

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS  
SUPERIORES DE MONTERREY

---

---

CAMPUS CIUDAD DE MÉXICO



FINANZAS CUÁNTICAS

DOCTORADO EN CIENCIAS FINANCIERAS

TESIS PRESENTADA POR

FRANCISCO ORTIZ ARANGO

ASESOR

DR. FRANCISCO VENEGAS MARTÍNEZ

AGOSTO 2007

## RESUMEN

En este trabajo de investigación se plantea el uso de la Integral de Trayectoria de Feynman y de la Teoría Espectral, dos de las herramientas más útiles y poderosas de la mecánica cuántica, para resolver problemas relacionados con las finanzas. Para lo cual se inicia con una breve introducción a los principios fundamentales de la mecánica cuántica, es así como se describen los conceptos de Lagrangiano y Hamiltoniano, tanto en la mecánica clásica como en la mecánica cuántica. Se pasa después a describir la función de onda así como a los operadores, para llegar a la ecuación diferencial parcial de Schrödinger y el principio de incertidumbre de Heisenberg.

Posteriormente se plantea el concepto de la integral de trayectoria de Feynman mediante una descripción estocástica, al considerar el problema de efectuar el cálculo de probabilidades para que un móvil se mueva de un punto a otro a través de una rejilla con dos perforaciones, posteriormente se agrega una segunda rejilla y así sucesivamente hasta tener  $n$  rejillas, esto sirve como base para describir el comportamiento más general de un sistema al pasar de un estado a otro siguiendo diferentes alternativas o caminos. Con estos conceptos se define después el concepto de la acción y del propagador que forman la base del análisis del comportamiento de los sistemas dinámicos a lo largo del tiempo.

Con las bases conceptuales anteriores se plantea de manera formal la integral de trayectoria en el campo de las Finanzas. Se efectúa el cálculo del Hamiltoniano de Black y Scholes, tomando como símil el Hamiltoniano de la ecuación

de Schrödinger y con este enfoque se resuelven diversos problemas de las finanzas como la valuación de activos cuyos precios dependen de una trayectoria, problemas de opciones con barreras y se consideran problemas con volatilidad estocástica, también se analiza el modelo de tasas de Vasicek, llegando a resultados similares a los obtenidos en el artículo original.

Finalmente se plantean los conceptos completamente nuevos de capitales Cinético y Potencial, se plantea una manera alternativa del principio de Incertidumbre en las finanzas y se plantea como utilizar la teoría espectral como una técnica que sirva para identificar los estados más probables del comportamiento de los precios de un activo.

# Índice

	Página
<b>Introducción</b> .....	ix
<b>CAPÍTULO 1. Formulación matemática de la mecánica cuántica</b> ....	1
1.1 Lagrangiano .....	1
1.2 Hamiltoniano con enfoque de mecánica clásica .....	5
1.3 Principios fundamentales de la mecánica cuántica .....	8
1.3.1 La función de onda y el principio de superposición .....	11
1.4 Operadores, tipos y reglas .....	13
1.4.1 Propiedades de los operadores .....	17
1.4.2 La matriz de densidad .....	18
1.5 El Hamiltoniano en la mecánica cuántica y la ecuación de onda .....	19
1.6 La notación matricial para las magnitudes físicas y la notación de Dirac .....	25
1.7 Ecuación de Schrödinger .....	30
1.8 Principio de Incertidumbre de Heisenberg .....	32
<b>CAPÍTULO 2. La integral funcional o de Feynman</b> .....	34
2.1 Elementos básicos para describir la integral funcional .....	34
2.1.1 Introducción .....	34
2.2 El operador de evolución y el propagador de Feynman .....	40
2.3 Obtención de la Integral Funcional o de Feynman .....	43
2.4 Ejemplos físicos .....	50
2.4.1 Propagador de la partícula libre .....	50
2.4.2 Propagador del oscilador armónico .....	52
<b>CAPÍTULO 3. La integral funcional aplicada en las Finanzas</b> .....	54

3.1 Hamiltoniano de Black y Scholes .....	54
3.1.1 Introducción .....	54
3.1.2 Determinación del Hamiltoniano de Black y Scholes .....	56
3.2 Kernel del precio de opciones de compra europeas y su función propia solución .....	61
3.2.1 Kernel del precio para opciones .....	61
3.2.2 Función propia (eigenfunción) del kernel del precio .....	63
3.2.3 Determinación del kernel de precios de Black y Scholes .....	65
3.3 Formulación del Hamiltoniano para la condición de martingala .....	66
3.4 Potenciales en la valuación de opciones .....	68
3.5 Lagrangiano de Black y Scholes .....	75
3.5.1 Introducción .....	75
3.5.2 El Lagrangiano y la acción para el kernel de precios .....	77
3.5.3 El Lagrangiano de Black y Scholes .....	78
3.6 Integrales de trayectoria para opciones cuyo valor depende de la trayectoria .....	81
3.7 Lagrangiano para el precio de una acción con volatilidad estocástica .....	82
3.8 Principio de Incertidumbre de Heisenberg en las Finanzas .....	86
3.9 Propiedades y analogías entre las ecuaciones de Black y Scholes y de Schrödinger .....	89
<b>CAPÍTULO 4. Análisis del modelo de tasa corta de Vasicek mediante el uso de la integral de Feynman .....</b>	<b>92</b>
4.1 Introducción .....	92
4.2 Deducción del Lagrangiano y la acción de Fokker-Planck hacia atrás .....	92
4.3 Desarrollo del modelo de Vasicek utilizando la integral	

de Feynman .....	96
------------------	----

<b>CAPÍTULO 5. Análisis Espectral y la interpretación del Hamiltoniano en Finanzas .....</b>	<b>103</b>
5.1 Introducción .....	103
5.2 Interpretación del Hamiltoniano y Lagrangiano de Black y Scholes desde el enfoque de las Finanzas .....	104
5.3 Nueva versión del Principio de Incertidumbre de Heisenberg en las Finanzas .....	106
5.4 Análisis espectral y su aplicación en las Finanzas.....	117
<b>Conclusiones .....</b>	<b>115</b>
<b>Futuras líneas de investigación .....</b>	<b>116</b>
<b>Apéndices .....</b>	<b>117</b>
Apéndice A. Integral Gaussiana.....	117
<b>Bibliografía.....</b>	<b>119</b>

# LISTA DE GRÁFICAS Y CUADROS

## Gráficas

Gráfica 1.1 Variación de las trayectorias para ir de un punto inicial a uno final.

Gráfica 2.1 Posibles trayectorias de una partícula al atravesar una pantalla con dos rejillas.

Gráfica 2.2 Posibles trayectorias de una partícula al atravesar dos pantallas con dos rejillas.

Gráfica 2.3 Descoposición del propagador en una serie de propagadores “cortos”.

Gráfica 2.4 Trayectorias posibles, incluyendo la línea recta de la trayectoria clásica.

Gráfica 3.1 Propagación de información hacia atrás.

Gráfica 3.2 Barreras de potencial para opción con barreras “double-knock-out”.

Gráfica 5.1 Tipos de espectros de un operador.

# Introducción

El objetivo principal de esta tesis tiene que ver con el trabajo iniciado hace varios años por un grupo de físicos que estudiaban algunos problemas económico-financieros, mediante el modelado de problemas complejos y sus respectivas propuestas de solución por métodos analíticos o numéricos utilizados en la física. Esta tendencia dio lugar al nacimiento de la denominada “Econo-Física” y sus variantes. Una de las variantes más recientes es lo que se conoce como finanzas cuánticas, que esencialmente consisten en emplear métodos y conceptos de la mecánica cuántica en finanzas, en particular en el estudio de los productos derivados y de los modelos de tasas de interés.

Se pueden señalar tres fechas importantes que motivan la elaboración de este trabajo: En enero de 1926, el físico austriaco Erwin Schrödinger, publica en el “Annalen der Physik” (Anales de Física) su artículo seminal “Quantisierung als Eigenwertproblem” (La cuantización como un problema de valores propios), el cual trata sobre la mecánica ondulatoria y desarrolla la ecuación diferencial parcial (ecuación de onda) para sistemas independientes del tiempo, que lleva su nombre. Con la ecuación de Schrödinger se describe el comportamiento de los niveles de energía de un electrón en un átomo de hidrógeno. El trabajo de Schrödinger fue uno de los más importantes y en 1933 junto con el de Paul M. Dirac obtuvieron premio Nobel de Física. Por otro lado, en 1973, Myron Scholes y Fischer Black publicaron su artículo seminal de las matemáticas financieras modernas “The Pricing of Options and Corporate Liabilities” en el “Journal of Political Economy”, en este artículo Black y Scholes obtienen una ecuación diferencial parcial de segundo orden de tipo parabólico y lineal, cuya solución proporciona el precio de una opción de compra europea, siendo condición final



el valor intrínseco de la opción. Prácticamente, de manera simultánea Robert Merton publica también en 1973 el artículo “Theory of Rational Option Pricing” en el “Bell Journal of Economics and Management Science”, en el cual obtuvo resultados similares a los de Black y Scholes, además de algunas generalizaciones y varios resultados adicionales. Gracias a estos artículos se tuvo un avance sustancial en las matemáticas financieras en tiempo continuo, lo cual les valió a Merton y a Scholes (Fisher Black había fallecido en 1995) la obtención del premio Nobel de Economía en 1997. La tercera fecha relevante es 1977, año en que Oldrich Alfons Vasicek publica su artículo “An Equilibrium Characterization of the Term Structure”, en el “Journal of Financial Economics”, en éste artículo el profesor Vasicek plantea un modelo de equilibrio para determinar la estructura de plazos de la tasa de interés; este trabajo es considerado el parteaguas en el estudio formal de la teoría de tasas de interés en tiempo continuo. El hecho de que existan alrededor de 50 años de diferencia entre la primera fecha con respecto a la segunda y tercera fechas es determinante, puesto que a lo largo de este casi medio siglo, un gran número de científicos de todo el mundo se dedicaron a desarrollar muchas y muy variadas técnicas para resolver la ecuación de Schrödinger y problemas posteriores más complejos relacionados con el comportamiento de los electrones en los átomos. Algunas de estas técnicas presentan un alto grado de desarrollo en la solución de problemas complejos de la física. Como se ha mencionado antes, estas técnicas se han empezado a utilizar de manera exitosa en la solución de algunos problemas financieros, como se verá en el desarrollo del presente trabajo.

Una de las técnicas más empleadas en las finanzas cuánticas es el de la integral de trayectoria utilizada por primera vez en la mecánica cuántica por Richard Feynman, quien obtuvo el premio Nobel de Física en 1965. Esta técnica que conlleva cierta complejidad matemática, proporciona una interpretación in-

tuitiva muy sencilla de la dinámica de un sistema por la manera en que se va construyendo en pequeños intervalos de tiempo, además de considerar todas las trayectorias posibles en las que el sistema puede comportarse en dichos intervalos de tiempo. A cada trayectoria se le asigna una probabilidad de ocurrencia dentro del resultado total, de tal forma que al considerar todas las trayectorias posibles para ir de un estado a otro del sistema, se puede calcular la trayectoria media esperada. El aspecto más complejo en este proceso es encontrar una función que asigne probabilidades de ocurrencia a cada trayectoria, la función resultante es una función de densidad de probabilidad condicional a la cual se le denomina el kernel del proceso. Así, el problema se circunscribe en su primera etapa en determinar la forma funcional de dicho kernel.

Las aportaciones del autor de este trabajo se pueden clasificar en dos grupos: de desarrollo conceptual matemático y numérico.

Las aportaciones de tipo conceptual son las siguientes:

- a) Interpretación del concepto de energía con su homólogo financiero.
- b) Propuesta de la existencia de capital potencial y capital cinético.
- c) Un nuevo planteamiento del principio de incertidumbre en su versión financiera.
- d) El uso de la teoría espectral para medir el grado de volatilidad de un activo financiero.
- e) Clasificación de los grados de volatilidad de un activo financiero con base en la teoría espectral.

Las aportaciones de desarrollo matemático y numérico son las siguientes:

- a) Deducción de la expresión para el Hamiltoniano de Black y Scholes.
- b) Deducción de la expresión para el Hamiltoniano de Merton-Garman para opciones con volatilidad estocástica.
- c) Deducción de la expresión para el Lagrangiano del modelo de tasas de

Vasicek.

El presente trabajo de tesis se encuentra organizado de la siguiente manera: En el capítulo 1 se hace una breve descripción de los elementos fundamentales de la mecánica cuántica. Se inicia el capítulo con los conceptos de Lagrangiano y Hamiltoniano bajo el enfoque de la mecánica clásica. El objetivo es familiarizarse con estos conceptos mediante la formulación de problemas sencillos, con lo cual la transición hacia problemas financieros puede hacerse con mayor facilidad. Para introducir el Hamiltoniano con el enfoque cuántico se presentan primero los conceptos de función de onda y de operadores (observables), así como sus reglas de uso. En la parte final se plantea la ecuación fundamental de la mecánica cuántica, la ecuación diferencial parcial de Schrödinger y el principio de incertidumbre de Heisenberg.

El capítulo 2 se dedica a plantear la integral de trayectoria de Feynman con una descripción estocástica muy simple para el cálculo de las probabilidades de ir de un punto a otro a través de una rejilla con dos perforaciones, después se agrega una segunda rejilla y así sucesivamente. Con esta idea en mente se plantea el hecho de que si se desea analizar el comportamiento de un sistema cuando pasa de un estado a otro siguiendo alguna o algunas trayectorias, entonces es importante analizar cómo afecta al sistema la elección de una determinada trayectoria. En particular se menciona que en el caso de la mecánica clásica la trayectoria seguida por una partícula o un sistema de partículas para cambiar de un estado a otro será aquella en la cual se minimice la energía consumida o de manera más propia aquella que minimice su acción. Posteriormente se define de manera formal la integral de trayectoria y se resuelven algunos problemas de cálculo del propagador (la función que describe la evolución del sistema a lo largo de un intervalo de tiempo) .

En el capítulo 3 se hace la presentación formal de la integral de trayectoria

dentro del campo de las finanzas. Se inicia con el cálculo del Hamiltoniano de Black-Scholes y se distingue del Hamiltoniano mecánico cuántico de Schrödinger. Posteriormente se calcula el kernel de precios de Black-Scholes empleando dicho Hamiltoniano. Se analizan las limitaciones que tiene el Hamiltoniano de Black-Scholes por las propiedades mismas de los operadores. A partir de esto se recurre al uso de la integral de trayectoria junto con su principal herramienta, el Lagrangiano, con esta herramienta se analiza el problema de valuación de activos cuyos precios dependen de la trayectoria seguida por estos, como el problema con barreras de potencial y casos con volatilidad estocástica. Por último, el capítulo concluye planteando el principio de incertidumbre de Heisenberg pero en su versión financiera.

El capítulo 4 se dedica a analizar el modelo de tasas de Vasicek empleando como herramienta de análisis la integral de trayectoria de Feynman y los conceptos conexos, como el Hamiltoniano, el Lagrangiano y la acción, de hecho se deduce la expresión para el Lagrangiano de Vasicek y con ella se construye la expresión para la acción, la cual es empleada para ser integrada mediante la integral de trayectoria de Feynman para encontrar el precio de un bono cupón cero que obedece el modelo de Vasicek en el comportamiento de su tasa corta. Aprovechando esto se logra encontrar la expresión para calcular la tasa forward del modelo de Vasicek.

El capítulo 5 contiene la mayor parte de las aportaciones y contribuciones del trabajo, las cuales están agrupadas en tres secciones, en la primera se plantean las equivalencias entre la energía, el Hamiltoniano, la masa y la velocidad en la mecánica cuántica con sus “homólogos” en finanzas. Luego se plantea una versión alternativa del principio de incertidumbre de Heisenberg. Al final se presenta un breve resumen sobre análisis espectral y se propone una forma de identificar los

estados más probables para describir el comportamiento de los precios de un activo.

Por último se presentan las conclusiones, un apéndice, la bibliografía y algunas líneas de investigación futuras.

# CAPÍTULO 1

## Formulación matemática de la mecánica cuántica

### 1.1 Lagrangiano.

La mecánica Lagrangiana puede considerarse como una reformulación de la mecánica clásica o Newtoniana, ésta fue desarrollada por Joseph Lagrange alrededor de 1788. La base en que se fundamenta la mecánica Lagrangiana es que entre todas las trayectorias posibles que puede seguir un sistema mecánico para pasar de un estado A a un estado B se debe elegir aquella que minimice la acción, esta última es considerada como la integral del Lagrangiano durante el tiempo del movimiento. Por otro lado, el Lagrangiano es igual a la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial asociada al sistema durante el movimiento.

De lo anterior, el Lagrangiano o función de Lagrange de un sistema mecánico estará dado por:

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(q_i, \dot{q}_i, t) - U(q_i, \dot{q}_i, t), \quad (1.1)$$

donde  $T(q_i, \dot{q}_i, t)$  es la energía cinética del móvil y  $U(q_i, \dot{q}_i, t)$  es la energía potencial de éste, ambas cantidades están dadas en función de las variables vectoriales  $q_i(t)$  denominadas coordenadas generalizadas y  $\dot{q}_i(t)$  velocidades generalizadas, en estas últimas el punto denota la derivada con respecto del tiempo de la variable. Lo anterior implica que el estado de cualquier sistema mecánico queda completamente descrito si se conocen los valores de las coordenadas y las velocidades generalizadas.

Otra cantidad física muy importante es la acción, la cual está dada por la integral del Lagrangiano a través del tiempo a lo largo de una trayectoria arbitraria  $q_i(t)$  quedando entonces la ecuación:

$$S(q_i) = \int_{t_A}^{t_B} dt L(q_i, \dot{q}_i, t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.2)$$

Una interpretación sencilla del concepto de acción haciendo una analogía con el concepto de impulso en la mecánica clásica es como sigue. Desde el punto de vista de la mecánica clásica el impulso se puede interpretar como la capacidad para generar un cambio en la cantidad de movimiento de un móvil y está dada por la fórmula

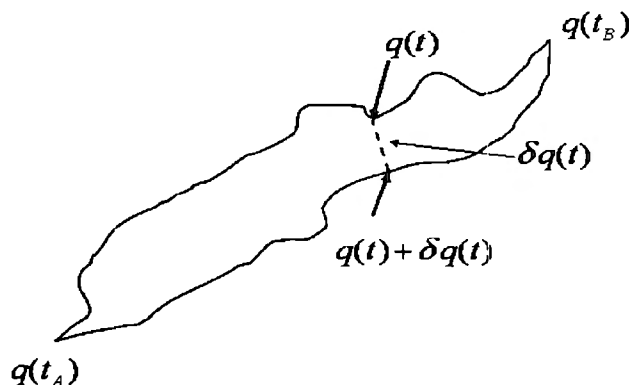
$$I = F\Delta t = \Delta p, \quad (1.3)$$

donde  $I$  es el impulso,  $p$  la cantidad de movimiento o momento lineal del móvil,  $F$  es la fuerza que se aplica al móvil y  $\Delta t$  es el intervalo de tiempo en el que se aplica la fuerza al móvil y genera el cambio en la cantidad de movimiento  $\Delta p$ . Bajo esta misma idea es posible considerar que la acción es la capacidad para generar un cambio en el estado energético de un sistema.

El principio de mínima acción, de acuerdo con Landau (1982), es la ley más general del movimiento de los sistemas mecánicos, también se le conoce como principio de Hamilton. De acuerdo a éste principio un sistema mecánico puede ser caracterizado completamente mediante una función específica  $L(q_i, \dot{q}_i, t)$  de tal manera que dicho sistema se moverá de forma tal que la acción, integral (1.2) alcance su valor más pequeño. Lo anterior, es un problema de máximos y mínimos, en este caso se busca determinar el mínimo de la integral (1.2), para simplificar la notación se puede suponer que el sistema descrito sólo tiene un grado de libertad, de tal forma que quede descrito por una sola función  $q(t)$ . Sea  $q = q(t)$  la función para la cual  $S$  tiene un mínimo, esto implica que  $S$  aumentará

si  $q(t)$  se sustituye por cualquier otra función de la forma (Véase la gráfica 1.1):

$$q(t) + \delta q(t), \quad (1.4)$$



Gráfica 1.1 Variación de las trayectorias para ir de un punto inicial a uno final.

En la ecuación (1.4), el término  $\delta q(t)$  es una función con valores muy pequeños a lo largo de todo el intervalo entre  $t_A$  y  $t_B$ , a la cual se llama variación de la función  $q(t)$ . Dado que para  $t = t_A$  y  $t = t_B$  todas las funciones definidas mediante (1.4) tendrán que tomar los mismos valores que  $q(t_A)$  y  $q(t_B)$ , por lo cual se requiere que

$$\delta q(t_A) = \delta q(t_B) = 0. \quad (1.5)$$

De esta forma, la variación que experimenta  $S$  al sustituir  $q$  por  $q + \delta q$  queda dada por la diferencia:

$$\delta S = \int_{t_A}^{t_B} dt L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - \int_{t_A}^{t_B} dt L(q, \dot{q}, t). \quad (1.6)$$



Al considerar los términos de primer orden del desarrollo en serie de potencias de esta diferencia en términos de las potencias de  $\delta q$  y  $\delta \dot{q}$ , se tiene que la condición necesaria para que  $S$  sea mínima es que el conjunto de todos los términos en (1.6) se anule, a esto se le conoce como primera variación o simplemente variación de la integral. De aquí que el principio de mínima acción pueda escribirse de la siguiente forma:

$$\delta S = \delta \int_{t_A}^{t_B} dt L(q, \dot{q}, t) = 0, \quad (1.7)$$

Si se calcula la variación, se obtiene:

$$\int_{t_A}^{t_B} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) = 0. \quad (1.8)$$

Después de considerar el hecho de que  $\delta \dot{q} = (d/dt)\delta q$ , con lo cual, si se integra por partes el segundo miembro de (1.8), se obtiene:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_A}^{t_B} + \int_{t_A}^{t_B} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q = 0. \quad (1.9)$$

Al evaluar (1.9) se puede considerar la condición (1.5), con lo cual el primer término desaparece, de donde se concluye que para que la igualdad se cumpla para cualquier valor  $\delta q$  la única posibilidad es que la función a integrar sea la función cero, de esta forma se obtiene la ecuación:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (1.10)$$

Al generalizar para  $n$  grados de libertad, se obtienen  $n$  ecuaciones de la forma:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.11)$$

Las ecuaciones diferenciales (1.11) forman un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de segundo orden con  $n$  incógnitas  $q_i(t)$ . Dentro del estudio de la mecánica

clásica este conjunto de ecuaciones recibe el nombre de ecuaciones de Euler-Lagrange de un sistema mecánico. Dichas ecuaciones establecen las relaciones existentes entre las aceleraciones, las velocidades y las coordenadas del móvil o los móviles que intervienen en un sistema mecánico. La solución general de este sistema tiene  $2n$  constantes arbitrarias, que están determinadas por las condiciones iniciales que caracterizan el estado del sistema en un instante dado, éstas podrían ser los valores iniciales de las coordenadas y las velocidades.<sup>1</sup>

## 1.2 Hamiltoniano con enfoque de mecánica clásica.

La formulación de la mecánica clásica que emplea el Lagrangiano implica que la descripción del sistema se haga utilizando sus coordenadas y velocidades generalizadas. Otra manera de describir los problemas de la mecánica es utilizar las coordenadas generalizadas  $q_i(t)$ , pero en vez de usar las velocidades generalizadas se emplean las cantidades de movimiento generalizadas (también se les denomina momentos lineales o impulsiones)  $p_i(t)$ , este planteamiento da origen a la formulación de Hamilton.

La formulación de Hamilton o mecánica Hamiltoniana no agrega detalles nuevos a la física, sin embargo es un método muy útil para trabajar con principios físicos. En términos estrictos la formulación Hamiltoniana no es superior a la formulación Lagrangiana en la solución directa de problemas mecánicos<sup>2</sup>, la utilidad real del enfoque Hamiltoniano consiste en que proporciona un marco de referencia idóneo para desarrollar extensiones teóricas en diversos campos de la física, de hecho, es la base fundamental para la construcción del lenguaje de la mecánica estadística y la mecánica cuántica.

---

<sup>1</sup> Tomado de Landau (1982), pag. 14.

<sup>2</sup> Goldstein (1996), Mecánica. Cap. 8 pag. 417

En el caso de la formulación de Hamilton, la descripción del movimiento se hace mediante ecuaciones diferenciales de primer orden, dado que el número de condiciones iniciales que determinan el movimiento siguen siendo  $2n$  (como en el Lagrangiano), necesariamente el número de ecuaciones diferenciales independientes de primer orden será también  $2n$ , expresadas en términos de  $2n$  variables independientes, de tal forma que  $n$  de estas variables serán las coordenadas generalizadas y las otras  $n$ , las cantidades de movimiento generalizadas. Bajo esta descripción la cantidad de movimiento o momento  $p_i(t)$  está definida en términos del Lagrangiano mediante la expresión:

$$p_i(t) = \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i}. \quad (1.12)$$

Las variables  $(q_i(t), p_i(t))$  se denominan variables canónicas. Desde el punto de vista matemático la transición de la formulación de Lagrange a la de Hamilton corresponde a cambiar las variables en términos de  $(q_i, \dot{q}_i, t)$  a términos de  $(q_i, p_i, t)$ , en donde  $p_i$  está relacionada con  $q_i$  y  $\dot{q}_i$  mediante la ecuación (1.12). Para pasar de un conjunto de variables independientes  $(q_i, \dot{q}_i, t)$  a las variables  $(q_i, p_i, t)$  se utiliza la transformación o transformada de Legendre, la cual fue creada específicamente para este tipo de cambio de variable. De acuerdo a la transformada de Legendre el Hamiltoniano en función del Lagrangiano está dado por:<sup>3</sup>

$$H(p_i, q_i, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t), \quad (1.13)$$

o sustituyendo (1.12) en (1.13) se obtiene:

$$H(p_i, q_i, t) = p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t). \quad (1.14)$$

Ahora bien, si se calcula la diferencial total del Hamiltoniano considerando

---

<sup>3</sup> Tomada de Goldstein (1996), Cap 8 pag. 420.

sólo los términos de las variables  $p_i, q_i$  y  $t$ , se tiene:

$$dH = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (1.15)$$

De acuerdo a la ecuación (1.14) también se obtiene:

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (1.16)$$

Al sustituir (1.12) en (1.16), se logra que el segundo y el tercer término se anulen, con lo cual se concluye que

$$dH = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (1.17)$$

Por otro lado, al sustituir (1.12) en la ecuación de Lagrange (1.11), se llega a que:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i \quad (1.18)$$

Al comparar las ecuaciones (1.15) con (1.17) y tomar en cuenta (1.18), se obtiene el siguiente conjunto de  $2n + 1$  ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ -\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{array} \right. \quad (1.19)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (1.20)$$

Al conjunto de ecuaciones (1.19) se les conoce como las ecuaciones canónicas de Hamilton, éstas forman un sistema de  $2n$  ecuaciones diferenciales de movimiento de primer orden que sustituyen a las ecuaciones de Euler-Lagrange (sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de movimiento de segundo orden). Con base en la definición del Hamiltoniano, Kleinert (2006) establece que la forma canónica de la acción puede calcularse mediante la expresión:

$$S(p_i, q_i) = \int_{t_A}^{t_B} dt [p_i(t) \dot{q}_i(t) - H(p_i(t), q_i(t), t)]. \quad (1.21)$$

Si ahora se calcula la derivada total del Hamiltoniano respecto del tiempo considerando las ecuaciones (1.19) se llega a:<sup>4</sup>

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (1.22)$$

En el caso particular de que el Hamiltoniano sea una función independiente del tiempo la derivada se anula y esto es de gran importancia pues es otra manera de formular la ley de la Conservación de la Energía. Con esto se concluye lo referente al Hamiltoniano con el enfoque de la mecánica clásica, la siguiente sección se avocará a plantear el Hamiltoniano con el enfoque de la mecánica cuántica.

## 1.3 Principios fundamentales de la mecánica cuántica

En esta sección se plantearán los conceptos y principios básicos sobre los que se construye la teoría de la mecánica cuántica. La mecánica cuántica estudia los fenómenos atómicos, también se le da el nombre de mecánica ondulatoria, la mecánica cuántica se fundamenta en ideas totalmente diferentes a las de la mecánica clásica, una de estas que es de vital importancia es el hecho de que en mecánica cuántica no existe el concepto de trayectoria de la partícula, esto último constituye el contenido esencial del Principio de Incertidumbre de Heisenberg, descubierto en 1927 por Werner Heisenberg, más adelante se estudiará con detalle dicho principio, según Landau (vol.2 1982).

Algo que se debe hacer notar en este momento es el hecho de que entre la mecánica clásica y la cuántica existe una relación muy peculiar, por lo general, una teoría más general se puede formular íntegramente de manera independiente de una teoría menos general, que constituya un caso límite de la primera. En

---

<sup>4</sup> Tomado de Landau (1982), Cap.7, pag. 113.

el caso de la mecánica cuántica, ésta contiene a la mecánica clásica como límite suyo, pero al mismo tiempo requiere varios elementos de este caso límite para su propia formulación.

El tipo de problema más común e importante en la mecánica cuántica es el proceso de medición y este proceso tiene aquí una particularidad muy significativa: la medición siempre ejerce una acción (influencia) sobre lo que se mide, esto se debe al tamaño de los entes que se miden, electrones, protones, núcleos. Sucede que entre más precisa pretenda ser una medición mayor será la acción ejercida por ésta sobre lo que se desea medir y viceversa. Una de las mediciones más importantes es la de las coordenadas de posición de un electrón. Lo que se puede observar en este caso es que entre más precisa sea la medición, los resultados serán más irregulares y desordenados, lo cual es acorde con el hecho de la inexistencia del concepto de trayectoria para un electrón, para obtener una trayectoria más o menos suave, las coordenadas del electrón deben medirse con un grado de precisión no muy grande, por ejemplo con el experimento de la condensación de gotas de vapor en una cámara de niebla.

Por otro lado, si se supone que se mantiene constante un nivel bajo en la precisión de las mediciones de las coordenadas del electrón, pero se van disminuyendo los intervalos de tiempo  $\Delta t$  entre ellas, los resultados de una serie de mediciones sucesivas estarán confinadas en una pequeña región del espacio pero de manera completamente desordenada, impidiendo determinar un patrón o más propiamente una curva que determine este comportamiento. Esta situación conduce a que en mecánica cuántica tampoco existe el concepto de velocidad en el sentido clásico.

Con base en los dos párrafos anteriores se llega a un punto crucial en la mecánica cuántica, las coordenadas de posición y las velocidades del electrón

son magnitudes que no pueden medirse simultáneamente, esto significa que no pueden determinarse sus valores al mismo tiempo, o como se verá más adelante las coordenadas de posición y la velocidad del electrón son magnitudes que no pueden coexistir simultáneamente. El principio de incertidumbre proporciona una expresión cuantitativa para medir esta propiedad.

Se cuenta ahora con las condiciones necesarias para la formulación de la forma en que la mecánica cuántica plantea y resuelve sus problemas. En la mecánica clásica es posible tener la descripción completa de un sistema físico si se conocen en un instante dado todas sus coordenadas y velocidades, con estos datos iniciales es posible llegar a las ecuaciones de movimiento que permiten describir de manera completa el comportamiento del sistema en cualquier instante futuro. Esta condición no es posible en el caso de la mecánica cuántica, dado que al no poder medir de manera simultánea las coordenadas y las velocidades, la descripción del sistema debe hacerse de manera menos detallada, esto hace que no sea posible hacer predicciones precisas del comportamiento futuro de un electrón. De hecho, se observa que para un estado inicial dado de un electrón, una medición posterior puede tener diferentes resultados. Así, el propósito de la mecánica cuántica es proporcionar el valor de la probabilidad de obtener un resultado determinado en dicha medición, como en todo proceso aleatorio existe la probabilidad de que un resultado lleve a tener probabilidad uno, con lo que se puede considerar determinista o unívoco.

En el estudio de la mecánica cuántica es muy importante identificar los conjuntos de magnitudes físicas que pueden medirse simultáneamente, de tal forma que si tienen al mismo tiempo determinados valores, ninguna otra magnitud física a menos que esté en función de ellas pueda tener en este estado un valor determinado. A estos conjuntos de magnitudes físicas se les denomina sistemas completos. Cuando una medición es hecha en un sistema completo es posible

determinar la probabilidad de los resultados de cualquier medición futura, independientemente del comportamiento del electrón antes de la primera medición.

### 1.3.1 La función de onda y el principio de superposición (superposición).

Como es de suponer las diferencias tan radicales entre las bases físicas de la mecánica cuántica y la clásica deben traer como consecuencia una manera diferente de plantear el formalismo matemático de cada una de ellas. Se describirá esta parte a continuación.

De acuerdo al planteamiento de Landau (vol.2 1982), se puede empezar (por simplicidad de notación) por denotar con  $q$  al conjunto de coordenadas del sistema y por  $dq$  al producto de las diferenciales de estas, a las cuales habitualmente se les llama elemento de volumen del espacio de configuraciones del sistema. En mecánica cuántica la descripción completa de un estado significa predecir las probabilidades de ciertos resultados de alguna magnitud del sistema, ya sean coordenadas, velocidades o alguna otra. Una diferencia sustancial en el formalismo matemático de la mecánica cuántica es que el estado de un sistema es descrito mediante una función (generalmente compleja) dependiente de las coordenadas  $\Psi(q)$ , con la propiedad de que el cuadrado del módulo de esta función determina la distribución de probabilidad de los valores de las coordenadas, de aquí que el valor de  $|\Psi(q)|^2 dq$  es igual a la probabilidad de que una medición realizada determine el valor de sus coordenadas en un elemento diferencial de volumen  $dq$  del espacio de configuraciones. A la función  $\Psi(q)$  se le llama función de onda del sistema, esta función fue introducida en 1926 por Erwin Schrödinger.

La función de onda determina la probabilidad de que una medición realizada determine el valor de magnitudes diferentes a las coordenadas. Normalmente, las probabilidades se calculan por medio de expresiones bilineales respecto de



la función de onda  $\Psi(q)$  y de su función conjugada compleja  $\Psi^*(q')$ , el tipo de expresiones serán de la forma:

$$\int \int \Psi(q)\Psi^*(q')\varphi(q, q')dqdq', \quad (1.23)$$

donde la función  $\varphi(q, q')$  dependerá del tipo de medición buscada y la integración se realiza sobre todo el espacio de configuraciones. Otra propiedad importante de la función de onda es que a medida que transcurre el tiempo, el sistema irá cambiando, y por consiguiente, también lo hará ésta, de aquí que se considere que la función de onda es función del tiempo, esto permite utilizarla como medio predictor del comportamiento futuro del sistema.

Al interpretar a la función de onda como una distribución de probabilidad, es necesario que ésta cumpla con la condición de normalización, por lo cual, si se considera todo el volumen del espacio de configuraciones se obtiene:

$$\int |\Psi(q)|^2 dq = 1. \quad (1.24)$$

En ocasiones la integral de  $|\Psi(q)|^2$  no converge, y entonces  $\Psi(q)$  no se puede normalizar mediante la condición (1.24), en tales casos  $|\Psi(q)|^2$  no podrá determinar los valores absolutos de la probabilidad de las coordenadas, sin embargo la razón de los cuadrados de  $|\Psi(q)|^2$  en dos puntos diferentes del espacio de configuraciones determina la probabilidad relativa de los valores correspondientes de las coordenadas.

Otra propiedad muy importante de la función de onda es que permite realizar una combinación lineal de funciones de onda para describir estados más complejos, esto ocurre por ejemplo cuando un estado es descrito con una función de onda  $\Psi_1(q)$  y cierta medición proporciona con certeza un valor determinista uno y en el estado  $\Psi_2(q)$  el valor determinista dos, en estas circunstancias se

puede asegurar que la combinación lineal  $c_1\Psi_1(q)+c_2\Psi_2(q)$  con  $c_1$  y  $c_2$  constantes, define un estado en el que la misma medición puede proporcionar el resultado uno o el resultado dos o una mezcla de ambos. Esta propiedad es denominada como principio de superposición de los estados, de este principio se deduce que las ecuaciones que satisfacen la funciones de onda deben ser lineales.

Otra propiedad importante es que si un sistema está constituido por dos partes, de manera que su estado esté descrito del tal forma que cada una de las partes sea descrita de manera completa, entonces las probabilidades de las coordenadas  $q_1$  de la primera parte serán independientes de las coordenadas  $q_2$  de la segunda parte, con lo cual la distribución de probabilidades del sistema total será igual al producto de las probabilidades correspondientes de cada una de sus partes, es decir:

$$\Psi_{12}(q_1, q_2, t) = \Psi_1(q_1, t)\Psi_2(q_2, t). \quad (1.25)$$

## 1.4 Operadores, tipos y reglas

Cuando se dice que una magnitud física  $f$  caracteriza el estado de un sistema cuántico, se está pensando en un sistema completo de magnitudes, los valores que puede tomar una magnitud física dentro de la mecánica cuántica reciben el nombre de valores propios de la magnitud, el conjunto de estos valores constituye el espectro de los valores propios de la magnitud. Dicho espectro puede ser discreto, continuo o incluso un conjunto potencia (de puntos de acumulación). Si  $\Psi_n$  son las funciones de onda del sistema en el estado en el cual la magnitud  $f$  toma el valor propio  $f_n$ , entonces se dice que  $\Psi_n$  son las funciones propias de

la magnitud física dada  $f$ . Se supone además que dichas funciones propias están normalizadas, con lo cual:

$$\int |\Psi_n(q)|^2 dq = 1. \quad (1.26)$$

La importancia de esta familia de funciones de onda es que si por ejemplo un sistema se encuentra en un estado arbitrario cuya función de onda es  $\Psi$ , al medir la magnitud  $f$  se obtendrá uno de los valores propios  $f_n$ . Con base en el principio de superposición,  $\Psi$  se puede representar como una combinación lineal:

$$\Psi = \sum_n a_n \Psi_n, \quad (1.27)$$

donde los coeficientes  $a_n$  son constantes complejas. Cuando en un sistema de funciones se puede hacer este desarrollo se le llama sistema completo de funciones.

Una propiedad importante de las constantes  $a_n$  es que el cuadrado de su módulo (dado que son números complejos) determina la probabilidad del valor correspondiente  $f_n$  de la magnitud  $f$ , en el estado caracterizado por la función de onda  $\Psi$ , con lo cual debe cumplirse la condición:

$$\sum_n |a_n|^2 = 1. \quad (1.28)$$

A partir de la expresión (1.28), es posible calcular el valor medio de la magnitud  $f$  en un estado dado mediante:

$$\bar{f} = \sum_n f_n |a_n|^2. \quad (1.29)$$

Un operador matemático puede definirse como un mapeo lineal de un espacio vectorial sobre si mismo, en este caso las funciones de onda son los elementos de este espacio. En el caso de la mecánica cuántica, sólo se consideran espacios cuyos vectores de estado tienen norma unitaria, definida por  $|\Psi|^2 = |\Psi^* \Psi| = 1$ , estos son un ejemplo de los llamados espacios de Hilbert, los cuales se estudiarán con

mayor detalle en el capítulo cuatro. Si por ejemplo se define un operador  $\hat{f}$  que al integrar la aplicación de dicho operador sobre la función de onda  $\Psi$  (representada por  $\hat{f}\Psi$ ) multiplicada por la función de onda conjugada compleja  $\Psi^*$  se obtenga el valor medio  $\bar{f}$ :

$$\bar{f} = \int \Psi^* (\hat{f}\Psi) dq. \quad (1.30)$$

Al analizar la expresión (1.30), es importante observar dos cosas muy importantes: la primera es que debe respetarse el orden en que se aplican las operaciones entre las funciones de onda y el operador; por otro lado, dicha expresión plantea de manera tácita un carácter bilineal del operador  $\hat{f}$ , entonces dicho operador debe cumplir las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\Psi_1 + \Psi_2) &= \hat{f}\Psi_1 + \hat{f}\Psi_2, \\ \hat{f}(\alpha\Psi) &= \alpha\hat{f}\Psi, \end{aligned} \quad (1.31)$$

donde  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$  son dos funciones cualesquiera y  $\alpha$  es una constante compleja.

Si la función  $\Psi$  es una de las funciones propias de  $\Psi_n$ , entonces se cumple que:

$$\bar{f} = \int \Psi^* (\hat{f}\Psi) dq = f_n, \quad (1.32)$$

lo cual sólo se cumple si:

$$\hat{f}\Psi_n = f_n\Psi_n, \quad (1.33)$$

lo que equivale a decir que como resultado de la acción del operador  $\hat{f}$  la función propia  $\Psi_n$  queda simplemente multiplicada por su correspondiente valor propio  $f_n$ . De lo cual se puede concluir que las funciones propias de una magnitud física dada, son soluciones de la ecuación:

$$\hat{f}\Psi = f\Psi, \quad (1.34)$$

donde  $f$  es una constante y los valores propios son aquellos valores que toma la constante para los cuales dicha ecuación tiene soluciones que satisfacen las

condiciones impuestas. En general, los valores propios de una magnitud física real así como sus valores medios en cualquier estado son reales, esta condición limita las propiedades de los operadores.

Algunos operadores cumplen con la propiedad de que su transposición es igual a su complejo conjugado, es decir:

$$\widehat{f} = \widehat{f}^*, \quad (1.35)$$

a los operadores que cumplen con esta propiedad se les llama Hermitianos, dentro de la mecánica cuántica todos los operadores que corresponden a las magnitudes físicas reales son Hermitianos. A los operadores Hermitianos también se les llama autoconjugados.

Otra propiedad muy importante de las funciones propias es que son mutuamente ortogonales y además normalizadas, es decir, forman un sistema completo ortonormal, esto es, cumplen la condición de la Delta de Dirac:

$$\int \Psi_n \Psi_m^* dq = \delta_{nm}, \quad (1.36)$$

donde

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases} \quad (1.37)$$

Con estas herramientas ahora es posible determinar el valor de las constantes en la ecuación (1.27), bastará con usar la expresión:

$$a_n = \int \Psi \Psi_n^* dq. \quad (1.38)$$

## 1.4.1 Propiedades de los operadores.

Ahora se verán las propiedades de dos operaciones entre operadores, la suma y el producto, para lo cual se considerarán dos operadores  $\hat{f}$  y  $\hat{g}$  que corresponden a dos magnitudes físicas  $f$  y  $g$  respectivamente.

La suma de operadores tiene las siguientes características:

a) Si las magnitudes  $f$  y  $g$  son medibles simultáneamente entonces los operadores  $\hat{f}$  y  $\hat{g}$  tienen funciones propias comunes, que también serán funciones propias del operador suma  $\hat{f} + \hat{g}$  y además los valores propios del operador suma serán las sumas  $f_n + g_n$ .

b) Si las magnitudes  $f$  y  $g$  no son medibles simultáneamente entonces lo único que se puede establecer es que el valor medio de su suma en un estado dado es igual a la suma de los valores medios de cada uno de los sumandos por separado:

$$\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g}. \quad (1.39)$$

Por lo que respecta a los valores propios y las funciones propias del operador suma  $\hat{f} + \hat{g}$ , en este caso, en general no existirá relación alguna con los valores propios ni con las funciones propias de las magnitudes  $f$  y  $g$ .

c) Si los operadores  $\hat{f}$  y  $\hat{g}$  son hermitianos, también será Hermitiano, el operador  $\hat{f} + \hat{g}$ , de tal manera que sus valores propios sean reales y representen los valores propios de la magnitud  $f + g$ .

El producto de operadores tiene las siguientes propiedades:

a) Se denomina producto de operadores a la aplicación sobre una función de manera sucesiva primero de un operador y después el otro, de tal modo que los valores propios de la magnitud resultante es igual al producto de los valores propios de las magnitudes  $f$  y  $g$ .

b) Si el resultado final de la acción sucesiva de dos operadores sobre una función cualquiera es independiente del orden en que estos operen, se dice que dichos operadores conmutan entre si, lo cual equivale a tener:

$$\widehat{f}\widehat{g} = \widehat{g}\widehat{f} \quad \text{o} \quad \widehat{f}\widehat{g} - \widehat{g}\widehat{f} = 0. \quad (1.40)$$

c) Si dos magnitudes  $f$  y  $g$  pueden tener simultáneamente valores determinados, entonces sus operadores conmutan entre sí. También se cumple el teorema inverso: si dos operadores  $\widehat{f}$  y  $\widehat{g}$  conmutan entre si, todas sus funciones propias se pueden elegir de tal modo que sean comunes, lo cual equivale a que las magnitudes físicas correspondientes son medibles simultáneamente.

d) Si los operadores  $\widehat{f}$  y  $\widehat{g}$  son hermitianos, entonces se tiene que:  $(\widehat{f}\widehat{g})^+ = \widehat{g}\widehat{f}$  y esto implica que el operador producto  $\widehat{f}\widehat{g}$  será Hermitiano, sólo si  $\widehat{f}$  y  $\widehat{g}$  son conmutables.

La propiedad (c) del producto de operadores es de extrema importancia pues verificando la conmutabilidad de los operadores se puede determinar la medibilidad simultánea de las magnitudes físicas.

## 1.4.2 La matriz de densidad

En algunas ocasiones ocurre que cierto estado de un sistema no tiene función de onda, en tales casos se recurre a la matriz de densidad, ésta es la forma más general de la descripción de sistemas en la mecánica cuántica. De hecho, la descripción que se puede hacer de un sistema mediante la función de onda, es sólo un caso particular que corresponde a una matriz de densidad de la forma:  $\rho(x', x) = \Psi^*(x')\Psi(x)$ . Este punto es muy importante pues cuando un estado posee función de onda se le llama estado puro, lo cual implica que dicho sistema de procesos de medición lleva a resultados deterministas. Por otro lado, los estados que sólo tienen matriz de densidad son llamados estados mezclados, y en este

caso no existe un sistema completo de mediciones que conduzcan a resultados unívocamente predecibles. Si se utiliza la matriz de densidad el valor medio de un operador se puede calcular mediante la expresión:

$$\bar{f} = \int \left[ \hat{f} \rho(x', x) \right]_{x'=x} dx. \quad (1.41)$$

En este caso,  $\rho(x', x)$  actúa en la función  $\bar{f}$  sólomente sobre las variables  $x$ , después de calcular el resultado se debe suponer que  $x' = x$ .

## 1.5 El Hamiltoniano en la mecánica cuántica y la ecuación de onda

Dependiendo del enfoque con que se estudie el Hamiltoniano este tiene dos significados diferentes, aunque relacionados entre sí. Cuando se le analiza desde el punto de vista de la mecánica clásica, es una función que describe el comportamiento en el tiempo de un sistema mecánico en términos de las variables de posición y de cantidad de movimiento o momentum. Por otro lado, desde el enfoque de la mecánica cuántica, el Hamiltoniano es un operador que describe la magnitud de la energía del sistema.<sup>5</sup>

Como se vio antes, en la mecánica cuántica el estado de un sistema físico es descrito mediante vectores en un espacio de Hilbert (la función de onda es un tipo de vector) y las magnitudes físicas son descritas por operadores Hermitianos o autoadjuntos que actúan sobre la función de onda, lo anterior implica que dada la función de onda en un instante dado además de describir las propiedades del sistema en dicho instante, también lo hará en instantes futuros. Esto queda expresado al calcular la derivada de la función de onda respecto al tiempo en cada instante, lo anterior se expresa matemáticamente mediante la ecuación:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi, \quad (1.42)$$

---

<sup>5</sup> Landau (vol.2 1982) cap. 2, pag. 36 a 38.



en donde  $\hat{H}$  es un operador lineal,  $i$  es la unidad imaginaria y  $\hbar$  es la constante de Planck. A partir de la ecuación (1.38) se sigue la condición:

$$\frac{d}{dt} \int \Psi^* \Psi dq = \int \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} dq + \int \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi dq = 0, \quad (1.43)$$

ya que la integral  $\int \Psi^* \Psi dq$  es una constante. Si se sustituye (1.42) en la primera integral y en la segunda integral se utiliza la definición de operador transpuesto se obtiene:

$$\begin{aligned} \int \Psi^* \hat{H} \Psi dq - \int \Psi \hat{H}^* \Psi^* dq &= \int \Psi^* \hat{H} \Psi dq - \int \Psi^* \tilde{\hat{H}}^* \Psi dq \\ &= \int \Psi^* (\hat{H} - \hat{H}^+) dq = 0. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Como esta igualdad se cumple para cualquier función de onda  $\Psi$ , entonces debe cumplirse la condición de que el operador  $\hat{H}$  sea Hermitiano, lo que equivale a que se cumpla  $\hat{H} = \hat{H}^+$ .

A continuación se verá a que magnitud física corresponde el operador  $\hat{H}$ , para esto habrá que recurrir a la condición de “paso al límite” entre la mecánica cuántica y la mecánica clásica. En este proceso se parte de la suposición de que al caso límite de la mecánica clásica le corresponde en la mecánica cuántica una función de onda de la forma  $\Psi = ae^{i\varphi}$ , donde  $a$  es una función que varía lentamente mientras que  $\varphi$  toma valores grandes. De la descripción de la mecánica clásica se sabe que las trayectorias de las partículas pueden determinarse partiendo del principio variacional, de acuerdo al cual la acción  $S$  del sistema debe tomar el valor mínimo posible, de donde podemos suponer que la fase de la función de onda en el caso del límite clásico debe ser proporcional a la acción  $S$ , es decir  $S = k\varphi$ , la constante de proporcionalidad es la constante de Planck y se denota por  $\hbar$  (en realidad la constante de Planck es  $h$  y  $\hbar = h/2\pi$ , el uso de  $\hbar$  se debe a Dirac), las unidades de  $\hbar$  son las de acción, de hecho,  $\hbar = 1.05457266 \times 10^{-34} Js$ . Con lo cual la función de onda cuasiclásica de un sistema físico está dada por la expresión:

$$\Psi = ae^{i/\hbar S}. \quad (1.45)$$

El papel que desempeña la constante de Planck es crucial en la mecánica cuántica, ya que su valor relativo con respecto a otras magnitudes de igual dimensión (acción) determina el grado de cuantización del sistema físico.

Si se regresa al tema principal de esta sección, y se deriva parcialmente con respecto del tiempo a la expresión (1.45), se obtiene:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial t} \Psi. \quad (1.46)$$

Si se compara (1.46) con (1.42) se podrá notar que la acción del operador  $\hat{H}$  sobre la función de onda se reduce a la multiplicación de  $\Psi$  por la cantidad  $\partial S/\partial t$ . En otras palabras, esto significa que  $\partial S/\partial t$  es la magnitud física a la que se reduce el operador Hermitiano,  $\hat{H}$ , este último resultado nos proporciona una información muy valiosa pues resulta que justamente la derivada  $\partial S/\partial t$  es igual al Hamiltoniano de un sistema mecánico, lo cual se comprueba a continuación, si se parte de (1.21) se llega a:

$$p_i = \frac{\partial S(q_i, t)}{\partial q_i}. \quad (1.47)$$

Por otro lado, si se calcula la derivada total de la acción  $S$  y se consideran nuevamente (1.21) y (1.47), se obtiene:

$$\frac{d}{dt} S(q_i(t), t) = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i(t) = p_i(t) \dot{q}_i(t) - H(p_i(t), q_i(t), t).$$

Al igualar términos en la ecuación anterior, se llega a la condición buscada:

$$H(p_i(t), q_i(t), t) = -\frac{\partial S}{\partial t}. \quad (1.48)$$

Así, se puede concluir que  $\hat{H}$  es el operador lineal, que en la mecánica cuántica corresponde a la función de Hamilton, por lo cual es conocido como el operador Hamiltoniano o el Hamiltoniano del sistema. De este modo, cuando se conoce explícitamente la forma funcional del Hamiltoniano, es posible determinar

las funciones de onda del sistema físico empleando la ecuación (1.42), que es la ecuación de Schrödinger, la cual es considerada como la ecuación fundamental de la mecánica cuántica.

Ahora se tienen ya las condiciones para definir los estados estacionarios de un sistema. Una propiedad importante del Hamiltoniano de un sistema es que si es cerrado, éste no contiene al tiempo de manera explícita, pues para un sistema cerrado todos los instantes son equivalentes, esta propiedad de los sistemas cerrados también es válida para los sistemas abiertos o exteriores constantes. Por otra parte, como se vio antes, todo operador conmuta consigo mismo, así el Hamiltoniano de un sistema cerrado o un sistema exterior constante se conserva, cuando ésto ocurre, el Hamiltoniano es considerado como la energía total del sistema. Esta última consideración da origen a la interpretación de la ley de la conservación de la energía en la mecánica cuántica, la cual establece que “si en un estado la energía tiene un valor determinista, este valor permanece constante a lo largo del tiempo”, según Landau (vol.2 1982).

Se dice que un estado estacionario de un sistema es aquel que tiene un valor determinista, para obtenerlos se utilizan las funciones de onda  $\Psi_n$  que son funciones propias del operador Hamiltoniano y cuyos valores propios  $E_n$ , son los valores propios de la energía que determinan los estados estacionarios del sistema, dichos valores se obtienen al resolver ecuaciones de valores y funciones propias de la forma:

$$\hat{H}\Psi_n = E_n\Psi_n. \quad (1.49)$$

Con base en este resultado, es posible integrar con respecto al tiempo de manera directa a la ecuación de onda y obtener una solución de la función de onda en términos de la posición  $q$ :

$$i\hbar \frac{d\Psi_n}{dt} = \hat{H}\Psi_n = E_n\Psi_n.$$

Después de integrar con respecto al tiempo la expresión anterior se obtiene:

$$\Psi_n = e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \psi_n(q). \quad (1.50)$$

La expresión (1.50) proporciona la dependencia de las funciones de onda de los estados estacionarios con respecto al tiempo. Observe que la función de onda  $\psi_n(q)$  está en función sólo de las coordenadas. Al estado estacionario con el menor de todos los valores posibles de energía se le llama estado normal o fundamental del sistema. Cabe mencionar que una aplicación importante de las funciones de onda de los estados estacionarios es que es posible expresar una función de onda arbitraria  $\Psi$  en términos de las funciones de onda de los estados estacionarios, mediante una expresión del tipo:

$$\Psi(q, t) = \sum_n a_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \psi_n(q), \quad (1.51)$$

donde los valores  $|a_n|^2$  miden la probabilidad de ocurrencia de los distintos valores de la energía del sistema. Del mismo modo las distribuciones de probabilidad de las coordenadas en un estado estacionario están definidas por la relación:

$|\Psi_n|^2 = |\psi_n|^2$ , la cual no depende del tiempo, lo anterior también incluye al cálculo del valor medio de cualquier magnitud física  $f$  cuyo operador no depende explícitamente del tiempo:

$$\bar{f} = \int \Psi^* (\hat{f} \Psi) dq = \int \psi^* (\hat{f} \psi) dq.$$

El hecho de que el operador de cualquier magnitud conservativa conmute con el Hamiltoniano implica que toda magnitud conservativa podrá medirse simultáneamente con la energía.

En ocasiones ocurre que diferentes estados estacionarios corresponden a un mismo valor propio de la energía, lo cual equivale a decir que están en un mismo

nivel de energía del sistema y sólo se diferencian entre sí por los valores que tienen sus demás magnitudes físicas, cuando esto ocurre se dice que estos niveles de energía son degenerados. En un nivel de energía degenerado a la energía  $E$  le corresponderá siempre más de una función propia, esto hace que la elección de funciones propias de un valor degenerado no sea única y en general no sean mutuamente ortogonales, sin embargo siempre es posible hallar una combinación lineal de éstas para obtener un sistema de funciones propias ortonormales.

Si ahora se analiza el espectro de los valores propios de la energía, el cual puede ser discreto o continuo, se observa que al estado estacionario de un espectro discreto le corresponderá un movimiento finito dentro del sistema, lo cual implica que el valor de la integral  $\int |\Psi|^2 dq$  calculada sobre todo el espacio sea finito, esto equivale a decir que la probabilidad de que el valor de las coordenadas sea infinito es cero, por lo cual el sistema realiza un movimiento finito y en estas condiciones se dice que el sistema se encuentra en un estado ligado.

Por otro lado, cuando se analizan las funciones de onda de un espectro continuo se observa que la integral  $\int |\Psi|^2 dq$  diverge, por lo cual  $|\Psi|^2$  ya no determina de manera directa la probabilidad de los valores de las coordenadas y sólo representa una proporción de tal probabilidad, lo anterior se interpreta como el hecho de que bajo estas condiciones el sistema completo o parte de él está en el infinito, con lo cual se concluye que “los estados estacionarios del espectro continuo corresponden a un movimiento infinito del sistema”, tomado de Landau (vol.2 1982).

## 1.6 La notación matricial para las magnitudes físicas y la notación de Dirac

En esta sección, con el propósito de simplificar la notación y los cálculos se supondrá que los sistemas considerados tienen espectro discreto. Si se considera una función de onda arbitraria  $\Psi(q, t)$  y se le expresa mediante una serie de funciones de onda de los estados estacionarios se obtiene:  $\Psi(q, t) = \sum_n a_n \Psi_n$ . Si se sustituye esta expresión en la definición de valor medio dada en la ecuación (1.32) se llega a:

$$\bar{f} = \sum_n \sum_m a_n^* a_m f_{nm}(t), \quad (1.52)$$

donde:

$$f_{nm}(t) = \int \Psi_n^* (\hat{f} \Psi_m) dq. \quad (1.53)$$

El conjunto de las magnitudes  $f_{nm}(t)$  constituye una matriz, a la cual se le da el nombre de matriz de la magnitud  $f$ , cada elemento de dicha matriz representa la transición del estado  $m$  al estado  $n$ . Esta notación matricial fue introducida por Werner Heisenberg en 1925.

Paul Dirac ideó una manera simple de representar a los elementos de la matriz de la magnitud  $f$ , esta notación es:

$$f_{nm}(t) \equiv \langle n | f | m \rangle, \quad (1.54)$$

en donde se pretende expresar que los símbolos  $\langle n |$  y  $| m \rangle$  son los estados final e inicial de la magnitud  $f$  respectivamente, en este caso  $\langle n |$  se denomina vector “bra- $n$ ” y  $| m \rangle$  vector “ket- $m$ ”, esta nomenclatura proviene de la palabra inglesa bracket (corchetes). Así, se tiene que, por ejemplo, que si  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  y  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , entonces

$$(\dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots)$$

que corresponde a un vector fila con 1 en la  $n$ -ésima posición,

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

el cual representa un vector columna con 1 en la  $m$ -ésima posición. De donde se tiene que el producto escalar de los vectores  $m$  y  $n$  está dado por:

$$\langle m | n \rangle = \delta_{n-m} \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

también que:  $|n\rangle \langle n| = 1$  y la denominada ecuación de completés, donde  $J$  es una matriz unitaria de dimensión infinita:

$$J = \sum_{-\infty}^{\infty} |n\rangle \langle n| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.55)$$

Si, por ejemplo, la posición de un electrón es denotada por  $q$  con la restricción de que sólo puede moverse en una retícula de valores discretos, en la que la separación reticular es  $a$ , los puntos de la retícula están dados por  $q = na$ , si se toma el caso en que  $a \rightarrow 0$ , entonces se tendrá que:

$$|q\rangle = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{a}} |n\rangle; \quad -\infty < q < \infty.$$

Así, se tiene que  $\Psi(q) = \langle q | \Psi \rangle$  y su vector o función conjugada  $\Psi^*(q)$  que es un mapeo de  $\Psi(q)$  a su espacio dual se denotará por:  $\Psi^*(q) = \langle \Psi | q \rangle$

Por ejemplo, el producto escalar de dos funciones:

$$\langle \Psi | g \rangle = \int dq \Psi^*(q) g(q) = \left\langle \Psi \left| \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dq |q\rangle \langle q| \right\} |g\rangle \right. \right\rangle, \quad (1.56)$$

donde la integral  $\int_{-\infty}^{\infty} dq |q\rangle \langle q| = J$  es otra forma de expresar la ecuación de completitud.

En el caso de tener el producto escalar de una función por sí misma que equivale a obtener su norma al cuadrado se tendrá:

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \left\langle \Psi \int_{-\infty}^{\infty} dq |q\rangle \right\rangle \langle q | \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq \Psi^*(q) \Psi(q) \geq 0. \quad (1.57)$$

Aprovechando lo que se ha visto en esta sección es posible formalizar un poco más la relación existente entre los operadores y las matrices en un espacio vectorial. De manera formal un operador se define como un mapeo lineal del espacio de estados sobre sí mismo, el espacio de estados es el espacio vectorial formado por todas las funciones de onda de las configuraciones permitidas, es decir aquellas para las cuales se cumpla la condición  $\int_{-\infty}^{\infty} dq |\Psi(q)|^2 = 1$ , en este caso dichas funciones de onda son consideradas como vectores de onda. En general, los operadores son representados como matrices. Por ejemplo, si se considera un espacio de estados formado por todas las funciones de una sola variable real  $x$ , sea  $V$  dicho espacio que será de la forma  $V = \{\Psi(x) | x \in \mathfrak{R}\}$ , donde como se vio antes  $\Psi(x) = \langle x | \Psi \rangle$ . En este caso, los operadores de este espacio de estados serán de dimensión infinita, es decir matrices  $N \times N$  con  $N \rightarrow \infty$ .

Bajo esta perspectiva el vector ket  $|q\rangle$  pertenece al espacio de estados  $V$  y el vector bra  $\langle q|$  pertenece al espacio dual de estados.

Dos de los operadores más importantes son el operador de coordenadas  $\hat{q}$ , cuya función es simplemente multiplicar  $\Psi(q) \in V$  por el escalar  $q$ , es decir:  $\hat{q}\Psi(q) \equiv q\Psi(q)$ . El otro operador muy útil es el operador diferencial  $(\partial/\partial q)$ , este mapea  $\Psi(q) \in V$  en su derivada  $\partial\Psi(q)/\partial q$ . En el estudio de la mecánica cuántica estos dos operadores son fundamentales pues prácticamente todos los operadores empleados se pueden obtener como una combinación de los operadores  $\hat{q}$  y  $(\partial/\partial q)$ .

Ahora se revisará lo referente a las matrices Hermitianas, que obviamente



serán la representación de un operador Hermitiano, tomando en cuenta que el Hamiltoniano es un operador Hermitiano cuando opera sobre un sistema cerrado. Si una matriz  $M_{ij}$  es hermitiana entonces se debe cumplir que su matriz adjunta debe ser igual a su matriz conjugada transpuesta, es decir:

$$M_{ij} \text{ es matriz hermitiana si : } M_{ij}^\dagger = M_{ji}^*. \quad (1.58)$$

En el caso de un operador  $\widehat{K}$ , que opera sobre dos funciones  $h$  y  $g$ , el proceso análogo es de la forma:

$$\langle h|\widehat{K}^\dagger|g\rangle \equiv \langle g|\widehat{K}|h\rangle^*. \quad (1.59)$$

Dada la importancia de los operadores  $\widehat{q}$  y  $(\partial/\partial q)$ , deberá verificarse si son hermitianos o no, iniciando con  $\widehat{q}$  el cual opera sobre dos funciones como en (1.59).

$$\begin{aligned} \langle h|\widehat{q}^\dagger|g\rangle &\equiv \langle g|\widehat{q}|h\rangle^* = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dq \langle g|q\rangle \langle q|\widehat{q}|h\rangle \right]^* \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dq qg^*(q) h(q) \right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} dq qg(q) h^*(q) = \langle h|\widehat{q}|g\rangle, \end{aligned}$$

lo cual implica que  $\widehat{q}^\dagger = \widehat{q}$ , de donde, se puede concluir que  $\widehat{q}$  es un operador Hermitiano. Ahora se hará lo mismo con el operador  $(\partial/\partial q)$ :

$$\begin{aligned} \left\langle h\left|\frac{\partial}{\partial q}\right|g\right\rangle &\equiv \left\langle g\left|\frac{\partial}{\partial q}\right|h\right\rangle^* = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dq \langle g|q\rangle \left\langle q\left|\frac{\partial}{\partial q}\right|h\right\rangle \right]^* \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dq g^*(q) \frac{\partial h(q)}{\partial q} \right]^* = - \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{\partial g^*(q)}{\partial q} h(q) \right]^*, \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{\partial g(q)}{\partial q} h^*(q) = - \left\langle h\left|\frac{\partial}{\partial q}\right|g\right\rangle \end{aligned}$$

lo cual implica que:

$$\frac{\partial}{\partial q}^\dagger = -\frac{\partial}{\partial q}.$$

Debido a la existencia del signo negativo es posible concluir que este operador es anti-Hermitiano, pero el operador  $i(\partial/\partial q)$  si es Hermitiano.

Del mismo modo puede demostrarse que el operador

$$\frac{\partial^2}{\partial q^2} = \left( \frac{\partial^2}{\partial q^2} \right)^\dagger,$$

por lo tanto, es Hermitiano. Este operador es muy importante también en la mecánica cuántica pues con él se genera el operador Laplaciano u operador de Laplace descrito como:

$$\nabla^2 \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial q_i^2}. \quad (1.60)$$

Al retomar los elementos de la matriz de la magnitud  $f$ , si se tiene el caso de que el operador  $\hat{f}$  no contenga a  $t$  explícitamente, se puede utilizar la expresión:

$$f_{nm}(t) = f_{nm} e^{i\omega_{nm}t}, \quad (1.61)$$

donde :

$$\omega_{nm} = \frac{E_n - E_m}{\hbar}, \quad (1.62)$$

es la frecuencia de transición entre los estados  $m$  y  $n$ . Por otro lado, los valores

$$f_{nm} = \int \psi_n^* (\hat{f}\psi_m) dq \quad (1.63)$$

forman la matriz independiente del tiempo de la magnitud  $f$ .

En el caso de los elementos matriciales de la derivada  $\dot{f}(t)$ , estos se obtienen derivando con respecto del tiempo cada uno de los elementos de la matriz. Cuando se desea calcular la acción que ejerce el producto de dos operadores sobre la función  $\psi_n$ , se tiene:

$$\hat{f}\hat{g}\psi_n = \hat{f} \sum_k g_{kn} \psi_k = \sum_k g_{kn} \hat{f}\psi_k = \sum_{k,m} g_{kn} f_{mk} \psi_m,$$

y, por otro lado, debe cumplirse:  $\hat{f}\hat{g}\psi_n = \sum_m (fg)_{mn} \psi_m$ , con lo cual se llega a la conclusión de que los elementos de la matriz del producto  $fg$  están dados por:

$$(fg)_{mn} = \sum_m f_{mk} g_{kn}. \quad (1.64)$$

Como se puede apreciar la regla es igual a la empleada para multiplicar matrices, esto facilita su cálculo.

## 1.7 Ecuación de Schrödinger

La ecuación de Schrödinger es una ecuación diferencial en derivadas parciales que describe el comportamiento de cualquier función de onda a lo largo del tiempo. Esta ecuación establece la forma de la función de onda  $\Psi(q, t)$  asociada al comportamiento de una partícula. Lo cual se hace especificando, para cada sistema, la ecuación que controla el comportamiento de la función de onda y especificando también la conexión entre el comportamiento de la función de onda y el comportamiento de la partícula, Eisberg (1978). En este punto es importante señalar que esta asociación entre el comportamiento de una partícula y una función de onda se fundamenta en el Principio de Dualidad Onda-Partícula de De Broglie. Dicho principio establece que las partículas poseen un comportamiento no sólo como partículas (poseen masa), sino también como ondas (no poseen masa). De acuerdo a De Broglie, la energía total  $E$  ya sea para una partícula (materia) como para una onda (radiación) está dada por la relación:  $E = h\nu$ , donde  $\nu$  es la frecuencia de la onda asociada a su movimiento. Por otro lado, el momento lineal está relacionado con la longitud de onda  $\lambda$  de la onda asociada mediante la expresión:  $p = h/\lambda$ , donde  $h$  es la constante de Planck, y  $\lambda = h/p$  es la longitud de onda de De Broglie.

Para llegar a la ecuación de Schrödinger, según Eisber (1978), se deben considerar 4 supuestos acerca de las propiedades deseables de la ecuación de onda mecánico-cuántica:

- i)* Deberá coincidir con el postulado de De Broglie:  $\lambda = h/p$ .
- ii)* Deberá coincidir con la ecuación del movimiento de una partícula de

masa  $m$  y sometida a la acción de una energía cinética  $p^2/2m$  y energía potencial  $V$ : con lo cual la energía total sera  $E = p^2/2m + V$ .

*iii)* Deberá ser lineal en  $\Psi(q, t)$ , es decir si  $\Psi_1(q, t)$  y  $\Psi_2(q, t)$  son 2 soluciones diferentes a la ecuación para la energía potencial dada  $V$ , entonces cualquier combinación lineal de estas también será solución.

*iv)* La energía potencial  $V$  normalmente será función de la posición  $q$  y algunas veces del tiempo  $t$ . Existe la situación especial en que  $V(q, t) = V_0$  (constante), este es el caso de una partícula libre.

Como se vio en la expresión (1.42), la ecuación de onda se expresa en términos del Hamiltoniano. Con base en esto y los 4 supuestos recién señalados, el Hamiltoniano de la ecuación de onda debe cumplir con la condición:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2), \quad (1.65)$$

donde se supone que se considera como marco de referencia a un sistema cartesiano tridimensional, o en términos del operador de Laplace o Laplaciano se tiene:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar}{2m} \nabla^2, \quad (1.66)$$

donde  $\nabla^2$  es el Laplaciano y está dado en un sistema de coordenadas cartesianas tridimensionales por:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.67)$$

Ahora bien cuando la partícula se encuentra sometida a la acción de una energía potencial  $V$  (también conocida como perturbación), entonces habrá que incluir dicho término y se obtiene:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 + V(x, y, z). \quad (1.68)$$

Con lo cual al sustituir (1.68) en la ecuación de onda (1.42) se obtiene la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 \Psi + V(x, y, z) \Psi, \quad (1.69)$$

## 1.8 Principio de Incertidumbre de Heisenberg

De acuerdo a Max Born (otro de los físicos más destacados de principios del siglo pasado) el significado concreto de la función de onda de una partícula era un concepto poco claro, por eso, él sugirió que ésta se debe interpretar como la densidad de la probabilidad de que la partícula se encuentre en cierta vecindad en torno a un punto dado en un instante determinado, esta interpretación que liga a la función de onda con la probabilidad, se contrapone de manera radical a la visión determinista de la mecánica clásica, fundamentada en la predicción precisa de la posición y velocidad de una partícula en todo momento una vez que se conocieran sus ecuaciones de movimiento. Si se recurre al electromagnetismo, se puede intentar representar a las partículas mediante ondas armónicas u ondas planas (las más simples), pero recurriendo a la interpretación de Born, se llega a la conclusión de que es imposible dar una localización determinista de tales partículas, por este motivo se tiene que recurrir a utilizar paquetes de ondas planas sobrepuestas con objeto de poder delimitar la posición de la partícula en una zona finita. Desde el punto de vista matemático para construir un paquete de ondas finito se requiere de un conjunto de diferentes vectores de onda, así se llega al hecho de que entre más acotada esté la posición de una partícula, mayor será el espectro de vectores de onda requeridos y con esto la cantidad de movimiento o momento lineal. Ésta es la idea fundamental expresada en el principio de incertidumbre de Heisenberg, dicho principio establece que es imposible determinar (observar) de manera simultánea la posición y el momento lineal de una partícula, es decir tratar de determinar el valor de uno de estos dos observables hará que el valor del otro se “dispare al infinito”, lo anterior queda expresado por la siguiente desigualdad:

$$\Delta q_i \Delta p_i \geq i \frac{\hbar}{2}. \quad (1.70)$$

En el capítulo tres se plantea la versión para finanzas de este principio, además en el capítulo cuatro se propone un versión adicional en la cual interviene el precio del activo, su volatilidad y la rapidez con la que cambia el precio del activo.

# CAPÍTULO 2

## La Integral Funcional o de Feynman.

### 2.1 Elementos básicos para describir la Integral Funcional

#### 2.1.1 Introducción.

Como se vio en el capítulo anterior la formulación de la mecánica cuántica se hizo mediante la descripción de Schrödinger, partiendo de la función de onda así como de ciertas condiciones que debía cumplir la ecuación diferencial parcial asociada a la función de onda junto con los operadores. En este enfoque los operadores son fijos y las funciones de onda consideradas como vectores en un espacio de Hilbert son las que experimentan una evolución de acuerdo a la ecuación de Schrödinger presentada en el capítulo anterior en la ecuación (1.69), ésta es la manera más común de abordar el estudio de la mecánica cuántica:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 \Psi + V(x, y, z) \Psi.$$

Existe una segunda interpretación bastante común para estudiar la mecánica cuántica, ésta se basa en la descripción de Werner Heisenberg (el creador del principio de incertidumbre), en este enfoque los operadores son los entes que evolucionan respecto del tiempo y las funciones de onda permanecen constantes a lo largo del tiempo, en este caso la ecuación que satisface el operador  $\hat{A}$  es:

$$\frac{d\hat{A}}{dt} + i\hbar [\hat{A}, \hat{H}] = 0, \quad (2.1)$$

que es conocida con el nombre de ecuación de Heisenberg, donde:

$$\left[ \hat{A}, \hat{H} \right] = \hat{A}\hat{H} - \hat{H}\hat{A}.$$

Existe sin embargo, una tercera interpretación del estudio de la mecánica cuántica. Dicha formulación es conocida como el método de la integral funcional o de trayectoria de Feynman. Richard Feynman hizo este desarrollo en 1948, (Feynman (1948) y MacKensie (2000)), para el cual se basó en un artículo que publicó en 1933 Paul Dirac; en este trabajo, Feynman sugiere que el término  $\exp(iS/\hbar)$  que corresponde al propagador (más adelante se dará una descripción de lo que es el propagador) es la función que describe el comportamiento de la partícula a lo largo del tiempo, en donde  $S$  es la acción de la mecánica clásica. Esta formulación parte del principio de superposición y del principio de dualidad onda-partícula de De Broglie, usando esto como base construyó la función generadora de amplitudes cuánticas. Para muchos, este enfoque en la formulación de la mecánica cuántica proporciona una introducción “más intuitiva” a la mecánica cuántica. La propuesta de Feynman en su artículo seminal de 1948 se fundamentó principalmente en las siguientes tres ideas:

- i)* La probabilidad para la ocurrencia de cualquier evento fundamental está dado por el cuadrado del valor absoluto de una amplitud de onda compleja.
- ii)* La amplitud de onda para la ocurrencia de algún evento se calcula sumando todas las posibles trayectorias que pudiera seguir el evento.
- iii)* La amplitud de onda de la contribución de cada trayectoria es proporcional al valor:

$$\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_A}^{t_B} dt L(q_i, \dot{q}_i, t) \right\} = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(q_i) \right\}, \quad (2.2)$$

donde  $S(q_i)$  es la acción del enfoque de la mecánica clásica evaluada sobre la trayectoria clásica y al término complejo  $\exp\{(i/\hbar)S(q_i)\}$  como se mencionó antes, se denomina el propagador en mecánica cuántica.



En su artículo de 1948, Feynman desarrolló lo que se considera la tercera formulación de la mecánica cuántica, además de las ideas enlistadas anteriormente, Feynman consideró que el propagador podía ser escrito como una sumatoria sobre todas las posibles trayectorias que pudiera seguir la partícula para ir de un punto inicial a un punto final y no solamente la denominada trayectoria clásica. Como se recordará, en el primer capítulo se estableció que la trayectoria seguida por un móvil (en mecánica clásica) para ir de un punto A a un punto B es aquella que minimice el valor de la acción  $S$ , a esta trayectoria se le llama trayectoria clásica, Feynman estableció que debían considerarse todas las posibles trayectorias de la partícula de tal forma que cada trayectoria contribuyera al valor del propagador con un valor dado por  $\exp [(i/\hbar)S(q_i)]$ , ésta es la diferencia sustancial con la idea de Dirac, quien sólo consideraba a la trayectoria clásica. En su artículo, Feynman demostró que todas las trayectorias contribuyen al valor del propagador, es decir, en cierto sentido planteó que la partícula cuántica toma todas las trayectorias posibles y que las amplitudes de cada trayectoria se suman de acuerdo al principio de superposición visto en el capítulo pasado. Cabe señalar como dato anecdótico, que el artículo citado fue rechazado por el Physical Review, y que este artículo y todo lo que dio origen posteriormente fueron los elementos fundamentales para otorgar a Feynman el premio Nobel de física algunos años después.

Según H. Kleinert: “Las integrales funcionales tratan con las estructuras fluctuantes semejantes a las líneas. Estas aparecen en una gran variedad de formas, por ejemplo, como órbitas de partículas en el espacio-tiempo continuo, como polímeros en soluciones, como líneas de vórtices en superfluidos, como líneas de defectos en cristales y cristales líquidos. Estas fluctuaciones pueden ser de origen mecánico cuántico, termodinámico, o estadístico. Las integrales funcionales son una herramienta ideal para describir estas estructuras fluctuantes parecidas a las líneas, conduciendo con ésto a una comprensión unificada de

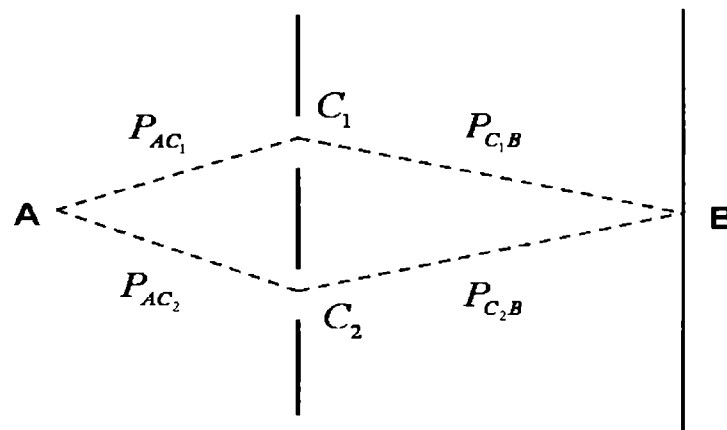
muchos fenómenos físicos bastante diferentes”, Kleinert (2006).

En términos operativos el utilizar la metodología de la integral de Feynman para resolver los problemas ordinarios de la mecánica cuántica resulta más laborioso, esto explica el por qué dicho enfoque no es tratado en los cursos básicos de mecánica cuántica, sin embargo en problemas complejos de la teoría de campos es una herramienta muy poderosa. Por otro lado, este enfoque proporciona una manera más intuitiva de entender la mecánica cuántica al considerar la contribución de cada una de las trayectorias, lo cual relaciona de manera clara el concepto de región de mayor probabilidad para que la partícula esté en dicha región; adicionalmente a esto, proporciona de manera natural la vía para mostrar que la mecánica clásica es un caso límite de la mecánica cuántica al considerar la intervención de la acción en el cálculo del propagador.

<sup>6</sup> Antes de pasar a la definición formal de la integral de Feynman o funcional se tratará de dar una explicación intuitiva de lo que se considera como la sumatoria de las contribuciones de todos los caminos o trayectorias. Para explicar la idea de la contribución de todos los caminos es posible utilizar el experimento de la doble rejilla: sea A el punto inicial y B el punto final o destino de una partícula. Supóngase que las rendijas son denotadas por  $C_1$  y  $C_2$ , en este caso la partícula tiene dos opciones para ir de A hacia B, ver gráfica 2.1, tomada de Diaz (2004).

---

<sup>6</sup> Basado en Diaz (2004).



Gráfica 2.1 Posibles trayectorias de una partícula al atravesar una pantalla con dos rejillas.

En este caso la probabilidad de que la partícula vaya de A hacia B está dada por la expresión:

$$P_{AB} = P_{AC_1}P_{C_1B} + P_{AC_2}P_{C_2B}. \quad (2.3)$$

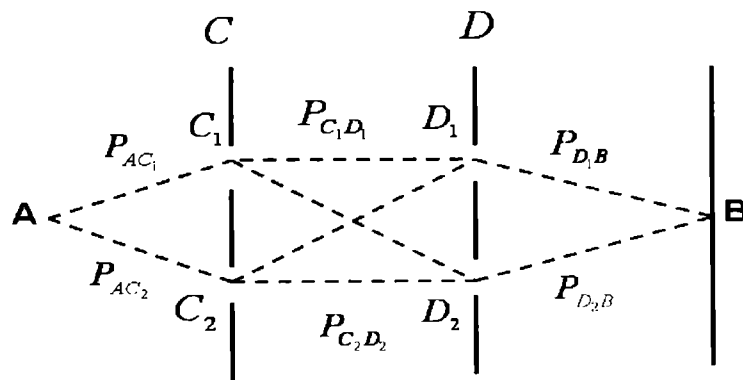
Siguiendo este razonamiento se tiene que para una pantalla con tres rejillas la probabilidad de que la partícula viaje del punto A al B se calcula con la expresión:

$$P_{AB} = P_{AC_1}P_{C_1B} + P_{AC_2}P_{C_2B} + P_{AC_3}P_{C_3B}. \quad (2.4)$$

Para el caso de que hubiera  $n$  rendijas en la pantalla, es posible generalizar las expresiones (2.3) y (2.4), de tal manera que incluya las probabilidades de que la partícula tome los  $n$  caminos, lo cual está determinado por los valores que tome  $C$ , de donde se tiene que <sup>7</sup>:

$$P_{AB} = \sum_{i=1}^n P_{AC_i} P_{C_i B}. \quad (2.5)$$

Si ahora se analiza el caso en el que se coloquen dos láminas, cada una con dos rendijas como se muestra en la gráfica 2.2, tomada de Díaz (2004):



Gráfica 2.2 Posibles trayectorias de una partícula al atravesar dos pantallas con dos rejillas.

<sup>7</sup> En las notas originales de Díaz (2004) el índice es la misma  $C$ , lo cual constituye un error de notación.

En este caso la probabilidad de que la partícula vaya de A hacia B se calcula con la expresión:

$$\begin{aligned}
 P_{AB} = & P_{AC_1} P_{C_1 D_1} P_{D_1 B} + P_{AC_2} P_{C_2 D_2} P_{D_1 B} \\
 & + P_{AC_1} P_{C_1 D_2} P_{D_2 B} + P_{AC_2} P_{C_2 D_1} P_{D_1 B}.
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Siguiendo este proceso de colocar  $n$  pantallas con  $n \rightarrow \infty$  de tal manera que se cubriera el espacio entre A y B, la probabilidad de que la partícula se desplace de A hacia B sería igual a la sumatoria infinita de todas las posibles trayectorias que unen tales puntos. El ejemplo anterior se presentó para dar una idea esquemática de lo que es el concepto de sumar las contribuciones de todas las trayectorias. Esta idea tan aparentemente simple fue la que utilizó Feynman al visualizar que la integral del propagador o kernel del operador de evolución a lo largo del tiempo pudiera expresarse como una suma sobre todas las posibles trayectorias que conectan los puntos  $q_0$  y  $q_T$  puntos inicial y final respectivamente, con un factor de ponderación  $\exp[iS(A, B; T)/\hbar]$ , donde  $S$  es la acción clásica, lo anterior se expresa como:

$$K(q_0, q_1; T) = \sum_{\text{todas las trayectorias}} A e^{(iS(q_0, q_1; T))/\hbar}, \tag{2.7}$$

donde  $A$  es una constante de normalización adecuada. A continuación se dará la definición formal del operador propagador o kernel de la integral funcional o de Feynman.

## 2.2 El operador de evolución y el propagador de Feynman.

Se iniciará esta sección describiendo el operador de evolución en el tiempo. Cuando el Hamiltoniano de un sistema no presenta dependencia explícita del tiempo, es posible conocer el estado de una función de onda en cualquier instante

$t$  si se conoce su estado en un instante anterior  $t_0$  utilizando la expresión:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i(t-t_0)\frac{\hat{H}}{\hbar}}|\Psi(t_0)\rangle, \quad (2.8)$$

lo anterior se puede representar también mediante la aplicación del operador  $\hat{U}(t, t_0)$ , con lo cual se obtiene:

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\Psi(t_0)\rangle. \quad (2.9)$$

Al operador

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-i(t-t_0)\frac{\hat{H}}{\hbar}}, \quad (2.10)$$

se le llama operador de evolución en el tiempo o temporal o simplemente operador de evolución. Dicho operador debe satisfacer la ecuación de Schrödinger, dado que la función de estado (2.8) la satisface por hipótesis, es decir se cumple que:

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}|\Psi(t)\rangle,$$

con lo cual:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t, t_0) = \hat{H}\hat{U}(t, t_0). \quad (2.11)$$

Además su inverso se obtiene intercambiando el orden de los tiempos final e inicial, según Kleinert (2006), con lo cual se tiene:

$$\hat{U}^{-1}(t, t_0) \equiv e^{i(t-t_0)\frac{\hat{H}}{\hbar}} = \hat{U}(t_0, t). \quad (2.12)$$

por otro lado, también se cumple que  $\hat{U}$  es un operador Hermitiano es decir:

$$\hat{U}^{-\dagger} = \hat{U}^{-1}.$$

Ahora bien, como en  $t = t_0$  debe cumplirse que  $|\Psi(t)\rangle = |\Psi(t_0)\rangle$ , entonces se puede pedir que el operador de evolución cumpla la condición de ser unitario, es decir:

$$\hat{U}(t_0, t_0) = \mathbf{1}, \quad (2.13)$$

en este caso  $\mathbf{1}$  representa al operador identidad, por lo cual, es posible deducir que la solución de la ecuación (2.11) está dada por el operador evolución, establecido en la ecuación (2.10). Si en la ecuación (2.8) se toma  $T = t - t_0$ , el estado descrito en dicha expresión se puede representar como:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\widehat{H}}{\hbar}T} |\Psi(t_0)\rangle,$$

con lo cual la función de onda puede escribirse como:

$$\Psi(q, t) = \langle q | e^{-i\frac{\widehat{H}}{\hbar}T} |\Psi(t_0)\rangle, \quad (2.14)$$

si ahora se introduce el operador identidad expresado en forma de integral (visto en capítulo 1):  $\mathbf{1} = \int dq' |q'\rangle \langle q'|$ , en (2.14), la ecuación de onda puede escribirse:

$$\Psi(q, t) = \int dq' \langle q | e^{-i\frac{\widehat{H}}{\hbar}T} |q'\rangle \langle q' | \Psi(t_0)\rangle = \int dq' \langle q | e^{-i\frac{\widehat{H}}{\hbar}T} |q'\rangle \Psi(q', t_0). \quad (2.15)$$

Otra forma de resolver la ecuación de Schrödinger es planteando la función de onda en forma integral, cuya forma es la siguiente<sup>8</sup>:

$$\Psi(q, t) = \int dq' K(q, t; q', t') \Psi(q', t_0), \quad (2.16)$$

donde  $\Psi(q', t_0)$  es la función de onda en el instante  $t_0$  y  $K(q, t; q', t')$  es una función denominada el propagador, dicha función debe determinarse aun, para hacerlo basta comparar las ecuaciones (2.15) con (2.16), con lo cual se obtiene que el propagador está dado por:

$$K(q, t; q', t') = \langle q | e^{-i\frac{\widehat{H}}{\hbar}T} |q'\rangle. \quad (2.17)$$

El propagador o kernel es fundamental pues es la función que describe el comportamiento futuro de la partícula a través de las diferentes trayectorias posibles

---

<sup>8</sup> Díaz (2004)

cuando ésta va de un punto a otro. Desde el punto de vista matemático, el propagador puede interpretarse como la amplitud de probabilidad de localizar a una partícula en la posición  $q$  en el instante  $t$ , dado que en el instante  $t_0$  estaba en  $q'$ , en otras palabras mide la probabilidad de transición del estado  $|q'\rangle$  al estado  $|q\rangle$ , es decir que:

$$P_{|q'\rangle \rightarrow |q\rangle} = |K(q, t; q', t')|^2. \quad (2.18)$$

En la siguiente sección se obtendrá la expresión para la integral de Feynman partiendo de los elementos dados en esta sección.

## 2.3 Obtención de la Integral Funcional o de Feynman.

El objeto de esta sección es llegar una forma explícita para calcular la integral de Feynman. Se iniciará este proceso considerando una partícula que inicialmente se encuentra en la posición  $q_a$  en el instante  $t_a$  y en la posición  $q_b$  en el instante  $t_b$ , el objetivo ahora es calcular la amplitud de probabilidad de que ocurra dicha transición de estados, para hacerlo se dividirá al intervalo de tiempo  $t_b - t_a$  empleado por la transición, en  $N$  pequeños intervalos de tiempo  $\epsilon$ , tales que:  $T = t_b - t_a = N\epsilon$ , entonces:

$$e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}T} = e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}N\epsilon} = \underbrace{e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}\epsilon} e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}\epsilon} \dots e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}\epsilon}}_{N\text{-factores}}, \quad (2.19)$$

al sustituir (2.19) en (2.17) se obtiene:

$$\begin{aligned} K(q_b, t_b; q_a, t_a) &\equiv K(q_b, q_a; T) = \langle q_b | e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}N\epsilon} | q_a \rangle \\ &= \langle q_b | e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}\epsilon} e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}\epsilon} \dots e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}\epsilon} | q_a \rangle. \end{aligned} \quad (2.20)$$

si se renombran a las posiciones inicial y final para facilidad de notación de la siguiente manera:

$$q_a = q_0$$



$$q_b = q_N$$

y luego se introduce el operador identidad entre cada exponencial, lo que equivale a introducir  $N-1$  identidades, se llega a la expresión:

$$K(q_N, q_0; T) = \int dq_1 dq_2 \dots dq_N \langle q_N | e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}\epsilon} | q_{N-1} \rangle \times \langle q_{N-1} | e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}\epsilon} | q_{N-2} \rangle \dots \langle q_1 | e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}\epsilon} | q_0 \rangle. \quad (2.21)$$

La expresión anterior equivale a considerar que se tienen  $N-1$  propagadores para cada intervalo de tiempo  $\epsilon$ , entonces es posible decir que la forma general de cada uno de los términos dentro de la integral es de la forma:

$$K(q_k, q_{k-1}; \epsilon) = \langle q_k | e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}\epsilon} | q_{k-1} \rangle, \quad (2.22)$$

si se considera el hecho de que  $\epsilon$  es pequeño (o se puede forzar a serlo tanto como se requiera), es posible hacer una aproximación de primer orden para la exponencial, con lo cual (2.22) se puede reexpresar como:

$$K(q_k, q_{k-1}; \epsilon) \approx \langle q_k | 1 - i\frac{\hat{H}}{\hbar}\epsilon | q_{k-1} \rangle, \quad (2.23)$$

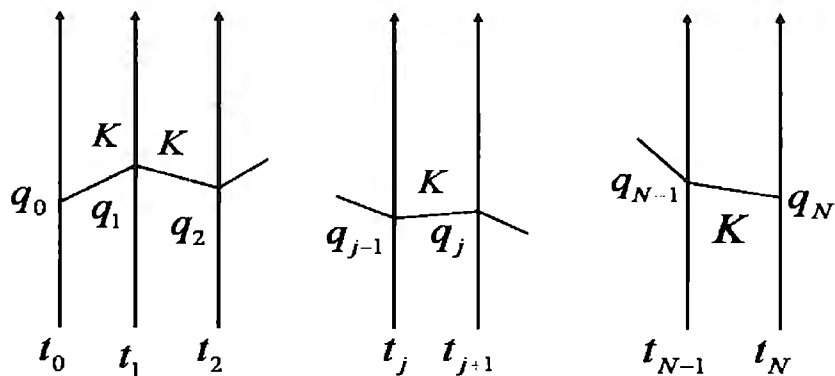
para obtener este valor es necesario calcular primero el valor de  $\langle q_k | \hat{H} | q_{k-1} \rangle$  que proviene de descomponer (2.23). Para calcular este valor se supondrá que el Hamiltoniano puede descomponerse como la suma de dos operadores, uno que dependa de la posición  $q$  y el otro que dependa del momento lineal  $p$ , de este modo el Hamiltoniano puede expresarse como la suma:

$$\hat{H}(q, p) = \hat{f}(q) + \hat{g}(p), \quad (2.24)$$

así

$$\langle q_k | \hat{H} | q_{k-1} \rangle = \langle q_k | \hat{f}(q) | q_{k-1} \rangle + \langle q_k | \hat{g}(p) | q_{k-1} \rangle. \quad (2.25)$$

Lo anterior se puede describir mediante la gráfica 2.3, en ella se esquematiza el hecho de que el propagador que describe la trayectoria de un punto inicial a otro final en realidad se descompone en propagadores entre puntos intermedios.



Gráfica 2.3 Descomposición del propagador en una serie de propagadores “cortos”.

Para calcular el primer término de la suma:

$$\langle q_k | \hat{f}(q) | q_{k-1} \rangle = f(q_{k-1}) \langle q_k | q_{k-1} \rangle = f(q_{k-1}) \delta(q_k, q_{k-1}), \quad (2.26)$$

se inicia con la transformada de Fourier de la unidad como una forma de representar a la delta de Dirac, dada por:

$$\delta(w) = \frac{1}{2\pi} \int dx e^{iwx}, \quad (2.27)$$

entonces (2.26) puede reescribirse como

$$\langle q_k | \hat{f}(q) | q_{k-1} \rangle = \int \frac{dp_k}{2\pi} f(q_{k-1}) e^{ip_k(q_k - q_{k-1})}. \quad (2.28)$$

Ahora, para calcular el segundo sumando de (2.25), se introduce el operador unidad

$$\langle q_k | \widehat{g}(p) | q_{k-1} \rangle = \int dp_k \langle q_k | \widehat{g}(p) | p_k \rangle \langle p_k | q_{k-1} \rangle, \quad (2.29)$$

procediendo igual que en (2.26) y usando el hecho de que

$$\langle p_k | q_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ip_k q_k}, \quad (2.30)$$

se obtiene que (2.26) equivale a:

$$\langle q_k | \widehat{g}(p) | q_{k-1} \rangle = \int \frac{dp_k}{2\pi} \widehat{g}(p_k) e^{ip_k(q_k - q_{k-1})}. \quad (2.31)$$

Entonces el valor de (2.25) es

$$\begin{aligned} \langle q_k | \widehat{H} | q_{k-1} \rangle &= \int \frac{dp_k}{2\pi} [f(q_{k-1}) + \widehat{g}(p_k)] e^{ip_k(q_k - q_{k-1})} \\ &= \int \frac{dp_k}{2\pi} \widehat{H}(q_{k-1}, p_k) e^{ip_k(q_k - q_{k-1})}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

sustituyendo este valor en la aproximación de (2.23) se encuentra que la forma del término general (2.22) es:

$$K(q_k, q_{k-1}; \epsilon) = \int \frac{dp_k}{2\pi} e^{-i\frac{\widehat{H}}{\hbar}\epsilon} e^{ip_k(q_k - q_{k-1})}. \quad (2.33)$$

Si ahora se sustituye N-1 veces la ecuación (2.21) en (2.33), se obtiene:

$$\begin{aligned} &K(q_N, q_0; T) \\ &= \int dq_1 dq_2 \cdots dq_N \langle q_N | e^{-i\frac{\widehat{H}}{\hbar}\epsilon} | q_{N-1} \rangle \langle q_{N-1} | e^{-i\frac{\widehat{H}}{\hbar}\epsilon} | q_{N-2} \rangle \cdots \langle q_1 | e^{-i\frac{\widehat{H}}{\hbar}\epsilon} | q_0 \rangle \\ &= \int dq_1 dq_2 \cdots dq_N \frac{dp_1}{2\pi} \cdots \frac{dp_N}{2\pi} \exp \left\{ i \left[ p_N(q_N - q_{N-1}) - \frac{\widehat{H}}{\hbar}\epsilon \right] \right. \\ &\quad \left. + \cdots + i \left[ p_1(q_1 - q_0) - \frac{\widehat{H}}{\hbar}\epsilon \right] \right\} \\ &= \prod_{j=1}^{N-1} \int dx_j \prod_{k=1}^N \int \frac{dp_k}{2\pi} \exp \left\{ i \left[ p_k(q_k - q_{k-1}) - \frac{\widehat{H}}{\hbar}\epsilon \right] \right\} \\ &= \int \frac{dp_N}{2\pi} \prod_{j=1}^{N-1} \int \frac{dx_j dp_j}{2\pi} \exp \left\{ i \sum_{k=1}^N \left[ p_k(q_k - q_{k-1}) - \frac{\widehat{H}}{\hbar}\epsilon \right] \right\}, \end{aligned}$$

finalmente:

$$K(q_N, q_0; T) = \int \frac{dp_N}{2\pi} \prod_{j=1}^{N-1} \int \frac{dx_j dp_j}{2\pi} \exp \left\{ i \sum_{k=1}^N \left[ p_k \frac{(q_k - q_{k-1})}{\epsilon} - \frac{\widehat{H}}{\hbar} \right] \epsilon \right\}. \quad (2.34)$$

Es importante destacar que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(q_k - q_{k-1})}{\epsilon} = \dot{q}_k, \quad (2.35)$$

con lo cual (2.34) puede escribirse como:

$$K(q_N, q_0; T) = \int \frac{dp_N}{2\pi} \prod_{j=1}^{N-1} \int \frac{dx_j dp_j}{2\pi} \exp \left\{ i \sum_{m=1}^N \left[ p_k \dot{q}_k - \frac{\widehat{H}}{\hbar} \right] \epsilon \right\}. \quad (2.36)$$

Si se considera el hecho de que la acción Hamiltoniana clásica está dada por:

$$I[p, q] = \int_0^T dt (p\dot{q} - H) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^N \left[ p_k \dot{q}_k - \frac{\widehat{H}}{\hbar} \right] \epsilon, \quad (2.37)$$

entonces se tiene que

$$K(q_N, q_0; T) = \int \mathcal{D}p \mathcal{D}q e^{iI[p(t), q(t)]}, \quad (2.38)$$

la expresión (2.38), es la forma Hamiltoniana del propagador de Feynman, en donde la medida de la integral  $\mathcal{D}p \mathcal{D}q$  está definida como

$$\overline{\mathcal{D}p \mathcal{D}q} \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{dp_1}{2\pi} \dots \frac{dp_N}{2\pi} dq_1 \dots dq_N. \quad (2.39)$$

Al valor  $K(q_N, q_0; T)$  visto antes, el cual representa una amplitud de probabilidad, también se le llama elemento de transición y es denotado por:

$$K(q_N, q_0; T) = \langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle. \quad (2.40)$$

De la mecánica clásica se sabe que el Hamiltoniano para una partícula no relativista es  $H = p^2/2m + V(x)$ , al sustituir este valor en la integral del k-ésimo momento lineal  $p_k$  de la expresión (2.34), se obtiene

$$\begin{aligned} & \int \frac{dp_k}{2\pi} \exp \left\{ i \left[ p_k (q_k - q_{k-1}) - \frac{p_k^2}{2m} \epsilon - V(q_{k-1}) \epsilon \right] \right\} \\ &= \exp \{-iV(q_{k-1})\epsilon\} \int \frac{dp_k}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{i\epsilon}{2m} p_k^2 + ip_k (q_k - q_{k-1}) \right\}, \end{aligned}$$

la última integral es del tipo Gaussiano, por lo cual puede calcularse mediante la relación (2.41), ver apéndice A:

$$\int dx e^{-px^2 \pm qx} = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \exp\left(\frac{q^2}{4p}\right), \quad (2.41)$$

por lo cual la integral en el  $k$ -ésimo momento lineal  $p_k$  se puede calcular como:

$$\begin{aligned} & \int \frac{dp_k}{2\pi} \exp\left\{i\left[p_k(x_k - x_{k-1}) - \frac{p_k^2}{2m}\epsilon - V(q_{k-1})\epsilon\right]\right\} \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi}} i\epsilon \exp\left\{i\left[\frac{m}{2}\frac{(q_k - q_{k-1})^2}{\epsilon} - \epsilon V(q_{k-1})\right]\right\} \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\epsilon}} \exp\left\{i\left[\frac{m}{2}\left(\frac{q_k - q_{k-1}}{\epsilon}\right)^2 - V(q_{k-1})\right]\epsilon\right\} \end{aligned}$$

al sustituir la ecuación (2.35) en esta última expresión se obtiene

$$\begin{aligned} & \int \frac{dp_k}{2\pi} \exp\left\{i\left[p_k(x_k - x_{k-1})\frac{p_k^2}{2m}\epsilon - V(q_{k-1})\epsilon\right]\right\} \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\epsilon}} \exp\left\{i\left[\frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q_{k-1})\right]\epsilon\right\} \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\epsilon}} \exp\{iS[q(t)]\}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

donde el término

$$S[q(t)] = \int dt \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q_{k-1}) \quad (2.43)$$

corresponde a la acción Lagrangiana clásica. Con lo cual es posible escribir la forma Lagrangiana del Propagador de Feynman mediante la expresión:

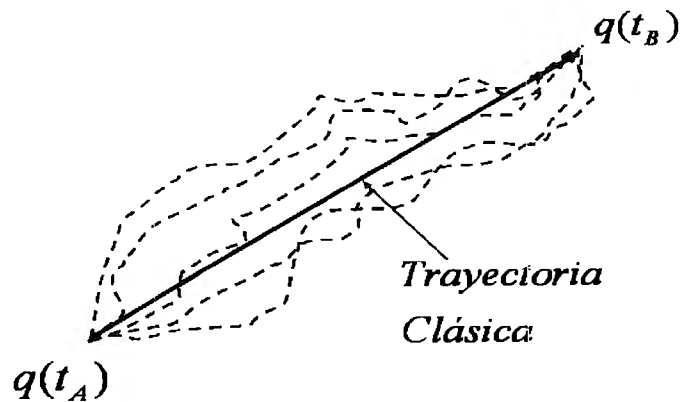
$$K(q_N, q_0; T) = \int \mathcal{D}q(t) e^{iS[q(t)]}, \quad (2.44)$$

en donde

$$\mathcal{D}q(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i}\right)^{\frac{N}{2}} dq_1 \cdots dq_{N-1}. \quad (2.45)$$

La expresión (2.44) es la versión más común dentro de la literatura para la Integral de Feynman o “Feynman Path Integral”, y señala que en la descripción

de la propagación de una partícula de una posición  $q_a$  a una posición  $q_b$ , debe considerarse la contribución de todas las trayectorias que unen a tales puntos, y que la contribución de cada trayectoria es de igual magnitud, sólo difieren en la fase, donde la fase de contribución está determinada por la acción Lagrangiana  $S[q(t)]$  para dicha trayectoria, en las unidades de  $\hbar$ . La suma sobre todas las trayectorias posibles está dada por la integral funcional, cuyo diferencial  $\mathcal{D}q(t)$  está dado por (2.45). Dentro de todas las trayectorias posibles se encuentra la denominada trayectoria clásica, que es aquella que de acuerdo al principio de mínima acción, minimiza la acción  $S[q(t)]$ , como lo muestra la gráfica 2.4.



Gráfica 2.4 Trayectorias posibles, incluyendo la línea recta de la trayectoria clásica.

## 2.4 Ejemplos físicos.

A continuación se analizarán dos ejemplos del empleo de la integral de Feynman para lograr cierta familiaridad con su uso y resolver problemas más complejos en las secciones posteriores, se iniciará con el caso más simple, el propagador de la partícula libre.

### 2.4.1 Propagador de la partícula libre.

Se calculará ahora el propagador  $K(q', T; q, 0)$  para una partícula libre, esto se hará de dos maneras diferentes, la primera utilizando las técnicas ordinarias de la mecánica cuántica, con objeto de mostrar que para problemas simples es más sencillo utilizar las técnicas comunes de la mecánica cuántica. De la mecánica clásica se tiene que el Hamiltoniano para una partícula libre está dado por

$$H = \frac{p^2}{2m}.$$

El propagador puede calcularse usando las técnicas ordinarias de la mecánica cuántica del siguiente modo:

$$\begin{aligned} K(q', T; q, 0) &= \langle q' | e^{-iHT} | q \rangle \\ &= \langle q' | e^{-iT \frac{p^2}{2m}} \int \frac{dp}{2\pi} | p \rangle \langle p | q \rangle \\ &= \int \frac{dp}{2\pi} e^{-i \frac{p^2 T}{2m}} \langle q' | p \rangle \langle p | q \rangle \\ &= \int \frac{dp}{2\pi} e^{-iT \frac{p^2}{2m} + i(q' - q)p}. \end{aligned}$$

La última integral es una integral gaussiana, con lo cual se obtiene:

$$K(q', T; q, 0) = \left( \frac{m}{2\pi iT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{im(q' - q)^2}{2T}}. \quad (2.46)$$

Ahora se resolverá el mismo problema pero con la integral de Feynman, el

propagador en este caso es de la forma:

$$\begin{aligned}
K(q', T; q, 0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2\pi i \epsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \times \\
&\quad \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \exp \left\{ i \left[ \frac{m\epsilon}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \left( \frac{q_{j+1} - q_j}{\epsilon} \right)^2 \right] \right\} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2\pi i \epsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \times \\
&\quad \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \exp i \frac{m}{2\epsilon} \left[ (q_N - q_{N-1})^2 + (q_{N-1} - q_{N-2})^2 + \dots \right. \\
&\quad \left. + (q_2 - q_1)^2 + (q_1 - q_0)^2 \right],
\end{aligned}$$

donde  $q_0 = q$  y  $q_N = q'$  son los puntos inicial y final respectivamente, afortunadamente cada una de las integrales resultantes son gaussianas al calcularlas se llega a:

$$\begin{aligned}
K(q', T; q, 0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2\pi i \epsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \frac{1}{\sqrt{N}} \left( \frac{2\pi i \epsilon}{m} \right)^{\frac{(N-1)}{2}} e^{im(q'-q)^2/2N\epsilon} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2\pi i N \epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} e^{im(q'-q)^2/2N\epsilon}.
\end{aligned}$$

Como  $N\epsilon = T$ , se obtiene que el propagador de la partícula libre está dado por:

$$K(q', T; q, 0) = \left( \frac{m}{2\pi i T} \right)^{\frac{1}{2}} e^{im(q'-q)^2/2T},$$

expresión que coincide completamente con la obtenida por los métodos ordinarios de la mecánica cuántica, ver expresión (2.46). Es importante hacer notar que es posible expresar el argumento de la exponencial como  $(mT/2) \left( \frac{q'-q}{T} \right)^2$  este término es justamente la acción clásica  $S(q_{cl})$  para una partícula moviéndose a lo largo de una trayectoria clásica, la cual coincide con una línea recta, entre los puntos inicial y final. Ahora bien, por tratarse de un análisis cuántico debe considerarse el factor  $\hbar$  para efectos de no tener errores dimensionales, así, el resultado final es:

$$K(q', T; q, 0) = \left( \frac{m}{2\pi \hbar i T} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i \frac{S(q_{cl})}{\hbar}}. \quad (2.47)$$



## 2.4.2 Propagador del oscilador armónico.

Como segundo ejemplo se considera el problema del oscilador armónico en una dimensión<sup>9</sup>. El objetivo ahora es calcular la integral de Feynman para un oscilador armónico de una dimensión, en este caso se necesita calcular

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}x(t) e^{i \int (m\dot{x}^2 - m\omega^2 x^2) dt / 2\hbar}, \quad (2.48)$$

sobre todas las posibles trayectorias, y con las condiciones de frontera:

$x(t_i) = x_i$ ,  $x(t_f) = x_f$ , en este caso la trayectoria clásica está dada por la expresión

$$x_c(t) = x_i \frac{\text{sen}\omega(t_f - t)}{\text{sen}\omega(t_f - t_i)} + x_f \frac{\text{sen}\omega(t - t_i)}{\text{sen}\omega(t_f - t_i)}. \quad (2.49)$$

Por otro lado la acción a lo largo de la trayectoria clásica esta dada por

$$\begin{aligned} S_c &= \int_{t_i}^{t_f} \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m}{2} \omega^2 x^2 \right) dt \\ &= \frac{m}{2} \omega \frac{(x_i^2 + x_f^2) \cos \omega(t_f - t) - 2x_i x_f}{\text{sen}\omega(t_f - t_i)}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Tomando en cuenta que la fluctuación alrededor de la trayectoria clásica contribuye en un factor de corrección de orden  $O(\hbar)$  a la amplitud relativa de la parte principal  $e^{\frac{iS_c}{\hbar}}$ . Si ahora se desarrolla una expansión en series de Fourier para la fluctuación cuántica, luego se puede observar que la acción es estacionaria con respecto a la variación de  $x(t)$  alrededor de  $x_c(t)$ , la cual es no lineal respecto al término  $a_n$  y debido a que los diferentes modos son ortogonales sobre la integral respecto del tiempo  $t$ , la acción está dada por

$$S = S_c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{2} \left[ \frac{(n\pi)^2}{t_f - t_i} - \omega^2 (t_f - t_i) \right] \frac{1}{2} a_n^2. \quad (2.51)$$

---

<sup>9</sup> Hitoshi (2006)

por lo tanto, la integral de Feynman está compuesta de un número infinito de integrales de Fresnel sobre  $a_n$  usando la medida dada por

$$\mathcal{D}x(t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t_f - t_i)}} \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t_f - t_i)} \frac{n\pi}{\sqrt{2}}} da_n, \quad (2.52)$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle &= \int \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t_f - t_i)}} \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t_f - t_i)} \frac{n\pi}{\sqrt{2}}} da_n \\ &\times \int \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \left[ \frac{(n\pi)^2}{t_f - t_i} - \omega^2 (t_f - t_i) \right] \frac{a_n^2}{2} \right\} \\ &= e^{\frac{iS_c}{\hbar}} \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t_f - t_i)}} \prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{\omega(t_f - t_i)}{n\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Ahora si se hace uso de la siguiente representación de productos infinitos para la función seno

$$\frac{\text{sen}\pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 - x^2}{n^2} \right). \quad (2.54)$$

Se encuentra que

$$\begin{aligned} \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle &= e^{\frac{iS_c}{\hbar}} \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t_f - t_i)}} \sqrt{\omega(t_f - t_i) \text{sen}\omega(t_f - t_i)} \\ K(x_f, t_f; x_i, t_i) &= \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = e^{\frac{iS_c}{\hbar}} \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \text{sen}\omega(t_f - t_i)}}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

La expresión (2.55) corresponde al propagador de un oscilador armónico, uno de los problemas clásicos dentro de la mecánica cuántica.

# CAPÍTULO 3

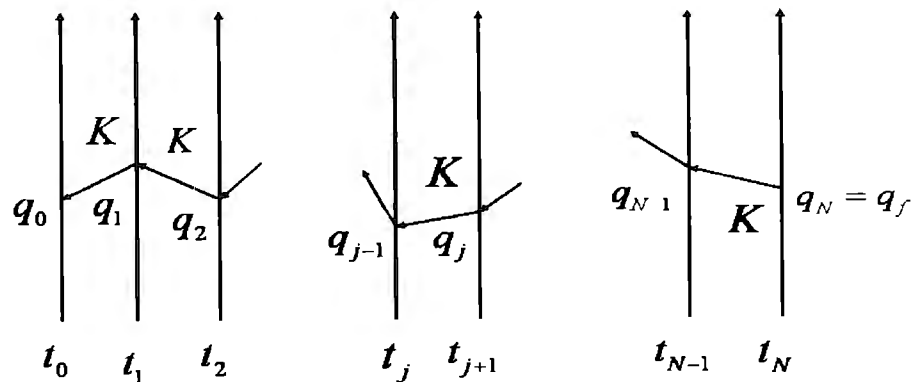
## La Integral Funcional aplicada en las Finanzas.

### 3.1 Hamiltoniano de Black y Scholes

#### 3.1.1 Introducción.

Esta sección se iniciará citando parte de la introducción del artículo de Jan W. Dash, Dash (1989): "...Las integrales de trayectoria (Path Integrals) fueron desarrolladas en profundidad por primera vez por Feynman como una técnica usada en su trabajo ganador del premio nobel relacionado con la mecánica cuántica relativista. Posteriores avances teóricos de Kac y otros, así como aplicaciones a la física clásica en una gran variedad de circunstancias fueron dándose . Las integrales de trayectoria proporcionan un poderoso y elegante marco de referencia para tratar problemas que involucran variables aleatorias o estocásticas. Este marco de referencia es muy general. Por ejemplo, cualquier ecuación de difusión tiene una integral de trayectoria como solución. Con lo cual, una utilidad potencial para las integrales de trayectoria en finanzas se presenta en los modelos de valuación de opciones donde aparecen las ecuaciones de difusión (ecuación de Kolmogorov hacia atrás), basadas sobre consideraciones que usan modelos con variables estocásticas para tasas de interés, precios de acciones, tasas de cambio u otras cantidades de interés financiero. Hay una larga historia de las aplicaciones de la integral de trayectoria a problemas prácticos en la física que pueden probar ser útiles también en las finanzas."

Se puede decir que la idea fundamental de la integral de trayectoria es la “propagación de la información” en el tiempo por medio de un conjunto infinito de intervalos de tiempo infinitesimales, de tal modo que la ecuación diferencial subyacente es satisfecha en cada intervalo. Esta idea se puede visualizar en la gráfica 3.1 para el caso de una opción europea. En este caso la información que se tiene es el precio de ejercicio de la opción en la fecha de expiración  $t_f$ , dicha información es propagada hacia atrás hasta el momento actual  $t_0$  mediante una serie de pasos de tiempo consecutivos de longitud  $\Delta t$ . Cada paso es acompañado de un propagador para dicho intervalo de tiempo, cada propagador es la función de Green solución de la ecuación de difusión subyacente para el valor de la opción. Las trayectorias son generadas en el sistema de coordenadas desde  $t_f$  hasta  $t_0$ , donde la dependencia de  $q$  sobre las variables financieras son especificadas por el modelo financiero, por ejemplo el de Black y Scholes.



Gráfica 3.1 Propagación de información hacia atrás.

Cada trayectoria tiene una ponderación especificada por el modelo y todas las trayectorias son consideradas para sumarse sobre la integral de trayectoria. Las ponderaciones de las diferentes trayectorias pueden o no exhibir degeneración, esto depende básicamente de parámetros como la volatilidad por ejemplo.

### 3.1.2 Determinación del Hamiltoniano de Black y Scholes.

Se partirá de la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes (B-S), para poder analizarla dentro del marco de referencia de la mecánica cuántica, el objetivo es obtener el Hamiltoniano subyacente que conduzca el precio de las opciones financieras. Como se sabe la ecuación de Black y Scholes calcula el precio de una opción de compra europea considerando que la volatilidad es constante durante la vida de la opción, la forma de esta ecuación es

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rS \frac{\partial C}{\partial S} + rC, \quad (3.1)$$

y las condiciones de frontera:  $C(0, t) = 0$  y  $C(S, T) = \max(S - K, 0)$ , donde:

$C$  es el precio de la opción,

$S$  es el precio del activo subyacente en el mercado en el tiempo  $t$ ,

$r$  es tasa de interés libre de riesgo del mercado,

$K$  es el precio de ejercicio de la opción,

$\sigma^2$  es la volatilidad de los precios en el mercado, la cual, para este modelo se considera constante.

Para poder llegar a la ecuación de Black-Scholes-Schrödinger que es de la forma:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = H_{BS}C, \quad (3.2)$$

que es un problema de valores propios, primero hay que hacer un cambio de variable y luego reexpresar toda la ecuación de B-S en términos de esta nueva variable,

lo cual permitirá llegar a la ecuación del tipo (3.2), si se toma el siguiente cambio de variable

$$S = e^x, \quad -\infty < x < \infty, \quad (3.3)$$

Con base en (3.3) se obtienen las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x} = S \frac{\partial C}{\partial S} \implies \frac{\partial C}{\partial S} = \frac{1}{S} \frac{\partial C}{\partial x} = e^{-x} \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{\partial C}{\partial S} \right) = \frac{\partial}{\partial S} \left( e^{-x} \frac{\partial C}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{-x} \frac{\partial C}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial S} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} &= \left( -e^{-x} \frac{\partial C}{\partial x} + e^{-x} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial S} \ln S \\ \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} &= \frac{e^{-x}}{S} \left( -\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{S^2} \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{\partial C}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Si ahora se sustituyen (3.3), (3.4) y (3.5) en (3.1), se llega a una ecuación diferencial parcial en términos de la variable  $x$ , lo cual permitirá identificar el Hamiltoniano de B-S,  $H_{BS}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= -\frac{1}{2}\sigma^2 \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) - r \frac{\partial C}{\partial x} + rC \\ &= -\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \left( \frac{1}{2}\sigma^2 - r \right) \frac{\partial C}{\partial x} + rC \end{aligned} \quad (3.6)$$

Al comparar la forma de (3.6) con la de (3.2), se obtiene de manera inmediata la forma del Hamiltoniano de B-S

$$H_{BS} = -\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( \frac{1}{2}\sigma^2 - r \right) \frac{\partial}{\partial x} + r. \quad (3.7)$$

Desde el punto de vista de la mecánica cuántica la ecuación de B-S tiene un grado de libertad que es la variable  $x$ , en este caso la volatilidad sería el equivalente al inverso de la masa en la mecánica cuántica y el término de tendencia sería un potencial dependiente de la velocidad, así mismo, el precio de la opción  $C$ , sería el equivalente a la función de onda.

Ahora se analizará la naturaleza hermitiana de este Hamiltoniano, lo que puede observarse es que el Hamiltoniano de B-S es no Hermitiano y esto se debe a que el término de tendencia que incluye la primera derivada parcial es antihermitiano (como se vio en la sección 1.5), es decir al sustituir su conjugado transpuesto se obtiene:

$$H\dagger_{BS} = -\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left(\frac{1}{2}\sigma^2 - r\right) \frac{\partial}{\partial x} + r \neq H_{BS} \quad (3.8)$$

Cuando se considera el caso más general para la valuación de una opción en el cual se tiene volatilidad estocástica, es posible obtener el Hamiltoniano de Merton-Garman de manera análoga. La ecuación de Merton-Garman se usa para determinar el precio de una opción o un activo pero con volatilidad estocástica, la ecuación de Merton-Garman es:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + (\lambda + \mu V) \frac{\partial C}{\partial V} + \frac{1}{2}VS^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \rho\xi V^{\frac{1}{2}+\alpha} S \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial V} + \frac{1}{2}\xi^2 V^{2\alpha} \frac{\partial^2 C}{\partial V^2} = rC, \quad (3.9)$$

donde la variable  $V$  modela la volatilidad estocástica,  $\xi^2$  es la volatilidad asociada a  $V$ , los demás son parametros a determinar. Dado que tanto  $S$  como  $V$  por hipótesis son variables aleatorias positivas, es posible hacer los cambios de variables siguientes:

$$\begin{aligned} S &= e^x, -\infty < x < \infty, \\ \sigma^2 &= V = e^y, -\infty < y < \infty. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Al utilizar estas nuevas variables mediante un procedimiento análogo a la ecuación de B-S, el cual se desarrolla a continuación, se obtiene una expresión para la ecuación de Merton-Garman en términos de las variables  $x$  e  $y$ , a partir de (3.10) se tiene que:

$$\begin{aligned} x &= \ln S \\ y &= \ln V, \end{aligned} \quad (3.11)$$

Para el cambio de variable  $x = \ln S$ , se obtienen nuevamente las ecuaciones (3.4) y (3.5), por lo cual se procedera a obtener las derivadas respecto de la volatilidad

$V$ , mediante el cambio de variable  $y = \ln V$ :

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial y} = V \frac{\partial C}{\partial V} \implies \frac{\partial C}{\partial V} = \frac{1}{V} \frac{\partial C}{\partial y} = e^{-y} \frac{\partial C}{\partial y} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial V^2} &= \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{\partial C}{\partial V} \right) = \frac{\partial}{\partial V} \left( e^{-y} \frac{\partial C}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left( e^{-y} \frac{\partial C}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial V} \\ &= \left( -e^{-y} \frac{\partial C}{\partial y} + e^{-y} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \frac{\partial}{\partial S} \ln V \\ &= \frac{e^{-y}}{V} \left( -\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \\ &= \frac{1}{V^2} \left( \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \frac{\partial C}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Y luego las derivadas parciales cruzadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial V} &= \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{\partial C}{\partial V} \right) = \frac{\partial}{\partial S} \left( e^{-y} \frac{\partial C}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{-y} \frac{\partial C}{\partial y} \right) \frac{\partial x}{\partial S} = e^{-y} \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} \frac{\partial}{\partial S} \ln S = \frac{1}{V} \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} \frac{1}{S} \\ &= \frac{1}{VS} \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (3.14)$$



Al sustituir (3.4), (3.5), (3.12), (3.13) y (3.14) en (3.9) se obtiene

$$\begin{aligned}
rC &= \frac{\partial C}{\partial t} + rS \left( \frac{1}{S} \frac{\partial C}{\partial x} \right) + (\lambda + \mu V) \left( \frac{1}{V} \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} V S^2 \left[ \frac{1}{S^2} \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) \right] \\
&+ \rho \xi V^{\frac{1}{2} + \alpha} S \left( \frac{1}{VS} \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{2} \xi^2 V^{2\alpha} \left[ \frac{1}{V^2} \left( \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \frac{\partial C}{\partial y} \right) \right] \\
&= \frac{\partial C}{\partial t} + r \frac{\partial C}{\partial x} + \left( \frac{\lambda}{V} + \mu \right) \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{1}{2} V \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) \\
&+ \rho \xi V^{\alpha - \frac{1}{2}} \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \xi^2 V^{2\alpha - 2} \left( \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \frac{\partial C}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial C}{\partial t} + r \frac{\partial C}{\partial x} + \left( \frac{\lambda}{e^y} + \mu \right) \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{1}{2} e^y \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) \\
&+ \rho \xi (e^y)^{\alpha - \frac{1}{2}} \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \xi^2 (e^y)^{2\alpha - 2} \left( \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \frac{\partial C}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial C}{\partial t} + \left( r - \frac{e^y}{2} \right) \frac{\partial C}{\partial x} + \left( \lambda e^{-y} + \mu - \frac{\xi^2}{2} e^{2y(\alpha - 1)} \right) \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{e^y}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \\
&+ \rho \xi e^{y(\alpha - \frac{1}{2})} \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} + \frac{\xi^2}{2} e^{2y(\alpha - 1)} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Al reagrupar términos se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial t} &= - \left( r - \frac{e^y}{2} \right) \frac{\partial C}{\partial x} - \left( \lambda e^{-y} + \mu - \frac{\xi^2}{2} e^{2y(\alpha - 1)} \right) \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{e^y}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \\
&- \rho \xi e^{y(\alpha - \frac{1}{2})} \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} - \frac{\xi^2}{2} e^{2y(\alpha - 1)} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + rC.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Por otro lado el Hamiltoniano de Merton-Garman debe cumplir la ecuación

$$\frac{\partial C}{\partial t} = H_{MG} C, \tag{3.17}$$

al comparar (3.16) con (3.17) se obtiene la forma del Hamiltoniano de Merton-Garman

$$\begin{aligned}
H_{MG} &= - \left( r - \frac{e^y}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} - \left( \lambda e^{-y} + \mu - \frac{\xi^2}{2} e^{2y(\alpha - 1)} \right) \frac{\partial}{\partial y} - \frac{e^y}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\
&- \rho \xi e^{y(\alpha - 1/2)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\xi^2}{2} e^{2y(\alpha - 1)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + r.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

En este caso el Hamiltoniano de Merton-Garman es un sistema con dos grados de libertad no lineales, ésto lo hace un problema mucho más complejo de resolver con métodos analíticos, en general para resolver este caso hay que recurrir a métodos numéricos, en el caso en que  $\alpha = \frac{1}{2}$  se puede encontrar una solución exacta empleando técnicas de ecuaciones diferenciales parciales; para el caso de  $\alpha = 1$  es posible resolverlo por medio de la integral de Feynman.

## **3.2 Kernel del precio de opciones de compra europeas y su función propia solución.**

### 3.2.1 Kernel del precio para opciones.

Para analizar la ecuación del precio de la opción se considera que se tienen condiciones de neutralidad al riesgo, a partir de ésta, se obtendrá la probabilidad condicional, la cual proporcionará la forma de la evolución aleatoria del comportamiento del activo a lo largo del tiempo, de hecho, la probabilidad condicional que se busca constituye el Kernel de precios que porta toda la información requerida para valuar cualquier opción independiente de la trayectoria.

Al considerar (con afán de generalizar) el caso de una acción cuyo precio es estocástico al igual que su volatilidad, y además que se consideran opciones independientes de la trayectoria, cuya maduración se da en el tiempo  $T$  y siendo  $g(x, y)$  la función de pago, se requiere determinar el precio de la opción en el tiempo  $t < T$ . Si se denota con  $p(x, y, T - t; x', y')$  a la probabilidad condicional neutral al riesgo, dado el precio del activo  $x$ , la volatilidad  $y$ , hay que encontrar el precio del activo  $x'$  y la volatilidad  $y'$  en el instante  $T$ . La condición de frontera se da tomando el valor final en  $t = T$ , y está dado mediante la delta de Dirac, con lo cual se tiene:

$$p(x, y, T - t; x', y') = \delta(x' - x)\delta(y' - y). \quad (3.19)$$

El precio del derivado está dado, para  $t \leq T$ , por la fórmula de Feynman-Kac considerando  $\tau = T - t$ . La fórmula de Feynman-Kac<sup>10</sup>, establece el enlace entre las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) y los procesos estocásticos, mediante esta fórmula es posible resolver ciertas EDP simulando trayectorias aleatorias de un proceso estocástico. Supongase que se tiene una EDP dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad (3.20)$$

sujeta a la condición final

$$f(x, T) = \Psi(x), \quad (3.21)$$

donde  $\mu, \sigma, \Psi$  son funciones conocidas y  $f$  es desconocida. Esta es la ecuación de Fokker-Planck o también llamada ecuación de Kolmogorov hacia atrás. La fórmula de Feynman-Kac establece que la solución puede ser escrita como un valor esperado:

$$f(x, t) = E[\Psi(X_T) | X_t = x], \quad (3.22)$$

donde  $X$  es un proceso de Ito conducido por la ecuación diferencial estocástica

$$dX = \mu(x, t)dt + \sigma(X, t)dW, \quad (3.23)$$

donde  $W(t)$  es un proceso de Wiener o movimiento Browniano, con la condición inicial  $X(t) = x$ . Este valor esperado puede calcularse usando métodos numéricos como el de Montecarlo. Con lo cual se tiene que

$$C(\tau; x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' dy' p(x, y, \tau; x', y') g(x'; y'). \quad (3.24)$$

La expresión  $p(x, y, \tau; x', y')$  es el kernel del precio, pues es el kernel de la transformación que actúa sobre la función de pago  $g(x'; y')$  hacia atrás en el tiempo, hasta el tiempo presente  $t$  y proporciona el valor de la opción  $C(\tau; x, y)$ .

---

<sup>10</sup> Basado en definición de Wikipedia: [http://en.wikipedia.org/wiki/Feynman-Kac\\_formula](http://en.wikipedia.org/wiki/Feynman-Kac_formula)

Para el caso del modelo de Merton-Garman con volatilidad estocástica, la función de pago depende únicamente del precio de la acción, por lo cual es independiente de la volatilidad final, con lo cual  $g(x'; y') = g(x')$ , obteniéndose:

$$C(\tau; x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' dy' p_{MG}(x, y, \tau; x') g(x'), \quad (3.25)$$

donde el kernel de precio de Merton-Garman está dado por

$$p_{MG}(x, y, \tau; x') = \int_{-\infty}^{\infty} dx' dy' p(x, y, \tau; x', y'). \quad (3.26)$$

En el caso más simple de Black y Scholes, únicamente evoluciona el precio de la acción, con lo cual se tiene

$$C(\tau; x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' p_{BS}(x, \tau; x') g(x'). \quad (3.27)$$

### 3.2.2 Función propia (eigenfunción) del kernel del precio.

Se considerará sólo el caso de Black y Scholes, en este caso el kernel de precios es determinado por el Hamiltoniano, por lo cual se empieza planteando la ecuación de B-S en términos del Hamiltoniano, para transformarla en una ecuación de valores y vectores propios, a partir de la ecuación (3.2) se tiene:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = HC, \quad (3.28)$$

cuya solución es de la forma

$$C(t, x) = e^{tH} C(0, x), \quad (3.29)$$

con  $C(0, x)$  como condición inicial. Si se usa la notación de Dirac, al sustituir (3.23) en (3.22) para simplificar la escritura queda

$$\begin{aligned} \langle x | \frac{\partial}{\partial t} | C, t \rangle &= \langle x | H | C, t \rangle \frac{\partial}{\partial t} | C, t \rangle \\ &= H | C, t \rangle | C, t \rangle = e^{tH} | C, 0 \rangle, \end{aligned} \quad (3.30)$$

con la condición de frontera siguiente:

$$|C, T\rangle = e^{TH}|C, 0\rangle = |g\rangle \implies |C, 0\rangle = e^{-TH}|g\rangle.$$

Dado que  $\tau = T - t$ , cuando  $\tau = 0$ , significa que  $t = T$ , o si  $\tau = T$ , significa que  $t = 0$ , entonces se tiene

$$C(t, x) = \langle x|C, t\rangle = \langle x|e^{-\tau H}|g\rangle,$$

e introduciendo el operador **1** mediante la integral de completés se tiene

$$C(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \langle x|e^{-\tau H}|x'\rangle g(x'), \quad (3.31)$$

ecuación que proporciona una solución formal para el kernel de precios en términos del Hamiltoniano:

$$p(x, \tau, x') = \langle x|e^{-\tau H}|x'\rangle. \quad (3.32)$$

A partir de la ecuación (3.25) se puede deducir que el kernel de precios es el elemento de la matriz del operador diferencial  $e^{-\tau H}$ . Es muy importante señalar en este punto que el papel desempeñado por el Hamiltoniano en la valuación de opciones no es el de incluir el futuro del sistema, como en el caso de un sistema mecánico cuántico, en lugar de esto, lo que hace es traer o descontar del futuro hacia el presente la función de pago. Usando las condiciones de completés del Hamiltoniano y considerando las funciones de onda, se puede obtener una forma explícita para el kernel de precios:

$$\begin{aligned} p(x, \tau, x') &= \langle x|e^{-\tau H}|x'\rangle \\ &= \langle x|e^{-\tau H} \int_{\mathcal{D}} dE \mu(E) |\Psi_E\rangle \langle \widehat{\Psi}_E|x'\rangle \\ &= \int_{\mathcal{D}} dE \mu(E) e^{-\tau E} \Psi_E(x) \widehat{\Psi}_E(x'). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Esta última expresión es muy útil cuando es posible evaluar todas las funciones propias de  $H$ , además para el estudio de las propiedades formales del kernel de precios.

### 3.2.3 Determinación del kernel de precios de Black y Scholes.

Al utilizar la fórmula de Feynman-Kac para valuar el precio de una opción de compra europea con volatilidad constante se tiene, según Baaquie (2004):

$$C(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \langle x | e^{-\tau H_{BS}} | x' \rangle g(x'), \quad (3.34)$$

donde  $H_{BS}$ , está dado por la ecuación (3.7), con lo cual es posible utilizar el Hamiltoniano para poder calcular el valor del kernel de precios

$$p(x, \tau | x') = \langle x | e^{-\tau H_{BS}} | x' \rangle; \quad \tau = T - t. \quad (3.35)$$

Ahora se buscare una expresión explícita para poder calcular el kernel de precios, para esto se toma la expresión del Hamiltoniano de B-S en términos de la cantidad de movimiento, aprovechando el hecho de que al emplear la base formada por los momentos lineales,  $H_{BS}$  es diagonal, por otro lado empleando la transformada de Fourier para cambiar de la base de los vectores de posición a la base del momentos lineales se tiene:

$$\langle x | x' \rangle = \delta(x - x') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ip(x-x')} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \langle x | p \rangle \langle p | x' \rangle. \quad (3.36)$$

La cual proporciona la base del espacio de momentos, de donde, la ecuación de completés en términos de estos vectores es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} |p\rangle \langle p| = \mathcal{J}, \quad (3.37)$$

con el producto escalar definido por

$$\langle x | p \rangle = e^{ipx}; \quad \langle p | x \rangle = e^{-ipx}. \quad (3.38)$$

Entonces el Hamiltoniano de B-S puede expresarse como

$$\langle x | H_{BS} | p \rangle = H_{BS} \langle x | p \rangle = H_{BS} e^{ipx} = \left[ \frac{1}{2} \sigma^2 p^2 + i \left( \frac{1}{2} \sigma^2 - r \right) p + r \right] e^{ipx}. \quad (3.39)$$

En esta última expresión, se puede apreciar que las funciones propias de  $H_{BS}$  son las funciones  $e^{ipx}$ , que están en términos del momentos  $p$ , además por (3.37), es posible afirmar que tales funciones propias forman un conjunto completo y por lo tanto, son una base del espacio, así:

$$\begin{aligned} p_{BS}(x, \tau; x') &= \langle x | e^{-\tau H_{BS}} | x' \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \langle x | e^{-\tau H_{BS}} | p \rangle \langle p | x' \rangle \\ &= e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\tau\sigma^2 p^2} e^{ip[x-x'+\tau(r-\frac{\sigma^2}{2})]}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Calculando la integral gaussiana de (3.40) se obtiene el kernel de precios de la ecuación de B-S. que es igual a<sup>11</sup>

$$p_{BS}(x, \tau; x') = e^{-r\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\tau\sigma^2} [x-x'+\tau(r-\frac{\sigma^2}{2})]^2}. \quad (3.41)$$

La ecuación (3.41), establece que los estados  $x'$  tienen una distribución normal con media igual a  $\ln(S(t)) + (r - \sigma^2/2)$  y una varianza de  $\tau\sigma^2$ , lo cual coincide con los cálculos tradicionales. En el caso general de Hamiltonianos no lineales, como es el caso de aquellos con volatilidad estocástica, normalmente no es posible encontrar una solución exacta que diagonalice  $H$ , por lo que en tal caso no es posible evaluar de manera exacta a los elementos de la matriz de  $e^{-\tau H}$ , para estas situaciones se utiliza la integral de Feynman, tanto como herramienta analítica como numérica.

### 3.3 Formulación del Hamiltoniano para la condición de martingala.

De acuerdo a lo que se ha visto en este capítulo, el valor de una opción sobre un activo libre de riesgo está dado en términos del Hamiltoniano por la expresión

$$C(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \langle x | e^{-\tau H} | x' \rangle g(x'). \quad (3.42)$$

---

<sup>11</sup> Ver Apéndice A.

Por otro lado, del campo de las Finanzas se sabe que si un activo sigue una evolución libre de riesgo entonces obedece la llamada condición de martingala, dicha condición establece que el precio esperado de un activo en un tiempo futuro  $t'$  y que es descontado con una medida martingala, será igual al último precio que se tenga registrado en un tiempo previo  $t$ . Lo anterior queda establecido mediante la ecuación de la condición de martingala, según Baaquie (2004)

$$S(t) = E \left[ e^{-(t'-t)r} S(t') | S(t) \right] = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^x P_m(x), \quad (3.43)$$

donde  $P_m(x)$  es la función de distribución de probabilidad acorde con el principio de valuación neutral al riesgo:

$$P_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\tau\sigma^2} \left[ x - x(t) + \tau \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2}, \quad (3.44)$$

y además:

$$S(T) = e^{x(T)}; \quad x(T) = \mathcal{N} \left( \ln S(t) + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau, \sigma \sqrt{\tau} \right).$$

Si en la ecuación (3.42) se toma  $g(x) = S(x)$ , entonces se obtendrá el valor de  $S$  requerido por la condición de martingala de la ecuación (3.43), así se tendrá que:

$$S(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \langle x | e^{-(t'-t)H} | x' \rangle S(x'),$$

utilizando la notación de Dirac

$$\langle x | S \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \langle x | e^{-(t'-t)H} | x' \rangle \langle x' | S \rangle. \quad (3.45)$$

si se considera ahora la ecuación de completés para un solo activo dada por

$$\mathcal{J} = \int_{-\infty}^{\infty} dx' |x' \rangle \langle x'|, \quad (3.46)$$

que junto con (3.45) proporcionan el estado o función propia de la ecuación

$$|S \rangle = e^{-(t'-t)H} |S \rangle \quad (3.47)$$



puesto que el tiempo  $t'$  es arbitrario, la expresión para calcular el valor instantáneo de la condición de martingala está dado, según Baaquie (2002) por:

$$H|S\rangle = 0. \quad (3.48)$$

Este resultado es muy importante pues significa que el activo que sigue el comportamiento  $S = e^x$  corresponde a un estado propio muy especial del Hamiltoniano, pues tiene asociado un valor propio de energía cero, esto significa que es un elemento en el espacio de los estados que no es normalizable, el hecho de que el activo tenga un energía propia (eigenenergía) de cero, significa que bajo la condición de martingala, la evolución dirigida por  $H$ , el activo subyacente no cambia de precio.

Por otro lado cabe señalar, que el resultado de (3.42) muestra que la existencia de una medida martingala es equivalente a un Hamiltoniano libre de riesgo que anula el valor del activo subyacente  $S$ . De hecho, la existencia de un Hamiltoniano neutral al riesgo implica que todos los derivados de un activo subyacente que sean valuados con este Hamiltoniano estarán libres de arbitraje.

### 3.4 Potenciales en la valuación de opciones.

Como se vio en el capítulo 1 en la ecuación (1.68), el Hamiltoniano en la mecánica cuántica representa la energía total del sistema, esta energía total incluye tanto a la energía cinética como la energía potencial  $V$ . La energía cinética, debida al movimiento de la partícula depende fundamentalmente de su masa así como de su cantidad de movimiento, por otro lado, está la energía potencial, cuyo valor depende esencialmente de la posición de la partícula o de alguna otra perturbación que experimente el sistema, dicha ecuación es

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x, y, z).$$

Pero en el caso de los Hamiltonianos de Black-Scholes y Merton-Garman, todos sus términos dependen de las derivadas parciales de  $x$  en el primer caso y de  $x$ ,  $y$  en el segundo caso, además del tiempo, para ambos casos. Es decir no existe en estos Hamiltonianos algún término que involucre de manera directa el precio de la acción  $x$ , de tal forma que pudiera ser el análogo al potencial  $V(x)$ , cabe hacer la aclaración que esta  $V(x)$ , es totalmente diferente a la usada para representar a la volatilidad de las ecuaciones (3.9) a (3.17). El hecho de que el término potencial no aparezca en los Hamiltonianos vistos hasta ahora para el caso financiero no implica que dicho término no sea útil para el caso de las finanzas, este término puede agregarse al Hamiltoniano de B-S y con éste representar el comportamiento de algunas acciones cuyo desempeño depende de la trayectoria que siguen, lo cual ha sido estudiado por Linetsky, en Linetsky (1998), como ejemplos típicos se tienen el de algunas opciones con barrera.

En el caso de las opciones con barrera el término potencial adicionado al Hamiltoniano de B-S, describe perfectamente el efecto de la barrera, dando origen a lo que se conoce como el Hamiltoniano efectivo, compuesto por la suma del Hamiltoniano de B-S más el término potencial  $V(x)$ :

$$H_{ef} = H_{BS} + V. \quad (3.49)$$

Para el caso de opciones que dependen de la trayectoria el Hamiltoniano efectivo, el cual para evitar confusiones con el empleado para opciones con barrera se hace explícito en el subíndice la frase opción dependiente de la trayectoria ( $Odt$ ), se expresa en forma genérica por:

$$H_{Odt} = H_{BS} + igf(x), \quad (3.50)$$

donde la función  $f(x)$  describe la dependencia de la trayectoria por parte de la opción. En el caso particular de una opción Asiática que es del tipo dependiente

de la trayectoria, su Hamiltoniano es no Hermitiano y está dado por

$$H_{OpAsiatica} = H_{BS} + ige^x, \quad (3.51)$$

según lo establece Baaquie (2004).

Con lo cual el Hamiltoniano de B-S puede generalizarse para incluir un potencial que describa la dependencia de la trayectoria del activo, dicha generalización debe ser también compatible con la condición de martingala expresada en (3.49), así el Hamiltoniano de B-S que incluye el término potencial esta dado, según Baaquie (2004) por:

$$H_V = -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( \frac{\sigma^2}{2} - V(x) \right) \frac{\partial}{\partial x} + V(x), \quad (3.52)$$

donde  $V(x)$  es una función arbitraria de  $x$ . Así, se cumple que si un activo financiero es descrito con este Hamiltoniano, éste proporcionará una medida libre de riesgo y entonces podrá ser usado para valorar opciones. En la teoría de campos, al potencial también se le conoce como perturbación  $V(x)$ , y sirve para calcular un factor con el cual se decuenta a un activo, y está dado, según Baaquie y Coriano (2004) por:

$$\exp \left[ - \int_t^T V(x(t')) dt' \right],$$

el cual como se puede ver depende del activo, por ejemplo para el caso de una opción europea que madura en el tiempo  $T$ , el factor de descuento que proporciona el precio de la opción en el tiempo  $t < T$  es:

$$E_{[t,T]} = \left[ e^{-\int_t^T V(x(t')) dt'} (e^x - K)_+ \right], \quad (3.53)$$

donde la evolución es conducida por el Hamiltoniano de la ecuación (3.46), excepto por el último término  $V(x)$ . El descuento es elegido de tal manera que sea igual a la tendencia del Hamiltoniano, así la condición de martingala puede ser cumplida.

La no Hermiticidad de  $H_V$  es de naturaleza simple, de hecho, para un potencial arbitrario  $V$ ,  $H_V$  es equivalente a través de una transformación al Hamiltoniano efectivo  $H_{ef}$  el cual si es hermitiano, dicha transformación está dada, según Baaquie y Coriano, por

$$H_V = e^s H_{ef} e^{-s}, \quad (3.54)$$

donde

$$\begin{aligned} H_{ef} &= -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2\sigma^2} \left( \frac{\sigma^2}{2} + V \right)^2, \\ &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{\sigma^2} \int_0^x dy V(y). \end{aligned}$$

En este caso  $H_{ef}$  es Hermitiano por lo cual sus funciones propias forman una base del espacio, con lo cual el Hamiltoniano  $H_V$  también puede diagonalizarse empleando las funciones propias de  $H_{ef}$ , entonces se cumple que:

$$H_{ef} |\phi_n\rangle = E_n |\phi_n\rangle \quad \implies \quad H_V |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle,$$

donde

$$|\psi_n\rangle = e^s |\phi_n\rangle; \quad \langle \tilde{\psi}_n | = e^{-s}; \quad \langle \phi_n | \neq \langle \psi_n |.$$

En el caso del Hamiltoniano de B-S se puede considerar que  $V(x) = r$ , entonces

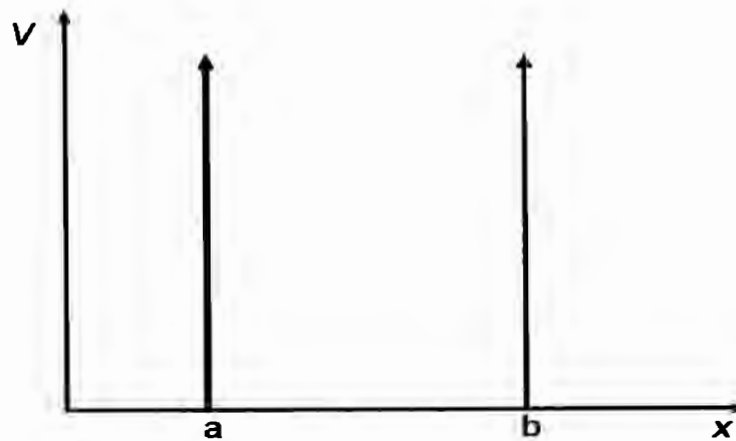
$$H_{BS} = e^s H_{ef} e^{-s} = e^{\alpha x} \left[ -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma \right] e^{-\alpha x}, \quad (3.55)$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{2\sigma^2} \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right)^2; \quad \alpha = \frac{1}{\sigma^2} \left( \frac{\sigma^2}{2} - r \right). \quad (3.56)$$

Una aplicación práctica interesante del Hamiltoniano efectivo de B-S, es usándolo para el problema de opciones con doble barrera, se verá como ejemplo el caso de la opción con barrera “Double-knock-out”. En general una opción con doble barrera es aquella que confina el valor de la acción subyacente a permanecer entre dos barreras de precio, las cuales se denotan por  $e^a$  y  $e^b$ , como se muestra

en la gráfica 3.2. En tal circunstancia el valor de la opción valdrá cero si el precio de la acción subyacente queda fuera de la barrera y un valor diferente de cero si está entre ellas.



Gráfica 3.2 Barreras de potencial para opción con barreras "double-knock-out".

En este caso el Hamiltoniano para este tipo de opciones está dado, según Baaquie (2004) por:

$$H_{DB} = H_{BS} + V(x) = e^S [H_{ef} + V(x)] e^{-S} \quad (3.57)$$

De la ecuación (3.55) se tiene que

$$\begin{aligned} H_{BS} &= -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( \frac{\sigma^2}{2} - r \right) \frac{\partial}{\partial x} + r \\ &= e^S H_{ef} e^{-S} = e^{\alpha x} \left( -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma \right) e^{-\alpha x}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

y el potencial está dado por

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x \leq a, \\ 0 & \text{si } a < x < b, \\ \infty & \text{si } x \geq b. \end{cases} \quad (3.59)$$

Este problema es idéntico a uno muy conocido en la mecánica cuántica, denominado pozo infinito de potencial, en este caso la analogía se hace considerando que la “partícula financiera” tiene una masa  $\frac{1}{\sigma^2}$  (con unidades donde  $\hbar = 1$ ) y se mueve en un pozo de potencial infinito. Los momentos lineales permitidos debido a que son las funciones propias además de ortonormales son de la forma:  $p_n = (n\pi)/(b - a)$ . Para probar la ortonormalidad se calcula:

$$\langle \phi_n | \phi_{n'} \rangle = \frac{2}{b-a} \int_a^b \text{sen } p_n(x-a) \text{sen } p_{n'}(x'-a) dx = \delta_{n-n'} \quad (3.60)$$

Y además forman una base completa puesto que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \langle x | \phi_n \rangle \langle \phi_n | x' \rangle &= \frac{2}{b-a} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen } p_n(x-a) \text{sen } p_n(x'-a) \\ &= \frac{1}{2(b-a)} \sum_{-\infty}^{\infty} \left[ \exp \frac{in\pi}{b-a}(x-x') - \exp \frac{in\pi}{b-a}(x+x'-2a) \right] \\ &= \frac{\pi}{(b-a)} \left\{ \delta \left[ \frac{\pi(x-x')}{b-a} \right] - \delta \left[ \frac{\pi(x+x'-2a)}{b-a} \right] \right\} \\ &= \delta(x-x'); \quad \text{con } a < x, x' < b \end{aligned} \quad (3.61)$$

Por lo cual el kernel de precios está dado por:

$$\begin{aligned} \langle x | e^{-\tau H} | x' \rangle &= e^{-\gamma\tau + \alpha(x-x')} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\tau E_n} \langle x | \phi_n \rangle \langle \phi_n | x' \rangle \\ &= \frac{1}{2(b-a)} e^{-\gamma\tau + \alpha(x-x')} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\tau\sigma^2 p_n^2}{2}} \left[ e^{ip_n(x-x')} - e^{ip_n(x+x'-2a)} \right]. \end{aligned} \quad (3.62)$$

En la ecuación anterior el término  $\tau$  del tiempo remanente aparece dentro de la sumatoria, de tal forma que hace imposible el análisis cuando  $\tau \rightarrow 0$ , por lo cual

por medio de la fórmula de sumatoria de Poisson es posible hacer la inversión  $\tau \rightarrow \frac{1}{\tau}$ , dicha fórmula establece que:

$$\delta(y - n) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n y} \quad (3.63)$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \langle x | e^{-\tau H} | x' \rangle &= \frac{1}{2(b-a)} e^{-\gamma\tau + \alpha(x-x')} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(y-n) \\ &\times \exp \left[ -\frac{y^2 \pi^2 \tau \sigma^2}{2(b-a)} \right] \left[ \exp \frac{iy\pi(x-x')}{b-a} - \exp \frac{iy\pi(x+x'-2a)}{b-a} \right] \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi\tau\sigma^2}} \exp[-\gamma\tau + \alpha(x-x')] \\ &\times \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[ -\frac{(x-x'+2a(b-a))^2}{2\tau\sigma^2} \right] \right. \\ &\quad \left. - \exp \left[ -\frac{(x+x'-2a-2n(b-a))^2}{2\tau\sigma^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.64)$$

donde:  $\gamma = \frac{(r+\sigma^2/2)}{2\sigma^2}$ ;  $\alpha = \frac{\sigma^2/2-r}{\sigma^2}$  así, el kernel de precios está dado por una suma infinita de distribuciones gaussianas y de hecho, fijando  $a$  finito y  $b \rightarrow \infty$ , o viceversa se obtiene la solución para el caso de una opción con una sola barrera ya sea limitada por la izquierda o por la derecha. Para el primer caso sólo se considera el término  $n = 0$ , para el segundo caso, sólo se deben considerar los términos obtenidos con  $n = 0$  y  $n = 1$ . Finalmente, el precio de una opción de compra europea sin barreras puede evaluarse usando el kernel de precios de la ecuación (3.64) teniendo ambos límites  $a \rightarrow \infty$  y  $b \rightarrow \infty$  de manera simultánea y considerando sólo el término con  $n = 0$ , obteniéndose la expresión general:

$$\begin{aligned} C(S, K; \tau) &= \sum_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{-2n\alpha(b-a)} \left( e^{2n(b-a)} S \mathcal{N}(d_{n1}) - K e^{-r\tau} \mathcal{N}(d_{n2}) \right) \right. \\ &\quad \left. - S^{2\alpha} e^{-2\alpha[n(b-a)-a]} \left( e^{2n(b-a)} \frac{e^{2a}}{S} \mathcal{N}(d_{n3}) - K e^{-r\tau} \mathcal{N}(d_{n4}) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.65)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 d_{n1} &= \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + 2n(b-a) + \tau\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{\tau}} \\
 d_{n2} &= \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + 2n(b-a) + \tau\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{\tau}} = d_{n1} - \sigma\sqrt{\tau}, \\
 d_{n3} &= \frac{\ln\left(\frac{e^{2a}}{SK}\right) + 2n(b-a) + \tau\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{\tau}}, \\
 d_{n4} &= \frac{\ln\left(\frac{e^{2a}}{SK}\right) + 2n(b-a) + \tau\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{\tau}} = d_{n3} - \sigma\sqrt{\tau},
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

lo cual coincide con el resultado de E.G. Haug, en Haug (1997).

## 3.5 Lagrangiano de Black y Scholes

### 3.5.1 Introducción.

Cuando se estudian las aplicaciones del Hamiltoniano en las Finanzas se puede apreciar que sólo algunos problemas pueden resolverse utilizando el Hamiltoniano, ésto se debe fundamentalmente al hecho de la no linealidad de la mayoría de los sistemas, tal es el caso por ejemplo del Hamiltoniano de Merton-Garman, el cual es muy difícil de resolver analíticamente, en estos casos una de las herramientas que ha probado ser muy útil es emplear la estructura de la integral de trayectoria o de Feynman, pues permite emplear tanto técnicas analíticas como numéricas para su solución. Esta sección y las siguientes se enfocaran en analizar las propiedades del Lagrangiano, pues este operador es la estructura fundamental sobre la cual se basa la formulación de la integral de trayectoria en la mecánica cuántica y se usará aquí para resolver problemas de valuación de opciones.



### 3.5.2 El Lagrangiano y la acción para el kernel de precios.

Como se vio antes, el kernel de precios proporciona la información suficiente para describir los precios de una clase de opciones, para el caso de un activo con  $\tau = T - t$ , el kernel está dado por  $p(x, \tau; x') = \langle x | e^{-\tau H} | x' \rangle$ . El valor del uso de la metodología de Feynman en la mecánica cuántica descansa sobre el hecho de que en algunos casos no es posible evaluar a los elementos de la matriz de  $e^{-\tau H}$ , sin embargo cuando se hace que el intervalo de tiempo  $\tau \rightarrow 0$  y para no causar confusión en la notación se emplea  $e^{-\epsilon H}$  y se toma el caso límite  $\epsilon \rightarrow 0$ , entonces, es posible obtener el valor exacto de los elementos de esta matriz. Así, para el caso de un Hamiltoniano de la forma  $H = T + V$ ,  $T$  es el término de la energía cinética, que está en función de operadores diferenciales y  $V$  el término potencial. En general, los operadores que aparecen en finanzas no conmutan, es decir, no es posible medir de manera simultánea a los observables que representan, ésto se describe con la siguiente relación de conmutación considerando a  $T$  y  $V$  como operadores:

$$[T, V] \equiv TV - VT \neq 0. \quad (3.67)$$

Para el caso que se está analizando se tiene que  $e^{-\tau H} \neq e^{-\tau T} e^{-\tau V}$ , esto es debido a lo que se dijo anteriormente, este proceso en general es muy complicado, por lo cual se recurre a tomar  $\tau = \epsilon$ , con  $\epsilon \rightarrow 0$ , con este cambio se puede hacer la aproximación siguiente

$$e^{-\epsilon H} \simeq e^{-\epsilon T} e^{-\epsilon V}, \quad (3.68)$$

esta condición lleva de manera natural a la formulación misma de la integral de trayectoria de Feynman, como se definió en el capítulo pasado.

Volviendo al objetivo de esta sección, que es el de determinar el kernel de precios, se inicia por discretizar el tiempo de maduración  $\tau$  en  $N$  fragmentos

de tamaño  $\epsilon = \frac{\tau}{N}$ . De este modo las variables en principio continuas  $x(t)$  se discretizan también y se representan con  $x_i$ , donde  $t = i\epsilon$  y  $0 \leq i \leq N$ . Con estos cambios si es posible calcular los elementos de la matriz  $\langle x|e^{-\tau H}|x' \rangle$ , mediante el producto de  $N$  factores de la forma  $e^{-\epsilon H}$ , de acuerdo al siguiente proceso:

$$\begin{aligned} p(x, \tau; x') &= \lim_{N \rightarrow \infty} \langle x| [e^{-\epsilon H}]^N |x' \rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle x \left| \left[ \underbrace{e^{-\epsilon H} e^{-\epsilon H} \dots e^{-\epsilon H}}_{N\text{-veces}} \right] \right| x' \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Al introducir la ecuación de completés del capítulo anterior

$$\mathcal{J} = \int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle \langle x|,$$

e insertándola  $N-1$  veces en la ecuación (3.53) se llega a:

$$p(x; \tau | x') = \left( \prod_{i=1}^{N-1} \int dx_i \right) \prod_{i=1}^N \langle x_i | e^{-\epsilon H} | x_{i-1} \rangle, \quad (3.70)$$

con las siguientes condiciones de frontera:

$$x_N = x; \quad x_0 = x'. \quad (3.71)$$

Con lo cual es posible describir el Lagrangiano del sistema mediante la fórmula de Feynman:

$$\langle x_i | e^{-\epsilon H} | x_{i-1} \rangle \equiv \mathcal{N}_i(\epsilon) e^{\epsilon L(x_i; x_{i-1}; \epsilon)} \quad (3.72)$$

donde  $\mathcal{N}_i(\epsilon)$  es una constante de normalización y a partir de (3.54) y (3.56) se obtiene

$$p(x; \tau, x') \equiv \int DX e^S, \quad (3.73)$$

donde la acción  $S$  está dada por la ecuación:

$$S = \epsilon \sum_{i=1}^N L(x_i, x_{i-1}; \epsilon), \quad (3.74)$$

y la medida de la integral de trayectoria está dada por

$$\int DX = \mathcal{N}_N(\epsilon) \prod_{i=1}^{N-1} \int \mathcal{N}_i(\epsilon) dx_i, \quad (3.75)$$

que es la integral de trayectoria de Feynman. Algunas veces la  $\mathcal{N}_i(\epsilon)$  es independiente de la variable de integración, en tales casos dicha constante  $\mathcal{N}_i$  puede ser ignorada, así, cuando existe el límite  $N \rightarrow \infty$  y se cumplen las condiciones de frontera  $x(\tau) = x$ ;  $x(0) = x'$ , es posible obtener la forma continua de la integral de trayectoria de Feynman

$$p(x; \tau, x') = \prod_{t=0}^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} dx(t) e^S \implies \langle x | e^{-\tau H} | x' \rangle \equiv \int DX e^S, \quad (3.76)$$

con las condiciones de frontera establecidas en (3.55), así como la acción en términos del Lagrangiano

$$S = \int L \left( x, \frac{dx}{dt} \right) dt. \quad (3.77)$$

Al analizar la ecuación (3.58), se aprecia que para un instante dado  $t = i\epsilon$ , el sistema tiene un sólo grado de libertad dado por la variable  $x_i$ ; por otro lado, analizando la ecuación (3.61) el seguir la trayectoria de integración implica hacer un número infinito de integrales sobre cada  $x_i$  por cada instante de tiempo comprendido en el intervalo  $t \in [0, \tau]$ .

### 3.5.3 El Lagrangiano de Black y Scholes.

Para determinar el Lagrangiano de Black y Scholes se parte de la ecuación (3.56), en este caso sólo existe una variable independiente que es el precio de la acción  $S = e^x$ , con lo cual se obtiene la expresión

$$\langle x_i | e^{-\epsilon H_{BS}} | x_{i-1} \rangle \equiv \mathcal{N}_{BS}(\epsilon)^{\epsilon \mathcal{L}_{BS}}, \quad (3.78)$$

donde  $\mathcal{N}_{BS}(\epsilon)$  es una constante de normalización y la función  $L_{BS}$  es el Lagrangiano de Black y Scholes. Recordando la fórmula (3.35), la cual describe de manera exacta el kernel de precios del proceso de Black y Scholes, si en esta expresión se toma  $\tau = \epsilon$  se obtiene

$$\begin{aligned} \langle x_i | e^{-\epsilon H_{BS}} | x_{i-1} \rangle &= e^{-r\epsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\epsilon\sigma^2} [x_i - x_{i-1} + \epsilon(r - \frac{\sigma^2}{2})]^2} \\ &= \frac{e^{-r\epsilon}}{\sqrt{2\pi\epsilon\sigma^2}} e^{-\frac{\epsilon}{2\sigma^2} \left[ \frac{\delta x_i}{\epsilon} + (r - \frac{\sigma^2}{2}) \right]^2} \\ &= \mathcal{N}_{BS}(\epsilon) e^{\epsilon L_{BS}}, \end{aligned}$$

donde  $\delta x_i = x_i - x_{i-1}$ , con lo cual se tiene que

$$L_{BS}(i) = -\frac{1}{2\sigma^2} \left[ \frac{\delta x_i}{\epsilon} + r - \frac{\sigma^2}{2} \right]^2 - r. \quad (3.79)$$

$$S_{BS} = \epsilon \sum_{i=1}^N L_{BS}(i). \quad (3.80)$$

$$\mathcal{N}_{BS}(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon\sigma^2}}. \quad (3.81)$$

Considerando la ecuación de completés, la medida de integración está dada por la expresión:

$$\int_{BS} DX = \left( \frac{1}{2\pi\epsilon\sigma^2} \right)^{\frac{N}{2}} \prod_{i=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} dx_i. \quad (3.82)$$

Y el kernel de precios de Black y Scholes está dado por la integral de trayectoria

$$p_{BS}(x, \tau; x') = \int_{BS} DX e^{S_{BS}}. \quad (3.83)$$

Ahora ya se puede calcular la integral de trayectoria del kernel de precios de Black y Scholes, de (3.64) la acción está dada por

$$S_{BS} = -\frac{1}{2\epsilon\sigma^2} \sum_{i=1}^N \left[ x_i - x_{i-1} + \epsilon \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2 - r\epsilon N. \quad (3.84)$$

Si se usa el siguiente cambio de variable y se deriva obtendremos:

$$\begin{aligned}\zeta_i &= x_i - x_{i-1} + \epsilon \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right), \\ d\zeta_i &= dx_i; \quad i = 1, 2, \dots, N.\end{aligned}\tag{3.85}$$

En este caso sólo hay  $N - 1$  variables de integración originales  $x_i$ , mientras que por otro lado, se han definido  $N$  variables de integración independientes con las  $\zeta_i$ , esto hace indispensable introducir una restricción sobre las variables  $\zeta_i$ , lo cual se logra con las condiciones de frontera dadas en (3.55), así se establece que:

$$\begin{aligned}x_N &= x_0 - N\epsilon \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \sum_{i=1}^N \zeta_i \\ \Rightarrow m - \sum_{i=1}^N \zeta_i &= 0; \quad m = x - x' + \tau \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right).\end{aligned}\tag{3.86}$$

Si se incluyen las condiciones de frontera anteriores en forma de una función delta dentro de la integral de trayectoria  $\int D\zeta$ , y a partir de la ecuación (3.67) se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}p_{BS}(x, \tau; x') &= \langle x | e^{-\tau H_{BS}} | x' \rangle \equiv \int_{BS} DX e^{S_{BS}} \\ &= e^{-r\tau} \left( \frac{1}{2\epsilon\pi\sigma^2} \right)^{\frac{N}{2}} \prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_i e^{-\frac{1}{2\epsilon\sigma^2} \sum_{i=1}^N \zeta_i^2} \\ &\quad \times \delta \left( m - \sum_{i=1}^N \zeta_i \right).\end{aligned}\tag{3.87}$$

Si se utiliza la forma integral de la función delta:

$$\delta(x - a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ip(x-a)},\tag{3.88}$$

y se factorizan las integraciones sobre  $\zeta_i$  dentro de las integrales gaussianas de-

sacopladas se obtiene

$$\begin{aligned}
p_{BS}(x, \tau; x') &= e^{-r\tau} \left( \frac{1}{2\epsilon\pi\sigma^2} \right)^{\frac{N}{2}} \times \\
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_i e^{-\frac{1}{2\epsilon\sigma^2} \sum_{i=1}^N \zeta_i^2} e^{ip(m - \sum_{i=1}^N \zeta_i)} \\
&= e^{-r\tau} \left( \frac{1}{2\epsilon\pi\sigma^2} \right)^{\frac{N}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ipm} \prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_i e^{-\frac{1}{2\epsilon\sigma^2} \zeta_i^2 + ip\zeta_i} \quad (3.89) \\
&= e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ipm} e^{-\frac{N\epsilon\sigma^2}{2p^2}} \\
&= e^{-r\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\tau\sigma^2} \left[ x - x' + \tau \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2},
\end{aligned}$$

donde  $N\epsilon = \tau$  ha sido utilizada para obtener el kernel de precios de Black y Scholes dado en la ecuación (3.35).

## 3.6 Integrales de trayectoria para opciones cuyo valor depende de la trayectoria

Las opciones cuyo valor depende de la trayectoria seguida a lo largo del tiempo pueden clasificarse en dos grandes categorías:

1. Las denominadas opciones con barrera, en las cuales se restringe su ejercicio a que el precio de la acción tome ciertos valores dentro de un rango específico.
2. Las opciones cuya función de pago depende de toda la serie de valores que vaya tomando el activo subyacente desde el inicio del contrato (compra de la opción) hasta el momento de la maduración de la opción.

Como ejemplo del segundo tipo de opciones y su tratamiento utilizando la integral de trayectoria se tomará el caso de una opción Asiática, para esto se usa el hecho de que la función de pago de una gran cantidad de opciones dependientes

de la trayectoria es de la forma:

$$g(x, K) = \max \left( K, \frac{1}{\tau} \int_0^\tau ds f(x(s)) \right). \quad (3.90)$$

Para el caso de las opciones asiáticas  $f(x(s)) = e^{x(s)}$ , este tipo de problemas ha sido abordado por Matacz, Matacz (2000), utilizando la integral de trayectoria. Con lo cual el precio de la opción en el tiempo actual  $t$  es calculado mediante la integral de trayectoria de Black y Scholes:

$$\begin{aligned} C(x_0; \tau; K) &= \int_{BS} DX e^{S_{BS}} g(x, K) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi g(\xi, K) \left\{ \int_{BS} DX \delta \left[ \xi - \frac{1}{\tau} \int_0^\tau ds f(x(s)) \right] e^{S_{BS}} \right\}, \end{aligned} \quad (3.91)$$

con las condiciones de frontera:  $x(\tau) = x_0$ ;  $\frac{dx(0)}{dt} = 0$ . Si se utiliza la representación de Fourier para la función delta establecida en (3.83), se tiene

$$\begin{aligned} C(x_0; \tau; K) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi dp}{2\pi} e^{ip\xi} Z(p) g(\xi, K), \\ Z(p) &= \int_{BS} DX e^{S_{ef}(p)} \\ S_{ef}(p) &= S_{BS} - i \frac{p}{\tau} \int_0^\tau ds f(x(s)). \end{aligned} \quad (3.92)$$

Con lo cual, para la opción asiática se tiene el siguiente Lagrangiano:

$$L_{OpAsiatica} = L_{BS} - i \frac{p}{\tau} e^x. \quad (3.93)$$

### 3.7 Lagrangiano para el precio de una acción con volatilidad estocástica.

Hasta este punto los problemas analizados consideran variaciones lineales, las cuales pueden ser resueltas en general de manera exacta con la integración gaussiana. Sin embargo la mayoría de problemas interesantes dentro del análisis

financiero involucran procesos no lineales en su acción  $S$ , la cual tiene potencias cúbicas o incluso mayores en sus variables aleatorias, en tales casos sólo algunos escasos problemas pueden resolverse de manera exacta. Un ejemplo de este tipo de problema es el de calcular el precio de una acción con volatilidad estocástica, dicho problema tratado con los métodos ordinarios de las finanzas es resuelto por métodos numéricos, en esta sección se verá, cómo, empleando la integral de trayectoria es posible resolverlo de manera exacta.

El problema citado puede considerarse como un sistema con dos grados de libertad, uno es el precio de la acción  $S(t)$  y el otro es su volatilidad  $V(t)$ , la ecuación de Merton-Garman, ecuación (3.9)

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + (\lambda + \mu V) \frac{\partial C}{\partial V} + \frac{1}{2} V S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \rho \xi V^{\frac{1}{2} + \alpha} S \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial V} + \frac{\xi^2}{2} V^{2\alpha} \frac{\partial^2 C}{\partial V^2} = rC, \quad (3.9)$$

analiza este tipo de problemas de manera generalizada mediante el valor que tome el parámetro  $\alpha$ . De acuerdo al análisis de datos se ha encontrado que los valores típicos de  $\alpha$  están en el rango de  $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ . El caso particular de  $\alpha = 1$ , simplifica mucho los cálculos, de hecho, se tiene un algoritmo numérico muy eficiente para resolverlo, Baaquie (2000). Considerando el caso en que  $\lambda = 0$ , la ecuación que conduce la volatilidad estocástica toma la forma

$$\frac{dV}{dt} = \mu V + \xi V Q \quad (3.94)$$

y la ecuación estocástica que conduce el precio de la acción es:

$$\frac{dS}{dt} = \phi S + \sigma S R \sigma, \quad (3.95)$$

donde  $Q$  y  $R$  son ruido blanco. Entonces el Hamiltoniano de Merton-Garman dado en la ecuación (3.13) con  $\alpha = 1$ ,  $\lambda = 0$  queda del siguiente modo

$$H_{MG} = -\frac{e^y}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( \frac{e^y}{2} - r \right) \frac{\partial}{\partial x} - \xi \rho e^{y/2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left( \frac{\xi^2}{2} - \mu \right) \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.96)$$



Para obtener el Lagrangiano de Merton-Garman a partir de su Hamiltoniano se utiliza la condición de completés del momento lineal dado en la ecuación (3.31):

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} |p\rangle\langle p| = \mathcal{I}$ , obteniéndose

$$\begin{aligned} \langle x, y | e^{-\epsilon H} | x', y' \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_x}{2\pi} \frac{dp_y}{2\pi} \langle x, y | e^{-\epsilon H} | p_x, p_y \rangle \langle p_x, p_y | x', y' \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_x}{2\pi} \frac{dp_y}{2\pi} e^{ip_x(x-x')} e^{ip_y(y-y')} e^{-\epsilon H(x, y, p_x, p_y)}, \end{aligned} \quad (3.97)$$

de (3.92) se tiene que los elementos de la matriz del Hamiltoniano están dados por

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{e^y}{2} p_x^2 + \left( \frac{e^y}{2} - r \right) ip_x + \xi \rho e^{y/2} p_x p_y + \frac{\xi^2}{2} p_y^2 + \left( \frac{\xi^2}{2} - \mu \right) ip_y. \quad (3.98)$$

Si se reescribe (3.93) utilizando notación matricial se tiene:

$$\begin{aligned} \langle x, y | e^{-\epsilon H} | x', y' \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_x}{2\pi} \frac{dp_y}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{\epsilon}{2} [p_x \ p_y] \right. \\ &\quad \left. \mathcal{M} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} + i [A \ B] \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned} \quad (3.99)$$

donde:

$$\begin{aligned} A &= x - x' + \epsilon r - \frac{\epsilon}{2} e^y \\ B &= y - y' + \epsilon \mu - \frac{\epsilon}{2} \xi^2 \\ \mathcal{M} &= \begin{pmatrix} e^y & \xi \rho e^{y/2} \\ \xi \rho e^{y/2} & \xi^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para poder calcular las integrales gaussianas sobre  $p_x$  y  $p_y$ , se requiere calcular el determinante de  $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M} = \xi^2 e^y (1 - \rho^2),$$

y también se requiere conocer la inversa de la matriz  $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M}^{-1} = \frac{1}{\xi^2 e^y (1 - \rho^2)} \begin{pmatrix} \xi^2 e^{-y} & -\xi \rho e^{-y/2} \\ -\xi \rho e^{-y/2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Al calcular las dos integrales gaussianas de (3.95) se tiene

$$\langle x, y | e^{-\epsilon H} | x', y' \rangle = \frac{1}{2\pi\epsilon\sqrt{\det \mathcal{M}}} e^{\epsilon L_{MG}}, \quad (3.100)$$

donde:

$$L_{MG} = -\frac{1}{2\epsilon^2(1-\rho^2)} \left( e^{-y} A^2 + \frac{B^2}{\xi^2} - 2\frac{\rho}{\xi} e^{-y/2} AB \right) + O(\epsilon). \quad (3.101)$$

Si se simplifica la ecuación anterior al tomar:  $\delta x = x - x'$  y  $\delta y = y - y'$ , se obtiene

$$\begin{aligned} L_{MG} &= -\frac{1}{2\epsilon^2} \left( \frac{\delta y}{\epsilon} + \mu - \frac{\xi^2}{2} \right)^2 \\ &\quad - \frac{e^{-y}}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{\delta x}{\epsilon} + r - \frac{e^y}{2} - \frac{\rho}{\xi} e^{y/2} \left( \frac{\delta y}{\epsilon} + \mu - \frac{\xi^2}{2} \right) \right]^2 + O(\epsilon) \\ &= L_O + L_X. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Y para la acción  $S$  se tiene:

$$S = \epsilon \sum_{i=1}^N L(i) + O(\epsilon) \equiv S_O + S_X. \quad (3.103)$$

De donde es posible concluir que  $S$  tiene una variación cuadrática respecto de las  $x_i$  y es no lineal respecto de las  $y_i$ , por lo cual en principio es posible calcular de manera exacta la integral de trayectoria de los precios de las acciones  $x_i$ .

Ahora es posible encontrar la forma del kernel de precios de Merton-Garman basándose en (3.103) y (3.73) se tiene:

$$p(x, y, \tau; x') = \int_{-\infty}^{\infty} dy' p(x, y, \tau; x', y') = \lim_{N \rightarrow \infty} \int DX DY e^S, \quad (3.104)$$

donde, para  $\epsilon = \frac{\tau}{N}$  se cumple

$$\int DX = \frac{e^{-y_N/2}}{\sqrt{2\pi\epsilon(1-\rho^2)}} \prod_{i=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_i e^{-y_i/2}}{\sqrt{2\pi\epsilon(1-\rho^2)}} \quad (3.105)$$

y por otro lado,

$$\int DY = \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \prod_{i=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy_i}{\sqrt{2\pi\epsilon\xi^2}}, \quad (3.106)$$

para evitar confusión se ha introducido el término adicional  $dy_0 = dy'$ , debido a que se hace la integración sobre  $dy'$  en la ecuación (3.105). La ecuación (3.105), es la integral de trayectoria para el precio estocástico de una acción con volatilidad estocástica con  $\alpha = 1$ .

### 3.8 Principio de Incertidumbre de Heisenberg en las Finanzas.

Uno de los principios más representativos e importantes dentro de la mecánica cuántica es el principio de Incertidumbre o Indeterminación de Heisenberg, dicho principio como se mencionó al final del capítulo uno, establece que “entre mayor precisión se desee de tener para determinar la posición de un electrón, menor será el conocimiento sobre su momento lineal; de igual manera, entre más se conozca del momento lineal del electrón menor será el conocimiento de la posición del electrón”, LRF (1996).

La expresión matemática de este principio se establece mediante la desigualdad

$$\Delta q_i \Delta p_i \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Al analizar con mayor profundidad este principio, se recordará entre otras cosas que el producto de las dos cantidades de la desigualdad de Heisenberg provienen de una serie de operaciones entre los operadores de posición y de cantidad de movimiento. Cuando dos operadores (que representan a alguna cantidad a medir u observable) no conmutan entre si, se dice que dichos observables no pueden medirse de manera simultánea con exactitud, este es el caso de la posición y del momento lineal del electrón. Ahora hay que ver como adaptar este principio

al caso de las finanzas. Como se sabe el precio de una acción  $S(t)$  tiene un comportamiento estocástico, si en vez de tomar directamente como observable al precio de la acción se toma una variable que sea el logaritmo de dicho precio  $x = \ln S(t)$ , y ahora se trata de investigar cuál es la tasa de cambio respecto del tiempo de dicha variable o su “velocidad”:  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ , se observará que dada la evolución estocástica de  $x$ , es imposible medir de manera simultánea el valor de  $x$  y de  $\dot{x}$ .

Si se utiliza el formalismo de los operadores en el espacio vectorial de los estados y se denotan con  $\hat{x}$  al operador del logaritmo de los precios de la acción y con  $\hat{\dot{x}}$  al operador de la velocidad, entonces la evolución estocástica del precio puede describirse mediante la siguiente ecuación o regla de conmutación entre los dos operadores señalados:

$$\left[ \hat{x}(t), \hat{\dot{x}}(t) \right] \equiv \hat{x}(t)\hat{\dot{x}}(t) - \hat{\dot{x}}(t)\hat{x}(t) \neq 0. \quad (3.107)$$

Para determinar el valor de esta ecuación de conmutación se tomará la formulación de la integral de trayectoria, la cual consiste en calcular el valor esperado en ambos lados de la ecuación (3.103). Para esto se debe tener cuidado al calcular el valor esperado del lado izquierdo, el cual aparentemente vale cero, sin embargo como lo establece Feynman, Feynman (1965), lo primero que debe hacerse es discretizar el tiempo  $t = n\epsilon$  para poder calcular el valor esperado. En el caso del valor esperado de (3.107), se utiliza el Lagrangiano del precio de la opción, en este caso  $\epsilon$  se expresa en términos del tiempo restante  $\tau = T - t = N\epsilon$ , con lo que todas las derivadas respecto del tiempo tendrán un signo negativo cuando se expresen respecto de este tiempo remanente.

Así, la ecuación de conmutación debe interpretarse del siguiente modo: el operador que está a la izquierda, es el tiempo posterior al tiempo real y entonces para el tiempo remanente el operador del lado izquierdo es un tiempo remanente

previo. De donde se obtiene la siguiente representación

$$\left\langle \left[ \widehat{x}(t), \widehat{\dot{x}}(t) \right] \right\rangle \rightarrow \left\langle x_n \left( \frac{x_{n+1} - x_n}{\epsilon} \right) - \left( \frac{x_n - x_{n-1}}{\epsilon} \right) x_n \right\rangle \equiv \langle \mathcal{C} \rangle. \quad (3.108)$$

Por otro lado, del Lagrangiano de Black y Scholes junto con el potencial es posible determinar la acción que está dada por

$$S_V = -\frac{1}{2\epsilon\sigma^2} \sum_{i=1}^N \left[ x_i - x_{i-1} + \epsilon \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2 - r\epsilon N - \epsilon \sum_{i=1}^{N-1} V(x_i). \quad (3.109)$$

Para evaluar  $\langle \mathcal{C} \rangle$ , se debe notar que  $e^{S_V}$  vale cero cuando  $x_i = \pm\infty$  y esto proporciona la identidad siguiente:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{BS} DX \frac{\partial}{\partial x} (x_n e^{S_V}) \\ \Rightarrow 1 &= -\frac{1}{Z_V} \int_{BS} DX x_n \frac{\partial S_V}{\partial x} e^{S_V} \equiv -\left\langle x_n \frac{\partial S_V}{\partial x} \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.110)$$

con  $Z_V = \int_{BS} DX e^{S_V}$ . De la ecuación (3.109)

$$\frac{\partial S_V}{\partial x_n} = -\frac{1}{\epsilon\sigma^2} (2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}) - \epsilon \frac{\partial V(x_n)}{\partial x_n}$$

así, de la anterior y (3.110) se tiene que

$$\sigma^2 = \langle \mathcal{C} \rangle + \epsilon\sigma^2 \left\langle x_n \frac{\partial V(x_n)}{\partial x_n} \right\rangle \rightarrow \langle \mathcal{C} \rangle. \quad (3.111)$$

Es decir, el resultado anterior indica que el potencial  $V(x_i)$  que en finanzas representa a alguna opción dependiente de la trayectoria tiene un efecto muy pequeño  $O(\epsilon)$  sobre la ecuación de conmutación y por consiguiente no hay contribución en las condiciones de frontera sobre  $S_V$ .

Con lo cual, la ecuación (3.103) que es la ecuación de conmutación de Heisenberg queda resuelta con el valor

$$\left[ \widehat{x}(t), \widehat{\dot{x}}(t) \right] \equiv \sigma^2. \quad (3.112)$$

Debe hacerse notar, al ver la relación de conmutación (3.112), que en la mecánica cuántica el operador  $\hat{x}$  representa la posición de una partícula cuántica con masa  $m$ , en ese caso la relación de conmutación de Heisenberg está dada por

$$\left[ \hat{x}(t), \hat{p}(t) \right]_{MC} \equiv \frac{i\hbar}{m};$$

en el caso de las finanzas se trabaja sobre el tiempo real euclideo, por lo cual no puede aparecer el factor imaginario  $i$ , con lo cual se tiene, que para el caso de finanzas

$$\sigma^2 = \frac{\hbar}{m}. \quad (3.113)$$

Finalmente el principio de incertidumbre de Heisenberg, según Baaquie (2004) está dado por la desigualdad:

$$\Delta x \Delta \dot{x} \geq \frac{\sigma^2}{2}, \quad (3.114)$$

donde las incertidumbres de  $x$  y  $\dot{x}$  para un vector de estado  $f$  están dadas por:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \sqrt{\langle f | x^2 | f \rangle - \langle f | x | f \rangle^2}, \\ \Delta \dot{x} &= \sqrt{\langle f | \dot{x}^2 | f \rangle - \langle f | \dot{x} | f \rangle^2}. \end{aligned} \quad (3.115)$$

### 3.9 Propiedades y analogías entre las ecuaciones de Black y Scholes y de Schrödinger.

Para finalizar este capítulo se enlistarán algunas propiedades y analogías existentes entre las ecuaciones de Schrödinger y de Black-Scholes, dicha lista ha sido tomada de la sección 4.15 de Baaquie (2004).

1. En mecánica cuántica, la posición de una partícula cuántica es una variable aleatoria. En finanzas el precio de un activo es una variable aleatoria.
2. El precio de una opción  $|C\rangle$  es análogo al de una función de estado (función de onda)  $|\Psi(t)\rangle$ ; sin embargo, a diferencia de  $|\Psi(t)\rangle$ , el precio de la opción  $|C\rangle$

es directamente observable y no necesita una interpretación probabilística. De aquí, a diferencia de la condición  $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$  requerida para la interpretación probabilística en mecánica cuántica, el valor de  $\langle C | C \rangle$  es arbitrario.

3. La ecuación de Schrödinger requiere una función de estado compleja  $|\Psi(t)\rangle$ , mientras que la ecuación de Black-Scholes es una ecuación diferencial parcial real que siempre está evaluada en valores reales para el precio de la opción  $C$ . Uno puede pensar de la ecuación de Black-Scholes como la ecuación de Schrödinger para el tiempo imaginario.

4. Todos los operadores en mecánica cuántica son Hermitianos, esto asegura que todos los vectores o estados propios son reales. La ecuación de Black-Scholes y otros hamiltonianos que determinan el precio de la opción son no Hermitianos, y esto provoca que los vectores propios sean complejos.

5. Los vectores propios complejos de los Hamiltonianos en finanzas provocan un análisis más complicado que el que se puede encontrar en mecánica cuántica; en particular aquellos que no tienen un procedimiento bien definido aplicable a todos los Hamiltonianos para la elección del conjunto de los vectores propios que cumplen con la ecuación de completés. Los casos especiales donde puede haber una transformación de similaridad a un Hamiltoniano Hermitiano equivalente proporciona una elección natural para el conjunto completo de las funciones propias.

6. La ecuación de Schrödinger es un problema de valor inicial, mientras que la ecuación de Black-Scholes es un problema de valor final dado que el precio de la opción en la maduración -función de pago- es especificada por adelantado.

7. La ecuación de Schrödinger es reversible en el tiempo debido al hecho de que el Hamiltoniano es Hermitiano, y su evolución en el tiempo está dada por  $e^{-itH/\hbar}$ . En contraste, el proceso de Black-Scholes es irreversible en el tiempo, debido a que su Hamiltoniano es no Hermitiano, y también debido a que el kernel

de precios es determinado por el semigrupo  $e^{-\tau H}$  que es irreversible en el tiempo.



# CAPÍTULO 4

## Análisis del modelo de tasa corta de Vasicek mediante el uso de la integral de Feynman.

### 4.1 Introducción

El objetivo principal de este capítulo es mostrar de manera detallada la forma en que es posible abordar problemas de finanzas empleando la integral de trayectoria de Feynman y los conceptos asociados a ésta, como el Hamiltoniano, el Lagrangiano y la acción entre otros. Para ejemplificar lo dicho se eligió el modelo de tasa corta en tiempo continuo de Vasicek por ser uno de los modelos más representativos en el área de modelos de tasas.

Partiendo del Hamiltoniano de Fokker-Planck (F-P) hacia atrás se procede a calcular el Lagrangiano hacia atrás de F-P, para después con este valor encontrar la acción asociada al proceso. Una vez que se tiene la expresión de la acción hacia atrás de F-P, se procede a calcular la función de partición que se define mediante una integral de trayectoria de Feynman sobre la acción. Posteriormente se calcula el precio de un bono cupón cero cuya tasa corta sigue el modelo de Vasicek, para esto se emplea la integral de Feynman. Una vez que se calcula el precio del bono cupón cero, se procede a calcular la tasa forward de Vasicek.

### 4.2 Deducción del Lagrangiano y la acción de Fokker-Planck hacia atrás.

La ecuación hacia atrás de Fokker-Planck, también conocida como ecuación de Kolmogorov<sup>12</sup>, se utiliza para poder valuar opciones, ésto es debido a que la función de pago se propaga hacia atrás en el tiempo, en otras palabras dado que el precio de compra o venta de una opción al vencimiento se fija al inicio del contrato, es necesario “traer” al presente tal precio. Este proceso puede aprovecharse también para el estudio de las tasas de interés, en este caso, es necesario propagar el valor de la tasa de interés en el tiempo final  $T$ , la cual se denotará por  $R$ , hacia un valor  $r$  en un tiempo previo, es decir el tiempo corre hacia atrás. En este caso la probabilidad condicional hacia atrás denotada por  $P_B(R, t; r)$ , representa la probabilidad de que la tasa spot tome el valor  $r'$  en el tiempo  $t$ , dado que en el tiempo futuro  $T > t$ , tomará el valor  $R$ . Con lo cual, para un valor  $r = r(t + \epsilon)$  y  $r' = r(t)$ , se cumple:

$$P_B(R, t; r') = \int dr \langle \delta \{r - r' - \epsilon [a(r') - \sigma(r')R(t)] r\} \rangle P(R, t + \epsilon; r). \quad (4.1)$$

En esta expresión los coeficientes  $a(r')$  y  $\sigma(r')$  contienen la información de la tasa spot en el pasado, el Hamiltoniano de Fokker-Planck hacia atrás está dado por la expresión:

$$\frac{\partial}{\partial t} P_B(R, t; r) = H_B P_B(R, t; r), \quad (4.2)$$

donde:

$$H_B = -\frac{1}{2} \sigma^2(r) \frac{\partial^2}{\partial r^2} - a(r) \frac{\partial}{\partial r}. \quad (4.3)$$

Debe hacerse notar que para calcular el valor de  $P_B(R, t; r)$  como elementos de una matriz es necesario utilizar la notación de Dirac, en la cual el vector “ket” representa el  $|\text{estado inicial}\rangle$  y el vector “bra” (vector dual) representa el  $\langle \text{estado final}|$ , sin embargo para este caso, dado que se considera el tiempo hacia atrás, el estado inicial será  $|R\rangle$  y el estado final  $\langle r|$ , con lo cual se llega a las

---

<sup>12</sup> Tomado de Venegas (2006), pag. 253.

siguientes condiciones para calcular  $P_B(R, t; r)$ :

$$P_B(R, t; r) = \langle r | e^{-(T-t)H_B} | R \rangle, \quad (4.4)$$

$$r(T) = R.$$

Ahora a partir del Hamiltoniano definido en la ecuación (4.3) se obtendrá el Lagrangiano requerido para calcular la acción y con ésta el precio del bono mediante una integral de trayectoria de Feynman de la forma:

$$P(t_0, T) = \frac{1}{Z_B} \int D r e^{S_B}, \quad (4.5)$$

donde  $Z_B$  es la función de partición definida mediante una integral de trayectoria que contemple tanto a la tasa spot  $r(t)$  como el efecto del ruido blanco  $R(t)$ ,<sup>13</sup> así la expresión para calcularla es:

$$Z_B = \int D r e^{S_B}, \quad (4.6)$$

en este caso  $S_B$  se refiere a la acción hacia atrás de Fokker-Planck:

$$S_B = \int_{t_0}^T dt L_B. \quad (4.7)$$

Para calcular el Lagrangiano hacia atrás de Fokker-Planck a partir del Hamiltoniano correspondiente que está expresado en ecuación (3), se emplea la siguiente expresión típica en mecánica cuántica y que relaciona a ambos operadores:

$$\begin{aligned} P_B(\tilde{r}, t; r) &= \langle r | e^{-(T-t)H_B} | \tilde{r} \rangle = \mathcal{N} e^{\epsilon L_B[r, \tilde{r}]} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \langle r | e^{-\epsilon H_B} | p \rangle \langle p | \tilde{r} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\epsilon \left( \frac{\sigma^2}{2} p^2 + iap \right)} e^{ip(r - \tilde{r})} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\epsilon \frac{\sigma^2}{2} p^2} e^{ip(r - \tilde{r} - \epsilon a)}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

---

<sup>13</sup> Ver Baaquie (2004), pag. 120

Para calcular la última integral en la expresión (4.8), se debe utilizar la integración gaussiana dada por la expresión:

$$Z[j] = \mathcal{N}' \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{\lambda}{2}x^2 + jx} = \mathcal{N}' e^{\frac{1}{2\lambda}j^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{\lambda}{2}x^2} = e^{\frac{1}{2\lambda}j^2}, \quad (4.9)$$

con  $\mathcal{N}' = \sqrt{\lambda/2\pi}$ , de donde, si en la última integral de la expresión (4.8) se toman:

$$\lambda = \epsilon\sigma^2; j = i(r - \tilde{r} - \epsilon a),$$

se llega a

$$\begin{aligned} P_B(\tilde{r}, t; r) &= \langle r | e^{-(T-t)H_B} | \tilde{r} \rangle = \mathcal{N} e^{\epsilon L_B[r, \tilde{r}]} \\ &= \frac{Z[j]}{\mathcal{N}'} = \frac{1}{2\pi\mathcal{N}'} e^{\frac{1}{2\lambda}j^2} \\ &= \frac{1}{2\pi\mathcal{N}'} e^{\frac{1}{2\epsilon\sigma^2} i^2 (r - \tilde{r} - \epsilon a)^2} = \frac{1}{2\pi\mathcal{N}'} e^{-\frac{\epsilon}{2\sigma^2} \left(\frac{r - \tilde{r}}{\epsilon} - a\right)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi\mathcal{N}'} e^{-\epsilon \left[\frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{r - \tilde{r}}{\epsilon} - a\right)^2\right]} \quad (4.10) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \exp \left\{ -\epsilon \left[ \frac{1}{2\sigma^2} \left( \frac{r - \tilde{r}}{\epsilon} - a \right)^2 \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon\sigma^2}} \exp \left\{ -\epsilon \left[ \frac{1}{2\sigma^2} \left( \frac{r - \tilde{r}}{\epsilon} - a \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Por lo cual es posible concluir que el Lagrangiano hacia atrás de Fokker-Planck está dado por:

$$L_B = -\frac{1}{2\sigma^2} \left( \frac{r - \tilde{r}}{\epsilon} - a \right)^2, \quad (4.11)$$

si en la ecuación (4.11) se toma el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  se obtiene:  $\frac{r - \tilde{r}}{\epsilon} \rightarrow \frac{dr}{dt}$ , con lo cual se llega a la forma definitiva del Lagrangiano hacia atrás de Fokker-Planck:

$$L_B = -\frac{1}{2\sigma^2} \left( \frac{dr}{dt} - a(r) \right)^2, \quad (4.12)$$

con lo cual sustituyendo (4.12) en (4.7) se obtiene la forma explícita para el cálculo de la acción:

$$S_B = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^T dt \frac{1}{\sigma^2(t)} \left( \frac{dr}{dt} - a(r) \right)^2, \quad (4.13)$$

## 4.3 Desarrollo del modelo de Vasicek utilizando la integral de Feynman

En esta sección se mostrará que el modelo de Vasicek de tasa corta en tiempo continuo puede resolverse de manera cerrada (exacta) mediante el uso de la integral de trayectoria de Feynman similar a la que se estableció en la ecuación (4.5). Como es sabido el modelo de Vasicek es considerado el parteaguas en lo que se refiere a modelos de tasa corta a tiempo continuo, por lo cual se consideró que es muy útil mostrar con este ejemplo el uso de la integral de Feynman para resolverlo.

Sea  $P(t_0, T)$  el precio de un bono cupón cero, el cual puede calcularse mediante la expresión:

$$P(t_0, T) = E \left[ e^{-\int_{t_0}^T dr(t)} \mid r(t_0) = r_0 \right]. \quad (4.14)$$

En el caso del modelo de Vasicek, la tasa corta sigue el comportamiento descrito por la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\frac{dr}{dt} = a(b - r) + \sigma R(t), \quad (4.15)$$

con las condiciones:  $r(t_0) = r_0$ ;  $t_0 \leq t \leq T$  y  $R(t)$  es ruido blanco.

Dado que el valor presente de un bono cupón cero se obtiene al descontar su valor futuro, la tasa spot debe establecerse en el tiempo  $T$ , de este modo la propagación de su comportamiento se hace "hacia atrás", hasta llegar al valor  $r_0$  en el tiempo  $t_0$ . De este modo la acción hacia atrás de Fokker-Planck dada en la ecuación (4.13), puede expresarse para este caso específico como:

$$S_V = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^T dt \frac{1}{\sigma^2} \left[ \frac{dr}{dt} - a(b - r) \right]^2, \quad (4.16)$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes. Mediante el uso de la ecuación (4.16) es posible calcular el valor esperado del precio del bono en la ecuación (4.14), para lo cual se requiere establecer la forma de las funciones  $r(t)$  a ser integradas, las condiciones de frontera y una distribución de probabilidad: la distribución de probabilidad propuesta es de la forma  $e^{S_V/Z}$ , con  $Z$  definida como en la ecuación (4.6) y que funciona como condición de normalización, además:

$$\int Dr \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{t=t_0}^T dr(t), \quad (4.17)$$

y las condiciones de frontera

$$r(t_0) = r_0; \quad \frac{dr(T)}{dt} = 0. \quad (4.18)$$

Con base en lo anterior se puede calcular el precio del bono cupón cero mediante el cálculo del promedio del factor de descuento sobre la distribución de probabilidad mencionada antes, así:

$$P(t_0, T) = \frac{1}{Z} \int Dr e^{S_V} e^{-\int_{t_0}^T dr(t)} \quad (4.19)$$

Si ahora se define

$$S \equiv S_V - \int_{t_0}^T dr(t), \quad (4.20)$$

entonces se tendrá

$$P(t_0, T) = \frac{1}{Z} \int Dr e^S. \quad (4.21)$$

Al sustituir (4.16) en (4.21) se obtiene:

$$S = S_V - \int_{t_0}^T dr(t) = -\frac{1}{2\sigma^2} \int_{t_0}^T dt \left[ \frac{dr}{dt} - a(b-r) \right]^2 - \int_{t_0}^T dr(t). \quad (4.22)$$

Como la medida de la integral de trayectoria permanece invariante bajo traslaciones es posible hacer la siguiente consideración:  $r(t) \rightarrow r(t) + b$ , con lo cual se obtiene:  $a(b - r) \rightarrow ar$ . Incorporando estos cambios en la ecuación (4.22) se obtiene:

$$S = -\frac{1}{2\sigma^2} \int_{t_0}^T dt \left( \frac{dr}{dt} + ar \right)^2 - \int_{t_0}^T dt (r(t) + b). \quad (4.23)$$

Una forma de calcular las integrales de la expresión (4.23) es empleando el siguiente cambio de variable:

$$v(t) = \frac{dr}{dt} + ar, \quad (4.24)$$

al resolver la ecuación diferencial resultante para  $r(t)$  se llega a la expresión:

$$r(t) = e^{-a(t-t_0)} r_0 + e^{-at} \int_{t_0}^T dt' e^{at'} v(t'). \quad (4.25)$$

Nuevamente hay que integrar (4.25) para posteriormente sustituirlo en (4.23).

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T dt r(t) &= \int_{t_0}^T dt \left( e^{-a(t-t_0)} r_0 + e^{-at} \int_{t_0}^T dt' e^{at'} v(t') \right) \\ &= r_0 \int_{t_0}^T dt e^{-a(t-t_0)} + \int_{t_0}^T dt e^{-at} \left( \int_{t_0}^t dt' e^{at'} v(t') \right) \\ &= r_0 I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Ahora se calculará  $I_1$ :

$$I_1 = \int_{t_0}^T dt e^{-a(t-t_0)} = -\frac{1}{a} e^{at_0} \int_{t_0}^T dt e^{-at} = \frac{1 - e^{-a(T-t_0)}}{a} \equiv B(t, T). \quad (4.27)$$

Para  $I_2$ , se puede demostrar<sup>14</sup> que:

$$I_2 = \int_{t_0}^T dt B(t, T) v(t), \quad (4.28)$$

---

<sup>14</sup> Ver Baaquie 2004, pag. 122

con lo cual se obtiene

$$\int_{t_0}^T dt r(t) = r_0 B(t, T) + \int_{t_0}^T dt B(t, T) v(t). \quad (4.29)$$

Ahora hay que verificar que  $r(t)$  como está expresada en (4.25) cumpla las condiciones inicial y de frontera:

- i) En efecto en  $t = t_0$  se cumple que  $r(t_0) = r_0$
- ii) Para la condición final en  $t = T$ , dado que  $(dr/dt) = 0$ , ésto equivale a decir que  $r(T)$  es libre de tomar cualquiera de sus valores posibles y por consiguiente, de la ecuación (4.24),  $v(T)$  también es libre de tomar todos sus valores posibles, en este caso las condiciones de frontera se satisfacen para la variable  $v(t)$  cuando  $t_0 \leq t \leq T$ .

Antes de proceder a calcular el precio del bono cupón cero  $P(t_0, T)$ , se reexpresará la ecuación (4.23) en términos del cambio de variable dado en (4.24):

$$S = -\frac{1}{2\sigma^2} \int_{t_0}^T dt v^2(t) - \int_{t_0}^T dt (r(t) + b), \quad (4.30)$$

si se sustituye (4.29) en (4.30) se obtiene:

$$S = -\frac{1}{2\sigma^2} \int_{t_0}^T dt v^2(t) - r_0 B(t, T) - \int_{t_0}^T dt B(t, T) v(t) - b(T - t_0),$$

y reagrupando términos se llega a:

$$S = -\frac{1}{2\sigma^2} \int_{t_0}^T dt [v^2(t) + 2\sigma^2 B(t, T) v(t)] - r_0 B(t_0, T) - b(T - t_0), \quad (4.31)$$

Ahora bien, debido al cambio que se hizo en (4.23):  $a(b - r) \rightarrow ar$  entonces habrá que hacer el cambio  $r \rightarrow r - b$  con lo cual la expresión (4.31) queda finalmente como:

$$S = -\frac{1}{2\sigma^2} \int_{t_0}^T dt [v^2(t) + 2\sigma^2 B(t, T) v(t)] - (r_0 - b) B(t_0, T) - b(T - t_0). \quad (4.32)$$



Ahora si se procederá a calcular el precio del bono cupón cero, para lo cual se sustituye (4.32) en (4.21):

$$\begin{aligned}
P(t_0, T) &= \frac{1}{Z} \int Dre^{-\frac{1}{2\sigma^2} \int_{t_0}^T dt [v^2(t) + 2\sigma^2 B(t, T)v(t)] - (r_0 - b)B(t_0, T) - b(T - t_0)} \\
&= \frac{1}{Z} e^{-(r_0 - b)B(t_0, T) - b(T - t_0)} \int Dre^{-\frac{1}{2\sigma^2} \int_{t_0}^T dt [v^2(t) + 2\sigma^2 B(t, T)v(t)]} .
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Si se define  $K = e^{-(r_0 - b)B(t_0, T) - b(T - t_0)}$ , entonces (4.33) queda

$$\begin{aligned}
P(t_0, T) &= \frac{K}{Z} \int Dre^{-\frac{1}{2\sigma^2} \int_{t_0}^T dt \{ [v^2(t) + 2\sigma^2 B(t, T)v(t) + \sigma^4 B^2(t, T)] - \sigma^4 B^2(t, T) \}} \\
&= \frac{K}{Z} \int Dre^{-\frac{1}{2\sigma^2} \int_{t_0}^T dt \{ [v(t) + \sigma^2 B(t, T)]^2 - \sigma^4 B^2(t, T) \}} \\
&= \frac{K}{Z} \int Dre^{\frac{\sigma^2}{2} \int_{t_0}^T B^2(t, T) - \frac{1}{2\sigma^2} \int_{t_0}^T dt [v(t) + \sigma^2 B(t, T)]^2} .
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Si ahora se hace la consideración  $v(t) \rightarrow v(t) + \sigma^2 B(t, T)$ , pues como se vio antes la métrica es invariante ante la traslación, entonces la expresión (4.34) se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
P(t_0, T) &= \frac{K}{Z} e^{\frac{\sigma^2}{2} \int_{t_0}^T dt B^2(t, T)} \int Dre^{-\frac{1}{2\sigma^2} \int_{t_0}^T dt v^2(t)} \\
&= \frac{K}{Z} e^{\frac{\sigma^2}{2} \int_{t_0}^T dt B^2(t, T)} \int Dre^{Sv} = \frac{K}{Z} e^{\frac{\sigma^2}{2} \int_{t_0}^T dt B^2(t, T)} Z \\
&= e^{-(r_0 - b)B(t_0, T) - b(T - t_0)} e^{\frac{\sigma^2}{2} \int_{t_0}^T dt B^2(t, T)}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Se procederá a calcular la integral  $\int_{t_0}^T dt B^2(t, T)$ , usando la definición de  $B^2(t, T)$

establecida en la expresión (4.27):

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T dt B^2(t, T) &= \int_{t_0}^T dt \left( \frac{1 - e^{-a(T-t_0)}}{a} \right)^2 = \frac{1}{a^2} \int_{t_0}^T dt (1 - 2e^{-a(T-t)} + e^{-2a(T-t)}) \\ &= \frac{1}{a^2} \left( T - t_0 - \frac{3}{2a} + \frac{2}{a} e^{-a(T-t_0)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t_0)} \right). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Si se definen:  $\theta = T - t_0$  y  $B(\theta) = \frac{1 - e^{-a\theta}}{a}$ , es posible reescribir la expresión (4.36) como:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T dt B^2(t, T) &= \frac{1}{a^2} \left( \theta - \frac{3}{2a} + \frac{2}{a} e^{-a\theta} - \frac{1}{2a} e^{-2a\theta} \right) \\ &= \frac{1}{a^2} \left( \theta - \frac{2}{2a} - \frac{1}{2a} + \frac{1}{a} e^{-a\theta} + \frac{1}{a} e^{-a\theta} - \frac{1}{2a} e^{-2a\theta} \right) \\ &= \frac{1}{a^2} \left[ \theta - \frac{1}{a} (1 - e^{-a\theta}) - \frac{1}{2a} (1 - e^{-a\theta})^2 \right] \\ &= \frac{1}{a^2} \left( \theta - B(\theta) - \frac{a}{2} B^2(\theta) \right), \end{aligned} \quad (4.37)$$

con este resultado sustituido en la expresión (4.35) será posible calcular el precio del bono cupón cero buscado:

$$\begin{aligned} P(t_0, T) &= e^{-(r_0 - b)B(\theta) - b\theta} e^{\frac{\sigma^2}{2} \frac{1}{a^2} (\theta - B(\theta) - \frac{a}{2} B^2(\theta))} \\ &= e^{r_0 B(\theta)} e^{(\frac{\sigma^2}{2a^2} - b)\theta - (\frac{\sigma^2}{2a^2} - b)B(\theta) - \frac{\sigma^2}{4a} B^2(\theta)} \\ &= e^{r_0 B(\theta)} \exp \left[ \left( \frac{\sigma^2}{2a^2} - b \right) (\theta - B(\theta)) - \frac{\sigma^2}{4a} B^2(\theta) \right]. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Con lo cual es posible expresar el valor del bono cupón cero mediante la expresión clásica:

$$P(t_0, T) = A(\theta) e^{-B(\theta)r_0}, \quad (4.39)$$

donde:

$$A(\theta) = \exp \left[ \left( \frac{\sigma^2}{2a^2} - b \right) (\theta - B(\theta)) - \frac{\sigma^2}{4a} B^2(\theta) \right]. \quad (4.40)$$

Como puede apreciarse las expresiones (4.38), (4.39) y (4.40) coinciden perfectamente con las obtenidas por Vasicek en su artículo original, así como con los libros de texto clásicos.<sup>15</sup> Finalmente para el cálculo de la tasa forward se sigue el proceso clásico:

$$\begin{aligned}
f(t_0, T) &= -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t_0, T) \\
&= -\frac{\partial}{\partial T} \left[ -B(\theta)r_0 + \left( \frac{\sigma^2}{2a^2} - b \right) (\theta - B(\theta)) - \frac{\sigma^2}{4a} B^2(\theta) \right] \\
&= e^{-a(T-t_0)} \left( r_0 + \frac{\sigma^2}{2a^2} - b \right) - \left( \frac{\sigma^2}{2a^2} - b \right) \\
&\quad - \frac{\sigma^2}{2a^2} \left( e^{-a(T-t_0)} - e^{-2a(T-t_0)} \right) \\
&= e^{-a\theta} \left( r_0 + \frac{\sigma^2}{2a^2} - b \right) - \left( \frac{\sigma^2}{2a^2} - b \right) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (e^{-a\theta} - e^{-2a\theta}) \\
&= e^{-a\theta} (r_0 - b) + b - \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - 2e^{-a\theta} + e^{-2a\theta}) \\
&= r_0 + (b - r_0) - e^{-a\theta} (b - r_0) - \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-a\theta})^2 \\
&= r_0 + (1 - e^{-a\theta}) (b - r_0) - \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-a\theta})^2.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Este último, es el resultado al que se quería llegar, como puede apreciarse coincide perfectamente con el obtenido por Vasicek, con lo cual se demuestra que el empleo de la integral de trayectoria y los conceptos físicos asociados como el de Hamiltoniano, Lagrangiano y acción pueden ser empleados para resolver problemas financieros, como el cálculo del precio del bono cupón cero cuya tasa corta que sigue el modelo de Vasicek, además de poder calcular la tasa forward asociada.

---

<sup>15</sup> Ver Venegas (2006).

# CAPÍTULO 5

## Análisis Espectral y la interpretación del Hamiltoniano en Finanzas.

### 5.1 Introducción

En este capítulo se presentan dos aportaciones del autor en el terreno de las denominadas finanzas cuánticas. Hasta ahora, en toda la literatura revisada por el autor las personas que se han dedicado a este maravilloso campo del saber se han enfocado a la solución de problemas con mayor precisión, han desarrollado algoritmos numéricos más eficientes y rápidos que consumen menos tiempo y memoria, también han encontrado aplicaciones a diversos campos de las finanzas en particular a los productos derivados, a los modelos de tasas de interés y los derivados sobre estos. Todo ésto sin duda alguna es de un enorme valor, sin embargo al estudiar este tema el autor descubrió que existen entre otros, dos “huecos”, que al menos en la revisión hecha no se han visto llenados:

El primero consiste en dar una interpretación sencilla (si es que es posible) y acorde con el interés financiero al Hamiltoniano y por ende al concepto de energía de un sistema en las finanzas en particular al llamado Hamiltoniano de Black-Scholes.

El segundo punto, consiste en aprovechar la herramienta sofisticada que posee la mecánica cuántica para hacer el análisis espectral y a partir de éste poder predecir e interpretar el comportamiento de algunos productos financieros ya sean derivados o acciones, cuando se presenten determinadas condiciones.

## **5.2 Interpretación del Hamiltoniano y Lagrangiano de Black y Scholes desde el enfoque de las Finanzas.**

Como primera hipótesis se plantea que dado que desde el punto de vista de la mecánica cuántica el Hamiltoniano puede interpretarse como la energía mecánica total de una partícula en un sistema, formada por una parte cinética que tiene que ver con el movimiento mismo de la partícula dentro del sistema, en este caso los factores cruciales son la masa de la partícula y la velocidad con la que se desplaza, dando origen a la cantidad de movimiento o momento lineal del cuerpo, así, entre mayor sea la masa o la velocidad con la que se desplace la partícula, mayor será su energía cinética. Por otro lado, está la energía potencial, esta energía en general está asociada a la posición que guarde la partícula con respecto a un sistema de referencia, así como a algunos agentes externos como las llamadas barreras de potencial.

Ahora bien el problema crucial para llegar a una interpretación adecuada del Hamiltoniano de B-S o por llamarlo de otra forma el Hamiltoniano Financiero, es que la energía es quizás el concepto más difícil de explicar dentro de la física en general, pues la definición típica es la que dice: “La energía es la capacidad que posee un cuerpo para poder desarrollar un trabajo”, dicha definición en principio es “muy clara” pues todos nosotros hemos desarrollado al menos en algunas ocasiones algún trabajo, sin embargo, lo único que hace esta definición es transferir el problema a la deficiencia del trabajo, qué es el trabajo?. Para responder esta pregunta se puede recurrir a una de las respuestas más claras y simples, la definición del trabajo mecánico: “el trabajo mecánico es el resultado de mover un cuerpo de un punto a otro una cierta distancia aplicándole cierta fuerza”, se

enfatisa la palabra fuerza, porque si el cuerpo se mueve sin aplicarle una fuerza lo cual ocurre por ejemplo en un sistema sin un campo gravitacional ni agentes friccionantes, el cuerpo se moverá a velocidad constante; lo mismo ocurre cuando por ejemplo una carga eléctrica se desplaza sobre una superficie equipotencial, mientras se mueva sobre ella no desarrollará trabajo alguno. Del mismo modo podríamos ahora cuestionarnos qué es la fuerza y así sucesivamente, esto sin duda alguna no es el tema de este trabajo, por lo cual habrá que retomar el objetivo inicial: Qué interpretación o equivalencia se le puede dar al Hamiltoniano o a la energía dentro de las finanzas?

La propuesta consiste en establecer lo siguiente: dado que la energía desde el punto de vista físico es el agente motor o generador del cambio que pueden experimentar los estados e interacciones entre los agentes de un sistema físico, entonces el equivalente más parecido dentro de las finanzas es el capital, a lo largo de la historia de la humanidad el capital ha sido un agente motor del cambio social, es el causante de todos los movimientos bursátiles y a raíz de su invención y administración se han generado distintas figuras legales y operativas, así como instrumentos financieros como el dinero, las acciones, los contratos forward, los futuros y las opciones financieras entre otros.

Bajo esta concepción se puede apreciar como el Hamiltoniano de B-S opera sobre el precio de una opción, es decir influye sobre ésta como un agente motor de su evolución a través del tiempo, igual que lo hace la energía sobre una función de onda en el caso cuántico, operando sobre ella como un agente motor de su evolución temporal. A partir de esta interpretación es posible a su vez ir llegando a interpretaciones más sutiles, como por ejemplo qué sentido tiene hablar de la masa de la partícula en el caso de las finanzas?. Ésta y otras interpretaciones tratarán de irse desarrollando en esta sección.

De acuerdo a lo planteado en el capítulo anterior sobre la ecuación de Black-Scholes vista como un sistema mecánico cuántico, la volatilidad de los precios es el análogo al recíproco de la masa, esto es bastante indicativo y tiene mucha lógica pues desde el punto de vista mecánico la masa puede interpretarse como una medida de la inercia que posee un cuerpo y la inercia es la tendencia que presenta un cuerpo para permanecer en su estado de equilibrio, es decir un cuerpo con mucha inercia será muy difícil de cambiar su estado, ya sea de detenerlo o de hacerlo iniciar un movimiento, es decir de hacerle cambiar su velocidad. Ahora bien cómo se podría concebir a un observable que fuera el recíproco de la masa, es decir de la medida de la inercia del cuerpo, se podría pensar de esta cantidad como una medida de la facilidad que tiene un cuerpo para cambiar sus tendencias (velocidades) de movimiento, ésto es, lo que justamente en cierto sentido mide la volatilidad de los precios, la volatilidad indica cual es el rango de oscilación del nivel más alto al más bajo que experimenta el precio de un activo en un intervalo de tiempo, así, una volatilidad alta indica que los precios de un activo son propensos a cambiar su precio fácilmente en un intervalo de tiempo, también puede interpretarse como un indicador de qué tan difícil es que los precios permanezcan con una tendencia o estabilidad por unidad de tiempo, lo cual es el recíproco de a una inercia grande. Por lo anterior es posible concluir que la equivalencia entre volatilidad y el recíproco de la masa es bastante adecuado.

Otra variable muy importante es la  $\dot{x}$  dicha velocidad o razón de cambio instantánea en el logaritmo de los precios es equivalente a la duración del activo, este factor es de gran importancia pues sirve para plantear la versión financiera del Principio de Incertidumbre de Heisenberg, ecuación (3.110).

Ahora se presentará una de las analogías más atrevidas, al establecer que el análogo financiero a la energía es el capital, existirá un análogo a la energía cinética y otro a la energía potencial? Se propone que si: El capital cinético, es

aquel que genera todas las operaciones financieras ordinarias, tales como compra-venta de activos, inversiones en casas de bolsa y derivados, adquisiciones de bienes inmuebles, compra de maquinaria y equipo, etc. Por otro lado, se define al capital potencial, como todo aquel capital que está guardado en cajas fuertes, en las reservas de las empresas y de los países, así como el capital de especulación “oculto” por parte de los especuladores, el cual sólo sale al mercado en ciertos instantes especiales.

### 5.3 Nueva versión del Principio de Incertidumbre de Heisenberg en - las Finanzas.

Se propone por otro lado, una nueva versión del principio de incertidumbre en las finanzas. Como está planteado actualmente dicho principio interactúan dos observables financieros: el logaritmo del precio del activo subyacente ( $\Delta x$ ) y la derivada de éste o velocidad  $\Delta \dot{x}$ . En términos reales para un financiero esto no tiene mucha relevancia, para él es más útil conocer por un lado el precio del activo y por otro la volatilidad que presente éste, pues de esta forma puede definir estrategias de cobertura contra el riesgo, bajo esta premisa se propone que el principio de incertidumbre se formule con base en la interacción entre el logaritmo del precio y la volatilidad estocástica del precio, la versión planteada en ecuación (3.110) es válida siempre y cuando la volatilidad sea constante, cuando ésta es estocástica equivale a que en el principio de Incertidumbre, en su versión cuántica se trate de una partícula cuya masa varía, en tal caso no sería posible plantearlo como se le conoce de manera tradicional:

$$\Delta q_i \Delta p_i \geq \frac{\hbar}{2},$$

habría que considerarlo como:

$$\Delta q_i \Delta m_i \Delta \dot{q}_i \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (5.1)$$



y para el caso financiero se tendría algo de la forma:

$$\Delta x \Delta \frac{1}{\sigma^2} \Delta \dot{x} \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (5.2)$$

## 5.4 Análisis espectral y su aplicación en las Finanzas.

Para poder llegar a comprender e interpretar el análisis espectral se inicia esta sección con un breve resumen de los fundamentos necesarios para poder entender los principios del análisis espectral. Primero se hará una serie de definiciones, teoremas y proposiciones las cuales serán utilizadas posteriormente para llegar al objetivo que es determinar bajo que condiciones es válido emplear el análisis espectral para poder predecir el comportamiento de algún activo financiero.

Definiciones.

Un espacio vectorial sobre los números complejos  $\mathcal{H}$ , con un producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y una norma  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ , que sea completo en el sentido que toda sucesión de Cauchy en  $\mathcal{H}$  converge; es llamado espacio de Hilbert.

Un mapeo  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  se dice que es un acotado lineal si

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2), \quad (5.3)$$

y si existe  $c < \infty$  tal que  $\|T(x)\| \leq c \|x\|$  para toda  $x \in \mathcal{H}$  y para todo escalar  $c \in \mathcal{C}$ . La menor de las  $c \geq 0$ , es llamada la norma de  $T$  y es denotada como  $\|T\|$ .

Un operador se dice que es autoadjunto si  $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ .

Si la desigualdad  $\|T(x)\| \leq c \|x\|$  se cumple para alguna  $c \in \mathcal{C}$  y para toda  $x \in \mathcal{H}$ , el operador lineal  $T$  es llamado acotado; en cualquier otro caso  $T$  será llamado no acotado.

El espectro de un operador se define como el complemento de la resolvente de este operador. Más adelante se describirá cómo el espectro de un operador permitirá describir cuáles son los estados acotados, dispersivos y resonantes entre otros.

Sea  $T$  un operador acotado o no acotado en un espacio de Hilbert. Si se considera el operador  $\lambda I - T$ , donde  $\lambda$  es un número complejo.

**Resolvente.** Si  $\lambda I - T : D(T) \rightarrow \mathcal{H}$  es una biyección y  $(\lambda I - T)^{-1}$  es acotado continuo, entonces se dice que  $\lambda$  pertenece al conjunto resolvente  $\rho(T)$ . La familia de operadores  $(\lambda I - T)^{-1} = R_\lambda(T)$  es llamado el conjunto resolvente de  $T$ .

**Espectro.**  $\lambda$  pertenece al espectro de  $T$  si  $\lambda \in \mathcal{C} - \rho(T)$ .

**Valores propios y vectores propios.** Si existe  $x \in D(T) \subset \mathcal{H}$  y  $\lambda \in \mathcal{C}$  tal que  $Tx = \lambda x$ ,  $x \neq 0$ , se dice que  $\lambda$  es un valor propio de  $T$  con vector propio  $x$ .

**Espacio Propio.**

El espectro lineal  $\mathcal{H}_\lambda = \{x \in D(T) \mid Tx = \lambda x\}$ , es llamado el espacio propio correspondiente al valor propio  $\lambda$ .

Si  $\lambda$  es un valor propio, entonces  $\lambda \in \sigma(T)$ , donde  $\sigma(T)$  es el espectro de  $T$ . El inverso en general no es cierto, esto es, existen valores del espectro que no son valores propios.

El espectro de un operador puede ser dividido en varias partes:

- a) Espectro puntual  $\sigma_p(T)$  que consiste en  $\lambda \in \mathcal{C}$  donde  $T - \lambda I$  es no inyectivo, esto equivale a que  $\lambda$  es un valor propio de  $T$ .
- b) Espectro continuo  $\sigma_c(T)$  consiste de los valores  $\lambda \in \mathcal{C}$  donde  $T - \lambda I$  si es inyectiva pero  $\mathcal{I}m(T - \lambda I)$  es un conjunto denso en  $\mathcal{H}$ .
- c) Espectro residual  $\sigma_r(T)$  consiste de todos los faltantes.

Más adelante se verá cómo en el caso del Hamiltoniano  $H = \nabla^2 + \mathbf{V}$  (para ciertos potenciales  $V$ ), se tiene que las funciones propias asociadas a  $\lambda \in \sigma_p(H)$  representan estados acotados y los asociados a  $\lambda \in \sigma_c(H)$  representan estados dispersivos.

A continuación se presentan algunos resultados sobre el espectro.

Proposición 1.

Si  $T$  es un operador autoadjunto, entonces el espectro de  $T$ ,  $\sigma(T)$  es un subconjunto de  $\mathfrak{R}$ .

Proposición 2.

Si  $T$  es autoadjunto y  $\mathcal{H}$  es separable (base numerable) entonces  $\sigma_r(T) = \emptyset$  y  $\sigma_p(T)$  es a lo más numerable.

Proposición 3.

Si  $T$  es compacto, entonces  $\sigma(T) = \sigma_p(T)$  y es compacto.

Teorema.

Si  $T$  es autoadjunto ya sea acotado o no acotado sobre un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , entonces existe una colección única de medidas  $\{P_\Omega\}$  en  $\mathcal{H}$  ( $P_\Omega$  es una proyección para cada conjunto medible  $\Omega$  y  $\mu_{xy}(\Omega) = \langle y, P_\Omega x \rangle$ ) tal que

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dP_\Omega.$$

Esto es

$$\langle y, Tx \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\mu_{xy}(\lambda)$$

para toda  $y \in \mathcal{H}$ ,  $x \in D(T)$ , donde  $D(T)$  es el dominio de  $T$ .

Definición. Se dice que  $T$  es compacto si existe una sucesión de operadores  $T_n$  de rango finito <sup>16</sup>

---

<sup>16</sup> Rango finito significa que  $R(T) = \{Tx \mid x \in \mathcal{H}\}$  es de dimensión finita.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T - T_n\| = 0.$$

Considerando ahora la interacción de una partícula con una fuerza central descrita por el potencial  $V(x)$ . La trayectoria de la partícula descrita por  $\Psi(t)$  que satisface la ecuación de Schrödinger

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) = H \Psi(t),$$

donde el Hamiltoniano está dado por la suma de la energía cinética y la energía potencial:

$$H = \nabla^2 + V,$$

donde  $\nabla^2$  es el Laplaciano en tres dimensiones. De acuerdo con el primer principio de la mecánica cuántica, el estado del sistema en cada instante del tiempo está representado por el vector (función de onda)  $\Psi(t)$  en el espacio de Hilbert de los estados. En este caso  $H$  es un operador no acotado y el dominio de  $H$  depende de  $V$ . Otro principio de la mecánica cuántica establece que a los observables (posición de la partícula, momentum, energía) les corresponden operadores auto-adjuntos en el espacio de Hilbert de los estados, y por lo tanto, los observables tendrán valores propios reales

Para ciertas condiciones sobre el potencial  $V$ , como por ejemplo  $V \in L^{3/2}(\mathfrak{R})$ , con:

$$L^{3/2}(\mathfrak{R}) = \left\{ f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} \mid \|f\|_{3/2} = \left( \int |f(x)|^{3/2} dx \right)^{2/3} < \infty \right\}$$

y si se toma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} dx = \infty;$$

pero si se toma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|^{1+\varepsilon}} dx < \infty,$$

se tiene que el espectro puntual consistirá de un número finito y negativo de valores propios y los estados asociados serán los acotados. Encontrando de esta manera cuáles son los valores propios:  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , se logrará tener clasificados a todos los estados acotados:

$$H \Psi(t) = \lambda_i \Psi(t).$$

La multiplicidad de cada valor propio es la dimensión de los estados acotados asociados.

Bajo la condición  $V \in L^{3/2}(\mathfrak{R})$  se tendrá que el espectro (absolutamente) continuo será el  $[0, +\infty)$  y los estados asociados a este espectro serán los estados dispersivos. El objetivo del análisis espectral en finanzas es determinar cuáles son los estados que ocurren en las finanzas y bajo que condiciones se presentan tales estados. Los estados observados como se mencionó al inicio de esta sección pueden ser de tres tipos: Acotados, dispersivos y resonantes.

En un estado acotado como su nombre lo indica la partícula al entrar a dicho estado permanece oscilando de manera indefinida dentro de una región acotada.

Por otro lado, en un estado dispersivo, la partícula sólo pasa cerca de un región pero no permanece en ella un solo instante, es lo que se conoce como dispersión (scatering).

Finalmente, un estado resonante, podría decirse que es una combinación de los dos estados anteriores, en este caso la partícula permanece oscilando durante un cierto periodo de tiempo en una región acotada, pero después de tal periodo se dispersa y se escapa de dicha región hacia el infinito, como el caso dispersivo. La gráfica 5.1 describe gráficamente lo mencionado en estos párrafos.



Gráfica 5.1 Tipos de espectros de un operador.

En el caso de las Finanzas se propone que el precio de un activo puede presentar alguno estos tres tipos de comportamiento, en condiciones de estabilidad del mercado el espectro será acotado; cuando el mercado es muy volátil el espectro será dispersivo pues habrá ocasiones en que los precios se “disparen” dentro de lo que cabe en la realidad (es decir no puede irse el precio de un activo al infinito de manera literal), en general el espectro más común bajo ciertas circunstancias económicas será el del estado resonante, pues normalmente los precios están en aparente calma, acotados en cierto sentido en la variación de sus precios, sin embargo repentinamente por la intervención de un agente externo dicho precio se

altera en un rango mucho mayor al establecido como ordinario. Dicho agente externo podría ser por ejemplo el capital potencial proveniente de las reservas de moneda extranjera de un país, cuando pone a la venta grandes cantidades de dólares.

Un trabajo posterior, podría enfocarse a estudiar de manera profunda las condiciones bajo las cuales se pudieran presentar los tres casos descritos. En este sentido se puede tomar como referencia el trabajo de Kleinert, quien en el capítulo 20 de Kleinert (2006), presenta una expresión para calcular el comportamiento del espectro de un activo financiero.

# Conclusiones

Las conclusiones que se pueden obtener de este trabajo son las siguientes:

1. El empleo de la herramienta matemática de la mecánica cuántica en la solución de problemas de finanzas es sin duda alguna una de las mejores formas de abordar los problemas complejos que se presentan en las finanzas. A lo largo del presente trabajo se trató de mostrar que al emplear las herramientas de la mecánica cuántica en particular la integral de trayectoria de Feynman, algunos problemas que requieren de métodos numéricos largos y tediosos se pueden resolver de una manera menos laboriosa.

2. A través de ir entendiendo los conceptos de la mecánica cuántica fue posible determinar ciertas analogías con los comportamientos financieros y con ésto se fueron obteniendo conceptos equivalentes que pueden llegar a clarificar mucho más los conceptos financieros complejos.

3. Este es un primer paso en nuestro país para emplear esta metodología del estudio profundo de las finanzas, el cual de seguirse fortaleciendo podrá redituar en la elaboración de modelos más complejos para explicar el comportamiento financiero.

4. El introducir los conceptos de capital potencial y capital cinético puede ser una forma de administrar en el futuro las reservas necesarias en la tesorería de una empresa o un banco.

5. Aunado al punto anterior, el conocimiento profundo de los físicos sobre la teoría espectral puede ayudar de manera asombrosa cuando se elaboren modelos sobre el comportamiento de la volatilidad de los activos y se comparen con el tipo de espectro que tenga asociado.



# Futuras líneas de investigación

Considero que pueden desarrollarse principalmente 3 líneas de investigación en el sentido que lleva este trabajo:

1. Desarrollo de modelos con base en los conceptos de capitales potencial y cinético.
2. Análisis profundo del comportamiento de la volatilidad de los activos y con éllo un mejor manejo de los portafolios de inversión y control del riesgo utilizando la teoría espectral.
3. Empleo de la teoría de campos para análisis más sofisticados, la cual no fue tratada en este trabajo.

# Apéndices.

## Apéndice A. Integral Gaussiana.

A continuación se presenta una breve descripción de las integrales Gaussianas, no se pretende hacer un estudio formal, sólo es una guía rápida para poder ayudar a calcular las integrales gaussianas que aparecen en algunas secciones de la tesis. Se considerarán tanto las integrales Gaussianas de una dimensión así como el caso multidimensional.

Caso unidimensional.

Se iniciará este estudio de las Integrales Gaussianas partiendo de la integral indefinida:

$$\int e^{-ax^2} dx, \quad (A.1)$$

esta integral indefinida aparentemente simple no tiene solución en términos de funciones elementales, afortunadamente si se considera como una integral definida con los límites superior e inferior siendo ambos infinitos, es posible calcularla:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx. \quad (A.2)$$

Las integrales del tipo (A.2) son llamadas Integrales Gaussianas unidimensionales, para calcularla primero hay que elevar al cuadrado la integral (A.2) multiplicándola por si misma y luego utilizar una conversión a coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ay^2} dx dy} \\ &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy} = \sqrt{\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-ar^2} r dr d\theta} \\ &= \sqrt{-\frac{1}{2a} \int_0^{2\pi} e^{-ar^2} \Big|_0^{\infty} d\theta} = \sqrt{\frac{1}{2a} \theta \Big|_0^{2\pi}} \end{aligned}$$

finalmente se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (\text{A.3})$$

Caso multidimensional.

Para el caso de la integral Gaussiana de  $n$ -dimensiones es posible expresarla como:

$$\int e^{-\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}} d^n \mathbf{x}, \quad (\text{A.4})$$

donde  $\mathbf{x}$  es un vector de  $n$ -dimensiones y  $\mathbf{A}$  es una matriz  $n \times n$ . Para ejemplificar el proceso se calculará la integral Gaussiana con dos dimensiones o variables en este caso se tiene que:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

de donde:

$$-\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = - (xy) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - [(xa + yb)x + (xb + yc)y] \quad (\text{A.5})$$

$$= - (x^2 a + 2bxy + cy^2)$$

así

$$\int e^{-\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}} d^n \mathbf{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2 + 2bxy + cy^2)} dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x + \frac{b}{a}y)^2 - \frac{ac-b^2}{a}y^2} dx dy.$$

Utilizando (A.3), se tiene:

$$\int e^{-\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}} d^n \mathbf{x} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ac-b^2}{ay^2}} dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sqrt{\frac{\pi a}{ac-b^2}},$$

finalmente:

$$\int e^{-\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}} d^n \mathbf{x} = \frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\det(\mathbf{A})}}. \quad (\text{A.6})$$

La generalización de esta fórmula es:

$$\int e^{-\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}} d^n \mathbf{x} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det(\mathbf{A})}}, \quad (\text{A.7})$$

donde  $n$  es el número de dimensiones o variables.

# Bibliografía.

- Baaquie (2004). Baaquie, Belal. Quantum Finance. Path Integrals and Hamiltonians for Options and Interest Rates, Editorial Cambridge University Press. 2004
- Baaquie (2002). Baaquie, Belal. “Quantum Field Theory of Forward Rates with Stochastic Volatility”. Physical Review E, 65 (2002) 056122
- Baaquie (2000). Baaquie, Belal, Kwek, L.C. and Marakani, S. “Simulation of Stochastic Volatility using Path Integration: Smiles and Frowns”.  
<http://xxx.lanl.gov/cond-mat/0008327>.
- Baaquie y Coriano (2004). Baaquie, Belal, Coriano, C. and Srikant, M. “Hamiltonian and Potentials in Derivative Pricing Models: Exact Results and Lattice Simulations”. Physica A 334 (3) (2004): 537-57; <http://xxx.lanl.gov/cond-mat/0211489>.
- Dash (1988). Dash Jan W. Path Integrals and Options-I. Quantitative Analysis/Financial Strategies Group, Merrill Lynch Capital Markets, World Financial Center, NY, NY 10281. 1988.
- Diaz (2004). Diaz, S. Jorge. Notas de Integral Funcional (Feynman Path Integral). Pontificia Universidad Católica de Chile, Facultad de Física. 2004.
- Eisberg (1978). Eisberg, R., Resnick, R. Física Cuántica, Editorial Limusa 1978.
- Feynman (1965). Feynman, R.P. and Hibbs, A.R. Quantum Mechanics and Path Integrals. McGraw-Hill (1965)
- Feynman (1948). Feynman, R.P. Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics. Rev. Mod. Phys. 20 (1948) 367.
- Goldstein (1996). Goldstein, H. Mecánica Clásica 1a. Edición, Editorial Reverte, 1996
- Haug (1997). E.G. Haug. The Complete Guide to Option Pricing Formulas.

- McGraw-Hill (1997).
- Hitoshi (2006) Notas del curso Quantum Mechanics [221A (Fall 2006)]  
del Profesor Hitoshi, Universidad de Berkeley.  
<http://hitoshi.berkeley.edu/221A/pathintegral.pdf>
- Hull (2003). Hull, John C. Options, futures and other derivatives 5th. Edition.  
Prentice Hall. 2003.
- Kleinert (2006). Kleinert, H. Path Integrals, in Quantum Mechanics, Statistics,  
Polymer Physics and Financial Markets. 4th. Edition. 2006.
- Landau (1982). Landau, L. y Lifshitz, E. Curso Abreviado de Física Teórica,  
Libro 1, Editorial Mir Moscú 1982.
- Landau (vol.2 1982). Landau, L. y Lifshitz, E. Curso Abreviado de Física Teórica,  
Libro 2, Editorial Mir Moscú 1982.
- Linetsky (1998). Linetsky, V. “The Path Integral Approach to Financial  
Modeling and Options Pricing”, Computational Economics, 11 (1998)  
129.
- London (2005). London, Justin. Modelling Derivatives in C++.  
John Wiley & Sons. 2005.
- LRF (1996). What is Quantum Mechanics? A Physics Adventure. Transnational  
College of LEX. Language Research Foundation (1996).
- MacKensie (2000). MacKensie, R. Path integrals methods and applications.  
[www.arxiv.quant-ph/0004090](http://www.arxiv.quant-ph/0004090), v 1 24 Apr 2000.
- Matacz (2000). Matacz, A. “Path Dependent Option Pricing: the path integral  
averaging method”. <http://xxx.lanl.gov/cond-mat/0005319v1> (2000).
- Schaden (2002). Schaden, Martin. “Quantum Finance”.  
[www.arxiv.physics/0203006](http://www.arxiv.physics/0203006) v2, 6 Aug 2002.
- Venegas (2006). Venegas Martínez, Francisco. Riesgos Financieros y Económicos  
1a. Ed. Thomson (2006)