

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS
SUPERIORES DE MONTERREY

CAMPUS CIUDAD DE MÉXICO



DOCTORADO EN CIENCIAS FINANCIERAS

VALUACIÓN DE ACTIVOS CONTINGENTES
SUJETOS A RIESGO DE CRÉDITO.

TESIS PRESENTADA POR:



JOSÉ VICTOR REYNOSO VENDRELL

ASESOR: DR. FRANCISCO VENEGAS MARTÍNEZ

AGOSTO 2007.

VALUACIÓN DE ACTIVOS CONTINGENTES SUJETOS A RIESGO DE CRÉDITO.

RESUMEN

Esta tesis estudia el riesgo de incumplimiento de las empresas y las causas que lo subyacen, se desarrolla dentro de la corriente de modelos de forma reducida o intensidad y aborda dos problemas de interés para la industria y la academia; el primero es contar con modelos de valuación que incorporen la información macroeconómica y las expectativas del mercado, por lo que se desarrollan fórmulas generales con los diferentes supuestos de recuperación comunes dentro de la literatura de crédito los cuales son posibles de implementar en instrumentos de renta fija corporativa, así como en derivados con riesgo contraparte y derivados crediticios. Para el caso específico de bonos cupón cero y swaps de crédito se obtienen fórmulas cerradas con los supuestos de recuperación a par y recuperación nula, considerando la dinámica de Hull y White (1990) para la estructura de plazos y Vasicek (1977) para la intensidad. El segundo problema de interés es el cálculo de la probabilidad de incumplimiento, por lo que se desarrolla un modelo interno para las empresas que cotizan en la bolsa mexicana de valores (excluyendo a las financieras) que considera los factores macroeconómicos, de mercado y específicos de la empresa, relevantes en el perfil de riesgo de la empresa. Basado en la teoría del APT de Ross (1976) se genera un nuevo enfoque en donde las variables explicativas son las sensibilidades de la empresa a las variables macroeconómicas y de mercado, denotando que un incremento en la sensibilidad de la empresa se traduce en un incremento de la probabilidad de incumplimiento. Asimismo se realiza una investigación con los incumplimientos históricos de las empresas de la BMV para comprobar empíricamente la teoría desarrollada utilizando la regresión de Cox.

ÍNDICE GENERAL

I. INTRODUCCIÓN

1.1 Introducción	1
1.2 Objetivo	2
1.3 Justificación	2
1.4 Contribución	3
1.5 Organización	3

II. INCUMPLIMIENTO Y RELACIÓN ENTRE EMPRESAS

2.1 Introducción	5
2.2 Incumplimiento	5
2.3 Relación y dependencia entre empresas	7
2.4 Conclusión	8

III. VALUACIÓN DE ACTIVOS CONTINGENTES

3.1 Introducción	9
3.2 Tiempo de paro	10
3.3 Proceso de salto	11
3.4 Valuación de activos contingentes	15
3.4.1 Tasa de recuperación nula	20
3.4.2 Recuperación a Par o Valor Nominal	21
3.4.3 Recuperación con activo libre de riesgo	23
3.4.4 Recuperación a Valor de Mercado	25
3.4.5 Pérdida dado el incumplimiento	28
3.4.6 Intensidad Correlacionada con la Cuenta Bancaria	30
3.5 Swaps de Crédito(CDS)	39
3.6 Conclusión	41

IV. RIESGO CRÉITO EN LA BMV

4.1 Introducción	42
4.2 Metodología para el cálculo de la probabilidad de incumplimiento	43
4.3 Estimación de los parámetros	48
4.3.1 Estimación no paramétrica	49

4.3.2 Estimación paramétrica	52
4.4 Cálculo de las probabilidades de incumplimiento de las empresas no financieras de la BMV	57
4.5 Conclusiones	68
V. CONCLUSIÓN	69
BIBLIOGRAFÍA	70
A1. APÉNDICE 1	73
A2. APÉNDICE 2	84

ÍNDICE DE GRÁFICAS

4.1 Índice de quiebra	46
4.2 Estimador de Nelson-Aalen	60
4.3 Compensador	61

ÍNDICE DE CUADROS

3.1 Modelos de recuperación	20
3.2 Tasa de recuperación	28
3.3 Tasa de recuperación por calificación.....	29
3.4 Tasa de recuperación por industria.....	30
4.1 Empresas de que incumplieron	58
4.2 Empresas de que incumplieron	59
4.3 Datos para el cálculo del estimador Nelson-Aalen	60
4.4 Estimador Nelson-Aalen por industria.....	62
4.5 Estimación de parámetros del modelo general	64
4.6 Intervalo de confianza de los parámetros	64
4.7-1 Probabilidades de incumplimiento a un ao	65
4.7-2 Probabilidades de incumplimiento a un ao	66
4.8 Estimación de parámetros por industria.....	67
4.9 Estimación de parámetro base por industria.....	67
A2.1 Probabilidades de incumplimiento a un ao.....	84
A2.1 Probabilidades de incumplimiento a un ao (Continuación)	85
A2.2 Probabilidades de incumplimiento a un ao con parámetros por industria.....	86
A2.2 Probabilidades de incumplimiento a un ao con parámetros por industria (Continuación).....	87

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 Introducción

La administración de riesgo de crédito ha sido de especial interés internacional por muchos años, los bancos centrales de los países más desarrollados del mundo se unieron para estandarizar las prácticas relacionadas con la administración de riesgos llegando a los acuerdos de Basilea en 1988 y acordaron un capital regulatorio de 8% para mitigar la exposición crediticia, desde entonces solamente permitieron la implementación de modelos internos relacionados con el riesgo de mercado. Sin embargo, la nueva propuesta de Basilea II permitirá el uso de calificaciones crediticias internas, el cálculo de probabilidades de incumplimiento, tasas de recuperación, y exposición, por lo que el interés académico y de la industria por la investigación del riesgo de crédito se ha incrementado.

El evento crediticio o de incumplimiento es muy complejo por el gran número de variables que intervienen, como los ciclos económicos, la administración de la empresa, eventos inesperados, relaciones entre empresas, etc. Además también existe una gran incertidumbre de lo que pasará posteriormente al incumplimiento; la liquidación de la empresa, la renegociación de la deuda o simplemente la pérdida total. Aún con toda esta incertidumbre que rodea al riesgo de crédito solamente existen dos grandes corrientes para su modelación, los que se basan en el trabajo de Merton (1974) denominados estructurales, por relacionar el incumplimiento con los activos y la deuda del balance, y los de forma reducida, desarrollados entre varios autores principalmente por Jarrow y Turnbull (1995), Lando (1998), Duffie (1998) y Duffie y Singleton (1999), donde el incumplimiento se modela con el primer salto de un proceso de poisson y la intensidad es función de las variables que afectan la calidad crediticia de la empresa.

Esta tesis se desarrolla dentro de los modelos de forma reducida y se abordan dos problemas de interés para la industria y la academia, el primero es contar con modelos de valuación que incorporen la información de mercado y que se aproximen satisfactoriamente a la realidad, por lo que se desarrollan fórmulas generales con los diferentes supuestos de recuperación comunes dentro de la literatura de crédito y son posibles de implementar en instrumentos de renta fija corporativa como en derivados con riesgo contraparte y derivados crediticios. Para el caso específico de bonos cupón cero y swaps de crédito se obtienen fórmulas cerradas con los supuestos de recuperación a par y recuperación nula considerando la dinámica de Hull y White (1990) para la estructura de plazos y Vasicek (1977) para la intensidad, suponiendo correlación entre éstas.

El segundo problema de interés es el cálculo de la probabilidad de incumplimiento, se desarrolla un modelo interno para las empresas que cotizan en la bolsa mexicana de valores (excluyendo a las financieras) que considera los factores macroeconómicos, de mercado y específicos de la empresa

que afectan al perfil de riesgo de la misma, basados en la teoría del APT de Ross (1976) se genera un nuevo enfoque en donde las variables explicativas son las sensibilidades de la empresa a las variables macroeconómicas, denotando que un incremento en la sensibilidad o riesgo de la empresa se traduce en un incremento de la probabilidad de incumplimiento. Adicionalmente se investigan las probabilidades de incumplimiento históricas de las empresas de la BMV para comprobar la teoría desarrollada con el uso de métodos estadísticos.

La tesis se organiza de la siguiente forma, en el capítulo dos se estudia de manera muy general el fenómeno de incumplimiento, las principales corrientes, causas y las posibles relaciones entre empresas. El capítulo tres comienza con una breve revisión la teoría de probabilidad necesaria para los modelos de valuación, principalmente procesos de salto. Posteriormente basados en Shreve. S., Bélanger A. y Wong D. (2003) se desarrollan las fórmulas generales de valuación considerando los diferentes supuestos de recuperación y finaliza con el desarrollo de fórmulas de valuación para un bono cupón cero con los supuestos de recuperación a par y recuperación nula con intensidades estocásticas considerando que la estructura de plazos tiene la dinámica de Vasicek extendido (Hull y White 1990) y la intensidad la de Vasicek (1977). El capítulo cuatro comienza con el desarrollo e hipótesis de un nuevo modelo para la medición de la probabilidad de incumplimiento, después se estudia la teoría estadística necesario para la estimación de parámetros y finalmente se calculan las probabilidades de incumplimiento de las empresas de la BMV considerando un periodo de 1989 al 2005 con observaciones trimestrales.

1.2 Objetivo

El objetivo de esta tesis es el estudio del riesgo de crédito abarcado dos facetas, la primera es el desarrollo de modelos de valuación de activos contingentes sujetos a riesgo de crédito dentro del enfoque de intensidad o de forma reducida, que se ajusten a la información de mercado y extraigan la probabilidad de incumplimiento implícita, la cual refleja las expectativas de los inversionistas. La segunda es la investigación empírica de la probabilidad de incumplimiento en México y el desarrollo de un modelo para su medición que incorpore las variables que conducen a la probabilidad de incumplimiento, y que sea factible de implementar dentro de una empresa con exposición crediticia como un banco, sociedades de inversión, SIEFORES, etc. Con estas dos facetas se abarca tanto la información que existe en el mercado y la información histórica necesaria para la administración de riesgo de crédito.

1.3 Justificación

La investigación en el área de riesgo de crédito ha tomado gran relevancia en los últimos años por diferentes razones, la primera es la presión regulatoria internacional impuesta por los acuerdos de Basilea II y México como miembro de la OCDE seguirá acatando las normas bancarias internacionales, las cuales pretenden en esta ocasión mejorar las prácticas de administración de riesgo de crédito y operacional. Incentivando a los bancos a desarrollar nuevos modelos para el cálculo de las probabilidades de incumplimiento y así tener una calificación interna complementaria a la de las calificadoras internacionales S&P, Moody's y Fitch.

La segunda es el crecimiento a nivel internacional de productos derivados ligados al riesgo de crédito como credit default swaps, credit link notes, total return swaps, colateral debt obligations, basket swaps, entre otros, y a nivel nacional la nuevas operaciones de reportos con instrumentos corporativos que incrementa la actividad crediticia. Además de la gran exposición de las sociedades de inversión a papeles corporativos. Por lo que contar con modelos que se ajusten a la información de mercado y sirvan para medir los riesgos implícitos en cada instrumento financiero para su posible cobertura es indispensable.

Adicionalmente considerando la estabilidad macroeconómica del país y el decremento en las tasas de interés de bonos gubernamentales, causará el incremento en la inversión de deuda corporativa, es decir, menor aversión al riesgo. Lo cual es benéfico para el desarrollo económico pero aumenta el riesgo crediticio de los inversionistas. Por lo que la investigación en este rubro es de gran relevancia ahora y en los próximos años para la correcta administración de riesgos.

1.4 Contribución

La principal contribución de esta tesis es el desarrollo de un modelo para la medición de las probabilidades de incumplimiento de las empresas que cotizan en la bolsa mexicana de valores (excluyendo a las financieras) que considera los factores macroeconómicos, de mercado y específicos de la empresa que afectan al perfil de riesgo de la misma. Existen modelos similares en investigaciones como la de Jarrow y Chava (2004) y Duffie (2005) donde incluyen directamente las variables explicativas dentro de la intensidad, pero en esta tesis basados en la teoría del APT de Ross (1972) se genera un nuevo enfoque en donde las variables explicativas son las sensibilidades de la empresa a las variables macroeconómicas, denotando que un incremento en la sensibilidad o riesgo de la empresa se traduce en un incremento de la probabilidad de incumplimiento. Adicionalmente se investigan las probabilidades de incumplimiento históricas de las empresas de la BMV para comprobar la teoría desarrollada con el uso de métodos estadísticos.

También se desarrollan las fórmulas de valuación de bonos cupón cero con dos supuestos de recuperación considerando tasas e intensidades estocásticas, con los modelos de Hull y White (1990) y Vasicek (1977) respectivamente, suponiendo correlación entre la estructura de plazos y la intensidad. Con estos modelos se puede valorar cualquier activo contingente sujeto a riesgo de crédito, y al ser fórmulas cerradas son fácilmente de implementar.

1.5 Organización

En el capítulo dos se estudia de manera muy general el fenómeno de incumplimiento, las principales corrientes, causas y las posibles relaciones entre empresas. El capítulo tres comienza con una breve revisión la teoría de probabilidad necesaria para los modelos de valuación, principalmente procesos de salto, posteriormente basados en Shreve. S., Bélanger A. y Wong D. (2003) se desarrollan las fórmulas generales de valuación considerando los diferentes supuestos de recuperación y finaliza con el desarrollo de fórmulas de valuación para un bono cupón cero con los supuestos de recuperación a par y recuperación nula con intensidades estocásticas considerando que la estructura de plazos tiene la dinámica de Vasicek extendido (Hull y White 1990) y la intensidad la de Vasicek (1977).

El capítulo cuatro comienza con el desarrollo e hipótesis de un nuevo modelo para la medición de la probabilidad de incumplimiento, después se estudia la teoría estadística necesario para la estimación de parámetros y finalmente se calculan las probabilidades de incumplimiento de las empresas de la BMV considerando un periodo de 1989 al 2005 con observaciones trimestrales.

CAPÍTULO 2

INCUMPLIMIENTO Y RELACIÓN ENTRE EMPRESAS

2.1 Introducción

Para desarrollar un modelo que incorpore la relación crediticia de la empresa con las variables económicas y con otras empresas, es necesario comprender la dinámica de la empresa con su entorno y las variables que la afectan. Esto nos lleva al análisis de las causas y las relaciones crediticias.

En la primera sección se estudia de manera general qué es el incumplimiento, sus causas y las principales escuelas, en la segunda sección se analizan la relación que hay entre empresas y la última sección concluye.

2.2 Incumplimiento

El **riesgo de crédito** se define comúnmente como la pérdida potencial por el incumplimiento contractual de alguna obligación financiera. En muchos casos la empresa tiene varias deudas, ya sean bonos, préstamos bancarios u operaciones con instrumentos derivados, y puede caer en incumplimiento en una o varias de sus obligaciones. Sin embargo, independientemente del número y tipo de deudas, el evento crediticio se considerará en el momento en que cualquiera de ellas no se cumpla.

La definición anterior considera grandes préstamos de tipo corporativo, pero también existe el riesgo de crédito de una cartera de deudores en donde de antemano se espera que cierto porcentaje de la cartera no pague y el riesgo se encuentra en que los incumplimientos se desvíen significativamente del valor esperado. A lo largo de la tesis se aborda únicamente el de tipo corporativo y el riesgo de crédito se interpretará en ese sentido.

De manera muy general las causas que subyacen al evento crediticio pueden ser de dos tipos, absolutamente inesperadas o *no observables*, por ejemplo, un temblor que destruyera gran parte de los activos, un fraude por parte de los administradores, un ataque terrorista a las instalaciones, una demanda millonaria a la empresa, un error operativo fatal, etc. La segunda causa es la evolución de variables observables en el mercado que afectan los flujos de efectivo de la empresa, por ejemplo, el precio del petróleo, el tipo de cambio, la inflación, el PIB, etc.

En términos matemáticos el tiempo que transcurre para que ocurra un evento crediticio absolutamente inesperado, o no observable es una variable aleatoria no negativa, τ , en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, denominada “tiempo de paro” la cual se definirá formalmente en el siguiente capítulo.

Así mismo el tiempo que transcurre para que ocurra un evento de crédito observable, se le denomina en términos matemáticos “tiempo de paro predecible” y tiene una secuencia de anuncios de tiempos de paro $\tau_1 < \tau_2 < \dots$, con $\tau_n < \tau$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau$.

Cuando hablamos de un evento crediticio observable no quiere decir que sabemos el momento en que se va a pasar, más bien podemos obtener señales que nos alerten si el riesgo de que ocurra el evento es mayor o menor, por ejemplo, sabemos que la empresa quiebra si sus activos bajan de cierto nivel y observamos los estados financieros de manera trimestral, entonces podemos poner ciertas barreras en los activos que nos anuncien que se acerca la quiebra de la empresa, práctica común en los préstamos bancarios en donde se establecen ciertas condiciones sobre las razones financieras y el deterioro de alguna de éstas detona el pago inmediato de la deuda, reduciendo la probabilidad de incumplimiento.

Dentro de las corrientes más reconocidas en la modelación de riesgo de crédito se encuentran dos tipos, los modelos estructurales (primera generación) de Merton (1974) y Black y Scholes (1973), y de forma reducida o intensidad de Jarrow y Turnbull (1995), Lando (1998), Duffie (1998) y Duffie y Singleton (1999) entre otros.

Los modelos estructurales consideran que las causas del incumplimiento son observables y que el mercado tiene la información necesaria para saber el punto en donde las variables observables que subyacen al incumplimiento lo detonan. Específicamente, la causa observable son los activos de la empresa y el punto de quiebra es el valor nominal del total de los pasivos; si los activos son inferiores a los pasivos en la fecha de vencimiento, entonces la empresa incumple con sus obligaciones, lo cual es técnicamente correcto, aunque regularmente el incumplimiento se da mucho antes.

El modelo es altamente intuitivo con una visión global de la empresa, trata de crear un vínculo entre el precio del capital y el precio de la deuda. Sin embargo, la principal crítica fue la imposibilidad de medir el incumplimiento previo al vencimiento y la necesidad de agrupar en una sola fecha todas las deudas de la empresa en la duración de la deuda total.

Posteriormente en la segunda generación de modelos estructurales con la generalización de Black y Cox (1976) permitieron que el punto o barrera del incumplimiento se pueda alcanzar en cualquier momento, no necesariamente en el vencimiento de la deuda, otros modelos con este enfoque son Kim, Ramaswamy y Sundaresan (1993), Hull y White (1995), Longstaff y Schwartz (1995) entre otros.

La otra escuela de modelos de crédito son los modelos de forma reducida o intensidad, estos consideran que el tiempo que tarda una empresa en caer en incumplimiento es estocástico y es comúnmente asociado con el primer salto de un proceso de Poisson y en algunos casos el parámetro λ (la intensidad) a su vez estocástico, este proceso es conocido como proceso de Poisson doble estocástico o proceso de Cox. El considerar al parámetro λ un proceso estocástico tiene como consecuencia que la probabilidad también es estocástica, un supuesto valioso ya que el mercado cambia su percepción de la probabilidad de incumplimiento conforme transcurre la información.

La principal crítica de los modelos de intensidad era la falta de explicación del por qué del incumplimiento o de las causas que subyacen al deterioro crediticio, sin embargo, en los últimos trabajos como el de Jarrow y Yu (2001), Jarrow y Chava (2004), Duffie (2005) y más adelante en esta tesis, la intensidad es función de una serie de variables que explican la probabilidad de incumplimiento, por lo que los modelos de intensidad también revelan los cambios en la calidad crediticia desde la perspectiva macroeconómica y específica de la empresa.

Los modelos estructurales y de forma reducida nacieron de consideraciones y enfoques distintos, sin embargo, no son matemáticamente muy diferentes en términos de la información, Jarrow y Protter (2004) hacen una comparación entre ambos modelos y muestra cómo se puede pasar de uno a otro simplemente homogeneizando la información que cada uno supone.

Ambos modelos nacieron considerando la probabilidad de incumplimiento por emisor, sin embargo, la necesidad del mercado de medir el riesgo de crédito en un portafolio o la valuación de derivados de crédito con más de un emisor, hizo latente la necesidad de investigar nuevos modelos para integrar esta relación.

Para modelar el riesgo compartido entre dos o más empresas de incumplir, es necesario conocer que vínculos existen entre éstas, por ejemplo, si en la industria de la extracción de la plata quiebran dos empresas, nos podemos preguntar lo siguiente, es un problema de la industria en general o es un problema específico de estas dos empresas, en caso de ser específico nos preguntamos, qué compartían las empresas para haber quebrado.

Cuando pensamos en el riesgo de crédito de un portafolio, es necesario conocer las causas que producen los incumplimientos para poder saber la afectación que tienen o tendrán sobre los demás instrumentos financieros que conforman al portafolio. En la siguiente sección se estudian las diferentes relaciones que existen entre empresas, el objetivo es establecer el tipo de relación tienen y las causas que las relacionan.

2.3 Relación y dependencia entre empresas

Las empresas están vinculadas de dos formas, la primera se denomina *relación*, la cual se refiere a que una o más empresas comparten ciertas variables observables, como pasa en la mayoría de las compañías de cierta industria. La segunda es la *dependencia* y se refiere al vínculo comercial que existe entre empresas por ejemplo, una empresa vende gran parte de su producción a otra empresa y esta última quiebra, la *dependencia* de la primera empresa hace que los flujos de efectivo se vean afectados y la probabilidad del incumplimiento también.

La dependencia también se puede ver como una relación, consideremos la siguiente situación, una empresa “X” petrolera se ve muy afectado por un huracán (variable no observable) y suspende el pago de sus obligaciones financieras, otra empresa “Y” que le vendía tubos no recibe su pago por lo que también se ve afectado. Podría decirse que la empresa Y tiene una relación con la producción de petróleo.

La dependencia entre empresas puede crear un efecto dominó de quiebras pasando de un simple evento crediticio a un problema sistémico al “contagiar” otras áreas de la economía. La industria financiera es la más susceptible a este efecto, por ejemplo, la famosa quiebra del fondo de cobertura “Long Term Capital Management” el cual estaba altamente apalancado e ignoró el riesgo de crédito de la deuda rusa en 1998 que posteriormente se declaró en incumplimiento, en ese momento el fondo no tenía suficientes activos para cubrir sus pasivos y la falta de pago ponía en riesgo a otras instituciones financieras, por lo que el gobierno de USA a través de la FED intervino para frenar un efecto generalizado de quiebras en el sector bancario.

El efecto crediticio entre empresas por la dependencia es muy importante en el sector financiero. Sin embargo, para las demás industrias la causa más importante es la relación con las variables

económicas, conocida como correlación cíclica, Saunders A. y Allen L. (2003) encuentran que este efecto es el más importante para explicar los incumplimientos corporativos.

En el capítulo tres se estudiarán modelos de valuación de activos contingentes sujetos a riesgo de crédito donde se intenta capturar la dependencia entre empresas y la relación económica en general, aunque se le da más relevancia a la interacción proveniente de las variables macroeconómicas y de mercado.

2.4 Conclusión

El evento crediticio es un fenómeno complejo de modelar al estar relacionados con muchas circunstancias y variables, su estudio dentro de las finanzas “modernas” data de 1974 con el modelo Merton y aún es utilizado con ciertas modificaciones, todos los modelos con este enfoque se les denominan estructurales y se debe a la relación que hacen de la probabilidad de incumplimiento con la estructura del balance. Otro enfoque es el de los modelos reducidos los cuales representan al evento de incumplimiento como el primer salto de un proceso de Poisson, y la relación con variables macroeconómicas o específicas de la empresa es mediante la intensidad del proceso.

CAPÍTULO 3

VALUACIÓN DE ACTIVOS CONTINGENTES

3.1 Introducción

Muchos activos contingentes de la economía están sujetos a riesgo de crédito, la mayoría de los derivados que operan fuera de mercados estandarizados tienen riesgo de crédito, y los bonos corporativos dan mayor rendimiento por la probabilidad de incumplimiento. La valuación de estos activos debe considerar los estados de la naturaleza en donde el flujo o flujos del activo no son pagados o son parcialmente pagados, así el modelo representará de forma más cercana la realidad.

Los modelos con mayor aceptación en los últimos años son los denominados de intensidad, en donde con el uso de herramientas probabilísticas como el proceso de Poisson y sus generalizaciones, no homogéneo y doble estocástico, intentan reproducir al evento de incumplimiento.

La fórmula general de valuación es similar a la de los activos libres de riesgo, el valor esperado de los flujos descontados, aunque ahora la complejidad aumenta al tener doble incertidumbre, la del flujo final (en el caso de los derivados) y la del incumplimiento.

En el caso de incumplimiento puede haber o no recuperación del flujo concertado, es decir, si una empresa incumple en el pago de su deuda y se va a concurso mercantil, los acreedores recuperarán lo que el juez y las leyes determinen. Las fórmulas de valuación dependen de los diferentes supuestos del flujo post incumplimiento, entre los supuestos de recuperación más representativos dentro de la literatura y que se verán a detalle más adelante son: recuperación nula, recuperación a valor par de Duffie (1998), recuperación con activo libre de riesgo de Jarrow y Turnbull (1995) y recuperación a valor de mercado de Duffie y Singleton (1999); adicionalmente al supuesto de recuperación se incluye un parámetro denominado *tasa de recuperación*, el cual es un porcentaje del activo o monto implícito en el supuesto de recuperación.

La probabilidad de incumplimiento vista a través de la intensidad del proceso de Cox (doble estocástico) depende de la economía y la relación entre empresas; Jarrow y Yu (2001) proponen una intensidad de forma lineal con variables macroeconómicas y específicas de la firma así como incumplimientos de otras empresas. Se verá que la fórmula de valuación con intensidad lineal se vuelve altamente compleja cuando existe correlación entre la estructura de plazos y la intensidad, y aumenta con el número de variables explicativas y empresas que influyan en la intensidad.

Otro enfoque es el de Schönbucher (2003) el cual captura la relación a nivel macroeconómico y de mercado asignando una dinámica a la intensidad, construyendo un modelo doble gaussiano en donde la intensidad y la estructura de plazos tienen la dinámica de Vasicek extendido además de ser correlacionados.

El capítulo se organiza de la siguiente forma, en las primeras dos secciones se considera la teoría probabilística necesaria para los modelos de valuación. En la sección 3.4 se estudian las fórmulas de valuación generales para cualquier activo contingente sujeto a riesgo de crédito y los

diferentes supuestos de recuperación. En la sección 3.5 se discute la pérdida dado el incumplimiento y se estudian los trabajos empíricos más importantes. En la sección 3.6 se tratan las fórmulas de valuación con intensidad estocástica y correlacionada con la estructura de plazos, y en la sección 3.7 se utilizan los resultados anteriores para la valuación de swaps de crédito y finalmente la sección 3.8 concluye.

3.2 Tiempo de Paro

Comenzaremos definiendo de forma matemática el tiempo que tarda el evento de incumplimiento. Consideramos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ equipado con una filtración $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, llamado base estocástica; donde la filtración significa una familia creciente y continua por la derecha de σ -campos de \mathcal{F} . Adicionalmente, suponemos que la base estocástica $\mathbb{B} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ es completa, es decir, \mathcal{F}_t contiene todos los conjuntos de probabilidad nula de \mathcal{F} .

Definimos a una variable aleatoria $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ como el tiempo de paro, si el evento $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ para cada $t, 0 \leq t \leq \infty$. El hecho de que τ se encuentre en la filtración en el momento que ocurre, significa que sabemos que el evento ocurrió.

El conocimiento del evento en el momento en que sucede es indispensable para considerarlo un tiempo de paro, por ejemplo, si una empresa incumple cuando el precio del acero está en promedio por abajo de 57 dólares en un año, entonces, no habría un tiempo de paro a lo largo del año por la necesidad de conocer todos los precios para determinar el promedio. También, el tiempo de paro puede ser conocido mucho antes de que llegue, la restricción es que sea observable antes o en el tiempo t , aunque no existe restricción de cuanto antes lo puedes conocer.

Sea X un proceso estocástico¹ y sea Λ un campo Borel en \mathbb{R} , definimos:

$$T(w) = \inf \{t > 0 : X_t \in v\},$$

entonces T es llamado el tiempo de ruptura (*Hitting time*) de v de X , si X es cdlg (acrónimo francés de *continu droite, limité á gauche*), continuo por la derecha con límites izquierdos y v es un conjunto abierto, entonces el tiempo de ruptura es un tiempo de paro.

Otro concepto que será de utilidad en la modelación del tiempo que tarda en llegar un evento crediticio, es el tiempo de paro predecible. Un tiempo de paro predecible es una secuencia de anuncios de tiempos de paro $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots$, con $\tau_n < \tau$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau$ para toda $w \in \Omega$ con $\{\tau(w) > 0\}$.

En este caso existe varios tiempos de paro que convergen al tiempo de paro definitivo, por lo que se tiene una serie de anuncios previos al evento crediticio, como una reducción en la calificación crediticia o un deterioro de las razones financieras.

El caso contrario a un tiempo de paro predecible es el inaccesible, es un tiempo de paro τ para el cual no existe ningún tiempo de paro predecible que proporcione información adicional.

¹ Definimos un proceso estocástico como una colección de variables aleatorias en una base estocástica y decimos que es adaptada si $(X_t)_{0 \leq t \leq \infty}$ para cada t .

El siguiente paso en la modelación de eventos crediticios es pasar de un punto en el tiempo a una secuencia de puntos en el tiempo, lo cual se modelará como un proceso aditivo unitario o de salto.

3.3 Proceso de salto

Sea $(\tau_n)_{\tau \geq n}$ una secuencia estrictamente creciente de variables aleatorias positivas con $\tau = 0$, la función indicadora $\mathbf{1}_{\{t \geq \tau_n\}}$ se define como:

$$\mathbf{1}_{\{t \geq \tau_n\}} = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq \tau_n(w), \\ 0, & \text{si } t < \tau_n(w). \end{cases} \quad (3.1)$$

El proceso $N = (N_t)_{0 \leq t \leq \infty}$ definido por

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{t \geq \tau_n\}}, \quad (3.2)$$

con valores en \mathbb{N} donde $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, es llamado proceso de salto.

El número de eventos que se presentan entre el tiempo s y t está determinado por:

$$N_t - N_s = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_n \leq t\}}, \quad (3.3)$$

el proceso de salto nos permite llevar la cuenta de una serie de eventos crediticios, como el cambio de calificación o el número de incumplimientos, en ésta tesis corresponde al número de incumplimientos, en el Capítulo 4 se verá que una empresa buscará en una primera estancia negociar con los acreedores la reestructura de la deuda antes que la quiebra, entonces, el incumplimiento no conlleva generalmente a la desaparición de la compañía solamente a la suspensión temporal de pagos y por ende pueden existir una serie de incumplimientos.

Para modelar un portafolio consideramos un proceso de salto multivariado auto excitable,

$$N = (N_1, \dots, N_I), \quad (3.4)$$

constituido por I procesos de salto y denominado auto excitable porque la filtración:

$$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}},$$

de la base estocástica es generada por él mismo, es decir la historia que conocemos es la de los saltos o incumplimientos de las empresas que se están modelando. También suponemos que no existe más de un salto simultáneamente y no hay un infinito de saltos.

El proceso representa a las empresas de la economía y la filtración el conocimiento de los incumplimientos que han ocurrido.

Como no existe más de un incumplimiento o salto al mismo tiempo la suma de todos los procesos, es otro proceso de salto:

$$\tilde{N} = \sum_{i=1}^I N_i \quad (3.5)$$

Cada elemento N_i es continuo por la derecha con límites izquierdos, localmente acotados y no decrecientes, por lo tanto son submartingalas locales y al proceso predecible no decreciente Λ_i con valor de cero en el tiempo cero es denominado *compensador*, y forma una martingala cuando se resta al proceso de salto:

$$M_i = N_i - \Lambda_i \quad (3.6)$$

Cuando el compensador es continuo decimos que la intensidad existe. El proceso $N_i(t)$ tiene intensidad $\lambda_i(t)$ si $\lambda_i(t)$ es predecible y:

$$\Lambda_i(t) = \int_0^t \lambda_i(u) du. \quad (3.7)$$

El compensador es el valor esperado del proceso de salto, por eso cuando se le resta, el resultado es una martingala local y la intensidad es la esperanza del cambio del proceso en un instante:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{E} [N_i(t + \Delta t) - N_i(t) | \mathcal{F}_t] = \lambda_i(t+), \quad (3.8)$$

considerando que solamente puede existir un salto en cada instante, la intensidad se puede ver como la probabilidad de salto en un periodo Δt :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{P} (N_i(t + \Delta t) - N_i(t) = 1 | \mathcal{F}_t) = \lambda_i(t+), \quad (3.9)$$

Existe una relación cercana entre la intensidad y la tasa de mortalidad (hazard rate), la tasa de mortalidad la definimos como la probabilidad de que el proceso salte o la empresa incumpla en el siguiente instante dado que no ha incumplido:

$$\alpha_i(t) = \frac{f_i(t)}{S_i(t)}, \quad (3.10)$$

donde:

$$S_i(t) = \mathbb{P} (\tau_i > t) \quad (3.11)$$

$$S_i(t) = 1 - F_i(t)$$

y

$$F_i(T) = \mathbb{P} (\tau_i \leq T). \quad (3.12)$$

La tasa de mortalidad $\alpha(t)$ tienen un tratamiento similar a la tasa forward (adelantadas) de la estructura de plazos, así como un bono cupón cero se puede expresar como una función de las tasas forward, también la probabilidad de incumplimiento se puede expresar como función de la tasa de mortalidad:

$$S(t) = \exp \int_0^t \alpha(u) du.$$

Definimos el proceso Y_i continuo por la izquierda:

$$Y_i(t) = \mathbf{1}_{\{\tau_i \geq t\}} \quad (3.13)$$

La intensidad es la multiplicación del proceso $Y(t)$ y la tasa de mortalidad:

$$\lambda_i(t) = Y_i(t) \cdot \alpha_i(t) \quad (3.14)$$

Para el caso de las I empresas, suponiendo la misma tasa de mortalidad, la intensidad del proceso \tilde{N} es:

$$\lambda(t) = \tilde{Y}(t) \cdot \alpha(t) \quad (3.15)$$

donde

$$\tilde{Y}(t) = \sum_{i=1}^I Y_i(t) \quad (3.16)$$

Hasta el momento solamente hemos hablado de variables aleatorias como el tiempo de paro y del proceso estocástico que acumula o cuenta el en número de tiempos de paro, pero no se a asumido ninguna distribución del tiempo que existe entre los saltos, a continuación se pasará del proceso de salto al proceso de Poisson, asumiendo una distribución sobre N_t .

Un proceso de salto N es un proceso de Poisson sí:

- (i) para toda $s, t, 0 \leq s < t < \infty$, es independiente de \mathcal{F}_s ;
- (ii) para toda s, t, u, v , con $0 \leq s < t < \infty, 0 \leq u < v < \infty, t - s = v - u$, entonces la distribución de $N_t - N_s$ es la misma que la de $N_v - N_u$.

Las propiedades anteriores se conocen como incrementos independientes e incrementos estacionarios respectivamente.

Sea N un proceso de Poisson entonces:

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \quad (3.17)$$

$$\mathbb{E}[N_t] = \lambda \cdot t \quad (3.18)$$

y

$$\text{Var}[N_t] = \lambda \cdot t. \quad (3.19)$$

El parámetro λ es la intensidad del proceso y se considera constante por el momento; la construcción del proceso de Poisson se puede realizar siguiendo la siguiente lógica: La probabilidad de un salto en un intervalo pequeño Δt es:

$$\mathbb{P}[N(t + \Delta t) - N(t) = 1] = \lambda \cdot \Delta t. \quad (3.20)$$

Asimismo, la probabilidad de que el proceso continúe igual o que no haya saltos es:

$$\mathbb{P}[N(t + \Delta t) - N(t) = 0] = 1 - \lambda \cdot \Delta t, \quad (3.21)$$

y la probabilidad de ningún salto en un intervalo $[T - t]$ constituido por n periodos, $\Delta t = (T - t)/n$ es:

$$\mathbb{P}[N(T) - N(t) = 0] = (1 - \Delta t)^n = \left(1 - \frac{1}{n}(T - t)\lambda\right)^n, \quad (3.22)$$

tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$, la probabilidad anterior converge a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} [N(T) - N(t) = 0] = e^{-(T-t)\lambda}. \quad (3.23)$$

Ahora, si consideramos la probabilidad de un salto en el mismo intervalo $[T - t]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} [N(T) - N(t) = 1] &= n \cdot \Delta t (1 - \Delta t)^{n-1} \\ &= n \cdot \frac{(T-t)}{n} \lambda \left(1 - \frac{(T-t)}{n}\right)^{n-1} \\ &= \frac{(T-t)}{\left(1 - \frac{(T-t)}{n}\right) \lambda} \lambda \left(1 - \frac{(T-t)}{n}\right) \lambda^n \\ &= (T-t)\lambda \cdot e^{-(T-t)\lambda}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Siguiendo la misma metodología pero considerando n saltos llegamos al proceso de Poisson:

$$\mathbb{P} [N(T) - N(t) = n] = \frac{1}{n!} (T-t)^n \lambda^n \cdot e^{-(T-t)\lambda}. \quad (3.25)$$

La modelación del evento de incumplimiento de una emisora usando el proceso de Poisson con intensidad constante, conlleva a que la probabilidad de incumplimiento en cada instante es igual independientemente de las expectativas de los inversionistas y de las condiciones económicas, por lo que no es un supuesto que se adapte a datos empíricos en donde la probabilidad de incumplimiento varía dependiendo de los ciclos económicos.

El siguiente paso en la modelación del evento crediticio es permitir que la intensidad cambie de manera determinística con el tiempo, el proceso de Poisson que tiene dicha característica se le denomina no homogéneo.

Un proceso de Poisson no homogéneo con intensidad $\lambda(t) > 0$ satisface:

$$\mathbb{P} [N(T) - N(t) = n] = \frac{1}{n!} \left(\int_t^T \lambda(s) ds \right) \exp \left(- \int_t^T \lambda(s) ds \right). \quad (3.26)$$

Suponiendo que $N_0 = 0$ entonces, la probabilidad de sobrevivencia hasta el tiempo t es:

$$S(t) = \exp \left(- \int_0^t \lambda(s) ds \right). \quad (3.27)$$

El valor agregado que tenemos al modelar con un proceso de Poisson no homogéneo es la posibilidad de ajustar la intensidad a los datos de mercado, básicamente a las curvas de sobre tasas de bonos corporativos o a las cotizaciones de los swaps de crédito (credit default swaps, CDS), los cuales no son constantes en el tiempo.

Continuando con la generalización del proceso de Poisson, consideramos la intensidad $\lambda(t)$ una variable aleatoria indexada al tiempo, es decir, la intensidad forma a su vez un proceso estocástico, por lo tanto se le denomina proceso doble estocástico o proceso de Cox.

Ahora tenemos otro proceso estocástico dentro del proceso de Poisson original, por lo que es necesario aumentar el espacio de probabilidad y su filtración. El vector $X(t)$ denota las variables

estocásticas de la economía, variables macroeconómicas como el tipo de cambio y la tasa corta, además de específicas de la empresa como razones financieras o elementos del balance y variables de mercado como el precio de la acción, su volatilidad, etc.

La información generada por las variables de la economía se encuentra en la filtración de $X(t)$ y se denota por $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$, la información de los incumplimientos o saltos de los proceso de las empresas es $\mathcal{F}_t^N = \sigma(N_s, 0 \leq s \leq t)$ y la filtración del proceso de Poisson doble estocástico es:

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X \vee \mathcal{F}_t^N, \quad (3.28)$$

suponemos que el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es lo suficientemente extenso para soportar a las variables $X(t)$ y $N(t)$.

Se considerará la definición de Schönbucher (2003) del proceso de Cox:

Un proceso de salto $N(t)$ con intensidad $\lambda(t)$ es un proceso de Cox sí, condicional a la información de la economía \mathcal{F}^X , el proceso $N(t)$ es un proceso de Poisson no homogéneo.

El proceso de Cox se convierte en un proceso de Poisson no homogéneo si la intensidad deja de ser una variable aleatoria, al condicionar suponemos que sabemos la información necesaria para que la intensidad sea determinística y posteriormente calculamos la esperanza de las posibles trayectorias de la intensidad.

La probabilidad del primer salto en el proceso de Cox posterior al tiempo t es:

$$\mathbb{P}(\tau > t) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^t \lambda(s) ds \right) \right], \quad (3.29)$$

y cuando conocemos la trayectoria completa de la intensidad, el proceso se convierte en un Poisson no homogéneo con la probabilidad del primer salto:

$$\mathbb{P}(\tau > t | \mathcal{F}_t^X) = \exp \left(- \int_0^t \lambda(s) ds \right). \quad (3.30)$$

Ahora contamos con la generalización suficiente para estudiar y desarrollar los modelos de valuación de instrumentos financieros con riesgo de crédito y portafolios de los mismos.

3.4 Valuación de Activos Contingentes

La valuación de activos contingentes sujetos a riesgo de crédito se puede englobar en varios elementos, el primero es la función de pago o los flujos futuros, el segundo es el activo de la economía utilizado como numeraria, el tercero es el riesgo de incumplimiento contractual y el cuarto es la recuperación post incumplimiento del valor del activo contingente, considerando estos cuatro elementos se puede valorar cualquier activo. A continuación se muestra la forma general de valuación de activos contingentes sujetos a riesgo de crédito basado en el trabajo de Shreve, Bélanger y Wong (2003).

La numeraria es la cuenta bancaria (money market account) y suponemos una medida martingala \mathbb{P} en el sentido de Harrison y Kreps (1979), donde el valor de todos los activos de la economía descontados con la numeraria son martingalas bajo \mathbb{P} .

La cuenta bancaria y el precio de un bono cupón cero son:

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right), \quad (3.31)$$

$$P(t, T) = \mathbb{E}\left(\frac{B(t)}{B(T)} \mid \mathcal{F}_t\right) \quad (3.32)$$

la expresión (3.31) es el valor de 1 unidad monetaria que genera intereses continuos a la tasa spot r_s desde el tiempo cero al tiempo t , la expresión (3.32) es el precio en el tiempo t de un bono cupón cero que paga 1 unidad monetaria en el tiempo T , y los dos activos son libres de riesgo² y están valuados en el tiempo t .

El precio del activo contingente está determinado por el valor esperado de los flujos futuros descontados con la cuenta bancaria y, en caso de incumplimiento, el acreedor recupera en ese mismo instante una fracción del valor del activo contingente o de su inversión original, representada por el proceso de recuperación Z_t , $0 \leq t \leq T$ y lo suponemos $\{\mathcal{F}_t\}$ -predecible, el valor del activo contingente sujeto a riesgo de crédito está determinado por:

$$V(t, T) = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^K \frac{B(t)}{B(t_i)} f(t_i) (1 - N(t_i)) + \int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} Z(u) dN(u) \mid \mathcal{F}_t\right], \quad (3.33)$$

donde

$N(t) = 1_{\{\tau \leq t\}}$: es un proceso de Cox que representa el primer incumplimiento de una empresa.

$f(t)$: es el flujo que se paga en el tiempo t , el cual puede ser determinístico o estocástico.

K : Es el numero de flujos del activo.

El precio del activo contingente expresado de la ecuación (3.33) podría ser un bono o un derivado, si fuera un bono fijo o cupón cero los flujos son determinísticos (regularmente), si es flotante los flujos dependerán de la esperanza del índice al cual están sujetos y si fuera un derivado la función de pago estaría representada por $f(t)$. Suponiendo que el flujo o función de pago es continúa, la fórmula (3.33) se puede expresar de la siguiente forma:

$$V(t, T) = \mathbb{E}\left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} (1 - N(u)) df(u) + \int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} Z(u) dN(u) \mid \mathcal{F}_t\right], \quad (3.34)$$

La fórmula (3.33) ó (3.34) pueden ser desglosadas en tres partes importantes para su interpretación:

Componente libre de riesgo (CLR):

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} df(u) \mid \mathcal{F}_t\right], \quad (3.35)$$

² Libre de riesgo se entiende como la no exposición al riesgo de incumplimiento de los flujos futuros, más no significa el conocimiento del valor desde el tiempo cero.

Flujo sujeto a riesgo (FSR):

$$\mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} N(u) df(u) | \mathcal{F}_t \right], \quad (3.36)$$

Recuperación (R):

$$\mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} Z(u) dN(u) | \mathcal{F}_t \right], \quad (3.37)$$

y el activo contingente sujeto a riesgo de crédito es:

$$V(t, T) = CLR - FSR + R$$

El proceso de salto dentro de FSR y R están definidos dentro de una base estocástica $B = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ donde la filtración $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ esta compuesta de dos filtraciones, la generada por el proceso de salto y por las variables de la economía, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X \vee \mathcal{F}_t^N$.

Para cambiar el salto de Poisson por su intensidad dentro de la esperanza de (3.36) y (3.37) es necesario introducir la siguiente filtración:

$$\vartheta_t = \mathcal{F}_T^X \vee \mathcal{F}_t^N,$$

La filtración ϑ_t supone el conocimiento de todas las variables de la economía hasta el tiempo T , la fecha en que el activo contingente finaliza, también incluye la información del proceso de salto hasta el tiempo t , la fecha de valuación, recordando que el proceso de Cox podría tener correlación con las variables económicas incluyendo la numeraria, entonces condicionando la valuación con la nueva filtración podemos generar independencia entre ellos.

Para valuar al activo contingente en cualquier momento t , ya sea el tiempo actual o futuro, es necesario condicionar a la sobrevivencia o no incumplimiento previo, ya que posteriormente al evento de crédito el instrumento se considera inexistente o valor cero, por lo tanto CLR , FSR y R se pueden expresar:

$$\overline{CLR} = (1 - N(t)) \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} df(u) | \mathcal{F}_t \right], \quad (3.38)$$

$$\overline{FSR} = (1 - N(t)) \left\{ CLR - \frac{1}{S(t)} \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} S(u) df(u) | \mathcal{F}_t \right] \right\}, \quad (3.39)$$

$$\overline{R} = -\frac{(1 - N(t))}{S(t)} \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} Z(u) dS(u) | \mathcal{F}_t \right]. \quad (3.40)$$

El precio de un activo contingente sujeto a riesgo de crédito, condicionado al no incumplimiento previo a la fecha t , es la suma de los componentes:

$$\overline{V}(t, T) = \overline{CLR} - \overline{FSR} + \overline{R}, \quad (3.41)$$

sustituyendo (3.38), (3.39) y (3.40) tenemos:

$$\overline{V}(t, T) = \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \left\{ \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} S(u) df(u) | \mathcal{F}_t \right] - \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} Z(u) dS(u) | \mathcal{F}_t \right] \right\}, \quad (3.42)$$

Demostración

El componente *CLR* sale directo, simplemente se indica el valor de cero si ocurrió el incumplimiento antes del tiempo t .

Para el flujo sujeto a riesgo (*FRS*) tenemos; por el teorema de esperanzas iteradas:

$$\mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} N(u) df(u) | \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} N(u) df(u) | \vartheta_t \right] | \mathcal{F}_t \right]$$

bajo la esperanza condicional de ϑ_t la cuenta bancaria y el proceso de pago son conocidos, por lo tanto:

$$\mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} N(u) df(u) | \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} \mathbb{E} [N(u) | \vartheta_t] df(u) | \mathcal{F}_t \right] \quad (3.43)$$

y la esperanza del proceso de salto es:

$$\mathbb{E} [N(u) | \vartheta_t] = 1 \cdot \mathbb{P} (N(u) = 1 | \vartheta_t) + 0 \cdot \mathbb{P} (N(u) = 0 | \vartheta_t)$$

Sabemos en el tiempo t sí el proceso ya salto, en dado caso, el activo y la esperanza vale cero, por lo que solamente es de interés el caso en donde no ha saltado:

$$\mathbb{E} [N(u) | N(t) = 0] = 1 \cdot \mathbb{P} (N(u) = 1 | N(t) = 0) + 0 \cdot \mathbb{P} (N(u) = 0 | N(t) = 0)$$

$$\mathbb{E} [N(u) | N(t) = 0] = \frac{\mathbb{P} (N(u) = 1, N(t) = 0)}{\mathbb{P} (N(t) = 0)}$$

$$\mathbb{E} [N(u) | N(t) = 0] = \frac{S(t) - S(u)}{S(t)}$$

Incorporamos el valor de la esperanza anterior en (3.43):

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} N(u) df(u) | \mathcal{F}_t \right] &= (1 - N(t)) \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} \frac{S(t) - S(u)}{S(t)} df(u) | \mathcal{F}_t \right] \\ &= (1 - N(t)) \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} df(u) - \frac{1}{S(t)} \int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} S(u) df(u) | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \left\{ CLR - \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} S(u) df(u) | \mathcal{F}_t \right] \right\} \end{aligned}$$

En el caso del componente de recuperación tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} Z(u) dN(u) | \mathcal{F}_t \right] &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} Z(u) dN(u) | \vartheta_t \right] | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} Z(u) d(M(u) + \Lambda(u)) | \vartheta_t \right] | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} Z(u) dM(u) | \vartheta_t \right] \right] \\ &+ \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} Z(u) d\Lambda(u) | \vartheta_t \right] | \mathcal{F}_t \right], \end{aligned}$$

la esperanza del diferencial de una martingala es cero por definición y con (3.7) y (3.15) tenemos:

$$\mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} Z(u) dN(u) | \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} Z(u) Y(u) \frac{dS(u)}{S(u-)} | \vartheta_t \right] | \mathcal{F}_t \right],$$

el proceso $Y(u) = 1 - N(u-)$, por lo que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} Z(u) dN(u) | \mathcal{F}_t \right] &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} Z(u) (1 - N(u-)) \frac{dS(u)}{S(u-)} | \vartheta_t \right] | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[- \int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} Z(u) \mathbb{E} [1 - N(u-) | \vartheta_t] \frac{dS(u)}{S(u-)} | \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

Condicionando la esperanza interna al no incumplimiento previo a t :

$$\mathbb{E} [1 - N(u-) | N(t) = 0] = \frac{S(u-)}{S(t)}$$

sustituyendo la ecuación anterior en (3.41) tenemos:

$$\bar{R} = - \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} Z(u) dS(u) | \mathcal{F}_t \right].$$

La ecuación (3.34) es la fórmula general para la valuación de un activo contingentes con riesgo de crédito y (3.42) es condicional a haber sobrevivido hasta el tiempo t . Ahora continuaremos con la modelación de la recuperación, $Z(u)$.

Cuando ocurre un incumplimiento existen dos posibilidades, entrar a un juicio mercantil en donde un juez de forma ordenada va liquidando a los acreedores, en relación a la prioridad legal con los recursos disponibles de la compañía, y la negociación entre la empresa y los acreedores, en donde regularmente se reestructura la deuda de tal forma que la compañía pueda seguir operando y se remplazan los bonos por otros con mayor plazo y rendimiento.

La incertidumbre que existe en el evento de incumplimiento es muy grande, la cantidad, el tiempo y la forma de la recuperación pueden variar muchísimo. Sin embargo, varios intentos para modelarla han sido planteados, el método es igual entre las propuestas, primero consideran un activo de referencia y a éste le aplican una *tasa de recuperación*, δ , el siguiente cuadro muestra los supuestos de recuperación que se han estudiado:

Cuadro 3.1 Modelos de recuperación.

Autor	Nombre del modelo	Activo	Tasa de recuperación
-	Recuperación Nula.	Ninguno	0
Duffie(1988)	Recuperación a valor par.	Valor nominal del activo	$\delta \in [0, 1]$
Jarrow, Turnbull (1995)	Recuperación con activo libre de riesgo (recovery rate).	Activo libre de riesgo idéntico al que incumplió.	$\delta \in [0, 1]$
Duffie, Singleton (1999)	Recuperación a mercado.	El mismo activo contingente un instante previo al incumplimiento.	$\delta \in [0, 1]$

Las fórmulas de valuación de los activos contingentes se verán modificadas en relación al supuesto de recuperación, a continuación se verá cada uno de los casos del Cuadro 3.1.

3.4.1 Tasa de recuperación nula

La recuperar cero de la inversión original o valor nominal del activo es la menos frecuente, pero la más sencilla de modelar y una referencia de los límites del precio, ya que es el límite inferior. Las fórmulas generales (3.34) y (3.42) bajo el supuesto de recuperación cero son:

$$V(t, T) = \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} (1 - N(u)) df(u) | \mathcal{F}_t \right], \quad (3.44)$$

$$\overline{V(t, T)} = \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} S(u) df(u) | \mathcal{F}_t \right], \quad (3.45)$$

La valuación de un bono cupón cero que paga 1 unidad en el tiempo T es:

$$V^{Cero}(t, T) = \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} (1 - N(T)) | \mathcal{F}_t \right], \quad (3.46)$$

y

$$\overline{V^{Cero}(t, T)} = \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \mathbb{E} \left[\frac{B(t)}{B(T)} S(T) | \mathcal{F}_t \right], \quad (3.47)$$

el producto de la cuenta bancaria y el proceso de salto no son independientes por lo que no se puede hacer el producto de las esperanzas y la existencia de una fórmula cerrada dependerá de la intensidad. Sin embargo, usando la técnica de cambio de numeraria del *Apéndice 1* podemos cambiar del mundo neutral al riesgo a la medida T -Forward quedando los precios de la siguiente forma:

$$V(t, T) = \mathbb{P}(t, T) \mathbb{E}^T [(1 - N(T)) | \mathcal{F}_t] \quad (3.48)$$

y

$$\overline{V^{Cero}(t, T)} = (1 - N(t)) \mathbb{P}(t, T) \mathbb{E}^T \left[\frac{S(T)}{S(t)} | \mathcal{F}_t \right]. \quad (3.49)$$

Con el cambio de numeraria el problema se reduce a resolver la esperanza de la probabilidad de incumplimiento, que dependerá de la forma de la intensidad.

3.4.2 Recuperación a Par o Valor Nominal

La recuperación a par se refiere a un porcentaje del valor nominal del instrumento financiero que se paga en el momento del incumplimiento. Este caso es importante porque es la recuperación que suponen la mayoría de los *credit default swaps (CDS)*, uno de los derivados de crédito más comunes y con mayor volumen de operación. Aunque existen muchos tipos de *CDS* el estándar funciona como un seguro, el que compra el *CDS* paga una prima cada determinado tiempo y en caso de que el activo al cual está referenciado incumpliera con alguno de sus pagos, el vendedor del *CDS* paga la cantidad pactada contractualmente.

La fórmula de valuación bajo es supuesto de recuperación a par es:

$$V(t, T) = \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} (1 - N(u)) df(u) + \int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} \delta dN(u) | \mathcal{F}_t \right], \quad (3.50)$$

y

$$\overline{V(t, T)} = \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \left\{ \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} S(u) df(u) | \mathcal{F}_t \right] - \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} \delta dS(u) | \mathcal{F}_t \right] \right\}. \quad (3.51)$$

Si el activo que se estuviera valuando fuera un bono fijo corporativo, la pérdida financiera por el incumplimiento de alguno de los pagos sería de dos fuentes, la pérdida de cierta parte del valor nominal y del valor presente de los intereses a los cuales ya no hubo acceso, aún en el caso en donde se pagará la totalidad del valor nominal la pérdida podría darse por la reinversión a las tasas actuales, este último problema correspondiente a riesgo de mercado pero detonado por riesgo de crédito revela la intersección que existe entre las áreas de estudio. El problema conocido como de prepago en la valuación de hipotecas o activos financieros respaldados con hipotecas es el mismo, por lo que el tratamiento del problema se puede hacer con las fórmulas anteriores.

Para la valuación de un *CDS* basta con calcular la esperanza del lado derecho de las ecuaciones (3.50) y (3.51):

$$CDS = \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} \delta dN(u) | \mathcal{F}_t \right]. \quad (3.52)$$

La ecuación anterior es el valor presente del pago en caso de incumplimiento, por lo que el tenedor del *CDS* pagará en los términos contractuales que se establezcan, una prima del tal forma que el swap tenga el valor de cero al momento del contrato:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{K(T)} \frac{B(t)}{B(t_i)} (1 - N(t_{i-1})) \text{prima}^{CDS} | \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} \delta dN(u) | \mathcal{F}_t \right], \quad (3.53)$$

donde

$$\text{prima}^{CDS} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} \delta dN(u) | \mathcal{F}_t \right]}{\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{K(T)} \frac{B(t)}{B(t_i)} (1 - N(t_{i-1})) | \mathcal{F}_t \right]}. \quad (3.54)$$

El proceso de salto de la pata larga³ esta rezagado un tiempo debido a que el pago de la prima se efectúa aún en el periodo en donde la empresa incumplió. Ahora, si solamente se pagará la parte proporcional de la prima del periodo de incumplimiento, la ecuación (3.54) se modifica un poco:

$$\text{prima}^{CDS} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} \delta dN(u) | \mathcal{F}_t \right]}{\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{K(T)} \left(\frac{B(t)}{B(t_i)} (1 - N(t_i)) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{B(t)}{B(u)} dN(u) \right) | \mathcal{F}_t \right]}, \quad (3.55)$$

Cuando existen precios de mercado o cotizaciones de los *CDS* las probabilidades de incumplimiento se pueden calibrar con la fórmula (3.51):

$$\text{prima}(t, T)^{CDS} = \frac{-\mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} \delta dS(u) | \mathcal{F}_t \right]}{\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{K(T)} \frac{B(t)}{B(t_i)} S(t_{i-1}) | \mathcal{F}_t \right]}. \quad (3.56)$$

En la ecuación anterior podríamos suponer que la intensidad es constante entre cotizaciones de *CDS* y con un método numérico encontrar la intensidad que satisface la igualdad, una vez obtenida se hace lo mismo con otras cotizaciones a mayor plazo y así se obtiene una curva de intensidades de mercado, en caso de que el mercado fuera lo suficientemente líquido las probabilidades obtenidas serían las expectativas del mercado, información muy valiosa para la medición del riesgo de crédito de la empresa subyacente. Desafortunadamente para bonos corporativos aún no existe un mercado profundo, solamente un porcentaje muy pequeño en relación a los emisores de deuda corporativa tienen *CDS* que sean líquidos.

³ La parte que compra la protección del CDS se considera que está largo y la que vende corto, y en la valuación del swap a cada parte se le denomina coloquialmente pata.

3.4.3 Recuperación con activo libre de riesgo

El modelo de recuperación con un activo libre de riesgo supone que en caso de incumplimiento, el valor de recuperación es un porcentaje $\delta \in [0, 1]$ de un activo financiero libre de riesgo con las mismas características que el instrumento en incumplimiento.

La fórmula (3.35) representa al activo libre de riesgo, por lo que el proceso de recuperación es un porcentaje de éste. El valor de un activo contingente es:

$$V(t, T) = \mathbb{E} \left[\delta \int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} df(u) - (1 - \delta) \int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} N(u) df(u) | \mathcal{F}_t \right], \quad (3.57)$$

$$V(t, T) = (1 - \delta \cdot N(t)) CLR - (1 - \delta)FSR.$$

$$\overline{V(t, T)} = (1 - N(t)) \left\{ \delta \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} df(u) | \mathcal{F}_t \right] - \frac{(1 - \delta)}{S(t)} \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} S(u) df(u) | \mathcal{F}_t \right] \right\}, \quad (3.58)$$

$$\overline{V(t, T)} = \delta \overline{CLR} - (1 - \delta) \overline{FSR}$$

Demstración

El instrumento libre de riesgo es (3.35), el cual se sustituye en la fórmula general (3.34) por $Z(u)$ y tenemos:

$$\begin{aligned} V(t, T) &= \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} (1 - N(u)) df(u) + \int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} \delta \mathbb{E} \left[\int_u^T \frac{B(u)}{B(s)} df(s) | \mathcal{F}_u \right] dN(u) | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} (1 - N(u)) df(u) + \int_t^T \delta \cdot \mathbb{E} \left[\int_u^T \frac{B(t)}{B(s)} df(s) | \mathcal{F}_u \right] dN(u) | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} (1 - N(u)) df(u) + \int_t^T \delta \cdot \int_u^T \frac{B(t)}{B(s)} df(s) \cdot dN(u) | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} (1 - N(u)) df(u) + \int_t^T \delta \cdot \int_t^s \frac{B(t)}{B(s)} dN(u) \cdot df(s) | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} (1 - N(u)) df(u) + \int_t^T \delta \cdot \frac{B(t)}{B(s)} (N(s) - N(t)) \cdot df(s) | \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

Finalmente llegamos a la ecuación (3.57):

$$V(t, T) = \mathbb{E} \left[\delta \int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} df(u) - (1 - \delta) \int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} N(u) df(u) | \mathcal{F}_t \right],$$

$$V(t, T) = (1 - \delta \cdot N(t)) CLR - (1 - \delta)FSR.$$

Sí condicionamos la ecuación (3.51) al no incumplimiento previo a t , tenemos:

$$\begin{aligned}
\overline{V(t, T)} &= \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \left\{ \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} S(u) df(u) | \mathcal{F}_t \right] \right. \\
&\quad \left. - \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} \delta \cdot \mathbb{E} \left[\int_u^T \frac{B(u)}{B(s)} df(s) | \mathcal{F}_u \right] dS(u) | \mathcal{F}_t \right] \right\} \\
&= \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \left\{ \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} S(u) df(u) | \mathcal{F}_t \right] \right. \\
&\quad \left. - \mathbb{E} \left[\int_t^T \delta \cdot \mathbb{E} \left[\int_u^T \frac{B(t)}{B(s)} df(s) | \mathcal{F}_u \right] dS(u) | \mathcal{F}_t \right] \right\} \\
&= \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \left\{ \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} S(u) df(u) | \mathcal{F}_t \right] \right. \\
&\quad \left. - \mathbb{E} \left[\int_t^T \delta \cdot \int_u^T \frac{B(t)}{B(s)} df(s) \cdot dS(u) | \mathcal{F}_t \right] \right\} \\
&= \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \left\{ \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} S(u) df(u) | \mathcal{F}_t \right] \right. \\
&\quad \left. - \mathbb{E} \left[\int_t^T \delta \cdot \int_t^s \frac{B(t)}{B(s)} dS(u) \cdot df(s) | \mathcal{F}_t \right] \right\} \\
&= \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \left\{ \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} S(u) df(u) | \mathcal{F}_t \right] \right. \\
&\quad \left. - \mathbb{E} \left[\int_t^T \delta \cdot \frac{B(t)}{B(s)} (S(s) - S(t)) \cdot df(s) | \mathcal{F}_t \right] \right\}
\end{aligned}$$

Finalmente llegamos a

$$\overline{V(t, T)} = (1 - N(t)) \left\{ \delta \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} df(u) | \mathcal{F}_t \right] - \frac{(1 - \delta)}{S(t)} \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} S(u) df(u) | \mathcal{F}_t \right] \right\},$$

$$\overline{V(t, T)} = \delta \overline{CLR} - (1 - \delta) \overline{FSR}$$

Cuando tenemos el supuesto de recuperación con un activo libre de riesgo, el precio del instrumento con riesgo de crédito es la ponderación entre el componente libre de riesgo y el flujo sujeto a riesgo.

3.4.4 Recuperación a Valor de Mercado

La recuperación a valor de mercado se refiere a que, en caso de incumplimiento, el acreedor recibe un porcentaje $\delta \in [0, 1]$ del valor del instrumento justo antes del incumplimiento.

Este supuesto tiene un problema circular, la recuperación depende del valor del activo antes del evento crediticio, y el valor del activo también depende de la recuperación. Sin embargo, este hecho no impide la valuación del activo.

El precio de un activo contingente es:

$$\overline{V(t, T)} = (1 - N(t)) \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} \frac{k(u)}{k(t)} df(u) | \mathcal{F}_t \right], \quad (3.59)$$

donde:

$$k(t) = (1 - N(t)) \frac{S(t)}{X(t)}, \quad (3.60)$$

$$X(t) = \exp(-\delta \cdot \Lambda(t)). \quad (3.61)$$

Demostración

El proceso de recuperación es:

$$Z(u) = \delta \cdot \overline{V(u-, T)},$$

y sustituyendo en (3.42) tenemos:

$$\overline{V(t, T)} = \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \left\{ \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} S(u) df(u) | \mathcal{F}_t \right] - \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} \delta \cdot V(u-, T) dS(u) | \mathcal{F}_t \right] \right\}.$$

Proponemos como solución a (3.53):

$$\begin{aligned}
 \overline{V(t, T)} &= \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} S(u) df(u) | \mathcal{F}_t \right] \\
 &\quad - \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} \delta \cdot (1 - N(u-)) \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(u-)}{B(s)} \frac{k(s)}{k(u-)} df(s) | \mathcal{F}_{u-} \right] dS(u) | \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} S(u) df(u) | \mathcal{F}_t \right] \\
 &\quad - \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \mathbb{E} \left[\int_t^T \delta \cdot (1 - N(u-)) \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(s)} \frac{k(s)}{k(u-)} df(s) | \mathcal{F}_{u-} \right] dS(u) | \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} S(u) df(u) | \mathcal{F}_t \right] \\
 &\quad - \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \mathbb{E} \left[\int_t^T \delta \cdot (1 - N(u-)) \int_t^T \frac{B(t)}{B(s)} \frac{k(s)}{k(u-)} df(s) dS(u) | \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} S(u) df(u) | \mathcal{F}_t \right] \\
 &\quad - \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \mathbb{E} \left[\int_t^T \delta \cdot (1 - N(u-)) \int_t^s \frac{B(t)}{B(s)} \frac{k(s)}{k(u-)} dS(u) df(s) | \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} S(u) df(u) | \mathcal{F}_t \right] \\
 &\quad - \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \mathbb{E} \left[\int_t^T \delta \cdot \frac{B(t)}{B(u)} k(s) \int_t^s \frac{X(u-)}{S(u-)} dS(u) df(s) | \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} S(u) df(u) | \mathcal{F}_t \right] \\
 &\quad - \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \mathbb{E} \left[\int_t^T \delta \cdot \frac{B(t)}{B(u)} k(s) \int_t^s X(u-) d\Lambda(u) df(s) | \mathcal{F}_t \right]
 \end{aligned}$$

Suponemos a $X(u)$ continua entonces:

$$\begin{aligned}
 \overline{V(t, T)} &= \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} S(u) df(u) | \mathcal{F}_t \right] \\
 &\quad - \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \mathbb{E} \left[\int_t^T \delta \cdot \frac{B(t)}{B(u)} k(s) \int_t^s \exp(-\delta \cdot \Lambda(u)) d\Lambda(u) df(s) | \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} S(u) df(u) | \mathcal{F}_t \right] \\
 &\quad - \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \mathbb{E} \left[\int_t^T \delta \cdot \frac{B(t)}{B(u)} (1 - N(s)) \frac{S(s)}{X(s)} \left(\frac{X(s) - X(t)}{\delta} \right) df(s) | \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(s)} (1 - N(s)) \frac{X(t)}{X(s)} S(s) df(s) | \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \frac{(1 - N(t))}{S(t)} X(t) \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(s)} (1 - N(s)) \frac{S(s)}{X(s)} df(s) | \mathcal{F}_t \right] \\
 \overline{V(t, T)} &= (1 - N(t)) \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(s)} \frac{k(s)}{k(t)} df(s) | \mathcal{F}_t \right]
 \end{aligned}$$

La valuación con el supuesto de recuperación a mercado se puede ver como el componente libre de riesgo (3.35) pero con un ajuste a la numeraría o una estructura de plazos que considera el riesgo de crédito.

$$\overline{V(t, T)} = (1 - N(t)) \mathbb{E} \left[\int_t^T \exp \left(- \int_t^s r(u) \right) \frac{S(s)}{X(s)} f(s) | \mathcal{F}_s \right], \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned}
 \overline{V(t, T)} &= (1 - N(t)) \mathbb{E} \left[\int_t^T \exp \left(- \int_t^s r(u) \right) \frac{\exp(-\Lambda(s))}{\exp(-\delta \cdot \Lambda(s))} f(s) | \mathcal{F}_s \right] \\
 &= (1 - N(t)) \mathbb{E} \left[\int_t^T \exp \left(- \int_t^s r(u) \right) \exp \left(\int_t^s (1 - \delta) \lambda(u) du \right) f(s) | \mathcal{F}_s \right], \quad (3.63) \\
 &= (1 - N(t)) \mathbb{E} \left[\int_t^T \exp \left(- \int_t^s r(u) + (1 - \delta) \lambda(u) du \right) f(s) | \mathcal{F}_s \right] \\
 &= (1 - N(t)) \mathbb{E} \left[\int_t^T \exp \left(- \int_t^s R(u) du \right) f(s) | \mathcal{F}_s \right]
 \end{aligned}$$

donde

$$R(t) = r(t) + (1 - \delta) \lambda(t), \quad (3.64)$$

Considerando al igual que en (3.63) una sola tasa $R(t)$ como la tasa corporativa de corto plazo, se puede hacer uso de la tecnología desarrollada en las estructuras de plazo tradicionales para construir curvas y valorar opciones de tasa de interés considerando el riesgo crediticio.

En las fórmulas generales y específicas por tipo de recuperación para la valuación de activos contingentes con riesgo de incumplimiento se han dejado sin especificarla forma funcional de dos componentes, la intensidad y la tasa de recuperación, la primera está relacionada con la probabilidad de incumplimiento y la segunda con la pérdida dado el incumplimiento.

La forma de la intensidad se tratará en detalle en el capítulo cuatro en donde se estudia la probabilidad de incumplimiento y el entorno micro y macroeconómico, así como la estimación de los parámetros. La tasa de recuperación se estudia en la siguiente sección.

3.4.5 Pérdida dado el incumplimiento

El proceso de recuperación $Z(u)$ se descompone en dos componentes la tasa de recuperación y el activo de referencia. El primero se puede calcular históricamente observando el precio de mercado del activo posteriormente al incumplimiento o esperar hasta la liquidación de la empresa o reestructura de la deuda y descontar esos flujos al día del incumplimiento.

Una práctica del mercado es modelar la tasa de recuperación como una variable aleatoria con distribución beta y calibrarla con los dos primeros momentos empíricos, Schönbucher (2003). Otros autores como Renault y Scaillet (2004) utilizan un estimador de la densidad no paramétrico y determinan que la distribución beta no ajusta muy bien a las observaciones de la tasa de recuperación.

En trabajos como el de Hamilton, Gupton y Bethault (2001) estudian la relación de la tasa de recuperación con el tipo de activo, el nivel de subordinación del pago y el ciclo económico. El siguiente cuadro muestra los resultados obtenidos:

Cuadro 3.2 Tasa de recuperación.

Tipo de activo	Seguridad	Mediana	Promedio
Préstamos bancarios	Garantizado	72%	64%
	No Garantizado	45%	49%
BONOS	Garantizado	54%	53%
	No Garantizado	44%	57%
	Subordinado	29%	32%
Acciones preferentes	-	15%	22%

Fuente: Hamilton, Gupton y Bethault(2001)

Los porcentajes del Cuadro 3.2 son en relación al valor par y se obtuvieron de las cotizaciones del mercado posteriormente al incumplimiento. Se puede observar que los préstamos bancarios tienen una tasa de recuperación más alta que los bonos y mucho más que las acciones preferentes.

También analizaron la tasa de recuperación en relación a la calificación crediticia de Moody's y encontraron que a mayor calificación mayor tasa de recuperación, el siguiente cuadro muestra los resultados:

Cuadro 3.3 Tasa de recuperación por calificación.

Calificación	Mediana	Promedio
Ba o más	83%	70%
B	40%	44%
Caa	35%	39%
Ca	21%	29%
C	9%	16%

Fuente: Hamilton, Gupton y Bethault(2001)

El hecho de que la calificación explique en cierto grado la recuperación, es un indicio de la probable correlación entre la tasa de recuperación y la probabilidad de incumplimiento. Altman, Resti y Sironi (2002) analizan este fenómeno y el impacto en el cálculo del VaR de crédito, los resultados indican incremento en el VaR cuando existe dicha correlación.

Para el caso de México no se cuenta con una base de datos disponible con los precios de los activos post incumplimiento, por lo que se considerará la información de Renault y Scaillet (2004) de la media y varianza de las tasas de recuperación por industria y se supondrá una distribución beta.

Tenemos una familia de variables aleatorias donde la media y la varianza dependerán de la industria a la que pertenece la empresa, la densidad de la tasa de recuperación, $\delta = \{\delta_1, \dots, \delta_I\}$ donde I es el número de industrias, es:

$$f_i(x) = \frac{1}{B(p_i, q_i)} x^{p_i-1} (1-x)^{q_i-1}, \quad x \in [0, 1], \quad (3.65)$$

donde

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt, \quad (3.66)$$

para $\alpha > 0$ y $\beta > 0$.

La media y la varianza de la distribución beta son:

$$\mu_i = \frac{p_i}{p_i + q_i}, \quad (3.67)$$

y

$$\sigma_i^2 = p_i q_i (p_i + q_i)^{-2} (p_i + q_i + 1)^{-1}, \quad (3.68)$$

con los estimadores de momentos para p y q determinados por:

$$\hat{p}_i = \hat{\mu}_i \left(\frac{\hat{\mu}_i (1 - \hat{\mu}_i)}{\hat{\sigma}^2} - 1 \right), \quad (3.69)$$

$$\hat{q}_i = (1 - \hat{\mu}_i) \cdot \left(\frac{\hat{\mu}_i (1 - \hat{\mu}_i)}{\hat{\sigma}^2} - 1 \right). \quad (3.70)$$

La media y varianza muestrales obtenidas de Renault y Scaillet (2004) son:

Cuadro 3.4 Tasa de recuperación por industria.

Industria	Promedio	Desviación estándar
Servicios Públicos	68%	21%
Aseguradoras	40%	27%
Telecomunicaciones	25%	8%
Transportes	38%	27%
Finanzas	30%	25%
Industria Química	37%	26%
Alta tecnología	50%	22%
Automotriz	43%	21%
Construcción	40%	29%
Consumo	37%	21%
Entretenimiento	43%	27%
Energía	46%	26%

Fuente: Renault y Scaillet (2004)

Las fórmulas generales (3.34) y (3.42) no cambian por haber agregado el supuesto de la tasa de recuperación, pero para llegar a una fórmula cerrada del precio es necesario conocer primero la forma de la intensidad y la relación de la tasa de recuperación.

3.4.6 Intensidad Correlacionada con la Cuenta Bancaria

La probabilidad de incumplimiento se modela a través de la intensidad del proceso de salto y su forma depende de los factores que afectan la calidad crediticia de la empresa. La mayoría de las compañías se ven afectadas por el desempeño de las variables macroeconómicas, por lo tanto es común que exista correlación entre la estructura de plazos y la intensidad, Jarrow y Yu (2001) proponen una intensidad como una función lineal de los factores que afectan a la calidad crediticia de la empresa:

$$\lambda(t) = \beta \cdot X, \quad (3.71)$$

donde

β : es un vector de constantes.

X : es el vector de variables estocásticas continuas.

A estas empresas las denominan primarias, para resaltar su relación con otras empresas vía variables macroeconómicas o sectoriales. Las variables contenidas en el vector X son comúnmente procesos gaussianos que representan variables macroeconómicas y específicas de la firma:

$$dX_t = \mu(X)dt + \sigma(X)dW_t, \quad (3.72)$$

al ser W_t un browniano estándar, la combinación lineal también lo es, por lo que se puede considerar un proceso que englobe todas las perturbaciones de las variables de la economía.

También divide a las empresas cuyos ingresos operativos tienen dependencia de alguna o algunas empresas primarias como secundarias, y su “intensidad” contiene saltos que representan el incumplimiento de empresas primarias:

$$\lambda(t) = \beta \cdot X + \beta^* N(t), \quad (3.73)$$

donde

β^* : es un vector de constantes.

$N(t)$: Es un vector de procesos de salto con $N_i(t) = \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}}$.

En realidad (3.73) no cumple con los requerimientos de una intensidad por no ser continua, pero de cualquier forma es posible modelarla considerando que su probabilidad de sobrevivencia ahora es:

$$S(t) = \exp(\Lambda^c(t)) \prod_{0 \leq u \leq t} (1 - \Delta\Lambda(u)), \quad (3.74)$$

donde $\Lambda(u) = \Lambda(u) - \Lambda(u-)$ y $\Lambda^c(t) = \Lambda(t) - \sum_{0 \leq u \leq t} \Delta\Lambda(u)$ son la parte discontinua y continua.

Para incorporar la intensidad con saltos es necesario expandir la filtración ϑ_t , de tal forma que incluya la historia de los incumplimientos hasta el vencimiento del activo:

$$\mathcal{F}_t^{-i} = \mathcal{F}_t^1 \vee \dots \vee \mathcal{F}_t^{i-1} \vee \mathcal{F}_t^{i+1} \vee \dots \vee \mathcal{F}_t^I, \quad (3.75)$$

$$\vartheta_t^i = \mathcal{F}_T^X \vee \mathcal{F}_t^{N_i} \vee \mathcal{F}_T^{-i}, \quad (3.76)$$

La filtración (3.75) contiene los procesos de salto de las empresas excepto el relacionado con el activo que se está valuando y la filtración (3.76) contiene toda la información macro y particular de las firmas hasta el tiempo de vencimiento incluyendo los incumplimientos de las demás empresas.

Jarrow y Yu (2001) modelan un bono cupón cero con supuesto de recuperación nula para las empresas primarias y secundarias, con intensidades lineales a la tasa corta:

$$\lambda^A(t) = \lambda_0^A + \lambda_1^A r(t) \quad (3.77)$$

$$\lambda^B(t) = \lambda_0^B + \lambda_1^B r(t) + \lambda_2^B N^A(t), \quad (3.78)$$

donde la empresa A es primaria y la B es secundaria, la fórmula general de valuación con recuperación nula es:

$$\overline{V(t, T)} = \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \mathbb{E} \left[\frac{B(t)}{B(T)} S(T) | \mathcal{F}_t \right],$$

y para las empresas primaria A y B tenemos:

$$\overline{V^A(t, T)} = (1 - N^A(t)) e^{-\lambda_0^A (T-t)} \mathbb{E} \left[\exp \left(- (1 + \lambda_1^A) \int_t^T r(u) du \right) | \mathcal{F}_t \right], \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} \overline{V^B(t, T)} &\approx (1 - N^B(t)) e^{-\lambda_0^B(T-t)} \\ &\times \mathbb{E} \left[\exp \left(- (1 + \lambda_1^B) \int_t^T r(u) du \right) \exp \left(- \lambda_2^B \int_t^T \lambda^A(u) du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Demostración

La ecuación (3.79) sale directo de la sustitución de:

$$\frac{S(T)}{S(t)} = \exp \left(- \int_t^T \lambda^A(u) du \right).$$

Para la ecuación (7.80) tenemos:

$$\overline{V(t, T)} = (1 - N(t)) \mathbb{E} \left[\frac{B(t)}{B(T)} \exp \left(- \int_t^T \lambda_0^B + \lambda_1^B r(u) du \right) \exp \left(- \int_t^T \lambda_2^B N^A(u) du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad (3.81)$$

la exponencial del lado derecho se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \exp \left(- \int_t^T \lambda_2^B N^A(u) du \right) &= \exp \left(- \int_t^T \lambda_2^B (M^A(u) + \Lambda^A(u)) du \right) \\ &= \exp \left(- \int_t^T \lambda_2^B \Lambda^A(u) du \right) \exp \left(- \int_t^T \lambda_2^B M^A(u) du \right). \end{aligned}$$

Sustituyendo en (3.81) tenemos:

$$\begin{aligned} \overline{V(t, T)} &= (1 - N(t)) e^{-\lambda_0^B(T-t)} \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T (1 + \lambda_1^B) r(u) du \right) \exp \left(- \int_t^T \lambda_2^B \Lambda^A(u) du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &\times \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T M^A(u) du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

Suponiendo que el bono cupón cero es relativamente de corto plazo, digamos menor a un año podemos decir que la última esperanza es cercana a uno:

$$\overline{V(t, T)} \approx (1 - N(t)) e^{-\lambda_0^B(T-t)} \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T (1 + \lambda_1^B) r(u) du \right) \exp \left(- \int_t^T \lambda_2^B \Lambda^A(u) du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

La formula del bono cupón cero depende de la dinámica de la tasa corta. Suponemos el modelo de Vasicek extendido desarrollado por Hull and White (1990):

$$dr(t) = [\theta(t) - ar(t)] dt + \sigma_r dW(t), \quad (3.82)$$

esta dinámica permite reversión a la media y un ajuste a la estructura de plazos original, la solución de la ecuación diferencial es:

$$r(T) = r(t) e^{-a(T-t)} + \int_t^T e^{-a(T-u)} \theta(u) du + \sigma_r \int_t^T e^{-a(T-u)} dW(u), \quad (3.83)$$

la tasa corta se distribuye normal con media y varianza:

$$\mathbb{E} [r(T)|\mathcal{F}_t] = r(t)e^{-a(T-t)} + \int_t^T e^{-a(T-u)}\theta(u)du, \quad (3.84)$$

$$\text{Var} [r(T)|\mathcal{F}_t] = \frac{\sigma_r^2}{2a} \left[1 - e^{-2a(T-t)} \right]. \quad (3.85)$$

La integral de la tasa corta también se distribuye normal por lo que la formula (3.79) es igual a la función generadora de momentos de la distribución normal, y la solución es:

$$\overline{V^A(t, T)} = (1 - N^A(t)) e^{-\lambda_0^A(T-t)} \exp \left(- (1 + \lambda_1^A) \mu(t, T) + \frac{1}{2} (1 + \lambda_1^A)^2 \sigma^2(t, T) \right), \quad (3.86)$$

donde

$$\mu(t, T) = D(t, T) [r(t) - \alpha(t)] + \ln \frac{P^M(0, t)}{P^M(0, T)} + \frac{1}{2} [\sigma^2(0, T) - \sigma^2(0, t)], \quad (3.87)$$

$$\alpha(t) = f^M(0, t) + \frac{\sigma_r^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2, \quad (3.88)$$

$$D(t, T) = \frac{1}{a} \left[1 - e^{-a(T-t)} \right], \quad (3.89)$$

$$\sigma^2(t, T) = \frac{\sigma_r^2}{a^2} \left[T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right], \quad (3.90)$$

$$f^M(0, t) = - \frac{\partial \ln P^M(0, T)}{\partial T}. \quad (3.91)$$

el término $P^M(0, T)$ es el bono cupón cero observado en el mercado en el tiempo inicial o cero, la demostración de la estructura de plazos de Vasicek extendido es conocida dentro de la literatura de modelos de tasa de interés y no se repite en esta tesis; Venegas (2004) lo demuestra con un enfoque de ecuaciones diferenciales parciales y Brigo y Mercurio (2001) con un enfoque probabilista.

Ciertamente existe evidencia de un incremento en la probabilidad de incumplimiento de las empresas posteriormente a algunos eventos crediticios como el de Enron y WorldCom, los cuales pusieron en duda la información contable y se tradujo en un incremento en las sobre tasas corporativas por el aumento en la incertidumbre. Sin embargo, este fenómeno se relaciona más con un cambio de filtración que un salto generalizado en las intensidades como en (3.73).

Aunque es posible que exista una dependencia directa en las empresas secundarias como la que propone Jarrow y Yu (2001), lo usual es una relación vía variables de mercado o macroeconómicas. Schönbucher (2003) propone un modelo que denomina doble gaussiano, donde tanto la tasa corta como la intensidad tienen la dinámica de Vasicek extendido:

$$dr(t) = [\theta(t) - ar(t)] dt + \sigma_r dW(t) \quad (3.92)$$

$$d\lambda(t) = [k(t) - \alpha\lambda(t)] dt + \bar{\sigma} d\bar{W}(t) \quad (3.93)$$

$$dW d\bar{W} = \rho dt. \quad (3.94)$$

Este modelo permite el ajuste inicial de la estructura de plazos y de sobre tasas de mercado, con reversión a la media en ambos casos y brownianos correlacionados, por lo que es un modelo atractivo para activos en donde exista suficiente liquidez como la deuda de países emergentes.

Para el caso de la deuda corporativa donde no existe suficiente liquidez consideraremos la dinámica de Vasicek (1977) para la intensidad, preservando la correlación entre brownianos (3.94):

$$d\lambda(t) = [k - \alpha\lambda(t)] dt + \bar{\sigma}d\bar{W}(t), \quad (3.95)$$

La fórmula de valuación para un bono cupón cero con supuesto de recuperación nula es:

$$\overline{V(t, T)} = (1 - N(t)) \mathbb{E} \left[\frac{B(t)}{B(T)} \exp \left(\int_t^T \lambda(u) du \right) | \mathcal{F}_t \right]$$

La fórmula anterior puede resolver usando la técnica de cambio de numeraria, con la cual es posible sacar la estructura de plazos de la esperanza con el costo de un cambio de medida probabilidad:

$$\overline{V(t, T)} = (1 - N(t)) P(t, T) \mathbb{E}^T \left[\exp \left(\int_t^T \lambda(u) du \right) | \mathcal{F}_t \right], \quad (3.96)$$

donde

$$P(t, T) = \exp \left(-\mu(t, T) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, T) \right), \quad (3.97)$$

con media y volatilidad (3.87) y (3.90).

Al cambiar de la medida neutral al riesgo a la *T-Forward*, donde la numeraria es el bono cupón cero libre de riesgo con vencimiento igual al del activo contingente, la dinámica de la intensidad cambia:

$$d\lambda(t) = [k - \bar{\sigma}\sigma_r D(t, T) - \alpha\lambda(t)] dt + \bar{\sigma}dW^T(t), \quad (3.98)$$

donde $D(t, T)$ esta determinado por (3.89).

La dinámica continúa siendo gaussiana por lo que la integral de la intensidad también se distribuye normal. Resolviendo la esperanza en (3.96) tenemos el precio de un bono cupón cero con recuperación nula sujeto a riesgo de crédito:

$$\overline{V(t, T)} = (1 - N(t)) P(t, T) \exp \left(-\mu_\lambda(t, T) + \frac{1}{2} \sigma_\lambda^2(t, T) \right), \quad (3.99)$$

donde

$$\begin{aligned} \mu_\lambda(t, T) &= \frac{k}{\alpha}(T-t) + \left(\lambda(t) - \frac{k}{\alpha} \right) \cdot \left(\frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} \right) + \bar{\sigma}\sigma_r \left[\frac{(T-t)}{\alpha} - \left(\frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha^2} \right) \right] \\ &\quad - \bar{\sigma}\sigma_r \left[\frac{(T-t)}{\alpha + a} + \left(\frac{1 - e^{-(T-t)(\alpha+a)}}{\alpha + a} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.100)$$

y

$$\sigma_\lambda^2(t, T) = \frac{\bar{\sigma}^2}{\alpha^2} \left[T - t - \frac{2}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha(T-t)} \right) + \frac{1}{2\alpha} \left(1 - e^{2\alpha(T-t)} \right) \right] \quad (3.101)$$

Demostración

Primero demostraremos la nueva dinámica de la intensidad bajo la medida T -Forward, para esto basta saber cual es la volatilidad de la nueva numeraria, la solución de un bono cupón cero con la estructura de Vasicek extendido es:

$$P(t, T) = \exp(-A(t, T) - D(t, T)r(s))$$

y la diferencial del logaritmo natural es:

$$d \ln P(t, T) = -dA(t, T) - r(t)dD(t, T) - D(t, T)dr(t)$$

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r(s)dt + D(t, T)\sigma_r dW(t).$$

Por lo que la volatilidad o el coeficiente de dispersión del bono cupón cero (la nueva numeraria) es:

$$D(t, T)\sigma_r,$$

y con (A.51) tenemos que la dinámica de la intensidad bajo la medida T -Forward es:

$$d\lambda(t) = [k - \bar{\sigma}\sigma_r D(t, T) - \alpha\lambda(t)] dt + \bar{\sigma}dW^T(t)$$

$$d\lambda(t) = [\dot{k}(t, T) - \alpha\lambda(t)] dt + \bar{\sigma}dW^T(t),$$

con

$$\dot{k}(t, T) = k - \bar{\sigma}\sigma_r D(t, T).$$

La ecuación diferencial anterior se resuelve obteniendo el diferencial del proceso $y(t) = \lambda(t)e^{\alpha t}$, y con el lema de Itô tenemos:

$$d(y(t)) = e^{\alpha t} [\dot{k}(t, T)dt + \bar{\sigma}dW^T(t)],$$

al integrar de t a T la ecuación anterior obtenemos la solución de (3.98):

$$\begin{aligned} \lambda(T) &= \lambda(t)e^{-\alpha(T-t)} + \int_t^T e^{-\alpha(T-u)} \dot{k}(u, T) du + \int_t^T e^{-\alpha(T-u)} \bar{\sigma} dW^T(u) \\ &= \lambda(t)e^{-\alpha(T-t)} + \int_t^T e^{-\alpha(T-u)} \left(k - \bar{\sigma}\sigma_r \frac{(1 - e^{-a(T-u)})}{a} \right) du + \int_t^T e^{-\alpha(T-u)} \bar{\sigma} dW^T(u) \\ &= \lambda(t)e^{-\alpha(T-t)} + \frac{k}{\alpha} (1 - e^{-a(T-t)}) - \bar{\sigma}\sigma_r \left[\frac{(1 - e^{-\alpha(T-t)})}{\alpha} - \frac{(1 - e^{-(T-t)(a+\alpha)})}{a + \alpha} \right] \\ &\quad + \int_t^T e^{-\alpha(T-u)} \bar{\sigma} dW^T(u) \end{aligned}$$

Ya tenemos la intensidad, ahora necesitamos su integral de t a T :

$$\begin{aligned}
 \int_t^T \lambda(u) du &= \int_t^T \lambda(t) e^{-\alpha(u-t)} du + \frac{k}{\alpha} \int_t^T (1 - e^{-a(u-t)}) du \\
 &\quad - \bar{\sigma} \sigma_r \int_t^T \left[\frac{(1 - e^{-\alpha(u-t)})}{\alpha} - \frac{(1 - e^{-(u-t)(a+\alpha)})}{a + \alpha} \right] du \\
 &\quad + \int_t^T \left(\int_t^s e^{-\alpha(s-u)} \bar{\sigma} dW^T(u) \right) ds \\
 &= \frac{\lambda(t)}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(T-t)}) + \frac{k}{\alpha} (T-t) - \frac{k}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha(T-t)}) \\
 &\quad - \bar{\sigma} \sigma_r \left[\frac{(T-t)}{\alpha} - \frac{(1 - e^{-\alpha(T-t)})}{\alpha^2} - \frac{(T-t)}{\alpha + a} + \frac{(1 - e^{-(T-t)(a+\alpha)})}{a + \alpha} \right] \\
 &\quad + \int_t^T \left(\int_t^s e^{-\alpha(s-u)} \bar{\sigma} dW^T(u) \right) ds
 \end{aligned}$$

Ahora obtenemos la media de la integral anterior:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\int_t^T \lambda(u) du | \mathcal{F}_t \right] &= \frac{k}{\alpha} (T-t) + \left(\bar{\lambda}(t) - \frac{k}{\alpha} \right) \frac{(1 - e^{-\alpha(T-t)})}{\alpha} \\
 &\quad - \bar{\sigma} \sigma_r \left[\frac{(T-t)}{\alpha} - \frac{(1 - e^{-\alpha(T-t)})}{\alpha^2} - \frac{(T-t)}{\alpha + a} + \frac{(1 - e^{-(T-t)(a+\alpha)})}{a + \alpha} \right]
 \end{aligned}$$

y la varianza:

$$\begin{aligned}
 \text{Var} \left[\int_t^T \lambda(u) du | \mathcal{F}_t \right] &= \mathbb{E} \left[\left\{ \int_t^T \left(\int_t^s e^{-\alpha(s-u)} \bar{\sigma} dW^T(u) \right) ds \right\}^2 | \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\left\{ \int_t^T \bar{\sigma} \frac{(1 - e^{-\alpha(T-u)})}{\alpha} dW^T(u) \right\}^2 | \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \frac{\bar{\sigma}^2}{\alpha^2} \int_t^T (1 - e^{-\alpha(T-u)})^2 du \\
 &= \frac{\bar{\sigma}^2}{\alpha^2} \left[T-t - \frac{2}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(T-t)}) + \frac{1}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha(T-t)}) \right]
 \end{aligned}$$

Con el modelo de Schönbucher (2003) se puede obtener formulas cerradas del precio de un bono corporativo cupón cero con recuperación nula considerando que la intensidad y las tasas son estocásticas y correlacionadas.

La extensión del modelo con recuperación a par es posible agregando la segunda esperanza de (3.51); así la fórmula de valuación para un bono cupón cero con recuperación a par es:

$$\begin{aligned} \overline{V(t, T)} &= (1 - N(t)) P(t, T) \exp \left(-\mu_\lambda(t, T) + \frac{1}{2} \sigma_\lambda^2(t, T) \right) \\ &\quad + (1 - N(t)) \left[\int_t^T P(t, u) \delta S(t, u) \gamma(t, u) du \right] \end{aligned} \quad (3.102)$$

donde

$$P(t, T) = \exp \left(-\mu(t, T) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, T) \right), \quad (3.103)$$

$$S(t, T) = \exp \left(-\mu_\lambda(t, T) + \frac{1}{2} \sigma_\lambda^2(t, T) \right), \quad (3.104)$$

y

$$\begin{aligned} \gamma(t, T) &= \lambda(t) e^{-\alpha(T-t)} + \frac{k}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha(T-t)} \right) - \bar{\sigma} \sigma_r \left[\frac{(1 - e^{-\alpha(T-t)})}{\alpha} - \frac{(1 - e^{-(T-t)(a+\alpha)})}{a + \alpha} \right] \\ &\quad - \bar{\sigma}^2 \left[\frac{(1 - e^{-\alpha(T-t)})^2}{2\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (3.105)$$

La media y varianza de (3.103) y (3.104) son las expuestas en las fórmulas del bono corporativo cupón cero con recuperación nula.

Demostración

La fórmula general para valuar un bono corporativo cero con valor de recuperación a par es un caso de (3.51):

$$\overline{V(t, T)} = \frac{(1 - N(t))}{S(t)} \left\{ \mathbb{E} \left[\frac{B(t)}{B(T)} S(T) | \mathcal{F}_t \right] - \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} \delta dS(u) | \mathcal{F}_t \right] \right\},$$

la primera esperanza es como un cupón cero con recuperación nula, determinado por la fórmula (3.99), entonces solamente faltaría la segunda esperanza:

$$\frac{(1 - N(t))}{S(t)} \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} \delta dS(u) | \mathcal{F}_t \right].$$

Cambiando de numeraria a la medida *T-Forward* se obtiene:

$$\frac{(1 - N(t))}{S(t)} \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} \delta dS(u) | \mathcal{F}_t \right] = -\frac{(1 - N(t))}{S(t)} \left[\int_t^T P(t, u) \delta \mathbb{E}^T \left[\lambda(u) e^{-\int_0^u \lambda(s) ds} | \mathcal{F}_t \right] du \right],$$

donde la intensidad $\lambda(t)$ tiene la dinámica (3.94). Para resolver la última esperanza usamos nuevamente cambio de numeraria:

$$\mathbb{E}^T \left[\tilde{\lambda}(u) e^{-\int_0^u \tilde{\lambda}(s) ds} | \mathcal{F}_t \right] = S(T) \mathbb{E}^s [\lambda(u) | \mathcal{F}_t]$$

y sustituyendo:

$$\frac{(1 - N(t))}{S(t)} \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} \delta dS(u) | \mathcal{F}_t \right] = -(1 - N(t)) \left[\int_t^T P(t, u) \delta S(t, T) \mathbb{E}^S [\lambda(u) | \mathcal{F}_t] du \right].$$

La dinámica de la intensidad bajo esta medida Q^s es:

$$d\lambda(t) = \left[k - \bar{\sigma}\sigma_r D(t, T) - \bar{\sigma}^2 \tilde{D}(t, T) - \alpha\lambda(t) \right] dt + \bar{\sigma} dW^T(t),$$

donde

$$\tilde{D}(t, T) = \frac{(1 - e^{-\alpha(T-t)})}{\alpha},$$

y la dinámica se encuentra igual que en el cambio de numeraria anterior cambiando a por $P(t, T)$ y $S(t, T)$ aplicando la fórmula (A.51) del apéndice 1.

La solución de la ecuación diferencial de la intensidad es igual que en la demostración del bono cupón cero con recuperación nula:

$$\lambda(T) = \lambda(t)e^{-\alpha(T-t)} + \int_t^T e^{-\alpha(T-u)} k^*(u, T) du + \int_t^T e^{-\alpha(T-u)} \bar{\sigma} dW^T(u)$$

donde

$$k^*(t, T) = k - \bar{\sigma}\sigma_r D(t, T) - \bar{\sigma}^2 \tilde{D}(t, T) - \alpha\lambda(t)$$

Al integrar y calcular la esperanza tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\lambda(T) | \mathcal{F}_t] &= \lambda(t)e^{-\alpha(T-t)} + \frac{k}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha(T-t)} \right) - \bar{\sigma}\sigma_r \left[\frac{(1 - e^{-\alpha(T-t)})}{\alpha} - \frac{(1 - e^{-(T-t)(\alpha+\alpha)})}{\alpha + \alpha} \right] \\ &\quad - \bar{\sigma}^2 \left[\frac{(1 - e^{-\alpha(T-t)})^2}{2\alpha} \right], \end{aligned}$$

y la denominamos:

$$\gamma(t, T) = \mathbb{E} [\lambda(T) | \mathcal{F}_t].$$

Finalmente sustituyendo el término anterior en la recuperación y agregando el componente conocido se llega a la fórmula (3.102).

En la siguiente sección se calculan las fórmulas de valuación de un swap de crédito manteniendo los supuestos de la estructura de plazos e intensidad anteriores y que derivaron la fórmula de valuación (3.102).

3.5 Swaps de Crédito (CDS)

Los resultados de la valuación de un bono cupón cero con recuperación a par, proporcionan de forma directa las fórmulas de valuación de los swaps de crédito, que son simplemente un flujo δ en el momento en que la empresa incumple, como se mencionó en la sección 3.4.2:

$$CDS = \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} \delta dN(u) | \mathcal{F}_t \right],$$

el valor de swap de crédito es el mismo que el componente de recuperación R y cuando condicionamos tenemos a \bar{R} :

$$\overline{CDS} = -\frac{(1-N(t))}{S(t)} \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} \delta dS(u) | \mathcal{F}_t \right]. \quad (3.106)$$

Manteniendo los supuestos sobre la dinámica de la tasa corta de Vasicek extendido y con la intensidad con dinámica de Vasicek, expresados en (3.92) y (3.95), el valor de un swap de crédito está determinado por:

$$\overline{CDS} = (1-N(t)) \left[\int_t^T P(t, u) \delta S(t, u) \gamma(t, u) du \right], \quad (3.107)$$

donde al igual que la fórmulas de (3.102) tenemos:

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \exp \left(-\mu(t, T) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, T) \right), \\ S(t, T) &= \exp \left(-\mu_\lambda(t, T) + \frac{1}{2} \sigma_\lambda^2(t, T) \right), \\ \gamma(t, T) &= \lambda(t) e^{-\alpha(T-t)} + \frac{k}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha(T-t)} \right) - \bar{\sigma} \sigma_r \left[\frac{(1 - e^{-\alpha(T-t)})}{\alpha} - \frac{(1 - e^{-(T-t)(\alpha+\alpha)})}{\alpha + \alpha} \right] \\ &\quad - \bar{\sigma}^2 \left[\frac{(1 - e^{-\alpha(T-t)})^2}{2\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Con medias y varianzas determinadas en las fórmulas del bono corporativo cupón cero con recuperación nula:

$$\begin{aligned} \mu(t, T) &= D(t, T) [r(t) - \alpha(t)] + \ln \frac{PM(0, t)}{PM(0, T)} + \frac{1}{2} [\sigma^2(0, T) - \sigma^2(0, t)], \\ \alpha(t) &= f^M(0, t) + \frac{\sigma_r^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2, \\ D(t, T) &= \frac{1}{a} [1 - e^{-a(T-t)}], \\ \sigma^2(t, T) &= \frac{\sigma_r^2}{a^2} \left[T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right], \\ \mu_\lambda(t, T) &= \frac{k}{\alpha} (T-t) + \left(\lambda(t) - \frac{k}{\alpha} \right) \cdot \left(\frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} \right) + \bar{\sigma} \sigma_r \left[\frac{(T-t)}{\alpha} - \left(\frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha^2} \right) \right] \\ &\quad - \bar{\sigma} \sigma_r \left[\frac{(T-t)}{\alpha + a} + \left(\frac{1 - e^{-(T-t)(\alpha+a)}}{\alpha + a} \right) \right] \\ \sigma_\lambda^2(t, T) &= \frac{\bar{\sigma}^2}{\alpha^2} \left[T - t - \frac{2}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(T-t)}) + \frac{1}{2\alpha} (1 - e^{2\alpha(T-t)}) \right]. \end{aligned}$$

Es común en las transacciones de *CDS* que se pague una prima semestral o anual a cambio de la protección a la exposición crediticia, por lo que la ecuación (3.53) necesita cumplirse para encontrar la prima justa:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{K(T)} \frac{B(t)}{B(t_i)} (1 - N(t_{i-1})) \text{prima}^{CDS} | \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{B(t)}{B(u)} \delta dN(u) | \mathcal{F}_t \right]$$

donde

$K(T)$: es el número de pagos hasta el tiempo T .

La prima del *CDS* está determinada por:

$$\text{prima}^{CDS} = \frac{\int_t^T P(t, u) \delta S(t, u) \gamma(t, u) du}{\sum_{i=1}^{K(T)} P(t, t_i) S(t, t_{i-1})}. \quad (3.108)$$

La fórmula anterior considera que el pago de la prima se hace aún en el periodo en donde ocurrió el incumplimiento, como en la sección 3.4.2.

La ventaja de suponer una relación lineal de la intensidad con la tasa corta como Jarrow y Yu (2001) o un proceso gaussiano correlacionado con la cuenta bancaria como Schönbucher (2003), es que al menos para el bono cupón cero con recuperación nula existen formulas cerradas y por lo tanto una implementación sencilla, asimismo cuando el mercado es líquido se pueden ajustar a la información del mercado capturando la probabilidad de incumplimiento implícita.

La desventaja es que hay un problema de especificación ya que existe probabilidad positiva de que la intensidad y la tasa corta sean menores a cero, por lo que se pueden interpretar como aproximaciones de la realidad.

En el siguiente capítulo nos daremos a la tarea de investigar como son las probabilidades de incumplimiento en el mundo real, los elementos y variables que afectan la calidad crediticia y la volatilidad de la misma, elemento que se puede utilizar en las fórmulas desarrolladas en éste capítulo debido a que en teoría la volatilidad no se altera por cambios en la medida de probabilidad.

La intensidad que se propone sí cumple con ser positiva ya que su forma es log lineal,

$$\lambda(t) = \lambda_0(t) \exp(\beta_1 X_1 + \dots + \beta_n X_n).$$

con variables explicativas ilimitadas. También se podría considerar este tipo de intensidad en las fórmulas de valuación de este capítulo, pero el uso de simulación parece inevitable.

3.6 Conclusión

La metodología actual de los modelos de valuación de activos contingentes sujetos a riesgo de crédito se basan en cuatro componentes, la función de pago, el activo de la economía utilizado como numeraria, el riesgo de incumplimiento contractual y la recuperación post incumplimiento. Considerando estos cuatro elementos es posible desarrollar una fórmula general de valuación, y con ciertas restricciones relacionadas con la recuperación se pueden encontrar distintas fórmulas, en donde la más adecuada dependerá de la información que se tenga de la *tasa de recuperación*, la cual también puede ser estocástica y la distribución usual asignada es la Beta. Los trabajos empíricos relacionados con la tasa de recuperación muestran que varía dependiendo del activo financiero, así como por el grado de subordinación, además de mostrar correlación negativa con la probabilidad de incumplimiento; las empresas con mejores calificaciones crediticias previas al incumplimiento tienen mayor tasa de recuperación.

Con el propósito de acercar el modelo de valuación a la realidad, la intensidad incluye variables macroeconómicas y específicas de la firma y en ocasiones de otras empresas, que hacen que la probabilidad de incumplimiento se vea afectada por los ciclos económicos, percepciones de los inversionistas y otros incumplimientos. Jarrow y Yu (2001) desarrollan un modelo de intensidad lineal a las variables macro, de mercado y específicas de la firma, además de incluir saltos o incumplimientos de otras empresas, así produce un incremento súbito en la intensidad derivado del incumplimiento de la empresa de la cual dependía.

La mayor influencia o correlación de las probabilidades de incumplimiento son por la relación que existe con la economía en general, por lo que también se puede modelar con un proceso de Itô correlacionado con la estructura de plazos; Schönbucher (2003) lo hace con un modelo doble gaussiano con la dinámica de Vasicek extendido para la estructura de plazos y Vasicek simple para la intensidad.

CAPÍTULO 4

RIESGO DE CRÉDITO EN LA BMV

4.1 Introducción

En este capítulo se calculan las tasas de mortalidad (*hazard rate*) y probabilidades de incumplimiento de las empresas no financieras enlistadas en al Bolsa Mexicana de Valores. Para esto, fue necesario construir una base de datos con los incumplimientos y las empresas en riesgo; la ventana de datos es del año 1989 al 2005 y la información se obtuvo de las bases de datos del ITESM las cuales se detallarán más adelante. Adicionalmente se desarrolla un modelo interno para el cálculo de la probabilidad de incumplimiento el cual es sensible a los factores que influyen en la calidad crediticia de las empresas. El modelo es paramétrico y se estiman con la información relevante del pasado, sin embargo es sensible a la evolución y expectativas actuales de las variables macroeconómicas y propias de la empresa.

Las siguientes tres hipótesis son consideradas como determinantes en la probabilidad de incumplimiento:

1. *La probabilidad de incumplimiento depende de la capacidad de pago de los pasivos de corto plazo o circulantes de la empresa.*
2. *La probabilidad de incumplimiento depende de la sensibilidad del balance con las variables macroeconómicas.*
3. *La probabilidad de incumplimiento depende de la volatilidad de los ingresos.*

Las tres hipótesis se comprueban estadísticamente validando que las variables representativas de cada una son significativas para explicar los incumplimientos. La distribución del evento de incumplimiento continúa siendo el primer salto de un proceso de Poisson doble estocástico, como se supuso y describió en el capítulo tres. Este modelo paramétrico incorpora los elementos representativos de las tres hipótesis en la intensidad, la cual es de forma log-lineal y se estima considerando que la información es incompleta o en términos de análisis de supervivencia, censurada por la derecha usando la regresión de Cox (1972).

También se estiman las probabilidades de incumplimiento con un modelo no paramétrico para la economía en general como por industria. Los resultados muestran que México tiene una tasa de mortalidad dos veces más grande que EU, y entre industrias la minera es la más riesgosa.

El capítulo esta organizado de la siguiente manera, la sección 4.2 desarrolla el modelo para calcular las probabilidades de incumplimiento y fundamenta las variables explicativas de la intensidad, posteriormente la sección 4.3 muestra el estimador no paramétrico de Nelson-Aalen y la función de verosimilitud parcial de Cox (1972); en la sección 4.4 se habla de la información disponible y se presentan los resultados de la investigación; la sección 4.5 concluye.

4.2 Metodología para el cálculo de la probabilidad de incumplimiento

Las razones por las que una empresa se declara en suspensión de pagos o en quiebra¹, provienen de la insuficiencia de recursos para afrontar sus pasivos circulantes así como la falta de capital para incrementar el financiamiento. Cuando la deuda de corto plazo supera los ingresos operativos del periodo, al activo circulante y al capital, los recursos que tiene la empresa para saldar sus deudas son: el aumento de deuda, el aumento de capital o la venta de activos fijos; este último es poco viable por la liquidez de los mismos. Asimismo el aumento de capital dependerá de los accionistas, y el incremento de la deuda es casi imposible por la pobre generación de flujos, el destino de los recursos y la liquidez de las garantías. Regularmente la única forma de salir del problema es negociar con los acreedores la reestructura de la deuda acompañada de una declaratoria de suspensión de pagos.

Para ser más explícito mencionaré el caso de la empresa Altos Hornos de México. En el cuarto trimestre de 1998 su activo circulante era el 22% del activo total y el pasivo circulante era el 65% del activo total, la empresa necesitaba generar grandes utilidades en el siguiente año para poder cubrir sus pasivos circulantes o intentar aumentar la deuda de largo plazo para financiar su deuda. Sin embargo, lo que ocurrió fue una pobre generación de ingresos durante el primer y segundo trimestre de 1999; los ingresos operativos representaron solamente el 2% y 1% del activo total, por lo tanto, eran completamente insuficientes para cubrir el pasivo circulante; la vía alterna era incrementar la deuda de largo plazo pero el capital representaba tan sólo 32% y 33% del activo total en el primer y segundo trimestre de 1999 respectivamente, siendo inferior al pasivo de corto plazo que representaba 39% y 40%, por lo que nadie estuvo dispuesto a prestarle a los accionistas, y Altos Hornos de México se declaró en suspensión de pagos en el segundo trimestre de 1999.

El ejemplo anterior es típico en las empresas que se declaran en suspensión de pagos, los únicos interesados en reestructurar un pasivo tan pesado son los más afectados, los acreedores.

La probabilidad de incumplimiento depende en cierta medida de la estructura financiera de la empresa y la volatilidad de los ingresos operativos. Habitualmente una empresa con una generación de flujos estable y una rentabilidad superior a los costos financieros, podrá refinanciar su deuda previa al vencimiento, por lo que solamente tiene que preocuparse del pago de intereses y no del capital. Las empresas que generan rendimientos superiores a sus costos de financiamiento, se favorece de la obtención de deuda al igual que los acreedores, por lo que es de interés para ambos que el financiamiento continúe.

La fortaleza financiera o de balance, desde el punto de vista de los acreedores, depende de la capacidad de pago de los pasivos circulantes y no necesariamente de la capacidad de pago del principal, tampoco es necesaria una utilidad neta rentable como lo esperaría un accionista, al acreedor le basta que la compañía pueda pagar puntualmente las deudas, aunque mayores ingresos siempre son preferibles para ambos.

La variable clave que correlaciona a la empresa con la industria y la economía en general son los ingresos operativos, los cuales dependen del consumo y este a su vez reacciona con los ciclos económicos que lo inhiben o incentivan, también lo relacionan con otras empresas al compartir

¹ La quiebra siempre es posterior a la suspensión de pagos, en México se conoce como concurso mercantil. Sin embargo, la declaración de suspensión de pagos no necesariamente conlleva a una quiebra.

mercado, la entrada o salida de una compañía a la industria puede alterar los ingresos operativos permanentemente y cambiar la probabilidad de incumplimiento de la empresa.

Una empresa con una alta sensibilidad a las condiciones económicas no podrá garantizar flujos de efectivo estables ni el pago puntual a los acreedores en el largo plazo, por lo tanto, la volatilidad de los ingresos afecta necesariamente la probabilidad de incumplimiento.

También, como es de esperarse, existe una relación entre activo circulante e ingreso operativo; cuando se tienen buenos ingresos el activo circulante tiende a incrementarse, aumentando la capacidad de pago del pasivo de corto plazo y así reduciendo la probabilidad de incumplimiento.

Considerando que tanto la fortaleza del balance como la sensibilidad a las variables macroeconómicas explican de forma razonable la probabilidad de incumplimiento, el modelo propuesto considera como variable específica de la empresa una medida de la fortaleza del balance denominada “índice de quiebra”, y de forma externa la sensibilidad a las variables de mercado y macroeconómicas que afectan a los rendimientos de la empresa.

El espacio de probabilidad equipado con una filtración está determinado por $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_0^T, \mathbb{P})$, las empresas de la economía están representados por un proceso de salto multivariado $N = \{N_{l,i}, l = 1, \dots, k; i = 1, \dots, I\}$, el primer subíndice indica la industria y el segundo la empresa; cada industria puede tener un número diferente de empresas pero no se indica, a menos que sea necesario, para simplificar la notación. Los procesos representan el primer evento de incumplimiento de una empresa posterior a la fecha de la información \mathcal{F}_t . Las variables macroeconómicas y específicas de la empresa están contenidas dentro del espacio de probabilidad y están representadas por el vector X , con $X_i = \{x_{i,1}, \dots, x_{i,p}\}$ denominadas covariables; cada empresa tiene p covariables y hacemos los siguientes supuestos: las covariables son predecibles respecto a \mathcal{F}_t , las empresas son condicionalmente independientes respecto a X , y no hay más de un incumplimientos en el mismo instante.

La filtración \mathcal{F}_t está generada por la información de las variables macroeconómicas, de mercado y específicas de la empresa, además de los procesos de incumplimiento de otras empresas:

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X \vee \mathcal{F}^I, \quad (4.1)$$

La probabilidad de cumplimiento o de sobrevivencia de una compañía condicional a \mathcal{F}_t^X es:

$$\mathbb{P}(\tau_i > T | \mathcal{F}_t^X) = \exp\left(-\int_0^T \lambda_{l,i}(t) dt\right), \quad (4.2)$$

donde el parámetro lambda es la intensidad del proceso y esta determinada por una función log lineal:

$$\lambda_{l,i}(t) = \lambda_{l,0}(t) \exp(\beta \cdot X_i), \quad (4.3)$$

con $\lambda_{l,0}(t) > 0$.

Esta definición de la intensidad es congruente con el proceso de Cox, al no ser posible que tome valores negativos, el parámetro $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_p\}$, es un vector común para todas las empresas de la economía o industria, según sea el modelo, lo que cambia entre empresas es el vector X_i , del cual daré detalle más adelante; el parámetro $\lambda_{l,0}(t)$ es también común por la economía o industria.

Las covariables $X_{l,i} = \{x_{l,i,1}, \dots, x_{l,i,p}\}$ son por el lado macro y de mercado, la afectación a la probabilidad de incumplimiento por el cambio en el riesgo de la empresa, donde el cambio está determinado por la sensibilidad de los rendimientos de la empresa con la variable. Por el lado micro representan alguna medida del apalancamiento de la empresa como las razones financieras, la medida de Altman “Distance to Default” o el *índice de quiebra* descrito a continuación.

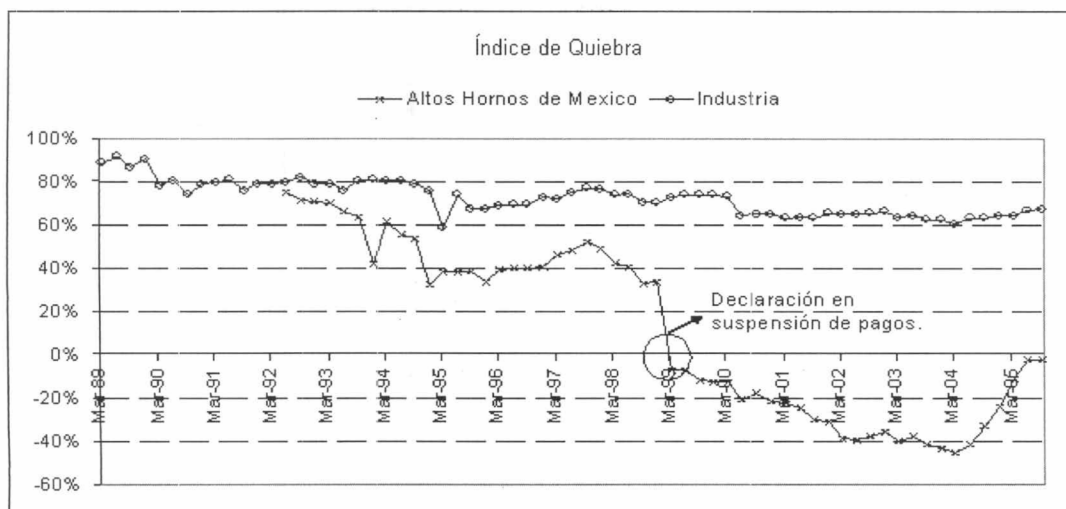
La variable para medir la fortaleza del balance de la empresa, denominado índice de quiebra está determinado por:

$$\text{Índice de quiebra} = \frac{\text{Capital de Trabajo}(t) + \text{Resultado Operativo}(t + 1)}{\text{Activo Total}(t)} + \frac{\text{Ingresos Adicionales}(t + 1) + \text{Patrimonio Neto Consolidado}(t)}{\text{Activo Total}(t)}$$

Donde el capital de trabajo está determinado por los activos circulantes menos los pasivos circulantes, y los ingresos adicionales por ingresos financieros e ingresos netos por cambios.

En la fórmula del índice de quiebra parece haber una mezcla de tiempos, pero no es así, los activos y pasivos circulantes forman parte del balance de resultados, el cual es una foto al final del trimestre, así que los pasivos circulantes son deudas en un futuro cercano, un año o un ciclo operativo; lo mismo pasa con los activos circulantes, es dinero, cuentas por cobrar e inventario que se transformarán en efectivo al corto plazo. Los inventarios dependen bastante de la industria y empresa, al igual que las cuentas por cobrar, por lo que en un caso más conservador se podrían quitar parcial o totalmente del índice. El resultado operativo (EBIT) se encuentra en el balance de resultados, y muestra los ingresos y gastos de los últimos tres, seis, nueve o doce meses dependiendo del reporte, por lo que no indica la posibilidad de pago del pasivo corriente del balance, por eso, la fórmula considera los ingresos en el periodo siguiente, tomando solamente el ingreso del trimestre no el acumulado del año. En el caso del patrimonio neto consolidado (el capital de la empresa) lo considera en el tiempo actual, t , ya que también se encuentra en el balance de resultados y suponemos que no hay incrementos de capital en el siguiente periodo, acto que podría salvar de la quiebra a una empresa.

Cuando el índice de quiebra es menor o igual a cero durante de un ciclo operativo o un año, la empresa regularmente se declara en suspensión de pagos o en quiebra, indicando que no tenía el suficiente dinero para cubrir sus deudas de corto plazo y no existió capitalización adicional o al menos no la suficiente y, por lo tanto, la compañía intenta negociar con los acreedores la reestructura de la deuda suspendiendo temporalmente los pagos. A continuación se muestra el índice de quiebra para Altos Hornos de México junto con el promedio de la industria de la manufactura:



Gráfica 4.1 Índice de quiebra.

La gráfica muestra el índice de quiebra desde el primer trimestre de 1989 al último trimestre del 2005. En el cuarto trimestre de 1998 Altos Hornos de México cambio su deuda de largo plazo por deuda de corto plazo, cuatro meses después, el 19 de Abril de 1999 se declaro en suspensión de pagos. Sin embargo, la razón financiera “debt ratio” se mantuvo sin cambios en 68% desde 1998 a 1999, por lo que dicha medida no muestra realmente el riesgo de incumplimiento de una empresa.

La gráfica muestra que en el año 1995 los balances de la industria de la manufactura se vieron afectados por la crisis mexicana, sugiriendo que existe una correlación entre empresas, determinada por las variables macroeconómicas tal como se propone en el modelo.

Las variables macroeconómicas relevantes para una empresa son aquellas que afectan los rendimientos de la misma. Sin embargo, no todas las empresas se ven afectadas en la misma magnitud por dichas variables, la influencia de un movimiento abrupto o simplemente no esperado de alguna de ellas afectará al balance de la empresa según el grado de sensibilidad que tengan los flujos de efectivo a esta.

Una empresa con un perfil de riesgo elevado es aquella con rendimientos altamente dependientes de variables inciertas, como las macroeconómicas o alguna otra específica de la industria, como el precio del acero o el gas.

La forma de medir la sensibilidad de la empresa con las variables macroeconómicas o de mercado es a través de las *betas*, es decir:

$$B(r_i, r_M) = \frac{\text{cov}(r_i, r_M)}{\text{var}(r_M)},$$

donde

r_i : son los rendimientos del capital de la empresa i .

r_M : son los rendimientos de la variable de mercado o macroeconómica.

Esta relación supone que los rendimientos de la empresa dependen linealmente de los rendimientos de las variables explicativas, al igual que el modelo APT propuesto por Ross (1976), más adelante

se detalla cómo y por qué un movimiento adverso prolongado de alguna de las variables macro o de mercado conlleva a un deterioro de la calidad crediticia.

El modelo de la intensidad incorporará las variables macroeconómicas que afecten a la industria y a la empresa, también las variables que indiquen la fortaleza del balance y las variables del mercado que añadan el riesgo desde la perspectiva del inversionista. La correlación entre las probabilidades de incumplimiento está determinada por las covariables y el grado de correlación dependerá del valor de las mismas; dos empresas con una sensibilidad similar al PIB reaccionarán de la misma forma por cada cambio porcentual. A continuación se presenta el modelo con el que se estiman las probabilidades de incumplimiento de las empresas de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) sin considerar divisiones entre industrias, la metodología para la estimación de los parámetros es desarrollada de manera explícita en la siguiente sección y los resultados arrojados por el siguiente modelo se dan en la sección 4.4:

Modelo General

$$\mathbb{P}(\tau_i \geq T | \mathcal{F}_t^X) = \exp\left(-\int_0^T \lambda_i dt\right), \quad (4.5)$$

$$\lambda_i = \lambda_0 \exp(\beta_1 x_{1,i} + \beta_2 x_{2,i} + \beta_3 x_{3,i} + \beta_4 x_{4,i} + \beta_5 x_{5,i}), \quad (4.6)$$

$$x_{1,i} = \mu_i^{\text{Indice de Quiebra}}, \quad (4.7)$$

$$x_{2,i} = \sigma_{\text{capital}}, \quad (4.8)$$

$$x_{3,i} = B(r_i, r_{TIIIE}), \quad (4.9)$$

$$x_{4,i} = B(r_i, r_{fx}), \quad (4.10)$$

$$x_{5,i} = B(r_i, r_{des}), \quad (4.11)$$

donde

$$B(r_i, r_M) = \frac{\text{cov}(r_i, r_M)}{\text{var}(r_M)}, \quad (4.12)$$

$M = \{r_{TIIIE}, r_{fx}, r_{des}\}$:

$TIIIE$: la tasa interbancaria de equilibrio a 28 días.

fx : el tipo de cambio FIX publicado por Banco de México.

des : es la tasa de desempleo publicada por el INEGI.

Las variables que resultaron significativas son las que están en el modelo general y apoyan las hipótesis presentadas en la introducción del capítulo:

1. *La probabilidad de incumplimiento depende de la capacidad de pago de los pasivos de corto plazo o circulantes de la empresa.*

La variable que sustenta la hipótesis 1 es el promedio del índice de quiebra, el cual resultó ser significativo.

2. La probabilidad de incumplimiento depende de la sensibilidad del balance con las variables macroeconómicas.

Las variables que sustentan la hipótesis 2 son las sensibilidades de los rendimientos con la TIE , el tipo de cambio fx y la tasa de desempleo, des .

3. La probabilidad de incumplimiento depende de la volatilidad de los ingresos.

La variable que sustenta la hipótesis 3, es la volatilidad de la acción, $\sigma_{capital}$ o en caso de no cotizar por la volatilidad del capital.

La información relacionada con la muestra, las fuentes, el rango de tiempo considerado para la estimación, los modelos particulares por industria y el valor de los coeficientes se dan a conocer en la sección 4.4, ahora continuamos con la estimación de los parámetros.

4.3 Estimación de los parámetros

Para la estimación de los parámetros de la tasa de mortalidad es necesario analizar la información con la que se cuenta, aunque los detalles específicos se darán en la siguiente sección, en esta se describirá de manera general los supuestos y el tipo de información con que se cuenta.

El principal problema que se tiene para la estimación de los parámetros es la información incompleta, se cuenta con una muestra de 165 empresas de las cuales solamente 25 han caído en incumplimiento, por lo que la única información que aporta la mayoría de las empresas es que no han incumplido. A este tipo de información se le denomina censurada por la derecha y lo que significa es que sólo conocemos parte de la información.

Consideremos al conjunto de empresas de la economía como un proceso puntual N multivariado,

$$N = \{N_i, i = 1, \dots, I\}, \quad (4.13)$$

donde I es el número de empresas.

Al considerar que los incumplimientos se comportan como un proceso multivariado suponemos implícitamente que no puede haber más de un incumplimiento en el mismo instante, asimismo supondremos que el proceso N es censurado por la derecha, es decir, una empresa puede salir de la muestra por caer en incumplimiento o simplemente desaparecer por cualquier razón que no sea el incumplimiento, como dejar de cotizar en la bolsa, entonces el proceso N_i estará en la muestra hasta el tiempo U_i , el cual puede ser aleatorio. Los tiempos de sobrevivencia T_1, T_2, \dots, T_I , de los procesos de salto son ahora:

$$\left(\tilde{T}_i, D_i; i = 1, \dots, I \right), \quad (4.14)$$

donde

$$\tilde{T}_i = T_i \wedge U_i,$$

y

$$D_i = \mathbf{1}_{\{\tilde{T}_i = T_i\}}. \quad (4.16)$$

Cada proceso (empresa) N_i tiene un tiempo de sobrevivencia \tilde{T}_i el cual sabemos si fue un incumplimiento $D_i = 1$ o fue censurado (no incumplió) $D_i = 0$. Adicionalmente definimos un nuevo proceso:

$$Y_i^c(t) = \mathbf{1}_{\{\tilde{T}_i \geq t\}}, \quad (4.17)$$

continuo por la izquierda, el cual indica que la empresa i continua en riesgo hasta el momento t , es decir, no ha caído en incumplimiento ni ha sido censurada.

La información al tiempo t , esta determinada por:

$$\{N^c(u), Y^c(u); 0 \leq u \leq t\}, \quad (4.18)$$

donde $N^c = \{N_i^c; i = 1, \dots, I\}$ es la suma de los procesos de salto N_i^c y $Y^c = \{Y_i^c; i = 1, \dots, I\}$ es la suma de los procesos Y_i^c . El nuevo proceso de salto censurado por la derecha es:

$$N_i^c = \mathbf{1}_{\{\tilde{T}_i \leq t, D_i = 1\}}, \quad (4.19)$$

y solamente salta si el tiempo de sobrevivencia es un incumplimiento.

El tipo de censura considerado en ésta tesis se conoce dentro de la teoría de análisis de supervivencia como de tipo I ; significa que el los tiempos U_i (la última fecha en que la empresa estaba en riesgo) son conocidos, es decir, al final de la ventana de estudio (el tercer trimestre del 2005) o porque se desenlistó de la BMV.

También suponemos censura por la derecha independiente, significa que el compensador $\Lambda(t)$ del proceso N^c y N es el mismo, es decir, la intensidad es igual si conocemos el tiempo de incumplimiento de todas las empresas a sólo conocer el de algunas. Esto podría sonar contradictorio a la intuición, porque es lógico pensar que las empresas que incumplieron antes tienen una mayor intensidad, sin embargo, la justificación radica en que sabemos a través de las covariables porqué incumplieron.

Como recordatorio del capítulo tres, el compensador es la integral de la intensidad del proceso de salto:

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du, \quad (4.20)$$

y el proceso puntual multivariado menos el compensador es una martingala,

$$M(t) = N(t) - \Lambda(t). \quad (4.21)$$

Antes de estimar las covariables se presenta el estimador no paramétrico de los procesos de salto del conjunto de las empresas de la economía y por industria, el cual también se necesita para determinar el parámetro $\lambda_{l,0}(t)$ del modelo general $\lambda_{l,i}(t) = \lambda_{l,0}(t) \exp(\beta \cdot X_i)$.

4.3.1 Estimación no paramétrica

Consideramos el proceso de salto N^c con información censurada por la derecha como se describió en la sección anterior, la intensidad está determinada por:

$$\lambda(t) = \lambda_0(t) \cdot Y^c(t), \quad (4.22)$$

donde suponemos que la tasa de mortalidad λ_0 es común para todas las empresas dentro de la industria. Nótese la diferencia entre la intensidad y la tasa de mortalidad; la intensidad es el producto de la tasa de mortalidad λ_0 y el número de empresas en riesgo en el tiempo t .

La tasa de mortalidad acumulada es:

$$A(t) = \int_0^t \lambda_0(u) du, \quad (4.23)$$

y sabemos que:

$$M(t) = N^c(t) - \int_0^t \lambda_0(u) Y^c(u) du, \quad (4.24)$$

es una martingala local y $M^2(t)$ es integrable. Entonces expresamos simbólicamente al diferencial como:

$$dN^c = \lambda_0(t) Y^c(t) dt + dM(t). \quad (4.25)$$

Si despejamos la tasa de mortalidad e integramos tenemos prácticamente al estimador:

$$A(t) = \int_0^t \frac{1}{Y^c(u)} dN^c(u) + \int_0^t dM(u), \quad (4.26)$$

Sin embargo, Y^c puede ser igual a cero antes del tiempo t , por lo que definimos al siguiente proceso:

$$J(t) = \mathbf{1}_{\{Y^c(t) > 0\}}, \quad (4.27)$$

y a la tasa de mortalidad como:

$$A^*(t) = \int_0^t \lambda_0(u) J(u) du. \quad (4.28)$$

El estimador de Nelson-Aalen de la intensidad acumulada se define como:

$$\widehat{A}(t) = \int_0^t \frac{J(u)}{Y^c(u)} dN^c(u), \quad (4.29)$$

y en tiempo discreto:

$$\widehat{A}(t) = \sum_{i: \tilde{T}_i \leq t} \frac{D_i}{Y(\tilde{T}_i)}. \quad (4.30)$$

El estimador de Nelson-Aalen es insesgado, así que el valor esperado de la diferencia entre el estimador y el valor verdadero es cero:

$$\widehat{A}(t) - A^*(t) = \int_0^t \frac{J(u)}{Y^c(u)} dM(u), \quad (4.31)$$

y la esperanza de (4.31) es igual a cero, ya que $J(u)/Y^c(u)$ es un proceso predecible, ambos son continuos por la derecha y conocidos en $t-$, un instante previo a t , entonces:

$$\mathbb{E} \left[\widehat{A}(t) - A^*(t) \right] = \int_0^t \frac{J(u)}{Y^c(u)} \mathbb{E} [dM(u)] = 0, \quad (4.32)$$

Para conocer la variabilidad o dispersión del estimador respecto al valor verdadero usamos al error cuadrático medio el cual es:

$$\mathbb{E} \left[\left(\widehat{A}(t) - A^*(t) \right)^2 \right] = \int_0^t \frac{J(u)}{(Y^c(u))^2} dN^c(u), \quad (4.33)$$

y en tiempo discreto:

$$\mathbb{E} \left[\left(\widehat{A}(t) - A^*(t) \right)^2 \right] = \sum_{i: \widetilde{T}_i \leq t} \frac{D_i}{Y(\widetilde{T}_i)^2}. \quad (4.34)$$

Demostración

Para demostrar el cálculo del error cuadrático medio es necesario mencionar los siguientes resultados, la variación cuadrática predecible y la variación cuadrática de la integral de un proceso predecible respecto a la martingala M es:

$$\left\langle \int H(u) dM(u) \right\rangle = \int H^2(u) d\langle M \rangle(u) \quad (4.35)$$

$$\left[\int H(u) dM(u) \right] = \int H^2(u) d[M](u)$$

donde

$$\begin{aligned} d\langle M \rangle(t) &= \text{var}(dM(t) | \mathcal{F}_{t-}) \\ d[M](t) &= (dM)^2. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Cuando tenemos una martingala de la forma (4.21) su variación cuadrática es:

$$\begin{aligned} d\langle M \rangle(t) &= \text{var}(dN^c(t) - Y^c(t)\lambda_0(t)dt | \mathcal{F}_{t-}) \\ d\langle M \rangle(t) &= \mathbb{E} [(dN^c)^2 - 2Y^c(t)\lambda_0(t)dN^c(t) + (Y^c(t)\lambda_0(t))^2 | \mathcal{F}_{t-}] \end{aligned} \quad (4.37)$$

El valor esperado de dN^c y $(dN^c)^2$ es el mismo ya que es una variable aleatoria con valores de cero y uno, entonces tenemos que (4.37) es:

$$d\langle M \rangle(t) = Y^c(t)\lambda_0(t)(1 - Y^c(t)\lambda_0(t)). \quad (4.38)$$

Si la intensidad es pequeña entonces el valor entre paréntesis de la ecuación anterior es cercano a uno, por lo tanto:

$$d\langle M \rangle(t) \approx Y^c(t)\lambda_0(t). \quad (4.39)$$

El error cuadrático medio del estimador de Nelson-Aalen es:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\widehat{A}(t) - A^*(t) \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left\langle \widehat{A} - A^* \right\rangle(t), \\ \mathbb{E} \left[\left(\widehat{A}(t) - A^*(t) \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \frac{J(u)}{Y^c(u)} dM(u) \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (4.40)$$

usando (4.35) tenemos:

$$\mathbb{E} \left[\left(\widehat{A}(t) - A^*(t) \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t \left(\frac{J(u)}{Y^c(u)} \right)^2 d\langle M \rangle(u) \right],$$

y con (4.39) la ecuación anterior resulta:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\widehat{A}(t) - A^*(t) \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\int_0^t \left(\frac{J(u)}{Y^c(u)} \right)^2 Y^c(u) \lambda_0(u) du \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^t \frac{J(u) \lambda_0(u)}{Y^c(u)} du \right]. \end{aligned}$$

El error cuadrático medio (4.40) es necesario estimarlo ya que contiene el parámetro lambda que se está estimado, así que usamos al la variación cuadrática (4.35) como estimador:

$$\begin{aligned} [\widehat{A} - A^*](t) &= \int_0^t \frac{J(u)}{(Y^c(u))^2} dN^c(u) \\ &= \sum_{i: \widetilde{T}_i \leq t} \frac{D_i}{Y(\widetilde{T}_i)^2}. \end{aligned}$$

□

El estimador de Nelson-Aalen se puede usar para determinar la probabilidad de incumplimiento de un portafolio representativo del conjunto de empresas de la economía o industria, ya que con éste se captura el promedio y dispersión de la tasa de mortalidad en un cierto periodo de tiempo. Continuamos con la estimación paramétrica de la tasa de mortalidad la cual nos permitirá obtener la probabilidad de incumplimiento por empresa.

4.3.2 Estimación paramétrica

La estimación del vector de parámetros de las covariables se realizará con los métodos denominados como de regresión desarrollados por Cox (1972), son una extensión de los resultados de Kaplan y Meier (1958), y su objeto fue el estudio de las fluctuaciones significativas observadas en las tablas de mortalidad. Los denomina de regresión porque la tasa de mortalidad se explica con otras variables (covariables) como en el caso de una regresión multivariada,

$$\lambda_i(t) = \lambda_0(t) \exp(\beta \cdot X_i).$$

Suponemos al igual que en la sección anterior, I procesos de salto de los cuales suponemos que $\{T_i, D_i = 1; i = 1, \dots, n\}$ incumplieron y los demás $\{T_i, D_i = 0; i = n + 1, \dots, I\}$ son censurados, la única información de los censurados es que no incumplieron en el tiempo observado. Los tiempos ordenados de menor a mayor de las n empresas que incumplieron se denota como:

$$\tau_{(1)} < \dots < \tau_{(n)}$$

y la construcción del estimador de máxima verosimilitud de la muestra se denomina *verosimilitud parcial*, Cox (1975).

Para la construcción de la función de verosimilitud primero observemos la probabilidad de incumplimiento de una empresa en el tiempo $\tau_{(i)}$ condicional al número de empresas en riesgo $Y^c(\tau_{(i)})$:

$$\frac{\exp(\beta \cdot X_j)}{\sum_{l=1}^I Y_l^c(\tau_{(i)}) \exp(\beta \cdot X_l)}. \quad (4.41)$$

La ecuación (4.41) es la probabilidad de que la empresa j , con proceso de salto N_j , incumpla en el tiempo $\tau_{(i)}$, es decir $N_j = 1$, condicionado a que no incumplió antes y que había $Y^c(\tau_{(i)})$ empresas en riesgo. Observe primero el numerador de (4.41), es la probabilidad de incumplimiento en el tiempo $\tau_{(i)}$ condicional a no incumplimiento previo:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(\tau_{(i)} \leq T_j < \tau_{(i)} + \Delta \mid \tau_{(i)} \leq T_j)}{\Delta} = \lambda_0(\tau_{(i)}) \exp(\beta \cdot X_j), \quad (4.42)$$

y el denominador es la probabilidad de que alguna de las empresas en riesgo incumpla en el tiempo $\tau_{(i)}$:

$$\mathbb{P}(\text{Alguna empresa en riesgo incumpla en } \tau_{(i)}) = \sum_{l=1}^I \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(\tau_{(i)} \leq T_l \leq \tau_{(i)} + \Delta)}{\Delta} Y_l^c(\tau_{(i)}), \quad (4.43)$$

$$\mathbb{P}(\text{Alguna empresa en riesgo incumpla en } \tau_{(i)}) = \sum_{l=1}^I Y_l^c(\tau_{(i)}) \lambda_0(\tau_{(i)}) \exp(\beta \cdot X_l). \quad (4.44)$$

La probabilidad (4.41) es la división de (4.42) y (4.44), dado que todas las empresas de una misma industria comparten el parámetro λ_0 se cancela. Si expresamos (4.41) en una forma más general considerando el tiempo de incumplimiento continuo, tenemos que la probabilidad condicional de incumplimiento en cada instante es la integral producto respecto al proceso de salto:

$$\prod_{t \geq 0} \left(\frac{\exp(\beta \cdot X_j)}{\sum_{l=1}^I Y_l^c(t) \exp(\beta \cdot X_l)} \right)^{dN_j(t)}, \quad (4.45)$$

y la función de verosimilitud parcial es la multiplicación de (4.45) por cada empresa:

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^I \left[\prod_{t \geq 0} \left(\frac{Y_i^c(t) \exp(\beta \cdot X_i)}{\sum_{l=1}^I Y_l^c(t) \exp(\beta \cdot X_l)} \right)^{dN_i(t)} \right], \quad (4.46)$$

El logaritmo natural de la ecuación anterior es:

$$\ln L(\beta) = \sum_{i=1}^I \int_0^\infty \left\{ Y_i^c(t) \cdot \beta \cdot X_i - \ln \left(\sum_{l=1}^I Y_l^c(t) \cdot \exp(\beta \cdot X_l) \right) \right\} dN_i(t), \quad (4.47)$$

y la derivada parcial respecto al parámetro β es el vector $p \times 1$:

$$U(\beta) = \sum_{i=1}^I \int_0^{\infty} \{Y_i^c(t)X_i - A(\beta, t)\} dN_i(t), \quad (4.48)$$

donde

$$A(\beta, t) = \frac{\sum_{l=1}^I X_l \cdot Y_l^c(t) \cdot \exp(\beta \cdot X_l)}{\sum_{l=1}^I Y_l^c(t) \cdot \exp(\beta \cdot X_l)}, \quad (4.49)$$

que se interpreta como el promedio ponderado de la covariable X respecto a las empresas en riesgo en el tiempo t . El negativo de la segunda derivada es la matriz de información $p \times p$:

$$I(\beta) = \sum_{i=1}^I \int_0^{\infty} C(\beta, t) dN_i(t), \quad (4.50)$$

donde

$$C(\beta, t) = \frac{\sum_{l=1}^I Y_l^c(t) \cdot \exp(\beta \cdot X_l) \cdot [X_l - A(\beta, t)]' [X_l - A(\beta, t)]}{\sum_{l=1}^I Y_l^c(t) \exp(\beta \cdot X_l)}. \quad (4.51)$$

El estimador de máxima verosimilitud parcial se deduce de la forma usual resolviendo la ecuación:

$$U(\hat{\beta}) = 0, \quad (4.52)$$

aplicando algún método numérico para encontrar raíces. Uno de ellos es el algoritmo de Newton-Raphson,

$$\hat{\beta}^{(n+1)} = \hat{\beta}^{(n)} + I^{-1}(\hat{\beta}^{(n)}) \cdot U(\hat{\beta}^{(n)}), \quad (4.53)$$

con un valor inicial arbitrario, comúnmente $\hat{\beta}^{(0)} = 0$ y la convergencia hasta que el logaritmo natural de la función parcial de verosimilitud se estabilice, es decir, $\ln L(\hat{\beta}^{(n+1)}) \approx \ln L(\hat{\beta}^{(n)})$.

Las pruebas estadísticas usuales como la razón de verosimilitud (RV), la prueba de Wald y multiplicadores de Lagrange (ML), se pueden usar para probar si es significativo el parámetro $\hat{\beta}$ estimado. La hipótesis global, $H_0 : \beta = 0$, denotado como $\beta^{(0)}$, es la que se utilizará en cada prueba.

Como es habitual en la teoría de verosimilitud el límite de la distribución de la diferencia del estimador y el parámetro verdadero se distribuye aproximadamente normal multivariada con matriz de varianza-covarianza la inversa de la matriz de información,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\hat{\beta} - \beta^{(0)}) \sim N(0, n^{-1} \cdot I^{-1}(\hat{\beta})), \quad (4.54)$$

Considerando el resultado anterior la distribución asintótica del estadístico de Wald,

$$(\hat{\beta} - \beta^{(0)})' I(\hat{\beta}) (\hat{\beta} - \beta^{(0)}), \quad (4.55)$$

con la hipótesis nula $H_0 : \beta = \beta^{(0)}$ es χ^2 con p grados de libertad. Asimismo el estadístico RV es:

$$2 \left(\ln L(\hat{\beta}) - \ln L(\beta^{(0)}) \right), \quad (4.56)$$

y el estadístico ML:

$$U \left(\beta^{(0)} \right)' I^{-1} \left(\beta^{(0)} \right) U \left(\beta^{(0)} \right), \quad (4.57)$$

ambos con la misma distribución asintótica χ^2 con p grados de libertad.

Respecto a la prueba global $\beta = 0$, Cox (1972) sugiere el estadístico ML, y para probar subconjuntos de parámetros sugiere la prueba de razón de verosimilitud en donde se calcula el estadístico RV para cada subconjunto.

Cuando la intensidad del modelo contiene una cantidad considerable de covariables, los métodos propuestos por Cox son computacionalmente intensos dado que es necesario calcular los parámetros para cada subconjunto. Otras pruebas se pueden encontrar en Kerry, Frank, Harrell, Tolley y Rosati (1983), donde consideran modelos con un gran número de covariables.

Finalmente falta mostrar la estimación del parámetro λ_0 dentro del modelo paramétrico, la función de verosimilitud parcial (4.46) considera la distribución conjunta de la probabilidad de que la empresa j caiga en incumplimiento en el tiempo $\tau_{(i)}$, es decir, que sea la i -ésima empresa en incumplir. Ahora consideraremos la función de distribución conjunta de la probabilidad de que una empresa j incumpla en cualquier momento.

En cada instante τ una empresa que no ha incumplido, puede incumplir con probabilidad condicional:

$$d\Lambda_j(\tau) = \lambda_0(\tau) \exp(\beta \cdot X_j) \cdot Y_j^c(\tau) d\tau, \quad (4.58)$$

sin condicionar tenemos la siguiente integral producto:

$$d\Lambda_j(\tau) \prod_{t \geq 0}^{\tau} (1 - d\Lambda_j(t)). \quad (4.59)$$

Considerando que cada instante la empresa j puede o no incumplir, la función de verosimilitud parcial es la multiplicación de la probabilidad de incumplimiento por la de no incumplimiento previo:

$$L_j(\lambda_0, \beta) = \prod_{t \geq 0} (d\Lambda_j(t))^{dN_j(t)} (1 - d\Lambda_j(t))^{1-dN_j(t)}, \quad (4.60)$$

En caso de que existan I empresas independientes en riesgo de incumplimiento la función de verosimilitud de la empresa j es:

$$L_j(\lambda_0, \beta) = \prod_{t \geq 0} (d\Lambda_j(t))^{dN_j(t)} \left(1 - \sum_{l=1}^I d\Lambda_l(t) \right)^{1-dN_j(t)}, \quad (4.61)$$

la función de verosimilitud anterior considera en el primer termino entre paréntesis, la probabilidad de que la empresa j incumpla en el tiempo t y el segundo paréntesis indica la probabilidad de no incumplimiento en el tiempo t de las empresas en riesgo.

Ahora definimos a la tasa de mortalidad acumulada como:

$$A_0(t) = \int_0^t \lambda_0(u) du, \quad (4.62)$$

y

$$d\Lambda_j(t) = dA_0(t) \exp(\beta \cdot X_j). \quad (4.63)$$

La función de verosimilitud conjunta de las I empresas, condicional a que las covariables son \mathcal{F}_{t-} -medibles y que las empresas bajo dicha condicional son independientes, tenemos:

$$L(\lambda_0, \beta) = \prod_{t \geq 0} \left\{ \prod_{i=1}^I (dA_0(t) Y_i^c(t) \exp(\beta \cdot X_i))^{dN_i(t)} \left(1 - dA_0(t) S^{(0)}(\beta, t)\right)^{1-dN_i(t)} \right\}, \quad (4.64)$$

donde

$$S^{(0)}(\beta, t) = \sum_{l=1}^I Y_l^c(t) \cdot \exp(\beta \cdot X_l). \quad (4.65)$$

Considerando la integral producto de la función de sobrevivencia:

$$\prod_{t \geq 0} (1 - d\Lambda(t)) = \lim_{\max\{t_i - t_{i-1}\} \rightarrow 0} \prod_{i=1}^T \{1 - (\Lambda(t_i) - \Lambda(t_{i-1}))\} = \exp(-\Lambda(t)), \quad (4.66)$$

tenemos que la ecuación (4.61) se puede expresar como:

$$\prod_{t \geq 0} \left\{ \prod_{i=1}^I (dA_0(t) Y_i^c(t) \exp(\beta \cdot X_i))^{dN_i(t)} \right\} \exp\left(-\int_0^t S^{(0)}(\beta, u) dA_0(u)\right), \quad (4.67)$$

donde la parte continua de la integral producto converge a la exponencial, que es la probabilidad de no incumplimiento o sobrevivencia.

Para encontrar el estimador del parámetro λ_0 ó $dA_0(t)$, es necesario maximizar la función de verosimilitud (4.61) ó (4.64) considerando a β fijo, el estimador es:

$$\widehat{A}_0(t) = \int_0^t \frac{dN(u)}{S^{(0)}(\beta, u)} \quad (4.68)$$

que es el estimador de Nelson-Aalen. Sin embargo el denominador considera la probabilidad de sobrevivencia.

Observe que al sustituir el estimador en (4.64) queda la función de verosimilitud parcial de Cox (1972) que se utilizó en (4.46) para la estimación del vector β :

$$\prod_{t \geq 0} \left\{ \prod_{i=1}^I \left(\frac{dN(t) Y_i^c(t) \exp(\beta \cdot X_i)}{\sum_{i=1}^I Y_i^c(t) \exp(\beta \cdot X_i)} \right)^{dN_i(t)} \right\} \exp(-N(t)). \quad (4.69)$$

En los puntos de salto la diferencial del proceso vale uno, $dN(t) = 1$ y cero en donde no hay, el término $\exp(-N(t))$ es una constante por lo que no afecta en el estimador de máxima verosimilitud parcial, por lo que llegamos por otras vías a la misma función de verosimilitud.

Con la regresión de Cox (1972) y la estimación del parámetro λ_0 con (4.68) es posible determinar la tasa de mortalidad del modelo general (4.6), por lo que en la siguiente sección se muestra como con la teoría expuesta en esta sección podemos de manera relativamente sencilla estimar las probabilidades de incumplimiento de un gran número de empresas con escasa información.

4.4 Cálculo de las probabilidades de incumplimiento de las empresas no financieras de la BMV

El objetivo de esta sección es la estimación de las probabilidades de incumplimiento de las empresas enlistadas en la BMV excluyendo las del sector financiero, investigaciones similares a esta es la de Jarrow y Chava (2004), quienes consideran 1,461 quiebras de compañías enlistadas en el NYSE y AMEX de 1962 a 1999, aunque no consideran los incumplimientos que no derivaron en quiebras. En el trabajo comparan los principales modelos para el pronóstico de quiebra, Altman (1968), Zmijewski (1984) y Shumway (2001) y demuestran la superioridad del modelo de Shumway el cual se basa en tasas de mortalidad dinámicas. También prueban la importancia de diferenciar la probabilidad de quiebra por industria y las variables consideradas como explicativas en la tasa de mortalidad difieren dependiendo de la industria a la que pertenecen, y concluyen que las variables contables contienen poco poder en el pronóstico de quiebra una vez que se incluyeron variables de mercado, coincidiendo con la eficiencia de mercado respecto a la información contable.

Otro trabajo importante es el de Duffie, Saita y Wang (2005) quienes utilizan una base de 2,700 empresas industriales de 1979 a 2004 y modelan la tasa de mortalidad con covariables macroeconómicas y específicas de la empresa. Las covariables macro son: el rendimiento de los bonos del tesoro a tres meses y el rendimiento anual del índice S&P 500, las covariables micro o específicas de la empresa son: el rendimiento anual de la acción y la medida *"distance to default"*. Finalmente encuentran como covariable más importante la medida *"distance to default"* la cual es una variable específica de la empresa, básicamente el número de desviaciones estándar de los activos respecto a los pasivos.

En el caso de esta investigación, la información con la que se cuenta es la siguiente; se tomó la clasificación de las industrias correspondiente al sistema NAICS (North American Industry Classification System) que reemplazo a al sistema SIC (Standar Industrial Classification) y se desarrollo por EU, Canadá y México con el propósito de comparar las estadísticas de las empresas de Norte América, la mayoría de las compañías consideradas en las industrias son similares a las usadas en las muestras de los índices de la BMV. Las industrias consideradas son: servicios, comercio, manufactura, comunicaciones y transportes, minería y construcción. Cada una de ellas compuesta por una clasificación más detallada. Sin embargo, por el reducido número de empresas solamente se consideraron hasta ese nivel se segregación.

El periodo de investigación abarca del primer trimestre de 1989 al tercer trimestre del año 2005, la información de las empresas se basa en los estados financieros trimestrales, y la fuente es el sistema financiero Económica. La información más antigua con la que cuenta data de 1988 pero regularmente la información de ese año está incompleta por lo que se tomó desde 1989, aunque los reportes de la mayoría de las empresas se observan en la base en fechas posteriores a 1989.

El evento de incumplimiento se refiere a cualquier falta de pago de cualquier obligación de la empresa, no necesariamente el juicio mercantil, o la quiebra técnica, cuando el pasivo total es mayor al activo total.

La información concerniente a eventos relevantes, como el incumplimiento de un pago de intereses o la demanda de concurso mercantil, se obtuvo de la información digitalizada de la BMV y las bases de datos de la biblioteca del ITESM: ISI Emergin Markets, FIS Online y Económica. El

número de incumplimientos que se encontraron y el número de empresas que se consideraron son los correspondientes a las bases de datos mencionadas. Sin embargo, es posible que falten empresas que por alguna razón (ajena a mi conocimiento) no estén en Economática, o falten incumplimientos de los cuales no exista registro en ninguna de las bases, por lo tanto, la base construida y los resultados que arrojan deben considerarse como informativos y no concluyentes.

Por último, las series económicas o financieras se obtuvieron de la página del Banco de México o del INEGI con frecuencia trimestral, y para aquellas con una mayor frecuencia, diaria o mensual, se tomó el promedio durante el trimestre.

El número de empresas que conforman la muestra son 163, de las cuales 25 cayeron en incumplimiento posteriormente a 1989, y la fecha de corte es el tercer trimestre de 2005. El siguiente cuadro muestra los incumplimientos y el trimestre del evento:

Empresas	Fecha de Ingreso	Fecha de Incumplimiento	Sector
Perkins Motores	06-1995	03-1997	Manufactura
Situr Grupo	09-1992	03-1995	Servicios
GAzucarero Mex	06-1997	09-2000	Manufactura
GMex Desarrollo	03-1993	12-1997	Construcción
Ece SA	06-1996	03-2001	Servicios
Simec Grupo	12-1992	09-1997	Manufactura
Synkro Industrias	03-1990	06-1995	Manufactura
Covarra Grupo	09-1996	03-2002	Manufactura
Prom y Op de Infra	03-1993	03-1999	Construcción
Agro Ind Exportador	12-1996	03-2003	Agricultura
Bufete Industrial	03-1993	09-1999	Construcción
Cintra SA	09-1996	09- 2003	Telecomunicaciones y Transportes
Campus S.A	06-1995	09-2002	Agricultura
Real Turismo	06-1990	12-1997	Servicios
Altos Hornos de Mex	12-1991	06-1999	Manufactura
Otel SA	06-1990	12-1997	Telecomunicaciones y Transportes
G Iconsa	09-1993	06-2002	Construcción
GMexico	12-1993	12-2002	Manufactura
Dina Grupo	12-1991	03-2002	Telecomunicaciones y Transportes
Iusacell Gpo	03-1993	09- 2003	Manufactura
Autlan Cia. Minera	06-1990	03-2001	Manufactura
San Luis Corp	03-1990	06-2002	Manufactura
Corp Durango	09-1990	03-2003	Manufactura
Cydsa S.A.	12-1989	12-2002	Minería
Ind.Automotriz S.A	09-1991	06-2005	Minería

Cuadro 4.1 Empresas que incumplieron

La fecha de entrada corresponde al primer estado financiero reportado en Economática y la fecha de salida al último estado financiero posterior al incumplimiento..

De los incumplimientos encontrados se cuenta con el reporte a la BMV o la noticia en alguna de las bases mencionadas para 17 empresas, las restantes fueron quiebras técnicas, cinco de ellas se desenlistaron de la BMV en el año de la quiebra técnica y ninguna tenía deuda pública, lo que sugiere que el incumplieron fue con proveedores o créditos bancarios.

Al igual que la exposición de la teoría, primero se calculará el estimador no paramétrico de Nelson-Aalen para el conjunto de las empresas de la economía, el cual es útil para comparar con otros países; los datos necesarios para su cálculo son:

Empresas	Fecha de Ingreso	Fecha de Incumplimiento	Trimestres de Vida
Perkins Motores	06-1995	03-1997	8
Situr Grupo	09-1992	03-1995	11
GAzucarero Mex	06-1997	09-2000	14
GMex Desarrollo	03-1993	12-1997	20
Ece SA	06-1996	03-2001	20
Simec Grupo	12-1992	09-1997	20
Synkro Industrias	03-1990	06-1995	22
Covarra Grupo	09-1996	03-2002	23
Prom y Op de Infra	03-1993	03-1999	25
Agro Ind Exportador	12-1996	03-2003	26
Bufete Industrial	03-1993	09-1999	27
Cintra SA	09-1 996	09-2003	29
Campus SA	06-1995	09-2002	30
Real Turismo	06-1990	12-1997	31
Altos Hornos de Mex	12-1991	06-1999	31
Otel S.A.	06-1990	12-1997	31
Glconsa	09-1993	06-2002	36
GMexico	12-1993	12-2002	37
Dina Grupo	12-1991	03-2002	42
Iusacell Gpo	03-1993	09-2003	43
Autlan Cia. Minera	06-1990	03-2001	44
San Luis Corp	03-1990	06-2002	50
Corp Durango	09-1990	03-2003	51
Cydsa S.A.	12-1989	12-2002	53
Ind. Automotriz S.A	09-1991	06-2005	56

Cuadro 4.2 Empresas que incumplieron.

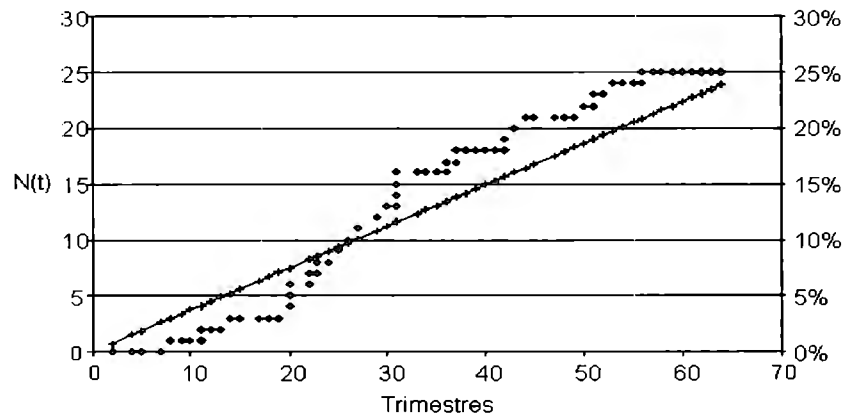
Obsérvese en el Cuadro 4.2 que existen dos tiempos relevantes para cada empresa, el tiempo natural y el tiempo de vida o incumplimiento. Para el cálculo de la probabilidad del evento crediticio importa el tiempo de incumplimiento, por ejemplo, véase Perkins Motores, es el primero en incumplir considerando el tiempo de vida o incumplimiento con ocho trimestres, sin embargo, en la escala de tiempo natural es el tercero al haber salido el primer trimestre de 1997. El tiempo natural sirve para determinar cuantas empresas había en riesgo al momento del incumplimiento, información necesaria para la regresión de Cox. El Cuadro 4.3 muestra el cálculo del estimador de

Nelson-Aalen y la desviación estándar del mismo.

Núm. de Inc.	Núm. de Incs.	Trims. de vida	Empresas en Riesgo	Tasa de Mortalidad	$\hat{\Lambda}(t)$	$\sigma(\hat{\Lambda}(t))$
1	1	8	121	0.83%	0.83%	0.83%
2	1	11	86	1.16%	1.99%	1.16%
3	1	14	124	0.81%	2.80%	0.81%
4-5-6	3	20	123	2.44%	5.23%	1.41%
7	1	22	96	1.04%	6.28%	1.04%
8	1	23	122	0.82%	7.10%	0.82%
9	1	25	121	0.83%	7.92%	0.83%
10	1	26	132	0.76%	8.68%	0.76%
11	1	27	121	0.83%	9.51%	0.83%
12	1	29	128	0.78%	10.29%	0.78%
13	1	30	120	0.83%	11.12%	0.83%
14-15-16	3	31	122	2.46%	13.58%	1.42%
17	1	36	120	0.83%	14.41%	0.83%
18	1	37	124	0.81%	15.22%	0.81%
19	1	42	119	0.84%	16.06%	0.84%
20	1	43	122	0.82%	16.88%	0.82%
21	1	44	124	0.81%	17.69%	0.81%
22	1	50	128	0.78%	18.47%	0.78%
23	1	51	124	0.81%	19.27%	0.81%
24	1	53	120	0.83%	20.11%	0.83%
25	1	56	132	0.76%	20.86%	0.76%

Cuadro 4.3 Datos para el cálculo del estimador Nelson-Aalen.

Los resultados del cuadro anterior tienen la siguiente interpretación, existe 20.86% de incumplimientos en promedio en 56 trimestres o 14 años para las industrias no financieras. Si consideramos homogeneidad en el tiempo entonces tenemos una tasa promedio de 0.37% por trimestre o 1.49% anual. La siguiente gráfica muestra el estimador de Nelson-Aalen considerado homogeneidad en el tiempo:



Gráfica 4.2 Estimador de Nelson-Aalen.

Con este modelo estamos asumiendo que la intensidad es constante, $\lambda_0 = 0.37\%$, entonces el compensador del proceso de salto de la economía es:

$$\widehat{\Lambda}(t) = \int_0^t \widehat{\lambda}_0 dt = \widehat{\lambda}_0 \cdot t, \tag{4.58}$$

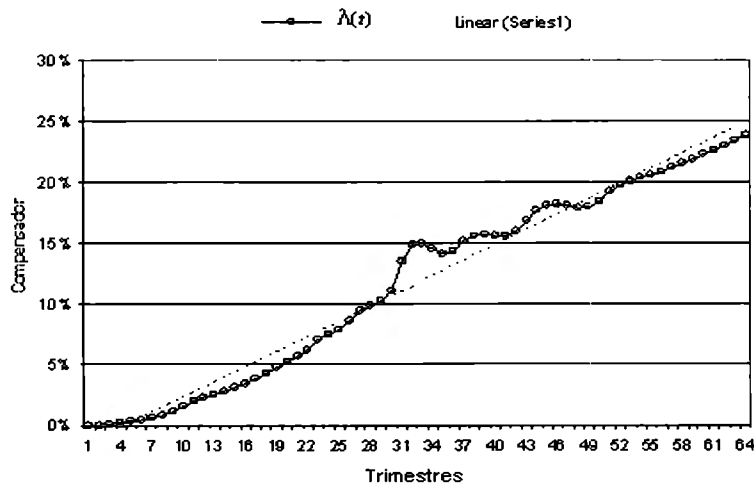
y la probabilidad de que al menos una empresa en riesgo en el tiempo t caiga en incumplimiento en los próximos 10 años o cuarenta trimestres es:

$$\mathbb{P}(N(t + 40) - N(t) = 1 | \mathcal{F}_t) = 1 - \exp(-\widehat{\Lambda}(40)), \tag{4.59}$$

$$1 - \exp(-14.90\%) = 13.84\%.$$

Considerando un portafolio diversificado de empresas (como muchas sociedades de inversión lo tienen), la probabilidad de que al menos una incumpla en menos de 10 años es 13.84%, lo cual indica un riesgo alto y no se debe ser ignorado.

El considerar a la intensidad constante parece ajustar relativamente bien para la muestra actual, la siguiente gráfica lo denota:



Gráfica 4.3 Compensador.

Comparando los resultados con el trabajo de Jarrow (2004), tenemos que él encontró una media anual de 0.77% para EU considerando del año 1989 a 1998 y excluyendo a las empresas financieras, contra 1.49% en México, es decir, somos un país con aproximadamente el doble de riesgo crédito.

El siguiente cuadro muestra la estimación de Nelson-Aalen por industria, excepto comercio ya que no se encontraron incumplimientos. Las estimaciones por industria están expuestas a un error mucho mayor por el tamaño de la muestra, en algunas industrias como la minería y agricultura cuentan con 3 y 2 empresas en la muestra, por lo que los estimadores tienen un gran error estándar, la industria con más empresas es la de manufactura y por lo tanto es la más cercana a la estimación

de la economía en general.

Industria	Núm. de Inc.	Núm. de Incs.	Trims. de Vida	Empresas en Riesgo	Tasa de Mort.	$\hat{\Lambda}(t)$	$\sigma(\hat{\Lambda}(t))$	Triml.
Agricultura	1	1	26	5	20.00%	20.00%	20.00%	0.56%
	2	1	30	6	16.67%	36.67%	16.67%	
Construcción	1	1	20	9	11.11%	11.11%	11.11%	
	2	1	25	8	12.50%	23.61%	12.50%	1.35%
	3	1	27	8	12.50%	36.11%	12.50%	
	4	1	36	8	12.50%	48.61%	12.50%	
	5	1	42	8	12.50%	61.11%	12.50%	
Manufactura	1	1	8	52	1.92%	1.92%	1.92%	
	2	1	14	53	1.89%	3.81%	1.89%	
	3	1	20	52	1.92%	5.73%	1.92%	
	4	1	22	48	2.08%	7.82%	2.08%	
	5	1	23	52	1.92%	9.74%	1.92%	
	6	1	31	53	1.89%	11.63%	1.89%	0.39%
Minería	7	1	42	52	1.92%	13.55%	1.92%	
	8	1	50	50	2.00%	15.55%	2.00%	
	9	1	51	55	1.82%	17.37%	1.82%	
	10	1	53	50	2.00%	19.37%	2.00%	
	11	1	56	45	2.22%	21.59%	2.22%	
Servicios	1	1	37	2	50.00%	50.00%	50.00%	1.89%
	2	1	44	3	33.33%	83.33%	33.33%	
Comunicaciones y Transportes	1	1	11	11	9.09%	9.09%	9.09%	
	2	1	20	17	5.88%	14.97%	5.88%	0.67%
	3	1	31	17	5.88%	20.86%	5.88%	
	1	1	29	16	6.25%	6.25%	6.25%	
	2	1	31	10	10.00%	16.25%	10.00%	0.52%
	3	1	43	16	6.25%	22.50%	6.25%	

Cuadro 4.4 Estimador Nelson-Aalen por industria.

La estimación no paramétrica de esta investigación considera varios ciclos económicos y acontecimientos internacionales como la crisis mexicana de 1995, la asiática de 1997-1998, el incumplimiento del gobierno ruso en 1998, el ataque a las torres gemelas del 2001 y reactivación de la economía de EU, por lo que se podría considerar adecuada para un portafolio representativo de la economía. Sin embargo, la falta de dependencia con otras variables macroeconómicas o de mercado no es muy satisfactorio, por tanto, el siguiente paso es construir el modelo paramétrico considerando las variables que afecten a la probabilidad de incumplimiento.

Comenzamos por analizar las variables explicativas de la intensidad del proceso de salto. Las covariables específicas de la empresa se seleccionaron considerando a aquellas que reflejaran la fortaleza de la empresa. Altman (1968) encontró que las variables explicativas de la probabilidad de incumplimiento son: capital de trabajo, resultado operativo, capital social y ventas, Zmijewski (1984) los pasivos totales, ingreso neto, activo circulante y pasivo total, Shumway (2001) al pasivo total.

En esta investigación ya se cuenta con una relación del balance y el estado de resultados denominada *índice de quiebra*; ésta es una variable explicativa de la probabilidad de incumplimiento y concuerda con la mayoría de las variables que Altman (1968) encontró significativas.

Para incorporar las variables macro y de mercado es necesario calcular las *betas*, al igual que en el modelo APT de Ross (1976), en donde suponen que los rendimientos son generados por varios factores comunes tanto a la industria como al mercado y la correlación entre las empresas ocurre cuando son afectados por el mismo factor o factores. En el modelo de incumplimiento suponemos que la tasa de mortalidad es afectada por variables sistémicas y variables idiosincráticas.

El modelo APT encuentra el rendimiento de la empresa multiplicando las betas por las diferencias del valor real de la variable y el valor esperado de la misma,

$$\frac{S(t + \Delta) - S(t)}{S(t)} = \mu \cdot \Delta + \beta_1 \cdot (F_1(t + \Delta) - \mathbb{E}_t [F_1(t + \Delta)]) + \dots \\ + \beta_n \cdot (F_n(t + \Delta) - \mathbb{E}_t [F_n(t + \Delta)]) + \varepsilon,$$

donde,

$$\mathbb{E}_t [\cdot] = \mathbb{E} [\cdot | \mathcal{F}_t]$$

$F_i(t)$: Es el factor sistémico i .

ε : Es el riesgo no sistémico o idiosincrático.

Si suponemos que el modelo APT es cierto, entonces nos interesa saber cómo se afecta la probabilidad de incumplimiento?, la hipótesis en esta tesis es que se afecta en relación a la sensibilidad o las betas. La probabilidad de incumplimiento es mucho menos volátil que los rendimientos, esto se debe a que el pago a los acreedores es antes que el pago a los accionistas: un rendimiento pobre pero positivo afecta a la acción pero no a los tenedores de la deuda, ellos recibieron su pago puntualmente. Sin embargo, un rendimiento inferior al del mercado por un periodo largo de tiempo sí podría afectar la probabilidad de incumplimiento, los dueños del capital y de la administración buscarán formas de incrementar el rendimiento aumentando el riesgo, por lo que las betas cambiarían, aumentando la sensibilidad y en caso de un movimiento adverso de los factores sistémicos, el deterioro del balance sería mayor y los acreedores se podrían ver afectados por un decremento en los activos, que son sus garantías.

Cualquier decremento en los activos es adverso para los acreedores. Cuando se tiene utilidad neta negativa por un ingreso operativo bajo, necesariamente se afectan los activos o se incrementa el pasivo, cualquiera de éstas situaciones es perjudicial a los acreedores, y por lo tanto aumenta la probabilidad de incumplimiento. Una vez aclarada la relación de las variables macroeconómicas y de mercado con la probabilidad de incumplimiento, continuamos con la modelación de la intensidad.

Las betas o sensibilidades que se probaron a nivel macroeconómico en el modelo general son: PIB, TIE, inflación, desempleo y tipo de cambio FIX, de las cuales fueron significativas la tasa de interés TIE, el tipo de cambio FIX y la tasa de desempleo. Cuando la estimación se hace por industria las variables significativas cambian, por ejemplo; en el sector de comunicaciones y

transportes la sensibilidad a la tasa de desempleo fue la única variable macroeconómica que resultó significativa.

En el caso de las variables de mercado se calcularon las betas respecto a los índices de la BMV: extracción, transformación, minería, construcción, servicios, comunicaciones y transportes y varios. Adicionalmente se calculó la volatilidad de la acción, considerando periodos trimestrales para mantener la congruencia con la información contable. Como resultado, tenemos solamente una variable de mercado significativa para el *modelo general*; la volatilidad de la acción, siendo la que indica la variabilidad del balance y el riesgo de la empresa.

Finalmente se determina el modelo general de la tasa de mortalidad como:

$$\lambda_i(t) = \lambda_0 \exp(\beta_1 x_{1,i} + \beta_2 x_{2,i} + \beta_3 x_{3,i} + \beta_4 x_{4,i} + \beta_5 x_{5,i}),$$

donde

$$\begin{aligned} x_{1,i} &= \mu_i^{\text{Índice de Quiebra}}, \\ x_{2,i} &= \sigma_{\text{capital}}, \\ x_{3,i} &= B(r_i, r_{TIE}), \\ x_{4,i} &= B(r_i, r_{fx}), \\ x_{5,i} &= B(r_i, r_{des}). \end{aligned}$$

Y los parámetros que maximizan la función de verosimilitud parcial (4.46) son:

Covariable	Parámetros	Valor	Desviación estándar	Razón de Verosimilitud	P-Value
$x_{1,i} = \mu_i^{\text{Índice de Quiebra}}$	β_1	-4.7933	0.9360	51.3697	0.0000%
$x_{2,i} = \sigma_{\text{capital}}$	β_2	4.8552	1.5994	16.5882	0.0046%
$x_{3,i} = B(r_i, r_{TIE})$	β_3	0.2938	0.1269	12.3414	0.0443%
$x_{4,i} = B(r_i, r_{fx})$	β_4	-2.0816	0.8260	15.0940	0.0102%
$x_{5,i} = B(r_i, r_{des})$	β_5	-0.7923	0.3409	9.9850	0.1578%

Cuadro 4.5 Estimación de parámetros del modelo general.

Los parámetros β_3 y β_4 relacionados con la sensibilidad al tipo de cambio y a la tasa de interés, tiene una correlación relativamente alta, 0.73, lo que produce una error estándar mayor. Sin embargo, observando el intervalo a 95% de confianza en el siguiente cuadro, muestra que los parámetros continúan preservando el signo, punto importante porque de lo contrario el modelo reaccionará inversamente a la realidad.

Covariable	Parámetros	Intervalo	
$x_{1,i} = \mu_i^{\text{Índice de Quiebra}}$	β_1	-6.333	-3.254
$x_{2,i} = \sigma_{\text{capital}}$	β_2	2.224	7.486
$x_{3,i} = B(r_i, r_{TIE})$	β_3	0.085	0.503
$x_{4,i} = B(r_i, r_{fx})$	β_4	-3.440	-0.723
$x_{5,i} = B(r_i, r_{des})$	β_5	-1.353	-0.232

Cuadro 4.6 Intervalo de confianza de los parámetros.

El siguiente paso es estimar el parámetro λ_0 , usando la fórmula (4.68) que da como resultado:

$$\lambda_0 = 0.7789\%.$$

Las probabilidades de incumplimiento de las empresas enlistadas de la BMV se muestran en el Apéndice 2, y el siguiente cuadro presenta algunas empresas importantes del mercado de capitales.

Empresas	Industria	Índice de Quiebra	Beta FX	Beta TIIE	Volat.	Beta Desempleo	λ_i	$P(\tau_i \leq 1A)$
Ara Consorcio	Construcción	1.55	-2.25	-0.45	18.91%	0.23	0.0012%	0.005%
GModelo	Manufactura	1.12	-0.15	0.08	12.17%	-0.28	0.0067%	0.027%
ASureste	Comun. y Trans.	1.02	-1.18	0.21	21.87%	-0.03	0.0079%	0.032%
Homex Desarr	Construcción	0.98	1.96	0.02	5.04%	-0.07	0.0164%	0.066%
Sare	Construcción	1.16	-1.80	-0.66	11.81%	-0.59	0.0199%	0.079%
Urbi Desarrollos	Construcción	1.09	-2.95	-0.85	9.15%	-0.28	0.0204%	0.081%
Arca Embot.	Manufactura	0.82	-1.59	-0.18	10.53%	-0.06	0.0243%	0.097%
Industrias CH	Manufactura	0.97	-0.56	-0.43	21.04%	0.15	0.0384%	0.154%
Cementos Chihuahua	Manufactura	0.92	-1.14	-0.23	21.55%	-0.28	0.0392%	0.157%
Penoles Industrias	Minería	0.85	0.17	-0.17	24.28%	0.49	0.0447%	0.179%
Alea	Manufactura	0.78	-0.72	-0.09	19.79%	-0.02	0.0481%	0.192%
Mexichem SA de CV	Manufactura	0.69	-1.55	-0.10	19.57%	-0.05	0.0607%	0.243%
Kimberly Clark Mex	Manufactura	0.74	-0.16	-0.13	14.96%	-0.13	0.0629%	0.251%
Gruma S.A.deC.V.	Manufactura	0.67	-0.27	-0.13	18.31%	0.18	0.0790%	0.316%
Bimbo Gpo	Manufactura	0.67	-0.44	-0.10	16.24%	-0.17	0.0843%	0.336%

Cuadro 4.7-1 Probabilidades de incumplimiento a un año.

Empresas	Industria	Ind Med	Beta FX	Beta TIIE	Volat.	Beta Desempleo	λ_i	$\mathbf{P}(\tau_i \leq 1A)$
Geo Corporacion	Construcción	0.87	-0.94	-0.48	31.97%	0.30	0.0940%	0.375%
Soriana Organizacion	Comercio	0.73	-0.40	-0.28	20.30%	0.02	0.1008%	0.403%
Lamosa Gpo	Manufactura	0.55	-0.76	-0.10	17.32%	0.00	0.1266%	0.505%
Televisa Gpo	Comun. y Trans.	0.74	-0.81	-0.29	21.23%	-0.53	0.1358%	0.542%
GCarso	Servicios	0.59	-0.56	-0.20	19.08%	-0.10	0.1591%	0.635%
Comercial Mexicana	Comercio	0.58	-0.62	-0.22	22.39%	0.07	0.1775%	0.708%
Corp Interam de Ent	Servicios	0.66	-1.04	-0.18	26.51%	-0.59	0.2065%	0.823%
Carso Global Teleco	Comun. y Trans.	0.53	-2.05	-0.33	22.03%	-0.09	0.2118%	0.844%
Coca Cola Femsa	Manufactura	0.53	-0.20	-0.18	15.67%	-0.20	0.2123%	0.846%
Insa Gpo	Manufactura	0.65	-1.12	-0.41	23.75%	-0.23	0.2254%	0.898%
Alfa S.A.	Manufactura	0.54	-0.23	-0.30	22.39%	0.20	0.2622%	1.043%
TV Azteca	Comun. y Trans.	0.48	-1.34	-0.33	27.16%	0.25	0.3139%	1.248%
America Telecom	Comun. y Trans.	0.38	-2.88	-0.53	16.21%	-0.01	0.3605%	1.432%
Cemex SA	Manufactura	0.48	-1.40	-0.44	21.88%	-0.16	0.4293%	1.703%
ICA Soc Controlad	Construcción	0.47	-1.31	-0.28	31.55%	0.07	0.4343%	1.722%
Elektra Gpo	Comercio	0.65	-1.94	-0.61	33.51%	-0.34	0.4730%	1.874%
Vitro	Manufactura	0.41	-0.65	-0.39	21.21%	0.11	0.5269%	2.086%

Cuadro 4.7-2 Probabilidades de incumplimiento a un año.

Algunas de las probabilidades de incumplimiento del Cuadro 4.7-1 y del Cuadro 4.7-2 parecen un poco bajas, particularmente de sectores como la construcción y minería, esto se debe al gran valor de sus inventarios que inflan al activo circulante dando la impresión de una gran capacidad de pago del pasivo de corto plazo.

A continuación se muestran las estimaciones de los modelos que mejor ajustaron considerando cada industria por separado, al igual que en la estimación no paramétrica existen dos problemas, la reducida muestra y la falta de incumplimientos en el sector de comercio.

Industria	Número de la muestra	Covariable	Parámetro	Valor	Desv. Est.	Razón de Verosimilitud	P-value
Agricultura	6	Ninguna Variable Significativa					
Construcción	17	$x_{1,i} = \mu_i^{\text{Indice de Quiebra}}$	β_1	-19.9220	13.2010	13.2767	2.7568%
		$x_{1,i} = \mu_i^{\text{Indice de Quiebra}}$	β_1	-7.3464	2.4154	22.1163	0.0003%
Manufactura	68	$x_{2,i} = B(r_i, r_{Infl})$	β_2	-3.1771	1.0017	21.7967	0.0003%
		$x_{3,i} = B(r_i, r_{PIB})$	β_3	-0.1813	0.0734	12.7312	0.0360%
		$x_{4,i} = \sigma_{capital}$	β_4	5.9724	3.0628	6.8216	0.9006%
Minería	3	Ninguna Variable Significativa					
Servicios	25	$x_{1,i} = \mu_i^{\text{Indice de Quiebra}}$	β_1	-8.2064	5.1451	6.6874	0.9709%
		$x_{2,i} = B(r_i, r_{fx})$	β_2	-0.7690	0.3666	10.5940	0.1135%
Comun. y Trans.	17	$x_{1,i} = \mu_i^{\text{Indice de Quiebra}}$	β_1	-8.6005	6.1690	8.4768	0.3597%
		$x_{2,i} = B(r_i, r_{des})$	β_2	-4.7196	3.4391	10.0901	0.1491%

Cuadro 4.8 Estimación de parámetros por industria.

Cuando se hace la estimación por industria algunas betas como la del PIB, $B(r_i, r_{PIB})$, y la beta de la inflación, $B(r_i, r_{Infl})$, resultaron significativas. El siguiente cuadro muestra la estimación del parámetro restante λ_0 , para completar el modelo por industria.

Industria	λ_0
Agricultura	n/a
Construcción	427.3443
Manufactura	2.4885%
Minería	n/a
Servicios	28.2196%
Comunicaciones y Transportes	7.0581%

Cuadro 4.9 Estimación de parámetro base por industria.

Las probabilidades de incumplimiento con el modelo por industria resulta se más extremo en todos los casos, acentuándose más en los sectores con menos información. El Apéndice 2 contiene el cálculo de la tasa de mortalidad y la probabilidad de incumplimiento a un año con los modelos específicos de cada industria.

4.5 Conclusiones

La probabilidad de incumplimiento está altamente relacionada con la capacidad de pago de los pasivos a corto plazo (hipótesis 1), el incumplimiento se deriva principalmente de la falta de recursos para solventar los costos financieros más que el pago del capital, dicha capacidad se captura con el índice de quiebra, medida desarrollada en éste capítulo en donde se relaciona el capital de trabajo con los ingresos de trimestre siguiente y el capital, todo relativo al los activos totales. Dicha medida tiende a ser negativa cuando la empresa se declara en incumpliendo, 23 de las 25 empresas que incumplieron tienen índice de quiebra negativo en los trimestres posteriores al incumplimiento.

También se comprobó la relación que existe entre las variables macroeconómicas y la probabilidad de incumplimiento (hipótesis 2), relacionando al modelo APT de Ross (1976) con el modelo para el cálculo de las probabilidades de incumplimiento, ambos suponen que existe una sensibilidad de los ingresos a las variables macroeconómicas medida a través de las betas. Asimismo se comprobó que la volatilidad del capital influye en la probabilidad de incumplimiento denotando la incertidumbre de los inversionistas respecto a los rendimientos de la empresa y el posible decremento de los activos (hipótesis 3).

El modelo paramétrico y la estimación con la regresión de Cox (1972) son altamente flexibles y sin restricciones en el número de covariables. El modelo general, donde se consideran todas las empresas de la BMV excluyendo a las financieras, resulta ser la mejor opción debido a dos problemas en la segregación por industria, el reducido número de empresas, como en la agricultura y minería, y la falta de incumplimientos en algún sector.

Los resultados indican que la variable más relevante es el índice de quiebra, lo que quiere decir que la fortaleza del balance es lo más importante; una empresa con suficiente capital para soportar los impactos de las variables macroeconómicas reduce significativamente la probabilidad de incumplimiento. Este resultado es una nueva aportación a los estudios empíricos similares como los de Jarrow y Chava (2004) y Duffie, Saita y Wang (2005) quienes encontraron que las variables de mercado eran las de mayor relevancia, sin embargo, no se dieron a la tarea de encontrar una medida de la fortaleza del balance como se hizo en este trabajo, tampoco se contraponen los resultados aquí expuestos ya que después del índice de quiebra la variable con mayor relevancia es la volatilidad del capital, que es una variable de mercado. Adicionalmente, con el cálculo de la probabilidad de incumplimiento no paramétrica se aprecia que México es dos veces más riesgoso que EU, con una tasa de mortalidad de 1.49% anual contra 0.77% para periodos similares. Estas estimaciones solamente reflejan la historia, así que, cambios estructurales invalidarían su uso. Una posible línea de investigación sería desarrollar un modelo dinámico, que estableciera la evolución temporal de la covariables, lo cual significa considerar una dinámica para el balance de la compañía.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIÓN

El riesgo de incumplimiento es altamente complejo de modelar por la diversidad de factores que lo pueden derivar, desde un fraude o una catástrofe natural como una crisis económica. Sin embargo, la mayoría de los eventos crediticios se derivan del deterioro de los balances de las empresas por condiciones económicas adversas como lo muestran Allen L. y Saunders A. (2003). Existen dos corrientes para modelar al evento de incumplimiento desde perspectivas diferentes; los estructurales basados en Merton (1974) y los de forma reducida de varios autores entre ellos Jarrow y Turnbull (1995). Bajo esta última corriente es que se desarrolló la tesis contribuyendo con modelos de valuación generales que sirven para cualquier bono corporativo, derivado con riesgo contraparte o derivado crediticio; asimismo se derivaron fórmulas cerradas para bonos cupón cero y swaps de crédito con la flexibilidad necesaria para ajustar a la información de mercado. Los modelos de valuación no solamente consideran la posibilidad de no recibir lo contractualmente pactado, también lo que ocurre en el evento de incumplimiento, es decir la recuperación. Ésta se divide en dos componentes: la tasa de recuperación y el activo de referencia. Las fórmulas de valuación cambian dependiendo del supuesto que se asuma, aunque la más cercana a las prácticas de mercado es la recuperación par, la cual es congruente con los contratos estándar de los swaps de crédito. El segundo problema que se abordó es la investigación de las probabilidades de incumplimiento para la BMV, con una metodología que captura el perfil de riesgo de la empresa a través de la sensibilidad de las variables macroeconómicas, las variables de mercado y específicas de la empresa. Los resultados indican que la variable más importante es el índice de quiebra (medida de la fortaleza del balance), aunque también resultaron significativos la volatilidad del capital y las sensibilidades a la TIE, el tipo de cambio y la tasa de desempleo. La explicación intuitiva es que una empresa con un capital adecuado relativo a sus riesgos reduce significativamente la probabilidad de incumplimiento además de soportar los ciclos económicos adversos. Sugiriendo que no solamente los bancos deben monitorear su capitalización, también las empresas deberían calcular la cantidad adecuada de capital considerando los riesgos en los que se encuentran inmersos. El modelo propuesto parece capturar de forma adecuada el evento de incumplimiento. Sin embargo, es necesario hacer pruebas empíricas para comprobar su efectividad. Adicionalmente, con el cálculo de la probabilidad de incumplimiento no paramétrica se aprecia que México es dos veces más riesgoso que EU, con una tasa de mortalidad de 1.49% anual contra 0.77% para periodos similares. Las futuras líneas de investigación son múltiples; dentro de los modelos de mercado se podría incorporar la tasa de recuperación estocástica y correlacionada con la probabilidad de incumplimiento; sin embargo ésta debe ir en paralelo de una investigación empírica de las tasas de recuperación históricas en México para poder asumir alguna distribución, ya sea paramétrica o no paramétrica. Asimismo para el modelo de regresión de Cox sería interesante generalizar el modelo actual estableciendo la evolución temporal de las covariables o incluso suponerlas estocásticas.

BIBLIOGRAFÍA

- Altman, E. I. (1968): "Financial ratios, discriminant analysis and the prediction of corporate bankruptcy", *Journal of Finance* 23, 589-609.
- Altman E., Resti A., y Sironi A. (2002): "The link between default and recovery rates: effects on the procyclicality of regulatory capital ratios", *BIS Working Papers*, No. 113.
- Allen L. y Saunders A. (2003): "A survey of cyclical effects in credit risk measurement models", *BIS Working Papers*, No. 126.
- Black F. y Myron Scholes (1973): "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, 637-54.
- Black, F. y Cox, J. C. (1976). "Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions." *Journal of Finance* 31, 351-367.
- Brigo D. y Mercurio F. (2001): *Interest Rate Models Theory and Practice*. Springer Finance.
- Cox, D.R. (1972): "Regression models and life-tables (with discussion)". *Journal of the Royal Statistical Society*. Vol. 34, 2, 187-220.
- Cox, D.R. (1972): "Partial Likelihood". *Biometrika*. Vol. 62, 2, 269-276.
- Cox, D. R. y Oakes (1984): *Analysis of Survival Data*. New York: Chapman and Hall.
- Delbaen y Schachermayer (1994): "A general version of the fundamental theorem of asset pricing". *Math. Ann.* 300, 463-520.
- Duffie, Darrell (1998): "Defaultable term structure models with fractional recovery of par", *Graduate School of Business, Stanford University*.
- Duffie, D. y Singleton, K. (1999) "Modeling term structures of defaultable bonds", *Review of Financial Studies* 12(4), 197-226.
- Duffie, D., Saita L., Wang Ke. (2005): "Multi-Period Corporate Default Prediction with Stochastic Covariates", *Discussion Paper*.
- El Karoui, N., Geman, H., Rochet, J.C. (1995): "Changes of numeraire, changes of probability measures and pricing of options". *J. Appl. Probab.* 32, 443-458.

- Giesecke, Kay y Lisa Goldberg (2004): "Sequential Defaults and Incomplete Information.", Forthcoming *Journal of Risk*.
- Hamilton, David T., Greg Gupton, y Alexandra Berthault (2001): "Default and recovery rates of corporate bond issuers: 2000". *Special comment, Moody's Investor Service: Global Credit*.
- Harrison J.M., Kreps D.M. (1979): "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", *Journal of Economic Theory*. 20, 381-408.
- Harrison, J.M., Pliska, S.R. (1981): "Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous Trading". *Stochastic Process. Appl.* 11, 215-260.
- Hull, J. y A. White (1990), "Pricing interest rate derivative securities," *Review of Financial Studies*, 3, 4.
- Hull, John y Alan White (1995): "The impact of default risk on the prices of options and other derivative securities", *Journal of Banking and Finance*, 19, 299-322.
- Jarrow, R. y Turnbull, S. (1995): "Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk", *Journal of Finance* 50(1), 53-85.
- Jarrow, Robert A., David Lando, y Stuart M. Turnbull, (1997), "A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads", *Review of Financial Studies*, 10, 481-523.
- Jarrow Robert A., y Fan Yu (2001): "Counterparty risk and the pricing of defaultable securities". *The Journal of Finance*, 56, October 2001.
- Jarrow, R. y Chava, S. (2004): "Bankruptcy Prediction with Industry Effects", *Review of Finance* 8, 537-569.
- Jarrow, Robert A. y Philip Protter (2004): "Structural versus reduced form models: a new information based perspective", *Journal of Investment Management*, Vol. 2, 2, 1-10.
- Kaplan, E.L. y Meier, P. (1958): "Nonparametric estimation from incomplete observations". *J. Amer. Statist. Assoc.* 53, 457-481.
- Kim, I J, K Ramaswamy y Sundaresan (1993), "Does default risk in coupons affect the valuation of corporate bonds? A contingent claims model", *Financial Management*, 22, no 3, 117-31.
- Kerry, Frank, Harrell, Tolley y Rosati (1983): "A comparison of test statistics for assessing the effects of concomitant variables in survival analysis", *Biometrics*, 39, 341-350.
- Kragh, Per. Andersen, Arnulf Borgan, y Richard D. Gill. (1992): *Statistical Models Based on Counting Processes*. Springer Series in Statistics. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.

- Lando, David (1998): "On Cox processes and credit risky securities", *Review of Derivatives Research*, 2, 99-120.
- Longstaff, Francis A y Schwartz (1995): "A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt", *Journal of Finance*, 50, 789-819.
- Merton, Robert (1974): "On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates", *Journal of Finance*, 2, 449-71.
- Musiela, M., Rutkowski, M. (1997): *Martingale methods in financial modeling*. Springer: Berlin Heidelberg New York.
- Protter, P. (1990): *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer Verlag.
- Renault y Scaillet (2004): "On the way to recovery: A nonparametric bias free estimation of recovery rate densities", *Journal of Banking & Finance*. 28, 2915-2931.
- Ross S. (1976): "The arbitrage Theory of Capital Asset Pricing" *Journal of Economic Theory*.
- Schönbucher, Philipp. (2000) "A libor market model with default risk. *Working paper*, University of Bonn.
- Schönbucher, Philipp. (2003): *Credit Derivatives Pricing Models*. Wiley Finance, Chichester.
- Shreve. S., Bélanger A. y Wong D. (2003): "A general Framework for Pricing Credit Risk".
- Shumway, T. (2001): "Forecasting bankruptcy more accurately: A simple hazard model", *Journal of Business* 74, 101-124.
- Vasicek, O.(1977): "An equilibrium characterization of the term structure". *Journal of Financial Economics*, 177-188.
- Zmijewski, M. E. (1984): "Methodological issues related to the estimation of financial distress prediction models", *Journal of Accounting Research* 22, 59-82.

APÉNDICE 1

CAMBIO DE NUMERARIA

A.1 Introducción

Al considerar la valuación de un activo financiero es indispensable la condición de no arbitraje, es decir no se pueden ganar dinero sin inversión y sin riesgo. Black y Scholes (1973) mediante la creación de un portafolio con una posición corta en una opción y una larga en el subyacente hacen una cobertura dinámica del portafolio, concluyendo que el rendimiento del mismo debe ser igual a la tasa libre de riesgo para que no exista arbitraje.

Años después Harrison y Kreps (1979) en tiempo discreto relacionan los argumentos de no arbitraje con al teoría de martingalas mediante la *medida martingala equivalente*, posteriormente Harrison y Pliska (1981) establecen la unicidad de la medida martingala equivalente en mercados completos, Dalang, Norton y Willinger (1990) extienden el trabajo a un espacio de probabilidad Ω general y Delbaen y Schachermayer (1994) utilizan semi-martingalas para modelar los activos financieros y establecen el *Primer Teorema Fundamental de la Valuación de Activos*:

El modelo de mercado es libre de arbitraje si y sólo si existe una medida de probabilidad Q equivalente a P (llamada medida martingala equivalente) respecto a la cual los precios descontados de los activos primitivos son martingalas.

A.2 Medida Martingala Equivalente

La medida de probabilidad P de un activo financiero se refiere a la distribución real del instrumento, la cual es conocida solamente hasta el tiempo presente y desconocida para fechas futuras, es decir no existe certeza de que la distribución futura sea idéntica a la distribución actual, debido a que el rendimiento de un activo esta correlacionado con otros factores estocásticos como la actividad económica del país.

Dentro de la economía es posible replicar a los activos financieros mediante la construcción de un portafolio con otros activos, la cobertura de una opción con la delta del subyacente como lo hicieron Black y Scholes (1973), se puede ver como la replica de la cuenta bancaria¹. Los portafolios que replican instrumentos financieros a través de una estrategia dinámica o constante, con una inversión inicial y sin retiros de efectivo ni capitalizaciones posteriores a su formación, se les denomina *auto financiables*.

Consideremos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, equipado con una filtración $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ continua por la derecha con la información acumulada hasta el tiempo t de los agentes de la

¹ Se le denomina cuenta bancaria al instrumento libre de riesgo que genera intereses continuos, en la práctica podría ser una inversión a un día o con disponibilidad diaria.

economía. El mercado contiene $(N + 1)$ instrumentos primitivos que operan del tiempo 0 a T , denotados por $(S_i)_{0 \leq t \leq T}$, $i = 1, \dots, N$, junto con la cuenta bancaria $B(t)$ definida como:

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right).$$

Las posiciones de cada instrumento en el tiempo t las denotamos como H_t^i las cuales son acotadas y predecibles, esto significa que no podemos comprar infinito de un activo y la posición con la que amanecemos mañana se conoce hoy. Un portafolio auto financiable es aquel que su valor solamente esta determinado por las ganancias y perdidas incurridas en el tiempo y no existen inyecciones de capital ni salidas, por lo tanto su valor en el tiempo t es:

$$V(t) = V_0(H) + \sum_{i=0}^N \int_0^t H_u^i dS_u^i, \quad (A.1)$$

con

$$V_0(H) = \sum_{i=0}^N H_0^i S_0^i, \quad (A.2)$$

$$S_t^0 = B(t), \quad (A.3)$$

$$dS_u = \mu(S_u)du + \sigma(S_u)dW_u, \quad (A.4)$$

Cuando un operador de mercado o “trader” quiere negociar un activo contingente, $f(S)$, pero desconoce su precio, lo primero en considerar es un portafolio auto financiable V que replique a $f(S)$ y así encuentra el precio, en caso de que la contraparte considere otro más caro, entonces el trader cierra la operación vendiendo $f(S)$ y comprando el portafolio V , generando una utilidad sin riesgo y con inversión cero, es decir hay arbitraje.

Cuando existe un portafolio auto financiable el cual replica al activo contingente se dice que es *alcanzable*, $V_T(H) = f_T(S)$. Si suponemos una economía donde todos los activos contingentes son alcanzables, entonces se dice que es *completa*, y en ésta, el precio del activo contingente es igual al precio del portafolio auto financiable en cualquier momento, asimismo la esperanza del valor presente del activo contingente, es igual al del portafolio auto financiable:

$$\mathbb{E}\left[f_T(S_T) \frac{B(t)}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[V_T(H) \frac{B(t)}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t\right]. \quad (A.5)$$

El término de la derecha de la igualdad anterior, es el producto de las posiciones y los precios descontados de los activos en el tiempo T . Sin embargo, el costo actual del portafolio auto financiable es conocido:

$$\mathbb{E}\left[V_T(H) \frac{B(t)}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t\right] = V_t(H), \quad (A.6)$$

$$\mathbb{E}\left[f_T(S) \frac{B(t)}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t\right] = f_T(S) = V_t(H), \quad (A.7)$$

Dos observaciones respecto la igualdad anterior:

1. Si el resultado de la esperanza, no es igual al valor del portafolio auto financiable en el tiempo t , entonces hay oportunidades de arbitraje.
2. El activo contingente descontado con la cuenta bancaria es martingala.

$$\mathbb{E} \left[\frac{f_T(S)}{B(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{f_t(S)}{B(t)}. \quad (A.8)$$

Estos resultados clave fueron proporcionados por Harrison y Kreps (1979) donde establecen la conexión entre la ausencia de arbitraje y la propiedad matemática de la existencia de una medida de probabilidad equivalente martingala.

A.3 Cambio de numeraria

El activo usado para normalizar a los demás activos o descontarlos se le denomina *numeraria*, en los trabajos de Black y Scholes (1973), Harrison y Kreps (1979), Harrison y Pliska (1981) la numeraria es la cuenta bancaria, y la suponen constante. Sin embargo, cuando la tasa corta de la cuenta bancaria es estocástica, como en muchos países incluyendo México², la fórmula de valuación es más difícil de resolver como en el capítulo anterior.

El primero en usar el cambio de numeraria fue Jamshidian (1989) para calcular el precio de una opción sobre un bono cupón cero con tasas estocásticas, uso una nueva medida Q^T donde la numeraria es el bono cupón cero que paga en la misma fecha que el activo contingente y determina la fórmula de valuación de la opción suponiendo la estructura de plazos propuesta por Vasicek (1977), posteriormente Geman, El Karoui y Rochet (1995) profundizan en el tema y demuestran que un portafolio auto financiable continua siéndolo aún cuando se haya cambiando de numeraria.

El resultado fundamental de Geman, El Karoui y Rochet (1995) es el que un portafolio auto financiable continua siéndolo posterior al cambio de numeraria, por lo tanto un activo contingente alcanzable, continua siéndolo independientemente de la numeraria, la valuación de activos contingentes considerando un solo flujo se puede ver como:

$$X(0)\mathbb{E}^{Q^X} \left[\frac{f_T(S)}{X(T)} \mid \mathcal{F}_0 \right] = Y(0)\mathbb{E}^{Q^Y} \left[\frac{f_T(S)}{Y(T)} \mid \mathcal{F}_0 \right], \quad (A.9)$$

donde la derivada de Radon-Nikodym es:

$$\frac{dQ^X}{dQ^Y} = \frac{X(T)Y(0)}{Y(T)X(0)}, \quad (A.10)$$

y los procesos estocásticos X y Y representan dos activos de la economía.

Demostración

² En México la tasa corta de la cuenta bancaria podría ser la tasa de fondeo bancaria.

Sabemos, por los resultados anteriores, que el valor esperado de los flujos descontados son martingalas (en el mundo neutral al riesgo):

$$\mathbb{E}^Q \left[\frac{f_T(S)}{B(T)} | \mathcal{F}_0 \right] = \frac{f_0(S)}{B(0)},$$

donde $\mathbb{E}^Q [\cdot]$ representa la esperanza respecto al mundo neutral al riesgo. Si cambiamos a la numeraria X , el portafolio sigue siendo auto financiable:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^Q \left[\frac{f_T(S)}{X(T)} \frac{dQ^X}{dQ} | \mathcal{F}_0 \right] &= \frac{f_0(S)}{X(0)} \\ &= \mathbb{E}^{Q^X} \left[\frac{f_T(S)}{X(T)} | \mathcal{F}_0 \right] = \frac{f_0(S)}{X(0)}, \end{aligned}$$

con la derivada de Radon-Nikodym

$$\frac{dQ^X}{dQ} = \frac{X(T)B(0)}{B(T)X(0)}.$$

De igual forma si cambiamos a la numeraria Y tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^Q \left[\frac{f_T(S)}{Y(T)} \frac{dQ^Y}{dQ} | \mathcal{F}_0 \right] &= \frac{f_0(S)}{Y(0)} \\ &= \mathbb{E}^{Q^Y} \left[\frac{f_T(S)}{Y(T)} | \mathcal{F}_0 \right] = \frac{f_0(S)}{Y(0)}, \end{aligned}$$

con la derivada de Radon-Nikodym

$$\frac{dQ^Y}{dQ} = \frac{Y(T)B(0)}{B(T)Y(0)}.$$

Juntando las esperanzas respecto a Q^X y Q^Y tenemos:

$$\begin{aligned} X(0)\mathbb{E}^Q \left[\frac{f_T(S)}{X(T)} \frac{dQ^X}{dQ} | \mathcal{F}_0 \right] &= Y(0)\mathbb{E}^Q \left[\frac{f_T(S)}{Y(T)} \frac{dQ^Y}{dQ} | \mathcal{F}_0 \right] \\ X(0)\mathbb{E}^{Q^X} \left[\frac{f_T(S)}{X(T)} | \mathcal{F}_0 \right] &= Y(0)\mathbb{E}^{Q^Y} \left[\frac{f_T(S)}{Y(T)} | \mathcal{F}_0 \right], \end{aligned}$$

y se puede expresar la derivada de Radon-Nikodym como:

$$\frac{dQ^X}{dQ^Y} = \frac{dQ^X}{dQ} \frac{dQ}{dQ^Y} = \frac{X(T)B(0)B(T)Y(0)}{B(T)X(0)Y(T)B(0)} = \frac{X(T)Y(0)}{Y(T)X(0)}.$$

Ya tenemos una forma de valorar los activos contingentes bajo la numeraria que sea más conveniente, ahora analizaremos como se ve afectada la dinámica de los activos bajo las diferentes numerarias.

A.4 Cambios en la media

El cambio en la dinámica de los precios dado un cambio de numeraria lo encontramos con el teorema de Girsanov, en éste se establece como debe de ser la derivada de Radon-Nikodym ante un cambio de medida. Sin embargo, antes de mostrar como se afecta un activo por el cambio en la numeraria, revisaremos algunos resultados útiles de Protter (1990), donde muestra con el uso de ecuaciones integrales estocásticas la forma general del cambio en la media.

Sea W un browniano estándar en un espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ que satisface las hipótesis usuales y sean $\mu(w, s, x)$ y $\sigma(w, s, x)$ dos funciones que satisfacen:

- i) $|f(w, s, x) - f(w, s, y)| \leq k|x - y|$ para un par (w, x) fijo;
- ii) $f(\cdot, s, x) \in \mathcal{F}_s$ para un par (w, x) fijo;
- iii) $f(w, s, x)$ es continuo por la derecha con límites izquierdos para un par (w, x) fijo, donde f representa μ ó σ .

Tenemos la siguiente integral estocástica:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(\cdot, s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(\cdot, s, X_s) dW_s. \quad (A.11)$$

El teorema de Girsanov nos permite establecer la existencia de una solución análoga donde el coeficiente μ es cambiado, y si X es la solución de (A.11), sea λ cualquier función acotada, medible e integrable, definimos otra función como:

$$g(w, s, x) = \mu(w, s, x) + \sigma(w, s, x)\lambda(w, s, x), \quad (A.12)$$

y se puede encontrar la solución de:

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t g(\cdot, s, x) ds + \int_0^t \sigma(\cdot, s, Y_s) dB_s, \quad (A.13)$$

sí seleccionamos un nuevo Browniano apropiadamente.

La derivada de Radon-Nikodym está determinada por:

$$\frac{dQ}{dP} = \varsigma_t = \exp \left(\int_0^t \lambda(s, X_s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda(s, X_s)^2 ds \right), \quad (A.14)$$

y es una martingala exponencial que satisface:

$$d\varsigma = \varsigma_t \lambda_t dW_t. \quad (A.15)$$

Por Girsanov tenemos:

$$B_t = W_t - \int_0^t \lambda(s, X_s) ds, \quad (A.16)$$

un Browniano estándar bajo Q . Entonces la solución X de (A.11) también satisface:

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t (\mu + \sigma\lambda)(\cdot, s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(\cdot, s, X_s)dB_s \\ X_t &= X_0 + \int_0^t g(\cdot, s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(\cdot, s, X_s)dB_s, \end{aligned} \tag{A.17}$$

la cual es también la solución de la ecuación integral estocástica conducida por un Browniano estándar bajo Q .

A continuación se mostrará como cambia la dinámica de un activo de la economía, S , por el cambio de numeraria en la formula de valuación de un activo contingente, $f(S)$, que solamente tiene un flujo en la fecha de vencimiento:

$$B(t)\mathbb{E}^Q \left[\frac{f_T(S)}{B(T)} | \mathcal{F}_t \right].$$

Suponemos un activo con la dinámica usual, la cuenta bancaria y dos numerarias:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \text{ (Activo),} \\ dr_t &= r_t B(t) dt \text{ (Cuenta bancaria),} \\ dX_t &= X_t \mu_t^X dt + X_t \sigma_t^X dW_t^X \text{ (Numeraria 1),} \\ dY_t &= Y_t \mu_t^Y dt + Y_t \sigma_t^Y dW_t^Y \text{ (Numeraria 2).} \end{aligned}$$

Primero cambiamos la dinámica del activo S bajo la numeraria tradicional, la cuenta bancaria, en este caso sabemos el resultado de (A.12):

$$r = \mu + \sigma\lambda, \tag{A.18}$$

con derivada de Radon-Nikodym:

$$\frac{dQ}{dP} = \exp \left(- \int_0^t \left(\frac{\mu - r_t}{\sigma} \right) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\mu - r_s}{\sigma} \right)^2 dt \right), \tag{A.19}$$

y por (4.17) la nueva dinámica de S bajo Q es:

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q. \tag{A.20}$$

La ecuación anterior denota la dinámica tradicional en el mundo neutral al riesgo, ahora se cambiará de esta medida neutral a la medida en donde el subyacente es la numeraria, consideremos un activo contingente con un solo flujo al final:

$$B(t)\mathbb{E}^Q \left[\frac{f_T(S)}{B(T)} | \mathcal{F}_t \right] = S_t \mathbb{E}^{Q^S} \left[\frac{f_T(S)}{S_T} | \mathcal{F}_t \right], \tag{A.21}$$

la derivada de Radon-Nikodym:

$$\frac{dQ^S}{dQ} = \frac{S_T B(0)}{B(T) S_0}, \tag{A.22}$$

es una martingala exponencial del tipo (A.14) que satisface:

$$d\left(\frac{S_t}{B(t)}\right) = \frac{S_t}{B(t)} \lambda dW_t^Q. \quad (A.23)$$

Asimismo por el teorema fundamental de valuación de activos tenemos que $\lambda = \sigma$ y con (A.12) la dinámica de S bajo la media Q^S es:

$$dS_t = (r_t + \sigma^2) S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q, \quad (A.24)$$

Ahora, consideraremos el cambio de la numeraria $B(t)$ a la numeraria $X(t)$; la fórmula general para cambio de numeraria (A.9) establece:

$$B(0)\mathbb{E}^Q \left[\frac{S_t}{B_t} | \mathcal{F}_0 \right] = X(0)\mathbb{E}^{Q^X} \left[\frac{S_t}{X_t} | \mathcal{F}_0 \right], \quad (A.25)$$

con derivada de Radon-Nikodym:

$$\frac{dQ^X}{dQ} = \frac{X(t)B(0)}{B(t)X(0)}, \quad (A.26)$$

la cual es una martingala exponencial:

$$d\left(\frac{X(t)}{B(t)}\right) = \frac{X(t)}{B(t)} \lambda dW_t^Q. \quad (A.27)$$

Considerando la dinámica del proceso X entre la cuenta bancaria B es:

$$d\left(\frac{X(t)}{B(t)}\right) = \frac{X(t)}{B(t)} \{(\mu_t^X - r)dt + \sigma_t^X dW_t^X\}, \quad (A.28)$$

y por Girsanov tenemos que:

$$dW^X = dW^Q - \lambda dt. \quad (A.29)$$

La dinámica de (A.28) es igual a (A.27) bajo Q^X por lo tanto:

$$\frac{X(t)}{B(t)} \{(\mu_t^X - r)dt + \sigma_t^X dW^X\} = \frac{X(t)}{B(t)} \lambda (dW^X + \lambda dt), \quad (A.30)$$

$$(\mu_t^X - r)dt + \sigma_t^X dW^X = \lambda dW^X + \lambda^2 dt,$$

para que se cumpla la igualdad es necesario que:

$$\mu_t^X = r_t + (\sigma_t^X)^2. \quad (A.31)$$

Así que $\lambda = \sigma^X$ y con (A.12) la dinámica del activo S bajo la numeraria X es:

$$dS_t = S_t(r_t + \sigma\sigma_t^X)dt + S_t\sigma dW_t^X, \quad (A.32)$$

el cambio en la media está determinado por la tasa spot más el producto de la volatilidad del activo S y la nueva numeraria.

El siguiente paso es cambiar la numeraria X a la de Y y determinar la dinámica del activo S , lo que nos proporcionará una fórmula general para determinar el cambio en la media de S por el cambio de numerarias.

$$X(0)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^X} \left[\frac{S_t}{X_t} | \mathcal{F}_0 \right] = Y(0)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^Y} \left[\frac{S_t}{Y_t} | \mathcal{F}_0 \right], \quad (A.33)$$

y la derivada de Radon-Nikodym es:

$$\frac{d\mathbb{Q}^Y}{d\mathbb{Q}^X} = \frac{Y(t)X(0)}{X(t)Y(0)}, \quad (A.34)$$

la cual es una martingala exponencial:

$$d \left(\frac{Y(t)}{X(t)} \right) = \frac{Y(t)}{X(t)} \lambda dW_t^X. \quad (A.35)$$

La dinámica del cociente anterior la encontramos con la fórmula de Leibnitz:

$$d \left(\frac{Y(t)}{X(t)} \right) = \frac{1}{X(t)} dY(t) + Y(t) d \left(\frac{1}{X(t)} \right) + dY(t) d \left(\frac{1}{X(t)} \right), \quad (A.36)$$

y con el lema de Itô encontramos la dinámica de $1/X(T)$:

$$d \left(\frac{1}{X(t)} \right) = \frac{1}{X(t)} \{ -(\mu_t^X - (\sigma_t^X)^2) dt - \sigma_t^X dW_t^X \}. \quad (A.37)$$

Sustituyendo la dinámica de $Y(t)$ y $1/X(T)$ en (A.36) tenemos:

$$d \left(\frac{Y(t)}{X(t)} \right) = \frac{Y(t)}{X(t)} \{ (\mu_t^Y - \mu_t^X + \sigma_t^X(\sigma_t^X - \rho\sigma_t^Y)) dt - \sigma_t^X dW_t^X + \sigma_t^Y dW_t^Y \}, \quad (A.38)$$

con

$$dY(t) d \left(\frac{1}{X(t)} \right) = -\frac{Y(t)}{X(t)} \sigma_t^Y \sigma_t^X \rho dt. \quad (A.39)$$

Los últimos dos términos de (A.38) tienen media cero y los podemos agrupar usando la siguiente propiedad:

$$\sigma_t^Y dW_t^Y - \sigma_t^X dW_t^X = \sqrt{(\sigma_t^X)^2 + (\sigma_t^Y)^2 - 2\rho\sigma_t^X\sigma_t^Y} dW_t^{Y/X}, \quad (A.40)$$

entonces la dinámica del cociente de $Y(t)$ entre $X(t)$ se puede expresar como:

$$\begin{aligned} d \left(\frac{Y(t)}{X(t)} \right) &= \frac{Y(t)}{X(t)} (\mu_t^Y - \mu_t^X + \sigma_t^X(\sigma_t^X - \rho\sigma_t^Y)) dt \\ &\quad + \frac{Y(t)}{X(t)} \sqrt{(\sigma_t^X)^2 + (\sigma_t^Y)^2 - 2\rho\sigma_t^X\sigma_t^Y} dW_t^{Y/X}, \end{aligned} \quad (A.41)$$

y la volatilidad de $\sigma_t^{Y/X}$ es (A.40).

Al resolver la ecuación diferencial anterior se elimina el coeficiente de correlación:

$$\frac{Y(t)}{X(t)} = \frac{Y(0)}{X(0)} \exp \left(\int_0^t (\mu_s^Y - \mu_s^X) ds - \frac{1}{2} \int_0^t ((\sigma_s^Y)^2 - (\sigma_s^X)^2) ds + \int_0^t \sigma_s^{Y/X} W_s^{Y/X} \right). \quad (A.42)$$

Para simplificar la notación, consideraremos por el momento que las medias, varianzas y la tasa spot son constantes.

Al igual que en el cambio de numeraria anterior las medias de X y Y están bajo la medida Q^X y Q^Y , por lo tanto la media de X y Y son la tasa spot más la varianza como en (A.31):

$$\frac{Y(t)}{X(t)} = \frac{Y(0)}{X(0)} \exp \left(\left\{ (\sigma_t^Y)^2 - (\sigma_t^X)^2 - \frac{1}{2}(\sigma_s^Y)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_s^X)^2 \right\} t + \sigma_s^{Y/X} W_t^{Y7X} \right), \quad (A.43)$$

y con (A.40):

$$\frac{Y(t)}{X(t)} = \frac{Y(0)}{X(0)} \exp \left(\frac{1}{2} ((\sigma^Y)^2 - (\sigma^X)^2) t + \sigma^Y W_t^Y - \sigma^X W_t^X \right). \quad (A.44)$$

En este caso tenemos dos Brownianos, uno respecto a la nueva numeraria Y y el otro respecto a la numeraria anterior X , usamos Girsanov para cambiar el último:

$$dW^Y = dW^X - \lambda dt, \quad (A.45)$$

sustituyendo en (A.44):

$$\frac{Y(t)X(0)}{X(t)Y(0)} = \exp \left(\frac{1}{2} ((\sigma^Y)^2 - (\sigma^X)^2) t + \sigma^Y W_t^Y - \sigma^X (W_t^Y + \lambda t) \right), \quad (A.46)$$

al cambiar el Browniano respecto a la nueva numeraria Y tenemos todo bajo Q^Y e igualamos a la derivada de Radon-Nikodym dada por (A.14):

$$\begin{aligned} \exp \left(\frac{1}{2} ((\sigma^Y)^2 - (\sigma^X)^2) t + \sigma^Y W_t^Y - \sigma^X W_t^Y - \lambda \sigma^X t \right) &= \exp \left(-\frac{1}{2} \lambda^2 t + \lambda (W_t^Y + \lambda t) \right) \\ \exp \left(\frac{1}{2} (\sigma_Y^2 - \sigma_X^2) t + (\sigma_Y - \sigma_X) W_t^Y - \sigma_X \lambda t \right) &= \exp \left(\frac{1}{2} \lambda^2 t + \lambda W_t^Y \right). \end{aligned}$$

Para que se cumpla la igualdad, lambda es el diferencial de las volatilidades:

$$\lambda = \sigma_Y - \sigma_X, \quad (A.47)$$

y con la fórmula (A.12) encontramos la dinámica de S por el cambio de numeraria X a Y :

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t (r_t + \sigma \sigma_t^X + \sigma (\sigma_t^Y - \sigma_t^X)) dt + S_t \sigma dW_t^Y \\ dS_t &= S_t (r_t + \sigma \sigma_t^Y) dt + S_t \sigma dW_t^Y. \end{aligned} \quad (A.48)$$

El cambio en la media de la dinámica de S , dado un cambio de numeraria X a Y , es igual a de cambiar de la cuenta bancaria a la numeraria Y , es decir el incremento de la tasa spot más el producto de la volatilidad de S y la volatilidad de la nueva numeraria.

Como resumen de los resultados anteriores se presenta la dinámica de S y la de precio descontado $Z_t = S_t/X_t$, en el mundo neutral al riesgo y bajo una numeraria X arbitraria.

Dinámica de S y Z bajo el mundo neutral al riesgo:

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q, \quad (A.49)$$

$$dZ_t = Z_t \sigma dW_t^Q. \quad (A.50)$$

Dinámica de S y Z bajo la medida de probabilidad Q^X asociada a una numeraria X :

$$dS_t = S_t(r_t + \sigma\sigma_t^X)dt + S_t\sigma dW_t^X, \quad (\text{A.51})$$

$$dZ_t = Z(\sigma - \sigma_t^X) dW^X. \quad (\text{A.52})$$

A continuación se muestran dos medidas útiles en la valuación de activos contingentes con más de un proceso estocástico en la fórmula del precio, la primera es la *T-Forward* inicialmente utilizada por Jamshidian (1989) y la segunda es *T-survival* determinada por Schnbucher (2000).

A.5 Medida *T-Forward* y *T-Survival*

T-Forward

La medida *T-Forward* es aquella que tiene asociada como numeraria un bono cupón cero con valor nominal de una unidad y fecha de vencimiento T , comúnmente igual a la del activo contingente, la medida se denota como Q^T y el cambio de la medida neutral al riesgo Q a Q^T es:

$$B(t)\mathbb{E}^Q \left[\frac{f_T(S)}{B(T)} | \mathcal{F}_t \right] = P_T(t, T)\mathbb{E}^T [f_T(S) | \mathcal{F}_t], \quad (\text{A.53})$$

donde $P_T(t, T)$ es el bono cupón cero con vencimiento T valuado en el tiempo t :

$$P(t, T) = \mathbb{E} \left(\frac{B(t)}{B(T)} | \mathcal{F}_t \right), \quad (\text{A.54})$$

y la derivada de Radon-Nikodym es:

$$\frac{dQ^T}{dQ} = \frac{P(T, T)B(0)}{P(0, T)B(T)}. \quad (\text{A.55})$$

El nombre de la medida Q^T proviene del hecho de que bajo esta, las tasas forward son martingalas y por ende estimadores insesgados de las tasas spot:

$$\mathbb{E}^T [r(T) | \mathcal{F}_t] = f(t, T), \quad (\text{A.56})$$

donde $0 \leq t \leq T$, y

$$f(t, T) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}. \quad (\text{A.57})$$

Demostración

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^T [r(T) | \mathcal{F}_t] &= \frac{1}{P(t, T)} \mathbb{E}^Q \left[\frac{B(t)}{B(T)} r(T) | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{1}{P(t, T)} \mathbb{E}^Q \left[-\frac{\partial}{\partial T} \frac{B(t)}{B(T)} | \mathcal{F}_t \right] \\ &= -\frac{1}{P(t, T)} \frac{\partial P(t, T)}{\partial T} \\ &= -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}. \end{aligned}$$

Asimismo resolviendo (A.57) tenemos:

$$P(t, T) = \exp \left(- \int_t^T f(t, u) du \right), \quad (A.58)$$

y

$$r(t) = f(t, t). \quad (A.59)$$

Para el caso de tasas forward discretas como las que se observan en el mercado tenemos:

$$F_t(S, T) = \frac{1}{\tau(t, T)} \left[\frac{P(t, S)}{P(t, T)} - 1 \right],$$

donde:

$\tau(S, T)$: es el periodo de intereses relacionados con la tasa expresada en fracciones de año.

APÉNDICE 2

EMPRESAS	Ind Med	Beta FX	Beta TIME	Volatilidad	Beta Desempleo	λ_i	$P(\tau_i \leq 1 \text{ año})$
Hogar Consorcio	0.85	-2.36	-0.61	0.29	0.51	0.0831%	0.252%
Mexichem SA de CV	0.69	-1.55	-0.10	0.20	-0.05	0.0607%	0.243%
Casa Cuervo	0.73	-0.47	0.20	0.14	0.18	0.0225%	0.080%
Grupo Lafi	1.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.0066%	0.026%
El Universal	0.61	0.26	-0.11	0.05	0.02	0.0892%	0.277%
Inmobiliaria RUBA	1.19	0.14	0.00	0.05	-0.25	0.0041%	0.016%
Centro Historico	0.80	0.50	0.29	0.03	-0.07	0.0131%	0.052%
Confuerte	0.34	0.86	0.13	0.19	-0.54	0.5962%	2.353%
Nacional Financiera	0.60	-10.56	-1.08	0.84	1.27	0.4036%	1.602%
Panamco Mexico	0.38	-1.38	-0.15	0.20	0.70	0.1766%	0.704%
Construcco y Drenaje	0.75	13.15	1.51	0.59	-1.45	2.4447%	9.316%
Dinamia Pedregal	0.77	0.03	-0.02	0.02	0.07	0.0218%	0.087%
Ind Unidas	0.50	-0.14	0.03	0.04	-0.17	0.0910%	0.363%
Facileasing	0.04	-0.39	0.03	0.03	-0.03	0.6418%	2.635%
Xignux	0.40	-0.13	0.10	0.05	-0.13	0.1293%	0.516%
Desarrolladora Metr	0.56	-0.32	-0.14	0.08	0.28	0.0787%	0.314%
Corp Metropolitana	0.30	-0.40	-0.09	0.06	0.34	0.2081%	0.829%
Copamex	0.35	-1.19	-0.05	0.07	-0.06	0.1720%	0.685%
Cablemas SA CV	0.60	-0.02	0.04	0.01	-0.05	0.0460%	0.180%
Ferrocarril Mex	0.58	4.46	0.80	0.24	0.12	0.0972%	0.388%
Tenedora Nermak	0.56	-0.08	-0.03	0.05	-0.07	0.0763%	0.305%
Sare	1.18	-1.80	-0.66	0.12	-0.59	0.0199%	0.079%
Hvlsa	0.61	0.07	0.12	0.06	-0.01	0.0462%	0.185%
América Telecom	0.38	-2.88	-0.53	0.16	-0.01	0.3805%	1.492%
Volkswagen Mexico	0.45	0.08	-0.04	0.03	0.11	0.1068%	0.426%
Arca Embotelladora	0.82	-1.59	-0.18	0.11	-0.06	0.0243%	0.097%
US Commercial	0.65	0.82	-0.19	0.12	-0.05	0.1198%	0.478%
Angos Embotelladora	0.64	-1.95	-0.31	0.16	0.21	0.0715%	0.286%
Mundo E	0.52	-0.01	0.01	0.01	0.04	0.0656%	0.262%
Bret Embotelladora	0.61	-0.09	0.01	0.06	-0.09	0.0557%	0.222%
Urbi Desarrollos	1.09	-2.95	-0.85	0.09	-0.28	0.0204%	0.081%
Acer Latinoamerica	0.62	-4.62	-0.60	0.50	-2.81	3.7130%	13.802%
Cablevision	1.01	-0.93	0.05	0.12	-0.01	0.0078%	0.031%
Opicap	1.16	1.53	0.16	0.16	0.69	0.0042%	0.017%
Remex	0.21	-5.11	-0.18	0.65	1.08	0.9302%	3.653%
América Móvil	0.62	-2.94	-0.09	0.20	-0.07	0.0553%	0.221%
Unefon	0.32	-1.12	0.19	0.27	-0.35	0.3898%	1.547%
Duty Free SA de CV	0.50	-1.41	-0.22	0.24	-0.17	0.2721%	1.083%
ASureste	1.02	-1.18	0.21	0.22	-0.03	0.0079%	0.032%
Hornex Desar	0.98	1.96	0.02	0.05	-0.07	0.0164%	0.066%
Asea	0.78	-0.72	-0.09	0.20	-0.02	0.0481%	0.192%
Maizoro SA de CV	0.65	0.51	-0.15	0.20	0.17	0.1302%	0.519%
GProve Quim	0.67	-0.89	-0.19	0.25	-0.01	0.1222%	0.488%
Embot Valle Anahuac	0.82	-2.01	-0.25	0.32	-0.34	0.0874%	0.349%
GSanborns	0.44	-0.83	-0.18	0.18	-0.07	0.2766%	1.101%
Gomo Gpo	1.04	1.87	0.03	0.31	0.79	0.0211%	0.084%
GFansa	0.70	-0.09	0.12	0.54	-1.38	0.8405%	3.306%
Cosamex	0.54	0.12	-0.13	0.15	-0.19	0.1907%	0.760%
Universidad CNCI	0.80	-1.89	-0.65	0.47	0.57	0.2328%	0.927%
TVAzteca	0.48	-1.34	-0.33	0.27	0.25	0.3139%	1.248%
Cid Mega Resort	0.79	-0.46	0.05	0.24	0.48	0.0305%	0.122%
Collado SA	0.58	-1.29	-0.10	0.26	0.32	0.1084%	0.433%
Corp Mex Restaurant	0.74	-0.66	0.04	0.20	-0.26	0.0580%	0.224%
Plavico, S.A. de C.	0.87	0.22	-0.05	0.08	0.02	0.0189%	0.075%
Biper SA de CV	0.14	-2.80	-0.75	0.35	0.85	2.5482%	9.690%
Minsa SA	0.68	0.96	0.03	0.25	0.38	0.0913%	0.365%
Denmet de Mexico SA	0.57	-1.28	0.01	0.18	-0.44	0.1132%	0.462%
Telchem SA	0.49	-1.90	-0.54	0.29	-0.51	0.8028%	3.160%
Carso Global Teleco	0.53	-2.05	-0.33	0.22	-0.09	0.2118%	0.844%
Corp Interam de Ent	0.66	-1.04	-0.18	0.27	-0.59	0.2095%	0.823%
Imsa Gpo	0.65	-1.12	-0.41	0.24	-0.23	0.2254%	0.898%
Bafar Grupo	0.75	-1.39	-0.28	0.15	-0.21	0.0817%	0.247%
Ara Consorcio	1.55	-2.25	-0.45	0.19	0.23	0.0012%	0.005%
Fragua Corporatho	0.89	-1.73	-0.28	0.17	-0.01	0.0266%	0.106%
GCorvi	0.58	-2.58	-0.41	0.21	0.24	0.1194%	0.476%
Bachoco Industrias	1.03	-1.00	-0.10	0.19	0.03	0.0125%	0.050%
Fomento Econ Mex	0.68	-0.60	-0.25	0.31	-0.29	0.3848%	1.527%
Coppel SA de CV	0.92	0.28	0.02	0.07	-0.10	0.0152%	0.061%

Cuadro A2.1 Probabilidades de incumplimiento a un año.

EMPRESAS	Ind Med	Beta FX	Beta TME	Volatilidad	Beta Desempleo	λ	$P(r_t \leq 1.69\sigma)$
Iem S.A	0.59	-0.25	-0.07	0.06	0.09	0.0607%	0.242%
Lamosa Gpo	0.55	-0.76	-0.10	0.17	0.00	0.1266%	0.505%
Convertidora Ind.	0.82	-2.47	-0.43	0.18	0.19	0.0369%	0.148%
Diana Editorial	0.85	0.16	0.28	0.20	-0.53	0.0306%	0.122%
Union de Capitales	1.09	-0.98	0.00	0.17	0.12	0.0066%	0.026%
Procorp S.A.	1.21	0.07	-0.03	0.12	0.10	0.0042%	0.017%
Control de Farmacia	0.94	-0.50	-0.09	0.57	0.52	0.0705%	0.282%
Hilasal Mexicana	0.66	-2.58	-0.23	0.24	-0.49	0.1169%	0.466%
Hylsamex	0.48	-1.38	-0.40	0.32	-0.08	0.5919%	2.340%
Nutrisa Gpo	1.21	-0.24	0.19	0.11	0.17	0.0022%	0.009%
Geo Corporacion	0.87	-0.94	-0.48	0.32	0.30	0.0940%	0.375%
Dixon Ticonderoga	1.21	0.00	-0.19	0.13	0.09	0.0061%	0.025%
GfMacma S.A.	0.58	-0.67	-0.25	0.22	-0.30	0.2416%	0.962%
Planacion y Proyec	1.12	-0.85	-0.29	0.41	0.24	0.0321%	0.128%
Sigma Grupo	0.56	-1.34	-0.54	0.23	-0.31	0.4377%	1.736%
GModelo	1.12	-0.15	0.08	0.12	-0.28	0.0067%	0.027%
Pepsiq (Gemex)	0.52	-0.58	-0.32	0.19	-0.02	0.2661%	1.059%
Valle Jugos del	0.63	-1.77	-0.31	0.27	-0.28	0.2005%	0.799%
Bekra Gpo	0.65	-1.94	-0.61	0.34	-0.34	0.4730%	1.874%
Medica Sur	0.77	-2.57	-0.36	0.27	0.13	0.0622%	0.240%
Quimra Gpo S.A.de	0.69	-0.88	-0.44	0.30	0.16	0.2091%	0.833%
Coca Cola Femsa	0.53	-0.20	-0.18	0.16	-0.20	0.2123%	0.846%
Far-ben	0.55	-1.89	-0.22	0.33	-0.22	0.3000%	1.193%
Radio Centro	0.79	-0.81	-0.39	0.24	0.15	0.0949%	0.379%
GAccion	0.74	-2.36	-0.19	0.27	-0.25	0.0714%	0.285%
Saba Casa Grupo	0.82	-0.26	-0.04	0.22	-0.22	0.0544%	0.218%
Televisa Gpo	0.74	-0.81	-0.29	0.21	-0.53	0.1358%	0.542%
Tubos de Acero Mex	0.76	-0.14	-0.42	0.20	-0.27	0.1572%	0.627%
Herdez S.A.	0.84	-0.89	-0.33	0.20	-0.29	0.0722%	0.289%
Regio Empresas	0.73	-0.40	-0.25	0.20	0.50	0.0640%	0.256%
Aosco S.A.	12.25	-0.77	-0.26	0.20	-0.07	0.0000%	0.000%
Gigante Gpo	0.83	-0.40	-0.13	0.14	-0.33	0.1161%	0.463%
Ghanti S.A.	0.64	-0.92	-0.10	0.25	-0.04	0.1174%	0.469%
ICA Soc Controlad	0.47	-1.31	-0.28	0.32	0.07	0.4343%	1.722%
Cementos Chihuahua	0.92	-1.14	-0.23	0.22	-0.28	0.0392%	0.157%
Nadro S.A.	0.95	0.06	0.00	0.20	-0.01	0.0232%	0.089%
Ecco	12.02	0.13	0.22	0.27	-0.15	0.0000%	0.000%
Sava	11.87	0.09	0.35	0.41	-0.17	0.0000%	0.000%
Gruma S.A.de C.V.	0.67	-0.27	-0.13	0.18	0.19	0.0790%	0.316%
GPalacio de Hierro	0.90	-0.54	0.05	0.16	-0.02	0.0179%	0.072%
GEmb Unidas	0.84	-0.25	-0.03	0.15	0.19	0.0242%	0.097%
Comercial Mexicana	0.58	-0.62	-0.22	0.22	0.07	0.1775%	0.708%
Sotiana Organizado	0.73	-0.40	-0.28	0.20	0.02	0.1008%	0.403%
Maq Diesel S.A.	0.52	-1.09	-0.13	0.13	0.38	0.0833%	0.333%
Interde Ceramica	0.50	-1.31	-0.08	0.24	-0.46	0.2651%	1.055%
Coro Modetzuma	1.12	-0.75	-0.18	0.11	0.24	0.0060%	0.024%
Penoles Industrias	0.85	0.17	-0.17	0.24	0.49	0.0447%	0.179%
Accol S.A.	0.70	-0.03	-0.29	0.34	0.16	0.2322%	0.925%
Anistos Consorcio	0.76	0.32	0.38	0.19	0.18	0.0225%	0.080%
Posadas Gpo	0.50	-0.94	-0.23	0.15	-0.02	0.1838%	0.732%
Empaques Ponderosa	0.46	-0.63	0.17	0.22	-0.77	0.2754%	1.095%
O.B. Industrias	0.40	0.66	-0.49	0.43	0.50	2.0670%	8.009%
Panras Cia Indus	0.65	0.59	0.03	0.16	-0.01	0.0843%	0.337%
Edoardo S.A.	0.95	-0.59	0.05	0.20	-0.28	0.0207%	0.083%
Wal Mart de Mexico	0.79	-0.81	-0.14	0.16	-0.09	0.0447%	0.179%
Liverpool Puerto de	0.95	-1.10	0.00	0.10	-0.26	0.0122%	0.049%
Desc Soc Form Ind	0.56	-0.96	-0.32	0.22	-0.07	0.2416%	0.962%
Gind Saitillo	0.85	-0.84	-0.46	0.22	-0.02	0.0525%	0.209%
GCarso	0.59	-0.56	-0.20	0.19	-0.10	0.1591%	0.635%
Industrias CH	0.97	-0.56	-0.43	0.21	0.15	0.0384%	0.154%
TVM Grupo	0.48	0.10	0.19	0.26	0.05	0.2007%	0.800%
GModerna	1.01	-0.53	-0.23	0.15	-0.12	0.0191%	0.076%
Maseca GI	11.41	-0.58	-0.16	0.20	0.07	0.0000%	0.000%
Continental Grupo	0.81	-0.80	-0.23	0.19	-0.18	0.0602%	0.241%
Bimbo Gpo	0.87	-0.44	-0.10	0.16	-0.17	0.0843%	0.336%
Vtro	0.41	-0.65	-0.39	0.21	0.11	0.5269%	2.086%
Cemex S.A.	0.48	-1.40	-0.44	0.22	-0.16	0.4293%	1.703%
Kimberly Clark Mex	0.74	-0.16	-0.13	0.15	-0.13	0.0529%	0.251%
Alfa S.A.	0.54	-0.23	-0.30	0.22	0.20	0.2622%	1.043%
Telats de Mex	0.66	-0.20	-0.07	0.13	-0.26	0.0832%	0.332%

Cuadro A2.1 Probabilidades de incumplimiento a un año (Continuación).

<i>Industria</i>	<i>EMPRESAS</i>	<i>P($\tau_i \leq 1$ Año)</i>
Manufactura	Mexichem SA de CV	0.350%
	Casa Cuervo	0.003%
	Corfuerte	5.622%
	Panamco Mexico	20.118%
	Ind Unidas	0.194%
	Copamex	0.478%
	Tenedora Nemark	0.286%
	Hylsa	0.068%
	Volkswagen Mexico	0.574%
	Arca Embotelladora	0.038%
	Argos Embotelladora	1.153%
	Bret Embotelladora	0.089%
	Acer Latinoamerica	9.073%
	Pemex	6.034%
	Alsea	0.004%
	Maizoro SA de CV	0.625%
	Embot Valle Anahuac	0.386%
	Plavico, S.A. de C.	0.024%
	Minsa S.A.	0.233%
	Tekchem S.A.	0.890%
	Imsa Gpo	0.320%
	Fomento Econ Mex	0.982%
	Iem S.A.	0.209%
	Lamosa Gpo	0.073%
	Convertidora Ind.	0.043%
	Hilasal Mexicana	0.272%
	Hylsamex	0.512%
	GMacma, S.A.	0.507%
	GModelo	0.005%
	Pepsigx (Gemex)	0.982%
	Valle Jugos del	1.146%
	Coca Cola Fensa	0.571%
	Tubos de Acero Mex	0.079%
	Herdez S.A.	0.085%
	Regio Empresas	0.221%
	Apasco S.A.	0.000%
	Cementos Chihuahua	0.048%
	Ekco	0.000%
	Gruma S.A. de C.V.	0.225%
	GEmb Unidas	0.040%
	Inter de Ceramica	1.187%
	Corp Moctezuma	0.006%
	Empaques Ponderosa	0.204%
	Q.B. Industrias	7.425%
	Parras Cia Indus	0.635%
	Edoardo S.A.	0.043%
	Desc Soc Forn Ind	0.898%
	GInd Saitillo	0.088%
	Industrias CH	0.024%
	GModerna	0.020%
Maseca GI	0.000%	
Continental Grupo	0.106%	
Bimbo Gpo	0.257%	
Vitro	2.418%	
Cemex S.A.	1.548%	
Kimberly Clark Mex	0.086%	
Alfa S.A.	0.575%	

Cuadro A2.2 Probabilidades de incumplimiento a un año con parámetros por industria.

Industria	EMPRESAS	$P(r, \leq 1 \text{ Año})$
Agricultura	Bafar Grupo	0.000%
	Bachoco Industrias	0.000%
	Sigma Grupo	0.000%
	Savia	0.000%
Construcción	Hogar Constructo	0.007%
	Inmobiliaria RUBA	0.000%
	Constus y Derivats	0.055%
	Dinamia Pedregal	0.041%
	Desarmadora Metr	2.674%
	Sare	0.000%
	Urb Desarrollos	0.000%
	Homev Desarri	0.001%
	Ara Construdo	0.000%
	Geo Corporacion	0.006%
	Planacion y Proyec	0.000%
	CAccion	0.001%
ICA Soc Controlad	13.292%	
Servicios	El Universal	0.606%
	Centro Historico	0.111%
	Nacional Financiera	100.000%
	Facileasing	66.596%
	Xignux	4.704%
	Corp Metropolitana	12.158%
	Mundo E	1.638%
	Opcap	0.003%
	Costamex	1.222%
	Cid Mega Resort	0.246%
	Corp Mex Restaurant	0.438%
	Corp Interam de Ent	1.132%
	Diana Editorial	0.089%
	Union de Capitales	0.031%
	Procorp S.A.	0.005%
	Dixon Ticonderoga	0.005%
	Medica Sur	1.421%
	Qumma Gpo S.A. de	0.767%
	Accel S.A.	0.360%
	Aristos Consorcio	0.170%
Posadas Gpo	3.792%	
Comunicaciones y Transportes	GCarsa	1.303%
	Cablemas S.C. CV	0.206%
	Ferrocarril Mex	0.106%
	América Telecom	1.122%
	Cablexión	0.005%
	América Móvil	0.162%
	Unión	0.129%
	ASureste	0.005%
	TV Azteca	0.134%
	Ripar S.A. de C.V.	0.163%
	Carsa Global Telecom	0.466%
	Radio Centro	0.016%
	Televisa Gpo	0.571%
Timotelec	0.340%	
Telcel de Mex	0.326%	

Cuadro A2.2 Probabilidades de incumplimiento a un año con parámetros por industria (Continuación).