos de cada paso se almacenan en la descripción del problema.

Adicional se calculan los esfuerzos de Von Mises y esfuerzos cortantes para lo que se usará un objeto StressTensor, el cual necesita para ser inicializado con los seis esfuerzos.

Formato Swift: override func updateVariablesWith(_ incrementalDisplacement: Vector) -> Bool

1.5.3.3 Internal Force

La solución de nuestro problema se determina cuando el problema se encuentre en equilibrio, para el calculo del vector de las fuerzas internas se usara los esfuerzos almacenados en la historia en los puntos de muestreo para las fuerzas internas.

Formato Swift: override func internalForce() -> Vector?

1.5.3.4 Load Vector

Las cargas externas pueden asignarse en los nodos de cada elemento pero eso no es nada práctico, por lo tanto cuando la carga en el elemento se aplica en la superficie o en el volumen debe transformarse a un vector que represente la carga asignada. En este método se debe tener en cuenta los sistemas de referencia de la carga y luego crear un vector de cargas en un sistema global.

Formato Swift: override func loadVectorFor(_ elementLoad: ElementLoad) -> Vector?

Capítulo 2

2.1 Sólidos

La formulación de los elementos se basa en (Gallegos Sergio, 2008) y se encuentra en el libro Análisis de sólidos y estructural, mediante el método de elementos finitos, capítulo 8, teoría de elasticidad en 3-D, para el presente documento se presenta un resumen de la formulación de los elementos sólidos. [7]

2.1.1 Forma fuerte

Forma fuerte del problema de elasticidad estática para deformaciones infinitesimales. Variables independientes: \mathbf{x}

Encontrar el desplazamiento u , la deformación ε y el esfuerzo σ , tal que si $\Sigma = \Sigma^T$, $\varepsilon = Lu$ y $\sigma = D\varepsilon$, las siguientes ecuaciones se tienen que satisfacer:

a. Conservación del momentum lineal o ecuaciones de equilibrio:

$$L^T \sigma + b = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad (1)$$

b. Condiciones de frontera esenciales o de Dirichlet:

$$u = g \quad \forall \mathbf{x} \in S_u \quad (2)$$

c. Condiciones de frontera naturales o de Neumann (Fórmula de Cauchy):

$$t^n = T_n \sigma \quad \forall \mathbf{x} \in S_t \quad (3)$$

Donde:

D = matriz constitutiva.

t^n = tracciones externas, vector unitario a la superficie en el punto de aplicación de la tracción.

b = las fuerzas de cuerpo.

V = volumen.

S = Superficie.

L = matriz de operadores diferenciales.

2.1.2 Forma débil

Forma débil del problema de elasticidad estática para deformaciones infinitesimales en (4). Variables independientes: \mathbf{x}

Encontrar el desplazamiento $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, la deformación ε y el esfuerzo σ , tal que si $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\Sigma = \Sigma^T$, $\varepsilon = L\mathbf{u}$, $\sigma = D\varepsilon$, $\delta\varepsilon = L\mathbf{v}$, la siguiente ecuación se tiene que satisfacer:

$$\int_V \delta\varepsilon^T \sigma dV = \int_{S_t} \mathbf{v}^T \mathbf{t}^n dS + \int_V \mathbf{v}^T \mathbf{b} dV \quad (4)$$

\mathbf{v} = vector de funciones de desplazamiento virtual

2.1.3 Forma matricial

En forma matricial, las ecuaciones de equilibrio se pueden escribir como:

$$K\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{f} \quad (5)$$

$$K = \int_V \mathbf{B}^T D \mathbf{B} dV \quad (6)$$

$$\mathbf{f} = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{t}^n dS + \int_V \mathbf{B}^T D \varepsilon^0 dV - \int_V \mathbf{B}^T D \sigma^0 dV \quad (7)$$

Donde:

K = Matrix de rigidez del elemento

$\bar{\mathbf{u}}$ = vector de desplazamientos nodales

\mathbf{f} = fuerzas

\mathbf{B} = matriz deformación-desplazamiento

D = matriz constitutiva

\mathbf{t}^n = tracciones externas

\mathbf{N} = matriz de funciones de interpolación

2.2 Tetraedro lineal de cuatro nodos

En la Fig. 5, se muestra el elemento tetraedro, las variables naturales se definen en el rango $0.0 \leq r, s, t \leq 1.0$

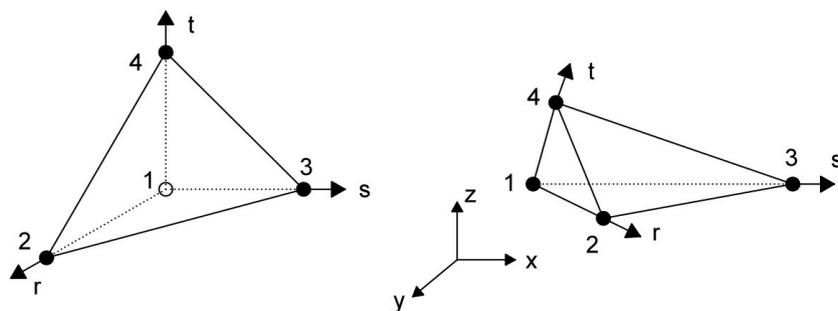


Fig. 5. Elemento tetraédrico lineal de 4 nodos

Con la forma matricial para los sólidos 2.1.3, se expresa la forma específica para nuestro elemento de cuatro nodos.

Las coordenadas y los desplazamientos se interpolan:

$$x = N\bar{x} \quad (8)$$

$$u = N\bar{u} \quad (9)$$

N = matriz de funciones de interpolación

\bar{u} = vector de desplazamientos nodales

En donde:

$$u = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}, \quad x = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$N_1 = 1 - r - s - t, \quad N_2 = r, \quad N_3 = s, \quad N_4 = t \quad (12)$$

$$\bar{u} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \end{Bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{Bmatrix}, \quad \bar{u}_i = \begin{Bmatrix} \bar{u}_{xi} \\ \bar{u}_{yi} \\ \bar{u}_{zi} \end{Bmatrix}, \quad \bar{x}_i = \begin{Bmatrix} \bar{x}_i \\ \bar{y}_i \\ \bar{z}_i \end{Bmatrix} \quad (13)$$

La matriz B deformación – desplazamiento queda definida como (14), y la matriz B correspondiente a cada nodo (15):

$$B = LN = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$B_a = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_a}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_a}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N_a}{\partial z} & \frac{\partial N_a}{\partial y} \\ \frac{\partial N_a}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_a}{\partial x} \\ \frac{\partial N_a}{\partial y} & \frac{\partial N_a}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

El jacobiano se puede expresar como:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 - \bar{x}_1 & \bar{y}_2 - \bar{y}_1 & \bar{z}_2 - \bar{z}_1 \\ \bar{x}_3 - \bar{x}_1 & \bar{y}_3 - \bar{y}_1 & \bar{z}_3 - \bar{z}_1 \\ \bar{x}_4 - \bar{x}_1 & \bar{y}_4 - \bar{y}_1 & \bar{z}_4 - \bar{z}_1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

El determinante del jacobiano j puede expresarse mediante:

$$j = \det J = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)(\bar{y}_3 - \bar{y}_1)(\bar{z}_4 - \bar{z}_1) + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(\bar{x}_4 - \bar{x}_1) \\ + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(\bar{x}_3 - \bar{x}_1)(\bar{y}_4 - \bar{y}_1) - (\bar{x}_4 - \bar{x}_1)(\bar{y}_3 - \bar{y}_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) \\ - (\bar{y}_4 - \bar{y}_1)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) - (\bar{z}_4 - \bar{z}_1)(\bar{x}_3 - \bar{x}_1)(\bar{y}_2 - \bar{y}_1) \quad (17)$$

El volumen se puede calcular a partir del volumen en el espacio natural mediante:

$$V = jV^0 = \frac{j}{6} \quad (18)$$

La matriz constitutiva del material D, es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & Sim & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \quad (19)$$

La relación entre las constantes elásticas está dada por [6]:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (20)$$

Donde:

E = módulo de elasticidad.

ν = coeficiente de Poisson

2.2.1 Métodos sobrescritos

Se muestra cada uno de los métodos que se sobrescriben descritos en 1.5.3, es importante conocer la siguiente información que define este elemento:

- Nodos: 4
- Puntos de muestreo para fuerzas internas: 1
- Puntos de muestreo para resultados: 1
- Etiquetas deformación: $[\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}]$
- Etiquetas esfuerzo: $[\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yx}, \sigma_{xz}, \sigma_{vonMisses}, \sigma_{maxShear}]$

2.2.1.1 Método stiffnessMatrix

El resultado de este método es la matriz de rigidez del elemento (6), lo primero que debemos calcular es la matriz B deformación-desplazamiento del elemento (14).

Para obtener la matriz B calculamos el jacobiano (16), luego se calcula su inversa con un método matricial o puede hacerse de forma exacta, teniendo el mismo resultado. Con la inversa del jacobiano formamos la matriz B (14). El determinante del jacobiano (17), nos permite calcular el volumen (18), para esto se creo un método interno jacobianAndBMatrix.

La matriz constitutiva que corresponde a los sólidos (19), las propiedades del material son definidas por el usuario. Reemplazamos los valores obtenidos en la ecuación (6), que da como resultado (21), esta es una matriz cuadrada de [12x12].

$$K_{[12,12]} = B_{[12,6]}^T D_{[6,6]} B_{[6,12]} \frac{j}{6} \quad (21)$$

2.2.1.2 Método externalLoad

En este método se transforma la carga externa a un vector que asigna la carga ingresada por el usuario a los correspondientes nodos del elemento.

En la ecuación (7), los dos primeros términos representan el vector de fuerzas externas equivalentes nodales, el primero corresponde a fuerzas de cuerpo en el volumen y el segundo a tracciones externas sobre la parte S_t de la frontera (3).

Para sólidos la carga en el volumen puede ser constante, y en la superficie se puede asignar constante o con un incremento lineal. En LoadDescriptor ver Fig. 2, se almacena la carga del elemento y los parámetros correspondientes.

Las fuerzas de cuerpo o fuerzas por unidad de volumen se calcula con:

$$f_{[12]} = N^T b \frac{j}{6} \quad (22)$$

Para las tracciones, lo primero que se realiza es encontrar cual de las cuatro caras esta aplicada la carga. Con la identificación de la carga se crea un arreglo que contiene las incidencias de la cara reordenadas, cada cara tiene su arreglo de destino

correspondiente. Los lados son numerados por el nodo opuesto de la cara en contra reloj. Con las incidencias de la cara se crea un sistema de referencia local de la cara.

Tabla 2. Numeración de las caras, tetraedro

Cara del elemento	Nodos
1	2 4 3
2	3 4 1
3	4 2 1
4	1 2 3

La carga en la superficie puede tener un sistema de referencia Global o un sistema de referencia normal, para el segundo caso se necesita definir un sistema de referencia adicional, es requisito para este sistema que su eje "x" se pueda proyectar en la superficie de la carga.

Se calcula las coordenadas locales de los nodos en donde la carga es aplicada. El determinante del jacobiano se evalúa de la geometría en el sistema auxiliar mediante:

$$j' = (\bar{x}'_1 - \bar{x}'_3)(\bar{y}'_2 - \bar{y}'_3) - (\bar{x}'_2 - \bar{x}'_3)(\bar{y}'_1 - \bar{y}'_3) \quad (23)$$

Se calcula la tracción global que le corresponde a la cara en cada nodo.

Si el sistema de referencia es global, se rotan las tracciones al sistema local de la cara, en el caso que el sistema sea normal, esos componentes ya están en el sistema local. Los componentes t'_n son los componentes nodales de los vectores de tracción en el sistema coordenado auxiliar. El vector de tracciones en el sistema local es el siguiente:

$$f_{[9]}' = \frac{j'}{12} \begin{bmatrix} t'_1 + 0.5t'_2 + 0.5t'_3 \\ 0.5t'_1 + t'_2 + 0.5t'_3 \\ 0.5t'_1 + 0.5t'_2 + t'_3 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Se transforma (24) al sistema global, con los arreglos de destino se ubica en las posiciones correspondientes las fuerzas externas, quedando un vector de 12 elementos.

2.2.1.3 Método updateVariables

El modelo algebraico Fig. 3, ha calculado los incrementos de desplazamiento "incrementalDisplacement".

Se calcula nuevamente la matriz constitutiva y la matriz B deformación-desplazamiento como se lo detallo en 2.2.1.1. Así podemos calcular el incremento de deformación con la siguiente ecuación:

$$incr\mathcal{E}_{[6 \times 1]} = B_{[6 \times 12]} incr\bar{u}_{[12]} \quad (25)$$

\bar{u} = incrementos de desplazamiento - "incrementalDisplacement"

Se calcula los esfuerzos principales:

$$\sigma_{[6]} = D_{[6 \times 6]} incr\mathcal{E}_{[6]} \quad (26)$$

Con los esfuerzos principales se calcula los $\sigma_{vonMises}$, $\sigma_{maxShear}$, utilizando la clase StressTensor.

Se actualiza la historia y los resultados, con la suma del valor inicial más el incremento calculado, para la historia se utiliza los puntos de muestreo para fuerzas internas.

2.2.1.4 Método internalForce

El vector de fuerza interna (27), utiliza el método jacobianAndBMatrix descrito en 2.2.1.1. para inicializar los términos necesarios y los esfuerzos principales se los llama de la historia para el punto correspondiente, estos están almacenados en el descriptor del problema, y se los calculo en 2.2.1.3.

$$internalForce_{[12]} = B^T \sigma V = B_{[12 \times 6]}^T \sigma_{[6]} \left(\frac{j}{6} \right) \quad (27)$$

2.3 Hexaedro lineal de ocho nodos

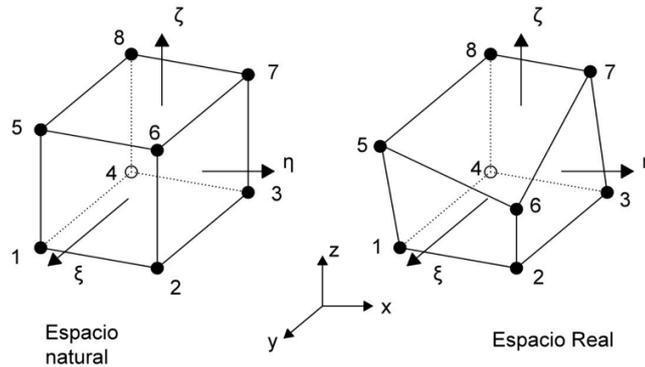


Fig. 6. Elemento hexaédrico trilineal de ocho nodos

Las variables naturales se definen en el rango $-1. \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$.

Las coordenadas (28) y los componentes del desplazamiento (29) se interpolan en forma isoparamétrica:

$$x = N\bar{x} \quad (28)$$

$$u = N\bar{u} \quad (29)$$

La matriz de las funciones de interpolación:

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 & N_7 & N_8 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$N_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}$$

Las funciones de Interpolación:

$$N_a = \frac{1}{8}(1-\xi_a\xi)(1-\eta_a\eta)(1-\zeta_a\zeta) \quad a = 1 \dots 8 \quad (31)$$

Las matriz de derivadas naturales de las funciones de interpolación:

$$\frac{\partial N_a}{\partial} \begin{matrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{matrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_a}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_a}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Jacobiano:

$$J_{[3 \times 3]} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{a=1}^8 \frac{\partial N_a}{\partial \xi} \bar{x}_a & \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{a=1}^8 \frac{\partial N_a}{\partial \xi} \bar{y}_a & \frac{\partial z}{\partial \xi} = \sum_{a=1}^8 \frac{\partial N_a}{\partial \xi} \bar{z}_a \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{a=1}^8 \frac{\partial N_a}{\partial \eta} \bar{x}_a & \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{a=1}^8 \frac{\partial N_a}{\partial \eta} \bar{y}_a & \frac{\partial z}{\partial \eta} = \sum_{a=1}^8 \frac{\partial N_a}{\partial \eta} \bar{z}_a \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} = \sum_{a=1}^8 \frac{\partial N_a}{\partial \zeta} \bar{x}_a & \frac{\partial y}{\partial \zeta} = \sum_{a=1}^8 \frac{\partial N_a}{\partial \zeta} \bar{y}_a & \frac{\partial z}{\partial \zeta} = \sum_{a=1}^8 \frac{\partial N_a}{\partial \zeta} \bar{z}_a \end{bmatrix} \quad (33)$$

N_a son las funciones de interpolación (31), $\bar{x}_a, \bar{y}_a, \bar{z}_a$ son las coordenadas nodales correspondientes, que definen el elemento en el plano cartesiano.

El diferencial de volumen se transforma mediante un cambio de variables y mediante j:

$$dV = j \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (34)$$

Donde: j = determinante del jacobiano.

La matriz deformación-desplazamiento B, se forma con las derivadas cartesianas (36).

$$B_{[6 \times 24]} = \left[\begin{array}{cccccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_7 & B_8 \end{array} \right] \quad (35)$$

$$B_{a[6 \times 3]} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial N_a}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_a}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_a}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N_a}{\partial z} & \frac{\partial N_a}{\partial y} \\ \frac{\partial N_a}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_a}{\partial x} \\ \frac{\partial N_a}{\partial y} & \frac{\partial N_a}{\partial x} & 0 \end{array} \right]$$

Las derivadas cartesianas (36) se obtienen multiplicando el inverso del jacobiano (33) por las derivadas naturales (32).

$$\frac{\partial N_a}{\partial x} = J^{-1} \frac{\partial N_a}{\partial} \quad (36)$$

2.3.1 Métodos sobrescritos

Se muestra cada uno de los métodos que se sobrescriben descritos en 1.5.3, es importante conocer la siguiente información que define este elemento:

- Nodos: 8
- Puntos de muestreo para fuerzas internas: 8
- Puntos de muestreo para resultados: 1
- Etiquetas deformación: $[\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}]$
- Etiquetas esfuerzo: $[\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yx}, \sigma_{xz}, \sigma_{vonMisses}, \sigma_{maxShear}]$

2.3.1.1 Método stiffnessMatrix

Se calcula la matriz de rigidez del elemento, primero obtenemos la matriz constitutiva del material (19), y la matriz deformación-desplazamiento (35). Calculamos la matriz del jacobiano (33) y luego su determinante.

La matriz de rigidez de este elemento puede evaluarse:

$$K_{[24 \times 24]} = \int_V B^T D B dV = \int_V \begin{bmatrix} B_1^T & \dots & B_8^T \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_8 \end{bmatrix} dV = B^T D B j d\xi d\eta d\xi \quad (37)$$

El diferencial de volumen como se lo definió en (34). En el caso general en el que el elemento se distorsiona en el espacio real, el integrando será una expresión racional, por lo que la integral se realiza en forma numérica utilizando una cuadratura Gaussiana [8]. Se necesitará una regla de 2x2x2 puntos para integración completa y una regla de un punto para integración reducida [7].

2.3.1.2 Método externalLoad

La ecuación (38) define el vector de fuerzas externas, el calculo de las fuerzas externas del hexaedro es similar a 2.2.1.2, aquí se tomarán los puntos adicionales. En el segundo termino $\bar{j} dr ds$ es el diferencial de superficie, debe evaluarse en el lado del elemento sobre el que se aplique la tracción. Las variables naturales r, s definen las interpolaciones \bar{N} sobre la cara. En la Tabla 3 está la numeración de los nodos que corresponden a cada cara del elemento.

$$externalForce = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T b j d\xi d\eta d\xi + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{N}^T t \bar{j} dr ds \quad (38)$$

Donde:

\bar{j} = determinante del jacobiano, sobre la cara que se aplica la tracción.

t = tracciones externas.

b = fuerzas de cuerpo.

Tabla 3. Numeración de las caras, hexaedro

Cara del elemento	Nodos
1	1 2 3 4
2	1 5 6 2
3	2 6 7 3
4	3 7 8 4
5	1 4 8 5
6	5 8 7 6

La fuerza de tracción en las caras se calcula en coordenadas locales y al finalizar el método se las transforma a coordenadas globales.

2.3.1.3 Método updateVariables

Se calculan los incrementos de la deformación (25) y los incrementos de esfuerzo (26), la matriz B esfuerzo-deformación para el cálculo de la deformación es la correspondiente al hexaedro (35), esta matriz se calcula para las fuerzas internas y otra para los resultados, debido a que los puntos de muestreo para fuerzas internas son diferentes a los puntos de muestreo para resultados.

Con los esfuerzos principales se calcula los $\sigma_{vonMises}$, $\sigma_{maxShear}$, utilizando la clase StressTensor, en cada punto de muestreo, estos esfuerzos se los almacena en resultados.

Se actualiza la historia y los resultados, con la suma del valor inicial más el incremento calculado, para la historia se utiliza los puntos de muestreo para fuerzas internas 2.3.1.

2.3.1.4 Método internalForce

Para el cálculo del vector de fuerzas internas se utiliza una regla de integración de dos puntos en cada dirección. [8]

$$internalForce_{[24]} = B^T \sigma V = B_{[24 \times 6]}^T \sigma_{[6]} j d\xi d\eta d\zeta \quad (39)$$

$\sigma =$ esfuerzos principales

j = determinante del jacobiano.

2.4 Validación

2.4.1 Pruebas de la parcela [9]

Parcela de elementos sólidos. Dimensiones exteriores: cubo unitario. Propiedad del material: módulo de elasticidad = 1.0×10^6 , coeficiente de Poisson = 0.25.

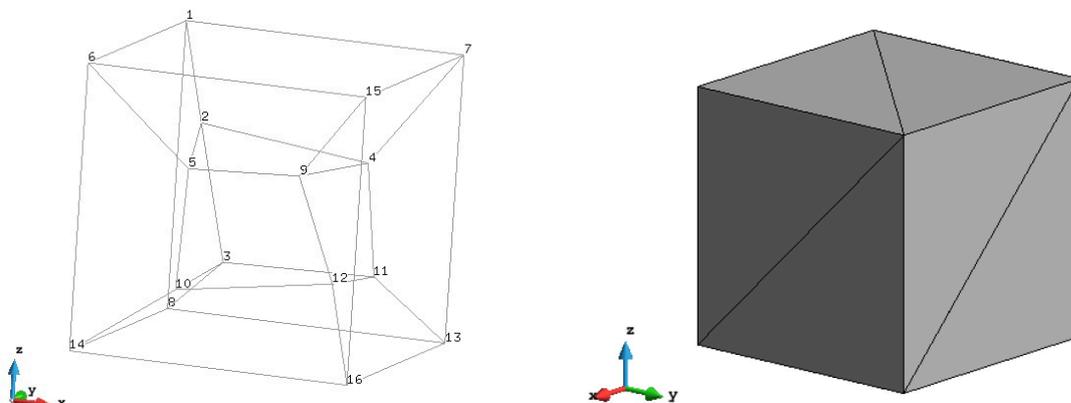


Fig. 7. Parcela de elementos Sólidos

Los nodos de la Tabla 4, marcados con “ * ” representan los nodos exteriores en donde las condiciones de frontera se fijan mediante:

$$u = 10^{-3}(2x + y + z) / 2 \quad (40)$$

$$v = 10^{-3}(x + 2y + z) / 2$$

$$w = 10^{-3}(x + y + 2z) / 2$$

Tabla 4. Coordenadas nodales de la parcela de sólidos

Nodo	x	y	z
1 *	0	1	1
2	0,165	0,745	0,702
3	0,273	0,75	0,23
4	0,788	0,693	0,644
5	0,32	0,186	0,643
6 *	0	0	1
7 *	1	1	1
8 *	0	1	0
9	0,677	0,305	0,683
10	0,249	0,342	0,192
11	0,85	0,649	0,263
12	0,826	0,288	0,288
13 *	1	1	0
14 *	0	0	0
15 *	1	0	1
16 *	1	0	0

Tabla 5. Comparación Desplazamientos, solución teórica versus Xplore

Nodos	Result Displacement "StaticAnalysis" 1 Vector OnNodes GID			Solución Teórica		
	U	V	W	u (10^-3)	v (10^-3)	w (10^-3)
1	1,0000E-03	1,5000E-03	1,5000E-03	-	-	-
2	8,8850E-04	1,1785E-03	1,1570E-03	8,8850E-01	1,1785E+00	1,1570E+00
3	7,6300E-04	1,0015E-03	7,4150E-04	7,6300E-01	1,0015E+00	7,4150E-01
4	1,4565E-03	1,4090E-03	1,3845E-03	1,4565E+00	1,4090E+00	1,3845E+00
5	7,3450E-04	6,6750E-04	8,9600E-04	7,3450E-01	6,6750E-01	8,9600E-01
6	5,0000E-04	5,0000E-04	1,0000E-03	-	-	-
7	2,0000E-03	2,0000E-03	2,0000E-03	-	-	-
8	5,0000E-04	1,0000E-03	5,0000E-04	-	-	-
9	1,1710E-03	9,8500E-04	1,1740E-03	1,1710E+00	9,8500E-01	1,1740E+00
10	5,1600E-04	5,6250E-04	4,8750E-04	5,1600E-01	5,6250E-01	4,8750E-01
11	1,3060E-03	1,2055E-03	1,0125E-03	1,3060E+00	1,2055E+00	1,0125E+00
12	1,1140E-03	8,4500E-04	8,4500E-04	1,1140E+00	8,4500E-01	8,4500E-01
13	1,5000E-03	1,5000E-03	1,0000E-03	-	-	-
14	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	-	-	-
15	1,5000E-03	1,0000E-03	1,5000E-03	-	-	-
16	1,0000E-03	5,0000E-04	5,0000E-04	-	-	-

La respuesta teórica (40) coincide con la respuesta encontrada en Xplore Tabla 5, la respuesta en Xplore para los elementos tetraedros y hexaedros es la misma en la

prueba de la parcela. En la Fig. 8, se aprecian los resultados en GID, que representan gráficamente la Tabla 5.

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 1.0^{-3} \quad (41)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 2000$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 400$$

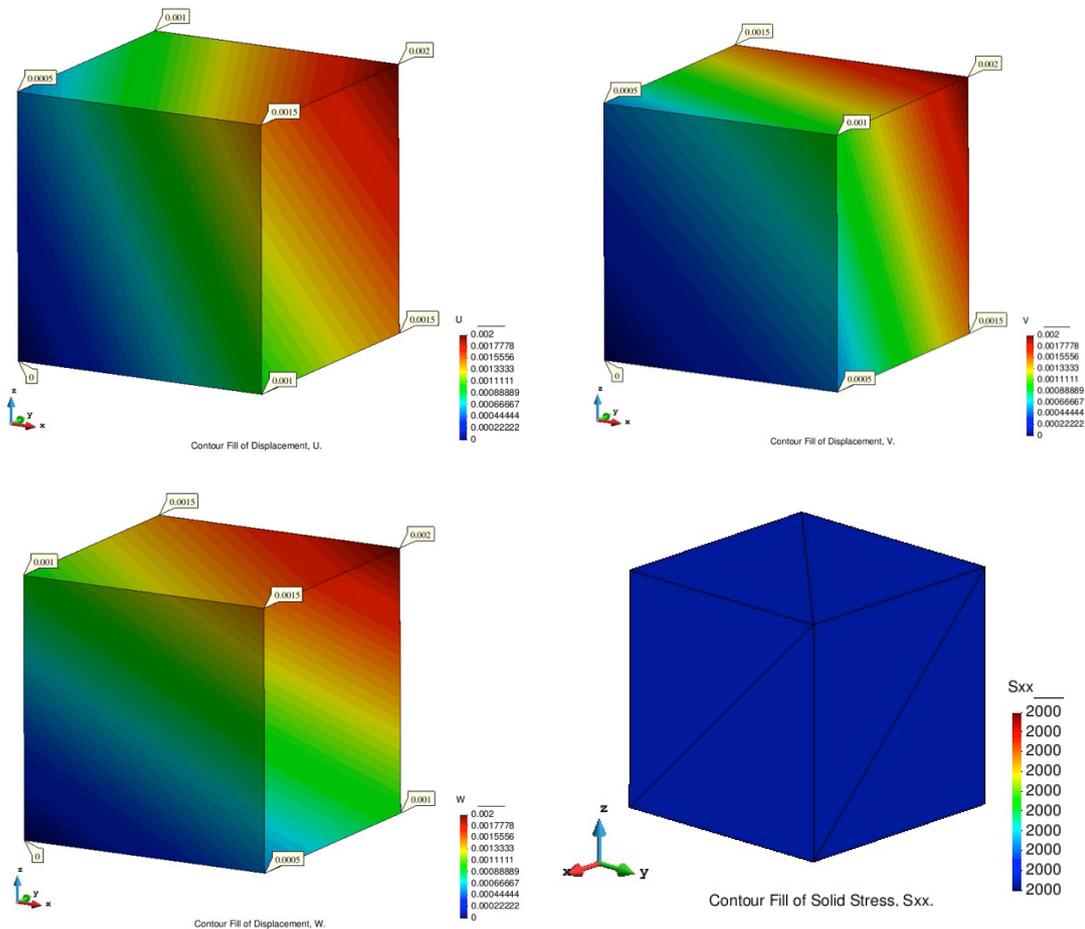


Fig. 8. Desplazamiento Parcela U, V, W y Esfuerzo Sxx

La prueba de la parcela para los tetraedros y los hexaedros es la misma, los elementos para la prueba para los hexaedros son seis como se aprecia en la Fig. 7, imagen izquierda y en el caso de usar tetraedros se usan 42 elementos.

Los resultados de Xplore Fig. 8 son exactos a los teóricos (41), lo que prueba que los elementos tetraedro y hexaedro están correctamente implementados.

2.4.2 Pruebas de sensibilidad a la distorsión [9]

Con una delgada hilera de elementos se modelan tres mallas diferentes. La (A) con una razón de aspecto de 5/1; la (B), agregando un patrón alterno de distorsión angular; y la (C), agregando un patrón alineado de distorsión angular, como se muestra en la Fig. 9, las vigas en voladizo se encuentran empotradas en los nodos izquierdos.

Al modelar los hexaedros se necesitaran 6 elementos en cada viga Fig. 9.

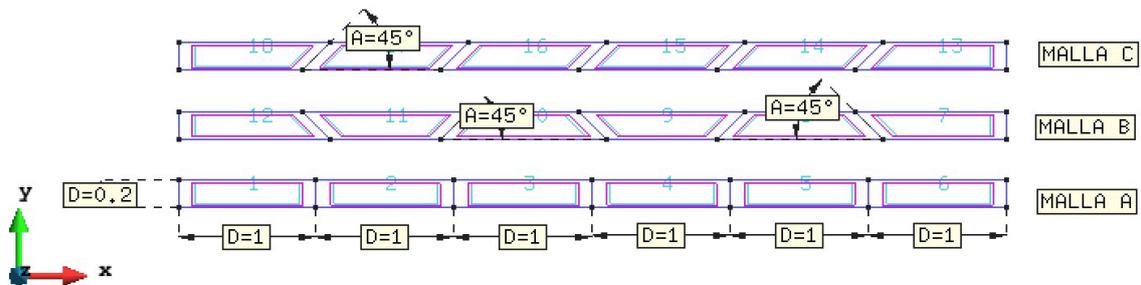


Fig. 9. Malla empleada en la prueba sensibilidad a la distorsión hexaedro

Los nodos de la prueba para el elemento hexaedro son los mismos que los nodos para el tetraedro, la malla en el caso de tetraedros se muestra en Fig. 10.

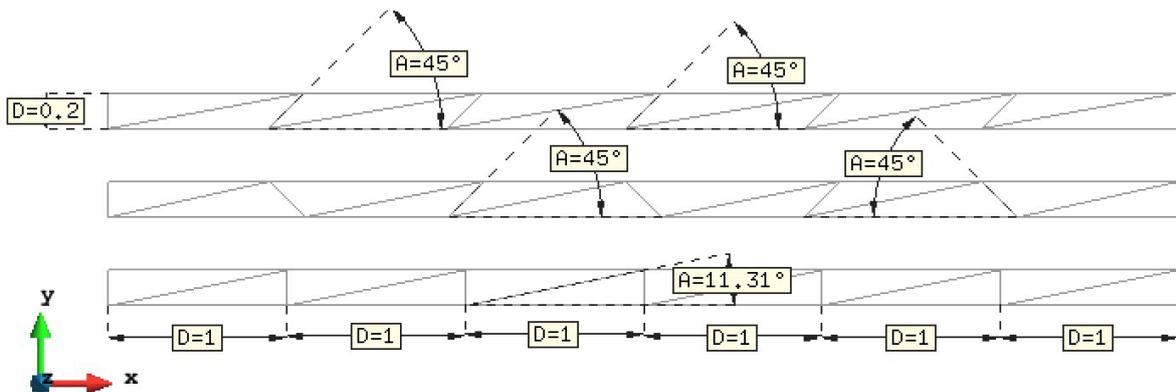


Fig. 10. Malla empleada en la prueba sensibilidad a la distorsión tetraedro

Se aplican dos tipos de carga:

- A. Dos cargas concentradas, de valor 50 cada una, fuera del plano (z) para producir torsión. Solución $w = 0.03406$

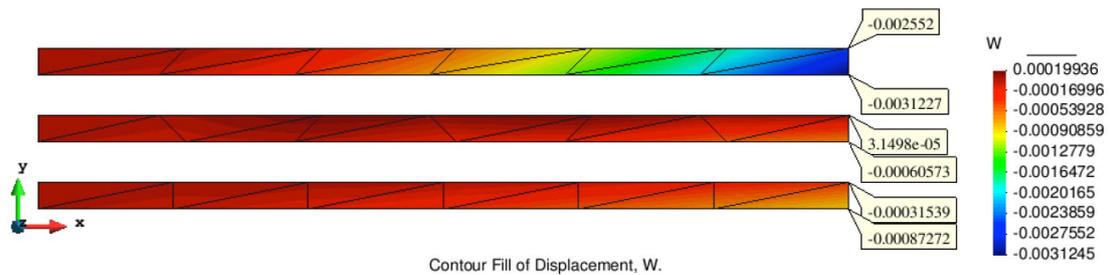


Fig. 11. Prueba 1, sensibilidad a la distorsión, Tetraedro

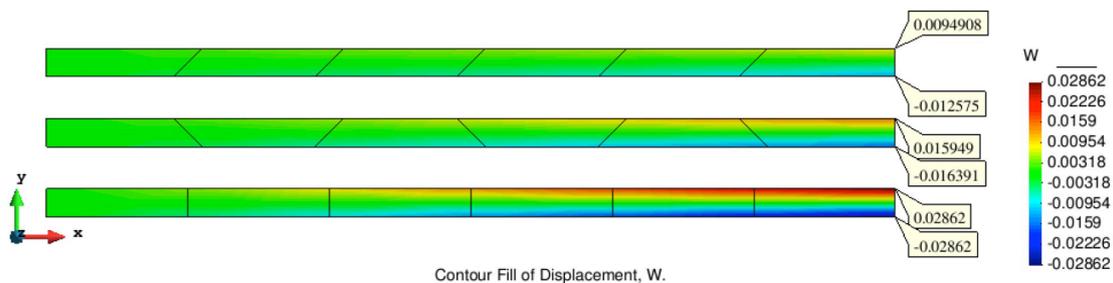


Fig. 12. Prueba 1, sensibilidad a la distorsión, Hexaedro

Tabla 6. Prueba 1, sensibilidad a la distorsión, sólidos

	HEXAEDRO		TETRAEDRO	
	Nodo Inferior	%	Nodo Inferior	%
Prueba 2	w = 0.03406			
MALLA A	-0,02862	84,0%	-0,000873	2,6%
MALLA B	-0,016391	48,1%	-0,000606	1,8%
MALLA C	-0,012575	36,9%	-0,003123	9,2%

El porcentaje que se muestra en las columnas de las figuras anteriores representa el cociente entre el valor obtenido versus el valor teórico, expresado en porcentaje.

En la Tabla 6, se compara la Fig. 11 y la Fig. 12, los desplazamientos de las tres mallas en el tetraedro no llegan al 10% del resultado, en la Fig. 11, se ve claramente que en ninguna malla de los tetraedros ha modelado torsión.

En la Fig. 12, de hexaedros se aprecia la torsión de los elementos, la malla A llega a un 84% del resultado, en la malla B es de 48.1% y en la malla C de 36.9% del desplazamiento exacto, estos dos finales con elementos distorsionados. La distorsión en estos elementos reduce su efectividad.

B. Carga unitaria de extensión (x): Solución: $u = 0.00003$

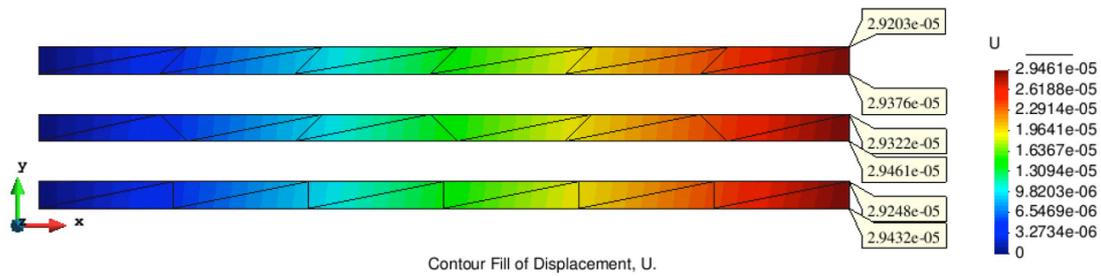


Fig. 13. Prueba 2, sensibilidad a la distorsión, Tetraedro

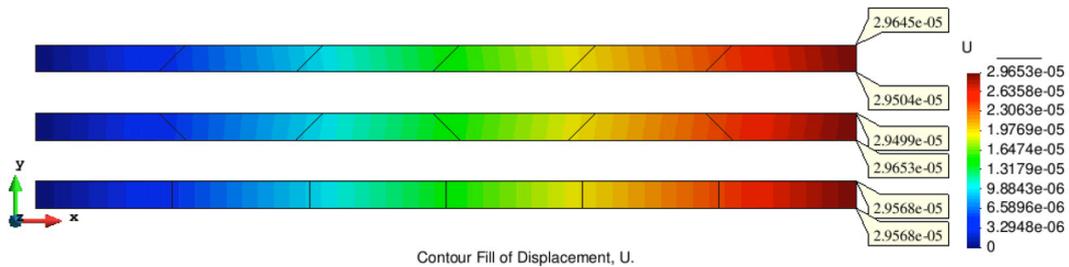


Fig. 14. Prueba 2, sensibilidad a la distorsión, Hexaedro

Tabla 7. Prueba 2, sensibilidad a la distorsión, sólidos

	HEXAEDRO		TETRAEDRO	
	Nodo Inferior	%	Nodo Inferior	%
Prueba 3				
u = 0.00003				
MALLA A	2,957E-05	98,6%	2,943E-05	98,1%
MALLA B	2,965E-05	98,8%	2,946E-05	98,2%
MALLA C	2,950E-05	98,3%	2,938E-05	97,9%

En la Tabla 7 se compara la Fig. 13 y Fig. 14, los dos elementos se comportaron de forma similar ante carga axial, los resultados tienen un error del 2% comparados con el resultado exacto. Los desplazamientos u en los hexaedros son 0.5% mayores a los desplazamientos del tetraedro. La malla A del hexaedro es la que más se acerca a la respuesta exacta con un 98.6% y la malla C de tetraedros es la que tiene el menor desempeño con un 97.9%. La diferencia porcentual entre la mejor solución y la más distante es de 1.7%.

2.4.3 Viga alabeada en voladizo [9]

La estructura se muestra en la Fig. 15. En el extremo libre, se aplica una carga unitaria en dos posiciones en el plano y fuera del plano del material, con desplazamientos de 0.005424 (V) y 0.001754 (U) respectivamente, en dirección de la carga.

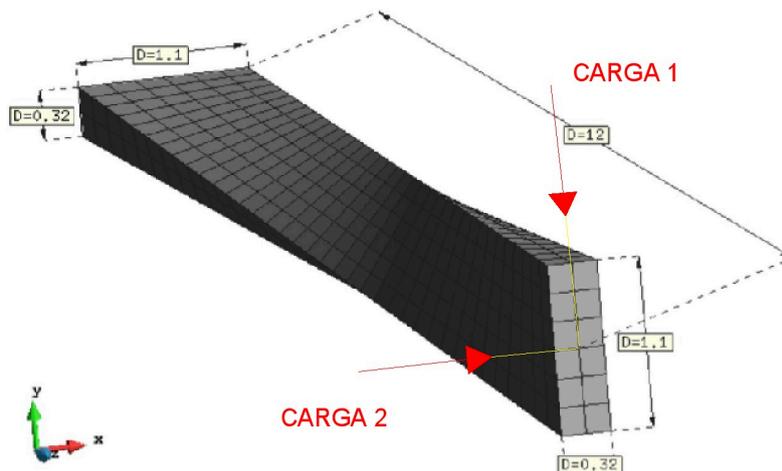


Fig. 15. Viga alabeada en voladizo (malla 2x6x36) GID

Módulo de elasticidad = 29×10^6 , coeficiente de Poisson = 0.22, $L = 12$, $a=0.32$, $b=1.1$

Los resultados de las seis mallas seleccionadas para hexaedros se presentan en la Tabla 6 y en la Tabla 7 se presentan 5 tipos de malla para tetraedros. Las mallas fueron seleccionadas de un grupo mayor de pruebas que se realizaron, se presentan para mostrar la importancia de la definición de la malla en la solución del problema. El valor del desplazamiento en la dirección U, V, esta dado en el punto de aplicación de la carga Fig. 15.

Tabla 8. Viga alabeada en voladizo, Hexaedro

	Lado Corto (0.32)	Lado Largo (1.1)	z (12.0)	Total Elementos	U	%	V	%
A	2	6	6	72	0,00039331	22,4%	0,00050049	9,2%
B	2	6	12	144	0,00075376	43,0%	0,0014904	27,5%
C	2	6	36	432	0,00070163	40,0%	0,0047962	88,4%
D	2	6	48	576	0,00060426	34,5%	0,0056228	103,7%
E	2	6	75	900	0,00048603	27,7%	0,0065072	120,0%
F	2	12	48	1152	0,00060343	34,4%	0,0056399	104,0%

La malla A, B, C, D, E, tiene el mismo número de elementos en la sección transversal pero se ha variado el número de elementos en la dirección z.

Tabla 13, se observa que al variar la malla los resultados pueden acercarse al resultado exacto o alejarse de ser el caso, la malla D es la que más se aproxima al desplazamiento V con un 103.7%, pero en la dirección U sólo alcanza un 34.5%.

Incrementar el número elementos en una dirección no garantiza que el resultado se aproxime a la solución, en la malla E, se incrementó el número de elementos con respecto a D pero el desplazamiento V se incremento a 120%

Tabla 9. Viga alabeada en voladizo, Tetraedros

	Lado Corto (0.32)	Lado Largo (1.1)	z (12.0)	Total Elementos	U	%	V	%
A	2	6	12	864	0,00034746	19,8%	0,00048251	8,9%
B	2	6	48	3456	0,00078265	44,6%	0,0029723	54,8%
C	2	6	192	13824	0,00070423	40,1%	0,0045239	83,4%
D	2	12	96	13824	0,00080977	46,2%	0,0041821	77,1%
E	8	24	96	110592	0,00057446	32,8%	0,0058373	107,6%

La malla E es la que más se aproxima al desplazamiento V empleando tetraedros con un 107.6%, el número de elementos que se usaron para llegar a un valor cercano a la respuesta es mucho mayor al que se empleo en hexaedros.

El resultado del desplazamiento en U, que más se acerca entre los dos elementos es el de la malla D usando tetraedros con un 46.2%.

Si usamos tetraedros necesitamos una malla más refinada par calcular los desplazamientos, esto lo vemos si comparamos los elementos de la Tabla 8 versus los elementos de la Tabla 9. El número de tetraedros que se necesita para ocupar el volumen de un hexaedro es de seis.

Capítulo 3

3.1 Placas [7]

La formulación de los elementos se basa en (Gallegos Sergio, 2008) y se encuentra en el libro Análisis de sólidos y estructural, mediante el método de elementos finitos, capítulo 10, "Placas", para el presente documento se presenta un resumen de la formulación de los elementos sólidos. [7]

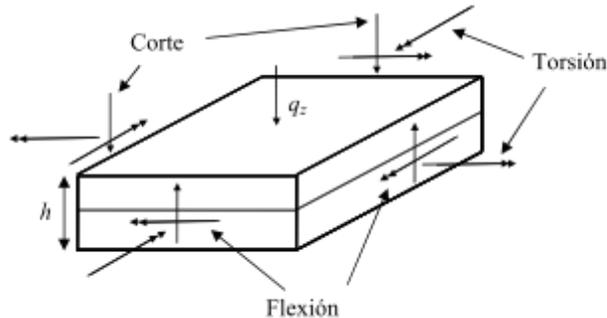


Fig. 16. Fuerzas internas resistentes producidas dentro de una placa

$$\frac{1}{100}L \leq t \leq \frac{1}{20}L \Rightarrow \text{Placas Medias} \quad (42)$$

Las placas medianas (42) constituyen la mayor parte de las placas estructurales, caracterizándose por emplear la consideración de deformaciones pequeñas. La teoría de placas clásicas se ha desarrollado para placas medianas y se denomina teoría de Kirchhoff. La teoría de Reissner-Mindlin, por otro lado, considera el efecto de corte en la deformación normal del elemento y aproxima independientemente los desplazamientos y la distorsión.

3.1.1 Forma Fuerte

Encontrar el desplazamiento w , los giros φ_x y φ_y , las deformaciones \mathbf{K} y $\boldsymbol{\gamma}$ y las fuerzas internas resultantes \mathbf{M} y \mathbf{S} , tal que si $\boldsymbol{\kappa} = -L\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\gamma} = -\boldsymbol{\varphi} + \nabla w$, $\mathbf{M} = \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}$ y $\mathbf{S} = \mathbf{D}_s\boldsymbol{\gamma}$, las siguientes ecuaciones se tienen que satisfacer:

Ecuaciones de equilibrio:

$$L^T \mathbf{M} - \mathbf{S} = 0 \quad (43)$$

$$\nabla^T \mathbf{S} + q_z = 0 \quad (44)$$

Condiciones frontera esenciales o de Dirichlet:

$$w = w_g, \varphi_n = \varphi_{ng}, \varphi_s = \varphi_{sg} \quad \forall \mathbf{x} \in S_u \quad (45)$$

Condiciones de frontera naturales o de Neumann:

$$S_n = S_{ng}, M_n = M_{ng}, M_s = M_{sg}, \quad \forall \mathbf{x} \in S_t \quad (46)$$

Donde:

q_z = carga aplicada, presión normal.

φ_x, φ_y = las rotaciones.

M_x, M_y = Fuerzas de flexión y de torsión M_{xy} .

S = dos resultantes de fuerza, el corte Q_x, Q_y .

$\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ = curvaturas.

γ = distorsiones de corte fuera del plano.

3.1.2 Forma débil

Encontrar el desplazamiento y giros de $\mathbf{d} \in \mathcal{U}$, los momentos $\mathbf{M} \in \mathcal{M}$ y fuerzas cortantes $\mathbf{S} \in \mathcal{M}$, tal que si $\bar{\mathbf{d}} \in \mathcal{V}$, $\hat{\mathbf{M}} \in \mathcal{M}$, $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{M}$, $\mathbf{k} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}$, $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{D}_s^{-1}\mathbf{S}$, las siguientes ecuaciones tienen que satisfacer:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} (L\bar{\varphi})^T M d\Omega - \int_{\Omega} \bar{\varphi}^T S d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \bar{w})^T S d\Omega - \int_{\Omega} \bar{w}^T q_z d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \bar{\mathbf{M}}^T (L\varphi + D^{-1}M) d\Omega - \int_{\Omega} \hat{\mathbf{S}}^t (-\varphi + \nabla w - D_s^{-1}S) d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} \hat{\varphi}^t T_{\varphi}^t T_M M d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{w}^T T_S S d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

Donde:

M_x, M_y = Fuerzas de flexión y de torsión M_{xy} .

S = dos resultantes de fuerza, corte Q_x, Q_y .

D, D_s = matrices constitutivas a flexión y a corte.

$\boldsymbol{\gamma}$ = distorsiones de corte fuera del plano.

\mathbf{d} = vector agrupa los desplazamientos y los giros.

$\hat{\varphi}$ = giros nodales.

\hat{w} = deflexiones nodales.

3.1.3 Forma matricial

$$C_{[13 \times 8]} = - \int_{\Omega} P_M^T L N_{\varphi} d\Omega - \int_{\Omega} P_S^T N_{\varphi} d\Omega + \int_{\Omega} P_S^T \nabla N_{w\varphi} d\Omega \quad (48)$$

$$G_{[13 \times 13]} = - \int_{\Omega} P_M^T D^{-1} P_M d\Omega - \int_{\Omega} P_S^T D_S^{-1} P_S d\Omega \quad (49)$$

$$E_{[13 \times 4]} = \int_{\Omega} P_S^T \nabla N_w d\Omega \quad (50)$$

Se puede expresar de forma compacta:

$$\begin{bmatrix} G & F \\ F^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\beta} \\ \bar{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{f}_d \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$F_{[13 \times 12]} = \begin{bmatrix} E & C \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$\bar{d} = \begin{bmatrix} \bar{w} \\ \bar{\varphi} \end{bmatrix} \quad \bar{f}_d = \begin{bmatrix} f_w \\ f_{\varphi} \end{bmatrix} \quad (53)$$

Donde:

$\hat{\varphi}$ = giros nodales.

\hat{w} = deflexiones nodales.

$\bar{\beta}$ = coeficientes indeterminados. [10]

\bar{d} = sigue la convención de placas.

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} \end{bmatrix} \quad \nabla = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$P_M_{[3 \times 13]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y & 0 & x & 0 & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & y & 0 & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & y & x^2/2 & y^2/2 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$P_S_{[2 \times 13]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x & 1 & 0 & x & 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

Al calcular las integrales se utilizará el sistema natural, por lo que en las expresiones de P_M (55) y P_S (56) las coordenadas deben evaluarse mediante las interpolaciones bilineales convencionales.

$$x = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \bar{x}_i \quad (57)$$

$$y = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \bar{y}_i$$

Para las rotaciones se emplea interpolación estándar:

$$\varphi = N_\varphi \bar{\varphi} \quad (58)$$

$$N_{\varphi[2 \times 8]} = \begin{bmatrix} N_{\varphi 1} & 0 & N_{\varphi 2} & 0 & N_{\varphi 3} & 0 & N_{\varphi 4} & 0 \\ 0 & N_{\varphi 1} & 0 & N_{\varphi 2} & 0 & N_{\varphi 3} & 0 & N_{\varphi 4} \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$N_{\varphi i} = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \quad i=1 \dots 4$$

Para los desplazamientos fuera del plano, se emplea una interpolación no convencional, donde la deflexión se liga a las rotaciones nodales:

$$w = N_w \bar{w} + \Delta w \quad (60)$$

$$N_{w[1 \times 4]} = \begin{bmatrix} N_{w1} & N_{w2} & N_{w3} & N_{w4} \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$N_{wi} = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \quad i=1 \dots 4$$

Interpolación cuadrática en ξ y lineal en η , $\Delta w = N_{w\varphi} \bar{\varphi}$ incremento de deflexión total.

$$N_{w\varphi[1 \times 8]} = \begin{bmatrix} N_{w\varphi 1} & N_{w\varphi 2} & N_{w\varphi 3} & N_{w\varphi 4} \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$N_{w\varphi 1} = N_{w\varphi}^{41} \begin{bmatrix} (\bar{x}_1 + \bar{x}_4) & (\bar{y}_1 - \bar{y}_4) \end{bmatrix} + N_{w\varphi}^{12} \begin{bmatrix} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) & (\bar{y}_1 - \bar{y}_2) \end{bmatrix}$$

$$N_{w\varphi 2} = N_{w\varphi}^{12} \begin{bmatrix} (\bar{x}_2 + \bar{x}_1) & (\bar{y}_2 - \bar{y}_1) \end{bmatrix} + N_{w\varphi}^{23} \begin{bmatrix} (\bar{x}_2 - \bar{x}_3) & (\bar{y}_2 - \bar{y}_3) \end{bmatrix}$$

$$N_{w\varphi 3} = N_{w\varphi}^{23} \begin{bmatrix} (\bar{x}_3 + \bar{x}_2) & (\bar{y}_3 - \bar{y}_2) \end{bmatrix} + N_{w\varphi}^{34} \begin{bmatrix} (\bar{x}_3 - \bar{x}_4) & (\bar{y}_3 - \bar{y}_4) \end{bmatrix}$$

$$N_{w\varphi 4} = N_{w\varphi}^{34} \begin{bmatrix} (\bar{x}_4 + \bar{x}_3) & (\bar{y}_4 - \bar{y}_3) \end{bmatrix} + N_{w\varphi}^{41} \begin{bmatrix} (\bar{x}_4 - \bar{x}_1) & (\bar{y}_4 - \bar{y}_1) \end{bmatrix}$$

$$N_{w\varphi}^{12} = -\frac{1}{16} (1 - \xi^2) (1 - \eta) \quad N_{w\varphi}^{34} = -\frac{1}{16} (1 - \xi^2) (1 + \eta) \quad (63)$$

$$N_{w\varphi}^{23} = -\frac{1}{16} (1 - \eta^2) (1 + \xi) \quad N_{w\varphi}^{41} = -\frac{1}{16} (1 - \eta^2) (1 - \xi)$$

Donde:

\bar{K} = Matriz de rigidez en coordenadas locales.

K = Matriz de rigidez, en el sistema de mano derecha local del elemento.

d = sigue la regla de la mano derecha.

\bar{d} = sigue la convención de placas $\bar{d} = T_{\psi} d$.

- c) Los coeficientes de las matrices constitutivas D y D_s , consideran el material isotrópico.

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D_s = \beta G t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (67)$$

E = módulo de elasticidad.

ν = coeficiente de Poisson.

t = espesor.

β = coeficiente de corrección de corte, sección rectangular $\frac{5}{6}$ [11]

Se calcula de la Matriz F con (52), y la matriz G con (49).

- d) Para el calculo de la matriz G (49) se requiere lo siguiente:

- i. Calcular la matriz constitutiva (67), y los coeficientes del jacobiano a_i, b_i (64).
- ii. Integración numérica [8] ξ, η de 3x3, en cada punto se hace lo siguiente:
 - Funciones de forma (59).
 - "x" y "y", en el punto de Gauss (57).
 - Las matrices PM (55) y PS (56).
 - Jacobiano (64) y su determinante.
 - Evaluamos el término correspondiente a flexión y el término correspondiente a corte (49), y se los suma. La matriz G calculada en el punto de Gauss anterior se suma al actual, hasta finalizar la integración numérica.

- e) Para el calculo de la matriz F (52) se requiere lo siguiente:

i. Integración numérica [8] ξ, η de 3x3, en donde para cada punto se hace lo siguiente:

- Las funciones de forma N_w [4] (61) y sus derivadas naturales_[2x4].
- Las derivadas naturales _[2x8] de $N_{w\varphi}$ (62).
- Jacobiano (64), y las derivadas cartesianas mediante la siguiente relación:

$$\frac{\delta N_a}{\delta x} = J^{-1} \frac{\delta N_a}{\delta \xi} \quad (68)$$

$$\frac{\delta N_a}{\delta \xi} = \begin{Bmatrix} \frac{\delta N_a}{\delta \xi} \\ \frac{\delta N_a}{\delta \eta} \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{\delta N_a}{\delta x} = \begin{Bmatrix} \frac{\delta N_a}{\delta x} \\ \frac{\delta N_a}{\delta y} \end{Bmatrix}$$

- “x” y “y”, en el punto de Gauss (57).
 - Matrices P_M (55) y P_S (56).
 - Matriz E (50), la matriz C (48), y las ensablo en la matriz F (52), en cada punto de Gauss.
- ii. Se calcula la matriz de rigidez de orden 12x12 en coordenadas locales (66), luego se transforma al sistema de mano derecha local del elemento.
- iii. Se expande la matriz de rigidez de orden 24x24, utilizando la numeración de la Tabla 10 y finalmente se transforma a coordenadas globales.

Tabla 10. Aportaciones Placa y Membrana al elemento

Nodo 1		Nodo 2		Nodo 3		Nodo 4	
1	U1	7	U2	13	U3	19	U4
2	V1	8	V2	14	V3	20	V4
3	W1	9	W2	15	W3	21	W4
4	rot1 x	10	rot2 x	16	rot3 x	22	rot4 x
5	rot1 y	11	rot2 y	17	rot3 y	23	rot4 y
6	rot1 z	12	rot2 z	18	rot3 z	24	rot4 z

● Placa ● Membrana

3.2.2. Método externalForces

Para calcular las fuerzas externas seguimos el siguiente procedimiento:

- Primero proyectamos las coordenadas del elemento a su plano de referencia y determinamos la matriz de transformación.
- La carga externa se puede aplicar en los bordes de la superficie o en el área de la superficie del elemento.
- Para la carga externa en el borde, determinamos el lado de aplicación. La carga puede ser constante o con incrementos lineales, calculamos la intensidad del vector en cada nodo con la carga.
- Para la carga de superficie es necesario asignar el sistema de referencia en que se encuentra la carga, este sistema puede ser global o normal, de ser normal a la superficie, será necesario un sistema de referencia adicional para que se pueda proyectar el eje "x" de ese sistema en la superficie. Si el eje "x" del sistema no se puede proyectar en la superficie no se resuelve el problema.

$$f_{\varphi[8]} = \int_{\Omega} N_{w\varphi}^T q_z d\Omega - \int_{\Gamma} N_{\varphi}^T T_{\varphi}^T T_M M d\Gamma + \int_{\Gamma} N_{w\varphi}^T T_s S d\Gamma \quad (69)$$

$$f_{w[4]} = \int_{\Omega} N_w^T q_z d\Omega + \int_{\Gamma} N_w^T T_s S d\Gamma$$

Los primeros términos corresponden a la carga q_z (69), aplicada en la superficie, y los otros términos a la carga externa en los bordes. La integral numérica en la superficie es de 2x2 y en la longitud usa una regla de 2 puntos.

- Los vectores de fuerza se transforman al sistema de mano derecha local del elemento y finalmente se transforma al sistema global.

3.2.3. Método updateVariables

Para calcular deformaciones y esfuerzos en un sistema coordenado coherente entre los elementos, es necesario definir un sistema diferente al sistema local del elemento. Este sistema "ResultUser", es un sistema de mano derecha, tal como el del elemento y coincide con el plano del elemento. El eje "x" de este sistema de referencia se define mediante la proyección del eje "x" del sistema definido en las propiedades de elemento para salida de datos. El eje z coincide con el eje "z" local, y el eje "y" se formará mediante la regla de la mano derecha.

Para actualizar las variables se siguen los siguientes pasos:

- Los incrementos de desplazamiento están ordenados en GDL globales: u1, v1, w1, rot1x, rot1y, rot1z. Se transforma los desplazamientos al sistema local del elemento y luego al sistema ResultUser.
- Se forma el vector de desplazamientos[12] con GDL: w1, ... w4, rot1x, ... rot4x, rot1y, ... rot4y, las rotaciones siguen la regla de la mano derecha. Luego transformar este vector a la convención de la teoría de placas \bar{d} (65).

- c) Para calcular la deformación, se parte de la definición básica de curvatura y distorsión.

Curvatura:

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{B}_{\varphi 1} & \bar{B}_{\varphi 2} & \bar{B}_{\varphi 3} & \bar{B}_{\varphi 4} \end{bmatrix} \bar{d} = B_{\varphi} \bar{d} \quad (70)$$

$$\bar{B}_{\varphi a} = - \begin{bmatrix} \frac{\delta N_a}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta N_a}{\delta y} \\ \frac{\delta N_a}{\delta y} & \frac{\delta N_a}{\delta x} \end{bmatrix}, \quad a = 1 \dots 4$$

Distorsión:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} N_{\varphi 1} I_{2 \times 2} & N_{\varphi 2} I_{2 \times 2} & N_{\varphi 3} I_{2 \times 2} & N_{\varphi 4} I_{2 \times 2} \end{bmatrix} \bar{\varphi} \quad (71)$$

$$+ \begin{bmatrix} N_{w1,x} & N_{w2,x} & N_{w3,x} & N_{w4,x} \\ N_{w1,y} & N_{w2,y} & N_{w3,y} & N_{w4,y} \end{bmatrix} \bar{w}$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{\delta N_{w\varphi 1}}{\delta x} & \frac{\delta N_{w\varphi 2}}{\delta x} & \frac{\delta N_{w\varphi 3}}{\delta x} & \frac{\delta N_{w\varphi 4}}{\delta x} \\ \frac{\delta N_{w\varphi 1}}{\delta y} & \frac{\delta N_{w\varphi 2}}{\delta y} & \frac{\delta N_{w\varphi 3}}{\delta y} & \frac{\delta N_{w\varphi 4}}{\delta y} \end{bmatrix} \bar{\varphi}$$

I = Matriz identidad

- d) Las funciones de interpolación de la curvatura y de la distorsión se evalúan numéricamente, usando una regla de 2x2
- e) La deformación se actualiza en los resultados del elemento.
- f) Para las fuerzas resultantes calculamos $\bar{\beta}$ (72), La matriz G y la matriz F se la calculó en 3.2.1

$$\bar{\beta} = -G^{-1} F \bar{d} \quad (72)$$

- g) Ahora ya podemos evaluar los esfuerzos resultantes, correspondientes a momentos y cortantes.

$$M = P_M \bar{\beta} \quad (73)$$

$$S = P_S \bar{\beta}$$

- h) Las fuerzas resultantes (73), para las fuerzas internas se calculan con una regla de integración de 3x3, y para presentar los resultados una regla de 2x2.
- i) Se calculan los esfuerzos en la cara superior e inferior adicional, $\sigma_{vonMises}$, $\sigma_{maxShear}$, y se los almacena en resultados.

3.2.4. Método internalForce

El vector de fuerzas internas:

$$R = \int_{\Omega} B_{\varphi}^T M d\Omega + \int_{\Omega} B_{\gamma}^T S d\Omega \quad (74)$$

Donde M, S, fueron calculados en 3.2.3, B_{γ} y B_{φ} se detallan en (70) y (71) respectivamente.

Con respecto a los puntos de muestreo óptimo, los resultantes de fuerza se evalúan todos de acuerdo con una regla de 1x1 puntos, al centro del elemento. [7]

3.3. Validación del elemento

3.3.1. Prueba de la Parcela

Se considera la parcela que se muestra en la Fig. 17, con módulo de elasticidad de $E = 1000$, coeficiente de Poisson = 0.15 y un espesor de 1.0

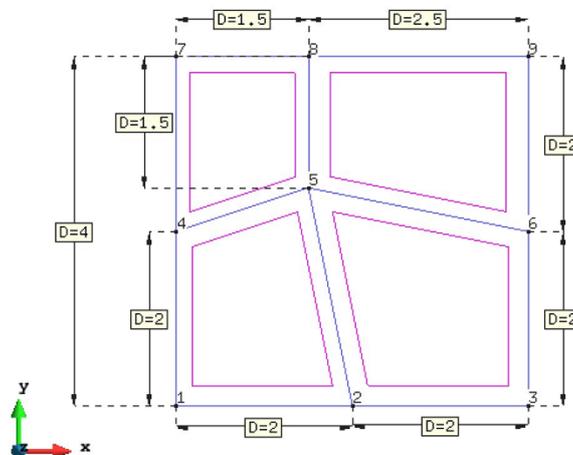


Fig. 17. Parcela de Placas

3.3.1.1. Desplazamiento vertical del cuerpo rígido

Restricciones sobre los nodos perimetrales:

$$w = 1, \text{dofZ} = 1.0 \quad \psi_x = 0, \text{dofRX} = 0.0 \quad \psi_y = 0 \quad \text{dofRy} = 0.0 \quad (75)$$

El resultado exacto es de cero deformaciones y esfuerzos en los puntos de Gauss, el elemento cumple con los resultados.

3.3.1.2. Rotación de cuerpo rígido alrededor del eje x

Restricciones sobre los nudos perimetrales:

$$w = y \quad \text{dofZ} = y \quad \psi_x = 1.0 \quad \text{dofRX} = 1.0 \quad \psi_y = 0 \quad \text{dofRy} = 0.0 \quad (76)$$

El resultado exacto es de cero deformaciones y esfuerzos en los puntos de Gauss, el elemento cumple con los resultados. Nudo 5, desplazamiento $w = 2.5$

3.3.1.3. Rotación de cuerpo rígido alrededor del eje y

Restricciones sobre los nodos perimetrales:

$$w = -x, \quad \text{dofZ} = -x \quad \psi_x = 0, \quad \text{dofRX} = 0.0 \quad \psi_y = 1. \quad \text{dofRy} = 1.0 \quad (77)$$

El resultado exacto es de cero deformaciones y esfuerzos en los puntos de Gauss, el elemento cumple con los resultados. Nudo 5, desplazamiento $w = -1.5$

3.3.1.4. Curvatura constante en dirección X

Restricciones $w=0$ en los nodos de esquina, libres los demás ψ_y libre en los nodos. $\psi_x = k_y \left(x - \frac{L}{2}\right)$ en todos los nodos perimetrales.

Tomando una curvatura $k_x = 1$, la solución exacta para las otras variables es

$$k_y = -0.15, k_{xy} = 0, \gamma_{xz} = 0, \gamma_{yx} = 0 \quad M_x = 83.3333, M_y = M_{xy} = 0, Q_x = Q_y = 0 \quad (78)$$

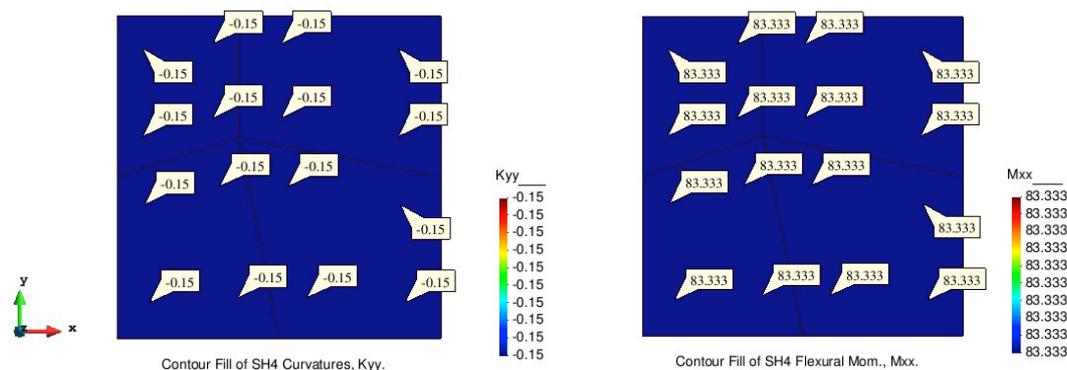


Fig. 18. Parcela placa, curvatura constante, dirección X

3.3.1.5. Curvatura constante en dirección Y

Restricciones $w = 0.0$ en los nodos de esquina, libres los demás ψ_y libre en los nodos. $\psi_x = k_y \left(\frac{L}{2} - y \right)$ en todos los nodos perimetrales.

Tomando una curvatura $k_y = 1$, la solución exacta para las otras variables es

$$k_x = -0.15, k_{xy} = 0, \gamma_{xz} = 0, \gamma_{yx} = 0 \quad M_y = 83.3333, M_x = M_{xy} = 0, Q_x = Q_y = 0 \quad (79)$$

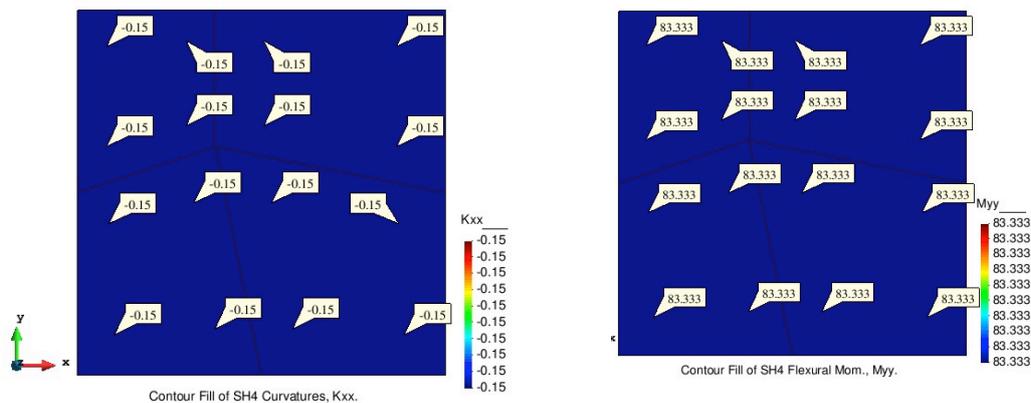


Fig. 19. Parcela placa, curvatura constante, dirección Y

3.3.1.6. Alabeo Constante

La solución exacta es:

$$k_y = 0, k_x = 0, k_{xy} = -1, \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad M_{xy} = -36.23188, M_x = M_y = 0, Q_x = Q_y = 0 \quad (80)$$

La respuesta que nos presenta GID Fig. 20, es aproximada a 3 decimales por lo que el valor del momento M_{xy} es el esperado (80). Todos los demás resultados calculados son exactamente los que se muestran en (80).

Tabla 11. Restricciones en nodos perimetrales para producir alabeo

Nodo	w	ϕ_x -Giro	ϕ_y -Giro
1	2	-1	1
2	0	--	1
3	-2	1	1
4	0	-1	--
6	0	1	--
7	-2	-1	-1
8	-0,5	--	-1
9	2	1	-1

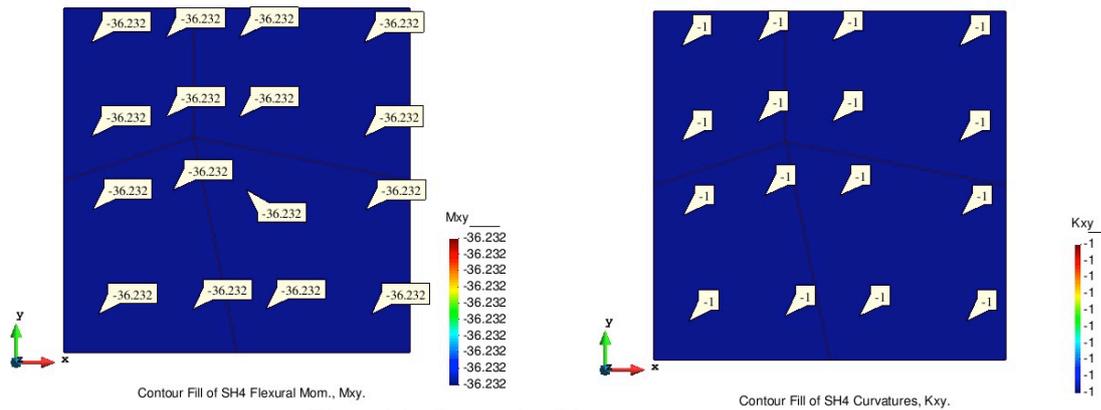


Fig. 20. Parcela Placa, alabeo constante

3.3.2. Prueba de la Parcela de MacNeal y Harder [9]

Se propone la parcela de elementos que se muestra en la Fig. 21, con un módulo de elasticidad 10^6 , coeficiente de Poisson 0.25, espesor constante 0.1

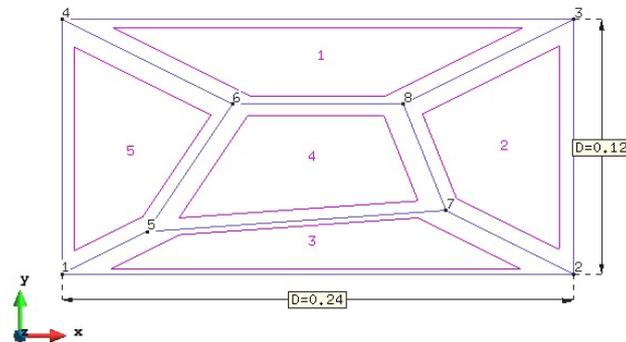


Fig. 21. Parcela MacNeal y Harder

Tabla 12. Coordenadas de los nodos y resultados MacNeal y Harder

Nodos	X	Y	MacNeal y Harder			Resultados Xplore		
			w	ϕ_x .Giro	ϕ_y .Giro	w	ϕ_x .Giro	ϕ_y .Giro
1	0	0	0	0	0	-	-	-
2	0,24	0	0,0288	0,12	-0,24	-	-	-
3	0,24	0,12	0,0504	0,24	-0,3	-	-	-
4	0	0,12	0,0072	0,12	-0,06	-	-	-
5	0,04	0,02	0,0014	0,04	-0,05	0,0014	0,04	-0,05
6	0,08	0,08	0,0096	0,12	-0,12	0,0096	0,12	-0,12
7	0,18	0,03	0,01935	0,12	-0,195	0,01935	0,12	-0,195
8	0,16	0,08	0,0224	0,16	-0,2	0,0224	0,16	-0,2

La solución teórica está dada por:

$$w = \frac{x^2 + xy + y^2}{2}, \quad \psi_x = \frac{x}{2} + y, \quad \psi_y = -\left(x + \frac{y}{2}\right) \quad (81)$$

$$M_x = M_y = -111.11, \quad M_{xy} = -33.333$$

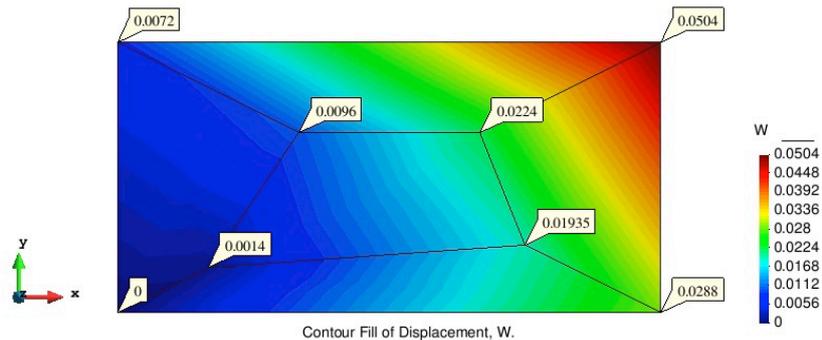


Fig. 22. Parcela MH, desplazamiento W

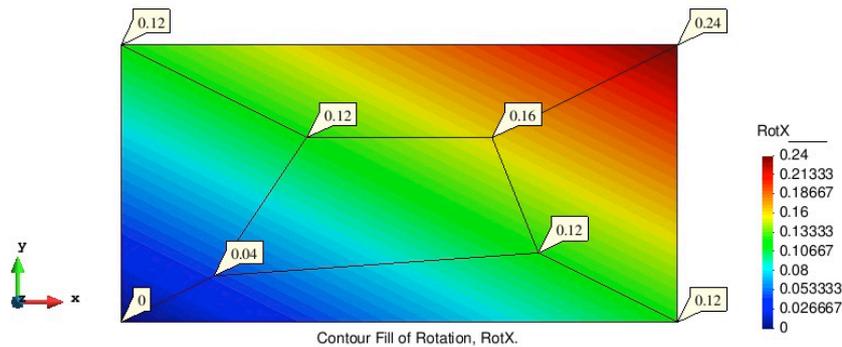


Fig. 23. Parcela MH, rotación x

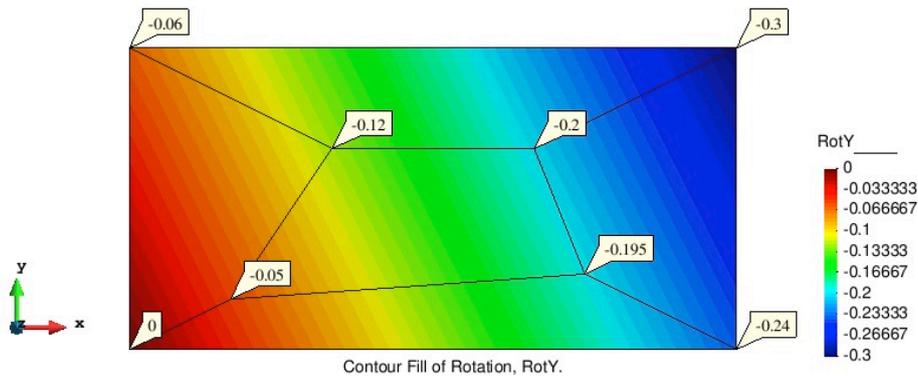


Fig. 24. Parcela MH, rotación y

Los nodos exteriores 1, 2, 3, 4 que se ven en la Fig. 21, se restringen con los valores de la Tabla 12, y en los nodos interiores se compara la respuesta exacta (Tabla 12) , con los resultados de las Fig. 22, Fig. 23 y Fig. 24, los resultados de estas figuras son correctos. La fuerza resultante calculada M_x , M_y , M_{xy} es exactamente (81).

3.3.3. Placa cuadrada con carga uniforme

Placa cuadrada con carga uniformemente distribuida q . La placa se sujeta a tres condiciones de soporte: simple en los lados, empotrado en los lados y sujeto en las

esquinas. Se utilizaron diversos espesores t , por lo cual, con objeto de normalizar el valor de la deflexión, se variará la carga para que el coeficiente de normalización sea fácil de evaluar (Tabla 13). Se utilizan 4 tipos de malla 2x2, 4x4, 8x8, 16x16. En la Fig. 26 y Fig. 27 se muestran los resultados en GID con una malla de 16x16.

Módulo de elasticidad = 1092000, $L = 10$, Coeficiente de Poisson = 0.3, $\beta=5/6$

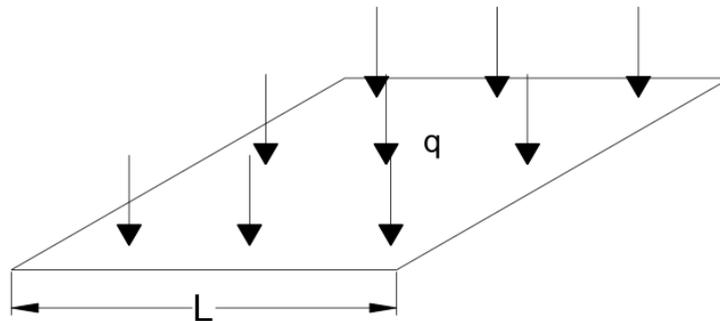


Fig. 25. Placa cuadrada con carga uniforme

Tabla 13. Relación de espesores, cargas y constantes para la placa cuadrada

Espesor (t)	Carga (q)	$(qL^4/100D)$	$(qL^2/100)$
3.5	4287	1	42875
1	1000	1	1000
0.1	1	1	1
0.00001	0.001	0.001	0.001

Tabla 14. Solución al centro de la placa simplemente soportada

Espesor, t	Malla	Con factores				Solución exacta	
		W	%	Mxx	%	$w_c/(qL^4/100D)$	$M_c/(qL^2/100)$
3,5	2x2	0,094297	14,2%	0,368	7,7%	0,6649	4,79
	4x4	0,078279	11,8%	0,489	10,2%		
	8x8	0,076437	11,5%	0,546	11,4%		
	16x16	0,076056	11,4%	0,560	11,7%		
1	2x2	0,55245	129,3%	3,262	68,1%	0,427284	4,78863
	4x4	0,46522	108,9%	4,312	90,0%		
	8x8	0,45761	107,1%	4,875	101,8%		
	16x16	0,45921	107,5%	5,028	105,0%		
0,1	2x2	0,51302	126,3%	3,201	66,9%	0,406237	4,78863
	4x4	0,42892	105,6%	4,212	88,0%		
	8x8	0,41505	102,2%	4,688	97,9%		
	16x16	0,41068	101,1%	4,783	99,9%		
0,00001	2x2	0,51262	126,2%	3,201	66,8%	0,406237	4,78863
	4x4	0,42853	105,5%	4,212	87,9%		
	8x8	0,41453	102,0%	4,685	97,8%		
	16x16	0,40989	100,9%	4,778	99,8%		

Tabla 15. Solución al centro de la placa empotrada

Espesor, t	Malla	Con factores				Solución exacta	
		W		Mxx		wc/(qL ⁴ /100D)	Mc/(qL ² /100)
3,5	2x2	0,044963	11,4%	0,000	0,0%	0,3951	2,31
	4x4	0,040386	10,2%	0,176	7,6%		
	8x8	0,039577	10,0%	0,222	9,6%		
	16x16	0,039412	10,0%	0,235	10,2%		
1	2x2	0,14032	93,6%	0,000	0,0%	0,1499	2,31
	4x4	0,14617	97,5%	1,657	71,7%		
	8x8	0,14955	99,8%	2,156	93,3%		
	16x16	0,15022	100,2%	2,278	98,6%		
0,1	2x2	0,11035	87,2%	0,000	0,0%	0,126532	2,2905
	4x4	0,11975	94,6%	1,583	69,1%		
	8x8	0,12507	98,8%	2,121	92,6%		
	16x16	0,12639	99,9%	2,249	98,2%		
0,00001	2x2	0,11035	87,2%	0,000	0,0%	0,126532	2,2905
	4x4	0,11975	94,6%	1,583	69,1%		
	8x8	0,12507	98,8%	2,121	92,6%		
	16x16	0,12639	99,9%	2,249	98,2%		

Tabla 16. Placa soportada en las esquinas

Espesor, t	Malla	Con factores				Solución exacta		
		W		Mxx		wc/(qL ⁴ /100D)	Mc/(qL ² /100)	
Valores centrales								
0,1	2x2	2,7224	96,9%	8,333	75,8%	2,81	11	Marcus
	4x4	2,6531	94,4%	10,767	97,9%			
	8x8	2,5946	97,9%	11,009	101,0%	2,65	10,9	Ballesteros
	16x16	2,5719	97,1%	11,118	102,0%			
Valores al centro de una orilla								
0,1	2x2	2,2323	124,0%	8,333	54,1%	1,8	15,4	Marcus
	4x4	1,9222	106,8%	12,150	78,9%			
	8x8	1,83332	107,8%	13,827	98,8%	1,7	14	Ballesteros
	16x16	1,802	106,0%	14,482	103,4%			

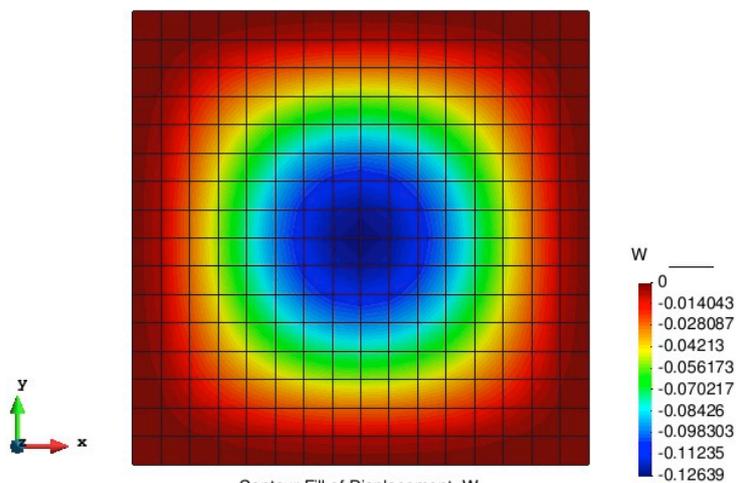


Fig. 26. Placa empotrada (malla 16x16), Desplazamiento Vertical

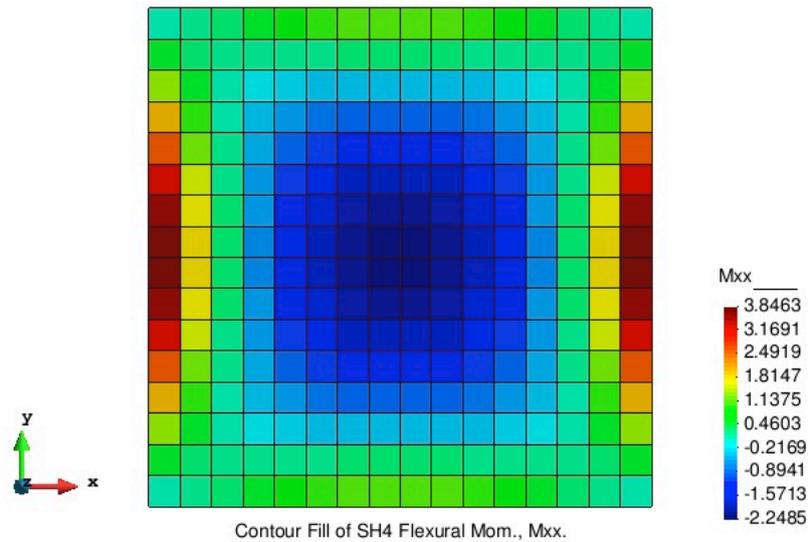


Fig. 27. Placa empotrada (malla 16x16), Momento Mxx

El porcentaje que se muestra en la Tabla 14, Tabla 15 y Tabla 16 representa el cociente entre el valor obtenido con nuestro elemento versus el valor teórico, expresado en porcentaje.

Con un espesor de 3.5 el resultado de desplazamiento de la Tabla 14, Tabla 15 es inferior a 14.2% en desplazamiento y 11.7 en momento, lo que muestra lo ineficiente de modelar este elemento cuando su espesor es mucho mayor en relación a los lados de la placa.

En la Tabla 15, con el espesor de 0.1 en el desplazamiento w , se incrementa proporcionalmente el porcentaje desde 87.2% hasta 99.9%, al refinar la malla, esto se puede apreciar con los espesores de 1 y 0.00001, adicionalmente este comportamiento se repite con la placa simplemente soportada Tabla 14 y con la placa soportada en las esquinas Tabla 16.

En la Tabla 14 si comparamos los resultados de los espesores de 1.0 y 0.1, vemos que en cada malla el resultado del espesor mas pequeño se aproxima mucho más a la solución exacta.

Capítulo 4

4.1 Cascarones como láminas planas [7]

La formulación de los elementos se basa en (Gallegos Sergio, 2008) y se encuentra en el libro Análisis de sólidos y estructural, mediante el método de elementos finitos, capítulo 11, "Cascarones como láminas planas", para el presente documento se presenta un resumen de la formulación de los elementos sólidos.

Se modela el elemento a partir de las ecuaciones de comportamiento estructural de láminas. Además se emplea una simplificación en la representación geométrica, utilizando superficies faceteadas planas para aproximarla. Aunque esto introduce un error de discretización, con superficies faceteadas se puede lograr una buena aproximación a la solución, con la ventaja de que los elementos se forman mediante una superposición de placas visto en el capítulo anterior y membranas planas.

4.1.1 Ecuaciones gobernantes para membranas con rotaciones de taladro

1. Relaciones cinemáticas:

1.1 Deformación

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (82)$$

1.2 Rotación infinitesimal

$$\boldsymbol{\phi}_z = \mathbf{R}\mathbf{u} \quad (83)$$

2. Esfuerzo

$$\boldsymbol{\sigma} = {}^{sim}\boldsymbol{\sigma} + {}^{asim}\boldsymbol{\sigma} \quad (84)$$

$${}^{sim}\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy}]^T$$

$${}^{asim}\boldsymbol{\sigma} = [0 \quad 0 \quad F_\tau]^T$$

3. Equilibrio

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad (85)$$

$$F_\tau = 0 \quad (86)$$

4. Relación constitutiva

$${}^{sim}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u} \quad (87)$$

5. Relación entre componentes

$$F_\tau = \gamma(\mathbf{R}\mathbf{u} - \boldsymbol{\phi}_z) \quad (88)$$

Donde:

\mathbf{u} = vectores de desplazamiento.

$\boldsymbol{\phi}_z$ = rotación.

$\boldsymbol{\varepsilon}$ = deformación.

σ = esfuerzo.

L, R = operadores diferenciales.

b = vector de fuerzas de cuerpo.

F_τ = esfuerzo cortante de taladro.

D = matriz constitutiva.

4.1.2 Forma débil (Hellinger-Reissner)

Encontrar el desplazamiento de u y giro $\phi_z \in \mathcal{U}$, los esfuerzos $^{sim}\sigma \in \mathcal{M}$ y $F_\tau \in \mathcal{M}$, tal que si $\hat{u}, \phi_z \in \mathcal{V}$, $^{sim}\hat{\sigma} \in \mathcal{M}$, $\hat{F}_\tau \in \mathcal{M}$, $\varepsilon = D^{-1}\sigma$ las siguientes ecuaciones se tienen que satisfacer:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (L\hat{u})^T {}^{sim}\sigma d\Omega + \int_{\Omega} {}^{sim}\hat{\sigma}^T (Lu - D^{-1}{}^{sim}\sigma) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \hat{F}_\tau^T (Ru - \phi_z) d\Omega + \int_{\Omega} (R\hat{u} - \hat{\phi}_z - \gamma^{-1}\hat{F}_\tau) F_\tau d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \hat{u}^T b d\Omega - \int_{\Gamma} \hat{u}^T t d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (89)$$

Donde:

\hat{u} = desplazamientos nodales.

$\hat{\phi}_z$ = rotaciones nodales.

γ = constante, toma el papel de un módulo de corte, y se ajusta arbitrariamente.

\mathcal{U} = espacio de las funciones de prueba, que son desplazamientos y giros en el dominio Ω .

\mathcal{V} = define el espacio de las funciones de peso en Ω .

\mathcal{M} = espacio de funciones para los componentes simétrico y asimétricos de los esfuerzos.

4.1.3 Forma matricial

Se proponen los siguientes formatos de interpolación en donde \bar{u} son los desplazamientos nodales, $\bar{\phi}_z$ son las rotaciones nodales $\bar{\beta}$ son coeficientes de esfuerzo y τ_0 es el valor constante del esfuerzo asimétrico en el elemento.

$$u = N_u \bar{u} + N_{u\phi} \bar{\phi}_z \quad (90)$$

$$\Phi_z = N_\phi \bar{\varphi}_z \quad (91)$$

$$sim_\sigma = P \bar{\beta} \quad (92)$$

$$F_\tau = \tau_0 \quad (93)$$

Donde:

\bar{u} = desplazamientos nodales.

$\bar{\varphi}_z$ = rotaciones nodales.

$\bar{\beta}$ = coeficientes de esfuerzo.

τ_0 = valor constante del esfuerzo asimétrico en el elemento.

$$\begin{bmatrix} A & 0 & C_u & C_\phi \\ 0 & -\gamma^{-1}V & C_{\tau u} & C_{\tau\phi} \\ C_u^T & C_{\tau u}^T & 0 & 0 \\ C_\phi^T & C_{\tau\phi}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\beta} \\ \tau_0 \\ \bar{u} \\ \bar{\varphi}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_u \\ f_\phi \end{Bmatrix} \quad (94)$$

$$C_u [9 \times 8] = \int_{\Omega} P^T (LN_u) d\Omega \quad (95)$$

$$C_{\tau u} [1 \times 8] = \int_{\Omega} R N_u d\Omega \quad (96)$$

$$C_\phi [9 \times 4] = \int_{\Omega} P^T LN_{u\phi} d\Omega \quad (97)$$

$$C_{\tau\phi} [1 \times 4] = \int_{\Omega} (R N_{u\phi} - N_\phi) d\Omega \quad (98)$$

$$A [9 \times 9] = - \int_{\Omega} P^T D^{-1} P d\Omega \quad (99)$$

Donde V es el volumen del elemento.

La expresión (94), se puede escribir en forma aún más compacta, empleando la forma estándar para elementos mixtos.

$$\begin{bmatrix} H & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{d} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{f}_d \end{Bmatrix} \quad (100)$$

En donde:

$$H_{[10 \times 10]} = \begin{bmatrix} A_{[9 \times 9]} & 0 \\ 0^T & -\gamma^{-1}V \end{bmatrix} \quad (101)$$

$$G_{[10x12]} = \begin{bmatrix} C_{u[9x8]} & C_{\emptyset[9x4]} \\ C_{\tau u[1x8]} & C_{\tau \emptyset[1x4]} \end{bmatrix} \quad (102)$$

$$\bar{\alpha} = \begin{Bmatrix} \bar{\beta} \\ \tau_0 \end{Bmatrix} \quad (103)$$

$$\bar{d} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{\varphi} \end{Bmatrix} \quad (104)$$

$$\bar{f}_d = \begin{Bmatrix} f_u \\ f_\varphi \end{Bmatrix} \quad (105)$$

Se puede condensar fuera a las variables $\bar{\alpha}$ para terminar con un sistema compacto de ecuaciones cuyas únicas variables son desplazamiento y rotaciones nodales y que, por tanto, se puede combinar con una placa 3.1 para formar cascarón. Las ecuaciones compactas quedarán:

$$\bar{K} \bar{d} = \bar{f}_d \quad (106)$$

Jacobiano:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1 + a_2 \eta) & (b_1 + b_2 \eta) \\ (a_3 + a_2 \xi) & (b_3 + b_2 \xi) \end{bmatrix} \quad (107)$$

$$a_1 = \frac{1}{4}(-\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 - \bar{x}_4) \quad b_1 = \frac{1}{4}(-\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 - \bar{y}_4)$$

$$a_2 = \frac{1}{4}(+\bar{x}_1 - \bar{x}_2 + \bar{x}_3 - \bar{x}_4) \quad b_2 = \frac{1}{4}(+\bar{y}_1 - \bar{y}_2 + \bar{y}_3 - \bar{y}_4)$$

$$a_3 = \frac{1}{4}(-\bar{x}_1 - \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4) \quad b_3 = \frac{1}{4}(-\bar{y}_1 - \bar{y}_2 + \bar{y}_3 + \bar{y}_4)$$

Los giros de taladro se interpolan de forma bilineal:

$$N_{\phi[1x4]} = \begin{bmatrix} N_{\phi 1} & N_{\phi 2} & N_{\phi 3} & N_{\phi 4} \end{bmatrix} \quad (108)$$

$$N_{\phi i} = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad i=1 \dots 4$$

Los desplazamientos en el plano, de forma similar a Placas 3.1.3

$$N_{u[2x8]} = \begin{bmatrix} N_{u1} & 0 & N_{u2} & 0 & N_{u3} & 0 & N_{u4} & 0 \\ 0 & N_{u1} & 0 & N_{u2} & 0 & N_{u3} & 0 & N_{u4} \end{bmatrix} \quad (109)$$

$$N_{ui} = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad i=1 \dots 4$$

$$N_{u\phi[2x4]} = \begin{bmatrix} N_{u\phi1} & N_{u\phi2} & N_{u\phi3} & N_{u\phi4} \\ N_{v\phi1} & N_{v\phi2} & N_{v\phi3} & N_{v\phi4} \end{bmatrix} \quad (110)$$

$$\begin{aligned} N_{u\phi1} &= N_{u\phi}^{41}(\bar{y}_1 - \bar{y}_4) + N_{u\phi}^{12}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) & N_{v\phi1} &= N_{u\phi}^{41}(\bar{x}_4 - \bar{x}_1) + N_{u\phi}^{12}(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \\ N_{u\phi2} &= N_{u\phi}^{12}(\bar{y}_2 - \bar{y}_1) + N_{u\phi}^{23}(\bar{y}_2 - \bar{y}_3) & N_{v\phi2} &= N_{u\phi}^{12}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + N_{u\phi}^{23}(\bar{x}_3 - \bar{x}_2) \\ N_{u\phi3} &= N_{u\phi}^{23}(\bar{y}_3 - \bar{y}_2) + N_{u\phi}^{34}(\bar{y}_3 - \bar{y}_4) & N_{v\phi3} &= N_{u\phi}^{23}(\bar{x}_2 - \bar{x}_3) + N_{u\phi}^{34}(\bar{x}_4 - \bar{x}_3) \\ N_{u\phi4} &= N_{u\phi}^{34}(\bar{y}_4 - \bar{y}_3) + N_{u\phi}^{41}(\bar{y}_4 - \bar{y}_1) & N_{v\phi4} &= N_{u\phi}^{34}(\bar{x}_3 - \bar{x}_4) + N_{u\phi}^{41}(\bar{x}_1 - \bar{x}_4) \end{aligned}$$

$$N_{u\phi}^{12} = \frac{1}{8}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \quad N_{u\phi}^{34} = \frac{1}{8}(1 - \xi^2)(1 + \eta)$$

$$N_{u\phi}^{23} = \frac{1}{8}(1 - \eta^2)(1 + \xi) \quad N_{u\phi}^{41} = \frac{1}{8}(1 - \eta^2)(1 - \xi)$$

4.2 Métodos sobreescritos

4.2.1 Método stiffnessMatrix

Calcular de la matriz de rigidez (111), utilizando la matriz H (101) y G (102)

$$\bar{K}_{[12x12]} = -G^T H^{-1} G \quad (111)$$

Para el calculo de la matriz de rigidez se siguen los siguientes pasos:

- a) Primero se calcula un sistema de referencia local, para este sistema es importante definir un plano sobre el cual proyectar la geometría real que genere el elemento plano equivalente [12]. Los cuatro nodos en el espacio forman un paraboloides hiperbólico Fig. 28, por lo que se define un plano mediante los puntos intermedios de cada lado. Se define el sistema de referencia local en el plano medio y el eje "x" va de la mitad del lado 1-4 a la mitad del lado 2-3. Se transforma las coordenadas al sistema local del elemento.

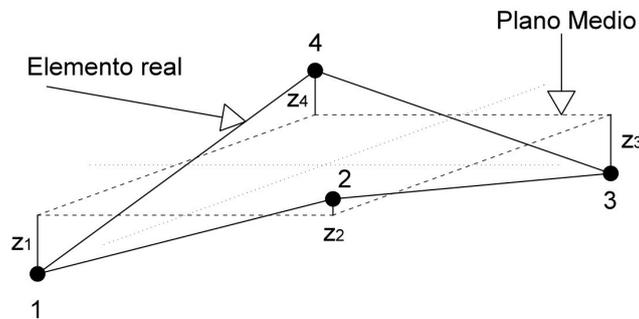


Fig. 28. Plano medio del cascarón y sistema de referencia

- b) Se calcula la matriz G (102):
 - (i) Calcular las constantes del jacobiano (107)

(ii) Calcular de T_σ en el origen del sistema coordenado natural $\xi = 0, \eta = 0$

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} a_1 a_1 & a_3 a_3 & 2a_1 a_3 \\ b_1 b_1 & b_3 b_3 & 2b_1 b_3 \\ a_1 b_1 & a_3 b_3 & a_1 b_3 + b_1 a_3 \end{bmatrix} \quad (112)$$

(iii) Se inicia la Integración reducida de 5 puntos, para evitar el problema de bloqueo de membrana al acoplar el comportamiento de placa y membrana.

(iv) Calcular matriz P, $P = T_\sigma * P_n$, (112), (113)

$$P_{n[3 \times 9]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \eta & 0 & \xi & 0 & \eta^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \xi & 0 & \eta & 0 & \xi^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\eta & -\xi & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (113)$$

(v) Calcular las funciones de forma (109) y sus derivadas

(vi) Calcular las derivadas naturales de $N_{u\phi}$, $N_{v\phi}$ (110)

(vii) Calcular el jacobiano (107), determinante y las derivadas cartesianas de N_u , $N_{u\phi}$, $N_{v\phi}$ (68)

(viii) Evaluar las matrices (95), (96), (97), (98) y los términos ubicarlos en las posiciones correspondientes (102). Se finaliza la integración numérica.

c) Se calcula la matriz H (101):

(i) Calcular matriz constitutiva D:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (114)$$

Donde:

E = módulo de elasticidad

ν = coeficiente de Poisson

γ = constante, toma el papel de un módulo de corte, y se ajusta > 100000

(ii) Calcular las constantes del jacobiano (107)

- (iii) Se inicia la Integración reducida de 5 puntos Fig. 29, para evitar el problema de bloqueo de membrana al acoplar el comportamiento de placa y membrana. Esta integración se ha usado exitosamente en [12], [13] y [14]

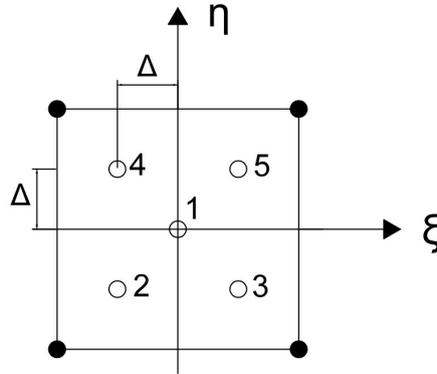


Fig. 29. Posición de puntos de muestreo para la regla de cinco puntos

$$Peso_0 = 0.01 \quad Peso_\Delta = 1 - \frac{w_0}{4} \quad \Delta = \left(\frac{1}{3Peso_\Delta} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (115)$$

- (iv) Calcular de T_σ (113) en el origen del sistema coordenado natural $\xi = 0, \eta = 0$
- (v) Calcular el jacobiano (107), del determinante
- (vi) Calcular matriz A (99)
- (vii) Se ensambla A en la matriz H (101), en cada uno de los puntos de Gauss hasta finalizar la integración numérica.
- d) Calculamos la matriz de rigidez de orden 12x12 en coordenadas locales (111), luego se expande la matriz de rigidez a un orden de 24x24 utilizando la numeración de la Tabla 10 y finalmente se transforma a coordenadas globales.

4.2.2 Método externalLoad

Las fuerzas externas se calculan de forma similar a 3.2.2, aquí se detallan las ecuaciones correspondientes al cascarón.

$$f_u = \int_{\Omega} N_u^T b \, d\Omega + \int_{\Gamma} N_u^T t \, d\Gamma \quad (116)$$

$$f_\phi = \int_{\Omega} N_{u\phi}^T b \, d\Omega + \int_{\Gamma} N_{u\phi}^T t \, d\Gamma \quad (117)$$

$$N_u = \text{Ec. (109)}.$$

$$N_{u\phi} = \text{Ec. (110)}.$$

b = fuerza de cuerpo.

4.2.3 Método updateVariables

Para el cálculo de las deformaciones (118) se usa una regla de 2x2, los desplazamientos nodales son obtenidos por ProfileSolver 1.5.2. Las deformaciones sólo se almacenan en resultados.

$$\varepsilon = B\bar{d} \quad (118)$$

$$\bar{d} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 & \varphi_{z1} & \varphi_{z2} & \varphi_{z3} & \varphi_{z4} \end{bmatrix}$$

La matriz B es la siguiente:

$$B = \begin{bmatrix} B_u & B_\phi \end{bmatrix} \quad (119)$$

$$B_{u[3 \times 8]} = \begin{bmatrix} N_{u1,x} & 0 & N_{u2,x} & 0 & N_{u3,x} & 0 & N_{u4,x} & 0 \\ 0 & N_{u1,y} & 0 & N_{u2,y} & 0 & N_{u3,y} & 0 & N_{u4,y} \\ N_{u1,y} & N_{u1,x} & N_{u2,y} & N_{u2,x} & N_{u3,y} & N_{u3,x} & N_{u4,y} & N_{u4,x} \end{bmatrix}$$

$$B_{\phi [3 \times 4]} = \begin{bmatrix} N_{u\phi 1,x} & N_{u\phi 2,x} & N_{u\phi 3,x} & N_{u\phi 4,x} \\ N_{v\phi 1,y} & N_{v\phi 2,y} & N_{v\phi 3,y} & N_{v\phi 4,y} \\ N_{u\phi 1,y} + N_{v\phi 1,x} & N_{u\phi 2,y} + N_{v\phi 2,x} & N_{u\phi 3,y} + N_{v\phi 3,x} & N_{u\phi 4,y} + N_{v\phi 4,x} \end{bmatrix}$$

El cálculo de las fuerzas internas y de los esfuerzos:

$$\bar{\alpha}_{[10]} = -H_{[10 \times 10]}^{-1} G_{[10 \times 12]} \bar{d}_{[12]} \quad (120)$$

La matriz H y G se calculan como se lo indicó en 4.2.1

Los esfuerzos principales se pueden evaluar con la siguiente expresión (121), para luego calcular $\sigma_{\text{vonMisses}}$, σ_{maxShear} .

$$\sigma = P\bar{\beta} = T_\sigma P_n \bar{\beta} \quad (121)$$

$$T_\sigma = (112), \quad P_n = (113), \quad \bar{\beta} = (103)$$

Las fuerzas resultantes se calculan con:

$$N = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = t \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = t\sigma \quad (122)$$

Las fuerzas internas y los esfuerzos se almacenan en ProblemDescriptor en la historia y en los resultados.

4.2.4 Internal Force

Con los esfuerzos principales calculados y almacenados en 4.2.3, junto con la matriz B (119), se calcula el vector de fuerzas internas (123), la integral se resuelve de forma numérica siguiendo la misma regla de 4.2.3.

$$R = \int_{\Omega} B^T \sigma d\Omega \quad (123)$$

4.3 Validación

4.3.1 Parcela

Propiedades: módulo de elasticidad = 1000, coeficiente de Poisson = 0.15, espesor = 1.0

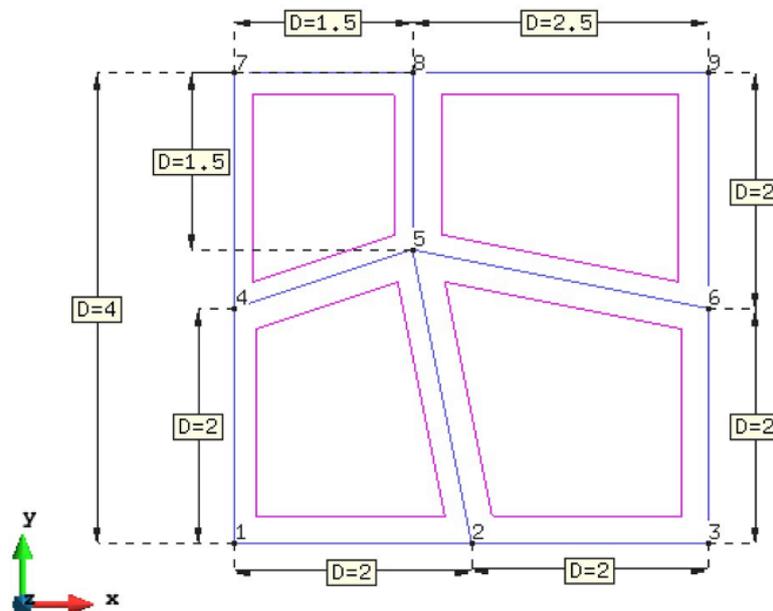


Fig. 30. Parcela de cuadriláteros

4.3.1.1 Desplazamiento vertical de cuerpo rígido

Restricciones sobre los nodos perimetrales: $u = 1, v = 0, \phi = 0$. El resultado exacto es cero deformaciones y esfuerzos en todos los puntos de Gauss

4.3.1.2 Desplazamiento horizontal de cuerpo rígido

Restricciones sobre los nodos perimetrales: $u = 0, v = 1, \phi = 0$. El resultado exacto es cero deformaciones y esfuerzos en todos los puntos de Gauss

4.3.1.3 Rotación de cuerpo rígido

Restricciones sobre los nodos perimetrales: $u = -y, v = x, \phi = 1$. El resultado exacto es cero deformaciones y esfuerzos en todos los puntos de Gauss

4.3.1.4 Deformación constante en x

Restricciones en nodos perimetrales dados por $u = x, v = 0, \phi = 0$. La solución exacta es $\varepsilon_x = 1, \varepsilon_y = 0, \gamma_{xy} = 0$, mientras que los esfuerzos son $N_x = 1098.901123, N_y = 329.670349, N_{xy} = 0$.

4.3.1.5 Deformación constante en y

Restricciones en nodos perimetrales dados por $u = 0, v = y, \phi = 0$. La solución exacta es $\varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = 1, \gamma_{xy} = 0$, mientras que los esfuerzos son $N_x = 329.670349, N_y = 1098.901123, N_{xy} = 0$.

4.3.1.6 Deformación constante en xy

Restricciones en los nodos perimetrales dados por $u = y, v = 0, \phi = 0$. La solución es $\varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = 0, \gamma_{xy} = 1$, mientras que los esfuerzos son $N_x = 0, N_y = 0, N_{xy} = 384.615387$. Otra alternativa para generar los mismos resultados sería $u = 0, v = x, \phi = 0$.

4.3.2 Prueba de la parcela de MacNeal y Harder [9]

La prueba tiene la geometría presentada en Fig. 21, en el capítulo anterior, los nodos exteriores se fijan con las condiciones (124), y en los nodos interiores se compara la respuesta obtenida de los desplazamientos en el sentido U, V Fig. 31, Fig. 32 y el giro Fig. 33 en con el resultado teórico

Tabla 17. Se compara las fuerzas de obtenidas Fig. 35 versus las fuerzas resultantes teóricas (125). Los resultados obtenidos son exactamente los esperados.

$$u = 10^{-3} \left(x + \frac{y}{2} \right), \quad v = 10^{-3} \left(\frac{x}{2} + y \right), \quad \phi_z = 0 \quad (124)$$

$$N_x = N_y = 133.3333 \quad N_{xy} = 40.0 \quad (125)$$

Tabla 17. Coordenadas nodales y resultados

Nodos	X	Y	MacNeal y Harder			Resultados Xplore		
			u	v	ϕ_z Giro	u	v	ϕ_z -Giro
1	0	0	0	0	0	-	-	-
2	0,24	0	0,00024	0,00012	0	-	-	-
3	0,24	0,12	0,0003	0,00024	0	-	-	-
4	0	0,12	0,00006	0,00012	0	-	-	-
5	0,04	0,02	0,00005	0,00004	0	0,00005	0,00004	-2,31E-16
6	0,08	0,08	0,00012	0,00012	0	0,00012	0,00012	-1,93E-16
7	0,18	0,03	0,000195	0,00012	0	0,000195	0,00012	-4,23E-18
8	0,16	0,08	0,0002	0,00016	0	0,0002	0,00016	-4,31E-16

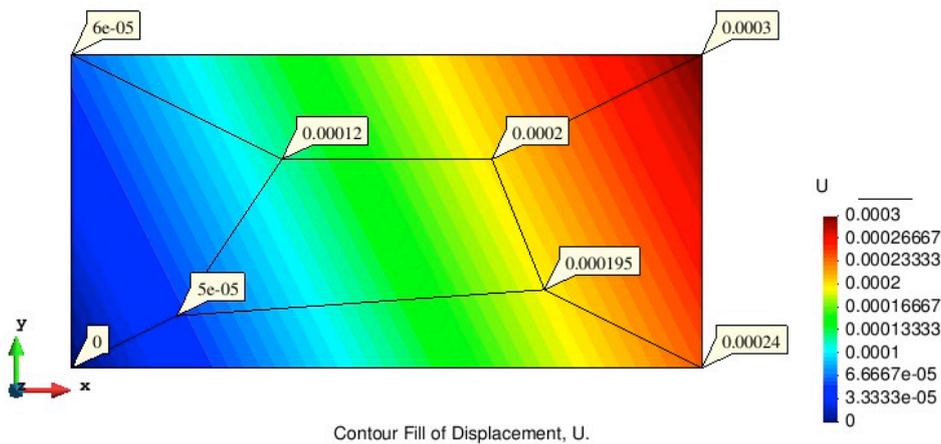


Fig. 31. Parcela MH, cascarón desplazamiento U

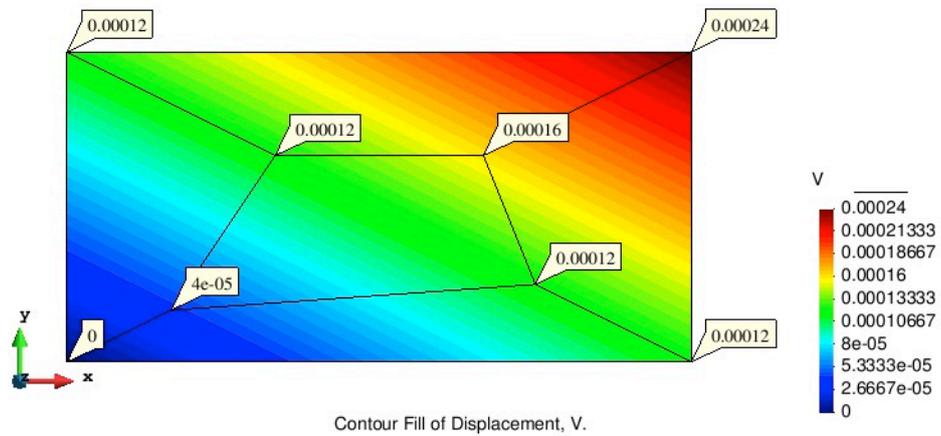


Fig. 32. Prueba parcela MH, cascarón desplazamiento V

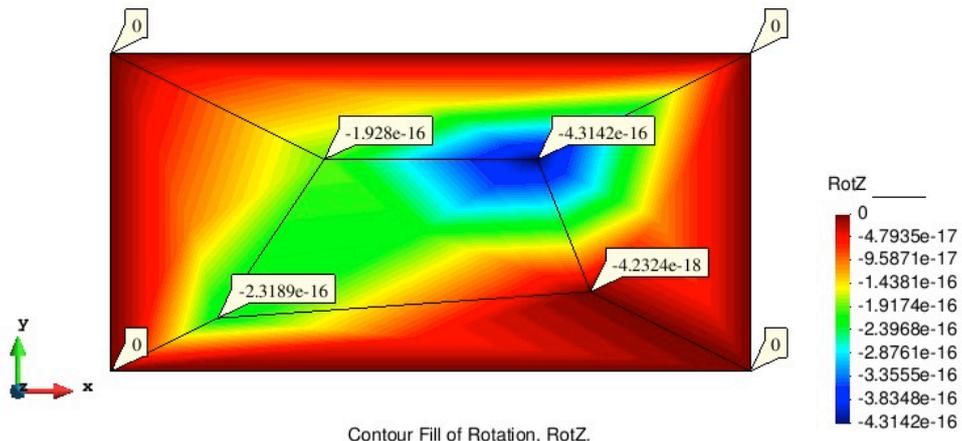


Fig. 33. Prueba parcela MH, cascarón Giro z

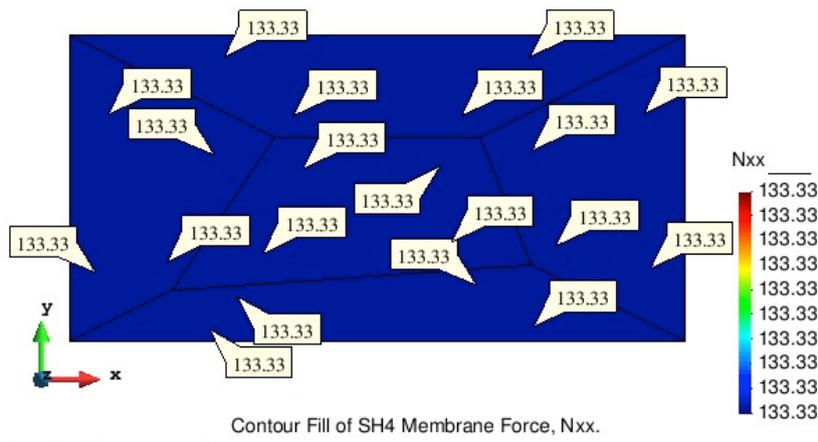


Fig. 34. Prueba parcela, cascarón Fuerza Nxx

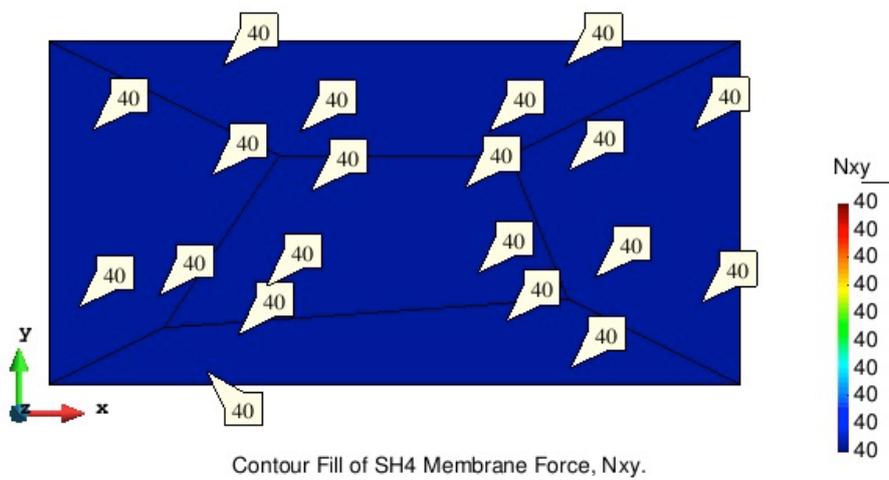


Fig. 35. Prueba MH, cascarón Fuerza Nxy

Capítulo 5

5.1 Conclusiones

A través de la implementación de los elementos a Xplore y sus ejemplos tenemos las siguientes conclusiones:

- El uso de programación orientada en objetos permitió usar Xplore, sin la necesidad de conocer a profundidad su código, esto facilitó la adición de nuevos elementos o nuevas características de una forma mucho más rápida que la programación secuencial.
- El lenguaje utilizado Swift es de fácil comprensión y sencillo de interpretarlo, lo que permitió que en un tiempo reducido se implementen estos tres elementos.
- Los problemas de sólidos se pueden analizar mediante varios tipos de elementos y los resultados varían, dependiendo de la formulación de cada elemento. En el tetraedro la solución de las integrales es exacta, mientras que en hexaedro las integrales se las resuelve de forma numérica, en el ejemplo de la sección 2.4.2, al modelar torsión con un número mínimo de elementos, el hexaedro muestra mejores resultados, alcanza en la relación entre el valor obtenido y el valor teórico un valor de 84% y el tetraedro sólo un 9.2%, así vemos como la geometría del elemento afecta al modelo y la necesidad de usar un mayor número de elementos con el tetraedro para modelar el efecto de torsión.
- El análisis por elementos finitos es un método aproximado por lo que existen muchas respuestas a un determinado problema, al modelar sólidos con tetraedros o hexaedros se van obtener resultados diferentes, pero es importante no distorsionar la malla o hacerlo en el menor número de elementos, porque como se muestra en la sección 2.4.2 y 2.4.3 afecta directamente a la solución.
- Al modelar sólidos es necesario que la malla sea fina, es decir se subdivida en un número mayor de elementos para que la solución se aproxime de mejor manera al resultado, siempre buscando que la relación de aspecto sea cercana a 1.0 y que los elementos no se distorsionen.
- Se probó que el elemento laminar puede ser usado para resolver diversos problemas. En el ejemplo de la sección 3.3.3, con una malla adecuada la relación entre el resultado calculado y el teórico es aproximadamente 100%, pero si se incrementa su espesor siete veces comparado con el límite superior de placas medias (42) los resultados son deficientes.
- Los elementos estructurales de formas regulares e irregulares se pueden analizar y diseñar mediante Xplore, este permite al diseñador conocer el comportamiento de la estructura de forma detallada.

- Mediante pruebas de parcelas en los elementos se comprobó la validez de la implementación de los elementos en Swift.
- Como trabajos futuros se puede continuar con la implementación de análisis plástico, implementación de cargas dinámicas al modelo o adicionar nuevos elementos con una formulación diferente.
- Xplore utilizó GID como pre y post procesador, pero se puede desarrollar esa interfaz directamente, así nuestra aplicación no dependerá de otra adicional.

Bibliografía

- [1] Apple Inc. (2017, Noviembre 2). Apple informa de los resultados del cuarto trimestre de su año fiscal. Recuperado de:
<https://www.apple.com/es/newsroom/2017/11/apple-reports-fourth-quarter-results/>
- [2] XPLORE. Copyright © 2016 Sergio Gallegos. All rights reserved.
- [3] Apple Inc. Swift the powerful programming language that is also easy to learn. Recuperado de: <https://developer.apple.com/swift/>
- [4] International Center for Numerical Methods in Engineering CIMNE. What's GID. Recuperado de: <https://www.gidhome.com/>
- [5] Cachero Castro, C., Ponce de León Amador, P. J., & Saquete Boró, E. (2006). Introducción a la programación orientada a objetos. San Vicente del Raspeig: Digitalia.
- [6] "The Finite Element Method: Linear static and dynamic finite element analysis", Hughes T. J R, Dover Publications, 2000.
- [7] Gallegos S. (2008). Análisis de sólidos y estructural mediante el Método de Elementos Finitos. Editorial LIMUSA. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, México.
- [8] "Finite elements procedures", Bathe K. J., Prentice-Hall 1996.
- [9] "A proposed standard set of problema to test finite element accuracy", MacNeal R. H. y Harder R. L., Finite Elements In Analysis And Design, Vol. 1, 3-20, 1985.
- [10] "Anassumed stess-hybrid 4-node Shell element with drilling degrees of freedom", Aminpour M. A., International 1Journal For Numerical Methods In Engineering, Vol. 35, 997-1013, 1992.
- [11] "Advanced mechanics of materials", 2ª Edición, Cook R. D. Y Young W. C, Prentice-Hall, 1999.
- [12] "Two hybrid stress membrane finite element families with drilling rotations", Geyer S. y Groenwold A. A., International Journal For Numerical Methods In Engineering, Vol 53, 583-601, 2002.
- [13] "Defect-free flat Shell element", Choi C. K., Lee G. H. Y Chung H. J., ECCOMAS 2000, Barcelona, 11-14 deSe[ptiembre, 2000.

- [14] “Reduced modified quadratures for quadratic membrane finite elements”, Long C. S. y Groenwold A. A., International Journal For Numerical Methods In Engineering, Vol. 61, 837-855, 2004.