INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY

CAMPUS CIUDAD DE MÉXICO

TECNOLÓGICO DE MONTERREY

LA ASIGNACIÓN DE PERSONAL A HORARIOS DE TRABAJO MEDIANTE MODELOS MATEMÁTICOS Y ALGORITMOS GENÉTICOS

EL CASO DE UN CENTRO DE ATENCIÓN TELEFÓNICA EN MÉXICO

DOCTORADO EN ADMINISTRACIÓN

TESIS PRESENTADA POR

RAÚL OJEDA VILLAGÓMEZ

DIRECTOR DE TESIS: José Torres Jiménez

CODIRECTORA DE TESIS: Nadima Simón Domínguez

FEBRERO, 2008

LA ASIGNACIÓN DE PERSONAL A HORARIOS DE TRABAJO MEDIANTE MODELOS MATEMÁTICOS Y ALGORITMOS GENÉTICOS

EL CASO DE UN CENTRO DE ATENCIÓN TELEFÓNICA EN MÉXICO

Resumen

Dado el complejo ambiente competitivo que se establece actualmente dentro del mercado se hace más evidente la necesidad de incorporar nuevos indicadores del desempeño de las organizaciones que no se relacionen directamente con las métricas financieras. Ahora se ha vuelto crítica la disposición de información fidedigna en el tiempo justo y en el lugar correcto para la toma de decisiones y evaluación de desempeño de las organizaciones. Es sumamente importante que el directivo cuente con la cantidad adecuada de información y de las herramientas necesarias para mejorar la calidad del servicio del personal que atiende al cliente, que es el caso de las operadoras telefónicas, en las empresas telefónicas. La presente investigación doctoral postula que ***mediante algoritmos genéticos se obtiene un modelo el cual proporciona una solución más eficiente que los métodos tradicionales a problemas de asignación de horarios de trabajo de las operadoras telefónicas***. Se dispondrá de información precisa y confiable para la atención a la problemática relacionada con situaciones en las que se tiene que tomar una decisión en cuanto al tiempo de respuesta, ya que esta respuesta es directamente proporcional con las medidas de calidad a nivel internacional y dónde quien toma la decisión frecuentemente se tendrá que enfrentar a un gran volumen de información con un gran número de variables y una compleja relación entre ellas. De ahí el interés del presente estudio: **¿Cómo modelar y resolver de manera más eficiente un problema complejo de asignación de personal a horarios de trabajo en una gran empresa de atención telefónica mexicana**?, a efecto de incorporar las combinaciones de horarios[1] de trabajo de las centrales telefónicas y de los turnos que tienen las operadoras telefónicas así como sus descansos y el tiempo no disponibles para atender un cliente, lo cual incide en la satisfacción del cliente.

[1] vid. Cáp. 4

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

"La *obra* humana más bella es la de ser útil al prójimo".

Sófocles

Dado el complejo ambiente competitivo que se establece actualmente dentro del mercado se hace más evidente la necesidad de incorporar nuevos indicadores del desempeño de las organizaciones que no se relacionen directamente con las métricas financieras. Ahora se ha vuelto crítica la disposición de información fidedigna en el tiempo justo y en el lugar correcto para la toma de decisiones y evaluación de desempeño de las organizaciones. Es sumamente importante que el directivo cuente con la cantidad adecuada de información y de las herramientas necesarias para mejorar la calidad del servicio del personal que atiende al cliente, que es el caso de las operadoras telefónicas, en las empresas telefónicas. La presente investigación doctoral postula que ***mediante algoritmos genéticos se obtiene un modelo el cual proporciona una solución más eficiente que los métodos tradicionales a problemas de asignación de horarios de trabajo de las operadoras telefónicas***. Se dispondrá de información precisa y confiable para la atención a la problemática relacionada con situaciones en las que se tiene que tomar una decisión en cuanto al tiempo de respuesta, ya que esta respuesta es directamente proporcional con las medidas de calidad a nivel internacional y dónde quien toma la decisión frecuentemente se tendrá que enfrentar a un gran volumen de información con un gran número de variables y una compleja relación entre ellas. De ahí el interés del presente estudio: **¿Cómo modelar y resolver de manera más eficiente un problema complejo de asignación de personal a horarios de trabajo en una gran empresa de atención telefónica mexicana**?, a efecto de incorporar las combinaciones de horarios de trabajo de las centrales telefónicas y de los turnos que tienen las operadoras telefónicas así como sus descansos y el tiempo no disponibles para atender un cliente, lo cual incide en la satisfacción del cliente.

Para poder establecer la asignación del personal a los horarios de trabajo, primeramente se considera el volumen de trabajo esto es la cantidad de tiempo que un cliente ocupa el teléfono solicitando información a las operadoras, este volumen de trabajo se tiene en una bitácora de registro por cada ¼ de hora en el día, donde este historial nos sirve para determinar el número de operadoras que se requiere para atender la demanda de servicio. Esta información será utilizada para alimentar el modelo de series de tiempo para el <u>pronóstico de la demanda</u>.

En combinación con el <u>pronóstico de la demanda</u> y <u>los turnos de trabajo</u> se forman las alternativas en los horarios de trabajo para que laboren las operadoras, las cuales son mayores a medida que se incrementa el número de trabajadores; por ejemplo si tenemos tres turnos y cinco trabajadores el numero de alternativas sería de $3^5 = 243$ maneras diferentes de asignar los trabajadores a los turnos[2].

La situación que realmente va a ser reflejada a lo largo del proyecto es: al tener que considerar los horarios de entrada, salida descansos y sobre todo que la atención y los segmentos de intervalo de tiempo de atención están dados por cada 15 minutos actualmente se tienen 5000 turnos[3], esta cantidad de turnos es debido a las pausas de trabajo que se requiere dentro de la jornada de trabajo, y como se tiene una población de más de 3000 operadoras, por lo que da un total de 5000^{3000} maneras diferentes de asignar los trabajadores a los turnos. Con esto estamos trabajando con dos conjuntos que tienen grandes volúmenes de información, no se puede segmentar el conjunto de operadoras por diversas situaciones como sindicato, lugar geográfico, situación laboral, entre otros aspectos, pero el conjunto de turnos si lo podemos segmentar y emplear los turnos más adecuados en base a la demanda que se vaya presentando de esta manera al momento de elegir la combinación de una población de 5000 turnos un subconjunto de 67 turnos, la cantidad de subconjuntos que se forman son más de 10 elevado a la potencia de 153 (10^{153}); es decir, cada subconjunto esta representando una agrupación de turnos que pueden ser asignados a las operadoras telefónicas; de esta cantidad tan inmensa elegimos los turnos más representativos (a partir de la demanda del cliente) y posteriormente asignamos al personal a los turnos elegidos, por lo que se torna complejo el poderlo operar de manera matemática, esta información tan grande manifiesta que el sólo listar las posibles combinaciones no acabaríamos en varios años. Si de las miles de combinaciones de turnos se toma una muestra, es decir, se segmentan los turnos para de ahí incorporarlos al modelo Programación Lineal (PL), se obtiene una solución con un óptimo local.

Posteriormente se usan los algoritmos genéticos, aquí los algoritmos genéticos juegan un papel muy importante debido a que, se utilizan para agrupar miles y miles de alternativas y seleccionar cuál es la más adecuada, establecemos un criterio para identificar que turno se debe elegir, a través de establecer qué turno cubre mayor demanda, es decir, un turno es mejor

---

[2] Vid. supra Cáp. 2, principio de Dirichlet

[3] Vid Cáp. 2 y anexo de turnos correspondientes

que otro si cubre mayor demanda de clientes; en base a este criterio se va a determinar qué turnos se eligen, es decir, una agrupación de turnos en base a la demanda del cliente.

1. JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA DEL TEMA

La idea del proyecto de investigación surgió al momento de conocer la problemática de una empresa que tenia 4230 horarios de trabajo para el área de tráfico de llamadas telefónicas y 770 horarios de trabajo para los supervisores, y me surgió la duda de por qué hay tantos horarios, a qué se debe que no se pueden reducir, siendo que en otras partes del mundo manejan alrededor de tres horarios, por qué en México se dan estas características... Estas interrogantes tienen que ver con servicio, calidad, prestaciones sindicales entre otras.

El tiempo de respuesta que ofrecen las operadoras telefónicas al dar el servicio al cliente es una de las principales formas de medir la calidad de los centros de atención telefónica (*CALL CENTER*), es decir, cuando un cliente descuelga el aparato telefónico y marca uno de los servicios de operadora (Ej., 040 información nacional), desde que suena el primer timbre y hasta que le contesta la operadora al cliente, se mide cuanto tiempo transcurrió, y este tiempo transcurrido es la respuesta al cliente y debe ser muy breve e incluso puede haber demandas al no cumplir con ciertas necesidades del país[4].

En este trabajo se presenta el diseño de un algoritmo genético que pretende dar una solución óptima de un modelo matemático de asignación de personal que permite determinar la cantidad de recursos que se deben asignar a cada centro telefónico del país, por estado, tomando en cuenta el índice de calidad (ANS) por cada servicio y algunas consideraciones sindicales, manejando un número muy grande de variables, además se incorpora al modelo series de tiempo con la metodología de suavización exponencial de Winter para realizar el pronóstico de la demanda que es introducido en las restricciones del modelo de PL

[4] Vid. Anexo

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Dado el complejo ambiente competitivo que se establece actualmente dentro del mercado se hace más evidente la necesidad de incorporar nuevos indicadores del desempeño de las organizaciones que no se relacionen directamente con las métricas financieras. Ahora se ha vuelto crítica la disposición de información fidedigna en el tiempo justo y en el lugar correcto para la toma de decisiones y evaluación de desempeño de las organizaciones. Es sumamente importante que el directivo cuente con la cantidad adecuada de información y de las herramientas necesarias para mejorar la calidad del servicio del personal que atiende al cliente, que es el caso de las operadoras telefónicas, en las empresas telefónicas. La presente investigación doctoral postula que *mediante algoritmos genéticos se obtiene un modelo el cual proporciona una solución más eficiente que los métodos tradicionales a problemas de asignación de horarios de trabajo de las operadoras telefónicas*. Se dispondrá de información precisa y confiable para la atención a la problemática relacionada con situaciones en las que se tiene que tomar una decisión en cuanto al tiempo de respuesta, ya que esta respuesta es directamente proporcional con las medidas de calidad a nivel internacional y dónde quien toma la decisión frecuentemente se tendrá que enfrentar a un gran volumen de información con un gran número de variables y una compleja relación entre ellas. De ahí el interés del presente estudio: **¿Cómo modelar y resolver de manera más eficiente un problema complejo de asignación de personal a horarios de trabajo en una gran empresa de atención telefónica mexicana**?, a efecto de incorporar las combinaciones de horarios de trabajo de las centrales telefónicas y de los turnos que tienen las operadoras telefónicas así como sus descansos y el tiempo no disponibles para atender un cliente, lo cual incide en la satisfacción del cliente.

La demanda de las operadoras telefónicas en el país, depende de los centros telefónicos ubicados estratégicamente en las ciudades más pobladas sin embargo hay centrales que sólo trabajan 8 horas diarias y el país requiere atención las 24 horas del día, entonces resulta crucial como distribuir los recursos para que se realice de la mejor manera posible, por ello contar con una herramienta cuantitativa de asignación de recursos que ayude en esta tarea puede resultar de gran utilidad.

3. OBJETIVOS

A. Generales

Elaborar un algoritmo genético, que contribuya a una mayor eficiencia del modelo de programación lineal para resolver el problema de asignación de personal a los diferentes horarios de trabajo en un centro de atención telefónica que tiene más de 3000 operadoras y alrededor de 5000 horarios diferentes de trabajo.

Validar el funcionamiento del modelo de la representación del problema de asignación de personal a horarios de trabajo con sus diversas variantes.

Aplicar el problema de asignación de personal a horarios de trabajo en sus diversas variantes y comparar los resultados con los esperados en la vida real.

Comparar el modelo del algoritmo genético versus un modelo tradicional

B. Específicos

Determinar los criterios válidos para resolver un problema de asignación de personal a horarios de trabajo, para emplear un método tradicional y cuando incorporar un algoritmo genético.

Determinar la tendencia de la demanda de llamadas telefónicas con series de tiempo mediante la suavización exponencial.

Delimitar las características de los programas de asignación de personal a horarios de trabajo y determinar la importancia de generar software con AG.

4. HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

Al tener que considerar los horarios de entrada, salida descansos y sobre todo que la atención y los segmentos de intervalo de tiempo de atención están dados por cada 15 minutos actualmente se tienen 5000 turnos[5], esta cantidad de turnos es debido a las pausas de trabajo que se requiere dentro de la jornada de trabajo, al momento de elegir un subconjunto de 67 horarios, la cantidad de subconjuntos que se forman son[6] más de 10 elevado a la potencia de 153 (10^{153}); es decir de esta cantidad tan inmensa elegimos los turnos más representativos (a partir de la demanda del cliente) y posteriormente asignamos al personal a los horarios elegidos, por lo que se torna complejo el poderlo operar de manera matemática es por eso que se presenta la siguiente hipótesis:

> ***Los Modelos de Algoritmos Genéticos incorporados a la Programación Lineal proporcionan una solución más eficiente para resolver un problema complejo de asignación de personal a horarios de trabajo.***

---

[5] Vid cáp. 2 y anexo de turnos correspondientes

[6] Vid. cáp. 2

5. METODOLOGÍA

Para **comprobar la hipótesis** se utilizan los siguientes modelos matemáticos: programación lineal (PL), series de tiempo y algoritmos genéticos (AG).

El motivo por el que se utilizaron estos modeles fueron los siguientes:

El modelo que permite resolver el problema de asignación de horarios de trabajo en base a estudios previos es la *Programación Lineal*, pero dado el número de alternativas que se tienen que dar para resolver este problema, no hay un software de PL en el mercado, que admita tantas variables, por lo que se vuelve inmanejable.

Un problema que tiene la PL es que siendo un modelo de decisiones con certidumbre en sus coeficientes estructurales, para este caso es en la demanda requerida por los clientes, dado que no se puede conocer con certeza a futuro la demanda del servicio, se utilizo un modelo de *series de tiempo* para pronosticar la demanda de servicio, en base a datos históricos de la empresa.

En este trabajo se propone un modelo de *Algoritmo Genético* que reduce el número de alternativas, en este caso de horarios, a un número que si puede ser manejado por la PL ya que reduce la explosión combinatoria.

La manera de cómo se utilizaron los modelos fue de la siguiente manera:

A. Programación Lineal

Este modelo busca asignar la cantidad de operadoras telefónicas en determinada duración de la jornada laboral, que deben trabajar en cierto horario y tomar su pausa de descanso. Además, tienen como restricciones las necesidades de operadoras por ¼ de hora y los programas de horarios permisibles y, como objetivo, minimizar el total de horas de tele operación de operadoras asignadas sobre las necesidades de la demanda requerida del cliente.

Una vez teniendo la demanda por cada ¼ de hora en el día, se determina que la función objetivo a optimizar para el modelo de programación lineal es:

Minimizar

La suma del número de operadoras presentes que van a estar asignadas a cada uno de los 67 turnos.

Restricciones:

- 96 ecuaciones, una por cada ¼ de hora en el día, indicando: la suma del número de operadoras presentes, ubicadas en los turnos que abarca cada ¼ de hora, debe ser mayor o igual a la demanda de operadoras requeridas para cada ¼ de hora, por cada intervalo de tiempo.
- Cada turno pueden estar asignadas varias operadoras o ninguna (0 a n).

B. Series de Tiempo

Serie de tiempo con suavización exponencial utilizando el método Multiplicativo de Winter: este modelo se utilizo por que es el apropiado para series con una tendencia lineal y un efecto estacional que depende de los niveles de la series suministradas. Los parámetros de la suavización son: nivel (**L**evel), tendencia (**T**rend), y estacionalidad (**S**eason), y puede ser descrito por las siguientes ecuaciones[7]:

$$L(t) = \alpha \frac{Y(t)}{S(t-s)} + (1-\alpha)(L(t-1) + T(t-1))$$

$$T(t)=\gamma(L(t)-L(t-1)) + (1-\gamma)T(t-1)$$

$$S(t) = \delta \frac{Y(t)}{L(t)} + (1-\delta)S(t-s)$$

$$\hat{Y}_t(k) = (L(t) + kT(t))S(t+k-s)$$

Donde:

α (Level) peso que tiene el **nivel** en la suavización.

γ (Trend) peso que tiene la **tendencia** en la suavización.

δ (Season) peso que tiene la **estacionalidad** en la suavización

Yt (t=1, 2, ..., 96) Series de tiempo en estudio.

---

[7] Algoritmo tomado directamente del software SPSS ver. 15

$\hat{Y}_t(k)$ Modelo que estima k pasos para el pronóstico de las series Y en el tiempo t

S La longitud estacional.

La periodicidad establecida en el modelo es de 96 periodos de tiempo, esto es por los cuartos de hora que hay en el día.

Estas fórmulas se utilizaron a través del software SPSS ver. 15 y el algoritmo es suministrado también por el software, por lo que la información suministrada se puede observar al final del anexo C.

En resumen, se utilizo series de tiempo, para realizar una suavización exponencial, empleando la metodología Winter, teniendo datos históricos del volumen de trabajo, por cada ¼ de hora, nos da el pronóstico de la demanda del volumen de trabajo, con esta información podemos determinar cuantas operadoras telefónica se requieren por cada ¼ de hora. La demanda por cada ¼ de hora es suministrada al modelo de programación Lineal.

C. Algoritmo Genético

Objetivo del AG: extraer del conjunto total de turnos el subconjunto que se ajuste mejor a la tendencia de la demanda del cliente a través de la metaheurística.

La combinación de turnos y personas cuando estos valores son muy grandes, da una cantidad exponencial, por lo que el AG sólo trabajara con turnos y así teniendo una población de 5000 turnos se reduce a tan sólo 67 turnos y estos junto con las operadoras se introduce en el modelo de PL, de esta manera, el AG hace su trabajo con la meta-heurística para encontrar los turnos que mejor contribuyen y se ajustan a la demanda sin dejar tanta holgura cuando se tiene poca demanda.

Representación de los datos

Un parámetro discreto (un solo número)

Sistema de Posición Base Factorial SPBF)

$$NumeroDiscreto = \sum_{i=0}^{n} (L_i * i!)$$

Tamaño de la Población

En base al requerimiento de nuestro problema es juntar turnos en grupos de 67 individuos.

Inicialización de la Población

Parte Elitista

Parte aleatoria

Función de Aptitud

Esta dada por que tanto cubre la demanda de la población

$$Max\sum_{i=1}^{67}\sum_{j=1}^{96} Poblacion_{ij} * Demanda_j$$

Criterio de selección

Torneo

$Poblacion_{ij}$ = 1 Si cubre la demanda

$Poblacion_{ij}$ = 0 No cubre la demanda

Operadores Genéticos

Cruza de un solo punto

Mutación de una posición del SPBF

Probabilidades de aplicación de los operadores

Cruza 80%

Mutación 0.5%

Criterios de Paro

Se hace por un número determinado de generaciones, en este criterio no se utiliza hasta que llegue a una solución satisfactoria porque esto se hace en el modelo de Programación Lineal.

D. Características del Centro de Atención Telefónica

Con objeto de poder **validar los modelos propuestos**, en un problema como el centro de atención telefónica más grande del país, se utiliza el centro de atención de Guadalajara como objeto de estudio que nos permita manejar las alternativas con PL, (Ver. Tabla 6. Total de posiciones por oficina de tráfico)), se cuenta con 181 operadoras de tráfico, se utilizan todos los turnos disponibles a nivel nacional que son 5000, pero para fines prácticos, los expertos del área de tráfico toman sólo una muestra de 67 turnos, y esta cantidad menor de turnos ya la acepta el modelo de PL.

Analizando el total de posibles asignaciones utilizamos la fórmula (3.6) de combinaciones con repeticiones

$$\frac{(n-1+k)!}{k!(n-1)!} = \frac{(4999+181)!}{181!4999!} = 2.2445 \times 10^{339}$$

Sin embargo las posibles asignaciones las dividimos en dos fases: la primera fase es <u>la elección de turnos</u>, utilizamos la fórmula (3.4) de la combinación: una muestra de 67 turnos de un total de 5000 nos da:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{5000!}{67!4933!} = 1.1916 \times 10^{153}$$

La segunda fase incorpora los 67 turnos y las 181 operadoras:

Si tomamos a las operadoras como distinguibles utilizamos la fórmula (3.5) variaciones con repeticiones y obtenemos:
67^{181}= 3. 3078×10^{330}

Sin embargo las operadoras son indistinguibles por lo que utilizamos la fórmula (3.6) de combinaciones con repeticiones

$$\frac{(n-1+k)!}{k!(n-1)!} = \frac{(66+181)!}{181!66!} = 1.0580 \times 10^{61}$$

Por lo que los AG resuelven la primera fase la elección de una de las alternativas de combinaciones de 1.1916 x 10^{153}, mientras que el modelo de PL resuelve la alternativas de asignación de un total de 1.0580 x 10^{61}, con esto se observa que el resultado que arroje el AG es la entrada del modelo de PL, por lo que si el AG nos da una mala agrupación de turnos el PL nos dará como resultado un valor optimó local no adecuado.

Con los resultados que arroja el modelo de PL podemos validar el modelo AG, esto se realiza mediante el porcentaje de ocupación y como estamos empleando un problema de minimización de asignación de personal, si ocupamos al personal al 100% estamos obteniendo el mejor resultado.

De esta manera observamos que la serie de tiempo proporciona el pronóstico de la demanda del cliente y el AG proporciona un grupo de turnos que mejor se ajustan a la demanda del cliente; la demanda pronosticada y un grupo de turnos que se ajustan a la demanda del cliente son incorporados al modelo de PL que a su vez hace la optimización de la asignación del personal, por lo que cada herramienta hace lo adecuado para lo que fue diseñado para poder obtener una solución adecuada.

El modelo de PL, que va a contener las agrupaciones de turnos y 96 restricciones por cada ¼ de hora que hay en el día, cada restricción debe ser igual o mayor a la demanda que se genero a través del pronóstico. Se consideran sólo 67 turnos esto es debido a que se produce una matriz muy grande para poder introducirlo al modelo de PL, por lo que tenemos un modelo con una matriz de 67 turnos por 96 restricciones, lo que nos da un total de 6432 celdas, con este volumen de variables todavía son manejables en los paquetes comerciales que hay en el mercado como lo es LINDO:

Para realizar las agrupaciones de turnos, dado que hay que elegir 67 turnos de los 5000, Se emplean los algoritmos genéticos.

La metodología a seguir elaborada por Schmidt[8] propone las siguientes etapas para investigar las propiedades y el comportamiento de un sistema real y siendo ésta metodología una de las más completas, se emplea en el presente trabajo:

A. Definición del problema
B. Definición de las variables en el modelo
C. Formulación del modelo[9]
D. Preparación de datos
E. Translación del modelo
F. Validación del modelo
G. Experimentación
H. Análisis, interpretación y resultados del modelo
I. Implantación y uso del modelo
J. Documentación

Se analizaron los resultados con el pronóstico de la demanda en el modelo PL y con la agrupación de turnos en base a la experiencia actual, posteriormente se ejecuto el modelo PL con la agrupación de turnos.

---

[8] Schmidt, J. W. & Taylor, R. E. ***Análisis y Simulación de Sistemas Industriales***.
[9] Modelo adecuado en base a las necesidades del sistema

6. RESUMEN CAPITULAR

Capítulo 1. En este capítulo se ilustran y describen los elementos de los problemas de toma de decisiones, su tipología, las fases del proceso racional de la toma de decisiones así como los elementos probabilísticos necesarios para manejar la toma de las decisiones en condiciones de certidumbre, riesgo e incertidumbre y se demuestra su uso adecuado, que posteriormente son utilizados en el proyecto para analizar y entender los resultados del proyecto. Se realiza una revisión de la literatura para conocer algunas de los principales métodos y modelos utilizados para la asignación de personal.

Capítulo 2. En este capítulo se presentan los modelos matemáticos empleados en la presente investigación: Programación Lineal, se dan sus características, su forma canónica y estándar, sus requisitos para la formulación de un problema y se ilustra con un modelo de programación lineal de la distribución del trabajo semanal de las operadoras telefónicas. Series de tiempo, se definen los conceptos básicos de las series de tiempo, se determinan cuales son los pasos necesarios para realizar series de tiempo: detectar ***outlier***, son datos que se refieren a puntos de la serie que se escapan de lo normal, se detecta la ***tendencia***, representa el comportamiento predominante de la serie, se determina la *variación estacional* que representa un movimiento periódico de la serie de tiempo, para la presente investigación la serie de tiempo esta dada por días. Se da un panorama de los tres modelos clásicos de la serie de tiempo: el aditivo, multiplicativo y mixto y cada modelo se expresará como suma o producto de tres componentes: *tendencia*, *estacional* y un término de *error aleatorio*. Todo esto para poder predecir, que es estimar el futuro utilizando información del presente y del pasado. El conocimiento del futuro nos capacita para planificar, prever o prevenir. Análisis Combinatorio, su fórmula, propiedad y la explosión combinatoria a través de fórmulas y ejemplos con el principio de *Dirichlet* que muestra como tratar el problema en sus diversos enfoques, que ayudan a comprender la complejidad con la que nos estamos enfrentando.

Capítulo 3. En este capítulo se describen los antecedentes de los Algoritmos genéticos (AG) iniciando en los años 50's hasta las conferencias de encuentros internacionales sobre AG, se dan los conceptos básicos para operar los AGs: selección, cruza y mutación. Se manifiesta la metodología empleada por los AGs; se listan los diversos métodos de selección: elitista, proporcional a la población por rueda de la ruleta, por escalada entre otras y se muestran los métodos de cambio: mutación y cruza; se señalan los fundamentos matemáticos de los AG y para concluir se presentan algunos métodos que se pueden utilizar en la implementación de los algoritmos genéticos, para denotar su diversificación y la forma de compararlos empleando la herramienta de power play, aunque estos métodos no se utilizaran debido a que se realizará una exploración exhaustiva, posteriormente se manejan las diferentes representaciones para un mismo problema, se explicará la importancia de emplear un algoritmo genético para la presente investigación.

Capítulo 4. En este capítulo se dan las características de un centro de atención telefónica, señalando cómo realizan la tendencia, el pronóstico, la planeación de turnos, distribución de turnos, también se lista un glosario de términos y diagramas que reflejan la interrelación entre los módulos para llevar a cabo una asignación de personal a horarios de trabajo.

Capítulo 5. En este capítulo se explica cómo se desarrollará el presente proyecto y se utiliza la metodología empleada por Schmidt para desarrollar el modelo de representación de los horarios de turnos, primero se da el panorama empleando la experiencia de los expertos del área de tráfico y el modelo de programación lineal, como se lleva en la actualidad, y se dan sus limitaciones, posteriormente se combinan las herramientas de series de tiempo, programación lineal y algoritmos genéticos para dar una solución más adecuada en el uso de los recursos humanos que tiene la empresa.

7. PRINCIPALES RESULTADOS Y APORTACIONES

En los problemas de asignación de personal a horarios de trabajo en los centros de atención telefónica en donde se incorporan grandes volúmenes de información se obtuvo lo siguiente:

- Series de tiempo, que emplea *el*."***volumen de trabajo***" *histórico,* que es la duración del *tiempo en que es atendido un cliente en el centro de atención telefónico*, para poder pronosticar la demanda del volumen de trabajo, esto se realiza por cada ¼ de hora en el día, una vez que se obtiene el volumen de trabajo se multiplica por el factor de ocupación, es natural que las operadoras telefónicas no pueden tener toda la jornada puesta el auricular o la diadema, por lo que su capacidad de atención esta considerada en un 84%, con esto ya se puede determinar cuantas operadoras son necesarias cada 15 minutos a futuro.
- Programación lineal, se presenta el modelo para la asignación del personal en los horarios de trabajo, y se manifiesta la dimensionalidad al momento de incorporar los descansos, así como sus variantes para la distribución de horarios de trabajo. Se presenta el modelo PL en dos fases la primera de manera tradicional involucrando sólo aspectos de la Investigación de Operaciones con series de tiempo para pronosticar la demanda de operadoras telefónicas, en la segunda fase se incorpora el resultado del algoritmo genético.

Para darle solución a la asignación de personal primero hay que predecir la demanda de atención telefónica esto se logra con la herramienta estadística de series de tiempo, después la demanda se incorpora al modelo de programación lineal, y para solventar las limitaciones del modelo de PL, se incorpora la metaheurística, a través de los Algoritmos Genéticos, de esta manera los modelos matemáticos y el AG nos permiten obtener una adecuada asignación de personal a los diversos horarios de trabajo que se presentan en un centro de atención telefónica.

En esta investigación a pesar de que se soluciona un problema de asignación de horarios de trabajo que cuyo rango es de 5000^{3000} posibles alternativas y donde se obtuvo una solución óptima del 99.94% de eficiencia, ésta no es la aportación de la presente investigación, ya que ésta es una instancia del problema y al cambiar los parámetros ya no tendríamos esa eficiencia.

La aportación fundamental de este trabajo es <u>como enfrentar la **explosión combinatoria** que presentan los problemas "ETP (Employee Timetabling)"</u>, asignación de horarios de trabajo en un centro de atención telefónica, en donde al combinar los métodos heurísticos para segmentar las posibles combinaciones a un modelo matemático dan como resultado una solución adecuada.

Capítulo I.

LA TOMA DE DECISIONES EN LAS EMPRESAS

"La experiencia no se adquiere por la simple acumulación de años, sino por la reflexión de los sucesos".

M. OCAMPO

Resumen del capitulo

En este capítulo se ilustran y describen los elementos de los problemas de toma de decisiones, su tipología, las fases del proceso racional de la toma de decisiones así como los elementos probabilísticos necesarios para manejar la toma de las decisiones en condiciones de certidumbre, riesgo e incertidumbre y se demuestra su uso adecuado, que posteriormente son utilizados en el proyecto para analizar y entender los resultados del proyecto.

1. LAS ORGANIZACIONES Y LA TOMA DE DECISIONES

El contenido de la teoría de decisiones se originó de tres corrientes principales que son: la teoría de las preferencias y de la utilidad, la teoría de las probabilidades, y la teoría de la inferencia estadística.

El contenido de la teoría estadística de las decisiones se divide en dos campos principales: la toma de decisiones individuales y la toma de decisiones en grupo; otra subdivisión es por las decisiones que se toman en condiciones de certidumbre, riesgo o incertidumbre.

La toma de una decisión ocurre en condiciones de certidumbre si cada curso de acción posible conduce invariablemente hacia un resultado específico; ocurre en condiciones de riesgo, si cada alternativa posible conduce hacia una gama conocida de resultados específicos con probabilidades conocidas; y en condiciones de incertidumbre cuando las probabilidades de los varios resultados específicos son totalmente desconocidos o carecen de sentido.

A. Elementos de un problema de decisiones[10]

1. Hay una persona responsable de la toma de decisiones, esta persona tiene sus objetivos propios, los cuales pueden ser más o menos especificados de antemano.

2. Existe el contexto del problema, lo cual puede ser definido por un cierto conjunto de estados de la naturaleza.

3. Hay un conjunto de diversos cursos de acción factibles, del cual la persona que decide escogerá el más adecuado.

4. Hay un conjunto de consecuencias que resultan de la combinación de los diversos cursos de acción disponibles y de la ocurrencia de uno o diversos estados naturales.

5. Existe un cierto grado de incertidumbre relacionada con el acto de escoger la alternativa más conveniente, o sea, en la mayoría de los casos, la persona que decide no tiene una noción precisa acerca de cuáles pueden ser los resultados asociados con su curso de acción elegido.

B. Tipología de las situaciones de decisiones[11]

a) Situaciones programables.

Por lo general realizamos varias situaciones que son programables, por ejemplo: en una organización se requiere: el nivel de inventarios, la colocación de las máquinas y de los empleados, la determinación de los horarios de producción, etcétera, y en nuestra vida cotidiana una película que ver, una excursión, una cita, entre otras.

Tablas de decisiones:

Una tabla de decisiones consta de 4 secciones básicas, que son las siguientes:

1. Una línea doble horizontal divide la tabla en 2 secciones principales que son los estados de la naturaleza y los cursos de acción:

---

[10]cfr. J. Edward Russo, ***Trampas en la toma de decisiones***, Ed. Instituto Mexicano de Contadores Públicos A.C. 1993, pp. 271

[11]Otros autores como K.J. Radford clasifican el proceso de toma de decisiones en totalmente especificados, parcialmente especificados y personalizados o no especificados. p. 17

Si... estados de la naturaleza
entonces cursos de acción

Una línea doble vertical divide la tabla de decisiones en otras dos secciones principales que son el talón (actividad) y la entrada. La parte del talón describe los estados naturales y los cursos de acción en los cuales estamos interesados, la parte de la entrada especifica las relaciones lógicas implicadas en la situación de decisiones.

Talón estados de	entrada la naturaleza
talón cursos de	entrada acción

La tabla de decisiones es como una matriz, en el sentido de que tiene varios renglones y columnas que pueden ser identificados por medio de letras o números.

En el talón de los estados enlista a todas las posibles combinaciones del conjunto de estados específicos que tiene que ser considerados. El talón de los cursos de acción enlista todas las alternativas posibles, mientras que la entrada especifica qué curso de acción debemos tomar en ciertas condiciones bien definidas.

Las alternativas que debemos tomar como respuesta a un estado natural determinado forman una regla de acción, que están enlazadas por medio de las reglas de decisiones.

Ejemplo de una tabla de decisiones

El responsable de un programa académico de postgrado de la Facultad "X" quiere desarrollar unas reglas de decisión para las personas de servicio social que le auxilian a recabar la información, con el propósito de adquirir guías de acción sencillas para aceptar a los alumnos con grado de maestro al programa de doctorado:

Existen dos cursos de acción posible:

a1: Aprobar la solicitud de ingreso.

a2: Rechazar la solicitud de ingreso.

También hay 3 estados naturales pertinentes, que son:

e1: La investigación que presentó fue aprobada por el comité.

e2: Cuenta con un investigador que respalda su nivel de preparación.

e3: Entrevista aprobada con el responsable del doctorado.

Tabla de ingreso al programa de doctorado				
La investigación que presentó fue aprobada por el comité	sí	no	no	no
Cuenta con un investigador que respalda su nivel de preparación		sí	no	no
Entrevista aprobada con el responsable del doctorado			sí	no
Aprobar la solicitud de ingreso	x	x	x	
Rechazar la solicitud de ingreso.				x

Fuente: RHEAULT, Jean Paul, ***Introducción a la teoría de decisiones con aplicaciones a la Administración***, p.29

Nótese que las "x" indican los cursos de acción apropiados que deben adoptarse, sólo puede haber una "x" en las columnas de las decisiones.

Para las situaciones programables, las tablas de decisiones pueden ser traducidas a conjuntos de instrucciones, es decir programas, que pueden ser ejecutados por una computadora.

b) Las situaciones no-programables[12]

Según Rheaulth en ocasiones el decisor es incapaz de aportar reglas que puedan identificarse o procedimientos programables de decisión[13]:

a) El decisor aplicó pocas reglas cuando eligió su curso de acción;

b) Quizá él sea incapaz para especificar a priori la naturaleza de una solución ideal para su problema;

c) Un número de criterios de decisión que él hubiese deseado aplicar no eran operables antes de que él se enfrentara al problema;

d) Desconocía muchas de sus alternativas cuando empezó su análisis de la situación considerada;

e) En ese momento, no disponía de la información relacionada con las consecuencias de sus distintas alternativas.

Características más importantes de una situación no-programable:

a) Una extensa base de datos, es decir, más extensa de lo que los administradores pueden convenientemente tratar sobre una base manual;

b) Altos requerimientos para el manejo de los datos, es decir, los datos tienen que procesarse a través de un conjunto de filtros para aportar señales, que posean un significado para el decisor;

c) Existe un juicio para determinar cuál es el problema fundamental implicado en la situación y para generar las alternativas adecuadas;

---

[12]Un dato interesante que maneja K.J. Radford es "que del 80% al 90% (por número) de las decisiones que se efectúan en una organización comercial se pueden especificar totalmente (él las llama 'computables')".

[13] RHEAULT, Jean Paul, ***Introducción a la teoría de decisiones con aplicaciones a la Administración***, Editorial Limusa México, D.F. 1980, p.29

d) Existen interrelaciones complejas entre las variables de interés, lo cual dificulta el detectar los eslabones de causa y efecto entre ellas;

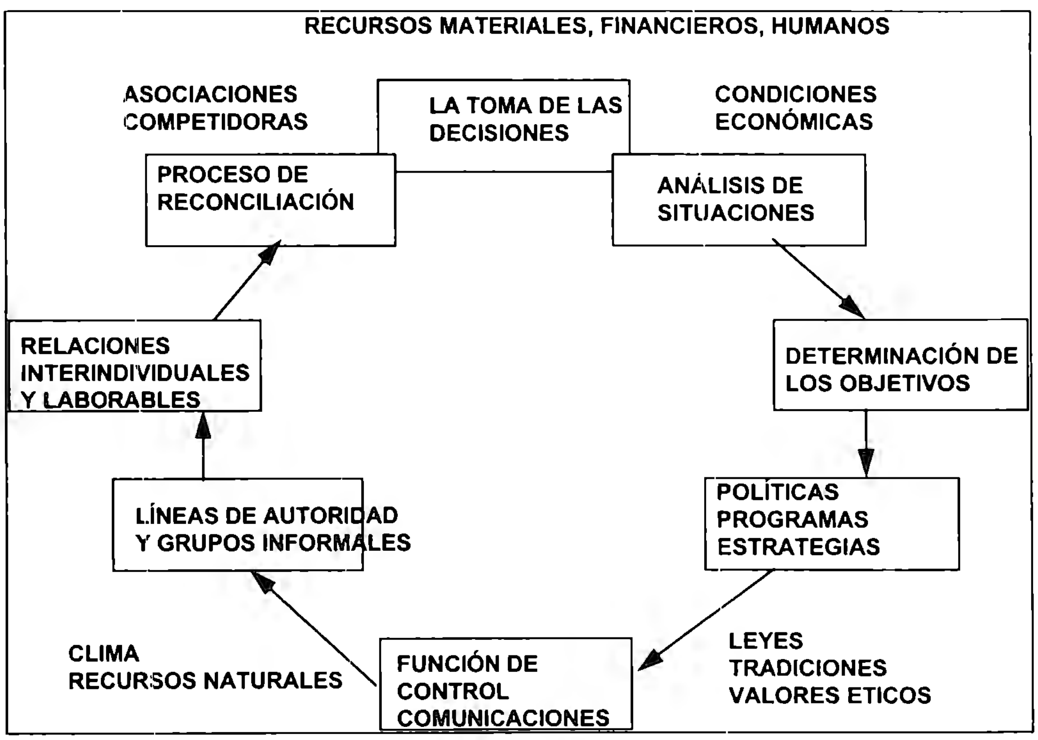
e) Existe la multidimensionalidad: el problema posee varias dimensiones a lo largo de las cuales uno puede medir las ejecuciones, y la más relevante no se conoce siempre por adelantado;

f) Unos grupos funcionales distintos de la organización formal están implicados: cada grupo posee una habilidad o una información necesaria, la cual debe combinarse con la información de los especialistas antes de que se llegue a un curso de acción aceptable;

g) Existe un gran beneficio económico, el cual se deriva de una solución aceptable;

h) Existe un ambiente o contexto dinámico del problema, el cual cambia rápidamente con el paso del tiempo.

FIGURA 1. LOS CENTROS DE DIAGNÓSTICO DE UNA ORGANIZACIÓN



Fuente: RHEAULT, Jean Paul, ***Introducción a la teoría de decisiones con aplicaciones a la Administración***, , p.32

C. Las fases del proceso racional de toma de las decisiones

El proceso racional de toma de las decisiones implica las siguientes fases de actividad:

a) Diagnosticar el problema;

b) Hallar las alternativas más adecuadas;

c) Analizar estas alternativas y compararlas;

d) Seleccionar la alternativa más conveniente.

Se define el análisis de los problemas como un proceso lógico que canaliza un cierto conjunto de información con el propósito de encontrarle una solución adecuada a un problema mayor identificado.

El contexto completo para el diagnóstico es: los estímulos, el sistema y sus objetivos, el medio ambiente del sistema y las metas ambientales.

El término sistema se refiere a la estructura de actividades en la cual el administrador se encuentra para tomar adecuadamente sus decisiones. El ambiente del sistema incluiría el mercado y sus características, el estado económico general, los sindicatos laborales, las leyes, los valores éticos de la comunidad, etc.

Tanto el sistema como su macro ambiente crean la armazón y las restricciones que definen y que dan estructura a los problemas que debe considerar el administrador. El ambiente proporciona recursos limitados y oportunidades a la organización comercial, y la organización proporciona bienes o servicios que el medio ambiente necesita.

El aspecto de desarrollar alternativas se relaciona con los procesos humanos de inventiva e innovación, es algo que cede más difícilmente a las fórmulas que otros aspectos del análisis de los problemas. La mejor forma de abordarlo es proporcionarle condiciones conducentes al pensamiento creativo y seleccionar a personas que posean una imaginación creativa.

Para que las alternativas tengan un significado, es necesario que alguna predicción indique las consecuencias probables que pueden acontecer al adoptar varios cursos de acción.

Los resultados se obtienen por lo menos de tres maneras fundamentalmente distintas:

a) Mediante estimaciones, adivinanzas;

b) Mediante el método experimental;

c) Mediante el conocimiento establecido por las teorías;

d) Siempre existe un margen de error cuando las estimaciones son empleadas para descubrir los resultados; es por eso que la gama de experiencias que haya tenido el decisor es muy importante.

La decisión de estudiar un problema dado sobre una base experimental representa un compromiso de fondos y no se puede dar el lujo de conseguir resultados para cada curso de acción factible.

Se pueden obtener resultados de comportamiento mediante experimentos de grupo en los que esté implicada una muestra determinada de individuos.

La esencia del método experimental consiste en que es preciso desarrollar una forma concreta de acción antes de probarla.

Las teorías proporcionan una base para formular los resultados. La teoría seleccionada debe contener los conceptos pertinentes y sus interrelaciones.

Para que exista una teoría será preciso que antes se haya experimentado y formulando objetivamente el mismo tipo de situación u otro análogo con relación al arreglo de las variables pertinentes.

Se presentan explícitamente las condiciones de interés y por lo general, mediante símbolos matemáticos. El resultado se denomina variable dependiente; los cursos de acción y los estados naturales reciben el nombre de variables independientes.

$$r_{ij} = f(a_i,e_j)$$

Cuando no pueden elaborarse relaciones matemáticas para describir los resultados, habrá que utilizar la experiencia y la estimación.

Se indican los resultados probables de varias alternativas y se comparan en función de los objetivos preestablecidos, con el propósito de determinar cuál es la alternativa que más satisfactoriamente cumpla con los objetivos deseados.

Radford señala que "la manera más fácil de valorar adecuadamente los resultados es atribuir un valor monetario a los efectos financieros de cada estrategia y ajustar después este valor monetario a los efectos puramente financieros de cada estrategia y ajustar después este valor monetario, tomando en cuenta los efectos intangibles que deben considerarse"[14].

El decisor delimita su problema mediante la selección de alguna fecha futura de evaluación, más allá de esa fecha no vale la pena, según su propio juicio, tratar de tomar en cuenta cursos de acción y acontecimientos que pudiese ocurrir.

A continuación, el decisor calcula el valor terminal real de su criterio que resultará de cada curso de acción considerado.

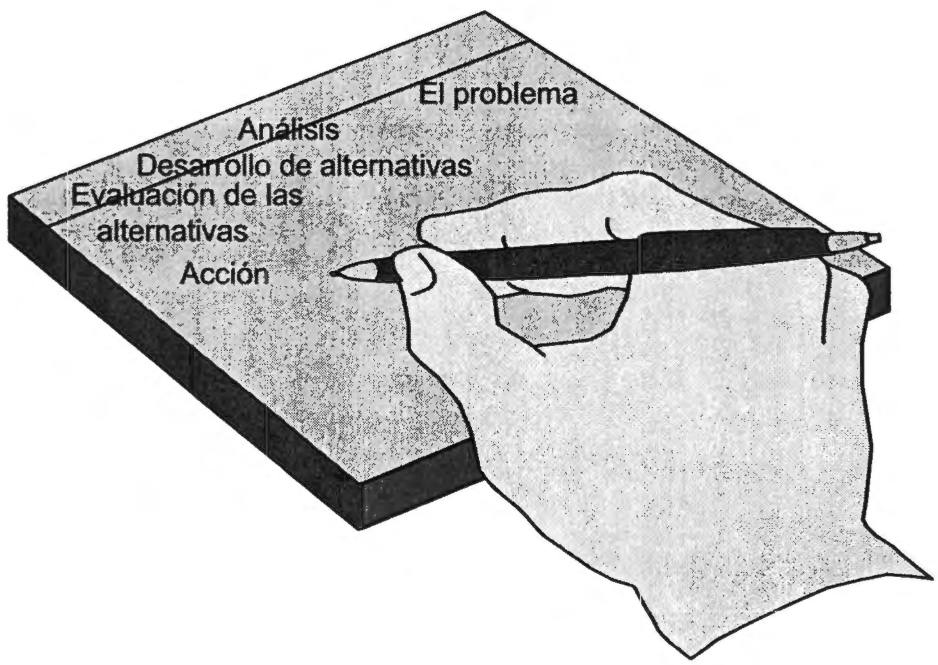


FIGURA 2. LAS FASES DEL PROCESO RACIONAL DE LA TOMA DE DECISIONES.

[14] Idem.

D. Objetivos, información y decisiones

Los objetivos proporcionan una orientación para regir el comportamiento de las personas que toman decisiones, a lo que Patrick Riverett dice: "dichos objetivos pueden ser poco factibles pero, sin embargo, están allí... con los cuales se pueden ponderar las decisiones"[15]

Cuando individuos u organizaciones persiguen objetivos múltiples, es esencial que relacionen esos objetivos de manera que puedan obtener una cadena adecuada de medios-fines. Debido a que se requieren recursos comunes que están disponibles en cantidades limitadas, generalmente los objetivos múltiples entran en conflicto los unos con los otros.

De ahí surge la necesidad de jerarquizar los objetivos y establecer prioridades, y hay que diferenciar los objetivos fundamentales de los instrumentales.

Los objetivos fundamentales se determinan en base a una evaluación de sus oportunidades, recursos y capacidades para su explotación.

El delineamiento del dominio básico de la acción es la colección de los objetivos fundamentales.

Los objetivos instrumentales son los subobjetivos relacionados directamente con las áreas de actividades específicas de cada organización, o sea, son los medios para alcanzar las metas fundamentales.

Los objetivos instrumentales se establecen en todos los niveles de la jerarquía y se relacionan estrechamente en forma de cadenas de medios - fines a alcanzar. De ahí proviene la fundamentación de la técnica de administración por objetivos.

La técnica de las curvas de indiferencia

Este concepto se puede clarificar considerando a un consumidor que sólo compra dos productos: ropa y comida, a precios cotizados y definidos[16]. Suponemos que el consumidor es capaz de decirnos:

---

[15]Patrik Rivett, ***Construcción de modelos para análisis de decisiones***, Ed. Limusa, 1983, p.38

a) si prefiere una combinación específica de estos,

b) o si le son indiferentes cualquiera de las combinaciones de estos productos.

Situación	unidades de comida	unidades de ropa
a	1	6
b	2	3
c	3	2
d	4	1.5

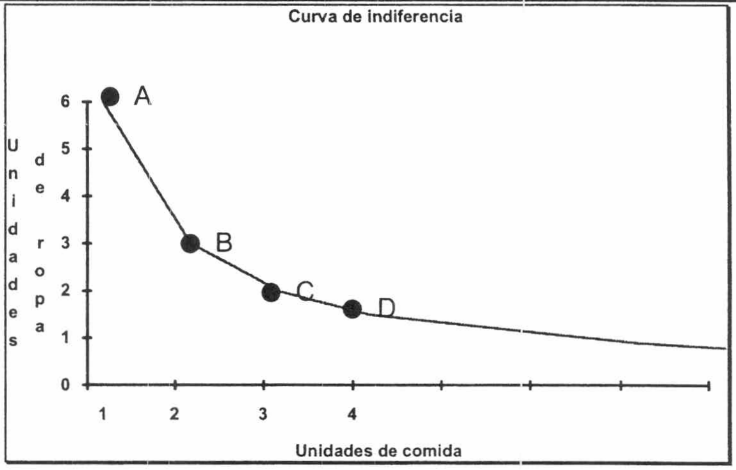


FIGURA 3. CURVA DE INDIFERENCIA

Cada punto representa una combinación diferente de los dos productos considerados. La curva de indiferencia está dibujada de tal manera que, si nuestro consumidor pudiera escoger cualquiera de los puntos dibujados sobre la curva, no sabría cuál escoger; piensa que todos son igualmente deseables y que le es indiferente cualquiera de las combinaciones obtenidas.

Nótese que la curva de indiferencia es convexa desde abajo: a medida que bajamos hacia la derecha a lo largo de la curva, la pendiente de la misma se aplana cada vez más. La curva de indiferencia está dibujada de esta manera para ilustrar la ley de la sustitución que afirma que cuanto más escasea un producto, más grande será su valor de sustitución relativa; su utilidad marginal se eleva con relación a la utilidad marginal del producto que abunda.

---

[16]Ejemplo tomado de del libro de RHEAULT, Jean Paul, ***Introducción a la teoría de decisiones con aplicaciones a la Administración***, Editorial Limusa México, D.F. 1980, p.38

Por ejemplo, el consumidor que se halle en la posición "a", puede sacrificar 3 unidades de ropa con tal de adquirir una segunda unidad de comida; y a la inversa en la posición "a", él cambiaría 3 de sus unidades de ropa por obtener una unidad adicional de comida. Sin embargo, si baja a la posición "b" sólo sacrificará una unidad de lo que le queda de su existencia de ropa con tal de obtener una tercera unidad de comida. Si unimos los puntos "a" y "b", veremos que la pendiente de la línea así obtenida tiene un valor de 3, independientemente de su signo negativo.

Por lo tanto, la pendiente de la curva de indiferencia es la medida de los términos con lo cual el consumidor aceptará cambiar una parte de las existencias de uno de sus productos con tal de obtener un poco más de otro producto. Se dice que un consumidor se halla en una posición de equilibrio cuando el último peso que gastó en ropa le proporciona la misma satisfacción que el último peso que gastó en comida.

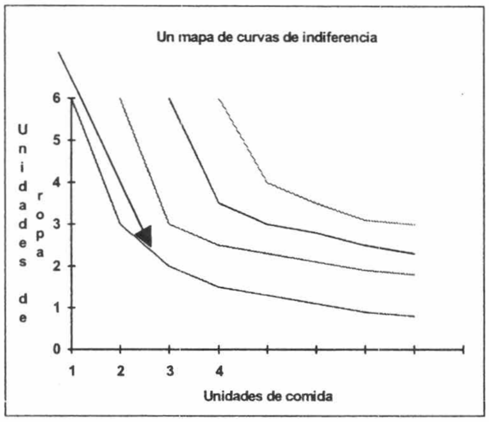


FIGURA 4. UN MAPA DE CURVAS DE INDIFERENCIA

Ahora, podemos agregar otras curvas de indiferencia a nuestro diagrama anterior; estas nuevas curvas muestran combinaciones de los productos considerados a niveles más altos que el anterior, o sea más satisfacción puesto implican mayores cantidades de ropa y comida.

Nótese que la persona que camina en tal mapa por una de las curvas, ni gasta más ni menos, tampoco el consumidor que se traslada de una posición a otra a lo largo de una misma curva de indiferencia no experimenta una satisfacción mayor ni menor por efecto del cambio en la combinación de bienes.

SI incrementamos ambos productos y nos movemos en dirección noreste dentro de ese mapa, vamos cruzando distintas curvas de indiferencia y alcanzamos niveles cada vez más elevados de satisfacción. A menos que el consumidor llegue a saciarse, su satisfacción seguirá aumentando al recibir mayores cantidades de ambos productos y, en consecuencia la línea señalada con una flecha representa un nivel de satisfacción menor que las otras líneas.

Por lo tanto, *podemos expresar el conflicto entre dos objetivos cualesquiera, mediante intercambios y proporciones de cambio entre los objetivos analizados, por medio de las curvas de indiferencia.*

Una solución es óptima si proporciona un equilibrio entre los distintos objetivos del sistema estudiado.

Es importante considerar que, aunque pudiéramos conseguir una auténtica optimización del objetivo principal identificado, sólo podremos considerar llegar a una suboptimización global, porque los demás objetivos tendrán que ser considerados como factores limitantes.

La suboptimización se puede manifestar en base al horizonte de planeación que se emplee. Por ejemplo, es posible que una estrategia que optimiza las utilidades de una organización comercial durante un período de un año, no tenga éxito en un período más largo de tiempo para la obtención de esa optimización.

Pero no se puede escoger un horizonte de planeación muy largo porque entre más se amplíe el plazo más inciertos serán los resultados de los planes, y por otra parte es posible que la organización necesite una proporción determinada de las utilidades en el presente inmediato y no pueda esperar pacientemente a que maduren las perspectivas a largo plazo.

Por lo tanto, cualquier esfuerzo de planificación resulta muy vulnerable a los efectos de la suboptimización la cual se manifestará ulteriormente en los resultados de las decisiones tomadas anteriormente.

E. El principio de la racionalidad limitada

El modelo de decisión cerrado es el patrón analítico empleado por las organizaciones que son sistemas orientados hacia metas, es decir están diseñadas para mejorar la capacidad de tomar decisiones de los individuos que persiguen objetivos comunes.

El hombre racional basa su elección en:

a) Un conjunto de alternativas pertinentes, acompañadas por sus resultados correspondientes;

b) Una regla establecida, es decir, un criterio de decisión que establece preferencias por los resultados identificados;

c) La maximización de las consecuencias monetarias, los ingresos o alguna otra forma de utilidad.

El modelo de decisión cerrado en base a la racionalidad otorga una importancia mínima al ambiente del decisor y a la complejidad del acto de decisión en sí.

En los modelos abiertos tenemos:

a) Los objetivos predeterminados son reemplazados por alguna estructura no identificada de objetivos, que se aproxima a un nivel de aspiración;

b) Todos los cursos de acción y los resultados no están predeterminados, tampoco lo están las relaciones entre las alternativas;

c) Existe un procedimiento de búsqueda, el cual considera un número reducido de alternativas factibles;

d) Es influido por el ambiente y también tiene influencia en el ambiente del decisor;

e) El individuo no maximizará, sino que tratará de buscar una solución que satisfaga cierto nivel de aspiración.

F. La red de las comunicaciones formales y las decisiones

La red de comunicaciones es una colección de puntos emisores y receptores entre los que se transmite la información. Cualquier característica observable y registrable de una operación es información en potencia para la red de las comunicaciones.

Las ocasiones de la comunicación pueden ser clasificadas de la manera siguiente:

a) La comunicación para iniciar y establecer programas para la actividad de carácter rutinario;

b) La comunicación para la actividad no-programable;

c) La comunicación para proporcionar información sobre los resultados de las actividades desarrolladas;

d) La comunicación para el desarrollo e implementación de nuevas estrategias.

El concepto de la pérdida de oportunidad

Una estrategia óptima sólo es óptima con respecto al conjunto de los cursos de acción representados y evaluados en cierta situación de decisiones.

Es importante percatarse de que si un decisor selecciona racionalmente cierto curso de acción, esto no implica que necesariamente sea cierto que esta acción parezca buena en retrospectiva después de que la naturaleza ha seleccionado un estado determinado. Quizá resulte una alternativa muy inadecuada a posteriori.

No existe la manera de que un riesgo introducido por la incertidumbre pueda eliminarse sin quitar las causas que la provocan. Lo más que puede argumentar el decisor es que el curso de acción que seleccionó es el mejor, dada la información que contaba.
Si hubiera conocido con anticipación el estado de la naturaleza qué iba a ocurrir, es muy probable que hubiese escogido un curso de acción distinto. Si esto sucede, se dice que el decisor *experimenta una perdida de oportunidad.*
En símbolos, la pérdida de oportunidad para un estado de la naturaleza particular, E_j, y el curso de acción A_i, indicada por $1(R_{ij})$, se representa por esta fórmula:

$$1(R_{ij}) = |X(R_{ij}) - X(R_{kj})|$$

en donde $X(R_{ij})$ es el resultado obtenido al escoger A_i, y $X(R_{kj})$ es el resultado más deseable para el estado natural E_j.

A veces, la pérdida de oportunidad también suele designarse como un arrepentimiento, por haber escogido el curso de acción A_i, si después se descubre que el estado de la naturaleza es E_j, Arrepentimiento es un término más corto y da una idea bastante exacta de lo que ha ocurrido.

Si sucede que A_i es la mejor alternativa que ha de seguirse cuando E_j es el estado natural que prevaleció, entonces el grado de arrepentimiento es cero.

Así, la mejor alternativa se puede hallar calculando la que haga mínima la pérdida de oportunidad.

Las decisiones son descripciones de un futuro de asuntos, éstas pueden ser falsas o verdaderas empíricamente. Sin embargo, también las decisiones poseen una calidad imperativa puesto que seleccionan un futuro estado de asuntos de preferencia a otro, y dirigen el comportamiento individual hacia el logro de unos resultados deseables. Es por eso que las decisiones poseen un contenido tanto ético como factual.

2. LA TOMA DE DECISIONES EN CONDICIONES DE CERTIDUMBRE

Se mostrará cómo la teoría estadística de las decisiones puede aplicarse a una clase particular de problemas de decisiones, siempre y cuando esos problemas se presenten en condiciones de certeza[17].

SEGUNDA TIPOLOGÍA DE LAS SITUACIONES DE DECISIONES

Esta clasificación se basa en el grado de información que se encuentra al alcance del decisor cuando conoce el estado de la naturaleza que ocurrirá con absoluta certeza.

Por lo tanto, las matrices de decisiones poseen solamente una columna donde se especifica el estado natural pertinente y a cada curso de acción factible se le asigna un resultado único posible.

A. El uso de la programación lineal en condiciones de certidumbre
El desarrollo actual de la programación lineal para la administración se le atribuye al matemático George Dantzig quien presentó, en 1947, su método *Simplex*, como un procedimiento sistemático para resolver un problema de programación lineal.
La programación lineal es similar a los métodos matemáticos para resolver problemas, donde el primer paso es elaborar un modelo del problema a resolver. Como la solución del problema matemático es realmente una solución del modelo matemático que representa al problema, **la solución no es mejor que el modelo matemático**.

---

[17]Algunos autores como Radford, lo manejan como la toma de decisiones en condiciones de seguridad, refiriéndose al mismo concepto.

B. Características de un problema de programación lineal[18]

El primer paso es la capacidad de expresar una función objetivo en términos matemáticos. El propósito del decisor es seleccionar esa alternativa A_i, la cual maximizará cierta medida de utilidad o minimizará cierta medida de pérdida; es decir, se optimizará alguna función, E, la cual mide la efectividad de las distintas alternativas posibles. En otras palabras, la efectividad que debe alcanzarse es una función de los cursos particulares de acción que deben tomarse. Simbólicamente, podemos escribir lo siguiente:

$$E_i = f(A_i)$$

En donde A_i representa un curso de acción factible.

La determinación de la definición y el método de medida de la función objetivo es el aspecto más difícil de ese proceso de resolución de los problemas de decisiones bajo certidumbre.

Una alternativa cuyos resultados son convenientes a todos los componentes del sistema es una decisión óptima; por lo contrario, una decisión que conviene a un cierto componente, con detrimento del conglomerado, es una decisión subóptima.

Por lo tanto, debe haber un conjunto de alternativas posibles, a fin de que se pueda escoger una solución que satisfaga la función objetivo determinada. También, los objetivos del sistema estudiado y las restricciones operantes se deben expresar en términos de ecuaciones o desigualdades lineales; la linealidad significa que tendremos un sistema de ecuaciones simultáneas de primer grado, o sea que pueden representarse gráficamente como líneas rectas.

La determinación de las restricciones operantes en la situación considerada se debe seleccionar una unidad apropiada para cada restricción y expresar la relación entre las variables y la restricción, generalmente en forma de desigualdad.

---

[18] RHEAULT, Jean Paul, ***Introducción a la teoría de decisiones con aplicaciones a la Administración***, Editorial Limusa México, D.F., p. 63

El modelo de asignación

Este modelo trata del problema que surge cuando se desea asignar a cada uno de los medios, a un número igual de requerimientos sobre una base de uno por uno. A este caso especial del problema general de la programación lineal se le conoce como el modelo de asignación.

Descripción: existen n requerimientos juntos con n medios de satisfacerlos; hay un cierto coeficiente de efectividad, e_{ij}, asociado con la asignación del medio i-ésimo que será el j-ésimo requerimiento, x_{ij}. Se requiere que ese $x_{ij} = 1$, si el medio i-ésimo ha de satisfacer el requerimiento j-ésimo, y que ese $x_{ij} = 0$, si el medio i-ésimo no se utiliza para satisfacer el requerimiento j-ésimo.

Puesto que un medio puede asociarse con solo un requerimiento el problema de asignación puede definirse matemáticamente como la optimización de esta función de efectividad:

$$E = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} e_{ij} \cdot x_{ij}$$

Sujeto a las restricciones siguientes:

i) $\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1$, para $j = 1,2, \ldots,n$,

ii) $\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1$, para $i = 1,2, \ldots,n$,

La optimización requiere ya sea una minimización o una maximización; eso depende de la medida de efectividad implicada en el caso concreto. El decisor controla una matriz de asignaciones cuyos elementos están indicados por x_{ij}; sin embargo, la e_i, no están directamente bajo su control.

Considere la aplicación siguiente del modelo de asignación: cuatro contratistas van a producir cuatro montajes diferentes; cada uno de ellos sólo producirá un montaje. Cada contratista presenta el presupuesto de sus montajes; esta información, presentada en una forma tabular, nos da la siguiente matriz de efectividad:

COSTOS PARA CONSEGUIR LOS MONTAJES
(en miles de pesos)

MONTAJE	CONTRATISTA			
	A	B	C	D
1	16	14	15	17
2	12	13	16	13
3	14	13	11	11
4	16	18	15	16

El objetivo es determinar la asignación de los montajes a los contratistas que produzca un costo total mínimo.

El primer paso es alterar la matriz original de efectividad para obtener una matriz reducida; este paso se efectúa al substraer el elemento mínimo de cada fila de todos los elementos de ésta, y al substraer después el elemento mínimo de cada columna de todos los elementos de la misma.

Así la primera matriz reducida es la siguiente:

PRIMERA MATRIZ REDUCIDA DE LOS COSTOS (en miles de pesos)

	CONTRATISTA			
MONTAJE	A	B	C	D
.1	2	0	1	3
2	0	1	4	1
3	3	2	0	0
4	1	3	0	1

Nótese que los elementos de la primera matriz reducida siempre serán ceros o números positivos.

Si puede hacerse una asignación que tenga un valor de cero, no podrá existir una asignación con un valor más bajo, y por lo tanto, ésta será una solución óptima.

Nuestra primera matriz reducida de costos nos indica que es posible obtener una asignación con un valor de cero de la manera siguiente:

asígnese el montaje 1 al contratista B
asígnese el montaje 2 al contratista A
asígnese el montaje 3 al contratista D
asígnese el montaje 4 al contratista C

Por consiguiente, el costo total para la producción óptima de los montajes se obtiene por medio de la matriz original de los costos y tomando en cuenta las asignaciones anteriores:

$14,000 + $12,000+$11,000+$15,000 = $52,000

Nótese que ninguna otra combinación de las asignaciones ofrecerá un costo total más bajo. De esta manera, hallamos nuestra solución óptima.

3. LA TOMA DE DECISIONES EN CONDICIONES DE RIESGO

El decisor no puede estar completamente seguro acerca de cuál será cada una de las ramificaciones de cualquier curso de acción que él se decida adoptar[19].

A. Loterías y comportamiento racional

El individuo que desea participar en una *lotería de una sola etapa,* debe comprar un boleto y acercarse a una mesa en donde hay una ruleta con m diferentes números marcados en la circunferencia. El individuo entrega el boleto al operador quien hace girar la ruleta; si la bola se detiene en el número j, el individuo gana un premio denotado por ε_j.

Por lo general los premios pueden ser cualquier cosa; no tienen que representar pagos monetarios. Más aún, el proceso de recibir el premio puede extenderse por un período muy largo de tiempo.

Hacemos los supuestos siguientes:

a) no hay dos premios exactamente iguales;

b) los premios reflejan una cierta cantidad de dinero que el jugador tuvo que pagar por el boleto. De esta manera podemos representar la lotería como un experimento aleatorio[20] , cuyos resultados están indicados por este conjunto de eventos:

$$E=\{\varepsilon_1,\varepsilon_2..,\varepsilon_j,...,\varepsilon_m\}$$

en donde la probabilidad p_j del evento e_j esta dada por el cociente del sector de la circunferencia de la ruleta.

---

[19]Sin embargo, como lo señala Radford, respecto a la ramificación, "se supone que la persona que toma la decisión conoce la probabilidad de ocurrencia", p. 53.

[20]Cfr. Emanuel Parze, Teoría ***Moderna de Probabilidades y sus aplicaciones***, Ed. Limusa

Indicaremos una lotería de una sola etapa con el símbolo L. Esta lotería puede caracterizarse por el conjunto E_j de premios y por la distribución de probabilidades $p(E_j)$, que asocia a cada premio con la probabilidad de obtenerlo.

En notación de conjuntos, la lotería L está dada por:

$$L = \{(p_1,\varepsilon_1),(p_2,\varepsilon_2),\ldots,(p_m,\varepsilon_m)\}$$

o sea, un conjunto de pares ordenados en donde cada par está formado por un premio específico y por su probabilidad correspondiente de obtención.

Existe una representación geométrica de la lotería L; esa representación es un diagrama arbóreo, y es la siguiente:

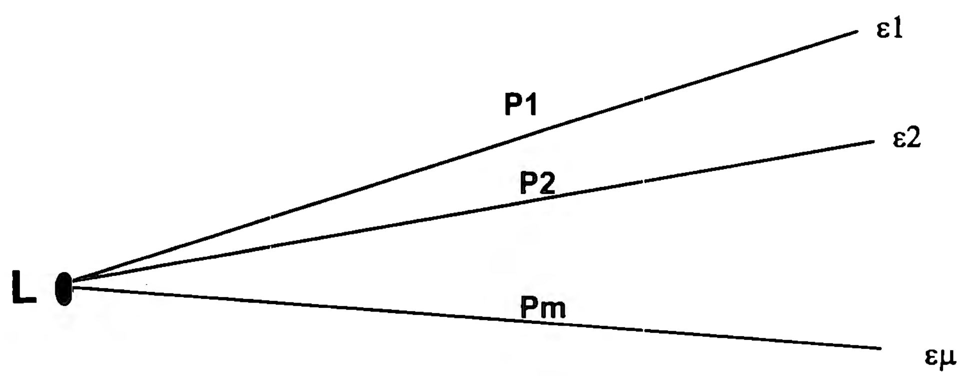


FIGURA 5. LOTERÍA DE UNA SOLA ETAPA

Tenemos m ramas, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots\varepsilon_m$ que emanan de un nodo común indicado por L. Hay una rama para cada premio, y en el extremo de cada rama se anota uno de los premios posibles. El valor de la probabilidad p_j de ganar el premio εj se escribe sobre la rama.

Como ejemplo, presentamos la lotería siguiente:

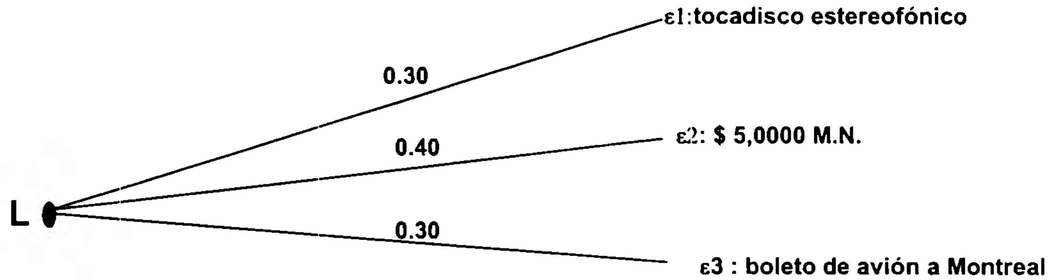


FIGURA 6. EJEMPLO DE UNA LOTERÍA DE UNA SOLA ETAPA

En términos de conjuntos de pares ordenados, la lotería L_1 se representaría así:

$L_1 = \{(0.30,\varepsilon_1),(0.40,\varepsilon_2),(0.30,\varepsilon_3)\}$

Nótese que una lotería de una sola etapa puede considerarse como un problema de decisiones en el que la naturaleza es quien toma la decisión, puesto que dice, en qué número tiene que detenerse la ruleta de juego. Hay m cursos de acción posibles que corresponden a los m números en donde la bola puede parar cuando la ruleta ya no gire.

Además de las loterías de una sola etapa, hay muchos casos concretos de loterías de muchas etapas. Una lotería de dos etapas es aquella que en cada evento contiene a otra lotería, geométricamente, podemos representar está lotería de la manera siguiente:

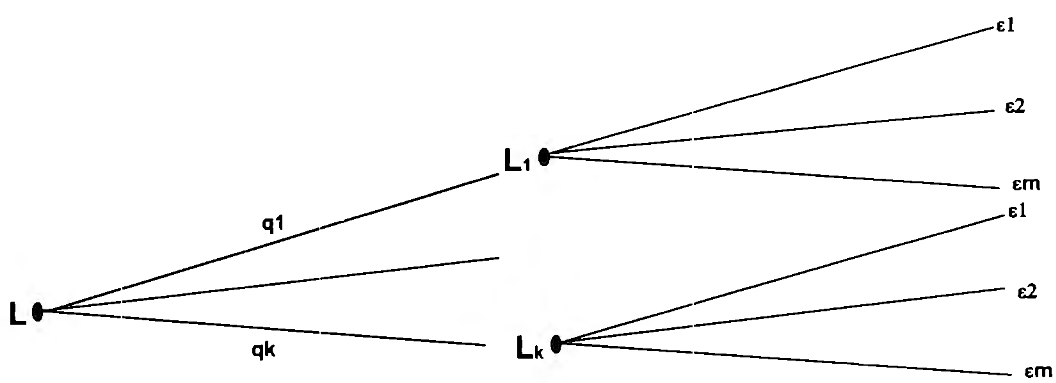


FIGURA 7. LOTERÍA DE DOS ETAPAS.

Interpretamos este diagrama arbóreo como un problema de decisiones de dos etapas, en el que la naturaleza primero decide a qué lotería L_i de una sola etapa va para el jugador, y después cuál es el premio que obtiene.

En esa forma y siguiendo un proceso inductivo, podemos definir una lotería de n etapas como una lotería de una sola etapa cuyos premios son K loterías de (n - 1) etapas[21].

Ahora, cualquier problema de decisiones, en condiciones de riesgo, se reduce a que el decisor seleccione la lotería que él prefiera de entre un conjunto determinado de loterías. Esas loterías pueden ser de una sola etapa o de varias etapas, o una combinación de ambos tipos.

El modelo del comportamiento racional, derivado de la teoría de la utilidad, puede formularse como un conjunto de axiomas, y una persona que toma decisiones racionales que satisfaga estos axiomas.

Los axiomas son los siguientes:

a) Sean dos eventos ε_1 y ε_j.

Por lo tanto, sólo puede ocurrir una y solamente una de las posibilidades siguientes:

$\varepsilon_i > \varepsilon_j$, o sea εi es preferible a ε_j;

$\varepsilon_j > \varepsilon_i$, o sea εj es preferible a ε_i;

$\varepsilon_i \sim \varepsilon_j$, o sea le son indiferentes al decisor.

Además, si $\varepsilon_i > \varepsilon_j$ y si $\varepsilon_j > \varepsilon_k$, entonces $\varepsilon_i > \varepsilon_k$.

b) A un decisor racional le es indiferente una lotería L de dos etapas y una lotería L de una sola etapa, puesto que la primera tiene las mismas probabilidades de obtener los premios que en la lotería de una sola etapa.

---

[21] RHEAULT, Jean Paul, ***Introducción a la teoría de decisiones con aplicaciones a la Administración***, Editorial Limusa México, D.F, p.134

c) Para cada evento $\varepsilon_j \in E$, diferente de ε_1 y de ε_m, le es indiferente a un decisor racional tener ε_j con certeza y jugar en una lotería que tiene solamente dos premios: el premio más favorable $\varepsilon 1$ y el premio menos favorable ε_m.

Con otras palabras, sea $L(\varepsilon_j)$ esta lotería:

$L(\varepsilon_j) = \{(\mu_j,\varepsilon_1),(1 - \mu_j, \varepsilon_m)\}$

Lo que significa este axioma en realidad es que un decisor racional puede pensar y determinar una medida de **probabilidad** μ_j que lo vuelva indiferente para obtener el premio ε_j con certeza o jugar la lotería $L(\varepsilon_j)$ que sólo tiene los mejores y los peores premios.

De esta manera, se obtiene una función numérica $\mu_j = \mu(\varepsilon_j)$ cuyo dominio es el conjunto E_j, con $E_j = \{\varepsilon_1,\varepsilon_2,..\varepsilon_m\}$.

Ésta función se llama la función de utilidad del decisor. Los números μ_j se llaman índices de utilidad para los premios ε_j, y sirven como cifras relevantes para caracterizar a los premios pertinentes.

Cualquier decisor cuyo proceso de toma de las decisiones se conforma a nuestro modelo de comportamiento racional en cuanto a sus preferencias, dispone de una función de utilidad definida con base en los eventos pertinentes de cada situación y con la propiedad que tomará sus decisiones de acuerdo con sus preferencias auténticas se escoge la alternativa (la lotería) que maximice su utilidad esperada.

Sea L una lotería de una sola etapa en la que p_j representa la probabilidad de obtener el premio εj. Entonces, la utilidad esperada de L, denotada por μ_L, viene dada por:

$$\mu_L=\Sigma\mu_j p_j$$

Finalmente el decisor racional dará la mayor preferencia a la lotería cuya utilidad esperada sea la más elevada.

Por consiguiente, nuestro modelo refinado de toma de decisiones en condiciones de riesgo será simplemente la función de utilidad, $\mu = \mu(\varepsilon_j)$, y el criterio de decisión para determinar qué estrategia preferirá el decisor racional será la maximización de la utilidad esperada.

Debe advertirse que este modelo de comportamiento racional sólo puede aproximar la naturaleza auténtica del proceso de ordenamiento de las preferencias de algunos decisores; su utilidad dependerá de la fiabilidad con que represente cualquier situación real de toma de decisiones en condiciones de riesgo.

B. Ejemplo de derivación de una función de utilidad[22]

Al dueño de un pequeño negocio le han ofrecido dos contratos y trata de decidir cuál de estos le conviene, ya que sus recursos le impiden que obtenga simultáneamente los dos.

Existe cierto grado de incertidumbre acerca de los resultados finales de cualquiera de los dos contratos; incertidumbre que se caracteriza por las distribuciones de probabilidades siguientes:

CONTRATO A		CONTRATO B	
Resultados	Probabilidades	Resultados	Probabilidades
\$50,000	0.60	\$40,000	0.50
\$20,000	0.10	\$30,000	0.35
-\$20,000	0.30	-\$10,000	0.15
TOTAL	1.00	TOTAL	1.00

Cada contrato puede considerarse como una lotería de una sola etapa, ya que tenemos premios, los resultados y probabilidades de obtener estos premios.

Por lo tanto, el problema que ese hombre de negocios trata de resolver se puede presentar, como el problema de jugar a una de las dos loterías o no jugar ninguna de ellas. En este último caso el premio sería de 0 pesos. Por lo tanto tenemos este conjunto de premios.

Ej = {50,000; 40,000; 30,000; 20,000; 0;-10,000;-20,000}

Nótese que los diversos elementos del conjunto anterior están enumerados por orden de preferencia; el resultado de 50,000 pesos es el premio más favorable y el resultado de -20,000 pesos el menos favorable.

---

[22] Ibid., p. 138

Supongamos que estos resultados reflejan adecuadamente el conjunto completo de actitudes de nuestro empresario, por lo que no se necesita considerar ningún otro factor adicional para determinar su función de utilidad.

Al resultado de 50,000 pesos lo designaremos con el símbolo $\varepsilon 1$ y al resultado de -20,000 pesos, con el símbolo $\varepsilon 7$.

Queremos determinar un conjunto de índices de utilidad para el cual $\mu(\varepsilon_1) = 1$ y $\mu(\varepsilon 7) = 0$, en que asignaremos arbitrariamente los índices de uno y de cero, respectivamente, al premio más favorable y al menos favorable.

Formulemos esta lotería de referencia:

$L = \{\mu, \varepsilon_1), (1 - \mu, \varepsilon_7)\}$

en que los premios integrantes son el más favorable y el menos favorable del conjunto E_j.

Ahora, para el subconjunto de premios siguientes, denotado por F_j, en donde

j = 2,3,4,5,6 o sea:

F_j = {\$40,000;\$30,000;\$20,000;\$0;-\$10,000}

Le preguntamos al empresario qué valor de μ, en la lotería de referencia anterior, lo dejaría indiferente entre recibir el premio de 40,000 pesos con certeza o jugar a la lotería de referencia L. es decir, cuál es el valor de μ (probabilidad) de tal manera que las dos ramas del árbol de decisiones siguiente le son indiferentes a nuestro empresario:

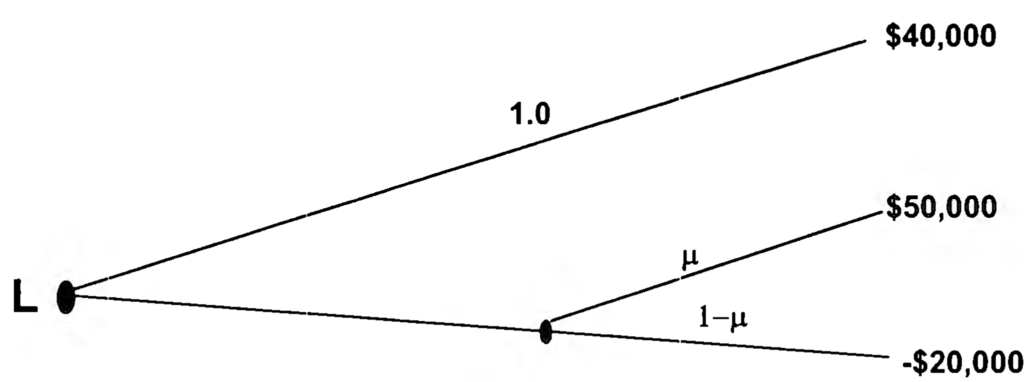


FIGURA 8. ÁRBOL DE DECISIONES CON LA MISMA PREFERENCIA

El número que nos expresa el empresario es el índice de utilidad para el premio de 40,000 pesos. Nuestro hombre de negocios reflexiona detenidamente y contesta lo siguiente: el valor de μ es 0.98, y se representa:

$\mu(40{,}000) = 0.98$

Hacemos lo mismo para los cuatro premios restantes:

$\mu(30{,}000) = 0.95$

$\mu(20{,}000) = 0.85$

$\mu(0) = 0.60$

$\mu(-10{,}000) = 0.40$

Por consiguiente se obtiene la siguiente función de utilidades de nuestro empresario, para esta situación de decisiones en condiciones de riesgo:

(εj)	50,000	40,000	30,000	20,000	0	-10,000	-20,000
$\mu(\varepsilon j)$	1.0	0.98	0.95	0.85	0.60	0.40	0

Ahora bien, podemos calcular la utilidad esperada asociada con cada estrategia factible, utilizando la función de utilidad anterior.

Los cálculos son los siguientes:

a) para la estrategia de escoger el contrato A:

$$\mu_L = 1(0.60) + 0.85(0.10) + 0\ (0.30) = 0.685$$

b) para la estrategia de escoger el contrato B:

$$\mu_L = 0.98(0.50) + 0.95(0.35) + 0.40\ (0.15) = 0.883$$

c) para la estrategia de escoger ningún contrato:

$$\mu_L = 0.60$$

Por lo tanto, y de acuerdo con el criterio de decisión de maximizar la utilidad esperada, nuestro empresario debe escoger el contrato B.

Nótese que la maximización de la utilidad esperada no coincide necesariamente con la maximización del beneficio monetario esperado en una cierta situación de decisiones bajo condiciones de riesgo.

Para ilustrarlo, calcularemos el beneficio monetario esperado asociado con cada contrato de esta manera:

a) para el contrato A tenemos:

50,000(0.60) + 20,000(0.10) + (-20,000)(0.30) = 26,000

b) para el contrato B tenemos:

40,000(0.50) + 30,000(0.35) + (-10,000)(0.15) = 29,000

Utilizando el criterio de decisión del valor monetario esperado, el empresario debe escoger el contrato B. En este caso específico, la utilización del criterio del VME nos da la misma respuesta que aquélla proporcionada por el criterio de la utilidad esperada.

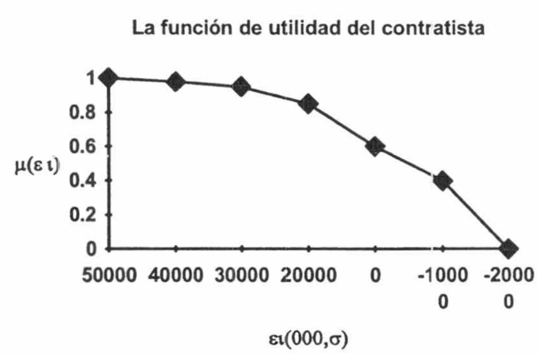


FIGURA 9. LA FUNCIÓN DE UTILIDAD DEL CONTRATISTA

Este diagrama cartesiano en el cual el eje horizontal representa las sumas monetarias pertinentes al problema y la escala de la utilidad está representada por el eje vertical. En esta curva de utilidad trazada, no es lineal; esta curva es cóncava hacia abajo y, denota cierta actitud hacia el riesgo por parte de nuestro empresario.

En la función de utilidad no pretende representar el valor del dinero, como tal, sino que refleja la integración de un conjunto de diversos elementos que tienen que ser tomados en consideración, que pueden ser:

- Los beneficios o las pérdidas potenciales, involucrados en el problema de decisiones;
- El patrimonio financiero del decisor y las posibilidades de mejorar este patrimonio a corto plazo;
- Las actitudes fundamentales de preferencia o de aversión hacia el riesgo por parte del decisor;
- Los relativos cambios posibles a la actitud fundamental del decisor hacia el riesgo debido a cambios en su patrimonio financiero o en otros factores pertinentes;
- El prestigio y la comodidad personal del decisor, etcétera.

Además, los índices de utilidad se proponen de tal forma que las decisiones pueden tomarse sobre la base del valor esperado sin necesidad de incluir otras consideraciones posteriores, tales como los efectos a largo plazo. En otras palabras, la asignación de los índices de utilidad a las consecuencias pertinentes inmediatas refleja la evaluación subjetiva que el decisor hace de los factores intangibles que afectaran los resultados verdaderos si la decisión se tomara en la perspectiva del largo plazo.

Por lo tanto, una función de utilidad, derivada de un problema de decisiones determinado, refleja las preferencias del decisor con respecto a las consecuencias de ese problema; si la situación del decisor cambia, por ejemplo, si se mejora su patrimonio financiero, también su función de utilidad puede cambiar.

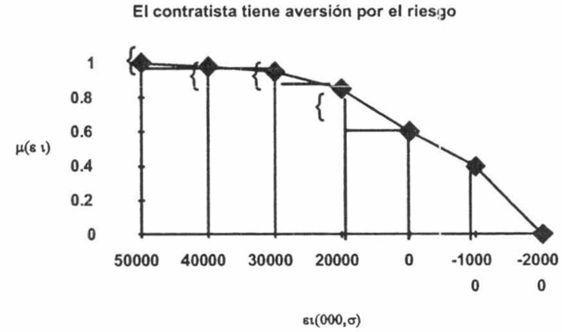


FIGURA 10. AVERSIÓN AL RIESGO

En la figura 10 se observa un desplazamiento arbitrario hacia la izquierda del punto 0, sobre el eje horizontal, aumenta la utilidad de nuestro empresario en menos de lo que la disminuye un desplazamiento equivalente hacia la derecha del punto 0. Esto significa que una ganancia específica cualquiera, en un contexto de incertidumbre parcial, aumenta su utilidad en menos de lo que la disminuye una pérdida por la misma cantidad. En otras palabras, la función utilidad crece con tasa decreciente.

Por lo tanto nuestro hombre de negocios tiene aversión, por el riesgo. Nótese que la curva de su función de utilidad es cóncava hacia abajo.

La forma de la curva de utilidad de un decisor depende fundamentalmente de su grado de aversión por el riesgo. Cuando asigna índices de utilidad a las consecuencias de cierto problema de decisiones, el decisor afirma que a su juicio, la utilidad esperada a largo plazo aumentará si actúa con un criterio de carácter conservador hasta que, haya consolidado una posición financiera más sólida.

Veamos las siguientes evaluaciones de tres decisores, sobre la utilidad que les representa un cierto conjunto determinado de consecuencias monetarias:

ÍNDICES DE UTILIDAD	CONSECUENCIAS MONETARIAS		
	Sr. A	Sr. B	Sr. C
1.0	100,000	100,000	100,000
0.75	-30,000	90,000	50,000
0.50	-70,000	70,000	0
0.25	-90,000	30,000	-50,000
0	-100,000	-100,000	-100,000

El señor A representa al hombre de negocios que urgentemente necesita dinero en efectivo, ya que una pérdida de 100,000 pesos pondría a su negocio en una situación muy crítica. Por lo tanto él piensa que es preferible pagar 30,000 pesos de su bolsa que correr el riesgo de perder 100,000 pesos, aunque la probabilidad de tal pérdida tan sólo es 0.25. Conforme la probabilidad de una pérdida de cien mil pesos aumenta, él prefiere pagar más aún que correr el riesgo de perder los 10,000 pesos extra que lo pueden llevar a la bancarrota, cuando la probabilidad de tal pérdida es 0.75.

El señor B tiene una actitud opuesta a la prudente del señor A. Representa al decisor que piensa que aun una pérdida muy grande no puede empeorar el estado actual de las cosas, sino que por el contrario cree que una ganancia muy grande mejoraría substancialmente su situación actual; él necesita unos cien mil pesos tan urgentemente, que piensa que la probabilidad es de 0.25 de obtenerlos equivale a unos 30,000 pesos, aun cuando haya una probabilidad complementaria de 0.75 de sufrir una pérdida de cien mil pesos.

El Señor C representa al empresario bien provisto de capital de trabajo y que confía en la política de auto seguro para cubrir los riesgos moderados. Por lo tanto, cien mil pesos representan para él un riesgo moderado, y por eso está dispuesto a utilizar el valor monetario esperado como criterio de decisión frente a cualquier problema de decisiones cuyas consecuencias no excedan a 100,000 pesos en valor absoluto. Si las probabilidades de obtener una ganancia de cien mil pesos o de incurrir en una pérdida de cien mil pesos son iguales, a él no le importará si conserva esa lotería o si la transfiere a otra persona cuando las probabilidades de un premio más favorable sean de 0.75; él estará dispuesto, pero no ansioso, de vender la lotería por su valor monetario esperado de 50,000 pesos.

También, el Señor C estará dispuesto, pero no ansioso, a pagar 50,000 pesos por liberarse de esta lotería, si las probabilidades se invirtieran; es decir, si cambiaran sus valores por los valores complementarios.

Ahora se gráfica las cifras anteriores. Así obtenemos el siguiente diagrama cartesiano con las diferentes curvas pertinentes:

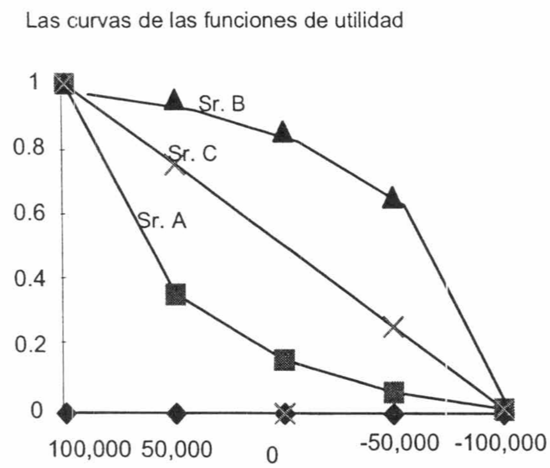


FIGURA 11. FUNCIONES DE UTILIDAD

Podemos notar que la curva correspondiente a la función de utilidad del señor A crece con una tasa decreciente, y es cóncava hacia abajo. Esto significa que una ganancia específica cualquiera aumenta su utilidad en menos de lo que la disminuye una pérdida por la misma cantidad. Por lo tanto, el señor A tiene aversión por el riesgo.

Por el contrario, para el señor B tiene preferencia al riesgo, en donde una ganancia específica cualquiera, aumenta su utilidad medida en el eje vertical, en más de lo que la disminuye una pérdida por la misma cantidad de dinero. Nótese que la curva de la función de utilidad del señor B es cóncava hacia arriba, es decir, es una función creciente con tasa creciente de crecimiento.

La función de utilidad del señor C. Dado que su función de utilidad es lineal con respecto a las consecuencias monetarias, estas mismas son y pueden utilizarse como índices de utilidad para considerar alternativas riesgosas y tomar decisiones.

Un decisor que tuviese una función de utilidad lineal usaría, como criterio de decisión: el valor monetario esperado.

Un decisor que valora todas las loterías en su valor monetario esperado, podría encontrar siempre una escala de utilidad tal, que la utilidad de cualquier resultado fuera numéricamente igual al valor monetario de ese resultado, y tal, que la utilidad esperada de cualquier estrategia que involucra resultados comprendidos dentro de ese mismo rango de valores de referencia fuera numéricamente igual al valor monetario esperado de la propia estrategia. Esta persona escoge automáticamente el curso de acción que tenga la máxima utilidad esperada.

Aversión decreciente, del decisor por el riesgo:

Sea L una lotería elemental tal que tenemos:

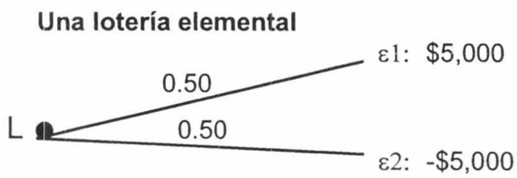


FIGURA 12. LOTERÍA ELEMENTAL

Suponemos que nuestro decisor de referencia tiene aversión por el riesgo y que, si se le presentara la oportunidad de escoger, él preferiría no participar en la lotería L anterior.

Además, supongamos que este decisor piensa que es indiferente escoger cualquier de las dos alternativas de decisiones del árbol de decisiones siguiente:

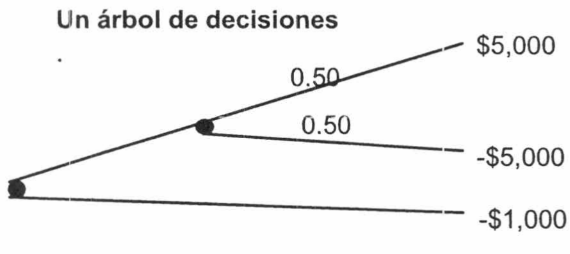


FIGURA 13. ÁRBOL DE DECISIÓN

Si nuestro decisor fuera un hombre más rico, probablemente no estaría dispuesto a pagar una prima de seguro de 1,000 pesos para liberarse de las responsabilidades que supone esta lotería, más bien, él preferiría arriesgarse y jugar en ésta. La prima de seguro que estaría dispuesto a pagar probablemente decrecería y tendería a ser nula conforme mejorara su posición financiera.

Actitud de aversión decreciente por el riesgo

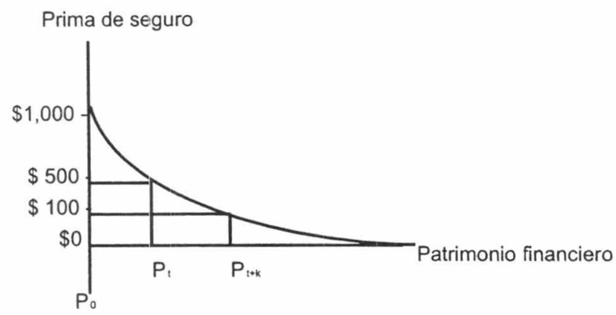


FIGURA 14. AVERSIÓN DECRECIENTE HACÍA EL RIESGO

Donde P_0 representa el patrimonio financiero inicial del decisor.

Así el precio de venta que cierto decisor asignara a una lotería de cierta magnitud generalmente dependerá de su posición financiera. Tal comportamiento muestra una actitud de aversión decreciente por el riesgo.

Existe evidencia de que los administradores, en su calidad de individuos, pueden ser considerablemente más conservadores de lo necesario. En parte, esto es una función del aspecto de los sistemas de control utilizados para las recompensas y los castigos, que hacen demasiado hincapié en las **fallas de corto plazo e ignoran los beneficios derivados de evitar los riesgos**. Tales sistemas producen una tendencia generalizada para actuar con cautela.

4. LA TOMA DE DECISIONES EN CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE COMPLETA

La toma de decisiones en condiciones de incertidumbre completa significa que se desconocen las probabilidades de ocurrencia de los diversos estados naturales pertinentes al problema de decisiones considerado.

El carácter de la incertidumbre se asocia con el hecho de que nos damos cuenta de que somos incapaces de estimar o calcular la probabilidad que se produzcan cada uno de los estados naturales.

De otra manera, el decisor se enfrenta a ese tipo de problemas cuando se enfrenta con situaciones que nunca ocurrieron y que quizá no se repitan de esa misma forma en el futuro previsible.

En tales situaciones cada curso de acción factible conducirá a una respuesta específica contenida dentro de cierto conjunto de respuestas posibles, pero no podremos saber cuál es la respuesta que obtendremos, ni tampoco podremos aplicar una ponderación probabilística a esos resultados posibles.

Los criterios de decisión que se emplean cuando predominan estas condiciones de incertidumbre, reflejan los valores personales y las actitudes fundamentales hacia el riesgo que tienen los responsables de la toma de las decisiones. El decisor puede adoptar una actitud intermedia entre el pesimismo y el optimismo, o bien se puede decidir a utilizar algún otro criterio más conveniente.

Se han propuesto varios criterios de decisión que conducen a escoger el mejor curso de acción que concuerde con el criterio elegido. Como ya se mencionó los métodos anteriores presentan desventajas en la toma de las decisiones, como se verá más adelante en este trabajo se utilizará la combinación de un modelo matemático con un modelo de algoritmo genético para elegir los elementos necesario para llevar a cabo la asignación de personal a horarios de trabajo.

5. LOS MODELOS DE LA ASIGNACIÓN DE PERSONAL

En los modelos de la asignación de personal para los centros de atención telefónica, la toma de las decisiones que se efectúa es en condiciones de riesgo, en el aspecto de que no sabemos con certeza cuantas personas van a llamar, ni la hora exacta, ni cuanto van a durar en la llamada. Sin embargo los modelos de asignación de personal como casos especiales del modelo de programación lineal suponen certidumbre, pero en el mundo real pocas situaciones de decisión se dan bajo condiciones de certeza, ejemplo las decisiones que se toman para determinar cuantas estaciones de trabajo se deben colocar en base al edificio donde se ubica el centro de atención telefónica se realizan en condiciones de certeza. Pero si se presenta una contingencia como un temblor, un desastre natural, seguramente estaremos en condiciones de incertidumbre completa, sin embargo se debe tomar una decisión de cuantas personas se deben asignar a cada una de las estaciones de trabajo del centro de atención telefónica.

Para solventar esta asignación de personal a horarios de trabajo, se han presentado a lo largo del tiempo diversas maneras para poder resolverlo de la mejor manera, involucrando restricciones duras y suaves.

A. Estudios Previos

Fernández 2003 p. 26, señala "uno de los principales problemas que aparecen cuando se maneja optimización de horarios es como introducir muchas restricciones en un algoritmo y como asignarle el apropiado peso", en mi opinión me quedaría tan sólo en como introducir muchas variables, ya que esto es lo que nos va a dar pauta para determinar como se está interpretando el problema.

La regulación de las restricciones están intrínsecas, dentro del problema en si, al tener un horario después de las 20 horas, automáticamente se convierte en un turno nocturno por lo que debe trabajar menos de una hora con respecto al turno diurno, estas restricciones no están enunciadas dentro del problema, pero al contemplar los diversos turnos indirectamente se están contemplando, el autor Sophie Demassey en 2006 p. 10, señala cinco clases de restricciones:

1. Asignaciones permitidas o prohibidas.
2. Reglas de cardinalidad
3. Reglas de ajuste
4. Reglas de secuencia
5. Reglas condicionales.

En los estudios reportados en la literatura para los problemas de asignación de personal a horarios de trabajo se utiliza el término *Employee Timetabling Problem (ETP),* las características que se deben tener en cuenta cuando se enfrenta con un problema de *este tipo*, es que al tener un gran número de variables, como podemos determinar que la solución que presentamos es la adecuada, al trabajar con modelos heurísticos, es difícil determinar cual es una solución adecuada

Los problemas ETP (*Employee Timetabling Problem*) pueden ser resueltos en dos fases según Sophie Demassey en 2006 p. 7; la primer fase es diseñar los posibles horarios según las restricciones que regulan, la segunda fase es considerando el criterio de optimización elegir el subconjunto de horarios para asignar al personal.

Una característica muy particular del centro de atención telefónica más grande de México, es el contrato colectivo de trabajo en donde manejan varios descansos y esto vuelve aun más complejo el manejo del problema, estos diversos descansos varios autores lo manejan como ranuras del tiempo (vid. Fernandez 2003 p. 28)

Se aclara que el modelo propuesto para la solución de asignación de personal a horarios de trabajo, es genérico, ya que si fuera especifico para resolver un problema de *Call Center*, se tendría como desventaja que un ligero cambio de la especificación del problema frecuentemente causa un completo rediseño de la estructura de datos y algoritmos, como lo menciona Gröbner 2003, p. 24.

Como se menciona en el capitulo 2 en el apartado de Programación Lineal en la sección D El modelo de asignación; la asignación de personal a horarios de trabajo se puede realizar mediante la programación lineal, y en el apartado de Análisis combinatorio en la sección D, se dimensiona la cantidad de posibilidades diferentes de acomodar los descansos que se conceden al momento de asignar al personal en los horarios de trabajo.

La manera como se han intentado resolver en otras investigaciones los problemas de asignación de horarios de trabajo (ETP) con gran volumen de restricciones ha sido con métodos heurísticos (Algoritmos genéticos, redes neuronales Restricciones de programación (Demasey 2006), y el presente trabajo combina el método heurístico con un método matemático por lo que es pionero en su ámbito, ya que la parte matemática permite determinar la viabilidad que tiene la parte heurística además de validarla.

Un aspecto interesante de la aplicación que se presenta en la vida real es que las operadoras aunque tienen la obligación de trabajar, por ciertas causas no se presentan o bien le cambian el turno a otra trabajadora, para ver otros aspectos que influyen vid. Meisels 2007.

Yigit 2007, menciona las restricciones típicas duras y las restricciones típicas blandas, la primer restricción que menciona es "ningún maestro puede tomar dos clases diferentes al mismo tiempo" trasladando la restricción a nuestro caso se tendría: ninguna operadora puede tener dos turnos diferentes el mismo día, sin embargo como se ha comentado se toman a las operadoras como indistinguibles ya que como hay más de tres mil operadoras se volvería inmanejable manejar una por una.

Para el caso de las restricciones suaves Yigit 2007, menciona "ni los estudiantes ni los maestros deben tener horarios con muchos espacios vacíos entre lecciones", nuevamente trasladando a nuestro caso tenemos que las operadoras no deben tener muchos espacios o descansos entre sus horarios de trabajo en un mismo día, sin embargo esto ya esta considerado por la empresa y sindicato teniendo que tener horarios mixtos, es decir no es turno diurno ni tampoco turno nocturno, por lo que en el mismo turno ya esta contemplada la restricción trabajando medio hora menos que el turno diurno y sin salir tan noche o de madrugado como el turno nocturno.

Se presentan varios problemas en la literatura internacional como el hospital italiano (Bellanti 2004), *call center's* para describir los problemas ETP, sin embargo lo interesante es como manejar el gran numero de alternativas que se pueden manejar, un campo que no he visto reportado en la literatura y seria muy interesante describirlo es en las líneas aéreas.

Problema en condiciones de riesgo:

En un contexto general, las empresas que trabajan bajo horario anualizado se enfrentan a las siguientes situaciones:

- Cada trabajador es empleado de tiempo completo. Mas aún cada trabajador esta disponible para ejecutar todas las diferentes actividades en un sector dado de la empresa, ejemplo todas las operadoras están capacitadas para contestar cualquier llamada, como dato curioso hay veces que estando en el Distrito Federal y necesitamos el teléfono del restaurante de una colonia, es probable que al solicitar la información al 040, nos contesten en otra entidad y nos proporcionen la información, ya que todo esta concentrado en una base de datos.
- El equipo de trabajo no tiene sistemáticamente la misma composición durante el día: Pueden tener turno de día, turno nocturno o combinado.
- La demanda tiene que ser satisfecha.
- Las restricciones tienen que estar formuladas como tiempos de descanso y el número de periodos de tiempo de trabajo para cada trabajador.

Kaplensky (2007), señala que en el mundo comercial de ahora, muchas organizaciones estriban para reducir sus costos mientras mantienen un alto grado de satisfacción del trabajo. Una meta en común es mejorar la calidad de los horarios de trabajo (timetabling) para los empleados de las organizaciones.

Problemas de horarios de trabajo (ETPs) involucra una organización con un conjunto de tareas que necesitan para ser llenadas a sus necesidades por un conjunto de recursos. En ETPs, los recursos son empleados con sus propias calificaciones restricciones y preferencias.

B. Métodos utilizados en estudios previos para resolver la asignación de personal

a) Programación Lineal

Danting (1986), creador de la programación lineal, realiza la asignación de personal a puestos u horarios de trabajo, de una manera estática, considera 70 personas y 70 trabajos, argumentando que las combinaciones que se presenta para este caso es un número tan inmenso como 70 factorial, y que entonces el problema consiste en comparar estas 70 factorial formas y elegir la óptima, es decir la que sea mejor. Este es un gran paso para resolver los problemas de asignación de personal a horarios de trabajo, sin embargo hablar de 70 personas y 70 horarios es considerar sólo empresas pequeñas y medianas, cuando nos enfrentamos a empresas grandes con más de 1000 trabajadores, la programación lineal no es suficiente, y por lo tanto se deben considerar otras herramientas, para poder manejar problemas del mundo real. Este punto se aborda en el capitulo 2.

b) Declarativas y Restricciones de Programación (BackTracking)

Meisels et al. (1995). combinan restricciones de redes y reglas de base del conocimiento para resolver *employee timetabling problems*. El software utilizado no garantiza un óptimo de la asignación de horarios por la complejidad de las formulaciones permitidas. Para las construcciones de la aproximación de la programación cae en tres grupos:

- Restricciones de exclusión mutua: un empleado puede ser asignado a un horario en un turno.

- Finita capacidad de empleados: por ejemplo limitar el número de horas que puede trabajar.
- Objetivos: restricción de la distribución del tiempo extra de la asignación de empleados por turno.

La base de reglas parte del sistema que combina reglas de asignación y reglas de construcción, las cuales son representaciones del conocimiento humano. Las preferencias del personal para ciertos horarios son tomadas en cuenta por la asignación de horarios. Este orden de restricciones asigna para preferencias, ejemplo horarios por la mañana se prefieren a los de la tarde. La restricción de reglas maneja la demanda para cierto tipo de empleados o para un particular empleado.

c) Sistemas Expertos – Sistemas para soportar decisiones.

Los sistemas para soportar decisiones, proveen desarrollos para interactuar con el usuario.

Cheng and Yeung (1998), realizo un estudio de horarios de tiempo completo una aproximación con un sistema experto híbrido. El sistema maneja restricciones así como días de descanso, máximo de días de trabajo consecutivo, mínimo de días de descanso consecutivos.

El sistema experto por si mismo es involucrado para asignar turnos de mañana, tarde y noche. Otro punto es la dimensión del problema son muy pequeños comparados hacia modelos que son también orientados hacia la asistencia de horarios en la práctica.

d) Heurística

Blau and Sear (1983), generaron todos los posibles patrones de horarios en un periodo de dos semanas. Ellos evalúan éstos con su respectiva preferencia del empleado. Con un algoritmo descendente es usado en una segunda etapa en orden para encontrar un horario óptimo con uno de los 60 mejores patrones para cada empleado.

Schaerf and Meisels (1999), presentan una general definición de problemas para asignación de personal a horarios. Este es un problema de asignar empleados a tareas en un horario. Los horarios son predefinidos por periodos de tiempo que pueden residir en cualquier lugar del eje del tiempo. El modelo incluye estrictas coberturas de restricciones pero esto permite flexibilidad con respecto a las restricciones relacionadas con el tiempo. Una búsqueda general local es introducida que permite asignación parcial y así crea un largo espacio de búsqueda. El artículo presenta algoritmo de ascenso de colina para la búsqueda local. Cada técnica concentra una parte diferente de espacio de búsqueda, denotando su parte. Las funciones vecinas pueden incluir movimientos de insertar, borrar y remplazar. El enfoque ha sido probado en ambientes teóricos: un hospital y un ambiente de producción. No obstante, la flexibilidad hacia satisfacer la cobertura (asignación parcial), es un paso muy interesante hacia resolver problemas en la practica.

e) Recocido Simulado

El algoritmo de recocido simulado (Simulated Annealing Algorithm - SAA) pertenece una clase de Algoritmos de búsqueda local (*Local Search Algorithms* – LSA) comúnmente llamada Algoritmos de Umbral (*Threshold Algorithm* - TA). Hay dos razones por las cuales los TA resultan interesantes dentro de los LSA:

i. parecen andar bien en una amplia gama de problemas reales (prácticos)
ii. algunos TA, como el SAA, tienen características que permiten hacer un análisis de la convergencia.

Analogía Física. El método del recocido se utiliza en la industria para obtener materiales mas resistentes, o mas cristalinos, en general, para mejorar las cualidades de un material.

El proceso consiste en "derretir" el material (calentarlo a muy alta temperatura). En esa situación, los átomos adquieren una distribución "azarosa" dentro de la estructura del material y la energía del sistema es máxima. Luego se hace descender la temperatura muy lentamente por etapas, dejando que en cada una de esas etapas los átomos queden en equilibrio (es decir, que los átomos alcancen una configuración óptima para esa temperatura). Al final del proceso, los átomos forman una estructura cristalina altamente regular, el material alcanza así una máxima resistencia y la energía del sistema es mínima.

Versión monótona. El algoritmo se divide en etapas. A cada etapa le corresponde una temperatura menor que la que tenia la etapa anterior (a esto hace referencia la monotonía: después de cada etapa la temperatura baja, se enfría el sistema). Por lo tanto hace falta un criterio de cambio de la temperatura ("cuanto tiempo" se espera en cada etapa para dar lugar a que el sistema alcance su "equilibrio térmico").

Brusco and Jacobs (1995), combinan el recocido simulado y una búsqueda local heurística simple para generar horarios cíclicos para operar organizaciones continuamente. Comúnmente las organizaciones que dan servicio a demanda continua permiten que los horarios de sus trabajadores empiecen a cualquier hora del día. Este problema es más bien excepcional y genera procesos de horario más complejos que los tipos de listas de horario.
El trabajo se concentra sobre el personal externo comparando el costo de personal alternativo con opciones de horario. Brusco and Jacobs llaman a su problema como problema de gira de horarios (*tour scheduling problem*), este determina diariamente cambio de horario y semanalmente días de descanso asignación para empleados a través de un especifico horizonte del tiempo. Un enfoque que involucra una reducción del problema que prohíbe el uso de cambio de horario diario que se pueda empalmar con las 24 horas del próximo periodo. El problema matemático asociado con esta reducción es referida como la formulación "gira-horario discontinua". Sin embargo el articulo esta orientado hacia el personal staff, una contribución interesante es el manejo de trabajo como tiempo parcial, las asignaciones no son restricciones para predefinir los horarios, y el enfoque puede abordar diferentes clases de problemas reales que no necesitan ser resueltos por optimización.

f) Búsqueda Tabú

La búsqueda tabú es una técnica heurística que puede utilizarse en combinación con algún otro método de búsqueda para resolver problemas de optimización combinatoria con un alto grado de dificultad.

Dowsland (1998), hace uso de diferentes estrategias de búsqueda de vecindad en un algoritmo de búsqueda tabú. La heurística oscila entre soluciones factibles de encontrar el personal requerido y concentrar horarios que prefieren los trabajadores. En cualquier tiempo del periodo planeado, el algoritmo tiene que probar suficiente personal con las cualidades requeridas, en tanto que la satisfacción de las personas mediante la concesión de las solicitudes personales de una manera justa.

Lo atractivo del trabajo es que los patrones difieren de persona a persona. En lugar de diseñar un algoritmo genérico ampliamente aplicable, el modelo se ha desarrollado para solucionar el problema en la programación de personal de un hospital y produce muy buenos resultados de calidad para esos datos. El artículo es interesante porque habilita la búsqueda para ir y regresar desde la región factible a la región no factible.

Bellanti et al. (2004), presentan un algoritmo para resolver un problema particular de un hospital italiano, hacer frente a un problema del mundo real, ellos manejan un largo conjunto de restricciones, que ellos dividen dentro de restricciones de cobertura y contractual y requerimientos operacionales. Algunas inevitables modificaciones han sido incorporadas al modelo, por ejemplo permitir una desviación entre los requerimientos de cobertura y el número actual de enfermeras programadas. La investigación ha resultado en el desarrollo de un sistema de software que esta actualmente en uso en el hospital. Estos resultados mejoraron en aquéllos generados manualmente en el hospital y el tiempo de computación es satisfactoriamente bajo.

Bellanti et al, describen en detalle cómo se construye una solución inicial. Aplicando diferentes procesos *multi-start*, diferentes soluciones iniciales son generadas, desde las cuales la mejor es tomada por el procedimiento de búsqueda local. Un método de búsqueda tabú y una iteración en el enfoque de búsqueda local han sido desarrollados. Ambos técnicas superan, una búsqueda de enfoquè *multi-start* local y una reiterada búsqueda local, parecen ejecutar ligeramente mejor que la búsqueda tabú. Los datos de las pruebas que se generan aleatoriamente se pueden solicitar.

g) Algoritmos Genéticos.

Tanomaru (1995), presenta un algoritmo genético para resolver un problema de programación de horarios del personal. El objetivo es minimizar el total de salario donde el número de personal es no fijo. La solución tiene que encontrar el total del requerimiento de la fuerza de trabajo mientras se respete el número máximo de horarios de cada uno de los turnos de trabajo. El tiempo extra es permitido, no obstante, a pesar de que la dimensión del problema es muy básica, este es uno de los pocos artículos de investigación que permiten la flexibilidad en el comienzo del horario de los turnos. Las soluciones para el personal son representadas por siete pares de enteros, dando el inicio y fin de horarios por día. Para problemas de la vida real, Tanomaru concluye que su heurística con operadores de mutación puede consumir demasiado tiempo. También el número de variables que se abordan son muy pocas.

Aickelin 2000, plantea problemas de programación de horarios, donde el enfoque es un complejo algoritmo genético cooperativo. El problema de conocimiento específico es usado para guiar al operador cruzado y al operador de ascenso en colinas con el algoritmo. Las restricciones de software sobre el personal de la programación de horarios no son evaluadas. En el presente enfoque se trata de descomponer el problema en "más sencillos para resolver" sub-problemas. La habilidad de las categorías, son manejadas de una manera jerárquica en la que la gente de calificación alta puede remplazar a los de calificación baja. Este es una importante contribución y esto trabaja muy bien para el problema de programación de horarios del personal. Este método se aborda en el capítulo 3.

Conclusiones

En esta sección hemos revisado brevemente artículos, en los cuales los autores que han utilizado un amplio espectro de modelos, métodos y enfoques al problema de la programación de horarios al personal (*Scheduling*) y al problema de asignación de personal a horarios de trabajo (*Employee Timetabling*). El problema de programación de horarios al personal ha atraído la atención de científicos desde la Investigación de operaciones y la Inteligencia Artificial por alrededor de 40 años. Muchos de estos modelos han sido presentados y discutidos son demasiado simples para ser directamente aplicados a un centro de atención telefónica Este punto es aun más crítico si consideramos problemas modernos en largos, ocupados y complejos centros de atención telefónica, que tienden no sólo a comunicar entre estados del país y continentes, sino también a trasladar los recursos de manera virtual entre un punto y otro, es decir, si en un centro de atención de un poblado pequeño se activa un servicio en la madrugada seguramente el centro de atención telefónica de ese lugar ya estará cerrado por lo que le contestaran en algún centro de atención telefónica que esté disponible, pero en un tiempo no muy lejano es posible que necesitemos el teléfono del restaurante de la esquina y nos contesten en otro país, ejemplo China, y nos den la información que necesitemos, todo esto es necesario incorporarlo en una adecuada asignación de personal a horarios de trabajo, para estar a la vanguardia de la tecnología.

Capítulo II.

MODELOS MATEMÁTICOS

"La llave del éxito en la vida es el conocimiento del valor de las cosas".

John Boyle O'Reilly

Resumen del capitulo

En este capítulo se presentan los modelos matemáticos empleados en la presente investigación: Programación Lineal, se dan sus características, su forma canónica y estándar, sus requisitos para la formulación de un problema y se ilustra con un modelo de programación lineal de la distribución del trabajo semanal de las operadoras telefónicas. Series de tiempo, se definen los conceptos básicos de las series de tiempo, se determinan cuales son los pasos necesarios para realizar series de tiempo: detectar ***outlier,*** son datos que se refieren a puntos de la serie que se escapan de lo normal, se detecta la ***tendencia,*** representa el comportamiento predominante de la serie, se determina la variación *estacional* que representa un movimiento periódico de la serie de tiempo, para la presente investigación la serie de tiempo esta dada por días. Se da un panorama de los tres modelos clásicos de la serie de tiempo: el aditivo, multiplicativo y mixto y cada modelo se expresará como suma o producto de tres componentes: tendencia, *estacional y* un término de error *aleatono. Todo* esto para poder predecir, que es estimar el futuro utilizando información del presente y del pasado. El conocimiento del futuro nos capacita para planificar, prever o prevenir. Análisis Combinatorio, su fórmula, propiedad y la explosión combinatoria a través de fórmulas y ejemplos con el principio de Dirichlet *que* muestra como tratar el problema en sus diversos enfoques, que ayudan a comprender la complejidad con la que nos estamos enfrentando.

1. PROGRAMACIÓN LINEAL

La programación lineal es el nombre de una de las ramas de la matemática aplicadas que maneja como resolver problemas de asignación de recursos limitados entre actividades competidoras de la mejor manera posible (óptima). Los problemas de la programación lineal tienen como característica distintiva que las funciones que representan el objetivo y las restricciones son lineales.

El modelo general de la programación lineal consiste en:

1. Función objetivo.
2. Restricciones funcionales.
3. Restricciones de no Negatividad

Función Objetivo: Puede ser de "Maximización" o de "Minimización".

La minimización de una función f(x), es matemáticamente equivalente a la maximización de la expresión negativa de ésta función, es decir:

Minimizar f(x) = Maximizar –f(x)

Restricciones funcionales:

Pueden ser: Menor o igual (≤), menos (-) mayor igual (≥);

Únicamente un signo ocurre para cada restricción.

Restricciones de no Negatividad: La incógnita o variables de decisión no pueden ser negativas ya que no tienen ningún sentido real, ya que no podemos decir, se requiere menos dos personas para realizar tal actividad.

A. Formas del modelo de Programación Lineal

Para poder resolver el modelo se deben considerar ecuaciones y como siempre están planteados como inecuaciones se deben considerar dos formas para los modelos de programación lineal, estos son:

Forma Canónica y Forma Estándar.

a) Forma Canónica del modelo de programación lineal

Las características de esta forma son:

a) la función objetivo es del tipo de *maximización.*

b) todas las restricciones funcionales son del tipo (≤)

c) todas las variables de *decisión son no negativas.*

El modelo general de la forma canónica es:

Maximizar $Z = \sum c_j x_i$

Sujeto a: $\sum a_{ij} x_j <= -b$; $i = 1,2,\ldots,m$

$x_i >= 0$; $j = 1,2,\ldots,m$

Cualquier modelo de programación lineal puede ponerse en la forma canónica por medio de las tres transformaciones siguientes:

1. La minimización de una función, f(x) es matemáticamente equivalente a la maximización de la expresión negativa de ésta función: - f(x)
2. Una desigualdad con signo (≥) puede cambiarse a una desigualdad con signo (≤) multiplicando a toda la desigualdad por -1.

Ejemplo: la restricción funcional: $4x_1 + 2\,x_2 \geq 15$

Es equivalente a: $-4x_1 - 2\,x_2 \leq 15$

3. Una ecuación puede ser remplazada por dos desigualdades con signos contrarios

Ejemplo: la ecuación: $4x_1 + 2x_2 = 15$

Es equivalente a: $4x_1$ +- $2x_2 \leq 15$ y $4x_1 + 2x_2 \geq 15$

También equivalente a: $4x_1 + 2x_2 \leq 15$ y $-4x_1 - 2x_2 \leq -15$

b) Forma Estándar del modelo de programación lineal

Las características de esta forma son:

a) la función objetivo es del tipo de *Maximización o **Minimización***.

b) todas las restricciones son ecuaciones excepto para las restricciones de no negatividad que permanecen como desigualdades.

c) todas las variables de *decisión son no negativas*.

El modelo general de la forma estándar es:

Optimizar $Z = c_j x_i$

Sujeto a: $a_{ij} x_j < = -b$; $i = 1,2,\ldots,m$

$x_i > = 0$; $j = 1,2,\ldots,m$

Las restricciones funcionales que están definidas como desigualdades pueden cambiarse a ecuaciones introduciendo en cada una restricciones a las variables de holgura, las cuales se suman si la restricción es (≤) o se restan si la restricción es (≥). El término independiente puede hacerse siempre positivo multiplicando a toda la ecuación por (-1) siempre que sea necesario.

B. Requisitos para la formulación de un problema de programación lineal.

1. **Función objetivo lineal bien definida**. Este objetivo puede servir para maximizar la contribución utilizando los recursos disponibles, o bien, puede producir el mínimo costo posible usando una cantidad limitada de factores productivos, o bien, puede determinar la mejor distribución de los factores productivos dentro de un cierto periodo.

2. **Caminos alternativos de acción**. Puede ser posible una selección entre diversas combinaciones de mano de obra y maquinaria automática, o bien, puede ser posible asignar capacidad de manufactura en una cierta relación para la manufactura de los productos de una empresa.

3. **La función objetivo lineal y las restricciones lineales deben expresarse matemáticamente**. La linealidad en la programación lineal es un término matemático que se usa para describir sistemas de ecuaciones simultáneas de primer grado que satisfagan a la función objetivo y a sus restricciones. Así como la función objetivo lineal debe expresarse por

medio de una ecuación, de la misma manera deben expresarse las restricciones lineales matemáticamente, por medio de ecuaciones o desigualdades.

4. **Las variables deben estar interrelacionadas.** Debe ser posible formular relaciones matemáticas entre las variables que describen el problema, es decir, las variables del problema deben estar interrelacionadas.

5. **Los recursos deben ser de aprovisionamiento limitado.** Los recursos deben ser finitos y económicamente cuantificables. Por ejemplo, cada planta tiene un número limitado de horas disponibles, las horas de mano de obra son finitas. Como el costo de la mano de obra directa tiene impacto sobre la utilidad, es también un factor económico.

C. Características de la programación lineal[23]

En el Modelo de programación lineal, las funciones objetivo y restricciones deben ser lineales. La linealidad implica que la programación lineal debe satisfacer dos propiedades: proporcionalidad y aditividad.

1. La **proporcionalidad** requiere que la contribución de cada variable de decisión en la función objetivo, y sus requerimientos en las restricciones, sea directamente proporcional al valor de la variable. Por ejemplo cuando en un modelo de ventas se conserva el precio por ventas al menudeo y al mayoreo, se conserva la proporcionalidad, sin embargo al ofrecer algún descuento cuando las ventas son mayores, la utilidad ya no será proporcional a las cantidades producidas.[24]

2. La **aditividad** estipula que la contribución total de todas las variables en la función objetivo y sus requerimientos en las restricciones sean la suma directa de las contribuciones o requerimientos en las restricciones o requerimientos individuales de cada variable. Por ejemplo si dos productos compiten por la misma parte de mercado en forma tal que un aumento de ventas de uno afecte negativamente al otro, ya no se satisface la propiedad de aditividad.

---

[23] RHEAULT, Jean Paul, ***Introducción a la teoría de decisiones con aplicaciones a la Administración***, Editorial Limusa México, D.F., p. 63

[24] Taha 2004, p. 13

El primer paso es la capacidad de expresar una función objetivo en términos matemáticos. El propósito del decisor es seleccionar esa alternativa A_i, la cual maximizará cierta medida de utilidad o minimizará cierta medida de pérdida; es decir, se optimizará alguna función, E, la cual mide la efectividad de las distintas alternativas posibles. En otras palabras, la efectividad que debe alcanzarse es una función de los cursos particulares de acción que deben tomarse. Simbólicamente, podemos escribir lo siguiente:

$E_i = f(A_i)$

En donde A_i representa un curso de acción factible.

La determinación de la definición y el método de medida de la función objetivo es el aspecto más difícil de ese proceso de resolución de los problemas de decisiones bajo certidumbre.

Una alternativa cuyos resultados son convenientes a todos los componentes del sistema es una decisión óptima; por lo contrario, una decisión que conviene a un cierto componente, con detrimento del conglomerado, es una decisión subóptima.

Por lo tanto, debe haber un conjunto de alternativas posibles, a fin de que se pueda escoger una solución que satisfaga la función objetivo determinada. También, los objetivos del sistema estudiado y las restricciones operantes se deben expresar en términos de ecuaciones o desigualdades lineales; la linealidad significa que tendremos un sistema de ecuaciones simultáneas de primer grado, o sea que pueden representarse gráficamente como líneas rectas.

La determinación de las restricciones operantes en la situación considerada se debe seleccionar una unidad apropiada para cada restricción y expresar la relación entre las variables y la restricción, generalmente en forma de desigualdad.

D. El modelo de asignación

Este modelo trata del problema que surge cuando se desea asignar a cada uno de los medios, a un número igual de requerimientos sobre una base de uno por uno. A este caso especial del problema general de la programación lineal se le conoce como el modelo de asignación.

Descripción: existen n requerimientos juntos con n medios de satisfacerlos; hay un cierto coeficiente de efectividad, e_{ij}, asociado con la asignación del medio i-ésimo que será el j-ésimo requerimiento, x_{ij}. Se requiere que ese $x_{ij} = 1$, si el medio i-ésimo ha de satisfacer el requerimiento j-ésimo, y que ese $x_{ij} = 0$, si el medio i-ésimo no se utiliza para satisfacer el requerimiento j-ésimo.

Puesto que un medio puede asociarse con solo un requerimiento el problema de asignación puede definirse matemáticamente como la optimización de esta función de efectividad:

$$E = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} e_{ij} \cdot x_{ij}$$

sujeto a las restricciones siguientes:

i) $\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1$, para $j = 1,2, \ldots,n$,

ii) $\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1$, para $i = 1,2, \ldots,n$,

El problema de asignación de personal se resuelve con Programación Lineal (PL), El creador de la PL, George B. Dantzig comento[25]:

> «Considere el problema de asignar 70 hombres a 70 empleos. Una 'actividad' consiste en asignar el i-ésimo hombre al j-ésimo empleo. Las restricciones son dos: en primer lugar hay 70 hombres, cada uno de los cuales debe asignarse a un puesto, y en segundo lugar, cada uno de los 70 puestos existentes debe estar ocupado. El nivel de una actividad puede ser 1, lo cual indica que está siendo usada, o 0, lo cual significa que no. En consecuencia hay 2 x 70 = 140 restricciones y 70 x 70 = 4900 actividades con 4900 variables correspondientes de decisión uno-cero. Por desgracia también hay factorial de 70 permutaciones o formas de hacer las asignaciones. El problema consiste en comparar estas factorial de 70 formas y elegir la que sea la óptima o 'mejor' según algún criterio previamente establecido.»

[25] Entrevista a George B. Dantzig publicada en The College Mathematical Journal, en marzo de 1986.

«En el ejemplo anterior, factorial de 70 es un número muy grande. A fin de tener una idea de qué tan grande es, supóngase que se hubiese tenido una computadora IBM del tipo main-frame en el instante en el que ocurrió el Big Bang hace quince millones de años. ¿Habría podido, entre ese entonces y ahora, examinar todas las soluciones posibles? ¡No! No obstante, supóngase que se hubiese tenido una computadora aun más poderosa, una que pudiese examinar mil millones de asignaciones por segundo. La respuesta seguiría siendo negativa. Aun si la Tierra se llenase con computadoras cuyas rapideces fueran de nanosegundos, todas ellas trabajando en paralelo, la respuesta aun sería no. Sin embargo, si existiesen diez Tierras, todas llenas con computadoras del tipo mencionado, todas programadas en paralelo desde el instante del Big Bang hasta que el Sol fuese una esfera fría, entonces quizás la respuesta podría ser sí. Lo notable es que el método Simplex, con la ayuda de una computadora moderna, puede resolver este problema en una fracción de segundo.»

El problema que tenemos es asignar 3283 operadoras (k) a 5000 turnos (n), una actividad consiste en asignar a la i-esima operadora al j-esimo turno. Las restricciones son: cada una de las 3283 operadoras puede ser asignadas a un turno, cada uno de los 5000 turnos puede o no estar ocupado y tener una o más operadoras. Por lo que las formas diferentes de hacer las asignaciones son:

$$\frac{(n-1+k)!}{k!(n-1)!}=\frac{(4999+3283)!}{3283!4999!}=2.0617\times 10^{2413}$$

y 5000 x 3283 = 16,415,000, es decir tendríamos, más de 16 millones de variables de decisión, por lo que incluso ni con PL podemos resolver por completo este problema.

Además la PL tiene diversas limitaciones, ya que la toma de decisiones se hace bajo condiciones de certeza y en la realidad no se conocen con certeza los valores de las variables, sin embargo al tener el escenario de toma de decisiones bajo condiciones de incertidumbre y tener un numero muy grande de variables, se ve la necesidad de incorporar nuevas herramientas para tener un mejor enfoque para tomar decisiones.

E. Aplicaciones administrativas de los modelos de la programación Lineal

Problema de la **Distribución del trabajo semanal de las operadoras**

La asignación de los días de descanso y de los días que laboran las trabajadoras
Contiene las siguientes restricciones:
Se requiere la demanda diaria de operadoras
Sólo trabajan 5 días a la semana
Los descansos pueden ser consecutivos o separados por lo que para obtener el número de combinaciones que se tienen que considerar es de la siguiente manera:
Fórmula, donde "n" son los días de la semana y "k" son los días de descanso

$$\left(\frac{n!}{k!}\right)=\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)=\left(\frac{7!}{2!(5!)}\right)=\left(\frac{6x7}{2!}\right)=21$$

a) Modelo en programación lineal

```
MIN     HOR_71 + HOR_72 + HOR_73 + HOR_74 + HOR_75 + HOR_76 + HOR_61
       + HOR_62 + HOR_63 + HOR_64 + HOR_65 + HOR_51 + HOR_52 + HOR_53 + HOR_54
       + HOR_41 + HOR_42 + HOR_43 + HOR_31 + HOR_32 + HOR_21
  SUBJECT TO
         2)   HOR_72 + HOR_73 + HOR_74 + HOR_75 + HOR_76 + HOR_62 + HOR_63
       + HOR_64 + HOR_65 + HOR_52 + HOR_53 + HOR_54 + HOR_42 + HOR_43 + HOR_32
       >=   35
         3)   HOR_71 + HOR_73 + HOR_74 + HOR_75 + HOR_76 + HOR_61 + HOR_63
       + HOR_64 + HOR_65 + HOR_51 + HOR_53 + HOR_54 + HOR_41 + HOR_43 + HOR_31
       >=   35
         4)   HOR_71 + HOR_72 + HOR_74 + HOR_75 + HOR_76 + HOR_61 + HOR_62
       + HOR_64 + HOR_65 + HOR_51 + HOR_52 + HOR_54 + HOR_41 + HOR_42 + HOR_21
       >=   35
         5)   HOR_71 + HOR_72 + HOR_73 + HOR_75 + HOR_76 + HOR_61 + HOR_62
       + HOR_63 + HOR_65 + HOR_51 + HOR_52 + HOR_53 + HOR_31 + HOR_32 + HOR_21
       >=   35
         6)   HOR_71 + HOR_72 + HOR_73 + HOR_74 + HOR_76 + HOR_61 + HOR_62
       + HOR_63 + HOR_64 + HOR_41 + HOR_42 + HOR_43 + HOR_31 + HOR_32 + HOR_21
       >=   35
         7)   HOR_71 + HOR_72 + HOR_73 + HOR_74 + HOR_75 + HOR_51 + HOR_52
       + HOR_53 + HOR_54 + HOR_41 + HOR_42 + HOR_43 + HOR_31 + HOR_32 + HOR_21
       >=   29
         8)   HOR_61 + HOR_62 + HOR_63 + HOR_64 + HOR_65 + HOR_51 + HOR_52
       + HOR_53 + HOR_54 + HOR_41 + HOR_42 + HOR_43 + HOR_31 + HOR_32 + HOR_21
       >=   26
  END
  GIN     21
```

b) Solución

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 46.00000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
HOR_71	0.000000	1.000000
HOR_72	0.000000	1.000000
HOR_73	11.000000	1.000000
HOR_74	9.000000	1.000000
HOR_75	0.000000	1.000000
HOR_76	0.000000	1.000000
HOR_61	2.000000	1.000000
HOR_62	11.000000	1.000000
HOR_63	0.000000	1.000000
HOR_64	2.000000	1.000000
HOR_65	2.000000	1.000000
HOR_51	9.000000	1.000000
HOR_52	0.000000	1.000000
HOR_53	0.000000	1.000000
HOR_54	0.000000	1.000000
HOR_41	0.000000	1.000000
HOR_42	0.000000	1.000000
HOR_43	0.000000	1.000000
HOR_31	0.000000	1.000000
HOR_32	0.000000	1.000000
HOR_21	0.000000	1.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	0.000000
3)	0.000000	0.000000
4)	0.000000	0.000000
5)	0.000000	0.000000
6)	0.000000	0.000000
7)	0.000000	0.000000
8)	0.000000	0.000000

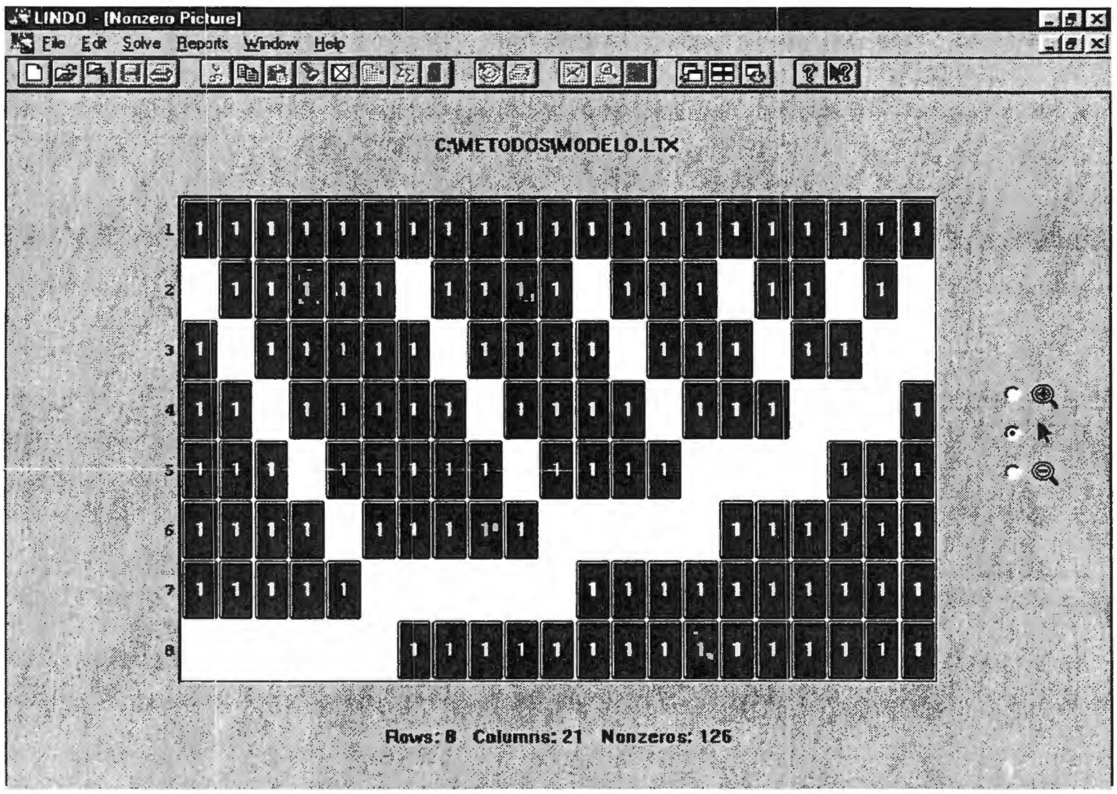
NO. ITERATIONS= 10

BRANCHES= 0 DETERM.= 1.000E 0

c) Comprobación de la solución

Turnos	Total Operadoras	lun	mar	mie	jue	vie	sáb	dom
HOR_73	11	11	11		11	11	11	
HOR_74	9	9	9	9		9	9	
HOR_61	2		2	2	2	2		
HOR_62	11	11		11	11	11		11
HOR_64	2	2	2	2		2	2	
HOR_65	2	2	2	2	2			2
HOR_51	9		9	9	9		9	9
	46	35	35	35	35	35	31	22

d) Representación del Modelo



e) Interpretación del Modelo

En la representación anterior las columnas (21) representan las variables del modelo que son iguales al número de combinaciones de dos días de descanso en la semana. La primera fila representa la función objetivo y las demás (7) son las restricciones.

Las variables no cero son 126 ya que son 21 turnos diferentes y como se labora 5 días a la semana dan un subtotal de 105 variables no cero mas las 21 de la función objetivo son las 126, donde la segunda fila representa el primer día de la semana (lunes), la tercera fila el martes y así sucesivamente hasta la octava fila que representa el séptimo día (domingo), es decir la primer columna (variable Hor_71) significa que descansa lunes y Domingo, la segunda columna (variable Hor_72) significa que descansa Martes y Domingo.

Partiendo de este modelo se puede realizar la distribución de operadoras cada 15 minutos, lo que daría un intervalo de 96 periodos al día.

2. SERIES DE TIEMPO

A. Conceptos básicos de series de tiempo
a) Introducción

Toda institución, ya sea la familia, la empresa o el gobierno, tiene que hacer planes para el futuro si ha de sobrevivir y progresar. Hoy en día diversas instituciones requieren conocer el comportamiento futuro de ciertos fenómenos con el fin de planificar, prever o prevenir[26].

La planificación racional exige prever los sucesos del futuro que probablemente vayan a ocurrir. La previsión, a su vez, se suele basar en lo que ha ocurrido en el pasado. Se tiene pues un nuevo tipo de inferencia estadística que se hace acerca del futuro de alguna variable o compuesto de variables basándose en sucesos pasados. La técnica más importante para hacer inferencias sobre el futuro con base en lo ocurrido en el pasado, es el ***análisis de series de tiempo***.

Son innumerables las aplicaciones que se pueden citar, en distintas áreas del conocimiento, tales como, en economía, física, geofísica, química, electricidad, en demografía, en marketing, en telecomunicaciones, en transporte, etc.

Series De Tiempo	***Ejemplos***
1. Series económicas:	- Precios de un artículo - Tasas de desempleo - Tasa de inflación - Índice de precios, etc.
2. Series Físicas:	- Meteorología - Cantidad de agua caída - Temperatura máxima diaria - Velocidad del viento (energía eólica) - Energía solar, etc.
3. Geofísica:	- Series sismologías
	- Tasas de crecimiento de la

[26] Arellano, M. (2001): "Introducción al Análisis Clásico de Series de Tiempo", [en línea] 5campus.com, Estadística <http://www.5campus.com/leccion/seriest> [10/04/2007]

4. Series demográficas:	población - Tasa de natalidad, mortalidad - Resultados de censos poblacionales
5. Séries de marketing:	- Series de demanda, gastos, ofertas
6. Series de telecomunicación:	- Análisis de señales
7. Series de transporte:	- Series de tráfico

Uno de los problemas que intenta resolver las series de tiempo es el de predicción. Esto es dado una serie {*x(t1),...,x(tn)*} nuestros objetivos de interés son describir el comportamiento de la serie, investigar el mecanismo generador de la serie temporal, buscar posibles patrones temporales que permitan sobrepasar la incertidumbre del futuro.

En adelante se estudiará como construir un modelo para explicar la estructura y prever la evolución de una variable que observamos a lo largo del tiempo. La variables de interés puede ser macroeconómica (índice de precios al consumo, demanda de electricidad, series de exportaciones o importaciones, etc.), microeconomía (ventas de una empresa, existencias en un almacén, gastos en publicidad de un sector), física (velocidad del viento en una central eólica, temperatura en un proceso, caudal de un río, concentración en la atmósfera de un agente contaminante), o social (número de nacimientos, matrimonios, defunciones, o votos a un partido político).

b) Definición de serie de tiempo

En muchas áreas del conocimiento las observaciones de interés son obtenidas en instantes sucesivos del tiempo, por ejemplo, a cada hora, durante 24 horas, mensuales, trimestrales, semestrales o bien registradas por algún equipo en forma continua.

Llamamos *Serie de Tiempo* a un conjunto de mediciones de cierto fenómeno o experimento registradas secuencialmente en el tiempo. Estas observaciones serán denotadas por $\{x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)\} = \{x(t) : t \in T \subseteq R\}$ con $x(t_i)$ el valor de la variable x en el instante t_i. Si T = Z se dice que la serie de tiempo es discreta y si T = R se dice que la serie de tiempo es continua. Cuando $t_{i+1} - t_i = k$ para todo $i = 1,\ldots,n-1$, se dice que la serie es equiespaciada, en caso contrario será no equiespaciada.

En adelante se trabajará con series de tiempo discreta, equiespaciadas en cuyo caso asumiremos y sin perdida de generalidad que: $\{x(t1), x(t2), ..., x(tn)\}= \{x(1), x(2), ..., x(n)\}$.

c) Primer paso al analizar cualquier serie de tiempo

El primer paso en el análisis de series de tiempo, consiste en graficar la serie. Esto nos permite detectar las componentes esenciales de la serie.

El gráfico de la serie permitirá:

a) Detectar Outlier: se refiere a puntos de la serie que se escapan de lo normal. Un outliers es una observación de la serie que corresponde a un comportamiento anormal del fenómeno (sin incidencias futuras) o a un error de medición.

Se debe determinar desde fuera si un punto dado es outlier o no. Si se concluye que lo es, se debe omitir o reemplazar por otro valor antes de analizar la serie.

b) Permite detectar tendencia: la tendencia representa el comportamiento predominante de la serie. Esta puede ser definida vagamente como el cambio de la media a lo largo de un periodo.

c) Variación estacional: la variación estacional representa un movimiento periódico de la serie de tiempo. La duración de la unidad del periodo es generalmente menor que un año. Puede ser un trimestre, un mes o un día.

Matemáticamente, podemos decir que la serie representa variación estacional si existe un número **s** tal que $x(t) = x(t + k{\cdot}s)$.

Las principales fuerzas que causan una variación estacional son las condiciones del tiempo, como por ejemplo:

1) en invierno las ventas de helado
2) en verano la venta de lana
3) exportación de fruta en marzo.

Todos estos fenómenos presentan un comportamiento estacional (anual, semanal, etc.)

d) Variaciones irregulares (componente aleatoria): los movimientos irregulares (al azar) representan todos los tipos de movimientos de una serie de tiempo que no sea tendencia, variaciones estacionales y fluctuaciones cíclicas.

B. Modelos clásicos de series de tiempo
a) Modelos de descomposición

Un modelo clásico para una serie de tiempo, supone que una serie $x(1), \ldots, x(n)$ puede ser expresada como suma o producto de tres componentes: tendencia, *estacionalidad* y un término de *error aleatorio*.

Existen tres modelos de series de tiempos, que generalmente se aceptan como buenas aproximaciones a las verdaderas relaciones, entre los componentes de los datos observados. Estos son:

1. Aditivo: $X(t) = T(t) + E(t) + A(t)$

2. Multiplicativo: $X(t) = T(t) \cdot E(t) \cdot A(t)$

3. Mixto: $X(t) = T(t) \cdot E(t) + A(t)$

Donde:

$X(t)$ serie observada en instante t

$T(t)$ componente de tendencia
$E(t)$ componente estacional
$A(t)$ componente aleatoria (accidental)

Una suposición usual es que $A(t)$ sea una componente aleatoria o ruido blanco con media cero y varianza constante.

Un modelo aditivo (1), es adecuado, por ejemplo, cuando $E(t)$ no depende de otras componentes, como $T(t)$, sí por el contrario la estacionalidad varía con la tendencia, el modelo más adecuado es un modelo multiplicativo (2). Es claro que el modelo 2 puede ser transformado en aditivo, tomando logaritmos. El problema que se presenta, es modelar adecuadamente las componentes de la serie.

b) Estimación de la tendencia

Supondremos aquí que la componente estacional $E(t)$ no está presente y que el modelo aditivo es adecuado, esto es:

$$X(t) = T(t) + A(t), \text{ donde } A(t) \text{ es ruido blanco.}$$

Hay varios métodos para estimar $T(t)$. Los más utilizados consisten en:

1) Ajustar la función del tiempo, como un polinomio, una exponencial u otra función suave de *t*.
2) Suavizar (o filtrar) los valores de la serie.
3) Utilizar diferencias.

i) Ajuste de una función

Las siguientes funciones se utilizan para ajustar las formas de las curvas de la información.

1. $T(t) = a + bt$	(Linéal)
2. $T(t) = a\, e^{bt}$	(Exponencial)
3. $T(t) = a + b\, e^{bt}$	(Exponencial modificada)
4. $T(t) = \beta_0 + \beta_{1t},\ldots,+ \beta_{mt}^{m}$	(Polinomial)
5. $T(t) = \exp(a + b(rt))$	(Gompertz $0 < r < 1$)

Funciones para ajustar la curva de la tendencia.

Nota:

1) la curva de tendencia debe cubrir un periodo relativamente largo para ser una buena representación de la tendencia a largo plazo.
2) La tendencia rectilínea y exponencial son aplicable a corto plazo, puesto que una curva S a largo plazo puede parecer una recta en un período restringido de tiempo.

ii) Suavizamiento. Filtros lineales

Una forma de visualizar la tendencia, es mediante suavizamiento de la serie. La idea central es definir a partir de la serie observada una nueva serie que suaviza los efectos ajenos a la tendencia (estacionalidad, efectos aleatorios), de manera que podamos determinar la dirección de la tendencia.

Promedios Móviles

El objetivo es eliminar de la serie las componentes estacionales y accidentales. Para una serie mensual con estacionalidad anual (s = 12), la serie suavizada se obtiene,

Nota: se suaviza cuando existen muchos cambios bruscos, movimientos irregulares.

c) Estimación de la estacionalidad

La estimación de la estacionalidad no sólo se realiza con el fin de incorporarla al modelo para obtener predicciones, sino también con el fin de eliminarla de la serie para visualizar otras componentes como tendencia y componente irregular que se pueden confundir en las fluctuaciones estacionales.

De acuerdo con los modelos de descomposición, se asume el siguiente modelo para *T(t),*

Estas series generadas a partir de la original por eliminación de la tendencia se denominan "*series de residuos*" y deberán contener predominantemente fluctuaciones estacionales. Para estimar la estacionalidad se requiere haber decidido el modelo a utilizar (mixto o aditivo), lamentablemente esto no es siempre claro, ya sea porque no contamos con información a priori para suponerlo o porque el gráfico no ha dejado evidencia suficientemente clara como para decidirnos por alguno de ellos. En tal situación se propone calcular ambas series residuales y elegir aquella cuyos valores correspondientes a una estación dada oscilen menos en torno a su promedio.

C. Predicciones

Predecir, es estimar el futuro utilizando información del presente y del pasado. El conocimiento del futuro nos capacita para planificar, prever o prevenir.

La idea es estimar $X(t)$ en un instante $n + k$ posterior al último dato observado en $t = n$, $k =$ 1,2,3,4,... (Trimestre, mes, etc.).

Resumen

Se llama Serie de Tiempo, a un conjunto de mediciones de cierto fenómeno o experimento registradas secuencialmente en el tiempo, por ejemplo a cada hora, mensualmente, trimestralmente, semestralmente, etc. En este método se trabajó con series de tiempo discreto, equiespaciadas en cuyo caso se asume que: $\{x(t_1), x(t_2), ..., x(t_n)\} = \{x(1), x(2), ..., x(n)\}$. Debido al carácter de introducción se restringió al caso de series de tiempo univariadas.

Al analizar una serie de tiempo, lo primero que se debe hacer es graficar la serie. Esto nos permite detectar las componentes esenciales de la serie. El gráfico de la serie permitirá: detectar Outlier, detectar tendencias, variación estacional, variaciones irregulares (o componente aleatoria).

Un modelo clásico para una serie de tiempo, puede ser expresada como suma o producto de tres componentes: *tendencia*, *estacional* y un término de *error aleatorio*. Existen tres modelos de series de tiempos. Estos son:

1. Aditivo: $X(t) = T(t) + E(t) + A(t)$
2. Multiplicativo: $X(t) = T(t) \cdot E(t) \cdot A(t)$
3. Mixto: $X(t) = T(t) \cdot E(t) + A(t)$

Con el fin de obtener un modelo, es necesario estimar la tendencia y la estacionalidad. Para estimar la tendencia, se supone que la componente estacional no está presente. La estimación se logra al ajustar a una función de tiempo a un polinomio o suavizamiento de la serie a través de los promedios móviles. Para estimar la estacionalidad se requiere haber decidido el modelo a utilizar (mixto o aditivo). Una vez estimada la tendencia y la estacionalidad se esta en condiciones de predecir.

Los métodos clásicos tienen la desventaja que se adaptan a través del tiempo, lo que implica que el proceso de estimación debe volver a iniciarse frente al conocimiento de un nuevo dato.

3. ANÁLISIS COMBINATORIO

A. CONCEPTOS BÁSICOS

a) Principio de Adición.

El principio general es: "Si dos operaciones son mutuamente excluyentes (es decir, si solo una de ellas puede ocurrir) y si la primera se puede hacer de *n* maneras diferentes y la segunda operación se puede hacer de *m* maneras diferentes, entonces hay *n* + *m* maneras de realizar la primera o la segunda operación."

b) Principio de Multiplicación.

"Si una operación se puede hacer de *n* maneras diferentes y si en cada caso, una segunda operación se puede hacer de *m* maneras diferentes, entonces hay $m \cdot n$ (m por n) maneras de realizar las dos operaciones"

B. SELECCIONES

Con frecuencia cada uno de los pasos en que se divide un proceso de recuento puede interpretarse como una elección o **selección** de ***k*** **objetos** elegidos entre los elementos de un conjunto de ***n*** **objetos.**

Dado un conjunto de "*n*" elementos puede ocurrir:

1. Que los elementos sean distintos; en este caso, a los grupos se les denomina **agrupaciones simples.**
2. Que algunos elementos sean iguales; en este caso, a los grupos se les denomina **agrupaciones con repetición**.

Considerando la naturaleza de los elementos (que sean iguales o distintos), las *agrupaciones* recibirán el nombre de *permutaciones o combinaciones simples* cuando no se repite ningún elemento y *permutaciones o combinaciones con repetición* cuando algún elemento se repite.

En general, calcular la fórmula $\binom{n}{k}$ implica calcular varios factoriales, lo que hace que no sea muy útil en la práctica. Un método alternativo viene dado por las siguientes propiedades:

Propiedad.

1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

2) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ ó $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

3) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

4) $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots \binom{n}{n} = 2^n$

5) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots (-1)^n \binom{n}{n} = 0$

6) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \dots + \binom{k}{k}$

7) $\binom{n+m}{k} = \binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \binom{n}{2}\binom{m}{k-2} \dots + \binom{n}{k}\binom{m}{0}$

El número de subconjuntos[27] que se forman a partir de los elementos de un conjunto con "n" elementos es 2^n.

[27] Cardano fue el que mostró este postulado, Vid. Nieto p.2

Un problema que dificulta la aplicación de las reglas del cálculo de probabilidades consiste en que a veces la simple enumeración de los resultados elementales de un experimento aleatorio es sumamente complicada. Se hace entonces necesario desarrollar algunas técnicas para enumeración.

Comenzaremos con la noción de *distinguibilidad*, que usaremos para distinguir un elemento de otro, ya sea por su atributo, característica o cualquier cosa que permita discernir entre un elemento y otro. Un ejemplo para ilustrar: tomemos dos cubos de madera.

Entonces, si se realiza el experimento consistente en seleccionar al azar dos cubos, resulta que el número de resultados elementales depende de que los dos cubos sean distinguibles o no:

a) Si no son distinguibles, hay un solo resultado elemental, a saber, "salio uno de los dos cubos";
b) Si son distinguibles, entonces los cubos pueden llamarse A y B, respectivamente, y hay dos resultados elementales: "salió el cubo A" y "salió el cubo B"

De la misma manera, si intentamos determinar en cuántas formas pueden arreglarse los dos cubos uno tras otro, resulta:

a) Si no son distinguibles, entonces cualquier forma de ordenarlos produce el mismo resultado, o sea que hay un solo arreglo posible;
b) Si son distinguibles, puede discernirse entre los dos arreglos AB y BA, que difieren sólo en el orden de sus elementos.

Si agrupamos un nuevo cubo a los dos que ya tenemos, nos interesa enumerar cuántos arreglos o disposiciones diferentes o distinguibles podemos formar; para ello debemos considerar si el nuevo cubo es distinguible o no de los anteriores.

Si el nuevo cubo es distinguible de los dos primeros, se le puede colocar en cualquiera de las siguientes posiciones: a) antes b) al centro c) al final. Es decir, lograremos necesariamente alguno de los siguientes arreglos:

partiendo de	obtenemos
AB	**C** A B A **C** B A B **C**
BA	**C** B A B **C** A B A **C**

O sea que cada uno de los arreglos formados con dos cubos distinguibles da lugar a 3 arreglos de 3 símbolos, correspondiendo uno a cada posible posición donde se le pueda colocar. Entonces, tenemos en total 2 x 3 = 6 arreglos distinguibles. Estos arreglos se conocen también con el nombre de permutaciones.

a) Permutaciones

De aquí podemos inferir el siguiente resultado general. Dados n símbolos distinguibles entre sí, designemos con P_n el número de permutaciones (o arreglos distinguibles) que pueden obtenerse a partir de ellos. Entonces:

Definición[28]: Un arreglo ordenado de t objetos distintos es llamado una **permutación**. El número total de maneras para ordenar n objetos distintos tomados k cada vez se designa por el símbolo P_k^n

Teorema 3.1 El número de símbolos diferentes es igual a $P_n = n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$ (el producto de los n primeros enteros positivos)[29]

Fórmula de **permutación** para n = k es :$P_n = n!$.

Demostración 3.1 Procedemos utilizando el principio de inducción. Supongamos que el teorema es válido para un entero particular n, es decir $P_n = n!$. Agreguemos un símbolo más, diferente

[28] Vid. Mendenhall

[29] Garza, Tomás; Elementos de cálculo de probabilidades, Universidad Nacional Autónoma de México;1990, p. 48

de los n que se tienen. Cualquier permutación de n + 1 posiciones posibles en un arreglo de n símbolos, a saber: al principio de todas, entre la 1ª y la 2ª, entre la 2ª y 3ª, etc. Es decir, cada una de la P_n permutaciones da lugar a n +1 al añadir el nuevo símbolo, y entonces hay un total $(n+1)P_n = (n+1)n! = (n+1)!$

Como, el teorema es válido para n=1, entonces es válido para cualquier valor finito de n.

Demostración 3.2 Una forma alternativa de ver el problema es considerar las n posiciones en que puede colocarse cada uno de los n símbolos y razonar como sigue: coloquemos cualquiera de ellos en la 1ª posición; la siguiente posición puede entonces ocuparse con cualquiera de los restantes n-1. Así existe n(n-1) posibles arreglos diferentes en las 2 primeras posiciones. Ocupadas estas dos, la tercera puede ocuparse con cualquiera de los n-2 símbolos restantes de modo que hay n (n-1)(n-2) arreglos diferentes en las 3 primeras posiciones y así sucesivamente. En total, pues habrá n(n-1)(n-2).....x 2 x 1=n!

Supongamos ahora que no todos los n símbolos son distinguibles. Para fijar las ideas, veamos primero el caso en que 2 de los símbolos son indistinguibles entre sí Entonces deberemos eliminar de las n! permutaciones aquellas que difieran sólo por el intercambio de la posición de los 2 símbolos iguales, ya que ellas serán indistinguibles.

En el planteamiento original, el intercambio de la posición de 2 símbolos da lugar a 2 permutaciones; al eliminar esta posibilidad (debido a la indistinguibilidad de estas últimas) el número de permutaciones originales debe dividirse entre 2, es decir, como si se agruparan las n! permutaciones en grupos de 2 que difieren una de otra sólo en la posición de los 2 símbolos que ahora son indistinguibles.

Por ejemplo, con los tres símbolos (a, a, c), tenemos tres arreglos diferentes, que resultan de agrupar las permutaciones que difieren sólo en la posición:

aac

aca

caa

A partir de esto se puede inferir[30]:

---

[30] Ibid, p. 49

Teorema 3.2 Si se tienen n símbolos, de los cuales k son indistinguibles entre sí, y los restantes n –k son diferentes (entre sí, y de los primeros k), entonces el número de arreglos distinguibles que pueden formarse con los n símbolos es $\frac{n!}{k!}$

Fórmula de **permutación** con un objeto k repetido: $\frac{n!}{k!}$

Demostración. Consideremos n símbolos diferentes y marquemos a k de ellos. Agruparemos ahora las permutaciones n! que pueden formarse de acuerdo con el siguiente criterio: las permutaciones que componen una clase difieren entre sí sólo en las posiciones que ocupan los k símbolos marcados; los no marcados ocupan todas ellas la misma posición. Cada clase contiene precisamente k! permutaciones, correspondientes a las diferentes formas de disponer dichos k símbolos. Hagamos ahora indistinguibles entre sí esos k elementos; entonces cada clase contiene arreglos indistinguibles entre sí, y el total de arreglos distinguibles es igual al número de clases formadas, o sea $\frac{n!}{k!}$.

Por lo que tenemos:

Teorema 3.3 Consideremos n símbolos, agrupados en r clases, las cuales contienen $k_1, k_2, \ldots, k_n$ símbolos, respectivamente, de modo que los elementos en cada clase sean indistinguibles entre sí, pero distintos de los elementos de las demás clases, y donde $k_1, k_2, \ldots, k_n = n$. Entonces el número de arreglos distinguibles que pueden formarse resulta ser: $\frac{n!}{k_1!\,k_2!..k_n!}$

Fórmula de **permutación** con k objetos **repetidos**: $\frac{n!}{k_1!\,k_2!..k_n!}$

Algunos ejemplos del resultado anterior son:

i. El número de permutaciones de 5 símbolos: a, b, c, d, e es 5! = 120;
ii. El número de arreglos distinguibles de 5 símbolos: a, a, b, c, d es 5!/2! = 60;
iii. El número de arreglos distinguibles de 5 símbolos: a, a, b, b, b, es 5!/2!3!=10.

b) Muestreo y Combinaciones

Supongamos ahora que tenemos un conjunto de n objetos diferentes, y queremos seleccionar, de entre ellos, un cierto número k. La colección de esos k objetos suele llamarse una muestra de tamaño k escogida del conjunto dado. Se plantea la siguiente pregunta: ¿cuántas muestras diferentes pueden escogerse?

Para contestar la pregunta es necesario especificar, primero, en qué forma se selecciona la muestra, y segundo. Lo que se entiende por muestras diferentes.

La selección de la muestra puede hacerse de manera que:

a) Una vez seleccionado un objeto, se elimina de la población y no puede volver a ser seleccionado; o bien
b) Una vez seleccionado un objeto, sólo se registra cuál es y se reintegra a la población, de modo que podría ser nuevamente seleccionado.

En el primer caso, se dice que la muestra se selecciona sin reemplazo (o sin reposición) y en el segundo que la selección es con reemplazo (o con reposición).

Por otra parte, una muestra será diferente de otra de acuerdo con uno de los dos criterios básicos:

a) Una muestra es diferente de otra si hay al menos un elemento que está en una de las dos pero no en la otra;
b) Una muestra es diferente si se cumple el criterio a) o bien si teniendo exactamente los mismos elementos, éstos fueron obtenidos en diferente orden.

En el caso b) se dice que las muestras son ordenadas, en tanto que en el caso a) el orden no importa.

Examinaremos ahora cada uno de los casos posibles. Si la muestra se elige sin reemplazo y el orden no importa, entonces podemos determinar el número de muestras posibles como sigue: el problema es equivalente a considerar el número de arreglos distinguibles en la población considerándola dividida en 2 clases de objetos indistinguibles; uno, de tamaño k, que forman los elegidos en la muestra y el otro, de tamaño n – k, que son los no elegidos. Habrá, pues, tantas selecciones diferentes como arreglos distinguibles en la población bajo esta hipótesis. Así se tiene:

Definición[31]: El número de **combinaciones** de n objetos tomados k cada vez se denota por el símbolo C_k^n

Teorema 3.4 El número de muestras diferentes de tamaño k, donde el orden no importa, que puede seleccionarse sin reemplazo de una población de tamaño n, es igual a $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Fórmula de **combinaciones** es: $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ y se designa usualmente con el símbolo $\binom{n}{k}$, y se le llama coeficiente binomial.

Es claro que para obtener de aquí el número de muestras ordenadas de tamaño k, basta considerar que cada muestra donde el orden no importa genera k! muestras ordenadas diferentes, correspondientes a las k! permutaciones de los elementos de la muestra. Dicho número es entonces

$$k!\binom{n}{k} = k!\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)...(n-k+1)$$

o sea, el producto de k factores a partir de n, donde cada uno es igual al precedente disminuido en 1. Este producto se suele denominar "k-ésima potencia factorial de n" y se designa con el símbolo $(n)_k$ esto es:

Fórmula[32]: de **Permutación** con n elementos tomados de k en k_ $(n)_k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

[31] Vid. Mendenhall

[32] También es conocida la formula como Variaciones sin Repetición. Vid Teoría de las Combinaciones

c) Variaciones con repeticiones

Definición[33]: Se llaman arreglos con repetición de m elementos tomados de n en n a las sucesiones de n términos que pueden formarse con los m elementos, entendiendo que cada uno de ellos puede aparecer repetido. El número de **repeticiones** de n objetos tomados k cada vez se denota por el símbolo VR_k^n

Supongamos ahora una selección con reemplazo. Entonces, el primer elemento seleccionado puede ser cualquiera de n, y el segundo también, debido a que en la segunda selección se tienen de nuevo todos los elementos originalmente disponibles.

Razonando en la misma forma que cuando se hizo la demostración 3.2, vemos que, como el primer elemento se puede elegir de n maneras y el segundo también, hay n x n = n^2 maneras diferentes de seleccionar los primeros 2 elementos. Sin dificultad, entonces tenemos otro teorema.

Teorema 3.5 El número de muestras ordenadas de tamaño k que pueden obtenerse de una población de n elementos es n^k.

Fórmula de **Variación** con **repetición** de n elementos distintos tomados de k en k es:

$VR_{n,k} = n^k$

Es evidente, por la forma de enumeración que usamos, que se trata de muestras ordenadas, ya que hemos contado separadamente aquellas que difieren en el orden de los elementos solamente. La determinación del número de muestras obtenidas con reemplazo y donde el orden no importa requiere, más atención.

Consideremos los n elementos de la población, uno a continuación del otro. Una muestra k de ellos, obtenida con reemplazo, contendrá r_1 veces el primer elemento, r_2 veces el segundo, etc. y r·n veces el último, donde $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son enteros no negativos y tales que $r_1+r_2+\ldots+r_n = k$. El problema equivale a encontrar todas las combinaciones de números $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ cuya suma sea igual a k. Una combinación particular especifica una muestra de tamaño k, donde el orden no importa, al indicar cuántas veces contiene esa muestra a cada uno de los elementos de la población.

[33] Vid. José H. Nieto, "***Teoría de las Combinatoria***" p. 15

La situación puede imaginarse como sigue: tenemos n casilleros (uno por cada elemento de la población) y k bolitas (el total de elementos en la muestra). Se trata de distribuir las k bolitas en los n casilleros, permitiendo que haya más bolitas en un casillero cualquiera, así como también puedan quedar casilleros vacíos. Al hacer la distribución el número de bolitas que quede en cada casillero indica cuántas veces el correspondiente elemento de la población fue seleccionado en la muestra.

Ejemplo: 7 casilleros y 10 bolitas

1	2	3	4	5	6	7

❶❷❸❹❺❻❼❽❾❿

Dos posibles distribuciones de 10 bolitas en 7 casilleros.

●		●●	●	●●	●	●●●

●●		●●		●●●	●●	●

El número de distribuciones posibles de las k bolitas en los n casilleros es igual al número de múltiples n-adas $(r_1,r_2,\ldots,r_n)$ cuya suma sea igual a k, y por lo tanto, igual al número de muestras de tamaño k, donde el orden no importe, que pueden obtenerse con reemplazo de una población de tamaño n.

¿Cuantas formas de distribuir las bolitas hay? Para contestar, consideramos el siguiente esquema: si dibujamos las paredes de los n casilleros como rayitas verticales, entonces una distribución cualquiera puede representarse gráficamente con un arreglo de n+1 rayitas verticales (las paredes de n casilleros contiguos) y k bolitas, con la única restricción de que en la primera y en la última posición queden rayitas, que son los extremos de los casilleros. Así por ejemplo, el arreglo |●●| |●●●| se refiere a 3 casilleros y 5 bolitas, de las cuales 2 están en el primero y 3 en el ultimo, quedando el segundo vació.

Cualquier arreglo se obtiene, pues, mediante un reacomodo de la n-1 rayitas intermedias en las n-1 + k posiciones disponibles (puesto que hay n-1 posiciones correspondientes a las rayitas y k correspondientes a las bolitas).

Podemos ahora invocar el teorema 3.3 para determinar el número de arreglos diferentes. En efecto, tenemos n-1+k símbolos, divididos en una clase de n-1 que son indistinguibles entre sí, y otra clase de k, también indistinguible entre sí. El número de arreglos distinguibles es, según el teorema 3.3 $\frac{(n-1+k)!}{k!(n-1)!}$. Así obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.6 El número de muestras de tamaño k pueden obtenerse, con reemplazo, de una población de n elementos, y donde el orden no importa, es igual a

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n-1+k)!}{k!(n-1)!}$$

<u>Fórmula</u> de **combinación** con k objetos repetidos: $\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n-1+k)!}{k!(n-1)!}$

Podemos ahora resumir los resultados anteriores en la siguiente tabla:

Agrupaciones	Tipo	¿Importa orden?	¿Pueden repetirse?	En cada agrupación...	**FÓRMULA**
PERMUTACIONES O VARIACIONES	sin repetición	SI	NO	k < n	$P_k^n = (n)_k = n(n-1)...(n-k+1)$ $P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$
	con repetición		SI	n < k, n > k	$VR_{n,k} = n^k$
PERMUTACIONES	sin repetición	SI	NO	n = k	$P_n = n!$
	con repetición		SI		$PR_{n,k} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!...k_n!}$
COMBINACIONES	sin repetición	NO	NO	k<=n	$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $C_k^n = P_k^n$ / k!
	con repetición		SI		$CR_k^n = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n-1+k)!}{k!(n-1)!}$

Tabla 3.1 Número de muestras de tamaño k que pueden obtenerse de una población de n elementos.

Pautas para la resolución de problemas

- Si en cada agrupación figuran <u>*sólo algunos*</u> de los elementos disponibles, *importando el orden* de colocación de éstos, entonces es un problema de **variaciones**.
- Si en cada agrupación figuran <u>*todos*</u> los elementos disponibles, *importando su orden* de colocación, entonces se trata de un problema de **permutaciones**.

- Si en cada agrupación figuran sólo algunos de los elementos disponibles, sin importar el orden de colocación de éstos, entonces estamos ante un problema de **combinaciones**.

C. Aplicación Administrativa con: "El Principio de Dirichlet"

(*Principio de las Casillas*)

El objetivo de este tema es observar como se trabaja con dos conjuntos: objetos y casilleros, que en el proyecto será: personas y turnos respectivamente, esto se hará familiarizándose con un principio elemental llamado "*Principio del Palomar*", "*Principio de los Casilleros*", o bien, "*Principio de Dirichlet*", en honor a Peter Dirichlet, quien lo postuló originalmente.

Principio del Palomar, de los Casilleros o de Dirichlet (primera versión)

Si tenemos m palomares, y en ellos duermen $m + 1$ palomas, entonces hay al menos un palomar donde duerme más de una paloma.

Este principio lo podemos extender no sólo a $m + 1$ "palomas" sino a cualquier número mayor que m. Para irnos familiarizando con el principio, en vez de usar "palomas" y "palomares" comenzaremos a usar "objetos" y "casilleros" que es como habitualmente se usa este principio.

Para aplicar el principio veamos un ejemplo simple para fijar ideas:

Ejemplo: Si en una sala hay 13 o más personas, entonces existe un par (quizá más) de personas cuyo cumpleaños cae el mismo mes.

Es relativamente simple darse cuenta que lo anterior es cierto, pues como un año tiene 12 meses y hay más personas que meses, por obligación en algún mes estarán de cumpleaños 2 o más personas.

Principio del Palomar, de los Casilleros o de Dirichlet (segunda versión)

Si se tiene un conjunto de n objetos, repartidos en m casilleros y $n > m$ (hay más objetos que casilleros) entonces hay al menos un casillero donde hay 2 o más objetos.

Si bien es cierto esta versión es bastante más general, aún podemos generalizarla un poco más, de la siguiente manera:

Principio del Palomar, de los Casilleros o de Dirichlet (versión general)

Si se tiene un conjunto de n objetos, repartidos en m casilleros y $n > km$, con k un número natural, entonces hay al menos un casillero donde hay $(k + 1)$ o más objetos.

Demostración del Principio del Palomar. Supongamos que tenemos n objetos repartidos en m casilleros con $n > km$, y supongamos por contradicción que el principio es falso, es decir, que no hay casilleros con $(k + 1)$ o más objetos.

Esto quiere decir que todos los casilleros tienen a lo más *k* objetos (*k* o menos objetos). Entonces el número de objetos que hay en los casilleros será igual a $N1 + N2 + \ldots + Nm$, siendo *Ni* el número de objetos del casillero *i*. Pero ya sabemos que en cada casillero hay *k* objetos o menos, luego: $N1 \leq k$, $N2 \leq k, \ldots, N{\cdot}m \leq k$.

Sumando las ecuaciones anteriores obtenemos que: $N1 + N2 + \ldots + Nm \leq km$, es decir, el número total de objetos en los casilleros es menor o igual a $k{\cdot}m$ ($n \leq km$).

Pero esto es una contradicción ya que $n > k{\cdot}m$. Luego, nuestra suposición de que el principio era falso es incorrecta. Por lo tanto, el Principio del Palomar es cierto. Ahora nos concentraremos en resolver algunos problemas que, a priori, pudieran ser muy difíciles de resolver sin esta nueva herramienta que acabamos de introducir.

PARTICIONES

Casos que se presentan con el principio de Dirichlet.

CASO	k OBJETOS	n CAJONES	INCLUYE CAJONES VACÍOS	VALOR n = 3 k = 5	Agrupaciones Interpretadas como:	FÓRMULA
1	≠	=	NO	25	Números Stirling de segunda clase	$S_2(n+1,k) = S_2(n,k-1)+k\ S_2(n+1,k)$
2	≠	≠	NO	150	Números Stirling de segunda clase por k factorial	$K!S_2(n+1,k)$
3	≠	=	SI	41	Sumatoria de 1 a k de números Stirling 2ª. Clase	$\sum_{i=1}^{k} \mathbf{S2(n,k)}$
4	≠	≠	SI	243	Variaciones con Repetición	$VR_{n,k} = n^k$
5	=	≠	SI	21	Combinaciones con Repeticiones	$CR_k^n = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n-1+k)!}{k!(n-1)!}$
6	=	≠	NO	6	Combinaciones	$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-2)!}$

Los casos se harán para n cajones = 3 y k bolitas = 5

Condicionantes:

Las bolitas pueden ser iguales (=) o distinguibles (≠)

Los cajones pueden ser iguales (=) o distinguibles (≠)

Los cajones pueden quedar todos ocupados o algunos vacíos.

Nótese dentro de cada cajón, cuando las bolitas son distinguibles el orden no importa por lo que se empleara la combinación para calcular el número de arreglos que pueden llegar a tener.

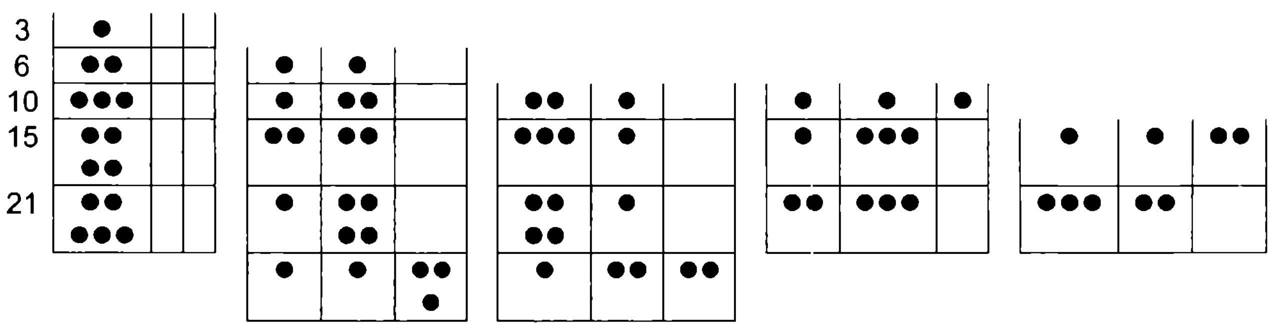
Debido a la sencillez del problema, pero a la complejidad de la solución representaremos con bolitas a las personas y a los turnos con cajones, en donde cada cajón puede tener más de una bolita, como se vio estamos ante el PRINCIPIO DE DIRICHLET, para poder representar gráficamente tendremos

n = 3 cajones

k = 5 bolitas.

Agrupaciones posibles de 5 objetos en 3 cajones:

Configuraciones de combinaciones de 1 a 5 bolitas en 3 cajones:



El número que aparece a la izquierda son las configuraciones, nótese que por cada configuración se pueden realizar tres más por lo que a la izquierda aparece multiplicado por tres cada grupo de cajones.

Con el que vamos a trabajar es con la última configuración 5 bolitas y 3 cajones, se observa que 5 configuraciones tienen cajones vacíos y sólo 2 están completamente ocupados, en otras palabras para esta agrupación tenemos las siguientes **permutaciones por cada configuración**:

a) {(5), { }, { }} = 3

b) {(4), (1), { }}= 6

c) {(3), (2), { }}= 6

d) {(2), (2), (1)}= 3

e) {(3), (1), (1)}= 3

Para a) Separando los elementos se tienen 5 elementos en un cajón y dos cajones vacíos a esto se le conoce como ciclos, es decir 5 elementos en tres ciclos o tres agrupaciones: por lo que se tienen 3 permutaciones diferentes, es decir: {(5), (0), (0)}; {(0), (5), (0)} y {(0), (0), (5)}

para b) se tienen 4 elementos en un cajón, un elemento en otro cajón y otro cajón vació; por lo que se forman 6 permutaciones diferentes, estas son: {(4),(1),(0)}; {(0),(4),(1)}; {(4),(0),(1)}; {(1),(4),(0)}; {(0),(1),(4)} y {(1),(0),(4)}; y así sucesivamente para c) d) y e)

Para el conjunto: b) {(4), (1), { }}; la manera de representar si tomamos en cuenta que las bolitas son indistinguibles es:

i. $\{\{b_1,b_2,b_3,b_4\},\{ b_5\},\{ \}\}$;

Sin embargo, si las bolitas son distinguibles, entonces se pueden efectuar permutaciones para obtener diferentes arreglos, Said[34] dice:

> "Un ciclo de longitud K se puede escribir de K maneras distintas, permutando cíclicamente sus elementos"

$(b_1, b2,\ldots b_k)= (b_2,\ldots b_k, b1)=\ldots= (b_k, b1,\ldots b_{k-1})$

Por lo tanto para representar las bolitas distinguibles seria:

ii. $\{\{b_{residuo(i+1,5)},b_{residuo(i+2,5)},b_{residuo(i+3,5)},b_{residuo(i+4,5)}\},\{ b_i\},\{ \}\}$; para $(0 \leq i \geq 4)$

Esta forma de representar nos da un panorama más amplio de como se están manejando los objetos sin embargo para facilitar la nomenclatura[35] sólo se señalara el número de elementos que se encuentre en el ciclo, en este caso en el cajón.

---

[34] Nieto Said, ***Teoría combinatoria*** p. 66

[35] Ibid, p. 60

PARTICIONES

Números de Stirling de primera clase.

Dado el grupo de permutaciones $\mathbf{S_n}$ sobre un conjunto de **n** elementos, se podría plantear la cuestión de cuántas permutaciones se pueden descomponer exactamente en k ciclos. A este número **S1(n,k)** así definido lo llamaremos **Número de Stirling de primera clase**.

Por ejemplo, el número S1(4,3) = 6 significa que hay seis permutaciones de 4 elementos distinguibles (por ejemplo. en el conjunto 1234) que se pueden descomponer en 3 ciclos[36]. Serían estas: (1)(2)(34), (1)(3)(24), (1)(4)(23), (2)(3)(14), (2)(4)(13) y (3)(4)(12).

Se puede definir S1(n,0) con n>0 como 0, y aceptaremos que S1(0,0)=1 y que S1(0,n)=0.

Es claro que se cumple que S1(n,n)=1 pues sólo obtendríamos la permutación identidad, y es fácil demostrar que S1(n,1)=(n-1)!

Los primeros números de Stirling de primera clase son

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
0	1								
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	2	3	1					
4	0	6	11	6	1				
5	0	24	50	35	10	1			
6	0	120	274	225	85	15	1		
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1	
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1

[36] Para este caso el ciclo es equivalente a un contenedor, es decir, como son 3 ciclos serían 3 contenedores ocupados ninguno puede quedar vacio.

La propiedad fundamental de estos números, y que permite generarlos en una tabla, es la siguiente:

S1(n,r) = (n-1)*S1(n-1,r)+S1(n-1,r-1)

Se puede comprobar en la tabla.

Es interesante preguntarse cuántas particiones distintas de k conjuntos se pueden definir en un conjunto de n elementos. El resultado se denomina como número de Stirling de segunda clase y lo representaremos por S2(n,k). Así, el número S2(5,4) representará el número de particiones distintas en cuatro conjuntos disjuntos que se pueden definir en un conjunto de 5 elementos. Por ejemplo, en el conjunto {1,2,3,4,5} se pueden definir estas particiones de 4: {1}{2}{3}{45}, {1}{2}{4}{35}, {1}{2}{5}{34}, {1}{3}{4}{25}, {1}{3}{5}{24}, {1}{4}{5}{23}, {2}{3}{4}{15}, {2}{3}{5}{14}, {2}{4}{5}{13}, {3}{4}{5}{12}. En total 10, como se puede comprobar en la tabla de Stirling de segunda clase.

Es claro que S2(n,0)=0 y que S2(n,1)=S2(n,n)=1 porque sólo hay una forma de partir un conjunto de n elementos en conjuntos de n elementos (él mismo) y también una sola forma de partirlo en n subconjuntos (los de un solo elemento).

La propiedad que permite generar estos números es:

S2(n,r) = r*S1(n-1,r)+S1(n-1,r-1)

Se puede comprobar esta propiedad en la siguiente tabla de números de Stirling de segunda clase:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

El número total de particiones que admite un conjunto, independientemente de su estructura, se llama **número de Bell** del conjunto y se representa por B(n). Es evidente que se pueden deducir de los anteriores sumando toda una fila. Los primeros números de Bell son, por tanto:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975

a) Caso 1. Para k objetos diferentes en n cajones indistinguibles y no vacíos

Las configuraciones que se toman en cuenta para este caso son: {(3), (1), (1)} y {(2), (2), (1)} ya que las otras configuraciones tienen al menos un cajón vació, con lo que se tiene por inducción es:

i. $\{(3)_1,(1)_2,(1)_3\} = \left(C_3^5 = 10 \bullet C_2^{5-3} = 2 \bullet C_1^1 = 1\right) = 20$

ii. $\{(2)_1,(2)_2,(1)_3\} = \left(C_1^5 = 5 \bullet C_2^{5-1} = 3 \bullet C_2^2 = 2\right) = 30$

Ahora con la fórmula de Permutaciones con repeticiones tenemos:

i. $\{(3)_1, (1)_2, (1)_3\} = \dfrac{5!}{3! \bullet 1! \bullet 1!} = \dfrac{120}{6} = 20$

ii. $\{(2)_1, (2)_2, (1)_3\} = \dfrac{5!}{2! \bullet 2! \bullet 1!} = \dfrac{120}{4} = 30$

Nótese los subíndices identifican los cajones, de esta manera estos valores son para cajones distinguibles por lo que hay que dividir entre 2 cada resultado por que se esta repitiendo un valor en cada caso (1)(1) y (2)(2) respectivamente, por lo que se tiene

i. {(3),(1),(1)} = 10

ii. {(2),(2),(1)} = 15

Para este caso tenemos un total de 25 arreglos, lo cual coincide con los números de Stirling.

b) Caso 2. Para k objetos diferentes en n cajones distinguibles y que estén ocupados, no vacíos

Las configuraciones que se toman en cuenta para este caso, al igual que el caso anterior son: $\{(3)_1,(1)_2,(1)_3\}$ y $\{(2)_1,(2)_2,(1)_3\}$ ya que las otras configuraciones tienen al menos un cajón vació, con lo que se tiene por inducción es:

i. $\{(3)_1,(1)_2,(1)_3\} = \left(C_3^5 = 10 \bullet C_2^{5-3} = 2 \bullet C_1^1 = 1\right) = 20$

ii. $\{(2)_1,(2)_2,(1)_3\} = \left(C_1^5 = 5 \bullet C_2^{5-1} = 3 \bullet C_2^2 = 2\right) = 30$

Ahora con la fórmula de Permutaciones con repeticiones tenemos:

iii. $\{(3)_1,(1)_2,(1)_3\} = \dfrac{5!}{3! \bullet 1! \bullet 1!} = \dfrac{120}{6} = 20$

iv. $\{(2)_1,(2)_2,(1)_3\} = \dfrac{5!}{2!\bullet 2!\bullet 1!} = \dfrac{120}{4} = 30$

Como cada configuración tiene 3 combinaciones se multiplica por 3 en cada caso con lo que tenemos:

3(20) + 3(20) = 3(50) = 150.

Esto coincide si se toma en cuenta los números de Stirling:

$$k!S_2(5{,}3) = 6(25) = 150$$

c) Caso 3. Para k objetos diferentes en n cajones indistinguibles y que pueden quedar vacíos

Para este caso se toman todas las configuraciones de 5 bolitas en 3 cajones:

i. $\{(5),\{\ \},\{\ \}\} = 1;\quad C_5^5 = 1$

ii. $\{(4),(1),\{\ \}\} = 5;\quad \left|\left(C_4^5 = 5\right)\bullet\left(C_1^{5-4} = 1\right)\right| = 5$

iii. $\{(3),(2),\{\ \}\} = 10;\quad \left|\left(C_3^5 = 10\right)\bullet\left(C_2^{5-1}\right) = 1\right| = 10$

iv. $\{(2),(2),(1)\} = 15;$ (ver caso 1)

v. $\{(3),(1),(1)\} = 10;$ (ver caso 1)

Por lo que al sumar las configuraciones tenemos un total de 41.

Este resultado es igual a sumar todos los números de Stirling para n=3 de 1 a k, es decir:

$$\sum_{i=1}^{k} \mathbf{S2(n,k)} = 1 + 15 + 25 = 41$$

d) Caso 4. Para k objetos diferentes en n cajones distinguibles y que pueden quedar vacíos

Para este caso se toman todas las configuraciones de 5 bolitas en 3 cajones:

$\{(5), \{\ \}, \{\ \}\} = 1;\quad C_5^5 = 1$

$\{(4), (1), \{\ \}\} = 5;\quad \left|\left(C_4^5 = 5\right)\bullet\left(C_1^{5-4} = 1\right)\right| = 5$

$\{(3), (2), \{\ \}\} = 10;\quad \left|\left(C_3^5 = 10\right)\bullet\left(C_2^{5-1}\right) = 1\right| = 10$

$\{(2), (2), (1)\} = 30;\quad \dfrac{5!}{2!\bullet 2!\bullet 1!} = \dfrac{120}{4} = 30$

$\{(3), (1), (1)\} = 20;\quad \dfrac{5!}{3!\bullet 1!\bullet 1!} = \dfrac{120}{6} = 20$

Ahora bien para cada configuración como los cajones son distinguibles se multiplican por el número de combinaciones por cada configuración, por lo que se tiene:

Configuración	Combinaciones por Objetos	Permutaciones por Cajones	Total
(5)	1	3	3
(4)(1)	5	6	30
(3)(2)	10	6	60
(2)(2)(1)	20	3	60
(3)(1)(1)	30	3	90
Total	66	21	**243**

Por lo que se tiene un total de 243 arreglos diferentes para este caso.

Demostración: Para la primera bolita (la número 1) se puede asignarla en cualquiera de los tres cajones

❶	❶	❶

= 3 arreglos

❶		
	❶	
		❶

Para la segunda bolita pude asignársele en cualquiera de los tres cajones independiente de la primera bolita

❷	❷	❷

= 3x3 arreglos

❶❷		
❶	❷	
❶		❷
❷	❶	
	❶❷	
	❶	❷
❷		❶
	❷	❶
		❶❷

Y así sucesivamente hasta completar las cinco bolitas asignadas a cada uno de los tres cajones por lo que tendríamos $3^5 = 243$.

Es decir, es equivalente a la fórmula de Variaciones con repeticiones:

$VR_{n,k} = n^k = 3^5 = 243$.

Aquí es importante considerar que los cajones son la base y el exponente son las bolitas, es decir: **#cajones$^{\#\text{bolitas}}$**.

e) Caso 5. Para k objetos iguales en n cajones distinguibles y que pueden quedar vacíos

Para este caso se toman todas las configuraciones de 5 bolitas en 3 cajones y se toman las permutaciones de las configuraciones en los cajones:

a) {(5),{ },{ }} = 3 $P_1^3 = 3$

b) {(4),(1),{ }} = 6 $P_2^3 = 6$

c) {(3),(2),{ }} = 6 $P_2^3 = 6$

d) {(2),(2),(1)} = 3 $P_1^3 = 3$

e) {(3),(1),(1)} = 3 $P_1^3 = 3$

Obsérvese que para los objetos iguales ya no se hace otro cálculo, ya que en cada agrupación de cada cajón no se pueden hacer más arreglos; por lo que el resultado es la suma de las configuraciones y nos da un total de 21 arreglos diferentes para este caso.

Este resultado es directo con la Fórmula:

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n-1+k)!}{k!(n-1)!} = \binom{7}{5} = \frac{(7)!}{5!(2)!} = 7 \bullet 3 = 21$$

f) Caso 6. Para k objetos iguales en n cajones distinguibles y que queden ocupados, no vacíos

Para este caso se toman sólo las configuraciones que están ocupadas todos sus cajones de 5 bolitas en 3 cajones y se toman las permutaciones de las configuraciones en los cajones:

i. {(2), (2), (1)} = 3;· $P_1^3 = 3$

ii. {(3), (1), (1)} = 3; $P_1^3 = 3$

Como en el caso previo, los objetos son iguales, por lo que ya no se hace otro cálculo, ya que en cada agrupación de cada cajón no se pueden hacer más arreglos; por lo que el resultado es la suma de las configuraciones y nos da un total de 6 arreglos diferentes para este caso.

Este resultado es directo con la Fórmula:

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-2)!} = \binom{4}{2} = 6$$

Se hace notar que en este caso exclusivamente se intercambiaron los valores de n y k para tomar la población de manera adecuada para la fórmula.

g) Resumen de resultados:

CASO	**k** OBJETOS	**n** CAJONES	CAJONES VACÍOS	VALOR n = 3 k = 5	VALOR n = 100 k = 10	VALOR n = 5000 k = 3000	Agrupaciones Interpretadas como:	FÓRMULA
1	$\neq$	=	NO	25		No Aplica (N.A.)	Números Stirling de segunda clase	$S_2(n+1,k) = S_2(n,k-1)+k\ S_2(n+1,k)$
2	$\neq$	$\neq$	NO	150		N.A.	Números Stirling de segunda clase por k factorial	$K!S_2(n+1,k)$
3	$\neq$	=	SI	41		---	Sumatoria de 1 a k de números Stirling 2ª. Clase	$\sum_{i=1}^{k} \mathbf{S2(n,k)}$
4	$\neq$	$\neq$	SI	$3^5=243$	$100^{10}=(10^2)^{10}=10^{20}$	$5000^{3000}=(5\cdot10^3)^{3000}$ $5^{3000}x10^{9000}$	Variaciones con Repetición	$VR_{n,k} = n^k$
5	=	$\neq$	SI	$\binom{7}{5} = \frac{7_{[3]}}{5!} =$ 21	$\binom{109}{10} = \frac{109_{[100]}}{10!}$ $=42.6 \times 10^{12}$	$\binom{7999}{3000} = \frac{7999_{[5000]}}{3000!}$	Combinaciones con Repeticiones	$CR_k^n = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n-1+k)!}{k!(n-1)!}$
6	=	$\neq$	NO	6	N.A.	N.A.	Combinaciones	$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-2)!}$

D. Aplicaciones administrativas con: "Horarios de trabajo"

El objetivo de este tema es observar como se trabaja con un sólo conjunto: casilleros, que en el proyecto serán: horarios, esto se hace con la finalidad de establecer el adecuado manejo en el análisis combinatorio, para dimensionar el trabajo que se tiene que realizar.

a) Representación de los horarios de trabajo

En un centro de telefónico se tienen jornadas de trabajo de 8 horas. Hablemos particularmente del Horario que empieza a las 7am y tiene término a las 3pm; se desea *saber cuántas diferentes posibilidades hay de acomodar los descansos* que se les conceden a las operadoras telefónicas.

Horario: 7 a 15 hrs.									
	7	8	9	10	11	12	13	14	
1 descanso	✓								
		✓							
			✓						
				✓					
					✓				
						✓			
							✓		
								✓	8 Turnos

Tabla 1. Horarios posibles teniendo 1 descanso.

Horario: 7 a 15 hrs.									
	7	8	9	10	11	12	13	14	
2 descansos	✓	✓							
	✓		✓						
	✓			✓					
	✓				✓				
	✓					✓			
	✓						✓		
	✓							✓	7 Turnos
		✓	✓						
		✓		✓					
		✓			✓				

		✓				✓			
		✓					✓		
		✓						✓	6 Turnos
			✓	✓					
			✓		✓				
			✓			✓			
			✓				✓		
			✓					✓	5 Turnos
				✓	✓				
				✓		✓			
				✓			✓		
				✓				✓	4 Turnos
					✓	✓			
					✓		✓		
					✓			✓	3 Turnos
						✓	✓		
						✓		✓	2 Turnos
							✓	✓	1 Turnos
									28 Turnos

Tabla 2. Horarios posibles teniendo 2 descansos:

Total de horarios con uno o dos descansos: 36 Horarios .

Lo anterior se puede resolverse con el método que acabamos de ejemplificar anteriormente o inclusive deducirlo mentalmente, *la situación se complica cada que se incrementa el número de descansos por jornada,* por el hecho de que se pudieran programar los descansos seguidos, intercalados, dos juntos y uno separado, entre otras opciones.

b) Fórmula

Para dar solución de manera más sencilla y rápida a este tipo de problemáticas donde se quiere conocer la cantidad posible de combinaciones de entre n elementos eligiendo sólo k de ellos utilizamos una técnica de conteo que se conoce como Análisis Combinatorio.

(2.1) La fórmula es: $_{n}C_{k} = \left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)$

Comprobando los resultados anteriores

(2.2) $${}_8C_1 = \left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right) = \left(\frac{8!}{1!(8-1)!}\right) = \left(\frac{8}{1!}\right) = 8$$

(2.3) $${}_8C_2 = \left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right) = \left(\frac{8!}{2!(8-2)!}\right) = \left(\frac{8x7}{2!}\right) = 28$$

El intervalo de tiempo para atender las llamadas telefónicas es de 15 minutos durante todo el día, al tener la jornada laboral 8 horas de trabajo y descansos de 1 a 4 en intervalos de 15 minutos, para obtener el número de combinaciones que se tienen que considerar es de la siguiente manera:
Fórmula, donde "n" son las horas de la jornada y "k" son los descansos, por lo que: n=8 y k=4:

(2.4) $$\begin{pmatrix} n! \\ k! \end{pmatrix} = \left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right) = \left(\frac{8!}{4!(8-4)!}\right) = \left(\frac{8x7x6x5}{4!}\right) = 70$$

Es decir podemos programar 70 jornadas diferentes con 4 descansos en ese turno.[37]

---

[37] Tomando en cuenta sólo 8 horas y cuatro descansos, estos descansos pueden ser de 15 minutos cada uno o bien uno de 30 minutos, dos de 15 minutos y otro de una hora; y también se considera a la hora como fija sin división, por que si no el valor de n = 8 horas, crecería a n = 32 cuartos de hora.

Tenemos las siguientes cifras:

Jornada	Descansos	Horarios	Horarios al día
8 horas	1 de quince minutos	8	768
8 horas	2 de quince minutos	28	2688
8 horas	3 de quince minutos	56	5376
8 horas	4 de quince minutos	70	6720
Total		162	15552

Los turnos al día se obtienen de multiplicar los horarios por 96 que son los intervalos de quince minutos que se forman al día.

c) Propiedad

Si consideramos la jornada de 10 horas con diez descansos y tomamos todas las combinaciones nos da un resultado de 2^{10} o sea 1,024,

Esto es tomando[38]

$$(2.5) \qquad 1+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\ldots+\binom{10}{10}=2^{10}$$

Sin embargo esto solo es valido si se toman las horas completas para realizar los descansos, es decir no se puede tomar descanso a las 9:15, 9:30 o 9:45 porque los descansos son de cada 15 minutos por lo que las horas debemos transformarlas en los mismos periodos es decir la combinación adecuada es

$$(2.6) \qquad {}_{40}C_{10} = 847{,}660{,}528$$

Ahora si en la jornada se descansa el intervalo más amplio que se tiene es de 3 horas, por lo que la jornada sería de 10 horas; de esta manera se puede percibir que si consideramos los intervalos de quince minutos al día, para esta jornada tenemos:

[38] PARZE, Emanuel ***Teoría Moderna de Probabilidades y sus aplicaciones***, Ed. Limusa, p. 55

n = 40 // ya que 10 horas por 4, (por cada quince minutos)

k = 12 // ya que 3 horas por 4

$$(2.7) \quad {}_{40}C_{12} = \left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right) = \left(\frac{40!}{12!(40-12)!}\right) = \left(\frac{40!}{12!(28)!}\right) = 5{,}586'853{,}480$$

Por lo tanto para una sola jornada de 7 horas de trabajo con 3 horas de descanso se forman más de 5 mil millones de turnos,

d) Explosión Combinatoria

Ahora bien aunque este termino no se encuentra definido dentro de la literatura estadística, sin embargo, varios autores lo señalan[39]; en este trabajo lo tomaremos como el número de arreglos que se forman al combinar diversos eventos dando como resultado enormes cantidades de arreglos; el resultado de la combinación también se puede emplear de forma recursiva en la misma fórmula.

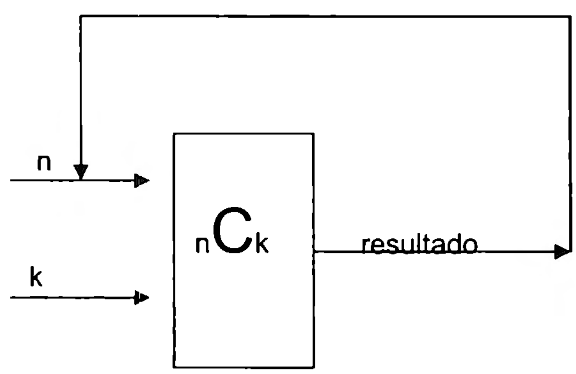


Figura 15 Flujo de la Explosión Combinatoria

Esto es si tomamos los turnos que van a ser representativos, es decir que nos van a servir para nuestro modelo ya que no tenemos tanto personal en cada centro de atención telefónica, supongamos que podemos tomar un máximo de 50 turnos, con 10 horas y 4 descansos, se tendría lo siguiente:

[39] Vid. Rusell p. 22

$$(2.8)\quad {}_{({}_{40}C_4)}C_{50}=\frac{\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)!}{50!\left(\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)-50\right)!}=\frac{\left(\frac{40!}{4!(40-4)!}\right)!}{50!\left(\left(\frac{40!}{4!(40-4)!}\right)-50\right)!}=$$

$$\frac{\left(\frac{37*38*39*40}{24}\right)!}{50!\left(\left(\frac{37*38*39*40}{24}\right)-50\right)!}=\frac{91390!}{50!(91340)!}=3.5978x10^{183}$$

En la ecuación (2.9) nos podemos percatar que la combinación de la combinación, nos lleva a un valor muy grande, que ya no es posible analizar uno por uno.

Ahora supongamos que podemos tomar un máximo de 50 turnos, con 10 horas y 7 descansos, se tendría lo siguiente:

$$(2.9)\quad {}_{({}_{40}C_7)}C_{50}=\frac{\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)!}{50!\left(\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)-50\right)!}=\frac{\left(\frac{40!}{7!(40-7)!}\right)!}{50!\left(\left(\frac{40!}{7!(40-7)!}\right)-50\right)!}=$$

$$\frac{\left(\frac{34*35*36*37*38*39*40}{5040}\right)!}{50!\left(\left(\frac{34*35*36*37*38*39*40}{5040}\right)-50\right)!}=\frac{18'643{,}560!}{50!(18'643{,}510)!}=1.1049x10^{299}$$

Ahora supongamos que podemos tomar un máximo de 50 horarios, con 10 horas y 12 descansos, se tendría lo siguiente:

$$(2.10)\quad ({}_{40}C_{12})C_{50}=\frac{\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)!}{50!\left(\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)-50\right)!}=\frac{\left(\frac{40!}{12!(40-12)!}\right)!}{50!\left(\left(\frac{40!}{12!(40-12)!}\right)-50\right)!}=$$

$$\frac{\left(\frac{29*30*31*32*33*34*35*36*37*38*39*40}{479{,}001{,}600}\right)!}{50!\left(\left(\frac{29*30*31*32*33*34*35*36*37*38*39*40}{479{,}001{,}600}\right)-50\right)!}=\frac{5'586{,}853{,}480!}{50!(5'586{,}853{,}430)!}=$$

$$= \frac{\prod_{i=5586853430}^{5586853480} i}{50!} = \frac{1.2751*10^{497}}{50!} = \frac{1.2751*10^{497}}{3.04141*10^{64}} = 4.1941\times10^{432}$$

En la ecuación (2.10) es un valor tan alto que incluso en una calculadora científica no alcanza a desplegar este número tan grande.

Con esta información ya podemos observar que los componentes que se están reflejando son: horarios, descansos y la elección de las mejores combinaciones de estos, para los horarios con descansos se van a considerar sólo 5000, ya que estos son los más representativos y además ya están avalados por el sindicato, si de estos se vuelven a seleccionar los 67 horarios con sus descansos, más adecuados para la demanda requerida. Por lo que tenemos la siguiente combinación:

$$(2.11)\quad {}_{5000}C_{67} = \left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right) = \left(\frac{5000!}{67!(5000-67)!}\right) = \left(\frac{5000!}{12!(4933)!}\right) = \mathbf{1.1916x10^{153}}$$

El tiempo que se requiere para resolver un problema puede ser lineal o exponencial, resolver un problema mediante un algoritmo que requiera un tiempo lineal resulta razonable, pero un problema de tiempo exponencial es aquel que para alguna entrada de tamaño N, lleva un tiempo proporcional a 2^N, como mínimo[40]. Esto significa, por ejemplo, que no se puede garantizar que un algoritmo de tiempo exponencial funcione con problemas de tamaño 100 o mayores, ya que no se puede esperar la ejecución de un algoritmo que lleva 2^{100} pasos, sin tener en cuenta la velocidad de la computadora[41]

---

[40] Los resultados que se presentan no cambia si se sustituye el 2 por cualquier número $\alpha > 1$.

[41] Para comprender este dato tan grande consideremos los segundos que tiene el año que son 31'536,000 para realizar los 2^{100} pasos, se requiriera realizar 2^{75} pasos por segundo; en 100 años se requiriera realizar 2^{68} pasos por segundo; y por último si empleáramos cada segundo en 10,000 años se requiriera realizar 2^{61} pasos por segundo.

Como dato adicional se cree que el ajedrez procede de la India (200-700 EC) con el nombre de **"chatrng"**, y que su creador los ideó para entretener al rey, a quién le pidió como recompensa un grano de trigo por la primera casilla, dos por la segunda, cuatro por la tercera hasta cubrir las 64 de que consta el tablero. Resultaba que hecho el cálculo se descubrió que los graneros del imperio de 16.384 ciudades de 4.080 ganaderos no hubieran bastado para contener la cantidad de trigo pedida, pues equivalía a un cubo de más de un kilómetro de lado a lado, la *e) Ejemplo*

Ejemplo real[42]. En el centro de atención telefónica de Ciudad Obregón hay 12 posiciones de tráfico, que son los lugares donde las operadoras atienden las llamadas telefónicas recibidas por los clientes, hay 15 operadoras (**k**) y son 100 turnos (**n**) que se consideran para esta ciudad. ¿Cuántas maneras diferentes de asignar a las operadoras en los turnos se tienen?

Asignación considerando operadoras distinguibles:

$nk=100^{15}= 1.0\times10^{30}$

Asignación considerando operadoras indistinguibles:

$$(2.12) \qquad \frac{n-1+k)!}{k!(n-1)!}=\frac{114!}{15!99!}=2.0842\times10^{18}$$

Asignación primero turnos y después operadoras:

Como sólo hay 15 operadoras, se eligen de los 100 turnos, la combinación de los 15 turnos más representativos, es decir los que se adapten mejor al centro de llamadas:

$$(2.13) \qquad \frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{100!}{15!85!}=2.5334\times10^{17}$$

Una vez que se tienen los 15 mejores turnos:

$$(2.14) \qquad \frac{n-1+k)!}{k!(n-1)!}=\frac{29!}{15!14!}=7.7559\times10^{7}$$

Por lo que se tiene:

(2.15) $2.5334\times10^{17}+7.7559\times10^{7}= 2.5334\times10^{17}$

cantidad exacta de granos son 2^{64}, con esto podemos comprender la cantidad de trabajo que representa aún para la computadora

[42] Como dijo Goethe: "Un noble ejemplo hace fáciles las acciones difíciles"

Aquí podemos percatarnos que si tenemos un número muy grande, al momento de sumar miles de millones a una cantidad tan grande, queda expresada de la misma manera, lo que se intenta explicar es que es correcta la igualdad expresada en la ecuación (2.15).

CONCLUSIÓN

Al momento de resolver un problema tan sencillo como el que esta citado arriba, al tener 15 operadoras, que pueden ser distinguibles, es decir (Erika, Conchita, Lupita, etc.) o bien pueden ser indistinguibles, es decir (operadora1, operadora2, operadora3,...,operadora15), afectando considerablemente entre si se pueden o no distinguir, a lo largo del proyecto trabajaremos con operadoras indistinguibles, y los horarios si son distinguibles ya que estos están establecidos. A pesar que con las operadoras indistinguibles se reduce considerablemente el número de posibles asignaciones a 2.08×10^{18} , con respecto a la distinguibles, todavía es número muy grande para valores tan pequeños de n y k; es evidente que conforme crecen los valores de n y k, las asignaciones se vuelven mucho más grandes. Al respecto Russell señala:

> "La incapacidad para manejar la '**explosión combinatoria**' fue una de las principales criticas que se hicieron a la IA en el informe Ligthhill[43], informe en el que se basó la decisión del gobierno británico de retirar la ayuda a las investigaciones sobre IA…";

Lo que deseo manifestar con este comentario es que si no tenemos una manera adecuada de enfrentar la explosión combinatoria no se puede resolver de manera adecuada el problema.

[43] Lighthill (1973). Artificial Inteligente: A general survey. Inb Lighthill, J. Sutherland, N.S. Needham, R. M., Longuet-Higgins, H.C. and Michael, D., editors, Artificial Intelligence: A paper Symposium. Science Research Council of Great Britain, London, Cit por Stuart Russell ***Inteligencia Artificial un enfoque*** moderno Ed. Prentice Hall 1996, p. 22

Capítulo III.

ALGORITMOS GENÉTICOS

"Saber y saberlo demostrar, es valer dos veces".

Baltazar Gracián

Resumen del capitulo

En este capítulo se describen los antecedentes de los Algoritmos genéticos (AG) iniciando en los años 50's hasta las conferencias de encuentros internacionales sobre AG, se dan los conceptos básicos para operar los AGs: selección, cruza y mutación. Se manifiesta la metodología empleada por los AGs; se listan los diversos métodos de selección: elitista, proporcional a la población por rueda de la ruleta, por escalada entre otras y se muestran los métodos de cambio: mutación y cruza; se señalan los fundamentos matemáticos de los AG y para concluir se presentan algunos métodos que se pueden utilizar en la implementación de los algoritmos genéticos, para denotar su diversificación y la forma de compararlos empleando la herramienta de power play, aunque estos métodos no se utilizaran debido a que se realizará una exploración exhaustiva, posteriormente se manejan las diferentes representaciones para un mismo problema, se explicará la importancia de emplear un algoritmo genético para la presente investigación.

1. ANTECEDENTES

A finales de los 50 y principios de los 60, aparecieron los primeros ejemplos de lo que hoy podríamos llamar algoritmos genéticos (AG para abreviar) programados en computadoras por biólogos evolutivos que buscaban explícitamente realizar modelos de aspectos de la evolución natural. A ninguno de ellos se le ocurrió que esta estrategia podría aplicarse de manera más general a los problemas artificiales, pero esto no tardaría en llegar[44]: "La computación evolutiva estaba definitivamente en el aire en los días formativos de la computadora electrónica".

---

[44] Mitchell, Melanie. ***An Introduction to Genetic Algorithms***. MIT Press, 1996. p. 2

En 1962, investigadores como G.E.P. Box, G.J. Friedman, W.W. Bledsoe y H.J. Bremermann habían desarrollado independientemente algoritmos inspirados en la evolución para optimización de funciones y aprendizaje automático, pero sus trabajos generaron poca reacción. En 1965 surgió un desarrollo más exitoso, cuando Ingo Rechenberg, entonces de la Universidad Técnica de Berlín, introdujo una técnica que llamó estrategia evolutiva, aunque se parecía más a los trepa colinas que a los algoritmos genéticos. En esta técnica no había población ni cruzamiento; un padre mutaba para producir un descendiente, y se conservaba el mejor de los dos, convirtiéndose en el padre de la siguiente ronda de mutación[45].Versiones posteriores introdujeron la idea de población. Las estrategias evolutivas todavía se emplean hoy en día por ingenieros y científicos, sobre todo en Alemania.

El siguiente desarrollo importante en el campo vino en 1966, cuando L.J. Fogel, A.J. Owens y M.J. Walsh introdujeron una técnica en América la que llamaron programación evolutiva. En este método, las soluciones candidatas para los problemas se representaban como máquinas de estado finito sencillas; al igual que en la estrategia evolutiva de Rechenberg, su algoritmo funcionaba mutando aleatoriamente una de estas máquinas simuladas y conservando la mejor de las dos[46][47]. También al igual que las estrategias evolutivas, hoy en día existe una formulación más amplia de la técnica de programación evolutiva que todavía es un área de investigación en curso. Sin embargo, lo que todavía faltaba en estas dos metodologías era el reconocimiento de la importancia del cruzamiento.

En 1975 apareció el trabajo fundamental en el campo de los algoritmos genéticos con la publicación del libro[48] "Adaptación en Sistemas Naturales y Artificiales", basado en investigaciones y artículos anteriores de Holland y de colegas de la Universidad de Michigan, estas investigaciones eran desde 1962, el trabajo de John Holland sobre sistemas adaptativos estableció las bases para desarrollos posteriores; y lo que es más importante, Holland fue también el primero en proponer explícitamente el cruzamiento y otros operadores de recombinación. Este libro fue el primero en presentar sistemática y rigurosamente el concepto

---

[45] Haupt, Randy y Sue Ellen Haupt. ***Practical Genetic Algorithms***. John Wiley & Sons, 1998. p. 146

[46] Mitchell, Melanie. ***An Introduction to Genetic Algorithms***. MIT Press, 1996. p. 2

[47] Cfr. Goldberg, David. ***Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning***. Addison-Wesley, 1989. p. 105

[48] Cfr, otros autores como Goldberg, 1986, lo atribuyen a otro libro *"La teoría genética de la selección natural", del autor Fisher.*

de sistemas digitales adaptativos utilizando la mutación, la selección y el cruzamiento, simulando el proceso de la evolución biológica como estrategia para resolver problemas. El libro[49] también intentó colocar los algoritmos genéticos sobre una base teórica firme introduciendo el concepto de esquema[50]. Ese mismo año, la tesis de Kenneth De Jong estableció el potencial de los AGs demostrando que podían desenvolverse bien en una gran variedad de funciones de prueba, incluyendo paisajes de búsqueda ruidosos, discontinuos y multimodales[51].

A mediados de los 80's, estos trabajos fueron fundadores y establecieron un interés más generalizado en la computación evolutiva, por lo que los algoritmos genéticos se estaban aplicando en una amplia variedad de áreas, desde problemas matemáticos abstractos como el "problema de la mochila" (bin-packing) y la coloración de grafos hasta asuntos tangibles de ingeniería como el control de flujo en una línea de ensamble, reconocimiento y clasificación de patrones y optimización estructural[52].

Al principio, estas aplicaciones eran principalmente teóricas. Sin embargo, al seguir proliferando la investigación, los algoritmos genéticos migraron hacia el sector comercial, al cobrar importancia con el crecimiento exponencial de la potencia de computación y el desarrollo de Internet. Hoy en día, la computación evolutiva es un campo floreciente, y los algoritmos genéticos están "resolviendo problemas de interés cotidiano"[53] en áreas de estudio tan diversas como la predicción en la bolsa y la planificación de la cartera de valores, ingeniería aeroespacial, diseño de microchips, bioquímica y biología molecular, y diseño de horarios en aeropuertos y líneas de montaje. La potencia de la evolución ha tocado virtualmente cualquier campo que uno pueda nombrar, modelando invisiblemente el mundo que nos rodea de incontables maneras, y siguen descubriéndose nuevos usos mientras la investigación sigue su curso. Y en el corazón de todo esto se halla nada más que la simple y poderosa idea de

---

[49] Mitchell, Melanie. ***An Introduction to Genetic Algorithms***. MIT Press, 1996. p.3

[50] Cfr. Haupt, Randy y Sue Ellen Haupt. ***Practical Genetic Algorithms***. John Wiley & Sons, 1998. p.147

[51] Goldberg, David. ***Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning***. Addison-Wesley, 1989. p. 107

[52] Ibid. p. 128

[53] Haupt, Randy y Sue Ellen Haupt. *Practical Genetic Algorithms*. John Wiley & Sons, 1998. p. 147

Charles Darwin: que el azar en la variación, junto con la ley de la selección, es una buena técnica de resolución de problemas y de aplicación práctica.

En 1985 se celebra la primera conferencia ICGA'85 Conferencia Internacional sobre Algoritmos Genéticos, esta conferencia se sigue celebrando bianualmente.

2. DEFINICIÓN

Los algoritmos genéticos (AGs) son métodos adaptativos que pueden usarse para resolver problemas de búsqueda y optimización. Están basados en el proceso genético de los organismos vivos. A lo largo de las generaciones, las poblaciones evolucionan en la naturaleza de acuerdo con los principios de la selección natural y la supervivencia de los más fuertes, postulados por Darwin.

Por imitación de este proceso, los algoritmos Genéticos son capaces de ir creando soluciones para problemas del mundo real. La evolución de dichas soluciones hacia valores óptimos del problema depende en buena medida de una adecuada codificación de las mismas. No sería conveniente la utilización de algoritmos genéticos en las siguientes situaciones:

- Si conocemos la función de optimización[54].
- Si el problema está muy delimitado y se presta a un tratamiento analítico (funciones de una variable).
- Si la función es suave y convexa.
- Si el espacio es limitado, entonces es mejor enumerar todas las soluciones posibles.

Un **algoritmo genético** consiste en una función matemática o una rutina de software que toma como entradas a los parámetros iniciales y retorna como salidas cuales de ellos deben generar descendencia para la nueva generación.

Algunas versiones más complejas de algoritmos genéticos generan un ciclo iterativo que directamente toma a la especie (el total de los ejemplares) y crea una nueva generación que reemplaza a la antigua una cantidad de veces determinada por su propio diseño. Una de sus características principales es la de ir perfeccionando su propia heurística en el proceso de

[54] Nota: sin embargo aunque se conozca la función optima, pero si se tienen demasiadas variables si es recomendable emplear AG.

ejecución, por lo que no requiere largos períodos de entrenamiento especializado por parte del ser humano, principal defecto de otros métodos para solucionar problemas, como los Sistemas Expertos.

La aplicación más común de los algoritmos genéticos ha sido la solución de problemas de optimización, en donde han mostrado ser muy eficientes y confiables. Sin embargo, no todos los problemas pudieran ser apropiados para la técnica, y se recomienda en general tomar en cuenta las siguientes características del mismo antes de intentar usarla:

- Su espacio de búsqueda (i.e., sus posibles soluciones) debe estar delimitado dentro de un cierto rango[55].
- Debe poderse definir una función de aptitud (función ajuste) que nos indique cómo es de buena o mala es una cierta respuesta.
- Las soluciones deben codificarse de una forma que resulte relativamente fácil de implementar en la computadora.

El primer punto es muy importante, y lo más recomendable es intentar resolver problemas que tengan espacios de búsqueda discretos aunque éstos sean muy grandes. Sin embargo, también podrá intentarse usar la técnica con espacios de búsqueda continuos, pero preferentemente cuando exista un rango de soluciones relativamente pequeño.

La **función de aptitud** es la función objetivo de nuestro problema de optimización. El algoritmo genético únicamente maximiza, pero la minimización puede realizarse fácilmente utilizando el recíproco de la función de maximización (debe cuidarse, por supuesto, que el recíproco de la función no genere una división por cero). Una característica que debe tener esta función es que tiene que ser capaz de "castigar" a las malas soluciones, y de "premiar" a las buenas, de forma que sean estas últimas las que se propaguen con mayor rapidez.

La **codificación** más común de las soluciones es a través de cadenas binarias, aunque se han utilizado también números reales y letras. El primero de estos esquemas ha gozado de mucha popularidad debido a que es el que propuso originalmente Holland, y además porque resulta muy sencillo de implementar.

[55] Ver Rusell p. 22

3. CONCEPTOS BÁSICOS

Los algoritmos genéticos ocupan el lugar central dentro de la computación evolutiva, las razones son tanto teóricas como prácticas, siendo las más importantes:

- Los algoritmos genéticos constituyen el paradigma más completo de la computación evolutiva, esto es, resumen de modo natural, todas las ideas fundamentales de dicho enfoque.
- Son muy flexibles, es decir, pueden adoptar con facilidad nuevas ideas, generales o específicas, que surjan dentro del campo de la computación evolutiva. Además se pueden hacer híbridos con otros paradigmas y enfoques, aunque no tengan ninguna relación con la computación evolutiva.
- Los algoritmos genéticos son el paradigma con mayor base teórica de entre las herramientas de la computación evolutiva. Además, dicha base teórica es sencilla en su desarrollo y con grandes posibilidades de ampliación.
- De entre todos los paradigmas de la computación evolutiva son los que menos conocimiento específico necesitan para su funcionamiento, y en consecuencia, los más versátiles. Pero es que además pueden incorporar conocimiento específico con poco esfuerzo adicional.
- Son fácil de implementar en computadoras con capacidades medias, proporcionando resultados aceptables, en cuanto a precisión y recursos empleados, para una gran cantidad de problemas difícilmente de resolver por otros métodos.
- Existe una gran cantidad de ensayos empíricos que proporcionan operadores, parámetros e implementaciones específicas para una amplia gama de problemas.

Después de enumerar estas características podríamos definir los algoritmos genéticos, de forma general, como "métodos estocásticos de búsqueda ciega de soluciones cuasi-óptimas[56]. En ellos se mantiene una población que representa un conjunto de posibles soluciones, la cual

[56] Refiérase al termino cuasi-óptimo como el hecho de tener la solución óptima sin llegar a tener la mejor de las soluciones, por lo que no se utiliza casi-optima o casi-adecuada, por que en este sentido estaríamos señalando soluciones no tan malas.

es sometida a ciertas transformaciones con las que se trata de obtener nuevos candidatos, y un proceso de selección sesgado en favor de los mejores candidatos".

Se dice que es la búsqueda ciega porque no se dispone de ningún conocimiento específico del problema, de manera que la búsqueda se basa exclusivamente en los valores de la función objetivo. Es también una búsqueda codificada, ya que **no se trabaja directamente sobre el dominio del problema, sino con representaciones de sus elementos**; búsqueda múltiple, porque busca simultáneamente entre un conjunto de candidatos; y búsqueda estocástica, por ser referida tanto a las fases de selección como a las de transformación, con lo que se obtiene control sobre el factor de penetración de la búsqueda.

Todo esto hace que los algoritmos genéticos proporcionen una mayor robustez a la búsqueda, esto es, más eficiencia sin perder generalidad.

Goldberg comenta lo siguiente:

> "Los algoritmos genéticos manejan variables de decisión o de control representadas como cadenas con el fin de explotar similitudes entre cadenas de altas prestaciones. Otros métodos tratan habitualmente con las funciones y sus variables de control directamente. Dado que los algoritmos genéticos operan en el nivel de código, son difíciles de engañar aun cuando la función sea difícil para los enfoques tradicionales.
>
> Los algoritmos genéticos trabajan con una población; muchos otros métodos trabajan con un único punto. De este modo, los algoritmos genéticos encuentran seguridad en la cantidad. Al mantener una población de puntos bien adaptados se reduce la probabilidad de alcanzar un falso óptimo.
>
> Los algoritmos genéticos consiguen gran parte de su amplitud ignorando la información que sea la del objetivo. Otros métodos se basan fuertemente en tal información, y en problemas donde la información no está disponible o es difícil de conseguir, estos otros métodos fallan. Los algoritmos genéticos son generales porque explotan la información disponible en cualquier problema de búsqueda. Los algoritmos genéticos procesan similitudes en el código subyacente junto con información proveniente de la ordenación de las estructuras de acuerdo con sus capacidades de supervivencia en el entorno actual. Al explotar una información tan fácilmente disponible, los algoritmos genéticos se pueden aplicar en prácticamente cualquier problema."

Las reglas de transición que utilizan los métodos para guiar una búsqueda son dos: determinista y estocástica; los algoritmos genéticos emplean reglas de transición estocásticas. Hay una diferencia, entre emplear operadores estocásticos y dar paseos aleatorios. Los algoritmos genéticos usan el azar para guiar una búsqueda fuertemente explotadora. Esto puede parecer inusual, usar el azar para conseguir resultados concretos (los mejores puntos), pero basta con observar la cantidad de precedentes en la naturaleza.

A. Evaluación de la población

En la naturaleza hay individuos más hábiles que otros para sobrevivir y al igual que sucede en la naturaleza, en los algoritmos genéticos es necesario establecer algún criterio que permita decidir cuáles de las soluciones propuestas en una población son mejores respecto del resto de las propuestas y cuáles no lo son.

Para determinar cuáles de estos individuos corresponden a buenas propuestas de solución y cuáles no, es necesario calificarlos de alguna manera.

Cada individuo de cada generación de un algoritmo genético recibe una calificación o una medida de su grado de adaptación (ajuste). Éste es un número real no negativo que será más grande cuanto mejor sea la solución propuesta por dicho individuo. Por ejemplo, si el problema a resolver consiste en maximizar una función, entonces la calificación asignada a un individuo determinado debe indicar qué tan alto es el valor de la función en el elemento de su dominio codificado por el individuo. Si, en cambio, el problema es determinar la ruta más corta entre dos puntos, la calificación deberá ser tanto más alta cuanto más corto sea el camino codificado en el individuo que esté siendo calificado.

Al hablar de que a cada individuo de la población se le asigna una y sólo una calificación, se está hablando de una función que se denomina función de adaptación, cuya evaluación puede no ser sencilla y es, de hecho, lo que en la mayoría de los casos consume más tiempo en la ejecución de un algoritmo genético. Hay que tener en cuenta que se evalúa una vez en cada individuo en cada generación. Si un AG es ejecutado con una población de tamaño de 100 individuos durante 100 generaciones, la función es evaluada 10000 veces. Además, puede darse el caso de que la función de evaluación no tenga una regla de correspondencia explícita, esto es, una expresión algebraica, y puede ocurrir incluso que la función cambie de generación en generación.

B. Selección de individuos

Una vez calificados todos los individuos de una generación, el algoritmo debe seleccionar a los individuos más calificados para que tengan mayor oportunidad de reproducción. De esta forma se incrementa la probabilidad de tener individuos 'buenos' en el futuro. Si de una determinada generación se seleccionaran sólo aquellos con una calificación mayor o igual que cierto número n para pasarlos a la siguiente generación, es claro que en ésta la calificación superará a n y por tanto al promedio de la generación anterior. La selección explota el conocimiento que se ha obtenido hasta el momento, procurando elegir lo mejor que se haya encontrado, elevando así el nivel de adaptación de toda la población.

En principio podría parecer que es conveniente tener una estrategia de selección estricta para que se mejore rápidamente la población y converja el algoritmo, es decir, que la población se acumule alrededor de un genotipo óptimo. Esto puede no ser cierto, ya que podría ocurrir que la población se acumulara rápidamente alrededor de algún individuo que sea bueno, comparativamente con el resto de los individuos considerados a lo largo de ejecución del algoritmo, pero este individuo puede no ser el mejor posible. A esto se le suele llamar convergencia prematura y no se puede asegurar pero sí procurar que lo anterior no ocurra. Además de la explotación es necesario que exista exploración. El AG no sólo debe seleccionar de entre lo mejor que ha encontrado, sino procurar encontrar mejores individuos. A esto se dedican los operadores que se describirán a continuación (cruzamiento y mutación).

En la estrategia de selección normalmente se incluye un elemento extra que sirve de 'ancla'. Si sólo se hace selección forzando que sea más probable elegir al mejor individuo de la población pero sin asegurarlo, es posible que este individuo se pierda y no forme parte de la siguiente generación. Para evitar lo anterior se fuerza la selección de la n mejores individuos de la generación para que pasen intactos a la siguiente. A esta estrategia se le denomina elitismo y puede ser generalizada especificando que permanezcan en la población los n mejores individuos de las pasadas k generaciones

C. Cruza: Operador genético

La cruza de los códigos genéticos de individuos exitosos favorece la aparición de nuevos individuos que heredan de sus ancestros características deseables. En el contexto de los algoritmos genéticos reproducirse significa que: dados dos individuos seleccionados en función de su grado de adaptación, éstos pasen a formar parte de la siguiente generación o, al menos, mezclen sus códigos genéticos para generar 'hijos' que posean un código híbrido. Es decir, los códigos genéticos de los individuos se cruzan. Existen muchos mecanismos de cruzamiento y todos tienen por objeto que el código de un individuo A y el de uno B, previamente seleccionados, se mezclen, es decir, se fragmenten y recombinen para formar nuevos individuos con la esperanza de que éstos hereden de sus progenitores las características deseables. El mecanismo de cruzamiento más común es el llamado cruzamiento de un punto.

D. Mutación: Operador genético

Ocasionalmente algunos elementos del código de ciertos individuos de un algoritmo genético se alteran a propósito. Éstos se seleccionan aleatoriamente en lo que constituye el símil de una mutación. El objetivo es generar nuevos individuos que exploren regiones del dominio del problema que probablemente no se han visitado aún. Esta exploración no presupone conocimiento alguno.

De forma aleatoria se buscan nuevas soluciones posibles que quizá superen las encontradas hasta el momento. Esta es una de las características que hacen aplicables los algoritmos genéticos a gran variedad de problemas: no presuponer conocimiento previo acerca del problema a resolver ni de su dominio, no sólo en la mutación sino en el proceso total. De esta manera, el problema a resolver sólo se determina por la función de evaluación y la manera de codificar las soluciones posibles. El resto de los subprocesos que constituyen el algoritmo son independientes y universalmente aplicables.

E. Terminología:

Generalmente cada individuo de la población se representa por medio de una cadena binaria de longitud fija, que suele denominarse 'ejemplar', 'muestra', 'punto' o 'cromosoma', la cual codifica los valores de las variables que intervienen en el problema. Representaremos un individuo por medio de x.

El tamaño de la población permanece fijo entre generación y generación, siendo la población inicial totalmente aleatoria.

Durante la iteración t, representamos por Población(t) el conjunto de posibles soluciones que mantiene el sistema. Cada solución será de la siguiente forma, x^t_i. Así:

Población (t) = $\{x^t_1, \ldots, x^t_n\}$

Siendo n el tamaño de la población.

En el proceso de evaluación, lo que se hace es evaluar cada solución mediante una función f que nos da una medida de la adecuación o ajuste de la misma. Así $f(x^t_i)$ es una medida de la bondad de la solución x_i en la iteración t. Cada individuo contribuye al proceso de reproducción en proporción a su correspondiente ajuste. De esta forma, individuos bien adaptados, contribuyen con múltiples copias e individuos mal adaptados contribuyen con pocas o incluso ninguna copia.

Definimos como **genotipo**, a las estructuras que representan los individuos. Los caracteres o rasgos por los que están formados los individuos, se les denominan **genes**. Cada carácter o gen puede manifestarse de forma diferente, es decir, puede tomar distintos valores que son denominados **alelos**. Una estructura decodificada es un **fenotipo**.

4. METODOLOGÍA DE LOS ALGORITMOS GENÉTICOS

A. Proceso de construcción de un algoritmo genético

El algoritmo genético simula el proceso de evolución natural. En esta sección intentaremos aclarar la manera como se lleva a cabo esta simulación.

En la naturaleza las características de los seres vivos, incluso aquéllas que los hacen óptimos para habitar en su medio, están determinadas por las proteínas que producen, las cuales se codifican en el material genético contenido en cada una de las células del individuo. Así pues, la naturaleza ha codificado el dominio del problema (todos los posibles individuos) aplicándolo al conjunto de todas las posibles secuencias de nucleótidos (que son los elementos que forman las proteínas).

Así, para un algoritmo genético lo primero que se requiere es determinar en qué espacio se encuentran las posibles soluciones al problema que se pretende resolver. En caso de tener un problema de optimización de una función cuyo dominio es un subconjunto de números reales, entonces este subconjunto es al que nos referimos. Es necesario codificar de alguna manera el dominio del problema para obtener estructuras manejables que puedan ser manipuladas por los algoritmos genéticos. Cada una de estas estructuras constituye el equivalente al genotipo de un individuo en términos biológicos. El elemento del dominio del problema al que se mapea este genotipo es el análogo al fenotipo. Es frecuente que el código de los elementos del dominio del problema utilice un alfabeto binario (0's y 1's).

Se debe definir *la manera de codificar los elementos del dominio del problema y establecer la forma de pasar de un elemento a su código y viceversa*, es necesario fijar un punto de partida. Los algoritmos genéticos manipulan conjuntos de códigos (poblaciones de códigos) en generaciones sucesivas. El algoritmo se encargará de favorecer la aparición en la población de códigos que correspondan a elementos del dominio que estén próximos a resolver el problema. Es decir, dicho algoritmo recibirá como entrada una población de códigos y a partir de ésta generará nuevas poblaciones, donde algunos códigos desaparecerán mientras que otros, que se mapean en mejores soluciones posibles, aparecen con más frecuencia hasta que se encuentra una solución satisfactoria o hasta que se cumpla alguna otra condición de terminación. Los elementos de la población serán llamados individuos y a los códigos se les denominará indistintamente cromosomas, genotipo, genoma o código genético.

El **fenotipo** son características de un individuo que posee e identifican de cada una de las especies del mundo. Estas características pueden ser externas (como el color de ojos) y también internas (como el grupo sanguíneo), es el resultado de la interacción del medio ambiente en que se desarrolla y la herencia que recibe de sus ancestros. Dicho fenotipo está determinado por las proteínas que produce y está definido en la información genética de cada una de las células del individuo.

El **genotipo** es el conjunto de genes contenidos en el genoma, y el genoma es el conjunto de todos los cromosomas, es decir, toda la información genética de un individuo. Un cromosoma es una larga molécula de ADN formada por proteínas que definen los genes y además contiene la información acerca de las proteínas que se producirán. En cada célula existen dos juegos de cromosomas que definen las mismas características.

Existen unas células especiales, llamadas gametos, que intervienen en la reproducción dividiéndose mediante un proceso denominado meiosis del siguiente modo:

1) Se duplica el número de cromosomas en la célula, esto es, se hace una copia de cada cromosoma. Al final quedan dos juegos correspondientes al padre y a la madre.

2) Se cruzan un juego de cromosomas del padre con uno de la madre, formándose dos juegos de cromosomas híbridos. El resultado es un juego de cromosomas puros del padre, un juego puro de la madre y dos juegos de cromosomas híbridos.

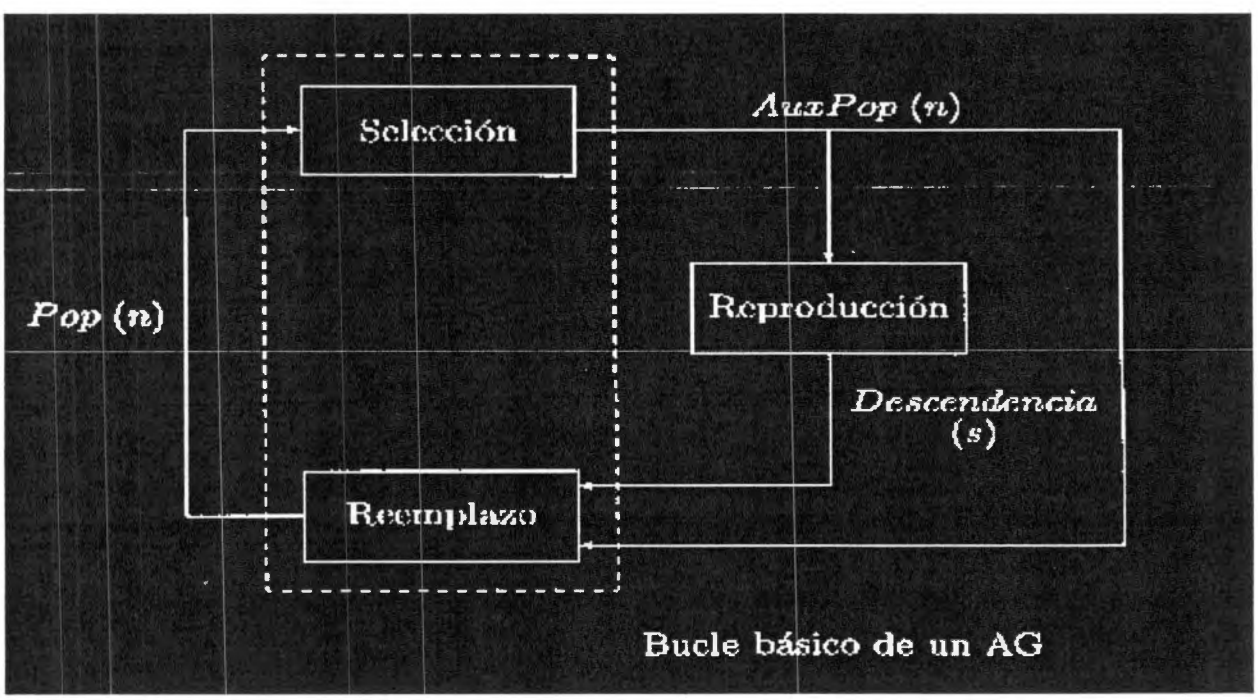
3) Se divide la célula dos veces y al final del proceso quedan cuatro células haploides (con un solo juego de cromosomas): una con cromosomas puros del padre, una con cromosomas puros de la madre y dos con cromosomas híbridos.

Para el cruzamiento de dos cromosomas se forman entre ellos puntos de ruptura y unión de las cadenas de ADN que se denominan quiasmas y cortan el cromosoma en segmentos llamados cromáticas y unen cromáticas complementarias de dos cromosomas distintos.

Para la réplica un cromosoma ya existente interviene una enzima denominada ADN-polimerasa. La molécula de ADN tiene forma de doble hélice y dicha enzima se encarga de abrir por la mitad la molécula y replicar el cromosoma. Ocasionalmente la ADN-polimerasa comete un error que puede ser causado por radiaciones energéticas externas o sustancias extrañas. La alteración de dicha molécula de ADN constituye una mutación que puede manifestarse en el fenotipo y hacer al individuo diferente del resto de sus congéneres. Por lo general las mutaciones son desfavorables e incluso letales para el organismo mutante pero a veces pueden no serlo y conferir a dicho organismo alguna ventaja que le permita sobrevivir más fácilmente en su medio. Dicha característica será transmitida a sus descendientes y se habrá producido un pequeño paso evolutivo.

B. Estructura y componentes básicos

El siguiente gráfico muestra la estructura genérica del ciclo básico de un algoritmo genético:



El proceso se describe como sigue: una población **Pop**, que consta de *n* miembros se somete a un proceso de **selección** para constituir una población intermedia **AuxPop** de *n* criadores. De dicha población intermedia se extrae un grupo reducido de individuos llamados **progenitores** que son los que efectivamente se van a reproducir. Sirviéndose de los operadores genéticos, los progenitores son sometidos a ciertas transformaciones de **alteración** y **cruza** en la fase de reproducción, en virtud de las cuales se generan "*s*" nuevos individuos que constituyen la **Descendencia**. Para formar la nueva población **Pop[t+1]**, se deben seleccionar *n* supervivientes de entre los *n+s* de la población auxiliar y la descendencia, lo que ocurre en la fase de **reemplazo**. El cuadrado rayado hace referencia a la selección, la cual se realiza en dos etapas con la idea de emular las dos vertientes del Principio de Selección Natural: selección de criadores o selección a secas, y selección de supervivientes para la próxima generación o reemplazo.

El proceso descrito, puede ser expresado de forma algorítmica del siguiente modo:

```
t = 0
Inicializar Población(t)
Evaluar Población(t)
Mientras (nos se verifique la condición de parada) hacer
        t = t +1
        Seleccionar Población(t) a partir de Población(t-1)
        Operadores _ genéticos Población(t)
        Evaluar Población(t)
FinMientras
```

C. Métodos de representación

Antes de que un algoritmo genético pueda ponerse a trabajar en un problema, se necesita un método para codificar las soluciones potenciales del problema de forma que una computadora pueda procesarlas. Un enfoque común es codificar las soluciones como cadenas binarias: secuencias de 1s y 0s, donde el dígito de cada posición representa el valor de algún aspecto de la solución. Otro método similar consiste en codificar las soluciones como cadenas de enteros o números decimales, donde cada posición, representa algún aspecto particular de la solución. Este método permite una mayor precisión y complejidad que el método comparativamente restringido de utilizar sólo números binarios, y a menudo "está intuitivamente más cerca del espacio de problemas"[57].

Esta técnica se utilizó, por ejemplo, en el trabajo de Steffen Schulze-Kremer, que escribió un algoritmo genético para predecir la estructura tridimensional de una proteína, basándose en la secuencia de aminoácidos que la componen[58]. El AG de Schulze-Kremer utilizaba números reales para representar los famosos "ángulos de torsión" entre el enlace peptídico que conectan a los aminoácidos. (Una proteína está formada por una secuencia de bloques básicos llamados aminoácidos, que se conectan como los eslabones de una cadena. Una vez que todos los aminoácidos están enlazados, la proteína se dobla formando una compleja estructura tridimensional, basada en cuáles aminoácidos se atraen entre ellos y cuáles se repelen. La forma de una proteína determina su función). Los algoritmos genéticos para entrenar a las redes neuronales también utilizan a menudo este método de codificación.

Un tercer método consiste en representar a los individuos de un AG como cadenas de letras, donde cada letra, de nuevo, representa un aspecto específico de la solución. Un ejemplo de esta técnica es el método basado en "codificación gramática" de Hiroaki Kitano, en el que a un AG se le encargó la tarea de evolucionar un sencillo conjunto de reglas llamadas gramática libre de contexto, que a su vez se utilizaban para generar redes neuronales para una variedad de problemas[59]

La virtud de estos tres métodos es que facilitan la definición de operadores que causen los cambios aleatorios en las candidatas seleccionadas: cambiar un 0 por un 1 o viceversa, sumar o restar al valor de un número una cantidad elegida al azar, o cambiar una letra por otra[60]. Otra estrategia, desarrollada principalmente por John Koza, de la Universidad de Stanford, y denominada programación genética, representa a los programas como estructuras de datos ramificadas llamadas árboles[61]. En este método, los cambios aleatorios pueden generarse

---

57 Fleming, Peter y R.C. Purshouse. Evolutionary algorithms in control systems engineering: a survey. ***Control Engineering Practice***, vol.10, p.1.228 (2002).

58 Mitchell, Melanie. ***An Introduction to Genetic Algorithms***. MIT Press, 1996. p. 62

59 Ibid p. 74

60 Vid sección sobre los métodos de cambio para más detalles acerca de los operadores genéticos.

61 Koza, John, Martin Keane, Matthew Streeter, William Mydlowec, Jessen Yu y Guido Lanza. *Genetic Programming IV: Routine Human-Competitive Machine Intelligence*. Kluwer Academic Publishers, 2003. p. 35

cambiado el operador o alterando el valor de un cierto nodo del árbol, o sustituyendo un subárbol por otro.

D. Métodos de selección

Un algoritmo genético puede utilizar muchas técnicas diferentes para seleccionar a los individuos que deben copiarse hacia la siguiente generación, pero abajo se listan algunos de los más comunes. Algunos de estos métodos son mutuamente exclusivos, pero otros pueden utilizarse en combinación, algo que se hace a menudo.

- Selección elitista: se garantiza la selección de los miembros más aptos de cada generación. (La mayoría de los AGs no utilizan elitismo puro, sino que usan una forma modificada por la que el individuo mejor, o algunos de los mejores, son copiados hacia la siguiente generación en caso de que no surja nada mejor).
- Selección proporcional a la aptitud: los individuos más aptos tienen más probabilidad de ser seleccionados, pero no la certeza.
- Selección por rueda de ruleta: una forma de selección proporcional a la aptitud en la que la probabilidad de que un individuo sea seleccionado es proporcional a la diferencia entre su aptitud y la de sus competidores. (Conceptualmente, esto puede representarse como un juego de ruleta -cada individuo obtiene una sección de la ruleta, pero los más aptos obtienen secciones mayores que las de los menos aptos. Luego la ruleta se hace girar, y en cada vez se elige al individuo que "posea" la sección en la que se pare la ruleta).
- Selección escalada: al incrementarse la aptitud media de la población, la fuerza de la presión selectiva también aumenta y la función de aptitud se hace más discriminadora. Este método puede ser útil para seleccionar más tarde, cuando todos los individuos tengan una aptitud relativamente alta y sólo les distingan pequeñas diferencias en la aptitud.
- Selección por torneo: se eligen subgrupos de individuos de la población, y los miembros de cada subgrupo compiten entre ellos. Sólo se elige a un individuo de cada subgrupo para la reproducción.
- Selección por rango: a cada individuo de la población se le asigna un rango numérico basado en su aptitud, y la selección se basa en este ranking, en lugar de las diferencias absolutas en aptitud. La ventaja de este método es que puede evitar que individuos muy aptos ganen dominancia al principio a expensas de los menos aptos, lo que reduciría la diversidad genética de la población y podría obstaculizar la búsqueda de una solución aceptable.
- Selección generacional: la descendencia de los individuos seleccionados en cada generación se convierte en toda la siguiente generación. No se conservan individuos entre las generaciones.
- Selección por estado estacionario: la descendencia de los individuos seleccionados en cada generación vuelven al acervo genético preexistente, reemplazando a algunos de los miembros menos aptos de la siguiente generación. Se conservan algunos individuos entre generaciones.

- Selección jerárquica: los individuos atraviesan múltiples rondas de selección en cada generación. Las evaluaciones de los primeros niveles son más rápidas y menos discriminatorias, mientras que los que sobreviven hasta niveles más altos son evaluados más rigurosamente. La ventaja de este método es que reduce el tiempo total de cálculo al utilizar una evaluación más rápida y menos selectiva para eliminar a la mayoría de los individuos que se muestran poco o nada prometedores, y sometiendo a una evaluación de aptitud más rigurosa y computacionalmente más costosa sólo a los que sobreviven a esta prueba inicial.

E. Métodos de cambio

Una vez que la selección ha elegido a los individuos aptos, éstos deben ser alterados aleatoriamente con la esperanza de mejorar su aptitud para la siguiente generación. Existen dos estrategias básicas para llevar esto a cabo. La primera y más sencilla se llama **mutación**. Al igual que una mutación en los seres vivos cambia un gen por otro, una mutación en un algoritmo genético también causa pequeñas alteraciones en puntos concretos del código de un individuo.

El segundo método se llama **cruza**, e implica elegir a dos individuos para que intercambien segmentos de su código, produciendo una "descendencia" artificial cuyos individuos son combinaciones de sus padres. Este proceso pretende simular el proceso análogo de la recombinación que se da en los cromosomas durante la reproducción sexual. Las formas comunes de cruzamiento incluyen al cruzamiento de un punto, en el que se establece un punto de intercambio en un lugar aleatorio del genoma de los dos individuos, y uno de los individuos contribuye todo su código anterior a ese punto y el otro individuo contribuye todo su código a partir de ese punto para producir una descendencia, y al cruzamiento uniforme, en donde el valor de una posición dada en el genoma de la descendencia corresponde al valor en esa posición del genoma de uno de los padres o al valor en esa posición del genoma del otro padre, elegido con un 50% de probabilidad.

5. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE OPERACIÓN DE UN ALGORITMO GENÉTICO.

A. Teorema fundamental de algoritmos genéticos: esquema

El esquema es el concepto central de la Hipótesis de construcción de bloques: en algún sentido se puede considerar que un esquema representa la dirección de la búsqueda genética (el hecho de que la selección determine copias de individuos en proporción directa a su ajuste o grado de adaptación, inclina la siguiente en la dirección del esquema que se estima más favorable. Así, en las primeras generaciones, están representados una amplia variedad de esquemas y la búsqueda lo que hace en principio es una criba de los esquemas de menor orden. Generaciones posteriores muestran una mayor concurrencia en posiciones individuales de bits, y la búsqueda procede a través de esquemas de mayor orden. En definitiva, se ve que el algoritmo genético, explota las regiones de más alto rendimiento del espacio de soluciones, porque las sucesivas generaciones de reproducción y cruce, generan un número creciente de ellas. De hecho, el número de cadenas de una región o esquema dado, aumenta de forma proporcional a la estimación que se ha hecho del grado de adaptación de esa región.

Los fundamentos subyacentes en la búsqueda genética son: en una representación binaria de longitud L, cada individuo de la población pertenece a 2^L esquemas, pertenece a todos los esquemas en los cuales aparece uno cualquiera de sus bits. Cada población de N individuos permite estimar el grado de adaptación de entre 2^L y $N \cdot 2^L$ esquemas. Se sabe que no todos ellos son procesados ya que, dependiendo de la longitud y el orden, unos tendrán una mayor probabilidad de supervivencia a los operadores de cruce y de mutación. Se ha estimado que en una generación de N estructuras se procesan del orden de $O(N^3)$ esquemas. Esta es una importante propiedad a la que J. Holland dio el nombre de **Paralelismo Implícito**. El Paralelismo Implícito es el que hace que un algoritmo genético que manipule una población de unos cuantos millares de cadenas, realmente esté tomando muestras de un número de regiones o esquemas enormemente mayor. Tal paralelismo implícito (en el sentido de procesamiento paralelo), proporciona al algoritmo genérico su ventaja principal sobre otros métodos de resolución de problemas.

- Sin embargo, la ventaja del paralelismo va más allá de esto. Considere lo siguiente: todas las cadenas binarias (cadenas de ceros y unos) de 8 dígitos forman un espacio de búsqueda, que puede representarse como ******** (donde * significa "o 0 o 1"). La cadena 01101010 es un miembro de este espacio. Sin embargo, también es un miembro del espacio 0*******, del espacio 01******, del espacio 0******0, del espacio 0*1*1*1*, del espacio 10*01**0, etcétera. Evaluando la aptitud de esta cadena particular, un algoritmo genético estaría sondeando cada uno de los espacios a los que pertenece. Tras muchas evaluaciones, iría obteniendo un valor cada vez más preciso de la aptitud media de cada uno de estos espacios, cada uno de los cuales contiene muchos miembros. Por tanto, un AG que evalúe explícitamente un número pequeño de individuos está evaluando implícitamente un grupo de individuos mucho más grande -de la misma manera que un encuestador que le hace preguntas a un cierto miembro de un grupo étnico, religioso o social espera aprender algo acerca de las opiniones de todos los miembros de ese grupo, y por tanto puede predecir con fiabilidad la opinión nacional sondeando sólo un pequeño porcentaje de la población. De la misma manera, el AG puede dirigirse hacia el espacio con los individuos más aptos y encontrar el mejor de ese grupo. En el contexto de los algoritmos evolutivos, esto se conoce como teorema del esquema, y es la ventaja principal de los AGs sobre otros métodos de resolución de problemas[62].

B. Propiedades de los esquemas[63].

Notación. Consideremos arreglos sobre el alfabeto binario V = {0,1}. Utilizaremos letras mayúsculas para indicar arreglos, y letras minúsculas con subíndices para indicar los elementos de un arreglo.

Por ejemplo: el arreglo A de 7 bits A = 0111000 puede representarse como: $A = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$. Cada característica a_i es análoga a un gene y los valores de a_i son análogos a los alelos.

Es posible tener arreglos en los que las características de a_i no están ordenadas secuencialmente. Por ejemplo: $A' = a_2, a_6, a_4, a_3, a_7, a_1, a_5$. Indicaremos una población de n arreglos A_j; j = 1, 2, ..., n en el tiempo t como A(t) (ó β (t)).

Orden. Es el número de posiciones fijas en un esquema.

Por ejemplo: para $H_1 = 0\ 1\ 1\ *\ 1\ *\ *$

---

[62] Holland, John. "Genetic algorithms." *Scientific American*, julio de 1992, p. 68; Mitchell, Melanie. ***An Introduction to Genetic Algorithms***. MIT Press, 1996. p. 28-29; Goldberg, David. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Addison-Wesley, 1989. *p. 20*

[63] Algunos autores lo manejan como teoría de esquemas vid, Torres 1997

$H_2 = 0 * * * * * *$

Orden (H_1) = 4; Orden (H_2) = 1.

El orden de un esquema es una medida de especificidad.

C. Longitud de definición

Es la distancia entre la primera y la última posición fija de un esquema (δ (H))..

Por ejemplo: $\delta(H_1) = 5\text{-}1 = 4$.

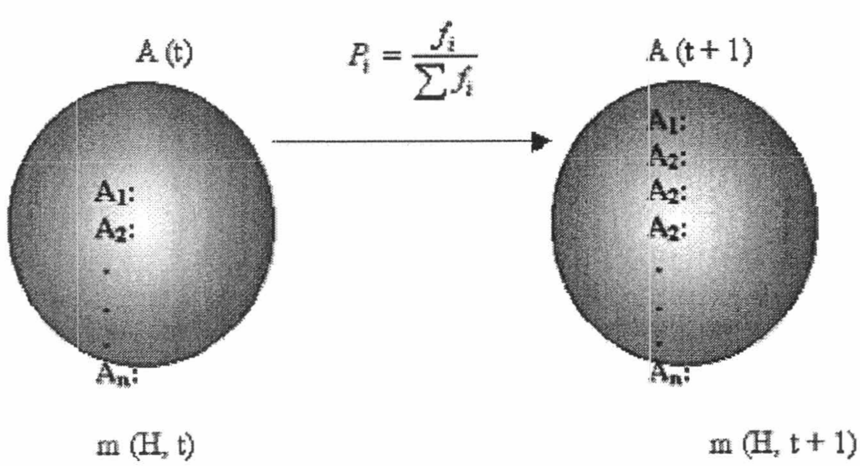
$$\delta(H_2) = \phi$$

δ es una medida de la probabilidad de sobre vivencia de un esquema para aplicar la cruza.

Los esquema y sus propiedades proporcionan los medios básicos para analizar el efecto neto de la reproducción y los operadores genéticos en los "bloques de construcción" de una población.

D. Efectos de la reproducción.

1. t; A(t); m (H,t); tenemos m esquema H en la población A(t)
2.



$$m(H,t+1) = m(H,t) \bullet n \bullet \frac{f(H)}{\sum f_i} \text{ .... } (1)$$

Donde: f(H) es el desempeño promedio de todos los arreglos A_i que representan al esquema H en el tiempo t.

El desempeño promedio de toda la población A(t) está dado por:

$$\bar{f} = \frac{\sum f_j}{n}$$

Podemos rescribir la ecuación (1) como:

$$m(H,t+1) = m(H,t) \bullet \frac{f(H)}{\bar{f}} \text{ .... } (2)$$

Entonces, los esquemas con un desempeño mayor que el promedio de la población reciben en un número creciente de muestras en la siguiente generación. Mientras que los que muestran un desempeño menor al promedio reciben un número decreciente de muestras.

Esto se da para cada esquema en A(t) en paralelo.

Supongamos ahora que un cierto esquema H muestra consistentemente un desempeño arriba/abajo del promedio por un valor $c\bar{f}$ donde c es una constante positiva / negativa.

Podemos escribir la ecuación (2) como:

$$m(H,t+1) = m(H,t) \bullet \frac{\bar{f} + c\bar{f}}{\bar{f}} = m(H,t)(1+c)$$

donde t = ϕ y para un valor constante de c:

$$m(H,t) = m(H,\varnothing)(1+c)^t$$

La reproducción entonces asigna un número exponencialmente creciente (decreciente) de copias al esquema que muestra un desempeño superior (inferior) al promedio de la población.

La aplicación de cruza crea nuevas estructuras afectando al mínimo el proceso de reproducción. Consideremos la siguiente estructura de longitud L y 2 esquemas asociados:

$$A = 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0$$

$$H_1 = *\ 1\ *\ *\ *\ *\ 0$$

$$H_2 = *\ *\ *\ 1\ 0\ *\ *$$

El esquema H_1 tiene menos probabilidades de sobrevivir en la cruza ya que en promedio es muy probable que en el punto de cruza este entre las posiciones 2 y 7.

$\delta(H_1) = 7 - 2 = 5$; existen $L - 1$ posible posiciones para realizar la cruza. Si seleccionamos una posición aleatoria y con igual posibilidad. Entonces la probabilidad de desaparecer de H_1 esta dada por:

$$P_d = \frac{\delta(H_1)}{l-1} = \frac{5}{6} y P_s = 1 - P_d = \frac{1}{6}$$

Para H_2:

$$P_d = \frac{1}{6}; P_s = \frac{5}{6}$$

En general la probabilidad de sobre vivencia de un esquema H esta dada por:

$$P_s = 1 - \frac{\delta(H)}{l-1}$$

Además se aplica cruza con probabilidad P_c:

$$P_s \geq 1 - P_c \bullet \frac{\delta(H)}{l-1}$$

El efecto combinado de la reproducción y la cruza esta dado entonces por: (suponiendo independencia de ambas operaciones).

$$m(H, t+1) \geq m(H, t) \frac{f(H)}{\bar{f}} \left[1 - P_c \frac{\delta(H)}{l-1}\right]$$

Si consideramos ahora una probabilidad de mutación P_m. La probabilidad de sobrevivir de un alelo particular es de $1\text{-}P_m$ y la probabilidad de sobre vivencia en un esquema está dada por:

$$P_{sm} = (1 - P_m)^{o(H)}$$

Si $P_m << 1$ podemos aproximar P_{sm} como:

$$P_{sm} = 1 - 0(H)P_m$$

El número esperado de copias de un esquema H considerando la aplicación de reproducción, cruza y mutación esta dado por el TEOREMA DE ESQUEMA.

$$m(H,t+1) \geq m(H,t)\frac{f(H)}{\bar{f}}\left[1 - P_c\frac{\delta(H)}{l-1} - 0(H)P_m\right]$$

E. Un algoritmo genético a mano

No. Consecutivo	Población iniciai Generada Aleatoriamente	Valor del entero de X	$f(x)=x^2$	Probabilidad de selección p(x)= $x^2 / \sum(f(x)^2)$	Valor esperado fi / $f(x)^2$	Valor Actual desde la ruleta
1	1 0 1 0 1	21	441	0.516	2.063	1
2	0 0 1 0 1	5	25	0.029	0.117	2
3	1 0 0 0 1	17	289	0.338	1.352	0
4	0 1 0 1 0	10	100	0.117	0.468	1
Suma			855	1	4	4
promedio			213	0.25	1	1

Población auxiliar después de la reproducción (Se muestra la cruza)	Compañero selección aleatoria	*Sitio de cruza selección aleatoria*	Nueva Población	Valor de X	$f(x)=x^2$
1 0 1 0 | 1	2	4	1 0 1 0 1	21	441
0 0 1 0 | 1	1	4	0 0 1 0 1	5	25
0 0 | 1 0 1	4	2	0 0 0 1 0	2	4
0 1 | 0 1 0	3	2	0 1 1 0 1	13	169
					639
					159

Notas:

1. Población inicial elegida por cuatro repeticiones de 5 monedas donde águila = 1, sol[64] = 0.

[64] Las caras de la moneda varían en cada denominación y de un país a otro, en E.U. se acostumbra cara o cruz; en México, se acostumbra águila o sol, ya que en una de las caras siempre se ha acostumbrado emplear el escudo de

2. Ejecución de la reproducción a través de 1 parte en 8 simulaciones de la selección de la ruleta (se realiza con tres monedas), esto nos va a dar la nueva población.
3. Se ejecuta la cruza, a través de decodificar de manera binaria 2 monedas que van del 0 al 3 y se le sumaria 1 al resultado para que la cruza vaya del 1er. elemento al cuarto.
4. La probabilidad de cruza asumimos que es la unidad p= 1.0
5. La probabilidad de mutación asumimos que va ha ser 0.001, p_m= 0.001, mutaciones esperadas = 5 x 4 x 0.001 = 0.02. No se esperan mutaciones en una simple generación, por lo tanto no es simulada.

F. Comparación con otros métodos de optimización

a) Algoritmos Genéticos y Matemáticos

Existen problemas de optimización que pueden ser resueltos por la implementación de un algoritmo tradicional. En este caso lo más conveniente es utilizarlo.

Por ejemplo: Si tenemos la función "Es el doble de", ésta puede ser interpretada como :

Ecuación 1

$$f(x,y) = \exists x, \exists y / x = 2y$$

Esto también es válido para funciones lógicas (retornan un valor de Verdadero o Falso). Por ejemplo la función "Es mayor que", puede ser interpretada como

Ecuación 2

$$f(x,y) = \exists x, \exists y / x > y$$

la bandera que tiene una águila devorando a una víbora parada en un nopal y del otro lado, en 1970 se tenia en las monedas de 20 centavos un sol que cubría gran parte de la moneda, actualmente tienen la denominación o un calendario azteca; sin embargo por tradición se sigue acostumbrando lla marlo de esa manera.

Para resolver un problema que requiera como solución saber solamente cual número es más grande, resulta más eficaz utilizar el algoritmo matemático directamente.

Sin embargo, éstos no son aplicables a problemas que posean algunas de estas características:

- La función representativa del problema no es continua. En este caso el mismo no es computable. Los algoritmos genéticos pueden trabajar con todo tipo de funciones ya que encontrarán un mínimo aceptable si no es posible encontrar el óptimo.
- La función representativa es dinámica: La relación entre las variable cambia dependiendo de los valores que tomen las mismas. Esta relación puede ser advertida o no. Las reglas del tipo

"X es igual a Y si el valor de X es chico;
X es 1.5 de y si el valor de X es grande
No se sabe que pasa para valores medios de X"

No pueden ser convertidas en un algoritmo algebraico ya que existen valores que se desconocen. A diferencia de un algoritmo tradicional, un algoritmo genético puede ser diseñado para trabajar bajo estas condiciones.

b) Algoritmos Genéticos y Métodos Enumerativos

Existe la posibilidad teórica de encontrar soluciones a problemas a optimización enumerando todas las soluciones posibles para todos los casos y posteriormente buscando la misma en la base de datos resultante. Los problemas se limitan entonces a un sistema de búsqueda eficiente del caso concreto. Por ejemplo los libros con tablas de logaritmos tradicionales constan de una larga serie de cálculos para todos los valores usuales. La solución consiste simplemente en buscar en la lista el número decimal y retornar el logaritmo dado.

La memorización de las tablas de multiplicar que se enseñan a los niños es otro ejemplo usual. Se espera que ante la pregunta ¿Cuánto es siete por cinco? los niños respondan instantáneamente "35" sin tener que estar calculando mentalmente la multiplicación.

Este método es factible siempre que el número de valores sea manejable. De otra manera el simple cálculo de los mismos se vuelve imposible. Ejemplo: Generar una tabla que contenga todas las movidas de todos los partidos posibles de un juego de ajedrez resultaría imposible de hacer en la práctica.

La " memorización " de una serie de datos no es otra cosa que la construcción en la memoria del equivalente a una base de datos en donde se busca la pregunta y se encuentra automáticamente la respuesta.

Los algoritmos genéticos usan heurística para la resolución de problemas, lo cual limita drásticamente el número de datos a utilizar.

6. APLICACIONES DE LOS ALGORITMOS GENÉTICOS

Mientras el poder de la evolución gana reconocimiento cada vez más generalizado, los algoritmos genéticos se utilizan para abordar una amplia variedad de problemas en un conjunto de campos sumamente diverso, demostrando claramente su capacidad y su potencial. En esta sección se analizará algunos de los usos más notables en los que han tomado parte.

A. Métodos

En la presente sección se analizan diez métodos para resolver el problema del agente viajero, el cual consiste en que un viajero debe recorrer varias ciudades con la menor distancia posible, sin pasar por la misma ciudad dos veces y llegando al lugar de donde partió.

Para determinar el grado de eficiencia del algoritmo se considero:

- Conocer la distancia óptima, es decir cual es la distancia más corta, por lo tanto se distribuían en círculo.
- La manera en que se detendrán los algoritmos será en base al perímetro del circulo es decir 2 π*Radio o en un tiempo determinado (60 segundos); con excepción del secuencial.
- En cada recorrido se almacena:

  1. El método,
  2. El número de ciudades,
  3. El radio utilizado,

4. El tiempo recorrido para el total de ciudades y
5. El tiempo empleado para encontrar la solución

Los métodos empleados se muestran en la Tabla 3, se forman en base a como se generan los nuevos elementos, en cuanto a si es un sólo padre o varios, se manejan varios hijos, la mutación si se hace intercambiando dos elementos o si se extrae una subcadena de la secuencia y se invierte, y la manera de cómo se elige al padre de manera uniforme o bien haciéndolos competir en forma de torneo.

No.	Etiqueta	Descripción
1	ALE	Aleatorio
2	SEC	Secuencial
3	1MG	Un padre M hijos Generacional con Mutación por Intercambio
4	1MGI	Un padre M Hijos Generacional con Mutación Inversa
5	1MNG	Un padre M hijos No Generacional con Mutación por Intercambio
6	1MNI	Un padre M hijos No Generacional con Mutación por Intercambio
7	T1MGI	N padres M hijos Generacional con Mutación Inversa elección del padre por Torneo
8	TMTGI	N padres M hijos No Generacional con Mutación Inversa elección del padre por Torneo
9	U1MGI	N padres M hijos Generacional con Mutación Inversa elección del padre Uniforme
10	UMTGI	N padres M hijos No Generacional con Mutación Inversa elección del padre Uniforme

Tabla 3. Métodos para generar algoritmos genéticos

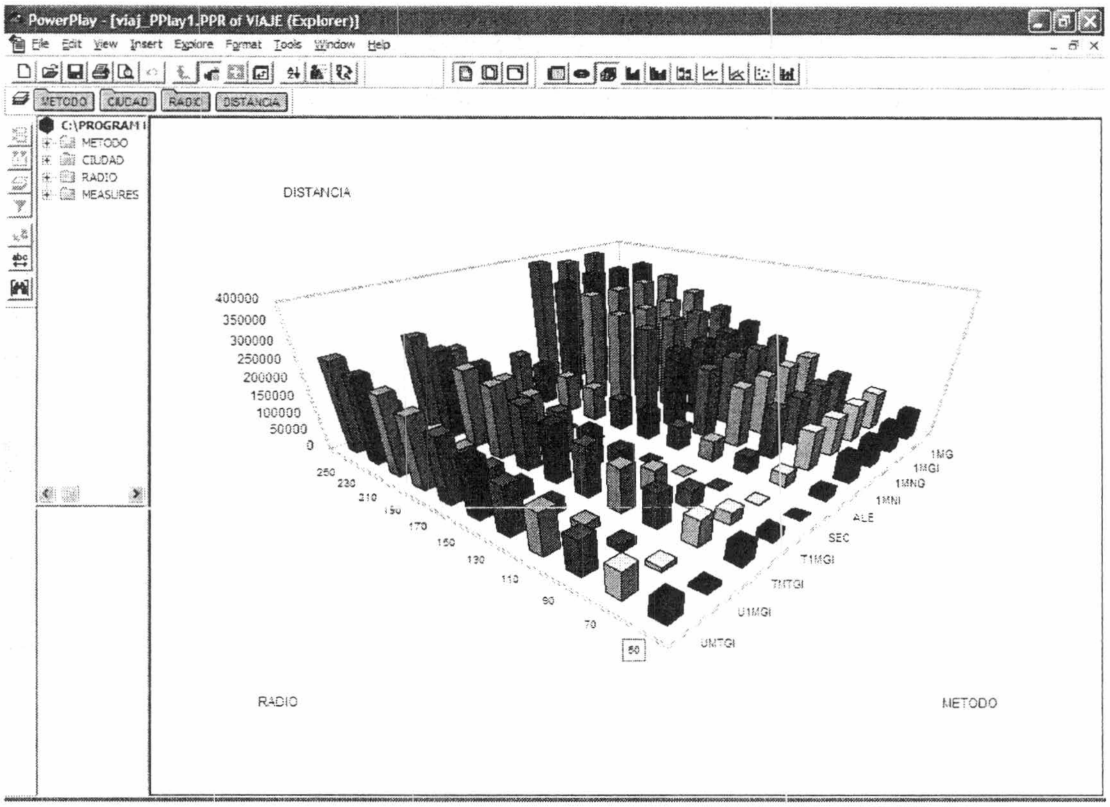


Figura 16. Agente Viajero por distancia, radio y método

Los resultados se muestran en la Figura 15, en donde podemos darnos cuenta U1MGI, N padres M hijos Generacional con Mutación Inversa elección del padre Uniforme, fue el mejor resultado para estos casos.

Promedio de DISTANCIA	MÉTODO										Total
CIUDAD	1MG	1MGI	1MNG	1MNI	ALE	SEC	T1MGI	TMTGI	U1MGI	UMTGI	general
4						683					683
5						774					774
6						821					821
7						838					838
10	1,775	2,104	1,710	1,638	927		927	1,919	927	1,640	1,505
70	11,785	13,501	13,378	13,393	9,867		2,134	12,692	943	11,975	9,945
130	22,605	24,110	24,283	24,409	20,036		10,376	23,380	2,532	22,686	19,347
180	31,875	34,093	34,139	34,515	28,682		20,699	32,463	6,932	32,020	28,344

230	41,177	43,688	43,092	43,351			31,568	41,568	14,549	40,486	37,392
280	49,055	52,694	54,006	53,335			42,561		24,171		45,923
330	58,429	62,441	61,902	61,977							61,251
Promedio por ciudad	176	189	189	189	153	142	120	181	56	175	162

Tabla 4. Distancias recorridas en cuanto al número de ciudades contra el método empleado

Con los resultados de la Tabla 4, que están dado en segundos en base al tiempo que tardaron en encontrar el criterio de fin del algoritmo, nos podemos percatar que si no hay una adecuada representación el método aleatorio puede ser mejor que otros métodos, por lo que se tiene que tener cuidado al utilizar los operadores genéticos y sobretodo como representar los datos.

B. Generación

Generacional versus No generacional

Es decir, el padre no participa en la generación versus Sí participa Traslape Generacional, para los casos de 1 padre y N padres se muestra que es mejor no tener traslape Generacional, posiblemente esto hace que encuentre más facetas por donde encontrar la mejor solución.

C. Mutación

Inversa versus por Intercambio

En base a los resultados obtenidos podemos inferir que es mejor la mutación inversa, debido a que no cambia tan drásticamente de escenario como se hace por intercambio.

D. Elección del padre

Torneo versus Uniforme

A pesar de que en el torneo genera a los hijos de los mejores padres, estos no son los mejores hijos, ya que es posible que se vicie con los mejores padres y no utilicen genes (secuencias de ciudades) de otros padres que si las tienen.

Mapeo Modular En el que obtenemos el residuo de dividir el valor actual invalido entre el tamaño de rango valido[65].

[65]. Vid. Torres 1997

Considero como sé esta buscando entre todas las posibilidades, es conveniente utilizar métodos que no vicien el algoritmo para encontrar una solución fuertemente atractiva en el desarrollo de la mutación.

No. Recorrido	Secuencia	Secuencia Modificada	No. Discreto
1	1 2 3 4	0 0 0 0	0
2	1 2 4 3	0 0 1 0	1
3	1 3 2 4	0 1 0 0	2
4	1 3 4 2	0 1 1 0	3
5	1 4 2 3	0 2 0 0	4
6	1 4 3 2	0 2 1 0	5
7	2 1 3 4	1 0 0 0	6
8	2 1 4 3	1 0 1 0	7
9	2 3 1 4	1 1 0 0	8
10	2 3 4 1	1 1 1 0	9
11	2 4 1 3	1 2 0 0	10
12	2 4 3 1	1 2 1 0	11
13	3 1 2 4	2 0 0 0	12
14	3 1 4 2	2 0 1 0	13
15	3 2 1 4	2 1 0 0	14
16	3 2 4 1	2 1 1 0	15
17	3 4 1 2	2 2 0 0	16
18	3 4 2 1	2 2 1 0	17
19	4 1 2 3	3 0 0 0	18
20	4 1 3 2	3 0 1 0	19
21	4 2 1 3	3 1 0 0	20
22	4 2 3 1	3 1 1 0	21
23	4 3 1 2	3 2 0 0	22
24	4 3 2 1	3 2 1 0	23

Tabla 5. Conversión de cuatro ciudades

En la Tabla 5 se muestra para cuatro ciudades todas las posibles permutaciones y su correspondiente secuencia modificada así como su valor factorial representado en un solo número.

E. Representación

"El mismo estado mental puede tener diferentes percepciones físicas en diferentes personas o en la misma persona en diferente tiempo"[66], por lo que debemos ser muy cuidadosos al transmitir la idea básica de cómo vamos a representar la información a ser permutada..

DIFERENTES REPRESENTACIONES PARA EL MISMO PROBLEMA

Si tenemos la necesidad de recorrer varias ciudades de la república Mexicana, la manera de representar esto podría ser mediante una Mapa de México y numerando las ciudades a visitar, o en una lista escribir las ciudades que nos interesan, pero lo que es muy interesante como se puede interpretar en la computadora, el recorrido de las ciudades que se empleara para mostrar las representaciones se muestra en la Figura 17. Recorrido para el Agente Viajero

[66] Vid, Steriliny 2001

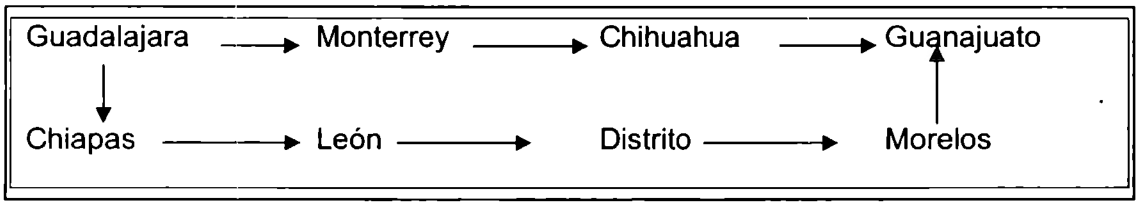


Figura 17. Recorrido para el Agente Viajero

Las diferentes formas de representar que se muestran son las siguientes:

1. Representación con números sin repetición
2. Representación con números con repetición controlada
3. Representación con un solo número

a) Representación con números sin repetición

Donde cada ciudad es representada por un número natural, en donde el Número diferente de representaciones esta dado por la fórmula:

$$P_{k,n} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ecuación III.1 Permutaciones

Donde: n es el número entero que corresponde al número de objetos.

k es un número entero que corresponde al número de objetos incluidos en cada permutación.

b) Representación con números con repetición controlada

Esta representación tiene la virtud de que se pueden aplicar directamente los operadores de Holland, dadas sus características que podemos ver en la Tabla 5. Conversión de cuatro ciudades, en la columna tres que corresponde a la secuencia modificada vemos que el elemento más a la derecha sólo tiene el elemento "0" el que le sigue va de "0 a 1" el que sigue de "0 a 2" y el último de "0 a 3"; con esta característica si tomamos cualquier punto de cruza y los combinamos siempre van a dar un resultado valido, es decir aceptan los operadores genéticos de Holland.

Sistema posicional de base factorial (SPBF)

c) Representación con un solo número

$$NumeroDiscreto = \sum_{i=0}^{n} (L_i * i!)$$

Ecuación III.2 Obtención de un solo número a partir de la secuencia modificada

Donde L: es la lista de la secuencia modificada

i: índice de la lista modificada

n: total de elementos

F. Mapeos a utilizar en los AGs

Se utilizan mapeos biyectivos, para representar SPBF a partir de la representación PER y dado que se tienen N!! Posibles funciones de mapeos entre las representaciones PER y SPBF[67]

Estas representaciones aceptan los operadores genéticos de Holland además se analizaran las siguientes características en los mapeos a evaluar:

Localidad: Un cambio pequeño en la representación resulta ùn cambio pequeño en el dominio original.

Cobertura: Todos los individuos son representados

Biyectiva: Correspondencia Unívoca, es decir una representación en PER corresponde a sólo y sólo una representación en SPBF.

No redundante: No deben contener patrones que generen mismos padres y mismos hijos.

a) Knuth

Knuth plantea una interesante manera de generar permutaciones de manera recursiva partiendo de una permutación de tamaño n y generando todas las permutaciones de tamaño m+1 y en Torres[68] plantea como convertir esta función recursiva en un mapeo entre PER y SPBF

b) Grefenstette

En el año de 1985 Grefenstette desarrollo un algoritmo para mapear la representación entre PER y SPBF; utiliza una lista auxiliar que va desde 0 hasta N-1. El primer número que se representa en SPBF indica la posición en la lista auxiliar donde está el primer elemento de la

---

[67] Vid. demostración en Torres, José 1997.

[68] Idem.

permutación, el segundo número indica la posición en la lista auxiliar donde esta el segundo elemento de la permutación ignorando el elemento primero, y así sucesivamente.

b) Intercambios

Este y el siguiente mapeo son propuestos por José Torres[69]. Se define una secuencia de N-1 números donde el primer número indica la posición hacia la derecha del primer elemento con el que se intercambiará el primer elemento, el segundo número indica la posición hacia la derecha del segundo elemento con el que se intercambiará el elemento, y así sucesivamente.

c) Inversiones

El primer número de la representación SPBF indica cual es la posición hacia la derecha del primer elemento de la permutación para invertir, el segundo número de la representación SPBF indica la posición a la derecha del segundo elemento de la permutación para realizar la inversión y así sucesivamente.

Resumen

Para la secuencia modificada, si tenemos la secuencia 06313000, se llega a la lista de ciudades de la siguiente manera:

Secuencia Modificada	Lista Auxiliar	Secuencia Original	Explicación
06313000	**1**2345678	**1**	Se toma el elemento 0 de la lista auxiliar que es la ciudad 1
6313000	234567**8**	**18**	La ciudad 8 ocupa la posición 6 de la lista
313000	234**5**67	**185**	La ciudad 5 ocupa la posición 3 de la lista
13000	2**3**467	**1853**	La ciudad 3 ocupa la posición 1 de la lista
3000	246**7**	**18537**	La ciudad 7 ocupa la posición 3 de la lista
000	**2**46	**185372**	La ciudad 2 ocupa la posición 0 de la lista
00	**4**6	**1853724**	La ciudad 4 ocupa la posición 0 de la lista

[69] Tesis doctoral 1997

0	**6**	18537246	La ciudad 6 ocupa la posición 0 de la lista

Para el caso de 8 ciudades en la secuencia modificada tenemos lo siguiente:

Posiciones	1	2	3	4	5	6	7	8
Valor Factorial	7!	6!	5!	4!	3!	2!	1!	0!
Rango	0-7	0-6	0-5	0-4	0-3	0-2	0-1	0

G. Ventajas de los AGs

- El primer y más importante punto es que los algoritmos genéticos son intrínsecamente paralelos. La mayoría de los otros algoritmos son en serie y sólo pueden explorar el espacio de soluciones hacia una solución en una dirección al mismo tiempo, y si la solución que descubren resulta subóptima, no se puede hacer otra cosa que abandonar todo el trabajo hecho y empezar de nuevo. Sin embargo, ya que los AGs tienen descendencia múltiple, pueden explorar el espacio de soluciones en múltiples direcciones a la vez. Si un camino resulta ser un callejón sin salida, pueden eliminarlo fácilmente y continuar el trabajo en avenidas más prometedoras, dándoles una mayor probabilidad en cada ejecución de encontrar la solución.
- Debido al paralelismo que les permite evaluar implícitamente muchos esquemas a la vez, los algoritmos genéticos funcionan particularmente bien resolviendo problemas cuyo espacio de soluciones potenciales es realmente grande - demasiado vasto para hacer una búsqueda exhaustiva en un tiempo razonable. La mayoría de los problemas que caen en esta categoría se conocen como "no lineales". <u>En un problema lineal, la aptitud de cada componente es independiente</u>, por lo que cualquier mejora en alguna parte dará como resultado una mejora en el sistema completo. No es necesario decir que hay pocos problemas como éste en la vida real. La no linealidad es la norma, donde

cambiar un componente puede tener efectos en cadena en todo el sistema, y donde cambios múltiples que, individualmente, son perjudiciales, en combinación pueden conducir hacia mejoras en la aptitud mucho mayor. La no linealidad produce una explosión combinatoria[70].

- Afortunadamente, el paralelismo implícito de los AGs les permite superar incluso este enorme número de posibilidades, y encontrar con éxito resultados óptimos o muy buenos en un corto periodo de tiempo, tras obtener muestras directamente de sólo regiones pequeñas del vasto paisaje adaptativo[71]. Por ejemplo, un algoritmo genético desarrollado en común por ingenieros de General Electric y el Rensselaer Polytechnic Institute produjo el diseño de la turbina de un motor a reacción de altas prestaciones que era tres veces mejor que la configuración diseñada por humanos, y un 50% mejor que una configuración diseñada por un sistema experto que recorrió con éxito un espacio de soluciones que contenía más de 10.387 posibilidades. Los métodos convencionales para diseñar estas turbinas son una parte fundamental de proyectos de ingeniería que pueden durar hasta cinco años y costar más de 2.000 millones de dólares; el algoritmo genético descubrió esta solución en dos días, en una estación de trabajo de escritorio típica en ingeniería[72].
- Otra ventaja notable de los algoritmos genéticos es que se desenvuelven bien en problemas con un paisaje adaptativo complejo -aquéllos en los que la función de aptitud es discontinua, ruidosa, cambia con el tiempo, o tiene muchos óptimos locales. La mayoría de los problemas prácticos tienen un espacio de soluciones enorme, imposible de explorar exhaustivamente; el reto se convierte entonces en cómo evitar los óptimos locales -soluciones que son mejores que todas las que

---

[70] Vid. Capítulo 2.

[71] Forrest, Stephanie. Genetic algorithms: principles of natural selection applied to computation. ***Science***, vol.261, p.872-878 (1993). p. 877).

[72] Holland, John. Genetic algorithms. ***Scientific American***, Julio de 1992, p.72.

son similares a ella, pero que no son mejores que otras soluciones distintas situadas en algún otro lugar del espacio de soluciones. Muchos algoritmos de búsqueda pueden quedar atrapados en los óptimos locales: si llegan a lo alto de una colina del paisaje adaptativo, descubrirán que no existen soluciones mejores en las cercanías y concluirán que han alcanzado la mejor de todas, aunque existan picos más altos en algún otro lugar del mapa.

Los algoritmos evolutivos, por otro lado, han demostrado su efectividad al escapar de los óptimos locales y descubrir el óptimo global incluso en paisajes adaptativos muy escabrosos y complejos. (Debe decirse que, en la realidad, a menudo no hay manera de decir si una cierta solución a un problema es el óptimo global o sólo un óptimo local muy alto. Sin embargo, aunque un AG no devuelva siempre una solución perfecta y demostrable a un problema, casi siempre puede devolver al menos una muy buena solución). Todos los cuatro componentes principales de los AGs -paralelismo, selección, mutación y cruzamiento- trabajan juntos para conseguir esto. Al principio, el AG genera una población inicial diversa, lanzando una "red" sobre el paisaje adaptativo[73]. compara esto con un ejército de paracaidistas cayendo sobre el paisaje del espacio de búsqueda de un problema, cada uno de ellos con órdenes de buscar el pico más alto). Pequeñas mutaciones permiten a cada individuo explorar sus proximidades, mientras que la selección enfoca el progreso, guiando a la descendencia del algoritmo cuesta arriba hacia zonas más prometedoras del espacio de soluciones[74].

Sin embargo, el cruzamiento es el elemento clave que distingue a los algoritmos

---

[73] Koza, John, Martin Keane, Matthew Streeter, William Mydlowec, Jessen Yu y Guido Lanza. *Genetic Programming IV: Routine Human-Competitive Machine Intelligence.* Kluwer Academic Publishers, 2003. p. 506

[74] Holland, John. "Genetic algorithms." *Scientific American*, julio de 1992, p. 68.

genéticos de los otros métodos como los trepacolinas y el recocido simulado. Sin el cruzamiento, cada solución individual va por su cuenta, explorando el espacio de búsqueda en sus inmediaciones sin referencia de lo que el resto de individuos puedan haber descubierto. Sin embargo, con el cruzamiento en juego, hay una transferencia de información entre los candidatos prósperos -los individuos pueden beneficiarse de lo que otros han aprendido, y los esquemas pueden mezclarse y combinarse, con el potencial de producir una descendencia que tenga las virtudes de sus dos padres y ninguna de sus debilidades[75]. En una generación se seleccionaron dos circuitos progenitores para llevar a cabo el cruzamiento; un padre tenia una buena topología (componentes como inductores y condensadores colocados en el sitio correcto) pero inadecuado su tamaño de cadena (valores demasiado bajos de inductancia y capacidad para los componentes). El otro padre tenía mala topología pero adecuado su tamaño de cadena. El resultado de aparearlos mediante cruzamiento fue una descendencia con la buena topología de un padre y el adecuado tamaño de la cadena del otro, dando como resultado una mejora sustancial de la aptitud sobre sus dos padres.

- El problema de encontrar el óptimo global en un espacio con muchos óptimos locales también se conoce como el dilema de la exploración versus explotación[76], "un problema clásico de todos los sistemas que pueden adaptarse y aprender". Una vez que un algoritmo (o un diseñador humano) ha encontrado una estrategia para resolver problemas que parece funcionar satisfactoriamente, ¿debería centrarse en hacer el mejor uso de esa estrategia, o buscar otras? Abandonar una estrategia de probada solvencia para buscar otras nuevas casi garantiza que supondrá una pérdida y degradación del rendimiento, al menos a corto plazo. Pero si uno se queda con una estrategia particular excluyendo a

[75] Vid Koza et al. 1999, p. 486, donde los autores analizan el problema de sintetizar un filtro de paso utilizando programación genética.

[76] Holland, John. Genetic algorithms. ***Scientific American***, Julio de 1992, p. 69.

todas las demás, corre el riesgo de no descubrir estrategias mejores que existen pero no se han encontrado. De nuevo, los algoritmos genéticos han demostrado ser muy buenos en dar con este equilibrio y descubrir buenas soluciones en un tiempo y esfuerzo computacional razonables.

- Otra área en el que destacan los algoritmos genéticos es su habilidad para manipular muchos parámetros simultáneamente[77]. Muchos problemas de la vida real no pueden definirse en términos de un único valor que hay que minimizar o maximizar, sino que deben expresarse en términos de múltiples objetivos, a menudo involucrando contrapartidas: uno sólo puede mejorar a expensas de otro. Los AGs son muy buenos resolviendo estos problemas: en particular, su uso del paralelismo les permite producir múltiples soluciones, igualmente buenas, al mismo problema, donde posiblemente una solución candidata optimiza un parámetro y otra candidata optimiza uno distinto[78], y luego un supervisor humano puede seleccionar una de esas candidatas para su utilización. Si una solución particular a un problema con múltiples objetivos optimiza un parámetro hasta el punto en el que ese parámetro no puede mejorarse más sin causar una correspondiente pérdida de calidad en algún otro parámetro, esa solución se llama óptimo paretiano o no dominada[79].
- Finalmente, una de las cualidades de los algoritmos genéticos que, a primera vista, puede parecer un desastre, resulta ser una de sus ventajas: a saber, los AGs no saben nada de los problemas que deben resolver. En lugar de utilizar información específica conocida a priori para guiar cada paso y realizar cambios con un ojo puesto en el mejoramiento, como hacen los diseñadores humanos,

---

[77] Forrest, Stephanie. Genetic algorithms: principles of natural selection applied to computation. ***Science***, vol.261, p.872-878 (1993). p. 874)

[78] Haupt, Randy y Sue Ellen Haupt. *Practical Genetic Algorithms*. John Wiley & Sons, 1998. p.17

[79] Coello, Carlos. "An updated survey of GA-based multiobjective optimization techniques." ***ACM Computing Surveys***, vol.32, no.2, p.109-143 (junio de 2000). p 112

son[80] "relojeros ciegos"; realizan cambios aleatorios en sus soluciones candidatas y luego utilizan la función de aptitud para determinar si esos cambios producen una mejora.

La virtud de esta técnica es que permite a los algoritmos genéticos comenzar con una mente abierta, por así decirlo. Como sus decisiones están basadas en la aleatoriedad, todos los caminos de búsqueda posibles están abiertos teóricamente a un AG; en contraste, cualquier estrategia de resolución de problemas que dependa de un conocimiento previo, debe inevitablemente comenzar descartando muchos caminos a priori, perdiendo así cualquier solución novedosa que pueda existir[81]. Los AGs, al carecer de ideas preconcebidas basadas en creencias establecidas sobre "cómo deben hacerse las cosas" o sobre lo que "de ninguna manera podría funcionar", los AGs no tienen este problema. De manera similar, cualquier técnica que dependa de conocimiento previo fracasará cuando no esté disponible tal conocimiento, pero, de nuevo, los AGs no se ven afectados negativamente por la ignorancia[82]. Mediante sus componentes de paralelismo, cruzamiento y mutación, pueden viajar extensamente por el paisaje adaptativo, explorando regiones que algoritmos producidos con inteligencia podrían no haber tenido en cuenta, y revelando potencialmente soluciones de asombrosa e inesperada creatividad que podrían no habérseles ocurrido nunca a los diseñadores humanos. Un ejemplo muy gráfico de esto es el redescubrimiento, mediante la programación genética, del concepto de retroalimentación negativa -un principio crucial para muchos

---

[80] Dawkins, Richard. The Blind Watchmaker: Why the Evidence of Evolution Reveals a Universe Without Design. W.W. Norton, 1996.

[81] Koza, John, Martin Keane, Matthew Streeter, William Mydlowec, Jessen Yu y Guido Lanza. *Genetic Programming IV: Routine Human-Competitive Machine Intelligence.* Kluwer Academic Publishers, 2003. p. 547

[82] Goldberg, David. Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning. Addison-Wesley, 1989. p. 23)

componentes electrónicos importantes de hoy en día, pero un concepto que, cuando fue descubierto en primera instancia, se le denegó una patente de nueve años porque el concepto era demasiado contrario a las creencias establecidas[83]. Por supuesto, los algoritmos evolutivos no están enterados ni preocupados de si una solución va en contra de las creencias establecidas -sólo de si funciona.

H. Limitaciones de los AGs

Aunque los algoritmos genéticos han demostrado su eficiencia y potencia como estrategia de resolución de problemas, no son la panacea. Los AGs tienen ciertas limitaciones; sin embargo, se demostrará que todas ellas pueden superarse y que ninguna de ellas afecta a la validez de la evolución biológica.

- La primera y más importante consideración al crear un algoritmo genético es definir una representación del problema. El lenguaje utilizado para especificar soluciones candidatas debe ser robusto; es decir, debe ser capaz de tolerar cambios aleatorios que no produzcan constantemente errores fatales o resultados sin sentido.

  Hay dos maneras principales para conseguir esto. La primera, utilizada por la mayoría de los algoritmos genéticos, es definir a los individuos como listas de números -binarios, enteros o reales- donde cada número representa algún aspecto de la solución candidata. Si los individuos son cadenas binarias, un 0 o 1 podría significar la ausencia o presencia de una cierta característica. Si son listas de números, estos números podrían representar muchas cosas distintas: los pesos de las conexiones en una red neuronal, el orden de las ciudades visitadas en un recorrido dado, la situación espacial de componentes electrónicos, los valores con los que se alimenta a un controlador, los ángulos de torsión de los

[83] Koza, John, Martin Keane, Matthew Streeter, William Mydlowec, Jessen Yu y Guido Lanza. *Genetic Programming IV: Routine Human-Competitive Machine Intelligence.* Kluwer Academic Publishers, 2003. p.413

enlaces péptidos de una proteína, etcétera. Así, la mutación implica cambiar estos números, cambiar bits o sumar o restar valores aleatorios. En este caso, el propio código del programa no cambia; el código es lo que dirige la simulación y hace un seguimiento de los individuos, evaluando sus aptitudes y quizá asegurando que sólo se producen valores realistas y posibles para el problema dado.

En otro método, la programación genética (PG), el propio código del programa sí cambia. Como ya se dijo en la sección "Métodos de representación", la PG representa a los individuos como árboles de código ejecutables que pueden mutar cambiando o intercambiando subárboles. Ambos métodos producen representaciones robustas ante la mutación, y pueden representar muchos tipos diferentes de problemas y, como se dice en la sección "Algunos ejemplos específicos", ambas han tenido un éxito considerable.

El problema de representar a las soluciones candidatas de manera robusta no surge en la naturaleza, porque el método de representación utilizado por la evolución, a saber, el código genético, es inherentemente robusto: con muy pocas excepciones, como una cadena de cordones de parada, no existe una secuencia de bases de ADN que no pueda traducirse en una proteína. Por lo tanto, virtualmente, cualquier cambio en los genes de un individuo siempre producirá un resultado inteligible, y por tanto las mutaciones en la evolución tienen mayor probabilidad de producir una mejora. Esto entra en contraste con los lenguajes creados por el hombre como el inglés, donde el número de palabras con significado es pequeño comparado con el número total de formas en las que se pueden combinar las letras del alfabeto, y por tanto, es probable que un cambio aleatorio en una frase en inglés produzca una palabra sin sentido.

- El problema de cómo escribir la función de aptitud debe considerarse cuidadosamente para que se pueda alcanzar una mayor aptitud y verdaderamente signifique una solución mejor para el problema dado. Si se elige mal una función de aptitud o se define de manera inexacta, puede que el algoritmo genético sea incapaz de encontrar una solución al problema, o puede acabar resolviendo el problema equivocado. (Esta última situación se describe a veces como la tendencia del AG a "engañar", aunque en realidad lo que está pasando es que el AG está haciendo lo que se le pidió hacer, no lo que sus creadores pretendían que hiciera). Sin embargo, esto no es un problema en la naturaleza. En el laboratorio de la evolución biológica, sólo hay una función de aptitud que es igual para todos los seres vivos -la carrera por sobrevivir y reproducirse, sin importar qué adaptaciones hagan esto posible. Los organismos que se reproducen con más abundancia que sus competidores están más adaptados; los que fracasan en reproducirse no están adaptados.

- Además de elegir bien la función de aptitud, también deben elegirse cuidadosamente los otros parámetros de un AG -el tamaño de la población, el ritmo de mutación y cruzamiento, el tipo y fuerza de la selección. Si el tamaño de la población es demasiado pequeño, puede que el algoritmo genético no explore suficientemente el espacio de soluciones para encontrar buenas soluciones consistentemente. Si el ritmo de cambio genético es demasiado alto o el sistema de selección se escoge inadecuadamente, puede alterarse el desarrollo del beneficio de los esquemas y la población puede entrar en catástrofe de errores, al cambiar demasiado rápido para que la selección llegue a producir convergencia. Los seres vivos también se enfrentan a dificultades similares, y la evolución se ha encargado de ellas. Es cierto que si el tamaño de una población cae hacia un valor muy bajo, los ritmos de mutación son muy altos o la presión selectiva es demasiado fuerte (una situación así podría ser resultado de un cambio ambiental drástico), entonces la especie puede extinguirse. La solución ha sido "la evolución de la evolutividad" -las adaptaciones que alteran la habilidad de una especie para adaptarse. Un ejemplo. La mayoría de los seres vivos han evolucionado una elaborada maquinaria celular que comprueba y corrige errores durante el proceso de replicación del ADN, manteniendo su ritmo de mutación a unos niveles aceptablemente bajos; a la inversa, en tiempos de fuerte presión ambiental, algunas especies de bacterias entran en un estado de hipermutación en el que el ritmo de errores en la replicación del ADN aumenta bruscamente, aumentando la probabilidad de que se descubrirá una mutación compensatoria. Por supuesto, no pueden eludirse todas las catástrofes, pero la enorme diversidad y las adaptaciones altamente complejas de los seres vivos actuales muestran que, en general, la evolución es una estrategia exitosa. Igualmente, las aplicaciones diversas y los impresionantes resultados de los algoritmos genéticos demuestran que son un buen campo de estudio.

- Un problema con el que los algoritmos genéticos tienen dificultades son los problemas con las funciones de aptitud[84] "engañosas", en las que la situación de los puntos mejorados ofrecen información engañosa sobre dónde se encuentra probablemente el óptimo global. Por ejemplo: imagine un problema en el que el espacio de búsqueda esté compuesto por todas las cadenas binarias de ocho caracteres, y en el que la aptitud de cada individuo sea directamente proporcional al número de unos en él -es decir, 00000001 sería menos apto que 00000011, que sería menos apto que 00000111, etcétera -, con dos excepciones: la cadena 11111111 resulta tener una aptitud muy baja, y la cadena 00000000 resulta tener una aptitud muy alta. En este problema, un AG (al igual que la mayoría de los algoritmos) no tendría más probabilidad de encontrar un óptimo global que una búsqueda aleatoria.
  La solución a este problema es la misma para los algoritmos genéticos y la evolución biológica: la evolución no es un proceso que deba encontrar siempre el óptimo global. Puede funcionar casi igual de bien alcanzando la cima de un óptimo local alto y, para la mayoría de las situaciones, eso será suficiente, incluso aunque el óptimo global no pueda alcanzarse fácilmente desde ese punto. La evolución es como un "satisfactor" -un algoritmo que entrega una solución "suficientemente buena", aunque no necesariamente la mejor solución posible, dada una cantidad razonable de tiempo y esfuerzo invertidos en la búsqueda.

[84] Mitchell, Melanie. *An Introduction to Genetic Algorithms*. MIT Press, 1996. p. 125

- Un problema muy conocido que puede surgir con un AG se conoce como convergencia prematura. Si un individuo que es más apto que la mayoría de sus competidores emerge muy pronto en el curso de la ejecución, se puede reproducir tan abundantemente que merme la diversidad de la población demasiado pronto, provocando que el algoritmo converja hacia el óptimo local que representa ese individuo, en lugar de rastrear el paisaje adaptativo lo bastante a fondo para encontrar el óptimo global[85]. Esto es un problema especialmente común en las poblaciones pequeñas, donde incluso una variación aleatoria en el ritmo de reproducción puede provocar que un genotipo se haga dominante sobre los otros.
- Los métodos más comunes implementados por los investigadores en AGs para solucionar este problema implican controlar la fuerza selectiva, para no proporcionar tanta ventaja a los individuos excesivamente aptos. La selección escalada, por rango y por torneo, discutidas anteriormente, son tres de los métodos principales para conseguir esto; algunos métodos de selección escalada son el escalado sigma, en el que la reproducción se basa en una comparación estadística de la aptitud media de la población, y la selección de Boltzman, en la que la fuerza selectiva aumenta durante la ejecución de manera similar a la variable "temperatura" en el recocido simulado[86].

La convergencia prematura ocurre en la naturaleza (los biólogos la llaman deriva genética). Esto no debe sorprender; como ya se dijo arriba, la evolución, como estrategia de resolución de problemas, no está obligada a encontrar la mejor solución, sólo una que sea lo bastante buena. Sin embargo, en la naturaleza, la convergencia prematura es menos común, ya que la mayoría de las mutaciones

---

[85] Forrest, Stephanie. "Genetic algorithms: principles of natural selection applied to computation." *Science*, vol.261, (1993). P. 876; Mitchell, Melanie. *An Introduction to Genetic Algorithms*. MIT Press, 1996. p. 167

[86] Mitchell, Melanie. ***An Introduction to Genetic Algorithms***. MIT Press, 1996. p. 168

beneficiosas en los seres vivos sólo producen mejoras en la aptitud pequeñas e incrementales; son raras las mutaciones que producen una ganancia de aptitud tan grande que otorgue a sus poseedores una drástica ventaja reproductiva.

- Finalmente, varios investigadores[87] aconsejan no utilizar algoritmos genéticos en problemas con solución de manera analítica. No es que los algoritmos genéticos no puedan encontrar soluciones buenas para estos problemas; simplemente es que los métodos analíticos tradicionales consumen mucho menos tiempo y potencia computacional que los AGs y, a diferencia de los AGs, a menudo está demostrado matemáticamente que ofrecen la única solución exacta. Por supuesto, como no existe una solución matemática perfecta para ningún problema de adaptación biológica, este problema no aparece en la naturaleza ni en el hombre.

[87] Holland, John. Genetic algorithms. ***Scientific American***, Julio de 1992, p. 72; Forrest, Stephanie. Genetic algorithms: principles of natural selection applied to computation. ***Science***, vol.261, p.875 (1993); Haupt, Randy y Sue Ellen Haupt. *Practical Genetic Algorithms*. John Wiley & Sons, 1998.p. 18

Capítulo IV.

ESTUDIO DE CASO:
ASIGNACIÓN DE PERSONAL A HORARIOS DE TRABAJO EN UN CENTRO DE ATENCIÓN TELEFÓNICA

"Todo lo que un hombre puede imaginar, otras podrán hacerlo realidad".

Julio Verne

Resumen del capitulo

En este capítulo se dan las características de un centro de atención telefónica, señalando cómo realizan la tendencia, el pronóstico, la planeación de turnos, distribución de turnos, también se lista un glosario de términos y diagramas que reflejan la interrelación entre los módulos para llevar a cabo una asignación de personal a horarios de trabajo.

1. CARACTERÍSTICAS DEL CENTRO DE ATENCIÓN TELEFÓNICA

La forma tradicional de atención de un centro de llamadas se muestra a continuación:

Este módulo se encargará de recibir la información de los DMS's (Digital Management System) a través de la Red Universal de TELMEX.

La información que se obtiene se describe a continuación:
NOMENCLATURA en la recolección de datos.

%OCC: Es el porcentaje de tiempo en que las operadoras estuvieron ocupadas o no disponibles para atender un cliente.

ANS: Answer. Es el promedio en segundos que el cliente espera para ser atendido por una operadora.

AWT: Average Work Time. Es el promedio en segundos en que la operadora atiende un determinado tipo de servicio.

CBWV-CCS: Call Bussie Work Volume. Total de tiempo en cientos de segundos en que el sistema contabiliza a las operadoras atendiendo clientes.

CW-CCS: Call Waiting. Es el total de tiempo en cientos de segundos en que los clientes esperan para ser atendidos.

IDLT- CCS: Idle Time. Contabiliza en cientos de segundos el tiempo en que la operadora se encuentra disponible para atender una llamada.

IPS: Initial Position Seasure. Total de llamadas iniciales que llegan a las posiciones para ser atendidas por las operadoras.

NCWV-CCS: No-Call Bussie Work Volume. Total de tiempo en cientos de segundos en el que las operadoras están no disponibles para recibir llamadas.

OPER: Es el total acumulado de las operadoras contabilizadas en cada SCAN, accesadas al sistema.

PS: Position Seasure. Totaliza los IPS, RPS y TPS.

REAL: Es el promedio de operadoras accesadas al sistema en un determinado período.

RPS: Recall Position Seasure. Rellamadas que requieren nuevamente la atención de una operadora.

SCANS: Total de recuentos que efectúa el sistema. Se realiza un scan cada 10 segundos.

TPS: Transfer Position Seasure. Transferencias de llamadas que requieren la atención de otra operadora.

WV-CCS: Work Volume. Es la suma del CBWV-CCS y el NCWV-CCS.

La recolección de datos actualmente se obtiene a través del puerto QMFADS de cada DMS a la Vax[88], por periodos de cada quince minutos, originando en total la transmisión diaria de 96 períodos, un scan se realiza cada 10 segundos, durante 15 minutos se hacen 90 scans, por 96 periodos al día dan 8640 scans.

Esta información es almacenada en el equipo de cómputo que se utiliza actualmente (VAX-4700), y es accesada mediante el software del sistema FMS[89] .
Como primer paso realizan una actividad diaria, misma que consiste en revisar que la información que se obtiene del sistema durante los 96 periodos esté completa, en caso contrario, esta información será estimada a partir de la información de días de semanas pasados, similares al día y hora en que se perdió la información, siempre y cuando, no haya ocurrido una situación similar.

La información que ya esta correcta, se almacena una base de datos que se conforma de la siguiente manera:

Se revisa, estima y guarda la información por Force Center (FRCMNTRY).

---

[88] VAX 4700 Equipo de Computo en el que actualmente opera el sistema.

[89] FMS Force Management System. Propiedad de EDS.

Posteriormente se guarda la información por cada oficina de cada DMS (Matamoros, Monterrey, Saltillo, Tampico).
Para guardar la información de cada oficina esta se conforma en un archivo con las iniciales de la oficina el día y el año de la fecha del día que se guarda.

2. PLANEACIÓN

Para actualizar la línea de planeación se debe hacer referencia en primer término al plan vigente para un determinado día ya sea hábil, sábado o domingo; así como también al plan del día que le antecede debido a la interrelación que hay de dos días consecutivos.

Esta relación existe por el número de operadoras que trabajan de velada, mismas que no son contempladas por el sistema para la planeación del día actual debido a que el último turno de operadoras ingresa a las 23:00 horas y termina a las 06:00 horas del siguiente día inmediato. La planeación del día actual proveerá de operadoras que inician labores a partir de las 05:00 horas considerando a las operadoras de velada para la atención de la demanda el mismo caso ocurrirá para el plan del día siguiente.

Los parámetros para actualizar la línea de planeación que se utilizan en el sistema se describen a continuación:

Nombre del Servicio: (NAL (nacional), INT (internacional), DES (despertador), INF (información), CMB (combinado)) Esta información es Opcional.

		OPERADORAS			
OFICINA	**POS**	**NAL**	**INT**	**UNI**	**FRCCELAY 13**
Aguascalientes	26	25			AGUASCANA 3
Celaya	34	105			CELAYANA 4
Colima	19	41			COLIMANA 8
Guadalajara Int	38		94		GDLRAJIN 23
Guadalajara	78	181			GDLRAJNA 24
León	22	11			LEONNA 31
Morelia	28	86			MORELANA 38
San Luis Potosí	24	26			SLPOTONA 60
Tepic	16	26			TEPICNA
FRCGDLAJ	**285**	**501**	**94**		**FRCGUA 15**

Ciudad Obregón	12	15			OBRGONNA 52
Culiacán	18	44			CULCANNA 11
Chihuahua Uni	52			176	CHIHUAUN 6
Durango	19	25			DURNGONA 12
Hermosillo Int	16		46		HRMDILNA 26
Hermosillo Nac	18	65			HRMSILIN 25
La Paz	11	13			LAPAZNA 30
Mazatlán	18	23			MZTLANNA 49
Torreón	24	28			TOREONNA 78
FRCHRMSL	**188**	**213**	**46**	**176**	**FRCCHIHA 14**
					FRCHRMSL 16
Cuernavaca	26	97			CUERNVNA 10
Lindavista Int	30		99		LNDVSTIN 32
Lindavista Nac	64	227			LNDVSTNA 33
Rojo Gómez Int	64		109		ROGOMZIN 58
Rojo Gómez	30	85			ROGOMZNA 59
Pachuca	18	27			PACHUCNA 53
FRCLNVST	**232**	**436**	**208**		**FRCLNVST 17**
Matamoros	23	27			MATMRSNA 34
Monterrey Uni	143			366	MNTERYUN 34
Saltillo	18	38			SLTILONA 61
Tampico	25	67			TAMPCONA 65
FRCMNTRY	**209**	**132**		**366**	**FRCMNTY 19**
Coatzacoalcos	18	7			COATZANA 7
Córdoba	23	36			CORDOBNA 9
Jalapa	17	26			JALAPANA 28
Mérida	33	84			MERIDANA 35
Oaxaca	22	55			OAXACANA 51
Poza Rica	20	38			POZRICNA 56
Puebla	45	114			PUEBLANA 57
Tuxtla Gutiérrez	29	19			TUZGUTNA 79
Veracruz	25	69			VERCRZNA 80
FRCSPUEBL	**232**	**448**			**FRCPUEBL21**
Acapulco Int	15		69		ACPLCOIN 1
Acapulco Nac	32	137			ACPLCONA 2
San Juan Int	40		143		SNJUANIN 62
San Juan Nac	118	303			SNJUANNA 63
Toluca	20	14			TOLUCANA 77
FRCSJUAN	**225**	**454**	**209**		**FRCSJUAN 22**
TOTALES OPERADORAS TOPS	**1371**	**2184**	**557**	**542**	**3283**

Tabla 6. Total de posiciones por oficina de tráfico.

A. Módulo de Tendencias

Tendencia es el comportamiento que durante el día refleja la demanda del cliente y su relación en volumen de trabajo para un determinado servicio, en la que se debe incluir a los clientes no atendidos por abandono o deflexión. La demanda no atendida oportunamente y la deflectada deben calcularse en función del ANS (tiempo de espera).

Esto puede calcularse con las Tablas de Bell-Core para el ANS (se cuenta con un archivo con las que actualmente se están utilizando). Ejemplo:

ANS	T. de Espera < 10 "	T. de Espera >10 y < 20"	T. de Espera > 20 "	Abandonadas	Deflectadas
2.8	92.80%		5.90%	0.70%	0%

Tabla 7. Demanda no atendida oportunamente.

Se generan las tendencias mediante la información proveniente de la recolección de datos de cada servicio para cada día de la semana.

Los insumos indispensables en la conformación de la tendencia son:

Demanda atendida.
Volumen de trabajo.
Calculo de la demanda no atendida.
El método a seguir en la actualización de tendencias es el de **suavización exponencial**. Es importante resaltar que para llevar a cabo la actualización de la tendencia se requiere que la información este completa y que no haya acontecido un evento externo que la afecte.

Ejemplo:

Desvíos de tráfico: en el caso de que el tráfico de las llamadas no pueda ser atendido por un DMS, o existan problemas técnicos, este será desviado a otro DMS.
Suspensión de operación: si por alguna razón las oficinas deciden suspender operaciones por la visita del dirigente sindical o en apoyo a otras empresas en huelga.
Circunstancias físicas o sociales: Posiciones fuera de servicio o fenómenos naturales.

Para el cálculo de las llamadas abandonadas y/o deflectadas[90] se podrá asignarles un valor en porcentaje, con opción a ser consideradas para la tendencia o guardar por separado como referencia a una afectación determinada.

El comportamiento del tráfico para cada servicio cada día de la semana se registra por cuartos de hora en los archivos **de tendencia** y se actualizan constantemente. Estos archivos toman en cuenta las modificaciones de horario en las diferentes zonas del país. Esto permite que se generen tendencias de verano e invierno respectivamente. También se almacenan y actualizan las tendencias de los días festivos que están marcados en el contrato colectivo de Telmex.

No.	Tendencia por Servicio	Día
	Servicio Nacional	Martes de Invierno
	Servicio Despertador	Lunes de Verano
	Servicio Información	Miércoles de Verano
	Servicio Internacional	Domingo de Verano
	Servicio Nacional	Viernes Santo
	Servicio Despertador	01 de Enero
	Servicio Información	16 de Septiembre
	Servicio Internacional	25 de Diciembre
	Reporte Comparativo de Tendencia con Datos Actuales	Domingo de Verano

Tabla 8. Tendencias por servicio en día festivo

[90] Llamada que no puede ser encolada (contestada) por estar ocupadas todas las operadoras.

La información que se utiliza para realizar la tendencia son datos históricos de los primeros días de agosto, ver anexo

B. Módulo de Pronósticos

El pronóstico es el proceso mediante el cual se define la demanda de llamadas esperadas y el volumen de trabajo para un determinado día y servicio, en función de los históricos correspondientes y en base a la tendencia se efectúa su distribución durante el día.

Para definir la demanda pronosticada, el usuario toma en cuenta el comportamiento de los 2 últimos meses de la demanda de cada servicio, que es el tiempo en que la información a detalle (**por periodos de 15 minutos**) queda almacenada en el sistema, a disposición del usuario.

Una vez que la demanda ha sido definida, en función de la tendencia, el sistema calcula su distribución durante el día y determina el volumen de trabajo.

Para la definición de la demanda esperada es importante que el sistema facilite la información de cada día de la semana y permita que se tome en cuenta o se omita a consideración de usuario, en caso de que contenga afectaciones que la hagan distinta a un día normal de operación.

Para el cálculo de la demanda de festivos, se requiere tener 8 semanas consecutivas del año anterior al día a pronosticar, a fin de establecer la relación en porcentaje que se tuvo dentro del entorno de la fecha del festivo o día especial a considerar. Se aplica ese porcentaje al comportamiento promedio de las 8 últimas semanas, al día en que corresponde y se utiliza la tendencia correspondiente al festivo para distribuir la demanda y calcular el volumen de trabajo.

Tanto los valores de la demanda, como del volumen de trabajo y del AWT se mostrarán en el pronóstico por sesión, total del día y por períodos de cuarto de hora.

El objetivo final del pronóstico es calcular en forma automática el total de operadoras requeridas en función de la demanda especificada y del volumen de trabajo.

Los elementos constitutivos para el cálculo de personal requerido son:

Demanda
Volumen de trabajo
Tiempo promedio de trabajo (AWT)
Tiempo promedio de Espera del cliente (ANS)
% de Ocupación del personal

Los requerimientos se generan por servicio, una vez elaborados se debe tener la facilidad de integrar los archivos de diversos servicios a fin de que se tenga una sola planeación.

Se debe facilitar el cálculo del pronóstico combinando los servicios, para esto ya deben de existir los archivos de requerimientos de los servicios con el fin de optimizar la demanda del personal provisto.

C. Módulo de Planeación de Horarios

El tiempo es una *magnitud física* creada para medir el intervalo en el que suceden una serie ordenada de acontecimientos[91]. La representación del tiempo se puede dar de manera estática, y dinámica; **la representación estática** es a través de una fecha, o un horario, lo cual indica un sólo suceso, **la representación dinámica**, es una forma de representar el paso del tiempo entre sucesos, que pueden ser afectados por un factor

[91] http://es.wikipedia.org/wiki

de escala y utilizar diferentes intervalos de tiempo, que pueden ser años, meses, días, minutos; y que en el presente estudio se realizaran por cuartos de hora.

a) Definición de horario

Según el diccionario de la real academia española[92]:

Cuadro indicador de las horas de salida y llegada: horario de trenes. || Repartición de las horas de trabajo: horario escolar.

b) Definición de Jornada

JORNADA. Es el tiempo que tiene que dedicar el trabajador a la realización de la actividad para la que ha sido contratado.[93]

Jornada laboral

Periodo que transcurre desde el comienzo de la actividad laboral hasta la finalización de la misma.

Como dato de interés: en España y en México en el IMSS (Instituto Mexicano del Seguro Social) el término es mucho más amplio, ya que incluye el periodo desde la salida del trabajador de la zona privativa de su vivienda habitual con rumbo al punto de trabajo hasta el regreso del mismo a su domicilio habitual.

Hay que destacar que el domicilio debe ser el habitual y no debe haber interrupción en el traslado entre el lugar de trabajo al mismo, así como el traslado de uno a otro punto debe ser por el camino más corto o usual tomado por el trabajador.

[92] Diccionario de la lengua española © 2005 Espasa-Calpe S.A., Madrid:

[93] Tomado del diccionario Laurusse

c) Definición de Turno de Trabajo

TURNO DE TRABAJO. Espacio temporal en el que se distribuye el periodo de trabajo y descanso y se establece el comienzo y el fin de la jornada laboral diaria[94]

En base al pronóstico y al archivo de requerimientos obtenido en dicho módulo y de acuerdo a las especificaciones que Telmex indique, la cantidad de turnos que se requieren para la atención de cada uno de los servicios tomando en cuenta los lineamientos pactados[95], mismos que estarán contenidos en el archivo de especificaciones, para que el sistema en función a lo requerido provea los horarios necesarios.

Una vez que se ha concluido con el pronóstico el sistema solicitará ordenadamente los archivos de requerimientos que serán enviados a planeación. En donde el sistema en base a los requerimientos y al archivo de horarios especificado entregará los horarios requeridos.

Para que el archivo de requerimientos sea convertido en un plan se proporcionan lo siguientes archivos:

Requerido del día anterior
Requerido del día actual
Requerido del (los)día (s) siguiente (s)

Una vez que el sistema haya concluido la planeación notificará al usuario a fin de que verifique los resultados de la misma.

---

[94] Tomado del diccionario Laurusse

[95] Ver anexo de turnos

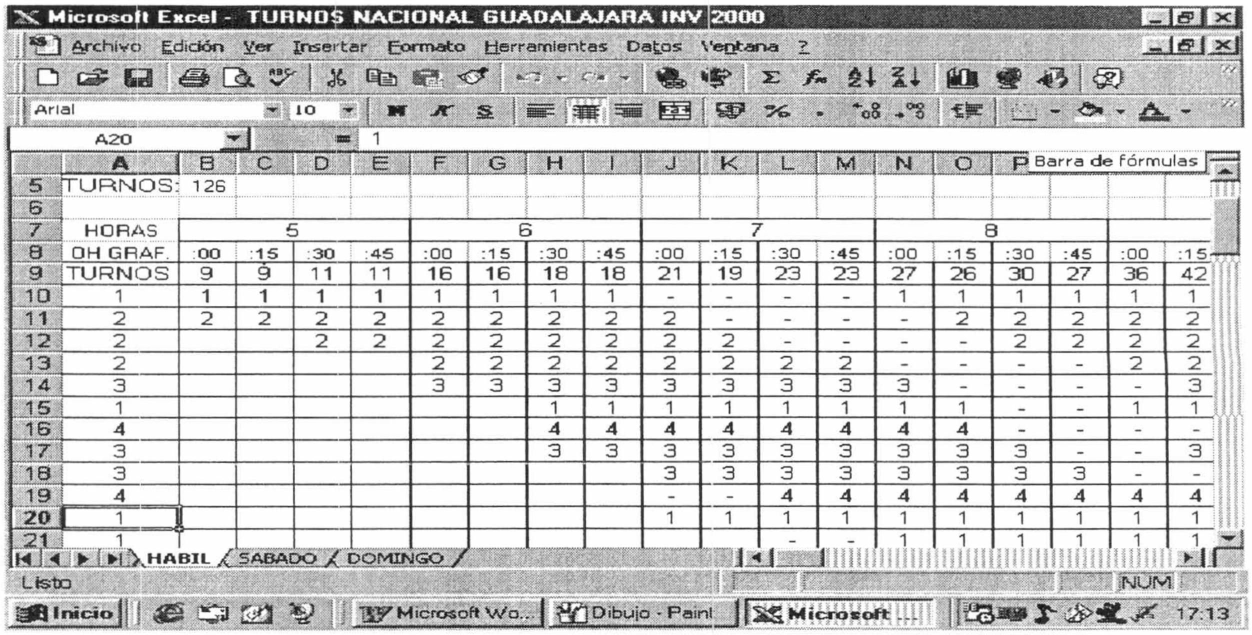
Es importante que el sistema muestre las desviaciones que se tuvieron de lo planeado con relación al requerido, desplegando además el total de horarios del plan.

Este reporte contendrá la siguiente información:

Tipo de turno
Cantidad de horarios
Variables del mismo tipo
Horas Laborales
Total de Horas del Turno
Totales de cada uno de los rubros anteriores.
Duración promedio del turno
Tiempo de trabajo promedio

D. Reporte de Gráfica de Horarios

Se integra en una hoja de cálculo que despliega los diferentes horarios, periodos, cantidad total acumulada por períodos, descripción numérica de los turnos (en cantidad y ubicación de los descansos de los mismos). La finalidad de este reporte es que al ser presentada la gráfica a la representación sindical sugiera cambios pero sin modificar los totales requeridos del personal.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P			
5	TURNOS:	126																	
6																			
7	HORAS	5				6				7				8					
8	OH GRAF.	:00	:15	:30	:45	:00	:15	:30	:45	:00	:15	:30	:45	:00	:15	:30	:45	:00	:15
9	TURNOS	9	9	11	11	16	16	18	18	21	19	23	23	27	26	30	27	36	42
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-	-	-	-	1	1	1	1	1	1
11	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	-	-	-	-	2	2	2	2	2
12	2			2	2	2	2	2	2	2	2	-	-	-	-	2	2	2	2
13	2					2	2	2	2	2	2	2	2	-	-	-	-	2	2
14	3					3	3	3	3	3	3	3	3	3	-	-	-	-	3
15	1							1	1	1	1	1	1	1	1	-	-	1	1
16	4							4	4	4	4	4	4	4	4	-	-	-	-
17	3							3	3	3	3	3	3	3	3	3	-	-	3
18	3									3	3	3	3	3	3	3	3	-	-
19	4									-	-	4	4	4	4	4	4	4	4
20	1									1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
21	1											-	-	1	1	1	1	1	1

Figura 18. Grafica de Turnos de Guadalajara

E. Modulo de Distribución de Horarios

El sistema facilitará la distribución del plan de cada DMS, por centro de operadoras (oficina), en función de su cobertura (días y horarios), número de posiciones y cantidad de personal.

COBERTURA DE HORARIOS DE TRABAJO DE LOS CENTROS DE OPERADORAS			
REGIÓN	OFICINA	DÍAS	HORARIOS
Guadalajara	Aguascalientes	Lun a Vie	9:00 - 21:00
	Celaya	Lun a Dom	24 Hrs.
	Colima	Lun a Dom	L a V 8:30 - 23:00, S y D 8:30 - 20:30
	Guadalajara Int.	Lun a Dom	5:45 - 24:00
	Guadalajara Nal.	Lun a Dom	24 Hrs.
	León	Lun a Vie	8:00 - 18:00

	Morelia	Lun a Dom	24:00 hrs.
	San Luis Potosí	Lun a Vie	8:00 - 19:00
	Tepic *	Lun a Vie	8:00 - 21:00
Hermosillo	Cd. Obregón	Lun a Vie	8:00 - 18:00
	Culiacán	Lun a Dom	6:00 - 24:00
	Chihuahua	Lun a Dom	24 Hrs.
	Durango*	Lun a Dom	9:00 - 21:00
	Hermosillo Int.	Lun a Dom	6:00 - 24:00
	Hermosillo Nal.	Lun a Dom	24 Hrs.
	La Paz	Lun a Vie	8:00 - 18:00
	Mazatlán	Lun a Vie	9:00 - 21:00
	Torreón*	Lun a Dom	8:00 - 21:00
Lindavista	Cuernavaca	Lun a Dom	24 Hrs.
	Lindavista Int.	Lun a Dom	24 Hrs.
	Lindavista Nal.	Lun a Dom	24 Hrs.
	Pachuca	Lun a Vie	8:00 - 20:00
	Rojo Gómez Int.	Lun a Dom	24 Hrs.
	Rojo Gómez Nal.	Lun a Vie	9:00 - 21:00
Monterrey	Matamoros	Lun a Vie	8:00 - 20:00
	Monterrey	Lun a Dom	24 Hrs.
	Saltillo	Lun a Dom	Hab 7:30-22:00 Sáb 8:00-20:00 Dom. 8:00-22:00
	Tampico	Lun a Dom	24 Hrs.
Puebla	Coatzacoalcos	Lun a Vie	8:00 - 16:00

	Córdoba	Lun a Vie	8:00 - 20:00
	Jalapa	Lun a Vie	8:00 - 20:00
	Mérida	Lun a Dom	24 Hrs.
	Oaxaca	Lun a Dom	24 Hrs.
	Poza Rica	Lun a Vie	8:00 - 20:00
	Puebla	Lun a Dom	24 Hrs.
	Tuxtla Gutiérrez	Lun a Vie	8:00 - 20:00
	Veracruz	Lun a Dom	24 Hrs.
San Juan	Acapulco Int.	Lun a Dom	24 Hrs.
	Acapulco Nal.	Lun a Dom	24 Hrs.
	San Juan Int.	Lun a Dom	24 Hrs.
	San Juan Nal.	Lun a Dom	24 Hrs.
	Toluca	Lun a Vie	8:00 - 18:00
* HORA LOCAL			VIGENCIA y COBERTURA TOPS 2001

Tabla 9. Cobertura de horarios de trabajo de los centros de operadoras

SITUACIONES A CONSIDERAR:

Fecha del Plan a Distribuir

Archivo Identificador (Hábil, Sábado, Domingo)

Servicio (Nacional, Internacional, Información, Despertador, Combina)

Identificador de la Oficina

Turnos Totales (Cantidad en porcentaje de los turnos a distribuir)

Porcentaje de Veladas

Cobertura de la Oficina (Inicio y Fin)

Cantidad de Personal (con el que se abre o cierra la oficina)

Total de Posiciones (que hay en cada oficina)

Totales de Personal Disponibles (Fuerza)

Para saber que porcentaje del total de horarios es el que el usuario va a asignar, a cada oficina realiza lo siguiente:

DISTRIBUCIÓN DE HORARIOS DIA HÁBIL				
	PERSONAL		TURNOS	
ID	TOTAL	GRAFICA	DIA HÁBIL	%
AGN	21	18	18	0.060
CLN	39	33	25	0.083
CYN	89	74	56	0.185
GDN	175	146	111	0.368
LNN	6	5	5	0.017
MRN	76	63	48	0.159
SLN	19	16	16	0.053
TPN	27	23	23	0.076
	452	377	302	1.000
CALCULO DE DISTRIBUCIÓN DE HÁBIL A LOS CENTROS 7 DÍAS				
CLN	39	33	0.104	25
CYN	89	74	0.234	56
GDN	175	146	0.462	111
MRN	76	63	0.199	48
	379	316	1.000	240*
CALCULO DE DISTRIBUCIÓN DE LA VELADA				
CYN	89	74	0.262	
GDN	175	146	0.515	
MRN	76	63	0.224	
	340	283	1.000	
* Diferencia del total de turnos de día hábil menos los centros que sólo laboran de lunes a viernes				

Tabla 10. Distribución de turnos para el día hábil.

Esta información puede ser modificada parcial o totalmente, en el caso de que la cobertura de la oficina o el número de operadoras o posiciones se haya modificado desde la última distribución de turnos. El sistema permitirá ratificar el nombre que identifica al archivo o renombrarlo.

Si el usuario desea ubicar permanentemente un forzamiento el usuario lo podrá almacenar y tener a su disposición.

El usuario deberá verificar que la distribución de horarios de los centros que laboran 7 días sea múltiplo de 5 o de lo contrario, deberá hacer los ajustes necesarios para estos se cumplan, con el fin de cubrir con los totales en gráfica, los turnos completos y realizar los cuadros de descansos.

F. Ajustes de requerimientos para centros que corresponden a zonas con distinto Huso Horario.

Una vez terminada la distribución de turnos, el sistema facilitará el movimiento de los turnos de aquellos centros que geográficamente correspondan a otro huso horario, por lo que adelantará o atrasará los turnos correspondientes para ajustarlos a su horario local.

Los DMS, que por su ubicación geográfica, manejan diferentes horarios son:

Región (DMS)	OFICINA	Hora del centro
GDLAJ	Aguascalientes	En tiempo
	Celaya	En tiempo
	Colima	En tiempo
	Guadalajara Internacional	En tiempo
	Guadalajara Nacional	En tiempo
	León	En tiempo
	Morelia	En tiempo
	San Luis Potosí	En tiempo

	Tepic	-1 todo el año
HRMSL	Ciudad Obregón	-2 verano –1 invierno
	Culiacán	-1 verano –1 invierno
	Chihuahua Universal	-1 verano –1 invierno
	Durango	En tiempo
	Hermosillo Internacional	-2 verano –1 invierno
	Hermosillo Nacional	-2 verano –1 invierno
	La Paz	-1 verano –1 invierno
	Mazatlán	-1 verano –1 invierno
	Torreón	En tiempo

Tabla 11. Horario de las oficinas por su ubicación geográfica.

El usuario deberá validar la duración de los turnos que han sido movidos, de acuerdo al ajuste del horario, tomando en cuenta las restricciones de los horarios.

G. Días de Descansos

Dados los totales de turnos distribuidos para día hábil, sábado y domingo, el sistema generará el cuadro de descansos correspondiente a esta distribución, de acuerdo al Contrato Colectivo de Trabajo y a las distribuciones que la representación sindical señale.

Ejemplo:

La semana laboral se considera de Lunes a Domingo.

Dos días consecutivos de descanso (El domingo y lunes podrán considerarse como tal).

En esta pantalla se ingresan la cantidad de horarios requeridos, para cada día de la semana, mismos que pueden ser iguales de lunes a viernes o diferentes todos los días de la semana.

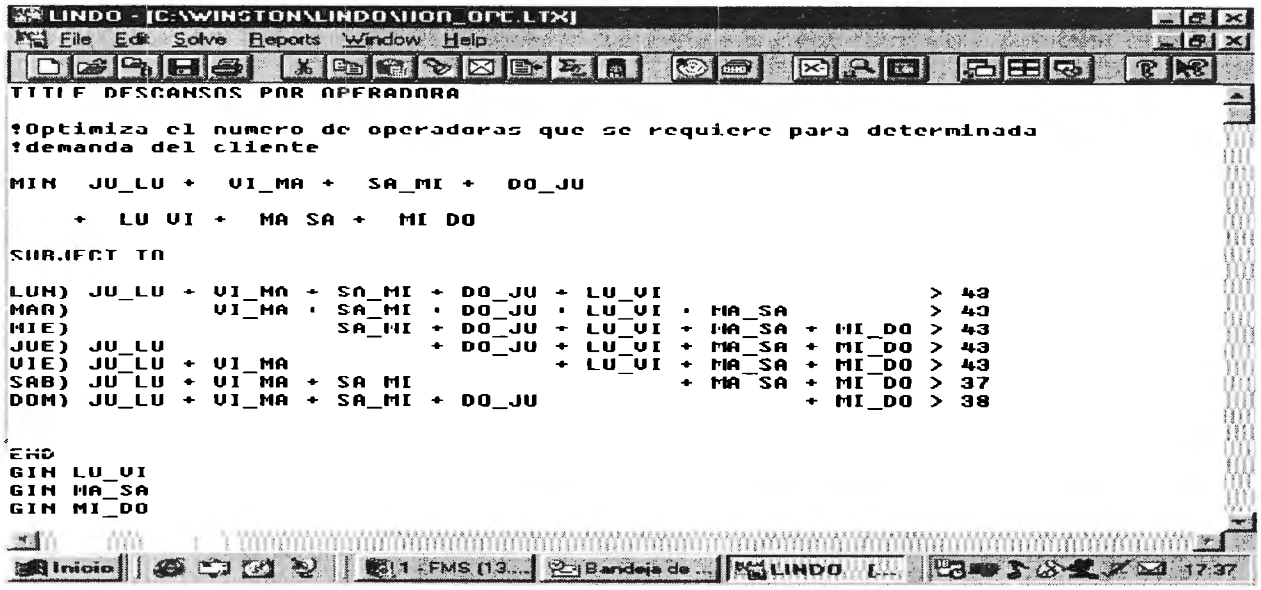


Figura 19. Descansos por operadora: programación lineal

El cuadro de descansos resultante de la solicitud del usuario, por día de la semana se muestra a continuación:

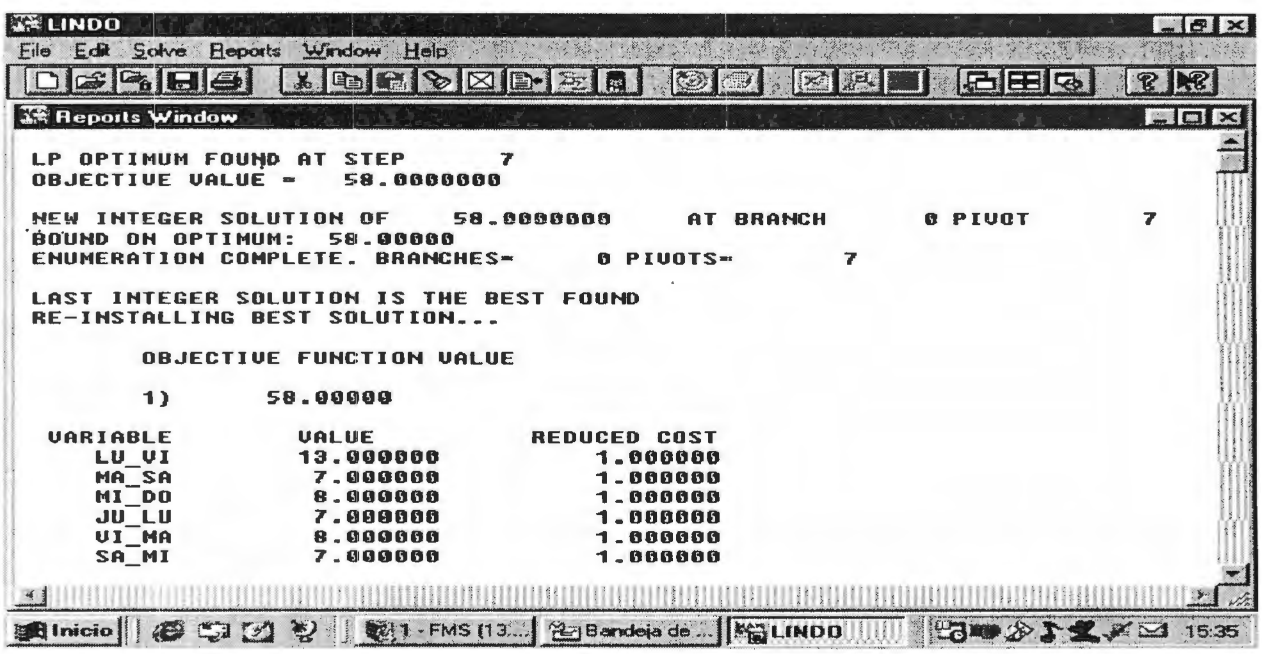


Figura 20. Descansos por operadora: solución

El sistema facilitará el manejo y control de alarmas, así como el permanente monitoreo de las mismas en históricos.

El usuario definirá los umbrales de alarma para cada servicio, así como el nivel de escalación.

El usuario establecerá o modificará en el sistema, los parámetros y los rangos motivo de monitoreo y alarmas.

Ejemplos:

Por Sistema:

Cuando el tiempo de respuesta al cliente por servicio (ANS), no de la calidad correspondiente.

Cuando se rebasa un umbral de 2.2 segundos en que el cliente espera para ser atendido en los servicios de Nacional e Internacional y de 2.8 segundos para los servicios de Información Y Despertador.

El sistema dará la facilidad de identificar la cola motivo de desviación en este parámetro.

Por operadora:

AWT.

Promedio en segundos en que la operadora atiende un determinado tipo de servicio.

NCWV

Total de tiempo en el que las operadoras están no disponibles para recibir llamadas.

Acceso a línea dos

Llamada personal

Status de Posición

Cuando la operadora este en “Reten Llamada” por más de cinco segundos.

Glosario De Términos

%OCC: Es el porcentaje de tiempo en que las operadoras estuvieron ocupadas o no disponibles para atender un cliente.

ANS: Answer. Es el promedio en segundos que el cliente espera para ser atendido por una operadora.

ANSCMB: Este parámetro se utiliza temporalmente en el sistema actual para calcular el ANS de las salas nacionales que forman parte de un host.

ANSINT: Este parámetro se utiliza temporalmente en el sistema actual para calcular el ANS de las salas Internacionales que forman parte de un host.

ANSUNV: Este parámetro se utiliza temporalmente en el sistema actual para calcular el ANS de las salas Universales que forman parte de un host.

AWT: Average Work Time. Es el promedio en segundos en que la operadora atiende un determinado tipo de servicio.

CBWV-CCS: *Call Bussie Work Volume.* Total de tiempo en cientos de segundos en que el sistema contabiliza a las operadoras atendiendo clientes.

CW-CCS: Call Waiting. Es el total de tiempo en cientos de segundos en que los clientes esperan para ser atendidos.

DMS: *Digital Management System.*

FADS: *Force Administration Data System.*

IPS: Initial Position Seasure. Total de llamadas iniciales que llegan a las posiciones para ser atendidas por las operadoras.

NCWV-CCS: *No-Call Bussie Work Volume.* Total de tiempo en cientos de segundos en el que las operadoras están no disponibles para recibir llamadas.

OPER: Es el total de operadoras accesadas al sistema.

PLAN: Total de operadoras provistas en la gráfica vigente de cada sala.

PS: Position Seasure. Totaliza los IPS, RPS y TPS.

QMFADS: Queue Management Force Administration Data System.

QMTADS: Queue Management Traffic Administration Data System

REAL: Es el promedio de operadoras accesadas al sistema en un determinado período.

REQ: Operadoras requeridas para atender un servicio en un determinado tiempo, en función a los parámetros establecidos: tiempo de ocupación, tiempo de espera de los clientes y tiempo de operación.

RPS: Recall Position Seasure. Rellamadas que requieren nuevamente la atención de una operadora.

SCANS: Total de recuentos que efectúa el sistema. Se realiza un scan cada 10 segundos.

SESIÓN: Período de tiempo en el que se divide un día. Durante un día hay cuatro sesiones que comprenden:
Sesión 1: 00:00hrs a 06:00hrs
Sesión 2: 06:00hrs a 12:00hrs

Sesión 3: 12:00hrs a 18:00hrs

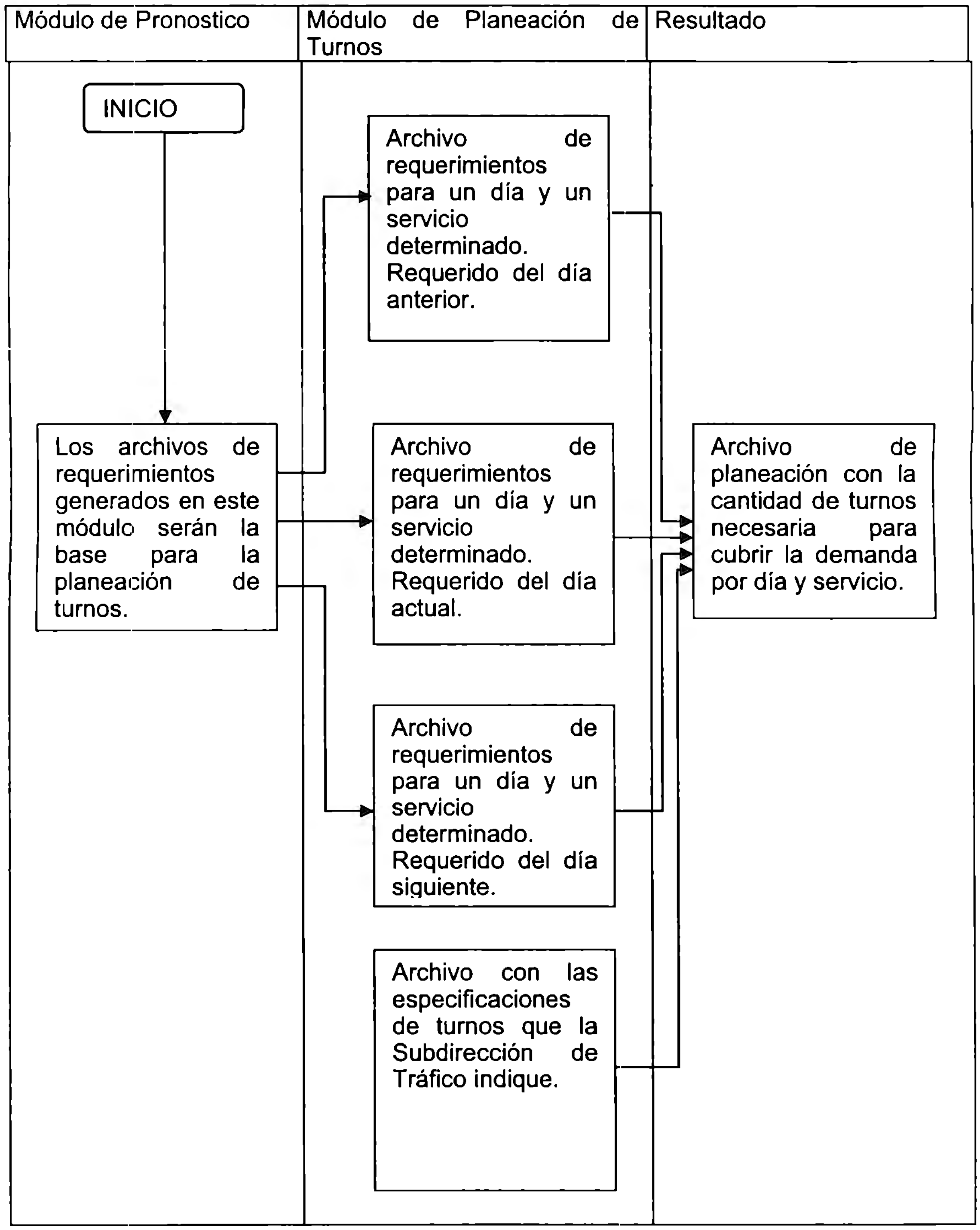
Sesión 4: 18:00hrs a 24:00hrs

TOPS: *Traffic Operator Position System.*

TPS: Transfer Position Seasure. Transferencias de llamadas que requieren la atención de otra operadora.

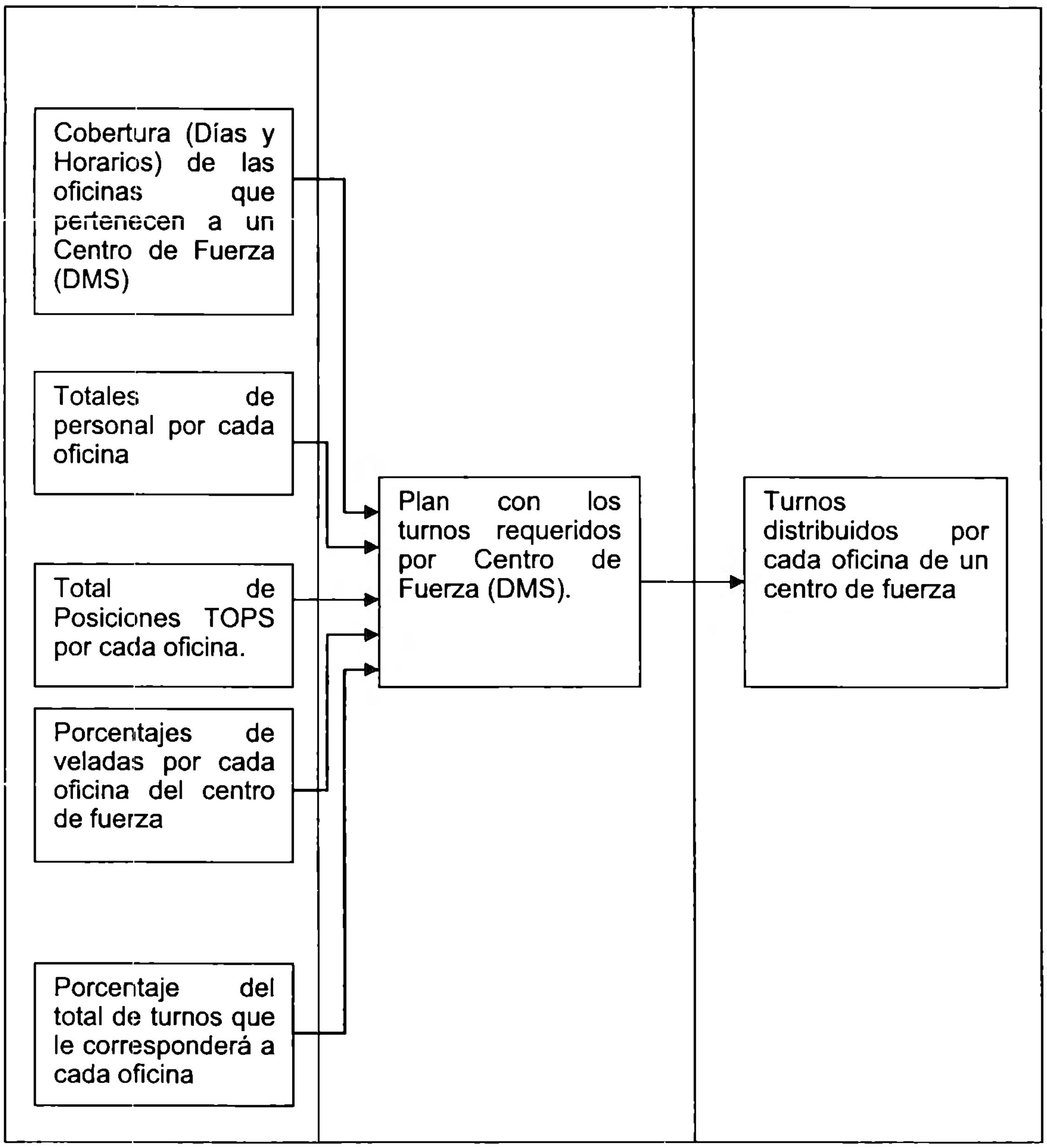
WV-CCS: Work Volume. Es la suma del CBWV-CCS y el NCWV-CCS.

3. DIAGRAMAS


Módulo de Pronostico
Módulo de Planeación de Turnos
Resultado
INICIO
Los archivos de requerimientos generados en este módulo serán la base para la planeación de turnos.
Archivo de requerimientos para un día y un servicio determinado. Requerido del día anterior.
Archivo de requerimientos para un día y un servicio determinado. Requerido del día actual.
Archivo de requerimientos para un día y un servicio determinado. Requerido del día siguiente.
Archivo con las especificaciones de turnos que la Subdirección de Tráfico indique.
Archivo de planeación con la cantidad de turnos necesaria para cubrir la demanda por día y servicio.

ASIGNACIÓN HORARIO DE TRABAJO

Módulo de Distribución de Turnos	Módulo de Planeación de Turnos	Resultado



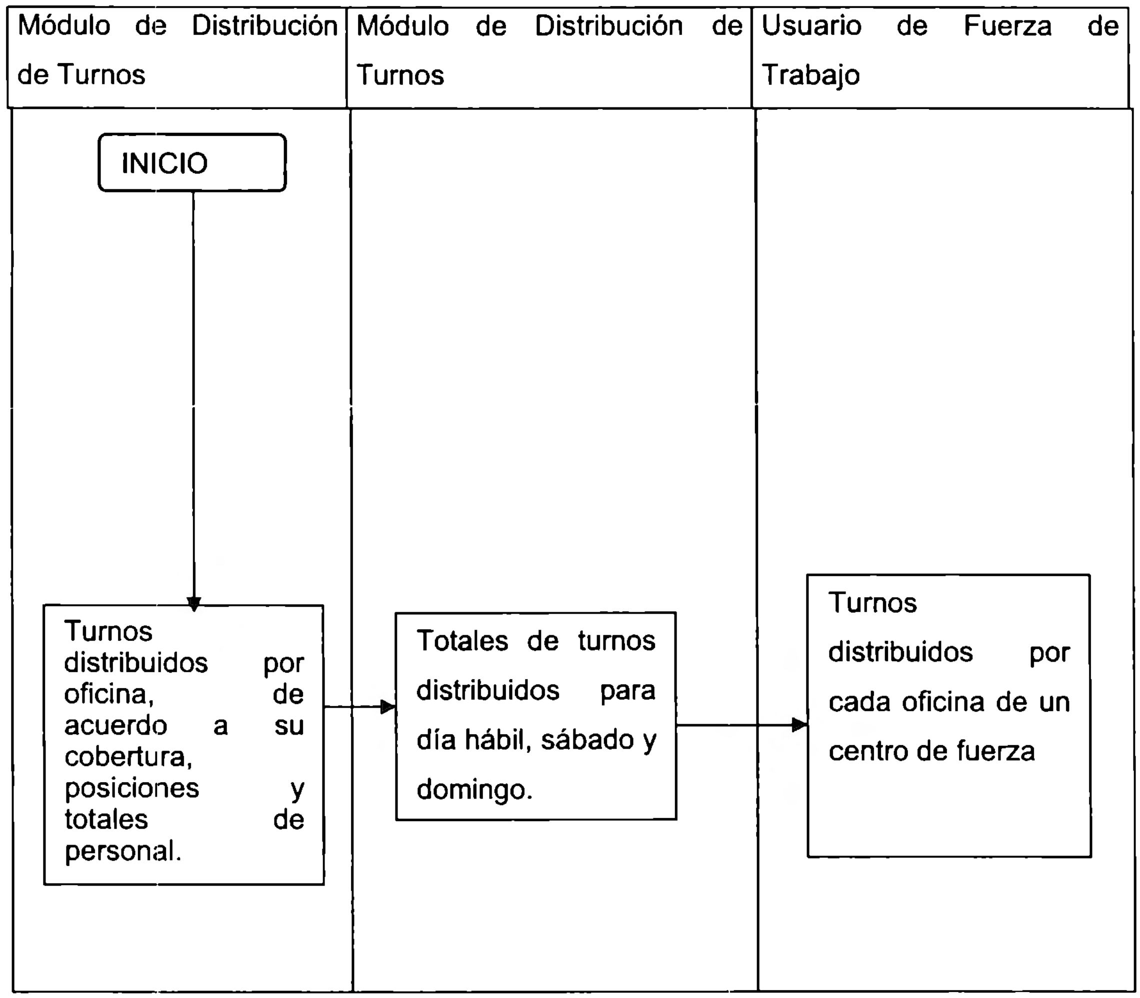

Módulo de Distribución de Turnos
Módulo de Distribución de Turnos
Usuario de Fuerza de Trabajo
INICIO
Turnos distribuidos por oficina, de acuerdo a su cobertura, posiciones y totales de personal.
Totales de turnos distribuidos para día hábil, sábado y domingo.
Turnos distribuidos por cada oficina de un centro de fuerza

DIAGRAMA DE MODULO DE MONITOREO DE ALARMAS

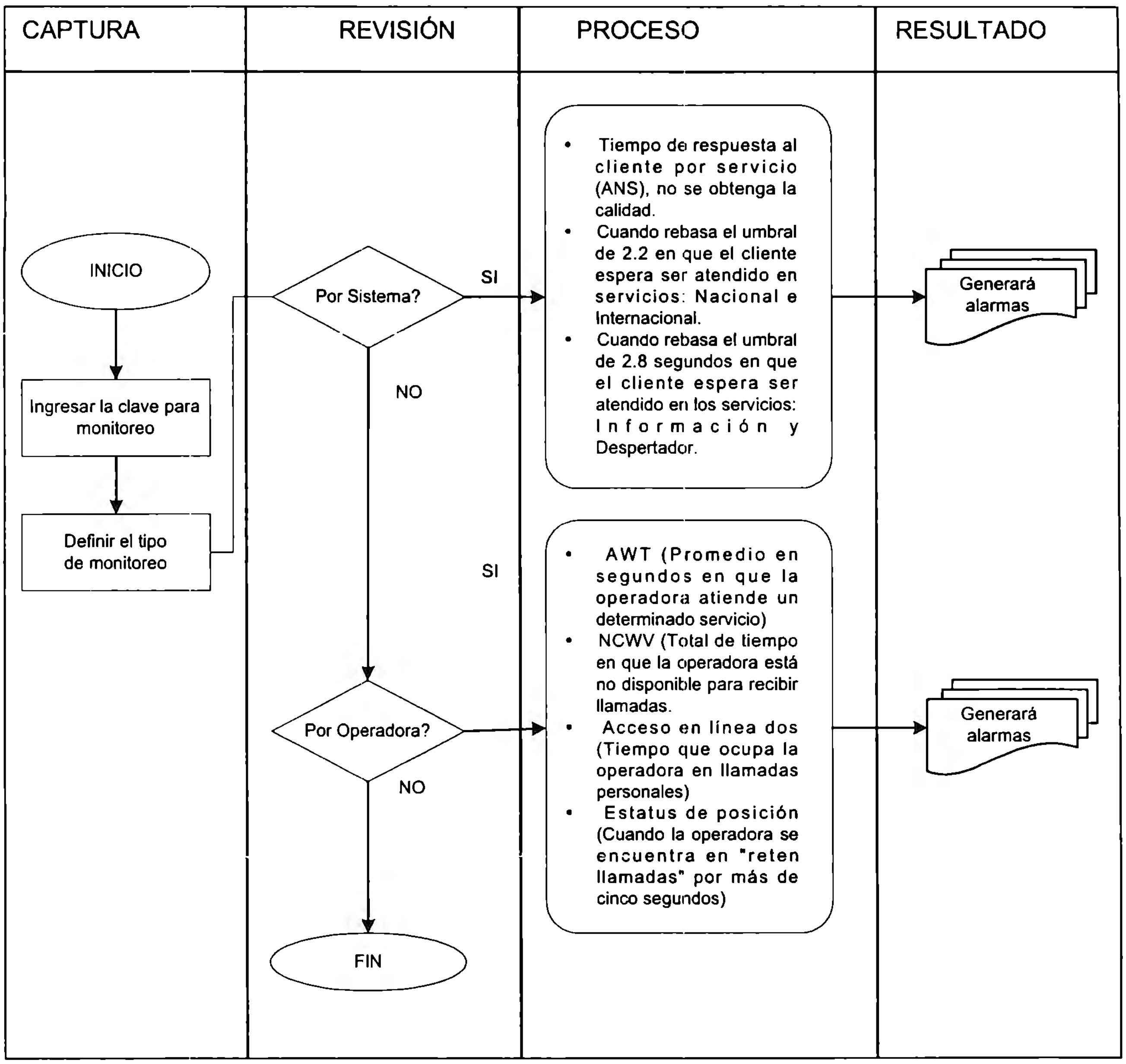
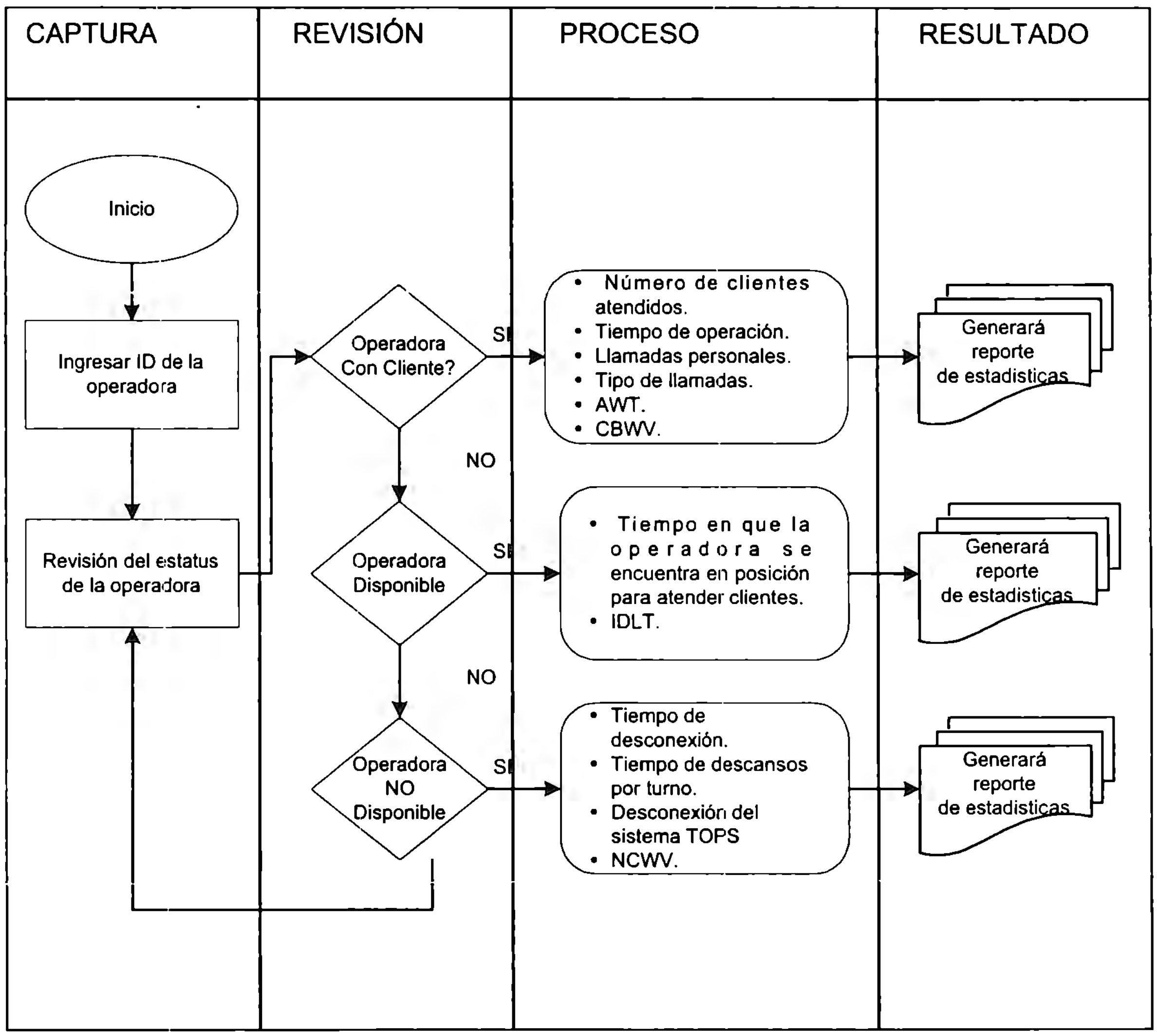


DIAGRAMA DE SUPERVISION DE OPERADORAS



4. PROBLEMÁTICA PARA LA ASIGNACIÓN DE HORARIOS DE TRABAJO

En un problema como el centro de atención telefónico más grande del país, se utiliza el centro de atención telefónico de Guadalajara como análisis de estudio que permita manejar las alternativas con PL, se cuenta con 181 operadoras de tráfico, se utilizan todos los horarios disponibles a nivel nacional que son 5000, pero para fines prácticos, los expertos del área de tráfico toman sólo una muestra de 67 horarios, y esta cantidad de horarios sí son aceptados para ser procesados por el modelo de PL.

TOTAL DE ASIGNACIONES EN EL CENTRO DE ATENCIÓN TELEFÓNICO

Se determina el total de posibles asignaciones de 181 operadoras a los 5000 horarios, utilizando la fórmula de combinaciones con repeticiones

$$\frac{(n-1+k)!}{k!(n-1)!} = \frac{(4999+181)!}{181!4999!} = 2.2445 \times 10^{339}$$

Analizando las 181 operadoras con 67 horarios, utilizando la fórmula de combinaciones con repeticiones se obtiene el total de posibles asignaciones:

$$\frac{(n-1+k)!}{k!(n-1)!} = \frac{(66+181)!}{181!66!} = 1.0580 \times 10^{61}$$

LIMITACIONES DEL MODELO EN LA PROGRAMACIÓN LINEAL

La capacidad del software para resolver problemas de PL (LINDO Ver 6.1) es de 300 variables con 150 restricciones, Sin embargo, este software presenta dificultades en problemas con menor número de variables. Como ya se dijo se emplean sólo 67 horarios de un total de 5000.

VENTAJAS DE INCORPORAR EL ALGORITMO GENETICO EN LA PROGRAMACIÓN LINEAL

En virtud de lo anterior no es posible resolver un modelo de PL con 5000 variables representando horarios diferentes, lo cual requiere de un Algoritmo Genético como estrategia para manejar la explosión combinatoria: en base a la metaheurística para elegir el grupo de horarios que mejor se ajuste a la curva de la demanda del cliente, de esta manera el modelo de PL en lugar de tratar un problema de asignación que no puede resolver por las dimensiones de las variables, lo realiza en dos fases para obtener un buen resultado:

- 1a. Fase: Seleccionar sólo los horarios adecuados
- 2a. Fase: Ejecutar la Programación Lineal con los horarios adecuados.

Capítulo V.

MODELO MATEMÁTICO DE PROGRAMACIÓN LINEAL Y ALGORITMOS GENÉTICOS PARA LA ASIGNACIÓN DE PERSONAL A HORARIOS DE TRABAJO EN UN CENTRO DE ATENCIÓN TELEFÓNICA

"La constancia es la virtud por la que todas las *obras* dan fruto".

Arturo Graf

Resumen del capitulo

En este capítulo se explica cómo se desarrollará el presente proyecto y se utiliza la metodología empleada por Schmidt para desarrollar el modelo de representación de los horarios de turnos, primero se da el panorama empleando la experiencia de los expertos del área de tráfico y el modelo de programación lineal, como se lleva en la actualidad, y se dan sus limitaciones, posteriormente se combinan las herramientas de series de tiempo, programación lineal y algoritmos genéticos para dar una solución más adecuada en el uso de los recursos humanos que tiene la empresa.

1. INTRODUCCIÓN

Asignar a las operadoras telefónicas, de tal manera que se ocupen las menos posibles atendiendo toda la demanda requerida de los clientes, en base a las restricciones sindicales y de tiempo que están contempladas en cada horario de trabajo.

En la ley federal de trabajo en México, se contempla los días de descanso obligatorio, sin embargo, no se contempla los descansos dentro del mismo día laborable: tomar un vaso de agua, ir al baño, tomar un recado personal, estirar las piernas, contestar el teléfono celular, no obstante algunos contratos colectivos si los consideran, y es aquí donde unas cuantas jornadas laborales, se tornan de manera exponencial al incorporar los descansos.[96]

En este proyecto se requiere elegir los horarios que se tomaran en cuenta para realizar el modelo de PL y determinar cual es la función objetivo para este modelo, es decir, cuantas operadoras son las necesarias para cubrir la demanda pronosticada a través del método de suavización exponencial[97].

2. METODOLOGÍA

Como se señala en el marco teórico Schmidt[98] propone las siguientes etapas para investigar las propiedades y el comportamiento de un sistema real y siendo ésta metodología una de las más completas, se emplea en el presente trabajo:

A. Definición del problema

Problemas de horarios de los empleados (Employee Timetabling Problems ETP)[99], es la asignación de empleados a tareas y a su vez a turnos donde se establece su inicio y termino de la jornada laboral. Hay m empleados $E_1,\ldots,$ Em, n turnos $T_1,\ldots T_n$, compuestos por r Horarios $H_1,\ldots H_r$ y p descansos $D_1,\ldots,D_p$; en este caso como la tarea es la misma para todos los empleados contestar el teléfono, no se considera este componente. Por lo que se necesita encontrar una matriz 3-dimensión binaria X_{mxrxp}, así como $X_{ijk} = 1$ Si el empleado E_i es asignado a Horario H_j con descanso D_k. Las restricciones del problema pueden ser agrupadas en los siguientes puntos:

Requerimientos: Cada turno es compuesto por un horario fijo y un número de descansos, que puede ser uno o varios. Un empleado es asignado a un

[96] Vid análisis combinatorio.

[97] Por razones de confidencialidad no se manifiesta el nombre de la empresa.

[98] Schmidt, J. W. & Taylor, R. E. "Análisis y Simulación de Sistemas Industriales".

[99] Amnon Meisels, Andrea Schaerf "Modeling and Solving Employee Timetabling Problems"

turno y este a su vez tiene asociado un descanso, es decir cada descanso D_k pertenece a un Horario H_h que a su vez conforman un Turno T_j. Es dada una matriz de enteros no negativos R_{nxt} llamada Matriz de requerimientos, así como R_{jk} denota el numero de ocurrencias del Descanso D_k en el turno T_j, el cual corresponde exactamente al numero de empleados que tienen que ser asignados al turno T_j con Descanso D_k.

Descanso: Cada empleado tiene derecho a tomar cuando menos un intervalo de descanso dentro de su turno

Disponibilidad: hay preferencias personales de los empleados, cuya restricción es asignada solo a un subconjunto de turnos. Estas restricciones son representadas por una matriz binaria de disponibilidad A_{mxn} donde A_{ij} = 1 Si el empleado E_i esta disponible para el turno T_j y A_{ij} = 0 si no esta disponible.

Conflictos: Un empleado no puede ser asignado a dos turnos que estén en conflicto, estos conflictos pueden ser, solapamiento, consecutivo o combinación que sea prohibido por las reglas de la organización o del sindicato. Los conflictos pueden variar para diferentes empleados (debido a las diferentes situaciones laborales) y son descritos por una matriz 3-dimensión binaria de conflictos C_{nxnxm}, así como si $C_{j1j2i}=0$, entonces el empleado E_i no puede ser asignado a ambos turnos S_{j1} y S_{j2}.

Carga de Trabajo: Hay un número diferente de intervalos de tiempo que contiene cada turno, ya que se debe cubrir las 24 horas del día hay turnos nocturnos, diurnos y mixtos, por lo tanto definimos un conjunto de Turnos G_1,..., Gs, cada uno agrupando una clase especifica de turnos.

B. Definición de las variables en el modelo

VARIABLES EN EL CENTRO DE ATENCIÓN TELEFÓNICA

ANS: Answer. Es el promedio en segundos que el cliente espera para ser atendido por una operadora.

AWT: Average Work Time. Es el promedio en segundos en que la operadora atiende un determinado tipo de servicio.

CBWV-CCS: Call Bussie Work Volume. Total de tiempo en cientos de segundos (CCS) en que el sistema contabiliza a las operadoras atendiendo clientes.

CW-CCS: Call Waiting. Es el total de tiempo en cientos de segundos en que los clientes esperan para ser atendidos.

IDLT- CCS: Idle Time. Contabiliza en cientos de segundos el tiempo en que la operadora se encuentra disponible para atender una llamada.

IPS: Initial Position Seasure. Total de llamadas iniciales que llegan a las posiciones para ser atendidas por las operadoras.

NCWV-CCS: No-Call Bussie Work Volume. Total de tiempo en cientos de segundos en el que las operadoras están no disponibles para recibir llamadas.

PS: Position Seasure. Totaliza los IPS, RPS y TPS.

RPS: Recall Position Seasure. Rellamadas que requieren nuevamente la atención de una operadora.

TPS: Transfer Position Seasure. Transferencias de llamadas que requieren la atención de otra operadora.

WV-CCS: Work Volume. Es la suma del CBWV-CCS y el NCWV-CCS.

%OCC: Es el porcentaje de tiempo en que las operadoras estuvieron ocupadas o no disponibles para atender un cliente.

En el WV_CSS, El volumen de trabajo esta en cientos de segundos, y los periodos son por cada 15 minutos por lo que hay que dividir por 900 segundos es decir por 9 CSS, si las operadoras trabajaran al 100%, por lo que se considera que trabajan a un 84 % de su capacidad de atención, es decir el %OCC se considera de un 16 %.

La fórmula para obtener el número de operadoras para atender el servicio esta dada por: WV_CSS / (9 * 0.84)

VARIABLES EN EL MODELO

Demanda de las operadoras: Operadoras que se requieren para atender el volumen de trabajo, por cada cuarto de hora.

Turno Diurno: comprende de las 7:00 a.m. a las 20:00 hrs. y tiene una duración de 8 horas[100], con una hora de descanso por lo queda 28 intervalos de ¼ de hora laborable.

Turno Nocturno: comprende de las 20:00 p.m. a las 7:00 hrs. del día siguiente y tiene una duración de 7 horas con una hora de descanso por lo queda 24 intervalos de ¼ de hora laborable.

Turno Mixto: comprende de las 05:00 a.m. a las 22:00 hrs. y tiene una duración de 7.5 horas con una hora de descanso por lo queda 26 intervalos de ¼ de hora laborable.

[100] Cláusula 77 del contrato Colectivo de Trabajo de Teléfonos de México.

C. Formulación del modelo[101]

a) Modelado de las tasas de llegada mediante series de tiempo con la metodología de Winter

Las tasas de arribo al sistema se pueden modelar como una serie de tiempo dado que se trata de un conjunto de observaciones hechas en intervalos constantes de tiempo (¼ de hora en este caso). De esta manera, es posible utilizar la teoría de pronósticos de series de tiempo para modelar estas tasas de arribo con sustento estadístico: se emplea el modelo de Suavizado Exponencial y la Metodología de Winter.

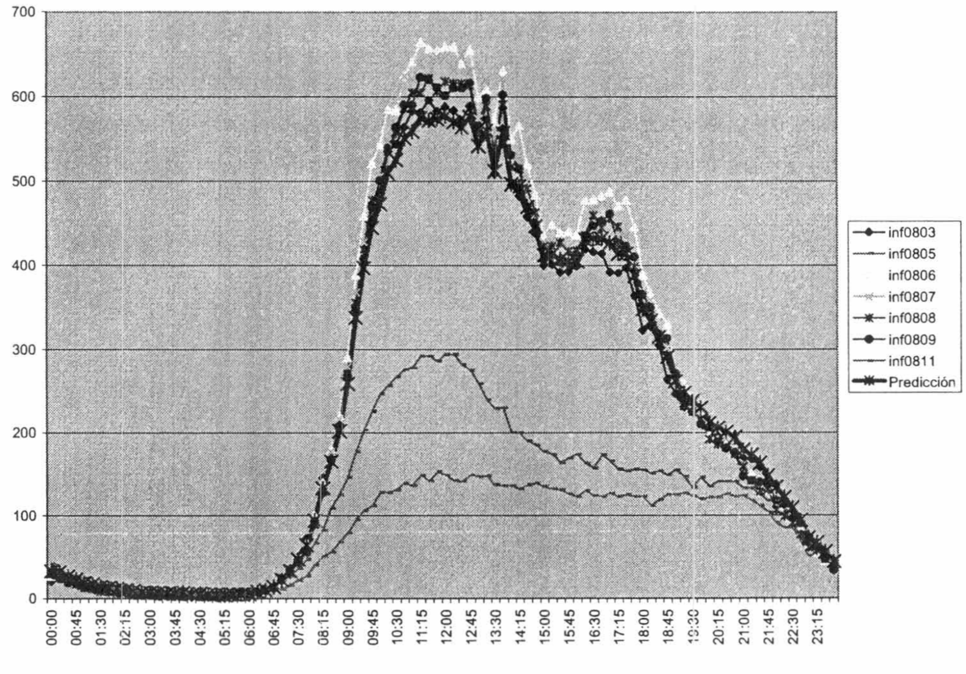


FIGURA 21. PATRÓN TÍPICO DE LLAMADAS LOS SIETE DÍAS DE LA SEMANA

---

[101] Modelo adecuado en base a las necesidades del sistema

POR HORA DEL DÍA.[102]

b) Modelo de Programación de horarios

Para poder elaborar un programa de horarios que satisfaga las necesidades de operadoras, por ¼ hora, su formulará un modelo de programación lineal entera (PL).

Este modelo busca determinar la cantidad de operadoras telefónicas de determinada modalidad[103], que deben trabajar en determinado horario y tomar su pausa de descanso. Además, tienen como restricciones las necesidades de operadoras por ¼ de hora y los programas de horarios permisibles y, como objetivo, minimizar los costos de contratación y desviaciones sobre las necesidades.

Función Objetivo:

Minimizar la cantidad de operadoras que se requieren para cubrir la demanda en el centro de atención telefónica, en los diferentes horarios de trabajo.

Modelo de la PROGRAMACIÓN LINEAL:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{67} \sum_{k=1}^{96} C_i X_{ik}$$

Sujeta a las siguientes restricciones:

$$\sum_{i=1}^{67} X_{ik} = 1$$

(para i=1 .. 67 horarios diferentes de trabajo)

$$\sum_{i=1}^{96} C_i X_{ik} \geq Demanda_k$$

(para j=1 .. 96 cuartos de hora del día)

$$C_i \geq 0; \qquad X_{ik} \geq 0$$

---

102 Vid. Anexo

103 Duración de la Jornada Laboral

donde:

C_i: Cantidad de operadoras telefónicas presentes asignadas al horario "X_i"

X_{ik}: número de horario "X_i" asignado al periodo_k

Demanda_k: Demanda de operadoras telefónicas necesarias para el Periodo_k

Periodo_k: Periodo de tiempo "k" en intervalos de quince minutos en los que se divide el día.

$$X_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{Si el horario } X_i \text{ cubre el periodo k} \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Reducción y abstracción del sistema real a un diagrama de flujo lógico, del modelo de asignación de operadoras, considerando todas las variables a incorporar en el modelo.

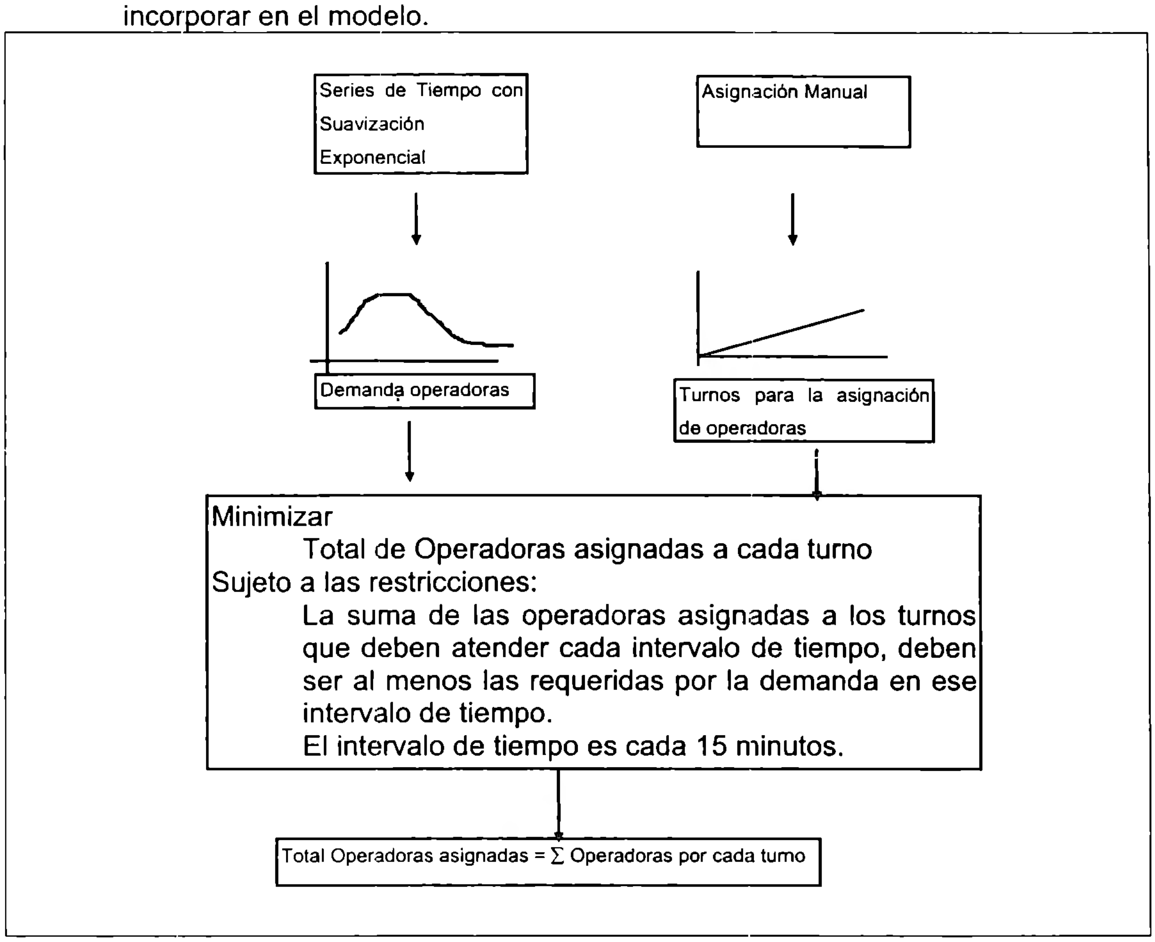


FIGURA 22. Modelo de la programación de horarios en PL

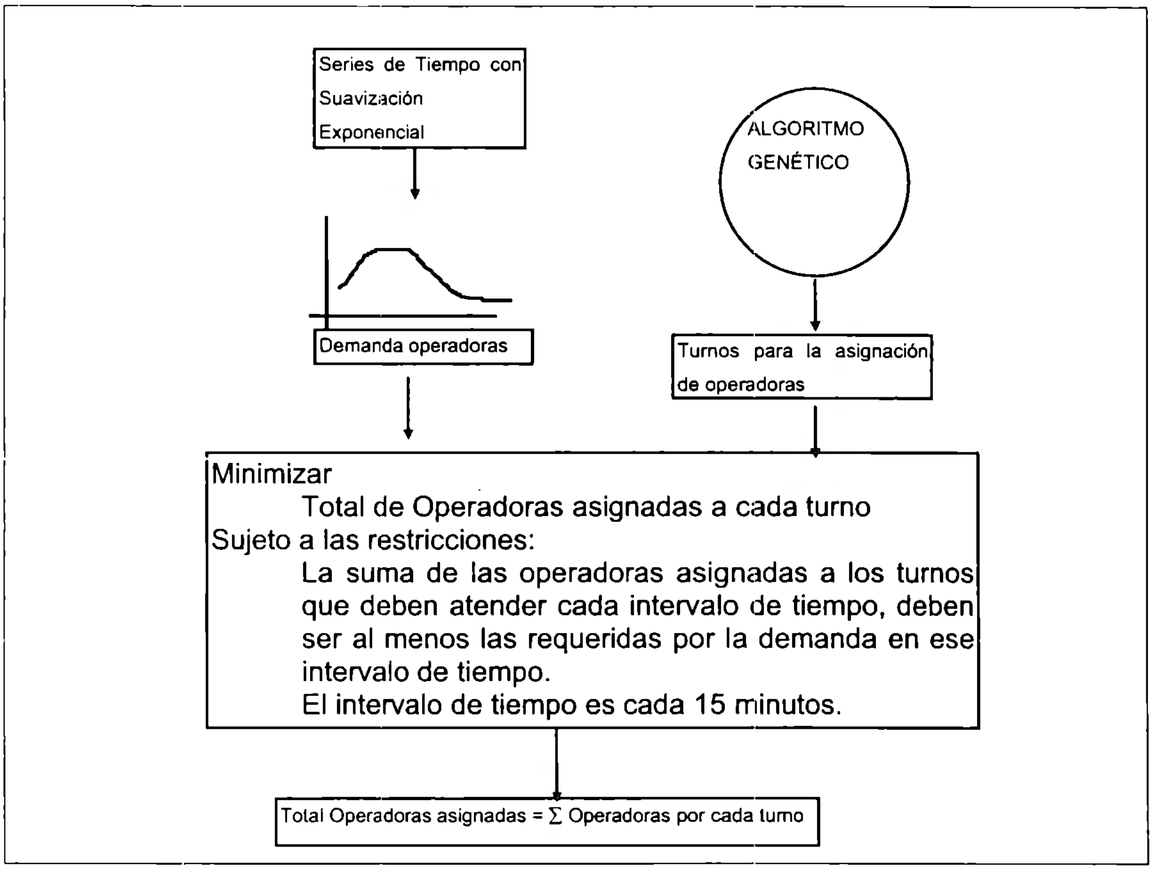


FIGURA 23. Modelo de la programación de horarios en PL incorporando Algoritmos Genéticos

c) Modelo del Algoritmo Genético

Objetivo del AG: extraer del conjunto total de turnos el subconjunto que se ajuste mejor a la tendencia de la demanda del cliente a través de la metaheurística.

La combinación de turnos y personas cuando estos valores son muy grandes, da una cantidad exponencial, por lo que el AG sólo trabajara con turnos y así teniendo una población de 5000 turnos se reduce a tan sólo 67 turnos y estos junto con las operadoras se introduce en el modelo de PL, de esta manera, el AG hace su trabajo con la meta-heurística para encontrar los turnos que mejor contribuyen y se ajustan a la demanda sin dejar tanta holgura cuando se tiene poca demanda.

Representación de los datos

Un parámetro discreto (un solo número)

Sistema de Posición Base Factorial SPBF)

$$NumeroDiscreto = \sum_{i=0}^{n} (L_i * i!)$$

Donde L: es la lista de la secuencia modificada

i: índice de la lista modificada

n: total de elementos

Dado que se cuenta con 5000 turnos, y se esta empleando Para esta el SPBF, se tienen 7 posiciones: que corresponden al 7!,6!,5!,4!,3!,2!,1!; que corresponden respectivamente a 5040,720,120,24,6,2,1, como se vio en la sec. E Representación del Capítulo 3, los dígitos que puede ir tomando son de 0 a 7, de 0 a 6, y asi sucesivamente en base a su posición factorial.

Se separaron las agrupaciones de turnos ya que tienen diferente cobertura de horarios, los Diurnos abarcan 7 horas y el mixto y nocturno 6.5 y 6 horas respectivamente. El turno diurno abarca 1000 horarios distintos, de esta manera tenemos con un número discreto del 1 al 1000 un turno diferente, por lo que el ámbito se cubre con el 6!, Ejemplo:

a) 545,0,4,2,2,2,1,"042221"

b) 624,0,5,1,0,0,0,"051000"

Tamaño de la Población

En base al requerimiento de nuestro problema es conjuntar turnos en grupos de 67 individuos.

Inicialización de la Población

Parte Elitista: como se menciono en el capitulo 3 sección 4.D Métodos de selección, se toman a los individuos más aptos, ejemplo entre el turno D001 cuya aptitud es de 1537 y el D002 cuya actitud es de 1444, se elegiría el turno D001

Parte aleatoria: la parte restante se toma con números aleatorios que van del 1 al 5000.

Función de Aptitud

Esta dada por que tanto cubre la demanda de la población

$$Max\sum_{i=1}^{67}\sum_{j=1}^{96} Poblacion_{ij} * Demanda_j$$

Ejemplo:

{"DEM","T","Ent","Sal","ini","Fin",21,19,23,23,27,26,30,27,36,42,58,58,64,64,65,65,67,67,68,66,70,72,67,65,67,69,59,59,51,48,40,40,41,40,37,36,37,41,50,51,51,51,53,53,53,53,52,52,52,50,46,46,43,41,37,40,38,39,33,33,31,31,31,31,20,20,16,16,13,13,9,9,6,6,4,4,2,2,4,4,4,4,6,6,6,6,6,6,9,9,11,11,16,16,18,18,},

{"D001","1","07:00","15:00","07:00","08:00",0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1537},

{"D002","1","07:00","15:00","14:00","15:00",1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1444},

Se multiplican los 96 intervalos de tiempo de cada turno por su correspondiente demanda.

Donde:
$Poblacion_{ij}$ = 1 Si cubre la demanda
$Poblacion_{ij}$ = 0 No cubre la demanda

Por lo tanto para D001, se tiene 1537 y para D002, se tiene 1444

Criterio de selección

Torneo: para seleccionar de entro dos hijos se elige en base a la función de aptitud.

Operadores Genéticos

Cruza de un solo punto:

Ejemplo punto de cruce en la tercera posición:

a) el número discreto 545 representado en SPBF es "042221"

b) el número discreto 624 representado en SPBF es "051000" por lo que

para 545 tenemos 042 221 y

para 624 tenemos 051 000 dan como hijos

042 000 → 528, ya que 0*720+4*120+2*24+0*6+0*2+0*1=528

051 221 → 641, ya que 0*720+5*120+1*24+2*6+2*2+1*1=641

Mutación de una posición del SPBF

Ejemplo punto de mutación posición 4 de derecha a izquierda:

a) el número discreto 545 representado en SPBF es "042221"

valor aleatorio con rango de 0 a su posición, en este caso de 0 a 4, valor aleatorio 3, nuevo valor "04<u>3</u>221", correspondiente al turno 569, ya que 0*720+4*120+3*24+2*6+2*2+1*1=569

Probabilidades de aplicación de los operadores

Cruza 80%

Mutación 0.5%

Criterios de Paro

Se hace por un número determinado de generaciones, en este criterio no se utiliza hasta que llegue a una solución satisfactoria porque esto se hace en el modelo de Programación Lineal.

Para ver observar el comportamiento poblacional ver anexo E "Validación de la corrida en PL, Software Lindo Ver. 6.1 (Utilizando AG)".

En conclusión: aquí en el AG la parte interesante es que no se le esta dando todas las partes del problema, es más se le esta limitando a utilizar sólo los turnos y la parte de cobertura de horarios solamente se utiliza un segmento de 96 partes binarias en donde el valor de "1" cubre el horario, es decir el intervalo de tiempo y "0" no lo cubre, con esto le damos la facilidad al AG, que la heurística explore muchas horizontes sin gastar tiempo en complicadas validaciones y con esto garantizar una exploración abundante y profunda.

D. Preparación de datos

Para establecer la demanda del cliente vamos a utilizar la simulación del análisis de una serie de tiempo mediante la metodología de Winter, cabe aclarar que para los datos históricos del centro de atención, no se adecuo la metodología Box-Jenkins ni el modelo ARIMA[104].

Una vez que tenemos la demanda requerida por cada cuarto de hora, se toma como criterio de evaluación, es decir cuales turnos cubren mayor demanda y de esta manera determinar cuales son los mejores turnos a considerar dentro del modelo.

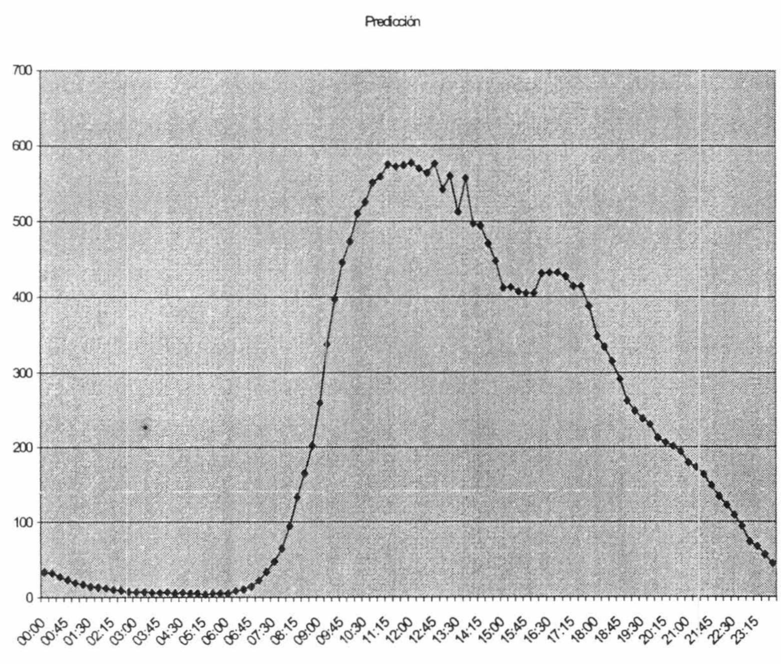


FIGURA 24. Pronostico de la demanda con la metodología Winter

---

[104] Ferran Aranaz,Magdalena "<u>Programación y Análisis estadístico</u>", Ed. Mc Graw Hill, 2002

a) Modelo de Programación Lineal

Como se tienen 5 mil turnos sólo se elegirán los 67 turnos más representativos, estos turnos se eligieron de manera manual, en base a la experiencia del jefe de la oficina de tráfico, y además el software no admite más variables, de esta manera ya se puede introducir los turnos y establecer las ecuaciones con coeficientes estructurales dentro de la programación lineal con estos turnos y obtenemos **el resultado optimo para estos valores**. Ver anexo C.

b) Modelo de Programación Lineal con Algoritmos Genéticos

Como se tienen 5 mil turnos sólo se elegirán los 67 turnos más representativos, pero la combinación de estos turnos, genera una cantidad muy grande de **agrupaciones de turnos**, este valor ya se observo en la ecuación (2.11); **para elegir la mejor agrupación de turnos, se empleo un algoritmo genético**, tomando como criterio de elección los turnos que tuvieran una mayor cobertura de ¼ de hora de operadora (ver anexo E), la cantidad de turnos en las agrupaciones no debe rebasar la cantidad de operadoras telefónicas, con estos datos ya se puede introducir dentro de la programación lineal con estos turnos emanados del algoritmo genético y obtenemos **el resultado optimo para estos valores**. Ver anexo E.

E. Translación del modelo

En primer lugar tenemos los **Horarios de los turnos**, en donde aparece por cada turno que periodos abarca, incluyendo sus descansos, este modelo lo llamaremos: **Modelo funcional**, ver listado en el anexo D. Con este modelo podemos identificar por cada turno que ¼ de hora esta cubriendo, es decir el horario de los turnos versus los 96 intervalos de tiempo.

Descripción del modelo en un lenguaje aceptable para la computadora que se usará: el software de programación LINDO versión 6.1

Determinar los **criterios** de evaluación.

Se debe elegir los turnos que cubran mayor las necesidades de la empresa, es decir los turnos que atiendan a más clientes, esto se dificulta por que hay que considerar los intervalos de tiempo en que toma descanso el trabajador. Sean:

D_i = Numero de operadoras telefónicas que laboran en el turno Diurno con su respectivo descanso donde i=1..26

N_j = Numero de operadoras telefónicas que laboran en el turno Nocturno con su respectivo descanso donde j=1..27

M_k = Numero de operadoras telefónicas que laboran en el turno Mixto con su respectivo descanso donde k=1..14

Por lo tanto son un total de 67 variables, que se muestran en el Anexo B como "Horarios de turnos para el modelo de programación lineal", en una tabla con cinco columnas la primera define la variable que representa el turno, las dos siguientes representan la entrada y salida laboral para ese turno y las dos últimas son el inicio y fin del periodo de descanso

a) Modelo de Programación Lineal

Características del sistema bajo estudio.

Esta asignación de personal a los horarios de trabajo lo realizan 40 personas de manera manual y se tardan alrededor de tres semanas, para poder llegar a este resultado ver anexo **Grafica de Turnos Sala Guadalajara,** de esta manera, resolverlo bajo estas características dio un resultado de 158 personas, sin embargo esto lo podemos representar en términos de PL que mostramos a continuación:

Modelo programado en PL (LINDO ver. 6.1), versión completa en el anexo D:

Minimize
$\text{Horario}_1 + \text{Horario}_2 + .. + \text{Horario}_{67}$
Subject to
$\text{Periodo}_1)\ \text{horario}_{i1} + \text{horario}_{i2} \ldots \text{horario}_{i67} >= \text{DemandaOperadora}_1$
$\text{Periodo}_2)\ \text{horario}_{i1} + \text{horario}_{i2} \ldots \text{horario}_{i67} >= \text{DemandaOperadora}_1$
....
$\text{Periodo}_{96})\ \text{horario}_{i1} + \text{horario}_{i2} \ldots \text{horario}_{i67} >= \text{DemandaOperadora}_{96}$

b) Modelo de Programación Lineal con Algoritmos Genéticos

Características del sistema bajo estudio.

La agrupación de horarios se realizo mediante algoritmos genéticos, una vez que se tiene la agrupación de los 5000 horarios sólo 67 de ellos, se introducen en el modelo de PL, para observar este resultado ver anexo **Grafica de Turnos,** de esta manera, resolverlo bajo estas características dio un resultado de 126 :

F. Validación del modelo

Interna:

Se debe validar que cada horario cubra exactamente su periodo correspondiente, es decir el turno diurno sólo cubre 28 intervalos de ¼ de hora, el turno nocturno cubre 24 intervalos de ¼ de horas y el turno mixto cubre 26 intervalos de ¼ de hora, ejemplo si el horario es de 7:00 a 14:00 hrs., el intervalo cubierto para este turno es de 7:00 a 13:45, ya que si incluimos las 14:00 hrs. correspondería de 14:00 a 14:15. Si tomamos en cuenta que en el modelo de PL cada columna representa un turno y cada fila representa cada ¼ de hora del día, cada columna no debe exceder la cobertura de cada turno, ejemplo un error sería tener 29 intervalos de cuarto de hora cubiertos por algún turno, ya que el máximo permitido es el turno diurno que acepta hasta 28 ¼ de hora, es decir, la frecuencia del turno diurno en los 96 periodos del día es de 28.

Externa:

Al momento de comparar los **resultados** de forma manual (elaborarlo llevo 40 personas durante 3 semanas) contra el modelo de PL con las mismas restricciones (ejecutarlo llevo menos de 5 minutos) se muestra que el modelo de PL da el mismo resultado de 158 personas.

Para validarlo nos basamos en el modelo funcional, Por cada ¼ de hora que hay en el día compararlo contra los horarios que salieron resultantes y asignarles a cada ¼ de hora la cantidad de operadoras resultantes, la suma de cada cuarto de hora debe ser igual o superior a la requerida que se obtuvo a través de la serie de tiempo, para esquematizar esta parte se muestra en el anexo D una matriz en una hoja de calculo por cada fila se asigna los turnos que se requieren y en las columnas los 96 periodos del día, a cada periodo en base al turno se le asignan las operadoras contempladas en su turno, como se puede observar la suma por periodo iguala o supera a lo requerido por cada periodo.

Por lo que podemos validar que el modelo PL si esta funcionando adecuadamente y además en un tiempo más cortó obtenemos el mismo resultado, además que se esta corriendo con un software comercial probado y validado en la industria.

G. Experimentación

a) Modelo de Programación Lineal

Corrida del Programa para generar los datos deseados y efectuar el análisis de sensibilidad (ver anexo D versión completa).

```
MINIMIZE
            D001  +D002 +D003 +D004 +D005 +D006 ... +M010 +M011 +M012 +M013 +M014
SUBJECT TO
07:00 )           +D002 +D003 +D004 +D005 +D006 ... +M010 +M011 +M012 +M013 +M014 >= 21
07:15 )           +D002 +D003 +D004 +D005 +D006 ... +M010 +M011 +M012 +M013 +M014 >= 19
07:30 )           +D002 +D003 +D004 +D005 +D006 ... +M010       +M012 +M013 +M014 >= 23
07:45 )           +D002 +D003 +D004 +D005 +D006 ... +M010       +M012 +M013 +M014 >= 23
08:00 )     +D001 +D002 +D003 +D004 +D005 +D006 ... +M010       +M012 +M013 +M014 >= 27
08:15 )     +D001 +D002 +D003 +D004 +D005 +D006 ... +M010       +M012 +M013 +M014 >= 26
08:30 )     +D001 +D002 +D003 +D004 +D005 +D006 ... +M010 +M011 +M012 +M013 +M014 >= 30
08:45 )     +D001 +D002 +D003 +D004 +D005 +D006 ... +M010 +M011 +M012 +M013 +M014 >= 27
09:00 )     +D001 +D002       +D004 +D005 +D006 ...       +M011 +M012 +M013 +M014 >= 36
09:15 )     +D001 +D002             +D005 +D006           +M011       +M013 +M014 >= 42

05:00 )                                         ... +M010 +M011 +M012 +M013       >=  9
05:15 )                                         ... +M010 +M011 +M012 +M013       >=  9
05:30 )                                         ... +M010 +M011 +M012 +M013       >= 11
05:45 )                                         ... +M010 +M011 +M012 +M013       >= 11
06:00 )                                             +M010 +M011 +M012 +M013       >= 16
06:15 )                                             +M010 +M011 +M012 +M013       >= 16
06:30 )                                             +M010 +M011 +M012 +M013       >= 18
```

FIGURA 25. Modelo PL para la asignación de horarios de trabajo para 67 turnos

Donde hay 96 restricciones por cada ¼ de hora que hay durante el día, cada restricción contiene que turnos abarca este ¼ de hora y señala cuantas operadoras deben estar cubriendo este ¼ de hora.

Ejemplo la restricción de las 7:00) la cubren los turnos D002 al D015 ya que el inicio de turno los empiezan a las 7:00 a.m.; para esta restricción no hay ningún turno de noche y los turnos Mixtos que lo cubren empiezan a laborar previo de las 7:00 a.m. son M001, M002 y del M004 al M014, además deben ser al menos 21 operadoras telefónicas por eso tiene el signo ">=".

b) Modelo de Programación Lineal con Algoritmos Genéticos

Corrida del Programa para generar los datos deseados y efectuar el análisis de sensibilidad (ver anexo E versión completa).

H. Análisis, interpretación y resultados del modelo

a) Modelo de Programación Lineal

Resumen Resultados Obtenidos

TURNOS	DIURNO	MIXTO	NOCTURNO	TOTAL
HORARIOS	26	14	27	**67**
PERSONAL	69	18	71	**158**
Personal Porcentaje	0.44%	0.11%	0.45%	
Periodos de 15 Min., por turno	28	26	24	
Total Periodos de 15 Min., por horarios	728	364	648	**1740**
TOTAL de ¼ Hora-Operadoras Asignada por TURNO	1932	468	1704	**4104**

Tabla 12. Resultados del Modelo de Programación Lineal

Análisis de la asignación de turnos dentro del modelo dado que son 67 turnos versus 96 intervalos de tiempo (¼ horas) tenemos una matriz de 6432 celdas, sin embargo sólo hacen interrelación 1740. Si comparamos la suma de la demanda de las operadoras requeridas por ¼ de hora durante el día (3296) contra el total de ¼ Hora-Operadora asignada por turno (4104), hay una diferencia de 808 ¼ hora-Operadora de más, esto lo obtenemos de dos maneras al asignar al personal correspondiente y restarle la demanda, o bien, irnos directamente a la salida del Modelo en PL y ver la parte de "SURPLUS", y aquí aparecen las asignaciones de más, las sumamos y nos da el valor de 808.

b) Modelo de Programación Lineal con Algoritmos Genéticos

Resumen Resultados Obtenidos

TURNOS	DIURNO	MIXTO	NOCTURNO	**TOTAL**
HORARIOS	26	14	27	**67**
PERSONAL	55	27	44	**126**
Personal Porcentaje	0.44%	0.21%	0.35%	
Periodos de 15 Min., por turno	28	26	24	
Total Periodos de 15 Min., por horarios	728	364	648	**1740**
TOTAL de ¼ Hora-Operadoras Asignada por TURNO	1540	702	1056	**3298**

Tabla 13. Resultados obtenido del Modelo PL utilizando Algoritmos Genéticos

Análisis de la asignación de turnos dentro del modelo dado que son 67 turnos versus 96 intervalos de tiempo (¼ horas) tenemos una matriz de 6432 celdas, sin embargo sólo hacen interrelación 1740. Si comparamos la suma de la demanda de las operadoras requeridas por ¼ de hora durante el día (3296) contra el total de ¼ Hora-Operadora asignada por turno (3298), hay una diferencia de 2 unidades de ¼ hora-Operadora de más, esto lo obtenemos de dos maneras al asignar al personal correspondiente y restarle la demanda, o bien, irnos directamente a la salida del Modelo en PL y ver la parte de "SURPLUS", y aquí aparecen las asignaciones de más, las sumamos y nos da el valor de 2.

I. Implantación y uso del modelo

a) Modelo de Programación Lineal

Se obtuvo el resultado optimo de los valores introducidos, es decir, con los horarios introducidos se obtuvo un SURPLUS de 808 de ¼ de horas adicionales, por lo que esto es lo que se esta pagando demás, al obtener el porcentaje de 808 de ¼ de hora de más con respecto a los 3296 de ¼ de horas necesarias obtenemos un **25%** es decir con esta solución se esta desaprovechando la cuarta parte del total del personal, por lo que es necesario realizar un cambio de estrategia.

Esta es una de las 10^{153} posibilidades de combinaciones que se pueden hacer, es obvio que no se puede evaluar cada una de las posibles combinaciones, por lo que es necesario utilizar una herramienta que utilice la meta heurística como lo hacen los Algoritmos Genéticos, para poder dar una respuesta más adecuada.

b) Modelo de Programación Lineal con Algoritmos Genéticos

Se obtuvo el resultado optimo de los valores introducidos, es decir, con los turnos introducidos se obtuvo un SURPLUS de 2 unidades de ¼ de horas adicionales, por lo que esto es lo que se esta pagando demás, al obtener el porcentaje de 2 de ¼ de hora de más con respecto a los 3296 de ¼ de horas necesarias obtenemos un 0.06% es decir con esta solución se esta aprovechando al **99.94 %** del total del personal, con esto se demuestra que es una adecuada alternativa de solución.

Esta solución al igual que el caso anterior es una de las 10^{153} posibilidades de combinaciones que se pueden hacer, no se evaluaron cada una de las posibles combinaciones, sin embargo el empleo de la herramienta del Algoritmo Genético, nos proporciono una respuesta adecuada.

J. Documentación

Ver anexo.

Conclusiones del capítulo

Como se puede apreciar cada una de las herramientas utilizadas contribuyen a encontrar una solución adecuada: la serie de tiempo suministra la demanda requerida al modelo de programación lineal, con esto se torna dinámico y se ajusta a la realidad del problema.

Una vez teniendo la demanda por cada ¼ de hora en el día, se determina que la función objetivo a optimizar para el modelo de programación lineal es:

Minimizar

La suma del número de operadoras presentes que van a estar asignadas a cada uno de los 67 horarios.

Restricciones:

- 96 ecuaciones, una por cada ¼ de hora en el día indicando: la suma del número de operadoras presentes, ubicadas en los horarios que abarca este ¼ de hora, debe ser mayor o igual a la demanda de operadoras requeridas para este ¼ de hora.
- En cada horario pueden estar asignadas varias operadoras o ninguna (de 0 a n).

Ahora bien este modelo señalado arriba, para obtener el óptimo, se tendría que correr cada una de las posibles agrupaciones diferentes, como hay 5000 horarios y en base a la experiencia que se tiene para este centro de atención se requieren de 67 turnos la combinación es de 2×10^{153}, por lo que seria inmanejable la situación sin embargo empleando la metaheurística con ayuda de los Algoritmos Genéticos, nos proporciona el grupo de horarios que más se ajusta a la demanda, con esta información se construyen las restricciones, se corre con la misma demanda y se obtiene una solución adecuada.

CONCLUSIONES

"La experiencia no consiste en el número de cosas que se han visto, sino en el número de cosas que se han reflexionado".

José María de Pereda

Se logró dar una solución adecuada al problema de asignación de horarios de trabajo conjuntando los beneficios que proporcionan los modelos matemáticos: series de tiempo y programación lineal con el algoritmo genético, cabe señalar que esta solución proporcionada no puede ser realizada por ningún método tradicional del área de investigación de operaciones

Se **validó el modelo** del problema de asignación de horarios primeramente en cuanto a su funcionamiento: se verificó que cada turno cubra exactamente su horario correspondiente, es decir la cobertura de periodos que contempla el turno diurno sólo cubre 28 intervalos de ¼ de hora el turno nocturno cubre 24 intervalos de ¼ de horas y el turno mixto cubre 26 intervalos de ¼ de hora. Para **validar el resultado** nos basamos en el modelo funcional, por cada ¼ de hora que hay en el día compararlo contra los turnos que salieron resultantes y asignarles a cada ¼ de hora la cantidad de operadoras resultantes, la suma de cada cuarto de hora debe ser igual o superior a la requerida qùe se obtuvo a través de la serie de tiempo, para esquematizar esta parte se muestra en el anexo D una matriz en una hoja de cálculo por cada fila se asigna los turnos que se requieren y en las columnas los 96 periodos del día. El número de operadoras se asignan a cada periodo en base a la cobertura de periodos que contempla el turno, como se puede observar la suma por periodo iguala o supera a lo requerido por cada periodo. Por lo que podemos validar que el modelo PL incorporando series de tiempo y AG si está funcionando adecuadamente, además que se está corriendo con un software comercial probado y validado en la industria.

De acuerdo con los resultados estadísticos obtenidos mediante el modelo de PL incorporando series de tiempo y AG, se encontró evidencia cuantitativa que apoya el planteamiento de la hipótesis que originalmente se planteo:

> ***Los Modelos de Algoritmos Genéticos incorporados a la Programación Lineal proporcionan una solución más eficiente para resolver un problema complejo de asignación de personal a horarios de trabajo.***

Por lo tanto se acepta la hipótesis planteada y se concluye que para el caso práctico del centro de atención de llamadas, dado que al momento de comparar los modelo de PL el tradicional versus el modelo PL incorporando AG, nos podemos percatar que hay un **99.94 % de ajuste en la curva de la demanda**, mejorando en un 25% al modelo tradicional, por lo tanto podemos darnos cuenta del grado de utilidad que se puede obtener al emplear un modelo de PL incorporando adecuadamente los Algoritmos Genéticos.

Recomiendo enfáticamente que ***se revise el modelo de PL y el Algoritmos Genético a modelar*** con los expertos de esa información, para que se determine el flujo de la información y la ponderación de los elementos a introducir; en el presente trabajo se consultaron a expertos en el área de tráfico, para que ellos validaran que la información y los resultados fueran los adecuados.

Este proyecto contó con una información histórica, misma que nos permitió utilizar la metodología de Winter, de series de tiempo ya que ésta requiere como insumo la experiencia anterior y toma la estacionalidad de los datos suministrados para que se pueda obtener el pronóstico de eventos futuros, en este caso la demanda del volumen de trabajo de las operadoras telefónicas.

Limitaciones del Estudio

En este estudio de corte cuantitativo no se abordaron aspectos tales como: la motivación del personal, compromiso con la organización, condiciones de trabajo, clima organizacional que son fundamentales para que el personal cumpla eficientemente con sus horarios laborables: estos aspectos pueden obstaculizar que una programación de horarios de trabajo cumpla su objetivo.

Otras limitantes son las fallas técnicas, es decir, el personal está disponible y desea atender el cliente pero no tiene los instrumentos necesarios para poder realizar su labor, computadora, libreta, bolígrafo, teléfono, etc.

Otra limitante de menos concurrencia son los siniestros: sismos, atentados, robos, que incluso provocan el abandono de labores de los empleados.

También podemos considerar limitante a las ausencias del personal, retardos, tiempos muertos ya que están programadas pero si se ausentan: ya sea por un problema familiar, enfermedad, permiso, o se retraza o esta descansando, etc., repercute en la asignación del personal.

Estos aspecto de motivación, supervisión y plan de contingencias, pueden desmeritar todo el trabajo de planeación que se realiza, porque afecta directamente todo lo que se planeo a futuro, sin embargo, siempre es necesario realizar una adecuada asignación de personal.

Trabajos futuros

Recomendación hacer un seguimiento en estos turnos de trabajo qué problemas se presentan, Sería muy interesante aplicar los aspectos técnicos, matemáticos, computacionales que se emplean para la asignación de personal, con aspectos psicológicos en donde se midiera la respuesta de eficiencia real del trabajador, por ejemplo nos es lo mismo que un cliente realice una llamada a las 14:00 hrs., que a las 2:00 a.m., ¿cómo afecta el trabajar de noche?, y si es el mismo rendimiento, o como mejorarlo, pero esto es motivo de otra investigación.

BIBLIOGRAFÍA

ABRAMSON, D.; J. Abela, "A Parallel Genetic Algorithm for Solving the School Timetabling Problem", ***Mathematics and Computer Science***, High Performance Computation Project Division of Information Technology C.S.I.R.O. 723 Swanston St, Carlton, 3053 Australia. 15 Australian Computer Science Conference, Hobart, Feb 1992.

AL-YAKOOB, Salem M. and Hanif D. Sherali "Mathematical programming models and algorithms for a class-faculty assignment problem" ***European Journal of Operational Reserch 173*** *p. 488-507; www.sciencedirect.com Department of Mathematics and Computer Science, College of Science, Kuwait University, Kuwait 2006.*

ARIMA, J. "Analogy by Simulation -A Weak Justification Method" ***ICOT RESEARCH CENTER*** TOKYO, JAPAN TECHNICAL MEMORANDUM EDICIÓN 1990, 5 p. INSTITUTE FOR NEW GENERATION COMPUTER.

AZMAT, Carlos S.; Widmer Marino "A case study of single shift planning and scheduling under annualized hours: A simple three step approach", ***European Journal of Operational Research 153,*** pp. 148-175, *www.elsevier.com/locate/dsw , University of Fribourg. 2004.*

BAUER, Richard J. ***Genetic Algorithms and Investment Strategies*** Ed. John Wiley & Sons, Inc. ISBN 0-471-57679-4, 1994

BELLANTI, F. Carello, G. Della Croce, F. and Tadeo, R. "A greedy-based neighborhood search approach to a nurse rostering problem" ***European Journal of Operational Reserch 153*** *p. 28-40; www.sciencedirect.com Politecnico di Tarino, Turin, Italy 2004.*

BONSÓN, Enrique ***Tecnologías Inteligentes para la gestión Empresarial*** Ed. Alfaomega ra-ma, ISBN 970-15-0436-4, 1999

BOOKER, L.B.; Goldberg, D.E., and Holland, J.H., ***Classifier Systems and Genetic Algorithms***, Artificial Intelligence, 40, 1989, pp. 235-282.

BRAUNER, Nadia; Rachid Echahed; Gerd Finke; Hanns Gregor and Frederic Prost "Specializing Narrowing for Timetable Generation: A Case Study", M. Hermenegildo and D. Cabeza (Eds.): PADL 2005, LNCS 3340 pp 22-36, ***Springer – Verlag Berling Heidelberg,*** *Institut d'Informatique et de Methématiques Appliquées de Grenoble, France 2005.*

BUCKLES, B.P; and Petry, F.E; "Genetic Algorithms", ***IEEE Computer Society Press***, 1992, 109 p.

BUDNICK, Frank S. ***Matemáticas Aplicadas para Admón., Economía y Ciencias Sociales***, México, ISBN 968-451-106-X, Ed. Mc Graw Hill

BURKE Edmund; De Causmaecker Patrick and Berghe, Greet Vandem "The State of the Art of Nurse Rostering", School of Computer Science & IT,University of Nothingham, Jubilee Campus, UK 2004

COELLO, Carlos. "An updated survey of GA-based multiobjective optimization techniques" ***ACM Computing Surveys***, vol.32, no.2, p.109-143 (junio de 2000). p 112

COSS BU, Raúl; ***Análisis y evaluación de proyectos de inversión*** Editorial Limusa, 1993, ISBN 968-18-1327-8, pp. 375

DAMASSEY, Sophie; Pesant Gilles y Rousseau Luis-Martin "A cost – Regular Based Irbid Column Generation Approach" ***Springer Science + Business Media,*** *Mathematics of information technology and Complex Sistems (MITACS), France 2006.*

DAMASSEY, Sophie; Pesant Gilles y Rousseau Luis-Martin "Constraint Programming Based Column Generation for Employee Timetabling " Centre for Research on Transportation (CRT), Universidad de Montreal, Canada 2005.

DAVIS, L. (Editor), "Handbook of Genetic Algorithms", ***Van Nostrand Reinhold***, 1991, 385 p.

DAWKINS, Richard. "The Blind Watchmaker: Why the Evidence of Evolution Reveals a Universe Without Design". **W.W. Norton**, 1996.

EDMUND K. Burke, Patrick de Causmaecker, Sanja Petrovic1,Greet Vanden Berghe "Metaheuristics for handling Time Interval Coverage Constraints in Nurse Scheduling" ***School of Computer Science & IT, University of Nottingham***, Jubilee Campus Nottingham NG8 1BB, UK, 2006

FERNÁNDEZ Cristina; Santos Matilde "A non-standard Genetic Algorithm Approach to Solve Constrained School Timetabling Problems"; ***Centro de Investigaciones Energéticas, Medioambientales y Tecnológicas (CIEMAT)****; Madrid España. 2001*

FILHO, Ribeiro , J.L.; Treleaven, Ph.C., and Alippi, C., "Genetic-Algorithm Programming Environments", ***IEEE Computer***, June 1994, pp. 28-43.

FLEMING, Peter & R.C. Purshouse. "Evolutionary algorithms in control systems engineering: a survey." ***Control Engineering Practice***, vol.10, p.1.228 (2002).

FORREST, Stephanie. "*Genetic algorithms: principles of natural selection applied to computation.*" ***Science***, vol.261, p.872-878 (1993

FREY, Jeffrey (University of Maryland) "*Device Simulation For New Century*" ***Fed Journal*** TOKYO, JAPAN EDITION 1992, 8 p.

GEN, Mitsuo ; Runwei Cheng ***Genetic Algorithms and Engineering Design,*** Ed. John Wiley and sons series in engineering design and automation, ISBN 0-471-12741-8, 1997

GOLDBERG, David. ***Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning***. Addison-Wesley, 1989.

GOMES, Carla P.; Selman, Kautz; Bart Henry "*Boosting Combinatorial Search Through Randomization*" ***Computer Science Department Cornell University Ithaca***, AT&T Labs 180 Park Avenue Florham Park, NJ In Proc. AAAI98, Madison, WI, July 1998.

GOULD F. J. & EPPEN G. D. ***Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa*** PRENTICE HALL MÉXICO PRIMERA EDICIÓN 1989, 783 p.

GRÖBNER Matthias; Wilke, Peter, and Bütcher, Stefan "A Standard Framework for Timetabling Problems", ***Springer – Verlag Berling Heidelberg,*** *Centre for Intelligent Information Processing Systems (CIIPS) Dept. of Electrical & Electronic Engineering The University of Western Australia 2002.*

HAUPT, Randy y Sue Ellen Haupt. ***Practical Genetic Algorithms***. John Wiley & Sons, 1998. p.147

HOLLAND, John. "Genetic algorithms." Scientific American, julio de 1992, p.72.

IMAI, A. & TICK E. "A Shared-memory Multiprocess Or Garbage Collector And Its Evaluation For Logic" ***ICOT RESEARCH CENTER*** TOKYO, JAPAN TECHNICAL REPORT EDITION 1991, 17 p. INSTITUTE FOR NEW GENERATION COMPUTER T.

KAPLANSKY, Eliezer and Meisels, Amnon "Distributed personnel scheduling --- negotiation among acheduling agents" ***Springer Science + Business Media,*** *LLC 2007;* Dept. of mathematics and computer science, University of the Negev, Israel. *Published online 17July 2007*

KAPLANSKY, Eliezer and Meisels, Amnon *"Iterative restart technique for solving timetabling problems",* ***European Journal of Operational Research 153,*** pp. 41-50, www.elsevier.com/locate/dsw *, University of Negev, Israel. 2004.*

KAUFMANN, A., y Faure, R., ***Invitación a la Investigación de Operaciones***, Segunda Edición, CECSA, México, 1977, 311 p.

KIERAN Burke, Edmund and Sanja Petrovic "Recent research directions in automated timetabling" ***European Journal of Operational Reserch 140*** *p. 266-280;* www.sciencedirect.com *Automated Scheduling, Optimization an Planing (ASAP) Research Group, School of Computer Science and Information Technology, University of Nottingham, Jubilee Campus, Nottingham NG8 1 BB, UK 2002.*

KONAGAYA A. & YAMANISHI K. (NEC) "Stochastic Decision Predicates: A Schema To Represent Motifs" ***ICOT RESEARCH*** CENTER TOKYO, JAPAN TECHNICAL REPORT EDITION 1991, INSTITUTE FOR NEW GENERATION COMPUTER T. 7 p.

KOZA, J., ***Genetic Programming II: Automatic Discovery of Reusable Programs***, The MIT Press, 1992, **ISBN-13:** 978-0262111898 746 p.

KOZA, John, Martin Keane, Matthew Streeter, William Mydlowec, Jessen Yu y Guido Lanza. Genetic Programming IV: ***Routine Human-Competitive Machine Intelligence***. Kluwer Academic Publishers, 2003. p.413

KUME, Hitoshi ***Statistical Methods For Quality Improvement*** AOTS TOKYO, JAPAN OCTAVA EDICIÓN 1991, 231 p. THE ASSOCIATION FOR OVERSEAS TECHNICAL S

MARKOVITCH, Shaul and Shatil, Asaf "Speedup Learning for Repair-based Search by Identifying Redundant Steps"; **Journal of Machine Learning Reserch 4 p 649-682,** *Computer Science Department Technion, Israel, 2003*

MEISELS, Amnon; and Natalia Lusternik "Experiments on Networks of Employee Timetabling Problems" Dept. of mathematics and computer science, University of the Negev, Israel. site: www.webofscience.com, 1998

MEISELS, Amnon; Ehud Gudes and Gadi Solotorevsky "Combining Rules and constraints for employee Timetabling" Dept. of mathematics and computer science, University of the Negev, Israel. 1997 site:citeseer.ist.psu.edu

MEISELS, Amnon; Ehud Gudes and Gadi Solotorevsky "Modelling and Solving Employee Timetabling Problems" Dept. of mathematics and computer science, University of the Negev, Israel. site:citeseer.ist.psu.edu. 1999

MENDENHALL, William & REINMUTH, James E. ***Estadística para Administración y Economía*** GPO E. IBEROAMERICA MÉXICO PRIMERA EDICIÓN ISBN 968-7270-13-6, 1988, 707 p.

MEYER, Harald "Solving Rostering Tasks as Constraint Optimization" www.webofscience.com/ 1999

MITCHELL, Melanie. ***An Introduction to Genetic Algorithms***. MIT Press, **ISBN-13:** 978-0262631853 1996. p. 2

PARZE, Emanuel ***Teoría Moderna de Probabilidades y sus aplicaciones***, Ed. Limusa ISBN 968-18-0735-9, 1982, 509 P.

RASCON, Octavio A. ***Introducción a la teoría de probabilidades*** TEXTOS PROG. UNAM MÉXICO D.F. CUARTA EDICIÓN 1988, 433 p.

RAWLINS, G.J.E. Foundations of Genetic Algorithms, ***Morgan Kaufmann Publishers***, 1991, 341 p.

RHEAULT, Jean Paul, ***Introducción a la teoría de decisiones con aplicaciones a la Administración***, Editorial Limusa México, D.F. ISBN 968-18-0276-4 1980,

RUSSELL, Stuart; Peter Norving ***Inteligencia Artificial un enfoque moderno***, Ed. Prentice Hall, ISBN 968-880-682-X 1996

RUSSO, Edward; Pol U.H. Schoemaker ***Trampas en la Toma de Decisiones***, Ed. Instituto Mexicano de Contadores Públicos A.C. 1993, pp. 271

SCHAERF, Andrea and Amnon Meisels "Solving Employee Timetabling Problems by Generalized Local Search" Dipartimento di Ingegneria Elettrica, Gestionale e Meccanica, Universit'a di Udine, Via delle Scienze 208, 33100 Udine, Italy & _ Department of Mathematics and Computer Science Ben-Gurion University of the Negev, Beer-Sheva, 84-105, Israel; http://citeseer.ist.psu.edu/

SCHMIDT, J. W. & Taylor, R. E. ***Análisis y Simulación de Sistemas Industriales*** Trillas México Primera Edición 1979, 651 p.p.

SCHULZE, Mark A. *Linear Programming for Optimization*, ***Perceptive Scientific Instruments***, Inc. 1998

SHAMBLIN, E. James y G.T Stevens, Jr. ***Investigación de Operaciones un enfoque fundamental,*** trad. de Alberto Duarte Torres y Alberto Ponton, México, Mc Graw Hill, ISBN 968-451-284-8, 1988, 423 p.

SHANON, Robert E. ***Simulación de Sistemas***, Trillas, Primera Edición 1988, ISBN 013-881839-8 428 p.

SIMON, Nadima D. ***Diseños de muestreo, un enfoque administrativo*** Fondo Editorial FCA México, D.F. PRIMERA EDICIÓN 1987, 165 p.

SMITH, R.E.; Goldberg, D.E., and Earickson, J.A., *"SGA-C : A C-language Implementation of a Simple Genetic Algorithm"*, ***TCGA Report*** No. 91002, The Clearinghouse for Genetic Algorithms, The University of Alabama, May 14, 1991.

SRINIVAS, M., and Patnaik, L.M., *Genetic Algorithms: A Survey*, ***IEEE Computer***, June 1994, pp. 17-26.

TAHA, Hamdy A. ***Investigación de Operaciones***, México, Ed. Prentice Hall pp. 165, ISBN 970-26-0498-2, 2005

TERASHIMA Marin, Hugo; Ross,Peter; Valenzuela-Rendón, Manuel ***Evolution of Constraint Satisfaction Strategies in Examination Timetabling***, ITESM-Centro de Inteligencia Artificial Monterrey, N.L. C.P. 64849 México & Division of Informatics, The University of Edinburgh South Bridge, Edinburgh (UK)

TONY WONG, Pascal Côté1, Paul Gely *"Final exam timetabling: a practical approach" Department of automated production engineering, Université du Québec, 2002, http://citeseer.ist.psu.edu/*

TORRES Jimenez , José, ***Minimización del ancho de banda de un grafo usando un algoritmo genético,*** Tesis de doctorado en ciencias de la computación, ÍTESM Campus Morelos, 1997.

VAREDAS, Francisco J. y Francisco J.Vico ,*"Computación Evolutiva Basada en un modelo de codificación implicita"*, ***Inteligencia Artificial***, N° 5, pag 20-25.

WHITLEY, L.D. (Editor), ***Foundations of Genetic Algorithms***, Morgan Kaufmann Publishers, 1993, ISBN 1-55860-734-X, 322 p.

WILKE, Peter, Matthias Gröbner and Oster, Norbert "A Hybrid Genetic Algorithm for School Timetabling", ***Springer – Verlag Berling Heidelberg,*** *Centre for Intelligent Information Processing Systems (CIIPS) Dept. of Electrical & Electronic Engineering The University of Western Australia 2002.*

WINSTON, Wyne L. ***Investigación de Operaciones***, trad. de Dirk Valckx Verbeeck, et. all., México, Grupo Editorial Iberóamerica, ISBN 9706250298 1999.

YIGIT, Tuncay "Constraint- Based School Timetabling Using Hybrid Genetic Algorithms", ***R. Basili and M.T. Pazienza (Eds.): AI*IA 2007, LNAI 4733, pp. 848-855, Springer – Verlag Berlin Heidelberg****, Süleyman Demirel University, Engineering and Architecture Faculty, Computer Engineering, Cunur, Isparta, Turkey 2007.*

SOFTWARE

Para series de Tiempo: SPSS ver. 15

Para Programación Lineal: LINDO ver. 6.1

Para representar los horarios de turnos: Microsoft Excel versión 2002

Para realizar los algoritmos genéticos: Lenguaje C

Para realizar cálculos con exponentes: Scientific Work Place ver. 3.1

Anexo A

COFETEL - Comisión Federal de Telecomunicaciones

Capítulo 4 Operación y calidad de los servicios [105]

4.1. Calidad de Servicio

Telmex se obliga a prestar el servicio público en forma continua y eficiente cumpliendo las normas de calidad que se establezcan conforme al anexo A.

Para el período comprendido hasta el 31 de diciembre de 1994, la calidad de servicio deberá de lograr las metas consignadas en el cuadro anexo.

Para la medición de los indicadores del cuadro anexo, los conceptos referidos se entenderán de acuerdo a las siguientes definiciones:

- Líneas con Falla.. Relación de la cantidad mensual de líneas en cada SOT que presentaron reporte de falla respecto al total de líneas en servicio.
- Reparación de Líneas el Mismo Día.. Porcentaje de líneas reparadas dentro del día hábil siguiente a la recepción de la queja.
- Reparación de Líneas Dentro de tres días.. Porcentaje de líneas reparadas dentro de los 3 días hábiles siguientes a la recepción de la queja.
- Casetas Públicas en Servicio.. Relación de la cantidad mensual de casetas públicas telefónicas en cada SOT que no presentaron reporte de falla respecto al total de casetas instaladas.
- Obtención del Tono de Marcar Dentro de 4 Segundos.. Porcentaje de intentos de llamadas en la hora de máximo tráfico que reciben el tono de marcar dentro de 4 segundos.
- Llamadas Locales que Pasan al Primer Intento.. Porcentaje de llamadas locales en la hora de máximo tráfico que llegan a su destino, independientemente de sí está ocupado, o no contesta el número deseado, y sin considerar las causas de marcación incompleta o número inexistente.

---

[105] Tomado de http://www.cft.gob.mx/cofetel

- Llamadas Lada que Pasan al Primer Intento.. Porcentaje de llamadas automáticas de larga distancia nacional e internacional de teléfono a teléfono que en la hora de máximo tráfico llegan a su destino, independientemente de sí está ocupado o no contesta el número deseado y sin considerar los casos de marcación incompleta o número inexistente.

- Contestación de Operadoras del Servicio de Larga Distancia (02 y 09), Servicio de Recepción de Reportes de Fallas (05), e Infòrmación de Directorios (04 y 07), dentro de 10 segundos.. Porcentaje de llamadas anunciadas a los servicios indicados que reciben contestación de la operadora dentro de 10 segundos.

- Línea Privada.. Es una conexión directa y exclusiva que se proporciona a través de la red telefónica para enlazar a dos diferentes domicilios localizados dentro de una misma ciudad, sin conectarse en ninguna central de conmutación pública.

- Circuito Privado.. Es un enlace que se proporciona en forma directa y exclusiva para conectar por facilidades de larga distancia a los domicilios de un usuario localizado entre dos poblaciones y sin utilizar conmutación pública.

- Índices de Calidad de Servicio por Categoría.. Indicadores que mediante factores de ponderación preestablecidos, reflejan la eficacia global en la prestación del servicio telefónico, tomando en cuenta los parámetros más representativos.

Para efectos de esta condición, los plazos máximos de instalación de líneas y circuitos privados, señalados en su índice de calidad respectivo (ICIRC), sólo se aplicarán a las líneas y circuitos privados que se soliciten en las treinta (30) principales ciudades del país, que aparecen listadas en el Anexo B.

Para la medición estadística, La Secretaría designará en cada Subdirección de Operación Telefónica de Telmex (SOT), un conjunto de centrales sujetas a medición de tal forma que se obtenga una muestra representativa con un 99% de nivel de confianza.

El seguimiento y control del logro de las metas de calidad indicadas en el cuadro anterior, se contabilizará a nivel de cada SOT y su resultado anual será publicado dentro del primer trimestre del año siguiente. El cálculo de los Índices Anuales de Calidad de Servicio por Categoría (ICAL, ICON e ICIRC), serán los promedios aritméticos de sus valores mensuales correspondientes.

La Secretaría podrá modificar, si así lo juzga conveniente, los criterios de cálculo de los índices, así como los indicadores de calidad, para lo cual coordinará con Telmex los ajustes necesarios.

Telmex se obliga a establecer antes del 1o. de enero de 1992, un sistema de medición y control de calidad de servicio que deberá ser transparente, confiable y de fácil verificación por parte de La Secretaría.

El sistema deberá incluir al menos los parámetros de calidad establecidos en la tabla anterior.

Asimismo, Telmex se obliga a instrumentar antes del 1o. de enero de 1994 los mecanismos necesarios para llevar a cabo las reparaciones de las líneas con falla dentro de las 8 horas hábiles siguientes a la recepción del reporte.

A partir del 1o. de enero de 1995, y cada cuatro años contados desde dicha fecha, Telmex deberá presentar a la aprobación de La Secretaría, las metas mínimas de calidad del servicio, así como el sistema de nuevos parámetros, cuando fuere necesario. Estas metas estarán vigentes por periodos de cuatro años.

4.2. Prohibición de Trato Discriminatorio.

En la prestación de los servicios materia de esta concesión, se prohíbe a Telmex establecer privilegios o distinciones a favor o en contra de determinadas personas físicas o morales en forma discriminatoria.

4.3. Confidencialidad del Servicio.

Telmex deberá asegurar la confidencialidad de la información proporcionada por los usuarios o generada por la red pública concesionada al prestar servicios a dichos usuarios, y a no divulgarla si no existe consentimiento previo para su uso.

4.4. Directorio Telefónico.

Con excepción de aquellos números que el usuario haya solicitado mantener privados, Telmex se obliga a proporcionar un servicio de información de directorio por operadora.

Asimismo, Telmex se obliga a publicar y a distribuir anual y gratuitamente entre sus usuarios, un directorio telefónico que contenga el nombre, domicilio y código postal del suscriptor, y el número telefónico que éste tenga asignado.

Telmex se obliga a incluir en el directorio los números de los suscriptores de otros operadores de redes públicas autorizadas por La Secretaría, siempre y cuando así lo soliciten y le proporcionen la información respectiva, teniendo Telmex la facultad de negociar los términos y condiciones; si no llegaren a un acuerdo, escuchando a los interesados, La Secretaría decidirá lo conducente.

Telmex se obliga a atender las solicitudes de información de directorio provenientes de otros operadores de redes públicas interconectadas, nacionales o extranjeros, para fines de información de directorio a los usuarios de dichos operadores, así como las solicitudes de empresas de elaboración y publicación de directorios.

Esta información deberá proporcionarla en la forma y medio en que se le solicite, pudiendo cobrar un cargo por gastos que representa el traspaso de la información en la forma solicitada.

4.5. Sistema de Quejas y Reparaciones.

Telmex deberá establecer un sistema eficiente de recepción de quejas y reparaciones de fallas en su red y en los servicios proporcionados por la empresa, informando mensualmente a La Secretaria del volumen de quejas, el resultado de las reparaciones, y la aplicación de las bonificaciones derivadas de las interrupciones del servicio.

4.6. Equipo de Medición y Control de Calidad.

Telmex deberá tomar todas las medidas razonables para asegurar la precisión y confiabilidad de cualquier aparato de medición usado en conexión con el sistema para efectos de medición de calidad y facturación; asimismo deberá mantener los registros que La Secretaría considere necesarios en relación a cualquier aparato de medición que ésta considere sea una fuente de dificultades.

Telmex se obliga a permitir que La Secretaría revise e inspeccione la manera en que se utilice cualquier aparato de medición y deberá permitir pruebas con el propósito de valuar su precisión, confiabilidad y cumplimiento de normas.

4.7. Interrupción del Servicio.

Cuando se interrumpa el servicio hacia La Red desde el punto de conexión terminal del usuario, por un tiempo mayor de 72 horas consecutivas, después de haber sido reportado, Telmex bonificará a los usuarios la parte de la cuota correspondiente al tiempo que dure la interrupción; aún cuando la suspensión se deba a caso fortuito o de fuerza mayor.

Cuando la interrupción del servicio afecte a más del 2% de los usuarios de las líneas de Telmex, durante más de un mes, en las ciudades indicadas en el anexo B, la empresa deberá presentar a La Secretaría un programa especial para su solución, quien podrá efectuar las modificaciones que juzgue pertinentes, incluyendo en su caso la intervención de inspectores para supervisar la ejecución del programa.

4.8. Servicios de Emergencia.

Telmex se obliga a presentar un plan de acciones a seguir en caso de desastres que puedan afectar al servicio en forma generalizada. Dicho plan deberá ser presentado y actualizado dentro de los 6 meses siguientes a la publicación de este Título y revisado anualmente. La Secretaría podrá en cualquier momento solicitar modificaciones a este plan y vigilar su cumplimiento.

Telmex deberá dar prioridad a la instalación y reparación de las líneas telefónicas de policía, bomberos y organizaciones que presten servicios de emergencia y que la Secretaría determine conforme a los programas que se establezcan con dichas entidades.

Telmex se obliga a proporcionar gratuitamente los servicios de llamadas de emergencia dentro de su área de concesión tomando en cuenta los acuerdos internacionales aplicables.

4.9. Código de Prácticas Comerciales.

Telmex deberá publicar antes del 31 de diciembre de 1991, previa aprobación de La Secretaria un código de prácticas comerciales para sus relaciones con los usuarios. El código deberá servir de guía a clientes y empleados de Telmex respecto de cualquier disputa o queja relacionada con la provisión de servicio. Este código se revisará cada tres años.

4.10. Contrato de Servicio.

Telmex deberá firmar un contrato de servicios con todos los usuarios en los que se establezcan las condiciones generales de prestación del servicio. Dicho contrato no podrá ser contrario a las condiciones de la concesión y será voluntario entre las partes.

Telmex someterá a la previa aprobación de La Secretaría el contrato tipo para líneas del servicio público de telefonía básica.

4.11. Responsabilidad Frente a Usuarios.

Telmex será la única responsable frente a La Secretaría por la prestación de los servicios, por lo que La Secretaría queda relevada de cualquier responsabilidad con los usuarios de Telmex. En caso de que Telmex no preste los servicios en los términos y condiciones señalados en este titulo, La Secretaría tomará las medidas procedentes.

4.12. Prohibición de Ventas Atadas.

Telmex no podrá obligar al usuario a adquirir otros bienes, servicios o valores, como condición para proporcionarle el servicio solicitado, a menos que existan condiciones técnicas ineludibles.

4.13. Prohibición de Proveeduría en Exclusividad.

Telmex no podrá condicionar sus compras de materiales, equipo de telecomunicaciones o servicios en general, a que el proveedor le venda estos bienes o servicios exclusivamente a Telmex salvo cuando el bien o servicio solicitado esté patentado por Telmex y, por este motivo, la compra pueda ser en exclusiva.

4.14. Traspaso de Líneas Telefónicas.

Los usuarios podrán ceder sus líneas telefónicas a otro usuario localizado en el mismo distrito telefónico y Telmex se obliga a reubicar dichas líneas al domicilio del cesionario en un plazo no mayor de 3 meses de que sea notificado por la parte cedente. Telmex se obliga a efectuar los cambios de titular en los contratos tipo a petición del titular sin costo, siempre y cuando no sea necesario cambiar el punto terminal. Telmex podrá cobrar gastos de instalación al nuevo titular, que en ningún caso podrán exceder a los de instalación de una línea nueva.

4.15. Cargos por Acometidas.

Los puntos de conexión terminal de la red se ubicarán, por regla general, en el límite del domicilio del usuario, salvo que el usuario desee pactar con Telmex otra ubicación, y pague los cargos correspondientes.

Para la conexión de una línea telefónica que proporcione servicio básico, Telmex no podrá hacer ningún cargo adicional a los autorizados, por concepto de llevar el punto terminal de La Red hasta el domicilio del usuario, siempre que éste se encuentre dentro de un radio de cinco kilómetros contados a partir de la central más próxima, y a no más de un kilómetro del suscriptor más cercano. Por llevar el punto de conexión terminal del sistema al domicilio del usuario de esa distancia en adelante Telmex cobrará al usuario una contraprestación adicional.

El usuario podrá contratar la acometida con terceras personas, siempre y cuando se cumpla con las normas especificadas por La Secretaría y la acometida hasta el punto de conexión terminal que Telmex y el usuario pacten, le sea cedida a Telmex gratuitamente.

Organización Mundial de Comercio, (OMC)

En febrero de 1997 México suscribió, junto con 68 países en el seno de la OMC, el acuerdo más trascendental que se ha celebrado en materia de telecomunicaciones. Mediante dicho instrumento, los signatarios se comprometen a liberalizar bajo condiciones mutuamente acordadas, el sector de las Telecomunicaciones para el 1° de enero de 1998. Este instrumento abre las puertas a una mayor competencia internacional entre operadores y a mayores flujos de inversión en telecomunicaciones entre los países firmantes. La oferta mexicana reflejó los principios de apertura y competencia previstos en la Ley Federal de Telecomunicaciones.

Anexo B

Demanda por cuarto de hora

HORA	MINUTO	DEMANDA
7	:00	21
	:15	19
	:30	23
	:45	23
8	:00	27
	:15	26
	:30	30
	:45	27
9	:00	36
	:15	42
	:30	58
	:45	58
10	:00	64
	:15	64
	:30	65
	:45	65
11	:00	67
	:15	67
	:30	68
	:45	66
12	:00	70
	:15	72
	:30	67
	:45	65
13	:00	67
	:15	69
	:30	59
	:45	59
14	:00	51
	:15	48
	:30	40
	:45	40
15	:00	41
	:15	40
	:30	37
	:45	36
16	:00	37
	:15	41
	:30	50
	:45	51
17	:00	51
	:15	51
	:30	53
	:45	53
18	:00	53
	:15	53
	:30	52
	:45	52
19	:00	52
	:15	50
	:30	46
	:45	46
20	:00	43
	:15	41
	:30	37
	:45	40
21	:00	38
	:15	39
	:30	33
	:45	33
22	:00	31
	:15	31
	:30	31
	:45	31
23	:00	20
	:15	20
	:30	16
	:45	16
24	:00	13
	:15	13
	:30	9
	:45	9
1	:00	6
	:15	6
	:30	4
	:45	4
2	:00	2
	:15	2
	:30	4
	:45	4
3	:00	4
	:15	4
	:30	6
	:45	6
4	:00	6
	:15	6
	:30	6
	:45	6
5	:00	9
	:15	9
	:30	11
	:45	11
6	:00	16
	:15	16
	:30	18
	:45	18
SUMA –Operadoras Requeridas por ¼ hora		**3296**

B. Horario de Turnos para el Modelo de programación Lineal

Turno	Entrada	Salida	Inicio	Fin
D001	07:00	**15:00**	07:00	08:00
D002	07:00	**15:00**	14:00	15:00
D003	07:00	**15:00**	09:00	10:00
D004	07:00	**15:00**	**09:15**	10:15
D005	07:00	**15:00**	09:30	10:30
D006	07:00	**15:00**	09:45	**10:45**
D007	07:00	**15:00**	10:00	11:00
D008	07:00	**15:00**	10:15	11:15
D009	07:00	**15:00**	10:30	**11:30**
D010	07:00	**15:00**	**10:45**	11:45
D011	07:00	**15:00**	11:00	12:00
D012	07:00	**15:00**	11:15	**12:15**
D013	07:00	**15:00**	**11:30**	12:30
D014	07:00	**15:00**	11:45	**12:45**
D015	07:00	**15:00**	12:00	**13:00**
D016	08:00	**16:00**	08:00	09:00
D017	08:00	**16:00**	**15:00**	16:00
D018	08:00	**16:00**	10:00	11:00
D019	08:00	**16:00**	10:15	11:15
D020	08:00	**16:00**	10:30	**11:30**
D021	08:00	**16:00**	**10:45**	11:45
D022	08:00	**16:00**	11:00	12:00
D023	08:00	**16:00**	11:15	**12:15**
D024	08:00	**16:00**	**11:30**	12:30
D025	08:00	**16:00**	11:45	**12:45**
D026	08:00	**16:00**	12:00	**13:00**
M001	**05:00**	12:30	05:00	06:00
M002	05:00	12:30	**11:30**	12:30
M003	05:00	12:30	07:00	08:00
M004	05:00	12:30	07:45	08:45
M005	05:00	12:30	08:00	09:00
M006	05:00	12:30	08:15	**09:15**
M007	05:00	12:30	07:15	08:15
M008	05:00	12:30	**08:30**	09:30
M009	05:00	12:30	08:45	09:45
M010	05:00	12:30	09:00	10:00
M011	05:00	12:30	07:30	**08:30**
M012	05:00	12:30	**09:15**	10:15
M013	05:00	12:30	09:30	10:30
M014	06:00	**13:30**	06:00	07:00
N001	**16:00**	**23:00**	**16:00**	**17:00**
N002	**16:00**	**23:00**	**22:00**	23:00
N003	**16:00**	**23:00**	18:00	19:00
N004	**16:00**	**23:00**	18:30	19:30
N005	**16:00**	**23:00**	19:00	20:00
N006	**16:00**	**23:00**	19:30	20:30
N007	**16:00**	**23:00**	20:00	21:00
N008	17:00	00:00	17:00	18:00
N009	17:00	00:00	19:00	20:00
N010	17:00	00:00	19:30	20:30
N011	17:00	00:00	20:00	21:00
N012	17:00	00:00	20:30	21:30
N013	17:00	00:00	21:00	22:00
N014	**18:00**	01:00	**18:00**	**19:00**
N015	**18:00**	01:00	20:00	21:00
N016	**18:00**	01:00	20:30	21:30
N017	**18:00**	01:00	21:00	22:00
N018	**18:00**	01:00	21:30	22:30
N019	**18:00**	01:00	21:45	22:45
N020	**18:00**	01:00	22:00	23:00
N021	19:00	02:00	19:00	**20:00**
N022	**19:00**	02:00	01:00	02:00
N023	**19:00**	02:00	21:00	22:00
N024	**19:00**	02:00	21:30	22:30
N025	**19:00**	02:00	22:00	23:00
N026	**19:00**	02:00	22:30	23:30
N027	**23:00**	06:00	05:00	06:00

Anexo C

Serie de Tiempo con SPSS ver. 15.0

```
GET
  FILE='C:\Doctorado\TesisProy\Tesis 2006 Asignación\wv_css.sav'.
DATASET NAME DataSet1 WINDOW=FRONT.
DATE D MI 0 96.

The following new variables are being created:

  Name        Label

  DAY_        DAY, not periodic
  MINUTE_     MINUTE, period 96
  DATE_       Date.  Format:  "DDDD MM"
PREDICT THRU DAY 8 MINUTE 95 .
TSMODEL
   /MODELSUMMARY  PRINT=[ MODELFIT]
   /MODELSTATISTICS  DISPLAY=YES  MODELFIT=[ SRSQUARE]
   /MODELDETAILS  PRINT=[ FORECASTS]
   /SERIESPLOT OBSERVED FORECAST
   /OUTPUTFILTER DISPLAY=ALLMODELS
   /SAVE  PREDICTED(Predicted) LCL(LCL) UCL(UCL)
   /AUXILIARY  CILEVEL=95  MAXACFLAGS=24
   /MISSING USERMISSING=EXCLUDE
   /MODEL DEPENDENT=wv_css
      OUTFILE='C:\Doctorado\TesisProy\Tesis 2006 Asignación\Auxiliares '+
  'Anteriores\model_WV_css.xml'
      PREFIX='Model'
   /EXPERTMODELER TYPE=[ARIMA EXSMOOTH] TRYSEASONAL=YES
   /AUTOOUTLIER  DETECT=OFF .
```

Time Series Modeler

```
[DataSet1] C:\Doctorado\TesisProy\Tesis 2006 Asignación\wv_css.sav
```

Model Description

			Model Type
Model ID	wv_css	Model_1	Winters' Multiplicative

Model Summary

Model Fit

Fit Statistic	Mean	SE	Minimum	Maximum	Percentile 5	10	25	50	75	90	95
Stationary R-squ	.785	.	.785	.785	.785	.785	.785	.785	.785	.785	.785
R-squared	.999	.	.999	.999	.999	.999	.999	.999	.999	.999	.999
RMSE	7.769	.	7.769	7.769	7.769	7.769	7.769	7.769	7.769	7.769	7.769
MAPE	7.273	.	7.273	7.273	7.273	7.273	7.273	7.273	7.273	7.273	7.273
MaxAPE	121.187	.	121.187	121.187	121.187	121.187	121.187	121.187	121.187	121.187	121.187
MAE	5.268	.	5.268	5.268	5.268	5.268	5.268	5.268	5.268	5.268	5.268
MaxAE	34.782	.	34.782	34.782	34.782	34.782	34.782	34.782	34.782	34.782	34.782
Normalized BIC	4.129	.	4.129	4.129	4.129	4.129	4.129	4.129	4.129	4.129	4.129

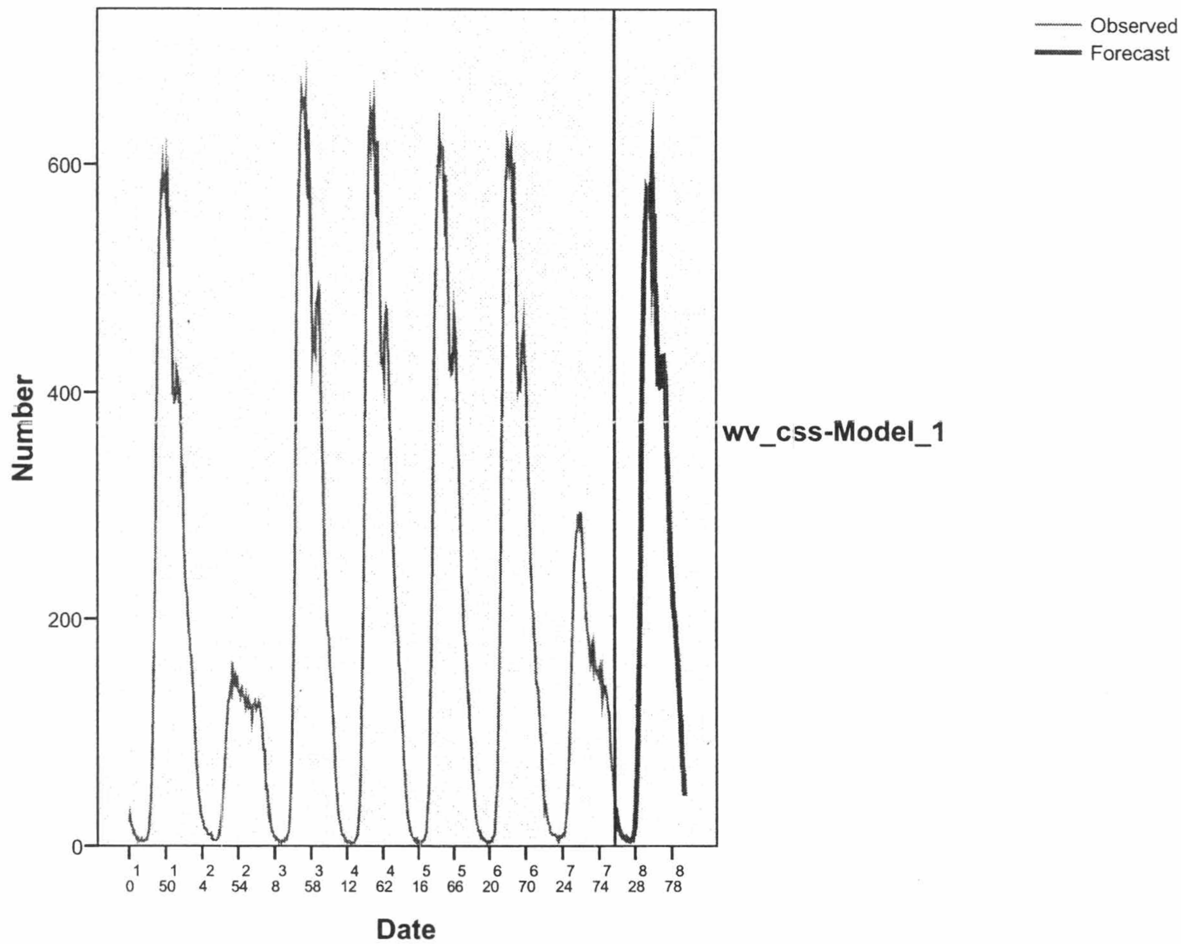
Model Statistics

Model	Number of Predictors	Model Fit statistics: Stationary R-squared	Ljung-Box Q(18): Statistics	DF	Sig.	Number of Outliers
wv_css-Model_1	0	.785	65.475	15	.000	0

Model		8 0	8 1	8 2	8 3	8 4	8 5	8 6	8 7	8 8	8 9	8 10	8 11
wv_css	Fore	33	32	27	23	19	17	14	13	12	10	9	7
	UCL	49	51	47	44	41	40	37	37	36	35	35	32
	LCL	18	13	7	2	-3	-6	-9	-11	-13	-15	-17	-17

Model		8 12	8 13	8 14	8 15	8 16	8 17	8 18	8 19	8 20	8 21	8 22	8 2	8 24
wv_css	Fore	7	7	6	6	7	5	6	5	5	4	5	5	5
	UCL	34	34	33	33	42	37	40	36	37	38	41	45	48
	LCL	-19	-21	-21	-22	-28	-26	-29	-26	-28	-29	-32	-35	-38

For each model, forecasts start after the last non-missing in the range of the requested estimation period, and end at the last period f)r whi




```
SAVE OUTFILE='C:\Doctorado\TesisProy\Tesis 2006 Asignación\wv_css.sav'
 /COMPRESSED.
SAVE OUTFILE='C:\Doctorado\TesisProy\Tesis 2006 Asignación\wv_css.sav'
 /COMPRESSED.
```

Hora	inf0803	inf0805	inf0806	inf0807	inf0808	inf0809	inf0811	Predicción
00:00	21	42	27	29	30	30	38	33
00:15	27	36	30	23	25	24	36	32
00:30	23	29	23	21	21	19	28	27
00:45	19	27	17	18	17	18	26	23
01:00	17	25	14	12	13	13	21	19
01:15	15	21	12	10	12	13	19	17
01:30	11	18	11	9	9	11	18	14
01:45	12	16	9	8	8	12	12	13
02:00	9	15	8	9	7	8	12	12
02:15	8	15	6	5	7	9	12	10
02:30	7	14	7	6	4	7	10	9
02:45	5	11	6	5	4	5	10	7
03:00	7	11	5	3	5	5	10	7
03:15	6	10	5	4	3	6	10	7
03:30	4	10	3	4	5	4	9	6
03:45	4	10	4	3	2	4	9	6
04:00	5	11	4	4	3	4	7	7
04:15	6	7	3	2	4	3	5	5
04:30	4	8	5	3	3	4	7	6
04:45	4	6	5	3	2	3	5	5
05:00	4	5	5	3	4	3	7	5
05:15	5	5	4	3	4	4	9	4
05:30	5	5	6	3	4	4	8	5
05:45	5	5	5	4	6	6	8	5
06:00	5	5	5	6	6	5	10	5
06:15	9	6	8	7	8	8	11	8
06:30	11	7	11	9	10	9	10	10
06:45	14	12	12	13	13	12	14	14
07:00	24	11	20	22	25	22	22	22
07:15	35	16	35	31	35	33	27	33
07:30	50	22	50	49	42	46	36	47
07:45	72	27	68	62	57	56	47	64
08:00	95	40	100	95	89	93	67	94
08:15	145	51	140	134	129	127	82	133
08:30	171	56	180	177	165	167	109	165
08:45	210	68	221	217	204	206	125	202
09:00	267	79	290	279	271	269	146	259
09:15	347	95	389	368	356	351	177	338
09:30	408	106	459	428	419	408	203	397
09:45	454	112	521	489	478	469	226	445
10:00	487	128	544	506	480	501	247	473
10:15	535	128	585	547	536	539	257	510
10:30	544	131	584	595	557	564	267	525
10:45	564	139	625	624	586	590	276	551
11:00	583	136	641	621	605	590	278	559
11:15	582	149	664	640	604	623	292	575
11:30	596	142	657	623	622	620	292	572
11:45	583	153	654	647	606	611	286	574
12:00	588	149	659	646	618	601	294	577
12:15	584	142	659	631	616	610	294	570
12:30	572	141	639	649	616	610	282	564
12:45	589	149	655	630	613	616	275	576

13:00	559	147	600	574	558	566	259	542
13:15	573	148	609	620	589	598	240	560
13:30	509	137	570	554	537	532	229	512
13:45	562	136	631	621	591	602	230	557
14:00	496	136	550	529	517	531	200	497
14:15	483	132	566	530	515	515	200	494
14:30	458	137	520	500	492	469	190	470
14:45	438	139	484	461	463	439	185	447
15:00	400	135	436	428	422	406	177	412
15:15	401	132	449	429	423	412	174	413
15:30	392	131	439	423	427	404	164	407
15:45	393	126	440	422	417	403	169	405
16:00	399	123	436	414	418	413	174	405
16:15	419	130	478	456	436	435	163	431
16:30	416	124	479	466	460	447	157	432
16:45	414	123	483	474	445	453	173	432
17:00	392	127	488	471	456	461	166	427
17:15	391	123	471	440	446	427	156	414
17:30	397	125	478	435	415	423	154	414
17:45	364	123	446	402	399	410	156	388
18:00	323	123	389	369	351	365	155	348
18:15	327	112	366	359	340	350	151	334
18:30	305	119	343	331	315	318	154	315
18:45	264	125	330	302	293	313	149	291
19:00	247	125	270	268	263	271	155	262
19:15	231	127	259	255	232	240	147	248
19:30	225	124	239	235	225	237	134	238
19:45	222	120	225	227	217	210	146	230
20:00	204	122	198	209	192	206	135	212
20:15	198	122	191	203	186	189	141	206
20:30	189	126	186	194	182	181	141	201
20:45	182	123	182	181	174	176	141	194
21:00	169	124	160	163	159	147	133	179
21:15	168	118	150	158	142	142	133	173
21:30	157	112	147	151	129	140	125	163
21:45	141	104	130	131	131	137	118	148
22:00	137	91	121	118	106	118	118	134
22:15	119	85	111	110	99	113	105	122
22:30	104	85	93	98	91	96	87	109
22:45	92	70	86	79	77	90	75	94
23:00	74	51	64	67	61	68	67	73
23:15	66	52	54	65	57	61	64	67
23:30	56	47	45	48	47	47	55	56
23:45	45	36	34	41	36	34	44	44

Anexo D

Modelo PL con software LINDO ver. 6.1

Se muestra a continuación la corrida en el software LINDO ver. 6.1

Corrida del Modelo PL[106]

```
MIN     D001 + D002 + D003 + D004 + D005 + D006 + D007 + D008 + D009
      + D010 + D011 + D012 + D013 + D014 + D015 + D016 + D017 + D018 + D019
      + D020 + D021 + D022 + D023 + D024 + D025 + D026 + M001 + M002 + M003
      + M004 + N001 + N002 + N003 + N004 + N005 + N006 + N007 + N008 + N009
      + N010 + N011 + N012 + N013 + N014 + N027
  SUBJECT TO
    07:00     )   D002 + D003 + D004 + D005 + D006 + D007 + D008 + D009 + D010
      + D011 + D012 + D013 + D014 + D015 + M001 + M002 + M004 >=   21
    07:15     )   D002 + D003 + D004 + D005 + D006 + D007 + D008 + D009 + D010
      + D011 + D012 + D013 + D014 + D015 + M001 + M002 + M004 >=   19
    07:30     )   D002 + D003 + D004 + D005 + D006 + D007 + D008 + D009 + D010
      + D011 + D012 + D013 + D014 + D015 + M001 + M002 + M004 >=   23
    07:45     )   D002 + D003 + D004 + D005 + D006 + D007 + D008 + D009 + D010
      + D011 + D012 + D013 + D014 + D015 + M001 + M002 >=   23
    08:00     )   D001 + D002 + D003 + D004 + D005 + D006 + D007 + D008 + D009
      + D010 + D011 + D012 + D013 + D014 + D015 + D017 + D018 + D019 + D020
      + D021 + D022 + D023 + D024 + D025 + D026 + M001 + M002 + M003
      >=   27
    08:15     )   D001 + D002 + D003 + D004 + D005 + D006 + D007 + D008 + D009
      + D010 + D011 + D012 + D013 + D014 + D015 + D017 + D018 + D019 + D020
      + D021 + D022 + D023 + D024 + D025 + D026 + M001 + M002 + M003
      >=   26
    08:30     )   D001 + D002 + D003 + D004 + D005 + D006 + D007 + D008 + D009
      + D010 + D011 + D012 + D013 + D014 + D015 + D017 + D018 + D019 + D020
      + D021 + D022 + D023 + D024 + D025 + D026 + M001 + M002 + M003
      >=   30
    08:45     )   D001 + D002 + D003 + D004 + D005 + D006 + D007 + D008 + D009
      + D010 + D011 + D012 + D013 + D014 + D015 + D017 + D018 + D019 + D020
      + D021 + D022 + D023 + D024 + D025 + D026 + M001 + M002 + M003 + M004
      >=   27
    09:00     )   D001 + D002 + D004 + D005 + D006 + D007 + D008 + D009 + D010
      + D011 + D012 + D013 + D014 + D015 + D016 + D017 + D018 + D019 + D020
      + D021 + D022 + D023 + D024 + D025 + D026 + M001 + M002 + M003 + M004
      >=   36
    09:15     )   D001 + D002 + D005 + D006 + D007 + D008 + D009 + D010 + D011
      + D012 + D013 + D014 + D015 + D016 + D017 + D018 + D019 + D020 + D021
      + D022 + D023 + D024 + D025 + D026 + M001 + M002 + M003 + M004
```

---

106 En la versión LINDO 6.0 no se puede ejecutar el modelo, ya que el software al momento de ejecutarlo marca: Error **code 1004. The dimensions of your model have exceeded the limits of this version**

Y también aparece el siguiente error:

Error code 29. **OUT OF SPACE WHILE ADDING SLACK VARIABLES**

Pero en la versión LINDO 6.1[106] ya se puede ejecutar el Modelo

```
   >=   42
09:30    )   D001 + D002 + D006 + D007 + D008 + D009 + D010 + D011 + D012
   + D013 + D014 + D015 + D016 + D017 + D018 + D019 + D020 + D021 + D022
   + D023 + D024 + D025 + D026 + M001 + M002 + M003 + M004 >=   58
09:45    )   D001 + D002 + D007 + D008 + D009 + D010 + D011 + D012 + D013
   + D014 + D015 + D016 + D017 + D018 + D019 + D020 + D021 + D022 + D023
   + D024 + D025 + D026 + M001 + M002 + M003 + M004 >=   58
10:00    )   D001 + D002 + D003 + D008 + D009 + D010 + D011 + D012 + D013
   + D014 + D015 + D016 + D017 + D019 + D020 + D021 + D022 + D023 + D024
   + D025 + D026 + M001 + M002 + M003 + M004 >=   64
10:15    )   D001 + D002 + D003 + D004 + D009 + D010 + D011 + D012 + D013
   + D014 + D015 + D016 + D017 + D020 + D021 + D022 + D023 + D024 + D025
   + D026 + M001 + M002 + M003 + M004 >=   64
10:30    )   D001 + D002 + D003 + D004 + D005 + D010 + D011 + D012 + D013
   + D014 + D015 + D016 + D017 + D021 + D022 + D023 + D024 + D025 + D026
   + M001 + M002 + M003 + M004 >=   65
10:45    )   D001 + D002 + D003 + D004 + D005 + D006 + D011 + D012 + D013
   + D014 + D015 + D016 + D017 + D022 + D023 + D024 + D025 + D026 + M001
   + M002 + M003 + M004 >=   65
11:00    )   D001 + D002 + D003 + D004 + D005 + D006 + D007 + D012 + D013
   + D014 + D015 + D016 + D017 + D018 + D023 + D024 + D025 + D026 + M001
   + M002 + M003 + M004 >=   67
11:15    )   D001 + D002 + D003 + D004 + D005 + D006 + D007 + D008 + D013
   + D014 + D015 + D016 + D017 + D018 + D019 + D024 + D025 + D026 + M001
   + M002 + M003 + M004 >=   67
11:30    )   D001 + D002 + D003 + D004 + D005 + D006 + D007 + D008 + D009
   + D014 + D015 + D016 + D017 + D018 + D019 + D020 + D025 + D026 + M001
   + M003 + M004 >=   68
11:45    )   D001 + D002 + D003 + D004 + D005 + D006 + D007 + D008 + D009
   + D010 + D015 + D016 + D017 + D018 + D019 + D020 + D021 + D026 + M001
   + M003 + M004 >=   66
12:00    )   D001 + D002 + D003 + D004 + D005 + D006 + D007 + D008 + D009
   + D010 + D011 + D016 + D017 + D018 + D019 + D020 + D021 + D022 + M001
   + M003 + M004 >=   70
12:15    )   D001 + D002 + D003 + D004 + D005 + D006 + D007 + D008 + D009
   + D010 + D011 + D012 + D016 + D017 + D018 + D019 + D020 + D021 + D022
   + D023 + M001 + M003 + M004 >=   72
12:30    )   D001 + D002 + D003 + D004 + D005 + D006 + D007 + D008 + D009
   + D010 + D011 + D012 + D013 + D016 + D017 + D018 + D019 + D020 + D021
   + D022 + D023 + D024 >=   67
12:45    )   D001 + D002 + D003 + D004 + D005 + D006 + D007 + D008 + D009
   + D010 + D011 + D012 + D013 + D014 + D016 + D017 + D018 + D019 + D020
   + D021 + D022 + D023 + D024 + D025 >=   65
13:00    )   D001 + D002 + D003 + D004 + D005 + D006 + D007 + D008 + D009
   + D010 + D011 + D012 + D013 + D014 + D015 + D016 + D017 + D018 + D019
   + D020 + D021 + D022 + D023 + D024 + D025 + D026 >=   67
13:15    )   D001 + D002 + D003 + D004 + D005 + D006 + D007 + D008 + D009
   + D010 + D011 + D012 + D013 + D014 + D015 + D016 + D017 + D018 + D019
   + D020 + D021 + D022 + D023 + D024 + D025 + D026 >=   69
13:30    )   D001 + D002 + D003 + D004 + D005 + D006 + D007 + D008 + D009
   + D010 + D011 + D012 + D013 + D014 + D015 + D016 + D017 + D018 + D019
   + D020 + D021 + D022 + D023 + D024 + D025 + D026 >=   59
13:45    )   D001 + D002 + D003 + D004 + D005 + D006 + D007 + D008 + D009
   + D010 + D011 + D012 + D013 + D014 + D015 + D016 + D017 + D018 + D019
   + D020 + D021 + D022 + D023 + D024 + D025 + D026 >=   59
14:00    )   D001 + D003 + D004 + D005 + D006 + D007 + D008 + D009 + D010
   + D011 + D012 + D013 + D014 + D015 + D016 + D017 + D018 + D019 + D020
   + D021 + D022 + D023 + D024 + D025 + D026 >=   51
14:15    )   D001 + D003 + D004 + D005 + D006 + D007 + D008 + D009 + D010
   + D011 + D012 + D013 + D014 + D015 + D016 + D017 + D018 + D019 + D020
   + D021 + D022 + D023 + D024 + D025 + D026 >=   48
14:30    )   D001 + D003 + D004 + D005 + D006 + D007 + D008 + D009 + D010
   + D011 + D012 + D013 + D014 + D015 + D016 + D017 + D018 + D019 + D020
```

```
   + D021 + D022 + D023 + D024 + D025 + D026 >=   40
14:45     )   D001 + D003 + D004 + D005 + D006 + D007 + D008 + D009 + D010
   + D011 + D012 + D013 + D014 + D015 + D016 + D017 + D018 + D019 + D020
   + D021 + D022 + D023 + D024 + D025 + D026 >=   40
15:00     )   D016 + D018 + D019 + D020 + D021 + D022 + D023 + D024 + D025
   + D026 >=   41
15:15     )   D016 + D018 + D019 + D020 + D021 + D022 + D023 + D024 + D025
   + D026 >=   40
15:30     )   D016 + D018 + D019 + D020 + D021 + D022 + D023 + D024 + D025
   + D026 >=   37
15:45     )   D016 + D018 + D019 + D020 + D021 + D022 + D023 + D024 + D025
   + D026 >=   36
16:00     )   N002 + N003 + N004 + N005 + N006 + N007 >=   37
16:15     )   N002 + N003 + N004 + N005 + N006 + N007 >=   41
16:30     )   N002 + N003 + N004 + N005 + N006 + N007 >=   50
16:45     )   N002 + N003 + N004 + N005 + N006 + N007 >=   51
17:00     )   N001 + N002 + N003 + N004 + N005 + N006 + N007 >=   51
17:15     )   N001 + N002 + N003 + N004 + N005 + N006 + N007 + N009 + N010
   + N011 + N012 + N013 >=   51
17:30     )   N001 + N002 + N003 + N004 + N005 + N006 + N007 + N009 + N010
   + N011 + N012 + N013 >=   53
17:45     )   N001 + N002 + N003 + N004 + N005 + N006 + N007 + N009 + N010
   + N011 + N012 + N013 >=   53
18:00     )   N001 + N002 + N003 + N004 + N005 + N006 + N007 + N009 + N010
   + N011 + N012 + N013 >=   53
18:15     )   N001 + N002 + N004 + N005 + N006 + N007 + N008 + N009 + N010
   + N011 + N012 + N013 >=   53
18:30     )   N001 + N002 + N004 + N005 + N006 + N007 + N008 + N009 + N010
   + N011 + N012 + N013 >=   52
18:45     )   N001 + N002 + N005 + N006 + N007 + N008 + N009 + N010 + N011
   + N012 + N013 >=   52
19:00     )   N001 + N002 + N005 + N006 + N007 + N008 + N009 + N010 + N011
   + N012 + N013 + N014 >=   52
19:15     )   N001 + N002 + N003 + N006 + N007 + N008 + N010 + N011 + N012
   + N013 + N014 >=   50
19:30     )   N001 + N002 + N003 + N006 + N007 + N008 + N010 + N011 + N012
   + N013 + N014 >=   46
19:45     )   N001 + N002 + N003 + N004 + N007 + N008 + N011 + N012 + N013
   + N014 >=   46
20:00     )   N001 + N002 + N003 + N004 + N007 + N008 + N011 + N012 + N013
   + N014 >=   43
20:15     )   N001 + N002 + N003 + N004 + N005 + N008 + N009 + N012 + N013
   + N014 >=   41
20:30     )   N001 + N002 + N003 + N004 + N005 + N008 + N009 + N012 + N013
   + N014 >=   37
20:45     )   N001 + N002 + N003 + N004 + N005 + N006 + N008 + N009 + N010
   + N013 + N014 >=   40
21:00     )   N001 + N002 + N003 + N004 + N005 + N006 + N008 + N009 + N010
   + N013 + N014 >=   38
21:15     )   N001 + N002 + N003 + N004 + N005 + N006 + N007 + N008 + N009
   + N010 + N011 + N014 >=   39
21:30     )   N001 + N002 + N003 + N004 + N005 + N006 + N007 + N008 + N009
   + N010 + N011 + N014 >=   33
21:45     )   N001 + N002 + N003 + N004 + N005 + N006 + N007 + N008 + N009
   + N010 + N011 + N012 + N014 >=   33
22:00     )   N001 + N003 + N004 + N005 + N006 + N007 + N008 + N009 + N010
   + N011 + N012 + N014 >=   31
22:15     )   N001 + N003 + N004 + N005 + N006 + N007 + N008 + N009 + N010
   + N011 + N012 + N013 + N014 >=   31
22:30     )   N001 + N003 + N004 + N005 + N006 + N007 + N008 + N009 + N010
   + N011 + N012 + N013 + N014 >=   31
22:45     )   N001 + N003 + N004 + N005 + N006 + N007 + N008 + N009 + N010
   + N011 + N012 + N013 + N014 >=   31
```

```
   23:00    )   N008 + N009 + N010 + N011 + N012 + N013 + N014 + N027 >=   20
   23:15    )   N008 + N009 + N010 + N011 + N012 + N013 + N014 + N027 >=   20
   23:30    )   N008 + N009 + N010 + N011 + N012 + N013 + N014 + N027 >=   16
   23:45    )   N008 + N009 + N010 + N011 + N012 + N013 + N014 + N027 >=   16
   00:00    )   N008 + N009 + N010 + N011 + N012 + N013 + N014 + N027 >=   13
   00:15    )   N014 + N027 >=   13
   00:30    )   N014 + N027 >=   9
   00:45    )   N014 + N027 >=   9
   01:00    )   N027 >=   6
   01:15    )   N027 >=   6
   01:30    )   N027 >=   4
   01:45    )   N027 >=   4
   02:00    )   N027 >=   2
   02:15    )   N027 >=   2
   02:30    )   N027 >=   4
   02:45    )   N027 >=   4
   03:00    )   N027 >=   4
   03:15    )   N027 >=   4
   03:30    )   N027 >=   6
   03:45    )   N027 >=   6
   04:00    )   N027 >=   6
   04:15    )   N027 >=   6
   04:30    )   N027 >=   6
   04:45    )   N027 >=   6
   05:00    )   M002 + M003 + M004 >=   9
   05:15    )   M002 + M003 + M004 >=   9
   05:30    )   M002 + M003 + M004 >=   11
   05:45    )   M002 + M003 + M004 >=   11
   06:00    )   M001 + M002 + M003 + M004 >=   16
   06:15    )   M001 + M002 + M003 + M004 >=   16
   06:30    )   M001 + M002 + M003 + M004 >=   18
   06:45    )   M001 + M002 + M003 + M004 >=   18
 END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP     34
OBJECTIVE VALUE =    158.000000


NEW INTEGER SOLUTION OF    158.000000     AT BRANCH      0 PIVOT      57
BOUND ON OPTIMUM:  158.0000
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=     0 PIVOTS=      57

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...
```

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1)   158.0000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
D001	0.000000	1.000000
D002	0.000000	1.000000
D003	5.000000	1.000000
D004	23.000000	1.000000
D005	0.000000	1.000000
D006	0.000000	1.000000
D007	0.000000	1.000000
D008	0.000000	1.000000
D009	0.000000	1.000000
D010	0.000000	1.000000
D011	0.000000	1.000000
D012	0.000000	1.000000
D013	0.000000	1.000000
D014	0.000000	1.000000
D015	0.000000	1.000000
D016	21.000000	1.000000
D017	0.000000	1.000000
D018	0.000000	1.000000
D019	20.000000	1.000000
D020	0.000000	1.000000
D021	0.000000	1.000000
D022	0.000000	1.000000
D023	0.000000	1.000000
D024	0.000000	1.000000
D025	0.000000	1.000000
D026	0.000000	1.000000
M001	3.000000	1.000000
M002	15.000000	1.000000
M003	0.000000	1.000000
M004	0.000000	1.000000
N001	0.000000	1.000000
N002	13.000000	1.000000
N003	0.000000	1.000000
N004	1.000000	1.000000
N005	14.000000	1.000000
N006	0.000000	1.000000
N007	23.000000	1.000000
N008	0.000000	1.000000
N009	0.000000	1.000000
N010	0.000000	1.000000
N011	0.000000	1.000000
N012	2.000000	1.000000
N013	0.000000	1.000000
N014	12.000000	1.000000
N027	6.000000	1.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
07:00)	25.000000	0.000000
07:15)	27.000000	0.000000
07:30)	23.000000	0.000000
07:45)	23.000000	0.000000
08:00)	39.000000	0.000000
08:15)	40.000000	0.000000
08:30)	36.000000	0.000000
08:45)	39.000000	0.000000
09:00)	46.000000	0.000000
09:15)	17.000000	0.000000
09:30)	1.000000	0.000000
09:45)	1.000000	0.000000
10:00)	0.000000	0.000000
10:15)	3.000000	0.000000
10:30)	2.000000	0.000000
10:45)	2.000000	0.000000
11:00)	0.000000	0.000000
11:15)	20.000000	0.000000
11:30)	4.000000	0.000000
11:45)	6.000000	0.000000
12:00)	2.000000	0.000000
12:15)	0.000000	0.000000
12:30)	2.000000	0.000000
12:45)	4.000000	0.000000
13:00)	2.000000	0.000000
13:15)	0.000000	0.000000
13:30)	10.000000	0.000000
13:45)	10.000000	0.000000
14:00)	18.000000	0.000000
14:15)	21.000000	0.000000
14:30)	29.000000	0.000000
14:45)	29.000000	0.000000
15:00)	0.000000	0.000000
15:15)	1.000000	0.000000
15:30)	4.000000	0.000000
15:45)	5.000000	0.000000
16:00)	14.000000	0.000000
16:15)	10.000000	0.000000
16:30)	1.000000	0.000000
16:45)	0.000000	0.000000
17:00)	0.000000	0.000000
17:15)	2.000000	0.000000
17:30)	0.000000	0.000000
17:45)	0.000000	0.000000
18:00)	0.000000	0.000000
18:15)	0.000000	0.000000
18:30)	1.000000	0.000000
18:45)	0.000000	0.000000
19:00)	12.000000	0.000000
19:15)	0.000000	0.000000
19:30)	4.000000	0.000000
19:45)	5.000000	0.000000
20:00)	8.000000	0.000000
20:15)	1.000000	0.000000
20:30)	5.000000	0.000000
20:45)	0.000000	0.000000
21:00)	2.000000	0.000000
21:15)	24.000000	0.000000
21:30)	30.000000	0.000000
21:45)	32.000000	0.000000
22:00)	21.000000	0.000000
22:15)	21.000000	0.000000
22:30)	21.000000	0.000000
22:45)	21.000000	0.000000
23:00)	0.000000	0.000000
23:15)	0.000000	0.000000
23:30)	4.000000	0.000000
23:45)	4.000000	0.000000
00:00)	7.000000	0.000000
00:15)	5.000000	0.000000
00:30)	9.000000	0.000000
00:45)	9.000000	0.000000
01:00)	0.000000	0.000000
01:15)	0.000000	0.000000
01:30)	2.000000	0.000000

```
  01:45)      2.000000     0.000000
  02:00)      4.000000     0.000000
  02:15)      4.000000     0.000000
  02:30)      2.000000     0.000000
  02:45)      2.000000     0.000000
  03:00)      2.000000     0.000000
  03:15)      2.000000     0.000000
  03:30)      0.000000     0.000000
  03:45)      0.000000     0.000000
  04:00)      0.000000     0.000000
  04:15)      0.000000     0.000000
  04:30)      0.000000     0.000000
  04:45)      0.000000     0.000000
  05:00)      6.000000     0.000000
  05:15)      6.000000     0.000000
  05:30)      4.000000     0.000000
  05:45)      4.000000     0.000000
  06:00)      2.000000     0.000000
  06:15)      2.000000     0.000000
  06:30)      0.000000     0.000000
  06:45)      0.000000     0.000000

NO. ITERATIONS=      62
BRANCHES=    0 DETERM.=  1.000E    0
```

Anexo E

Modelo PL con AG en software LINDO ver. 6.1

Se muestra a continuación la corrida en el software LINDO ver. 6.1

Corrida del Modelo PL[107]

```
LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      126.0000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
     D001        4.000000          1.000000
     D002        4.000000          1.000000
     D003        0.000000          1.000000
     D004        0.000000          1.000000
     D005        2.000000          1.000000
     D006        3.000000          1.000000
     D007        0.000000          1.000000
     D008        0.000000          1.000000
     D009        2.000000          1.000000
     D010        3.000000          1.000000
     D011        0.000000          1.000000
     D012        4.000000          1.000000
     D013        7.000000          1.000000
     D014        0.000000          1.000000
     D015        2.000000          1.000000
     D016        6.000000          1.000000
     D017        2.000000          1.000000
     D018        3.000000          1.000000
     D019        0.000000          1.000000
     D020        2.000000          1.000000
     D021        2.000000          1.000000
     D022        1.000000          1.000000
     D023        2.000000          1.000000
     D024        1.000000          1.000000
     D025        2.000000          1.000000
     D026        3.000000          1.000000
     M001        1.000000          1.000000
     M002        3.000000          1.000000
     M003        0.000000          1.000000
     M004        1.000000          1.000000
```

107 En la versión LINDO 6.0 no se puede ejecutar el modelo, ya que el software al momento de ejecutarlo marca: Error **code 1004. The dimensions of your model have exceeded the limits of this version**

Y también aparece el siguiente error:

Error code 29. **OUT OF SPACE WHILE ADDING SLACK VARIABLES**

Pero en la versión LINDO 6.1[107] ya se puede ejecutar el Modelo

M005	2.000000	1.000000
M006	2.000000	1.000000
N001	2.000000	1.000000
N002	1.000000	0.000000
N003	2.000000	1.000000
N004	2.000000	0.000000
N005	0.000000	1.000000
N006	1.000000	0.000000
N007	2.000000	0.000000
N008	2.000000	0.000000
N009	2.000000	0.000000
N010	0.000000	0.000000
N011	2.000000	0.000000
N012	0.000000	0.000000
N013	0.000000	0.000000
N014	4.000000	0.000000
N015	0.000000	0.000000
N016	1.000000	0.000000
N017	0.000000	0.000000
N018	2.000000	0.000000
N019	3.000000	0.000000
N020	0.000000	0.000000
N021	5.000000	0.000000
N022	2.000000	0.000000
N023	2.000000	0.000000
N024	3.000000	0.000000
N025	2.000000	0.000000
N026	2.000000	0.000000
N027	2.000000	0.000000
M007	1.000000	0.000000
M008	2.000000	0.000000
M009	2.000000	0.000000
M010	2.000000	0.000000
M011	3.000000	0.000000
M012	2.000000	0.000000
M013	3.000000	0.000000
M014	3.000000	0.000000

ROW		SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
07:00	)	0.000000	0.000000
07:15	)	0.000000	0.000000
07:30	)	0.000000	0.000000
07:45	)	0.000000	0.000000
08:00	)	0.000000	0.000000
08:15	)	0.000000	0.000000
08:30	)	0.000000	0.000000
08:45	)	0.000000	0.000000
09:00	)	0.000000	0.000000
09:15	)	0.000000	0.000000
09:30	)	0.000000	0.000000
09:45	)	0.000000	0.000000
10:00	)	0.000000	0.000000
10:15	)	0.000000	0.000000
10:30	)	0.000000	0.000000
10:45	)	0.000000	0.000000
11:00	)	0.000000	0.000000
11:15	)	0.000000	0.000000
11:30	)	0.000000	0.000000
11:45	)	0.000000	0.000000
12:00	)	1.000000	0.000000
12:15	)	1.000000	0.000000
12:30	)	0.000000	0.000000

12:45	)	0.000000	0.000000
13:00	)	0.000000	0.000000
13:15	)	0.000000	0.000000
13:30	)	0.000000	0.000000
13:45	)	0.000000	0.000000
14:00	)	0.000000	0.000000
14:15	)	0.000000	0.000000
14:30	)	0.000000	0.000000
14:45	)	0.000000	0.000000
15:00	)	0.000000	0.000000
15:15	)	0.000000	0.000000
15:30	)	0.000000	0.000000
15:45	)	0.000000	0.000000
16:00	)	0.000000	0.000000
16:15	)	0.000000	0.000000
16:30	)	0.000000	0.000000
16:45	)	0.000000	0.000000
17:00	)	0.000000	0.000000
17:15	)	0.000000	0.000000
17:30	)	0.000000	0.000000
17:45	)	0.000000	0.000000
18:00	)	0.000000	0.000000
18:15	)	0.000000	0.000000
18:30	)	0.000000	0.000000
18:45	)	0.000000	0.000000
19:00	)	0.000000	0.000000
19:15	)	0.000000	0.000000
19:30	)	0.000000	0.000000
19:45	)	0.000000	0.000000
20:00	)	0.000000	0.000000
20:15	)	0.000000	0.000000
20:30	)	0.000000	0.000000
20:45	)	0.000000	0.000000
21:00	)	0.000000	0.000000
21:15	)	0.000000	0.000000
21:30	)	0.000000	0.000000
21:45	)	0.000000	0.000000
22:00	)	0.000000	0.000000
22:15	)	0.000000	0.000000
22:30	)	0.000000	0.000000
22:45	)	0.000000	-1.000000
23:00	)	0.000000	0.000000
23:15	)	0.000000	0.000000
23:30	)	0.000000	0.000000
23:45	)	0.000000	0.000000
00:00	)	0.000000	0.000000
00:15	)	0.000000	0.000000
00:30	)	0.000000	0.000000
00:45	)	0.000000	-1.000000
01:00	)	0.000000	0.000000
01:15	)	0.000000	0.000000
01:30	)	0.000000	0.000000
01:45	)	0.000000	0.000000
02:00	)	0.000000	0.000000
02:15	)	0.000000	0.000000
02:30	)	0.000000	0.000000
02:45	)	0.000000	0.000000
03:00	)	0.000000	0.000000
03:15	)	0.000000	0.000000
03:30	)	0.000000	0.000000
03:45	)	0.000000	0.000000
04:00	)	0.000000	0.000000
04:15	)	0.000000	0.000000

04:30	)	0.000000	0.000000
04:45	)	0.000000	0.000000
05:00	)	0.000000	0.000000
05:15	)	0.000000	0.000000
05:30	)	0.000000	0.000000
05:45	)	0.000000	0.000000
06:00	)	0.000000	0.000000
06:15	)	0.000000	0.000000
06:30	)	0.000000	0.000000
06:45	)	0.000000	-1.000000

NO. ITERATIONS= 185

BRANCHES= 2 DETERM.= 1.000E 0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 126.0000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
D001	4.000000	1.000000
D002	4.000000	1.000000
D005	2.000000	1.000000
D006	3.000000	1.000000
D009	2.000000	1.000000
D010	3.000000	1.000000
D012	4.000000	1.000000
D013	7.000000	1.000000
D015	2.000000	1.000000
D016	6.000000	1.000000
D017	2.000000	1.000000
D018	3.000000	1.000000
D020	2.000000	1.000000
D021	2.000000	1.000000
D022	1.000000	1.000000
D023	2.000000	1.000000
D024	1.000000	1.000000
D025	2.000000	1.000000
D026	3.000000	1.000000
M001	1.000000	1.000000
M002	3.000000	1.000000
M004	1.000000	1.000000
M005	2.000000	1.000000
M006	2.000000	1.000000
N001	2.000000	1.000000
N002	1.000000	0.000000
N003	2.000000	1.000000
N004	2.000000	0.000000
N006	1.000000	0.000000
N007	2.000000	0.000000
N008	2.000000	0.000000
N009	2.000000	0.000000
N011	2.000000	0.000000
N014	4.000000	0.000000
N016	1.000000	0.000000
N018	2.000000	0.000000
N019	3.000000	0.000000
N021	5.000000	0.000000
N022	2.000000	0.000000
N023	2.000000	0.000000
N024	3.000000	0.000000
N025	2.000000	0.000000
N026	2.000000	0.000000
N027	2.000000	0.000000

```
     M007         1.000000          0.000000
     M008         2.000000          0.000000
     M009         2.000000          0.000000
     M010         2.000000          0.000000
     M011         3.000000          0.000000
     M012         2.000000          0.000000
     M013         3.000000          0.000000
     M014         3.000000          0.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES   22:45       )              0.000000
-1.000000       .
   00:45     )         0.000000         -1.000000
   06:45             0.000000         -1.000000

 NO. ITERATIONS=     185
 BRANCHES=    2 DETERM.=  1.000E    0
```

Resultado de la corrida en PL, Software Lindo ver. 6.1

TURNO D003	TURNO D004	TURNO D016	TURNO D019	TURNO M001	TURNO M002	TURNO N002	TURNO N004	TURNO N005	TURNO N007	TURNO N012	TURNO N014	TURNO N027
5	23	21	20	3	15	13	1	14	23	2	12	6
07:00	07:00	08:00	08:00	05:00	05:00	16:00	16:00	16:00	16:00	17:00	18:00	23:00
15:00	15:00	16:00	16:00	12:30	12:30	23:00	23:00	23:00	23:00	00:00	01:00	06:00
09:00	09:15	08:00	10:15	05:00	11:30	22:00	18:30	19:00	20:00	20:30	18:00	05:00
10:00	10:15	09:00	11:15	06:00	12:30	23:00	19:30	20:00	21:00	21:30	19:00	06:00