INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY

Doctorado en Ciencias Financieras

Valuación de productos derivados con volatilidad conducida por un proceso de difusión GARCH

TESIS

Para obtener el grado de Doctor en Ciencias Financieras

PRESENTA

FRANCISCO JAVIER SÁNCHEZ TORRES

México, D.F 2008

Director del proyecto: Dr. Francisco Venegas Martínez

Co-director del proyecto: Dr. José Antonio Núñez Mora

Lector: Dr. Fernando Cruz Aranda

Lector: Dr. Arturo Lorenzo Valdés

RESÚMEN

Se propone un modelo de valuación de un contrato de opción donde la volatilidad es conducida por un proceso de difusión GARCH. La metodología propuesta extiende el modelo de Hull y White (1987) hasta el cuarto momento. El modelo de Hull y White utiliza en la valuación de una opción europea una expansión de la prima alrededor de su valor medio que toma en cuenta los tres primeros momentos y, en muchas ocasiones, el precio teórico obtenido está muy alejado del precio observado. Aunque, la inclusión del cuarto momento conlleva a grandes dificultades técnicas, se espera que éste produzca primas más cercanas a las observadas. Esto permite contar con modelos más realistas de la dinámica de la volatilidad en el largo plazo. La eficiencia de la metodología propuesta se verifica a través de simulaciones Monte Carlo.

Índice

Capítulo 1

Introducción

Los derivados, actualmente, son un componente muy importante en los portafolios de inversión. Esto se ve reflejado en su volumen, el cual ha experimentado un crecimiento sin precedentes desde la década de los setentas. La inclusión de los productos derivados en los portafolios es crucial en la administración (reducción) del riesgo a que están expuestos los agentes que participan en los mercados financieros. Para los participantes del mercado, uno de los problemas principales que enfrentan es que los precios obtenidos con el modelo tradicional de Black-Scholes-Merton difieren significativamente de los precios observados. Estos errores sistemáticos de valuación son conocidos como efecto de "sonrisa" ("smile") de la volatilidad, es decir, que cuando las volatilidades son extraídas de los precios de opciones y se grafican contra el vencimiento, la superficie resultante se desvía significativamente de la superficie plana que el modelo teórico predice. Estas desviaciones reflejan el hecho de que en realidad la volatilidad no es constante sino dependiente del tiempo; aún más es una variable aleatoria. Este comportamiento contrasta con el supuesto de varianza constante del movimiento geométrico Browniano que conduce al precio del activo subyacente en el modelo clásico de Black-Scholes-Merton. Los errores de valuación resultantes de este supuesto no realista tienen serias consecuencias para los participantes del mercado en cuanto el riesgo (de mercado) en sus portafolios. Los estudios comparativos realizados al respecto muestran que los errores de valuación obtenidos por el modelo de Black-Scholes-Merton pueden ser reducidos si se considera alguna especificación del proceso estocástico que gobierna a la varianza.

La hipótesis central en la obtención del modelo de valuación de opciones de Black-Scholes (1973) y Merton (1973) es que los rendimientos del activo subyacente, por unidad de tiempo, son distribuidos normalmente con una media y volatilidad constante a través del tiempo. Sin embargo, se ha visto en los estudios de Mandelbrot (1963) y (1967), y Fama (1965) que los rendimientos de los activos tienen distribuciones de colas gordas y que los rendimientos al cuadrado forman "clusters" de volatilidad. Estas características son interpretadas como evidencia empírica de que la volatilidad de los activos financieros es estocástica. El supuesto de volatilidad constante ha sido abandonado por muchos autores que han introducido una especificación de la volatilidad a través de un proceso estocástico. Por ejemplo, Merton (1976) examina el caso de un activo financiero con un precio que sigue un proceso mixto de difusión con salto, el cual produce colas pesadas. Los modelos de volatilidad estocástica fueron introducidos, de manera simultánea, por Hull y White (1987), Scott (1987) y Wiggins (1987). Específicamente, Hull y White (1987) proponen un modelo de volatilidad estocástica más general en el cual el precio del activo subyacente y su varianza siguen procesos de difusión independientes. El modelo de Rubinstein (1983) postula una relación positiva entre el precio del activo y su varianza. Alternativamente, el modelo CEV (elasticidad constante de la varianza) de Cox y Ross (1976) supone que la varianza del activo está negativamente correlacionada con el precio del subyacente.

En las últimas décadas, los modelos ARCH (modelos autorregresivos de heteroscedasticidad condicional) han sido ampliamente aplicados en la literatura financiera y particularmente en la literatura de valuación de opciones. El desarrollo de los modelos ARCH se debe a Engle (1982) y su versión generalizada conocida como GARCH se debe a Bollerslev (1986). Estos modelos suponen rendimientos distribuidos normalmente con una varianza condicional dependiente del tiempo y tienen la caracteristica de describir de manera más adecuada una serie de tiempo financiera que los modelos de series de tiempo tradicionales. El éxito inicial de los modelos ARCH al capturar estas no linealidades de las series de tiempo ha llevado a muchas extensiones del modelo original. Al mismo tiempo se observa frecuentemente en la literatura especializada el replanteamiento de los modelos de valuación de opciones que incorporan procesos ARCH a la dinámica de la varianza. Los modelos propuestos que explican la leptocurtosis son dos: aquellos realacionades con las leyes de estabilidad de Pareto (sugerido por Mandelbrot) y los modelos autorregresivos generalizados de heteroscedasticidad condicional (GARCH) (debidos a Engle y Bollerslev (1986)).

El enfoque de tiempo discreto sobre valuación neutral al riesgo es debido a Brennan (1979) y Rubinstein (1976), el cual considera combinaciones de distribuciones y preferencias. Una conexión entre el enfoque de tiempo discreto y las innovaciones heteroscedásticas de los precios logarítmicos fue presentada por Duan (1995), en donde la dinámica del precio del activo es conducida por un proceso Gaussiano GARCH del tipo Bollerslev (1986). Duan indicó que debido a este ajuste se requiere una forma nueva de neutralidad al riesgo, a saber, la relación de valuación local neutral al riesgo (LRNVR), la cual se mantiene bajo requerimientos muy restrictivos en las preferencias del inversionista y de los supuestos distribucionales. La principal desventaja en los modelos más populares de precios de activos, incluyendo el de valuación de opciones GARCH de Duan, es el supuesto de lognormalidad en los rendimientos, pues al examinar la información del mercado claramente se contradice la hipótesis Gaussiana, además de que la valuación de la opción necesita de simulación numérica. Cuando se quieren contrastar un conjunto de modelos de valuación con la realidad, en un marco de volatilidad estocástica, se requiere de fórmulas cerradas para obtener los precios activos. Afortunadamente, los modelos de Hull y White (1987), y Heston (1993) tienen, respectivamente, fórmulas de aproximación analíticas y semi-analíticas para valuar opciones europeas. Es importante destacar que para muchos modelos de volatilidad estocástica se encuentran disponibles en la literatura varios métodos numéricos. Sin embargo, estos procedimientos son computacionalmente intensivos y cuando hay portafolios grandes que tienen que ser valuados rápido y frecuentemente, esto no resulta práctico. Si una fórmula cerrada de solución estuviera disponible para un modelo GARCH, se podría combinar información de corte transversal de las opciones con información en series de tiempo del activo subyacente; siendo éste uno de los objetivos principales de esta tesis.

Emplear la expansión en serie de Taylor del precio de la opción de Hull y White sólo funciona cuando los procesos del precio del activo y de la varianza no están correlacionados. Este supuesto implica "sonrisas" simétricas de volatilidades, es decir, gráficas de forma simétrica de la volatilidad implícita respecto al precio de ejercicio; ver Hull y White (1987), y Renault y Touzi (1996). Típicamente, los mercados de opciones de divisas están caracterizados por "sonrisas" simétricas de volatilidad; véanse, al respecto, Chesney y Scott (1989), Melino y Turnbull (1990), Taylor y Xu (1994), y Bollerslev y Zhou (2002). La correlación entre los procesos del precio del subyacente y la varianza no es clara en cuanto a su importancia práctica para las opciones en el dinero. De hecho, algunos mercados de opciones en índices aceptan una correlación nula entre el precio del activo y la varianza sin incrementar los errores en la valuación de la opción; véanse Chernov y Ghysels (2000) y Jones (2003) para estudios empíricos sobre los índices Standard & Poor's 500 y Standard & Poor's 100, respectivamente. El análisis de Jarrow y Rudd (1982) establece una relación entre la correlación entre la varianza y el precio, y la diferencia sugiere que para estas opciones el error adicional de aproximación causado por una correlación nula es probablemente pequeño.

En esta tesis se proporciona una aproximación analítica para valuar opciones europeas cuando la varianza es conducida por un proceso de difusión GARCH no correlacionado con el precio del activo subyacente. El precio de una opción será calculado como la esperanza del precio Black-Scholes con el argumento de la varianza reemplazado por las realizaciones futuras de la varianza promedio sobre la vida de la opción. Si la varianza no es es un activo, como Hull y White suponen, entonces la esperanza se toma bajo la medida de probabilidad verdadera. Esta aproximación está relacionada con la expansión del precio de la opción, seguida por Hull y White (1987), e involucra los momentos condicionales de la varianza integrada sobre el tiempo de madurez. Posteriormente se llevan a cabo experimentos de simulación de Monte Carlo para investigar el desempeño de los precios de una opción basada en el segundo, tercero y cuarto momento de la varianza integrada. Los resultados de la simulación resaltan la inestabilidad potencial del cuarto término y se compararan con los resultados obtenidos con sólo los tres primeros momentos para distintos precios de ejercicio y tiempos de vencimiento. Esta fórmula es fácil de implementar y puede ser empleada para estudiar la volatilidad implícita y la prima de riesgo de la varianza asociada al modelo de difusión GARCH. El modelo de difusión GARCH que se propone es una extensión del modelo Hull y White (1987) que mejora muchos de sus aspectos: 1) considera una tendencia con reversión a la media que tiene varianza estacionaria; 2) permite la inclusión de la prima de riesgo de la varianza; 3) produce precios de opciones con tiempos de madurez grandes que son consistentes con los observados.

El proceso de difusión GARCH que conduce el precio del activo subyacente tiene varias propiedades deseables: es positivo, tiene reversión a la media, tiene distribución estacionaria Gamma inversa y satisface la restricción de que las volatilidades implícitas son positivas. Por lo tanto, la propuesta está de acuerdo con la observación de que la varianza empírica es estacionaria y con reversión a la media como lo demuestran los trabajos de Scott (1987), Taylor (1994), Jorion (1995) y Guo (1996, 1998). Más aún, el modelo de difusión GARCH permite explorar patrones interesantes de volatilidad y de precios de opciones que producen cuadrados de rendimientos logarítmicos altos, curtosis arbitrariamente grandes y momentos finitos incondicionales de distribuciones de rendimientos logarítmicos hasta cierto orden, como se observa en los estudios empíricos; véanse, por ejemplo, Dacorogna (2001) y Cont (2001). Por el contrario, cuando la varianza sigue un proceso de raíz cuadrada, como en el modelo de Heston (1993), la distribución correspondiente Gamma estacionaria implica distribuciones de rendimientos logarítmicos con momentos finitos incondicionales hasta cierto orden y una curtosis no muy grande. Varios autores han reportado desempeños empíricos pobres del modelo de Heston; ver, por ejemplo, Jones (2003).

Otra ventaja más del modelo propuesto es la siguiente: si se considera una sucesión de modelos GARCH(1,1)-M ésta converge en distribución a un modelo de difusión GARCH. *Por lo tanto*, el problema de inferencia en los parámetros de tiempo continuo puede ser reducido a realizar inferencia en un modelo GARCH(1,1)-M; ver, por ejemplo, Engle y Lee (1996) y Lewis (2000). Esta es una ventaja importante comparada con otros modelos de volatilidad estocástica que carecen de métodos de estimación simples.

En resumen, las contribuciones específicas de este trabajo se enlistan a continuación.

Se extiende el modelo de Hull y White en varias direcciones. Se derivan los primeros cuatro momentos de la varianza integrada correspondientes al proceso de difusión GARCH. Este resultado tiene varias implicaciones importantes. Estos momentos condicionales permiten obtener una aproximación analítica de los precios de opciones europeas conducidos bajo un proceso de difusión GARCH. Esta aproximación puede ser fácilmente implementada en un paquete de software. La simulación Monte Carlo es muy confiable para distintos precios de ejercicio y vencimientos y un conjunto razonablemente grande de parámetros (reversión, velocidad y volatilidad de la volatilidad). La aproximación analítica propuesta permite estudiar superficies de volatilidades inducidas por los modelos de difusión GARCH. Los momentos condicionales de la varianza integrada implicados por los procesos de difusión GARCH generalizan los momentos condicionales para procesos lognormales de la varianza. Por último, los momentos condicionales de la varianza integrada pueden ser usados para inferir por medio de estimadores de tipo GMM.

La tesis está organizada de la siguiente forma, en el Capítulo 2 se presentan los antecedentes teóricos, así como los hechos relacionados con series históricas. En el Capítulo 3 se realiza la demostración tanto completa como rápida de la convergencia de una ecuación estocástica en diferencias a una ecuación diferencial estocástica conforme el tamaño del intervalo de tiempo discreto entre las observaciones tiende a cero. En el Capítulo 4 se describen las propiedades de la distribución del proceso de la varianza. En el Capítulo 5 se describe la ecuación del proceso de la varianza, incluyendo su solución fuerte, sus momentos y sus resultados derivados del lema de Itô. En el Capítulo 6 se realiza la valuación de opciones con la metodología propuesta y se analizan los momentos condicionales de las series. En el Capítulo 7 se aplica el modelo propuesto mediante simulación Monte Carlo y se comparan los resultados con los datos observados. Por último, en el Capítulo 8 se incluyen las conclusiones, recomendaciones y las posibles líneas de investigación.

Capítulo 2

Antecedentes

Introducción

En el siguiente capítulo se destacan dos aspectos relevantes de esta tesis. El primero se refiere a las características que presentan las series financieras. Al respecto, se mencionan todas las particularidades de tipo estadístico que tienen las series financieras en común y que han llevado a numerosos estudios. Cuando se sale del mundo "normal", la investigación actual todavía no es suficiente para explicar muchos de los hechos estilizados que la información presenta. El otro aspecto tiene que ver con la investigación que se ha realizado sobre este tema; se presentan desde los estudios pioneros hasta los más recientes. Por último se mencionan muchas contribuciones sobre desarrollo actual del tema.

2.1 Hechos empíricos estilizados

2.1.1 Introducción

La evidencia empírica que presenta las series de datos sobre información financiera proviene del análisis estadístico de los rendimientos de los precios de varios activos. Al conjunto de características comunes en todos los instrumentos, mercados y períodos de tiempo, observadas a través de estudios se les conoce como "hechos empíricos estilizados". Es decir, se deja que la información hable por sí misma. En el artículo intitulado "Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues", de Cont (2000) se reporta que las características estadísticas estilizadas que se observan son: ausencia de autocorrelación, colas pesadas, asimetría en pérdidas y ganancias, tendencia a la normalidad conforme aumenta el tiempo entre observaciones, intermitencia en los rendimientos o alta variabilidad de los rendimientos, agrupamiento de la volatilidad (conocida en inglés como volatility clustering), colas pesadas condicionales, decaimiento lento en la autocorrelación de los rendimientos absolutos, efecto apalancamiento, correlación del volumen con la volatilidad y asimetría en las escalas de tiempo. El modelo que se desarrolla en el presente trabajo describe estadísticamente con sus parámetros los siguientes hechos estilizados.

2.1.2 Colas anchas

Ya desde la década de los sesentas, Mandelbrot señalaba la deficiencia de la distribución normal para modelar la distribución marginal de los rendimientos de los activos y su rasgo de colas pesadas. Mandelbrot destacaba que la curtosis de los incrementos de los precios de activos era mayor a su valor Gaussiano, sobre todo en lapsos de tiempo muy cortos, por ejemplo, cada 5 minutos. Se pueden resumir todos los resultados empíricos obtenidos diciendo que la distribución de los rendimientos es no Gaussiana, leptocúrtica y de colas pesadas, siendo más pronunciadas estas propiedades en los datos intradía. La distribución (incondicional) de los rendimientos muestra una cola tipo Pareto o exponencial, con un índice en la cola que es finito, mayor que dos y menor que cinco para la mayor parte de los conjuntos de series de rendimientos estudiadas. En particular, se excluyen las leyes estables con varianza infinita y a la distribución normal. Hasta ahora la investigación no es suficiente para identificar la distribución de los rendimientos y de las colas, dejando un margen amplio para la elección de la distribución exacta. Los estudios empíricos permiten saber que para que un modelo paramétrico reproduzca fielmente las propiedades descritas de los rendimientos marginales se debe contar con al menos cuatro parámetros: un parámetro de ubicación, un parámetro de escala (volatilidad), un parámetro que describa el decaimiento de las colas y eventualmente un parámetro de asimetría que permita que las colas izquierda y derecha tengan comportamientos diferentes. Ejemplos de las distribuciones que cumplen estos requisitos son la distribución normal Gaussiana inversa, las distribuciones hiperbólicas generalizadas y las distribuciones estables exponencialmente truncadas. La elección entre estas clases de distribuciones no sólo es cuestión numérica, sino también analítica.

Por otro lado, el carácter no Gaussiano de las distribuciones hace necesario usar otras medidas de dispersión diferentes a la desviación estándar con el propósito de capturar la variabilidad de los rendimientos. Se pueden considerar momentos de mayor orden o sus sumas como medidas de dispersión y variabilidad. Al respecto, Mandelbrot determinó que la varianza teórica podría ser infinita dado que la varianza muestral no convergía a un valor particular conforme el tamaño de la muestra aumentaba y la varianza muestral continuaba fluctuando incesantemente. Más grave aún es que el comportamiento del cuarto momento es generalmente más errático.

2.1.3 Ausencia de correlación y agrupamiento de volatilidad

La ausencia de una correlación lineal significativa en el incremento de los precios y el rendimiento de los activos ha sido ampliamente documentada y citada como respaldo de la hipótesis de mercados eficientes. Es bien sabido que la ausencia de correlación lineal no implica la independencia de los incrementos; la independencia implica que una función no lineal de los rendimientos no presente autocorrelación. Sin embargo esta propiedad no siempre se mantiene en los estudios empíricos; las funciones simples no lineales de rendimientos, tales como la desviación absoluta y la cuadrada, exhiben autocorrelación positiva significativa o persistencia. Este se conoce como fenómeno de agrupamiento de la volatilidad: quiere decir que cambios grandes en los precios van seguidos de más cambios grandes en precios. Su nombre en inglés es "volatility clustering". Este fenómeno cuantifica el hecho de que los eventos de alta volatilidad se agrupan en el tiempo. Una medida comúnmente usada para medir el agrupamiento de la volatilidad es la función de autocorrelación de los rendimientos al cuadrado:

$$C_2(\tau) = \text{correlación}(|r(t+\tau,\Delta t)|^2, |r(t,\Delta t)|^2).$$

Los estudios empíricos que usan los rendimientos de varios índices y acciones indican que esta función de autocorrelación permanece positiva y decae lentamente, permaneciendo significativamente positiva por varios días e incluso semanas. En la literatura econométrica se le conoce como "efecto ARCH" dado que es un rasgo de los modelos (G)ARCH. Es importante tener en mente que esta propiedad de los rendimientos es independiente del modelo y no recae en la hipótesis GARCH. Esta persistencia implica cierto grado de predicción en el tamaño de los rendimientos dado por sus cuadrados.

2.1.4 Dependencia no lineal y efecto apalancamiento

Otra medida de dependencia no lineal en los rendimientos es el "efecto apalancamiento": la correlación de los rendimientos con rendimientos subsecuentes al cuadrado definido por

$$L(\tau) = \text{correlación}(r(t, \Delta t), |r(t + \tau, \Delta t)|^2)].$$

Esta función comienza con un valor negativo y decae a cero, sugiriendo que los rendimientos negativos llevan a un alza en la volatilidad. Sin embargo, este efecto es asimétrico $L(T) \neq L(-T)$ y en general $L(T)$ es imperceptible para $T < 0$. La existencia de tal dependencia no lineal, opuesto a la ausencia de autocorrelación en los rendimientos mismos, es usualmente interpretada diciendo que hay correlación en la volatilidad de los rendimientos pero no en los rendimientos mismos. Sin embargo, hay que ser muy cuidadosos con estos estimadores ya que pueden ser poco confiables. Esto es debido a que la función de autocorrelación de colas pesadas tiene propiedades estadísticas no estándares que invalidan muchos procedimientos de pruebas econométricas utilizados para detectar o medir dependencia.

2.2 Estudios previos

2.2.1 Introducción

En esta sección se discuten varios trabajos sobre el comportamiento temporal de los rendimientos. A través de la modificación de los supuestos del trabajo seminal de Black-Scholes, muchos autores han tratado de apegarse más a la realidad. En particular, el supuesto de volatilidad constante ha sido modificado por un gran número de autores. De acuerdo con la sección anterior sobre hechos estilizados es también muy frecuente encontrar el fenómeno de reversión a la media en los estudios empíricos sobre el comportamiento de la volatilidad. El primer intento fue hecho por Merton mediante ajustes en los parámetros por eventos muestrales. A partir de ahí una serie de extensiones han llevado a un modelo de valuación cada vez más completo. Se han incluido argumentos de no arbitraje y llegado a fórmulas cerradas con parámetros fáciles de calcular.

2.2.2 Modelo de Merton

En el artículo "Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous", publicado 1976, Merton intenta con éxito mejorar los supuestos del modelo clásico de Black-Scholes (1973). Aunque su objetivo principal no era considerar un portafolio con varianza estocástica, sino resolver un problema de valuación cuando el activo subyacente está sujeto a saltos de Poisson. En su investigación Merton analiza, indirectamente, una situación donde la varianza cambia en función de los datos. Los resultados obtenidos para el caso de un proceso mixto de difusión con saltos son contundentes. Merton mostró que si la opción era valuada utilizando los resultados de Black-Scholes basados en la varianza esperada (siendo generada por el conjunto de saltos y cambios continuos en los precios), entonces los precios serían mayores o menores al precio correcto. Estos resultados son importantes porque son similares a los obtenidos en las investigaciones posteriores que usan un grado matemático más sofisticado (avanzado), como lo es el modelo de Hull y White (1988).

2.2.3 Modelo de Geske

El artículo de Geske, "The Valuation of Compound Options" publicado en 1979, proporciona la solución a un tipo especial de problema de volatilidad estocástica. Geske examina el caso en que la volatilidad del valor de una empresa es constante por lo que la volatilidad del precio de la acción cambia en forma sistemática conforme el precio de la acción sube o baja. Dentro de los supuestos de Geske está el suponer que la volatilidad no está correlacionada con el precio de la acción, lo cual es equivalente a suponer no apalancamiento.

2.2.4 Modelo de Johnson (1979) y Johnson y Shanno (1985)

Johnson (1979) en su trabajo "Option Pricing when the Variance is Changing" estudia el caso general en el cual la varianza instantánea del precio de la acción sigue un proceso estocástico. Sin embargo, con el fin de obtener la ecuación diferencial que el precio de la opción debe satisfacer, supone la existencia de un activo con un precio que está instantáneamente y perfectamente correlacionado con la varianza estocástica. La existencia de tal activo es suficiente para llegar a dicha ecuación diferencial, pero Johnson fue incapaz de resolverla para determinar el precio de la opción. Por otro lado, Johnson y Shanno (1985), en su artículo intitulado de la misma forma que el de Johnson (1979), obtienen algunos resultados numéricos utilizando simulación y presentan varios argumento para explicar los sesgos observados por Rubinstein (sesgo producido por el apalancamiento de las acciones).

2.2.5 Modelo de Scott

En su artículo de 1986 llamado "Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory and an Application", Scott examina el comportamiento del precio de una opción europea de compra sobre una acción que tiene cambios aleatorios en la varianza. Scott propone un proceso de tiempo continuo de difusión para el rendimiento de la acción y el parámetro de volatilidad, y encuentra que se debe usar una acción y dos opciones para formar una cobertura libre de riesgo. La cobertura libre de riesgo no lleva a una función de valuación única de la opción porque la desviación estándar aleatoria no es un activo negociable. Se debe hacer uso de un modelo de equilibrio de valuación de activos para obtener una función de valuación única de la opción. En general, el precio de la opción depende de la prima de riesgo asociada a la desviación estándar aleatoria. Asimismo, Scott encuentra que el problema puede ser simplificado si se supone que el riesgo de la volatilidad puede ser diversificado y que los cambios en la volatilidad no están correlacionados con el rendimiento de la acción. La solución resultante es una integral que considera la fórmula de Black-Scholes y la función de distribución para la varianza de la acción. Por último, Scott demuestra que los precios de la opción pueden ser calculados de manera confiable a través de simulación Monte Carlo.

2.2.6 Modelo de Wiggins

Wiggins en su artículo "Options under Stochastic Volatility", publicado en 1987, resuelve numéricamente el problema de valuación de una opción de compra dado un proceso estocástico continuo para el cambio porcentual de la volatilidad. Los estimadores estadísticos de los parámetros del proceso de volatilidad son obtenidos y calculados para varios tipos de acciones e índices. Los valores de las opciones estimadas resultantes no difieren significativamente de los valores obtenidos en el modelo de Black-Scholes en la mayoría de los casos, aunque hay evidencia de que para índices de opciones en plazos más largos, los valores Black-Scholes sobrevalúan las opciones fuera del dinero en relación a las opciones dentro del dinero. En el trabajo de Wiggins falta una solución en forma cerrada; sin embargo, proporciona una aproximación numérica a través del método de diferencias finitas.

2.2.7 Modelo de Heston

Heston presenta, en su artículo "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility" publicado en 1993, una metodología para valuar una opción sobre una acción con volatilidad estocástica. Heston presenta una propuesta para obtener las funciones características de las probabilidades neutrales al riesgo como soluciones de una ecuación diferencial parcial de segundo orden. A través de estas probabilidades neutrales al riesgo obtiene una fórmula similar a la de Black y Scholes (1973) para valuar una opción europea de compra. Aunque Heston supone una correlación arbitraria entre los procesos del precio y de la varianza, cuenta con la desventaja de no contar con una expresión analítica para la prima de la opción.

2.2.8 Modelo Hull y White

En su artículo "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities", publicado en (1987), Hull y White presentan una fórmula de valuación cerrada para el caso en que la volatilidad estocástica sea independiente del precio del activo. Hull y White producen soluciones numéricas para el caso en que la volatilidad está correlacionada con el precio del activo; no se suponen que la volatilidad sea un activo negociado. Por último, Hull y White encuentran que el precio Black-Scholes sobrevalúa, frecuentemente, las opciones y que el grado de sobrevaluación incrementa con el tiempo de vencimiento.

Capítulo 3

El Modelo

Introducción

En este capítulo se muestra, bajo ciertas condiciones, la convergencia de una ecuación en diferencias estocástica del tipo GARCH(1,1)-M a una ecuación diferencial estocástica del tipo del movimiento geométrico Browniano con reversión a la media; este último, por simplicidad será llamado proceso de difusión GARCH. La importancia de esta convergencia radica en que el problema de inferencia sobre los parámetros de modelos de valuación de opciones con volatilidad conducida por procesos de difusión GARCH puede ser reducido a la estimación del modelo GARCH(1,1)-M. Por ejemplo, los parámetros de los modelos de valuación de opciones de Engle y Lee (1996), Lewis (2000) y Hull y White (1987), podrían ser estimados por métodos muy simples.

3.1 Convergencia de una ecuación estocástica en diferencias a una ecuación diferencial estocástica

La presente sección toma como marco de referencia a las opciones europeas sobre divisas, ya que típicamente la volatilidad de éstas presenta reversión a la media. Sea $(S_t)_{t\geq 0}$ el precio de una divisa subyacente y $(V_t)_{t\geq 0}$ su varianza instantánea. Suponga que $(S_t, V_t)_{t\geq 0}$ satisface el modelo de difusión GARCH bidimensional (véanse, al respecto, los trabajos de Wong (1964) y Nelson (1990)):

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t \mathrm{d}B_t,$$

$$\mathrm{d}V_t = (c_1 - c_2 V_t)dt + c_3 V_t \mathrm{d}W_t,$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes positivas y B_t y W_t son movimientos brownianos unidimensionales independientes en un espacio filtrado de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ con

$\mathbb{P}$ como medida objetivo. En lo que sigue se fijan el tiempo inicial $t = 0$ y el vector $(S_0, V_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Como puede observarse, el proceso de V_t presenta reversión a la media con c_1/c_2 como el valor medio de largo plazo y c_2 como la tasa de reversión. Para un parámetro c_2 de valor pequeño, la velocidad de reversión es débil y V_t tiende a permanecer por arriba (o por abajo) del valor medio de largo plazo por períodos largos, generando clusters de volatilidad. El parámetro c_3 determina el comportamiento aleatorio de la volatilidad: para $c_3 = 0$ el proceso de la volatilidad es determinista y para $c_3 > 0$ la curtosis de la distribución de los rendimientos logarítmicos es mayor a 3. Cuando $c_1 = c_2 = 0$, el proceso de difusión GARCH se reduce al proceso lognormal sin tendencia del modelo de volatilidad estocástica de Hull y White (1987). A continuación se presentan las condiciones generales para que una serie en tiempo discreto de dimensión finita de procesos markovianos $\{_hX_t\}_{h\to 0}$ converja débilmente a un proceso de Itô.

3.2 Convergencia de un GARCH(1,1)-M a un proceso de difusión GARCH

En esta sección se demuestra la convergencia de modelo GARCH(1,1)-M a un proceso de difusión GARCH. Esta demostración, de forma resumida, fue extraída del documento de Nelson (1990) con fin de claridad en la convergencia de dichas distribuciones. Y_t es la variable que representa el logaritmo de los rendimientos de un activo y su ecuación GARCH(1,1)-M está dada de la siguiente forma

$$Y_t = Y_{t-1} + c\sigma_t^2 + \sigma_t Z_t, \tag{3.1}$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \sigma_t^2(\beta + \alpha Z_t^2), \tag{3.2}$$

donde Z_t son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas $\mathcal{N}(0,1)$. Se introduce una nueva notación donde las dos ecuaciones de arriba dependen de un subíndice h, que es una partición del tiempo con tal de poder hacerlo cada vez más pequeño. Los coeficientes de la ecuación (3.2) también dependen de h y tanto la tendencia de Y_t como la varianza de la varianza son proporcionales a h, quedando así

$$ {}_hY_{kh} = {}_hY_{(k-1)h} + h \cdot c \cdot {}_h\sigma^2_{kh} + {}_h\sigma_{kh} \cdot {}_hZ_{kh}, \tag{3.3} $$

$$ {}_h\sigma^2_{(k+1)h} = \omega_h + {}_h\sigma^2_{kh}(\beta_h + h^{-1}\alpha_h \cdot {}_hZ^2_{kh}), \tag{3.4} $$

y

$$ \mathbb{P}[({}_hY_0, {}_h\sigma^2_0) \in \Gamma] = \nu_h(\Gamma) \ \text{ para cualquier } \ \Gamma \in \mathrm{B}(\mathrm{R}^2), \tag{3.5} $$

donde $\{{}_hZ_{kh}\}$ son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas $\mathcal{N}(0,h)$. La sucesión de medidas satisface para $h \geq 0$, $\nu_h((Y_0, \sigma^2_0) : \sigma^2_0 > 0) = 1$. Por otro lado están los procesos en tiempo continuo ${}_hY_t$ y ${}_h\sigma^2_t$:

$$ {}_hY_t \equiv {}_hY_{kh} \quad \text{y} \quad {}_h\sigma^2_t \equiv {}_h\sigma^2_{kh} \quad \text{para} \quad kh \leq t < (k+1)h. \tag{3.6} $$

La primera condición para que los procesos $\{{}_h\sigma^2_t\}$ y $\{{}_hY_t\}$ tiendan en el límite a un proceso de Itô es hacer que los coeficientes ω, α y β dependan de h a fin de descubrir las sucesiones que logren esta convergencia conforme h tienda a cero. ${}_h\sigma^2_t$ es la varianza en cada período. $c \cdot {}_h\sigma^2_t$ es la prima de riesgo por período. Otra condición es que los coeficientes sean positivos con el fin de no tener varianzas negativas.

Hay un proceso de Markov en las ecuaciones (3.3)-(3.5) y la tendencia en cada período condicionada a $(k-1)h$ es:

$$ \mathbb{E}[h^{-1}({}_hY_{kh} -_h Y_{(k-1)h})\,|M_{kh}] = c \cdot_h \sigma^2_{kh}, \tag{3.7} $$

$$ \mathbb{E}[h^{-1}({}_h\sigma^2_{(k+1)h} -_h \sigma^2_{kh})\,|M_{kh}] = h^{-1}\omega_h + h^{-1}(\beta_h + \alpha_h - 1)_h\sigma^2_{kh}, \tag{3.8} $$

M_{kh} es la σ-álgebra originada por kh, ${}_hY_0, \ldots, {}_hY_{(k-1)h}$, y ${}_h\sigma^2_0, \ldots, {}_h\sigma^2_{kh}$. Cuando los siguientes límites existen y son finitos, la tendencia por unidad de tiempo converge:

$$ \lim_{h\to 0} h^{-1}\omega_h = \omega \geq 0, \tag{3.9} $$

$$ \lim_{h\to 0} h^{-1}(1 - \beta_h - \alpha_h) = \theta. \tag{3.10} $$

El segundo momento por unidad de tiempo es

$$\mathbb{E}[({}_h\sigma^2_{(k+1)h} - {}_h\sigma^2_{kh})^2/h \,|M_{kh}]$$

$$= h^{-1}\omega_h^2 + 2h^{-1}\omega_h(\beta_h + \alpha_h - 1)_h\sigma^2_{kh}$$

$$+ h^{-1}(\beta_h + \alpha_h - 1)^2{}_h\sigma^4_{kh} + 2h^{-1}\alpha^2_{h}{}_h\sigma^4_{kh}, \tag{3.11}$$

$$\mathbb{E}[h^{-1}({}_hY_{kh} - {}_hY_{(k-1)h})^2\,|M_{kh}] = hc_h^2\sigma^4_{kh} + {}_h\sigma^2_{kh}, \tag{3.12}$$

$$\mathbb{E}[h^{-1}({}_hY_{kh} - {}_hY_{(k-1)h})({}_h\sigma^2_{(k+1)h} - {}_h\sigma^2_{kh})\,|M_{kh}]$$

$$= c\cdot{}_h\sigma^2_{kh}\cdot\omega_h + c\cdot{}_h\sigma^4_{kh}(\beta_h + \alpha_h - 1). \tag{3.13}$$

Si se sustituyen (3.9)-(3.10) en (3.11)-(3.13) y se supone que

$$\lim_{h\to 0} 2h^{-1}\alpha_h^2 = \alpha^2 > 0, \tag{3.14}$$

existe y es finito, entonces se tiene que

$$E[h^{-1}({}_h\sigma^2_{(k+1)h} - {}_h\sigma^2_{kh})^2\,|M_{kh}] = \alpha^2{}_h\sigma^4_{kh} + o(1), \tag{3.15}$$

$$E[h^{-1}({}_hY_{kh} - {}_hY_{(k-1)h})^2\,|M_{kh}] = {}_h\sigma^2_{kh} + o(1), \tag{3.16}$$

$$E[h^{-1}({}_hY_{kh} - {}_hY_{(k-1)h})({}_h\sigma^2_{(k+1)h} - {}_h\sigma^2_{kh})\,|M_{kh}] = o(1), \tag{3.17}$$

el término $o(1)$ es insignificante. Para satisfacer a (3.9), (3.10) y (3.14) se toma $\omega_h = \omega h$, $\beta_h = 1 - \alpha(h/2)^{1/2} - \theta h$ y $\alpha_h = \alpha(h/2)^{1/2}$. Los límites de

$$\mathbb{E}[h^{-1}({}_h\sigma^2_{(k+1)h} - {}_h\sigma^2_{kh})^4\,|M_{kh}] \quad \text{y} \quad \mathbb{E}[h^{-1}({}_hY_{kh} - {}_hY_{(k-1)h})^4\,|M_{kh}]$$

existen y convergen a cero, con $\delta = 2$,

$$b(Y,\sigma^2) \equiv \begin{bmatrix} c\cdot\sigma^2 \\ \omega - \theta\sigma^2 \end{bmatrix}, \tag{3.18}$$

$$a(Y,\sigma^2) \equiv \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2\sigma^4 \end{bmatrix}. \tag{3.19}$$

Por lo tanto, las ecuaciones (3.18)-(3.19) se convierten en el límite en un proceso de difusión

$$\mathrm{d}Y_t = c\cdot\sigma_t^2\mathrm{d}t + \sigma_t\mathrm{d}W_{1,t}, \tag{3.20}$$

$$\mathrm{d}\sigma_t^2 = (\omega - \theta\sigma_t^2)\mathrm{d}t + \alpha\sigma_t^2\mathrm{d}W_{2,t}, \tag{3.21}$$

$$\mathbb{P}[(Y_0,\sigma_0^2)\in\Gamma] = \nu_0(\Gamma) \quad \text{para cualquier} \quad \Gamma\in B(\mathbb{R}^2), \tag{3.22}$$

con $W_{1,t}$ y $W_{2,t}$ como movimientos Brownianos estándar estocásticamente independientes.

3.3 Prueba rápida de convergencia

En esta sección se presenta una prueba rápida de convergencia que aunque es menos formal es muy intuitiva. Considere el modelo GARCH(1,1)-M:

$$Y_t = Y_{t-1} + c\sigma_t^2 + \sigma_t Z_t,$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \sigma_t^2(\beta + \alpha Z_t^2),$$

$Z_t \sim N(0,1)$; $\omega_h,\ \alpha_h,\ \beta_h \geq 0$. Considere una partición con $kh \leq t \leq (k+1)h$ y $h = 1/N$, de la forma $t_k = hk$, es decir,

$$t_0 = 0$$

$$t_1 = h$$

$$t_2 = 2h = 2/N$$

$$t_N = Nh = 1.$$

Para el proceso Y_t, se define

$$_hY_{kh} = {_hY_{(k-1)h}} + c \cdot {_h\sigma_{kh}^2} + {_h\sigma_{kh}} \cdot {_hZ_{kh}},$$

$$_hY_{kh} - {_hY_{(k-1)h}} = c \cdot {_h\sigma_{kh}^2} + {_h\sigma_{kh}} \cdot {_hZ_{kh}}.$$

Esta última expresión converge a

$$\mathrm{d}Y_t = c \cdot \sigma_t^2 \mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}W_{1,t}.$$

Asimismo, para σ_t se tiene que

$$_h\sigma_{(k+1)h}^2 = \omega_h + {_h\sigma_{kh}^2}[\beta_h + \alpha_h \cdot {_hZ_{kh}^2}],$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} {_h\sigma_{(k+1)h}^2} - {_h\sigma_{kh}^2} &= \omega_h + {_h\sigma_{kh}^2} \cdot \beta_h - {_h\sigma_{kh}^2} + {_h\sigma_{kh}^2} \cdot \alpha_h \cdot {_hZ_{kh}^2} + \alpha_h \cdot {_h\sigma_{kh}^2} - \alpha_h \cdot {_h\sigma_{kh}^2}, \\ &= \omega_h - (1 - \alpha_h - \beta_h){_h\sigma_{kh}^2} + \alpha_h \cdot {_h\sigma_{kh}^2}({_hZ_{kh}^2} - 1), \\ &= \omega_h - \theta_h \sigma_{kh}^2 + \alpha_h \cdot {_h\sigma_{kh}^2}({_hZ_{kh}^2} - 1). \end{aligned}$$

Si se utiliza ahora la aproximación $\ln(x) \approx x - 1$ válida cuando $x \approx 1$, se tiene que la ecuación anterior puede ser aproximada de la siguiente forma:

$$_h\sigma^2_{(k+1)h} - {}_h\sigma^2_{kh} = \omega_h - \theta_h \sigma^2_{kh} + \alpha_h \cdot {}_h\sigma^2_{kh} \cdot \ln({}_hZ^2_{kh}).$$

Observe que las variables aleatorias $\ln({}_hZ^2_{kh})$ toman valores entre $-\infty$ y ∞. Como las variables aleatorias $\ln({}_hZ^2_{kh})$ son independientes con varianza finita, por el teorema del límite central se tiene que $\ln({}_hZ^2_{kh}) \to Y$ donde $Y \sim \mathcal{N}(0, t)$, siempre y cuando el número de subintervalos se vaya a infinito. Si se escribe ahora $Y = \mathrm{d}W_{2,t}$, se obtiene que

$$\mathrm{d}\sigma^2_{\mathrm{t}} = (\omega - \theta\sigma^2_t)\mathrm{d}t + \alpha\sigma^2_t \mathrm{d}W_{2,t}$$

donde se ha supuesto que

$$\lim_{h\to 0} h^{-1}\omega_h = \omega \geq 0,$$
$$\lim_{h\to 0} h^{-1}(1 - \beta_h - \alpha_h) = \theta.$$

Capítulo 4

Propiedades de la distribución de la varianza

Introducción

En este capítulo se detallan las características referentes a la distribución que subyace en el proceso de la varianza. Despúes de hacer uso de algunos resultados del capítulo anterior sobre congervencia, se obtiene la distribución estacionaria de la varianza, la cual está dada por la distribución es Gamma inversa. El contenido de este capítulo es un resúmen del apéndice del artículo de Nelson (1990). Fue incluido pues es muy importantes para conocer a fondo los detalles del criterio de convergencia.

4.1 Resultado principal de convergencia

Se aplica la transformación matemática, $V_t \equiv \ln(\sigma_t^2)$, para verificar la unicidad distribucional y se aplica el Lema de Itô a (3.20)-(3.22), en cuyo caso se obtiene:

$$\mathrm{d}Y_t = c \cdot \exp(V_t)\mathrm{d}t + \exp(V_t/2)\mathrm{d}W_{1,t}, \tag{3.20'}$$

$$\mathrm{dV_t} = [\omega \cdot \exp(-V_t) - \theta - \alpha^2/2]\mathrm{d}t + \alpha \mathrm{d}W_{2,t}, \tag{3.21'}$$

$$\mathbb{P}[(Y_0, \exp(V_0)) \in \Gamma] = v_0(\Gamma) \quad \text{para cualquier} \quad \Gamma \in B(\mathbb{R}^2). \tag{3.22'}$$

Dada la unicidad distribucional de (3.20)-(3.22), ésta se mantiene para (3.20')-(3.22').[1] Se concluye que ${}_hY_t, {}_h\sigma_t^2 \Rightarrow (Y_t, \sigma_t^2)$ conforme $h \to 0$. Para conseguir la distribución estacionaria de σ_t^2 implicada por (3.21) se aplica el resultado de Wong (1964), pues de otra forma no es posible conseguir una forma cerrada de solución para la distribución estacionaria de un modelo GARCH(1,1) en tiempo discreto.

[1] Esto se mantiene mientras que $v_h((Y_0,\sigma_0^2)\colon\ \sigma_0^2>0)=1$.

Teorema de densidad estacionaria[2]: Para cada $t \geq 0$ se define el proceso condicional de precisión (el inverso de la varianza) $\lambda_t \equiv \sigma_t^{-2}$, donde σ_t^2 es generada por el sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas (3.20)-(3.22). Si $2\theta/\alpha^2 > -1$ y $\omega > 0$, entonces

$$\lambda_t \xrightarrow{d} \Gamma(1 + 2\theta/\alpha^2, 2\omega/\alpha^2) \quad \text{conforme} \quad t \to \infty, \tag{4.1}$$

donde $\Gamma(\cdot, \cdot)$ es la distribución Gamma.[3] Si $\lambda_0 \sim \Gamma(1+2\theta/\alpha^2, 2\omega/\alpha^2)$, entonces los procesos σ_t^2 y λ_t generados por (3.20)-(3.22) son estrictamente estacionarios, y para toda $t \geq 0$ se cumple que,

$$\lambda_t \sim \Gamma(1 + 2\theta/\alpha^2, 2\omega/\alpha^2). \tag{4.2}$$

Si la distribución de ${}_h\lambda_0 \equiv {}_h\sigma_0^{-2}$ converge a $\Gamma(1 + 2\theta/\alpha^2, 2\omega/\alpha^2)$ conforme $h \to 0$, (b) la sucesión $\{\omega_h, \alpha_h, \beta_h\}_{h\to 0}$ satisface (3.10), (3.11) y (3.12), y (c) $2\theta/\alpha^2 > -1$, y $\omega > 0$, entonces en el sistema de tiempo discreto (3.3)-(3.5),

$$ {}_h\sigma_{kh}^{-2} \xrightarrow{d} \Gamma(1 + 2\theta/\alpha^2, 2\omega/\alpha^2), \tag{4.3}$$

$$ h^{-1/2}{}_hZ_{kh} \cdot {}_h\sigma_{kh} \cdot [(2\theta + \alpha^2)/2\omega]^{1/2} \xrightarrow{d} t(2 + 4\theta/\alpha^2), \tag{4.4}$$

para cualquier valor constante de kh conforme $h \to 0$, donde $t(2+4\theta/\alpha^2)$ es la distribución t de Student con $2 + 4\theta/\alpha^2$ grados de libertad.

Por último, si adicionalmente existe una $d > 0$ tal que $\limsup \mathbb{E}[{}_h\sigma_0^{2d}] < \infty$, entonces

$$ {}_h\sigma_{kh}^{-2} \xrightarrow{d} \Gamma(1 + 2\theta/\alpha^2, 2\omega/\alpha^2), \tag{4.5}$$

$$ h^{-1/2}{}_hZ_{kh} \cdot {}_h\sigma_{kh} \cdot [(2\theta + \alpha^2)/2\omega]^{1/2} \xrightarrow{d} t(2 + 4\theta/\alpha^2), \tag{4.6}$$

conforme $h \to 0$ y $kh \to \infty$.

El Teorema de densidad estacionaria dice que el proceso ${}_hZ_{kh} \cdot {}_h\sigma_{kh}$ es condicionalmente normal, su distribución incondicional es t de Student cuando h es pequeña y kh es

[2] Este Teorema es reproducido a partir del documento de Nelson (1990).

[3] $x \sim \Gamma(r,s)$ quiere decir que la función de densidad de probabilidad para x está dada por $f(x)=s^r \cdot x^{(r-1)} \cdot \exp(-sx)/\Gamma(r)$ para $x>0$, donde $\Gamma(\cdot)$ es la función Gamma.

grande. El término de grados de libertad $(2+4\theta/\alpha^2)$ es intuitivo pues la distribución t de Student tiene una varianza finita cuando tiene más de dos grados de libertad. En tiempo discreto, la condición para la estacionariedad estricta del GARCH(1,1) condicionalmente normal es que $\mathbb{E}[\ln(\beta_h+\alpha_h Z^2)] < 0,\ Z \sim N(0,1)$ (Nelson (1988)), mientras que en tiempo continuo este requisito es $(2+4\theta/\alpha^2) > 0$ (la distribución t tiene estrictamente positivos grados de libertad).

4.2 Demostración del Teorema de densidad estacionaria

La inclusión de esta demostración es necesaria para conocer los valores que los parámetros pueden tomar para mantener los criterios de convergencia y que nuestra fórmula de aproximación funcione. De ser violadas dichas condiciones, la curtosis del proceso, o cuarto momento, diverge a infinito. Esta demostración se acredita también a Nelson (1990). En la siguiente ecuación se presenta a $A(x)$ y $B(x)$ como funciones escalares valuadas en los números reales ($\mathbb{R}^1$), con $B(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^1$. X_t es un proceso estocástico representado por la ecuación diferencial estocástica

$$\mathrm{d}x = A(x_t)\mathrm{d}t + [2 \cdot B(x_t)]^{1/2}\mathrm{d}W_t,$$

W_t es un movimiento Browniano estándar. Su ecuación de Fokker-Planck (Arnold (1974)) es

$$\partial^2[B(x)p]/\partial x^2 - \partial[A(x)p]/\partial x = \partial p/\partial t,$$

donde $p = p(x\,|x_0, t),\ 0 \leq t < \infty$ es la densidad de la probabilidad de x_t dado x_0. La ecuación diferencial

$$\mathrm{d}[p^*(x) \cdot B(x)]/\mathrm{d}x = A(x) \cdot p^*(x).$$

se satisface si hay una densidad estacionaria para x_t, una densidad $p^*(x)$ tal que

$$p^*(x) = \lim_{t\to\infty} p(x\,|x_0, t),$$

Si la densidad $p^*(x)$ satisface (3.11) y es miembro de la familia de distribuciones Pearson, se tiene la densidad estacionaria del proceso x_t. Para el límite de difusión GARCH(1,1) en (3.21) se tiene

$$A(\sigma^2) = \omega - \theta\sigma^2,$$

$$B(\sigma^2) = \sigma^4\alpha^2/2.$$

Si se prueba un candidato con una densidad $p^*(\sigma^2)$ de la forma $p^*(\sigma^2)\alpha\sigma^{2a}\cdot\exp(b/\sigma^2)$ para cierta a y b se obtiene una densidad Gamma invertida. Si se cambia de variable $\lambda \equiv \sigma^{-2}$ se produce la densidad estacionaria $f(\lambda)$:

$$f(\lambda) = \Gamma(1 + 2\theta/\alpha^2, 2\omega/\alpha^2),$$

donde $\Gamma(\cdot,\cdot)$ es la densidad Gamma. El hallazgo de la densidad estacionaria se debe a Wong (1964). Con esto, las ecuaciones (4.1)-(4.2) se siguen inmediatamente. Debido a que ${}_h\sigma^2_{kh} \xrightarrow{d} \sigma^2_t$ para $kh = t$ conforme $h \to 0$, (4.3) también se sigue inmediatamente. Dado que $h^{-1/2}{}_hZ_{kh} \sim \mathcal{N}(0,1)$ es independiente de λ, entonces se integra λ para obtener (4.4).

Las ecuaciones (4.5)-(4.6) se mantienen si hay una función Liapunov doblemente continua diferenciable $\varphi(\cdot)$ definida en $[0,\infty)$ y números estrictamente positivos h^*, Δ y η tales que

$$\min_{0\leq\sigma^2} \varphi(\sigma^2) = 0,$$

$$\lim_{\sigma^2\to\infty} \varphi(\sigma^2) = \infty,$$

$$\sup_{0<h\leq h^*} \mathbb{E}[\varphi({}_h\sigma^2_0)] < \infty,$$

y para ${}_h\sigma^2_{kh} \geq 0$ y todo h, $0 < h < h^*$,

$$h^{-1}\mathbb{E}[\varphi({}_h\sigma^2_{(k+1)h}) - \varphi({}_h\sigma^2_{kh})\,|M_{kh}] < \Delta - \eta\cdot\varphi({}_h\sigma^2_{kh}).$$

Si se define para cualquier d, $0 < d < 1$,

$$\varphi_d(\sigma^2) \equiv \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \sigma^2 = 0, \\ \sigma^{2d}\cdot\exp(-1/\sigma^2) & \text{de otra forma,} \end{cases}$$

entonces $\varphi_d(\sigma^2)$ y sus derivadas de cualquier orden son continuas en $[0,\infty)$. La función $\varphi_d(\sigma^2)$ también satisface (3.15)-(3.16). Para comprobar que (3.18) se mantiene para cierta

$d > 0$ se simplifica la notación y se escribe $\varphi(\sigma^2)$, σ_+^2 y σ^2 en lugar de $\varphi_d(\sigma^2)$, ${}_h\sigma^2_{(k+1)h}$, y ${}_h\sigma^2_{kh}$, entonces

$$h^{-1}\mathbb{E}[\varphi(\sigma_+^2) - \varphi(\sigma^2)\,|M_{kh}] - (\alpha^2\sigma^4/2)\cdot\varphi''(\sigma^2)$$
$$- (\omega - \theta\sigma^2)\cdot\varphi'(\sigma^2) \to 0,$$

uniformemente en conjuntos compactos para una d fija. Si se confina σ^2 a cualquier conjunto compacto $\Theta \subset [0,\infty)$, (3.1) se reduce a

$$(\alpha^2\sigma^4/2)\cdot\varphi'' + (\omega - \theta\sigma^2)\cdot\varphi' + o(1) < \Delta - \eta\cdot\varphi.$$

Si $\varphi(\cdot)$ y sus derivadas están localmente acotadas, para cualquier conjunto compacto Θ hay una Δ finita con la que (3.1) se mantenga uniformemente en $\sigma^2 \in \Theta$. Para valores grandes de σ^2 se considera (3.18): se expande $h^{-1}[\varphi(\sigma_+^2) - \varphi(\sigma^2)]$ en una serie de Taylor de cuarto orden y se toman esperanzas, (3.18) se cumple si

$$\begin{aligned}
&h^{-1}\mathbb{E}[\varphi(\sigma_+^2) - \varphi(\sigma^2)\,|M_{kh}]\\
&= -d\theta\sigma^{2d} + \mathrm{O}(\sigma^{-2}) + d(d-1)(\alpha^2/2)\sigma^{2d}\\
&\quad + \sigma^{2d}[\mathrm{O}(h^{1/2}) + \mathrm{O}(\sigma^{-2})\cdot\mathrm{O}(h)]\\
&\quad + h^{-1}d(d-1)(d-2)(d-3)\\
&\quad \cdot\mathbb{E}[(\varphi(\sigma_+^2) - \varphi(\sigma^2))^4\cdot\sup_{0\le\delta\le 1}(\delta\sigma^2 + (1-\delta)\sigma_+^2)^d\,|M_{kh}]\\
&< \Delta - \eta\cdot\sigma^{2d}.
\end{aligned}$$

La expresión (3.18) se mantendrá cuando se pueda encontrar una d, $0 < d < 1$, y una $\eta > 0$ que

$$(\eta - \theta)\cdot\sigma^{2d} + (d-1)(\alpha^2/2)\cdot\sigma^{2d} < 0,$$

lo cual siempre se puede hacer si $2\theta/\alpha^2 > -1$.

Capítulo 5

Ecuación del proceso de la varianza

Introducción

En este capítulo se determina el proceso de la varianza. A continuación se utiliza la integral que representa el valor medio del proceso de la varianza para obtener los momentos principales de la varianza. Estos momentos son esenciales en la valuación de una opción con volatilidad estocástica. La investigación actual en el método de momentos se ha concentrado en la valuación usando hasta el tercer momento, en este trabajo se examinan momentos más grandes con el fin de modelar precios de opciones en el largo plazo, incluyendo un proceso de reversión a la media.

5.1 Solución fuerte a una ecuación diferencial estocástica

Sea X_t proceso positivo con $X_0 > 0$. Considere la ecuación diferencial estocástica unidimensional ($d = 1$, $r \geq 1$) es

$$\mathrm{d}X_t = [A(t)X_t + a(t)]\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{r} [S_j(t)X_t + \sigma_j(t)]\mathrm{d}W_t^{(j)}$$

donde $W = \{W_t = (W_t^{(1)}, ..., W_t^{(r)}), \quad \mathcal{F}_t; \quad 0 \leq t < \infty\}$ un movimiento Browniano r-dimensional y los coeficientes A, a, S_j, σ_j son procesos casi seguramente acotados localmente, medibles y $\mathcal{F}_t$-adaptados. La solución fuerte de la ecuación anterior es

$$X_t = Z_t[X_0 + \int_0^t \frac{1}{Z_u}\{a(u) - \sum_{j=1}^{r} S_j(u)\sigma_j(u)\}\mathrm{d}u + \sum_{j=1}^{r} \int_0^t \frac{\sigma_j(u)}{Z_u}\mathrm{d}W_u^{(j)}]$$

donde,

$$Z_t \triangleq \exp[\int_0^t A(u)\mathrm{d}u + \zeta_t]$$

$$\zeta_t \triangleq \sum_{j=1}^{r} \int_0^t S_j(u)\mathrm{d}W_u^{(j)} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r} \int_0^t S_j^2(u)\mathrm{d}u.$$

A continuación se aplica el resultado anterior al proceso de la varianza. Sea V_t el proceso de la varianza. Suponga que $V_0 > 0$ y que V_t es positiva. Si se escribe

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t \mathrm{d}B_t,$$

$$\mathrm{d}V_t = (c_1 - c_2 V_t)dt + c_3 V_t \mathrm{d}W_t,$$

entonces, en virtud del resultado anterior, la solución fuerte está dada por:

$$V_t = V_0 e^{-(c_2+(1/2)c_3^2)t + c_3 W_t} + c_1 \int_0^t e^{(c_2+(1/2)c_3^2)(s-t)+c_3(W_t - W_s)}\mathrm{d}s,$$

En este caso, la distribución estacionaria de V_t es la distribución Gamma inversa con parámetros $r = 1 + 2c_2/c_3^2$ y $s = 2c_1/c_3^2$, es decir, $1/V_t \sim \Gamma(r, s)$.

5.2 Momentos de la varianza

Cuando $2c_2 > c_3^2$, el proceso de V_t es estrictamente estacionario, ergódico con media condicional

$$\mathbb{E}\left[V_t \,|V_0\right] = \frac{c_1}{c_2} + \left(V_0 - \frac{c_1}{c_2}\right) e^{-c_2 t}$$

y varianza

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left[V_t \,|V_0\right] = {} & \frac{(c_1/c_2)^2}{2c_2/c_3^2 - 1} + e^{-c_2 t}\frac{2(c_1/c_2)(V_0 - (c_1/c_2))}{c_2/c_3^2 - 1} \\ & - e^{-2c_2 t}\left(V_0 - \frac{c_1}{c_2}\right)^2 + e^{(c_3^2 - 2c_2)t}\left(V_0^2 - \frac{2V_0(c_1/c_2)}{1 - c_3^2/c_2}\right. \\ & \left. + \frac{(c_1/c_2)^2}{(1 - c_3^2/2c_2)(1 - c_3^2/c_2)}\right).\end{aligned}$$

La esperanza incondicional de estas lleva a la media y varianza incondicional de V_t

$$\mathbb{E}[V_t] = \frac{c_1}{c_2}, \qquad \mathrm{Var}[V_t] = \frac{(c_1/c_2)^2}{2c_2/c_3^2 - 1}.$$

Momentos de V_t incondicionales de mayor orden pueden ser derivados a partir de la distribución estacionaria Gamma inversa.

La distribución estacionaria de V_t, Gamma inversa, tiene momentos finitos hasta el orden r si y solo si $r < 1 + 2c_2/c_3^2$, lo cual implica que las distribuciones de rendimientos logarítmicos tienen momentos finitos incondicionales hasta el orden $2r$. Más aún, cuando c_3^2 tiende a $2c_2$, la curtosis de las distribuciones de los rendimientos logarítmicos diverge a infinito y la correlación entre los rendimientos logarítmicos al cuadrado se acerca a $1/3$. Algunos estudios empíricos muestran que las distribuciones especulativas de rendimientos logarítmicos de varios activos no tienen momentos finitos e ningún orden; ver, por ejemplo, Dacorogna (2001) y Cont (2001).

5.3 Lema de Itô aplicado al proceso de volatilidad.

Bajo el modelo de difusión GARCH, si se define la volatilidad $\sigma_t := \sqrt{V_t}$ y se aplica el lema de Itô, se sigue que:

$$\mathrm{d}\sigma_t = \left(\frac{1}{2\sqrt{V_t}}(c_1 - c_2 V_t) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}V_t^{-\frac{3}{2}}\right)c_3^2 V_t^2\right)\mathrm{d}t + \frac{c_3}{2\sqrt{V_t}}V_t \mathrm{d}W_t,$$

$$\mathrm{d}\sigma_t = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{\sigma_t} - \left(c_2 + \frac{c_3^2}{4}\right)\sigma_t\right)\mathrm{d}t + \frac{c_3}{2}\sigma_t \mathrm{d}W_t.$$

Bajo el punto de vista de inferencia, el modelo de difusión GARCH tiene una ventaja importante sobre otros modelos de volatilidad estocástica, ya que el modelo de difusión GARCH es el límite en tiempo continuo del modelo discreto GARCH (1,1)-M. Por lo tanto, el problema de hacer inferencia en los parámetros de tiempo continuo puede ser reducido a realizar inferencia en un modelo de media GARCH (1,1)-M.

Capítulo 6

La fórmula de valuación de la opción

Introducción

En este capítulo se desarrolla la fórmula de valuación de opciones con volatilidad conducida por procesos de difusión GARCH. Se comienza con el planteamiento de la ecuación diferencial parcial del problema de volatilidad estocática. Después se utiliza el marco teórico de valuación neutral al riesgo para obtener una fórmula aproximada. Se generan los primeros cuatro momentos centrales de la varianza integrada, lo cual es justamente uno de resultado de esta investigación. A partir de aquí se extiende la investigación de Hull y White al agregar el cuarto momento, el cual mide la curtosis. Posteriormente se aplica la fórmula propuesta para verificar que se obtienen precios más confiables.

6.1 El problema de volatilidad estocástica y propuesta de Hull y White.

El problema de encontrar el precio de equilibrio de un producto derivado en un portafolio compuesto por un activo financiero y su volatilidad se remonta al artículo de Garman "A General Theory of Asset Valuation under Diffusion State Processes", publicado en (1976). En este trabajo se considera un producto derivado f, con un precio que depende del precio de un activo financiero, S_t, y su varianza instantánea, $V_t = \sigma_t^2$, los cuales son conducidos por los siguientes procesos estocásticos:

$$\mathrm{d}S_t = \phi S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}B_t,$$

$$\mathrm{d}V_t = \mu V_t \mathrm{d}t + \xi V_t \mathrm{d}W_t.$$

La variable ϕ puede depender tanto de S, σ y t. Las variables μ y ξ pueden depender tanto de σ como de t. No obstante, se supone, por el momento, que no dependen de S_t. Los procesos de Wiener $\mathrm{d}B_t$ y $\mathrm{d}W_t$ tienen correlación ρ. El proceso estocástico que sigue la varianza es un tanto complejo. No puede tomar valores negativos, por lo que la desviación estándar instantánea debe acercarse a cero conforme σ_t^2 se aproxime a cero. Dado que S_t y σ_t^2 son las únicas variables de estado que afectan el precio del derivado, f, la tasa libre de riesgo, las cual será denotada como r, debe ser constante o al menos determinística.

En un principio este problema no se había podido resolver porque no existe activo que esté instantáneamente y perfectamente correlacionado con la variable de estado σ_t^2. Por lo tanto, no parece posible formar un portafolio de cobertura que elimine todo el riesgo. Garman demostró que un derivado f con un precio que dependa de variables de estado θ_i debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum\nolimits_{i,j}\rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_i\partial\theta_j}-rf=\sum\nolimits_{i}\theta_i\frac{\partial f}{\partial\theta_i}\left[-\mu_i+\beta_i(\mu^*-r)\right],$$

donde σ_i es la desviación estándar instantánea de θ_i, ρ_{ij} es la correlación instantánea entre θ_i y θ_j, μ_i es la tendencia de θ_i, β_i es el vector múltiple de regresión de las betas sobre las variables de estado, "rendimientos" ($\mathrm{d}\theta/\theta$), del portafolio de mercado y los portafolios más cercanamente correlacionados con las variables de estado, y r es el vector de elementos de la tasa libre de riesgo r. Cuando la variable i es negociada, satisface el CAPM con $(N+1)$ factores, y el i-ésimo elemento en el lado derecho de la ecuación anterior es $-r\theta_i\partial f/\partial\theta_i$.

En el problema de esta investigación existen dos variables de estado, S_t y V_t, de las cuales S_t es negociada. En este caso, la ecuación diferencial anterior se convierte en

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\sigma^2S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}+2\rho\sigma^3\xi S\frac{\partial^2 f}{\partial S\partial V}+\xi^2V^2\frac{\partial^2 f}{\partial V^2}\right]-rf=-rS\frac{\partial f}{\partial S}-\left[\mu-\beta_v(\mu^*-r)\right]\sigma^2\frac{\partial f}{\partial V},$$

donde ρ es la correlación instantánea entre S_t y V_t. La variable β_v es el vector de betas de regresión múltiple de los "rendimientos" de la varianza ($\mathrm{d}V_t/V_t$) del portafolio de mercado y los portafolios más cercanamente correlacionados con las variables de estado, y μ^* se define como antes. Nótese que estos rendimientos esperados dependen de las preferencias de riesgo del inversionista, esto quiere decir que, en general, el precio de la opción va depender de las preferencias de riesgo del inversionista. Se supone que $\beta_v(\mu^* - r)$ es cero o que la volatilidad no está correlacionada con el consumo agregado. Este no es un supuesto descabellado y quiere decir que la volatilidad tiene riesgo sistemático cero. El producto derivado debe satisfacer entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + 2\rho\sigma^3\xi S\frac{\partial^2 f}{\partial S \partial V} + \xi^2 V^2 \frac{\partial^2 f}{\partial V^2}\right] - rf = -rS\frac{\partial f}{\partial S} - \mu\sigma^2\frac{\partial f}{\partial V}.$$

En lo que sigue se va a suponer que $\rho = 0$, es decir, que la volatilidad no está correlacionada con el precio del activo. Como muestra el trabajo de Geske, esto es equivalente a decir que se supone no apalancamiento y una volatilidad constante del valor de la empresa. Suponer no apalancamiento es decir que un movimiento en el rendimiento del precio de la acción no implica un movimiento en la volatilidad, o que si hay pérdidas la empresa se vuelve más riesgosa. Una solución analítica a la ecuación diferencial anterior para el precio de una opción de compra europea puede ser obtenida usando el procedimiento de valuación neutral al riesgo. Dado que ni la ecuación anterior ni las condiciones de frontera de la opción dependen de las preferencias de riesgo, se supone al momento de calcular el precio de la opción que la neutralidad al riesgo prevalece. Por lo tanto, $f(S, V, t)$ debe ser el valor presente del valor terminal esperado de f, descontado a la tasa libre de riesgo. El precio de la opción es, por lo tanto,

$$f(S_t, V_t, t) = e^{-r(T-t)} \int f(S_T, V_T, T) p(S_T \,|S_t, V_t) dS_T \ ,$$

donde

$$\begin{aligned}
T &= \text{tiempo en el cual la opción madura;}\\
S_t &= \text{precio de la acción en el tiempo } t;\\
\sigma_t &= \text{desviación estándar instantánea en el tiempo } t;\\
p(S_T|S_t, V_t) &= \text{la distribución condicional de } \ S_T\\
&\quad\ \text{dado el precio de la acción y la varianza en el tiempo } t;\\
\mathbb{E}(S_T|S_t) &= S_t e^{r(T-t)};
\end{aligned}$$

y $f(S_T, V_T, T)$ es la función $\max(0, S - X)$. La condición impuesta sobre $\mathbb{E}(S_T|S_t)$ se da para dejar claro que, en un mundo neutral al riesgo, la tasa de rendimiento esperado de S_t es la tasa libre de riesgo. Se define a continuación la volatilidad estocástica promedio

$$\overline{V}_{t,T} = \frac{1}{T-t}\int_t^T V_u \mathrm{d}u,$$

donde V_u es solución de la ecuación diferencial estocástica anterior. Se verá, a continuación, que el precio de una opción europea de compra es el precio de Black-Scholes integrado sobre la distribución de probabilidad de la varianza estocástica promedio a lo largo de la vida de la opción. Es decir, el precio de una opción europea de compra, $c = c(S_t, V_t, t)$, en un mundo neutral al riesgo, satisface

$$\begin{aligned} c(S_t, V_t, t) =& e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{S_T|S_t,V_t}\left[\ \max(S_T - K, 0)\ \middle|\ \mathcal{F}_t\ \right] \\ =& \int_0^\infty c_{\mathrm{BS}}(S_t, t; \overline{V}_{t,T}) h(\overline{V}_{t,T}|V_t)\mathrm{d}\overline{V}_{t,T}, \end{aligned}$$

donde c_{BS} es el precio de Black-Scholes con varianza $\overline{V}_{t,T}$, h es la función de densidad de $\overline{V}_{t,T}$, condicional en V_t, y $\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_t^U \otimes \mathcal{F}_t^W$. En efecto, observe primero que, con algún abuso en la notación,

$$f(S_T|S_t, V_t) = \int_0^\infty g(S_T|S_t, \overline{V}_{t,T}) h(\overline{V}_{t,T}|V_t)\mathrm{d}\overline{V}_{t,T},$$

donde f, g y h son funciones de densidad condicionales. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} c(S_t, V_t, t) &= e^{-r(T-t)}\int_0^\infty \max(S_T - K, 0) f(S_T|S_t, V_t)\mathrm{d}S_T \\ &= e^{-r(T-t)}\int_0^\infty\int_0^\infty \max(S_T - K, 0) g(S_T|S_t, \overline{V}_{t,T}) h(\overline{V}_{t,T}|V_t)\mathrm{d}\overline{V}_{t,T}\mathrm{d}S_T \\ &= \int_0^\infty \left[e^{-r(T-t)}\int_0^\infty \max(S_T - K, 0) g(S_T|S_t, \overline{V}_{t,T})\mathrm{d}S_T\right] h(\overline{V}_{t,T}|V_t^2)\mathrm{d}\overline{V}_{t,T}. \end{aligned}$$

Como se puede ver, la parte interna de la ecuación anterior es el precio Black-Scholes de una opción de compra con varianza promedio $\overline{V}_{t,T}$. Ahora bien, bajo el supuesto de independencia entre el precio y la volatilidad del activo subyacente, es decir, $\mathrm{Cov}(\mathrm{d}B_t, \mathrm{d}W_t) = 0$, se puede verificar que la distribución condicional de $\ln(S_T/S_t)$, dado $\overline{V}_{t,T}$, es normal con media $(r - \frac{1}{2}\overline{V}_{t,T})(T - t)$ y varianza $\overline{V}_{t,T}(T - t)$. Por lo tanto, dicha distribución es consistente con el mundo normal de Black-Scholes. En consecuencia,

$$\begin{aligned} c_{\text{BS}}(S_t, t; \overline{V}_{t,T}) =& e^{-r(T-t)} \int_0^\infty \max(S_T - K, 0) g(S_T | S_t, \overline{V}_{t,T}) \mathrm{d}S_T \\ =& S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \end{aligned}$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\overline{V}_{t,T}\right)(T - t)}{\overline{\sigma}_{t,T}\sqrt{T - t}}$$

y

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\overline{V}_{t,T}\right)(T - t)}{\overline{\sigma}_{t,T}\sqrt{T - t}}.$$

Así,

$$c(S_t, V_t, t) = \int_0^\infty c_{\text{BS}}(S_t, t; \overline{V}_{t,T}) h(\overline{\sigma}^2_{t,T} | \sigma^2_t) \mathrm{d}\overline{\sigma}^2_{t,T}.$$

6.2 Método de aproximación

En esta sección se describe el método de aproximación que se utilizará para valuar una opción europea de compra cuando la varianza del precio del activo subyacente está dada por (26.3). Si se define la función

$$H(\overline{\sigma}^2_{t,T}) = c_{\text{BS}}(S_t, t; \overline{\sigma}^2_{t,T})$$

y se calcula su expansión en series de Taylor alrededor de $\mathbb{E}[\overline{\sigma}^2_{t,T} | \sigma^2_t] = \widehat{\sigma}^2_{t,T}$, se tiene que

$$\begin{aligned} H(\overline{\sigma}^2_{t,T}) =& H(\widehat{\sigma}^2_{t,T}) + \frac{\partial H}{\partial \overline{\sigma}^2_{t,T}} (\overline{\sigma}^2_{t,T} - \widehat{\sigma}^2_{t,T}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial (\overline{\sigma}^2_{t,T})^2} (\overline{\sigma}^2_{t,T} - \widehat{\sigma}^2_{t,T})^2 \\ &+ \frac{1}{6} \frac{\partial^3 H}{\partial (\overline{\sigma}^2_{t,T})^3} (\overline{\sigma}^2_{t,T} - \widehat{\sigma}^2_{t,T})^3 + \cdots \end{aligned}$$

donde las derivadas parciales se evalúan en $\widehat{\sigma}^2_{t,T}$. Si se multiplica la expresión anterior por $h(\overline{\sigma}^2_{t,T} | \sigma^2_t)$ y se integra con respecto de $\overline{\sigma}^2_{t,T}$, se obtiene

$$c(S_t, \sigma^2_t, t) = H(\widehat{\sigma}^2_{t,T}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial (\overline{\sigma}^2_{t,T})^2} \text{Var}\left[\overline{\sigma}^2_{t,T}\right] + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 H}{\partial (\overline{\sigma}^2_{t,T})^3} \text{Sesgo}\left[\overline{\sigma}^2_{t,T}\right] + \cdots.$$

En las secciones siguientes se demostrará que si $\alpha = 0$ y β es pequeña se tiene la siguiente aproximación:

$$c(S_t, \sigma_t^2, t) = H(\sigma_t^2) + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial(\sigma_t^2)^2}\mathrm{Var}\left[\overline{\sigma}_{t,T}^2\right] + \tfrac{1}{6}\frac{\partial^3 H}{\partial(\sigma_t^2)^3}\mathrm{Sesgo}\left[\overline{\sigma}_{t,T}^2\right].$$

6.3 Extensión del número de momentos

Como en otros estudios (por ejemplo, Chesney y Scott, 1989; Heston, 1993; Jones, 2003) se especifica la prima de riesgo de la varianza $\lambda(V, S, t)$ como una función lineal de V_t, $\lambda(V, S, t) = \lambda V$. Entonces, el proceso ajustado por riesgo es todavía un proceso de difusión GARCH,

$$\mathrm{d}S_t = (r - d)S_t\mathrm{d}t + \sqrt{V_t}S_t\mathrm{d}B_t^*, \tag{6.1}$$

$$\mathrm{d}V_t = (c_1 - c_2^* V_t)\mathrm{d}t + c_3 V_t \mathrm{dW}_t^*, \tag{6.2}$$

donde r y d son las tasas de interés domésticas y foráneas, $c_2^* = c_2 + \lambda c_3$, B^* y W^* son movimientos Brownianos mutuamente independientes bajo la medida ajustada al riesgo $\mathbb{P}^*$. Bajo la dinámica ajustada al riesgo de las ecuaciones (6.1) y (6.2), el resultado del precio de la opción de Hull y White (1987) se mantiene: el precio C_{sv} para un call Europeo con tiempo a la madurez T y precio de ejercicio K está dado por

$$C_{sv} = \int_0^\infty C_{bs}(\overline{V}_T) f(\overline{V}_T \,|V_0\,) \mathrm{d}\overline{\mathrm{V}}_T, \tag{6.3}$$

donde C_{bs} es el precio de la opción Black y Scholes (1973), $\overline{V}_T$ es la varianza integrada sobre el tiempo a la madurez T,

$$\overline{V}_T := \frac{1}{T}\int_0^T V_s \mathrm{d}s \tag{6.4}$$

y $f\left(\overline{V}_T \,|V_0\,\right)$ es la función de densidad condicional de $\overline{V}_T$ dado V_0. La densidad $f\left(\overline{V}_T \,|V_0\,\right)$ no es conocida y el precio de la opción C_{sv} no está disponible en forma cerrada. La esperanza en la ecuación 6.3 puede ser calculada con simulación de Monte Carlo, pero tal procedimiento consume demasiado tiempo. Hull y White (1987) dan una aproximación analítica para C_{sv} en la ecuación (6.3). Ellos calculan la expansión en serie de Taylor de C_{bs} en la ecuación (6.3) alrededor de la media condicional de $\overline{V}_T$ obteniendo una fórmula de valuación en serie de la opción que involucra sólo los momentos condicionales de $\overline{V}_T$ y las sensibilidades del precio Black y Scholes a la varianza. Denotando por $M_1 := \mathbb{E}[\overline{V}_T \,|V_0]$ a la media condicional de $\overline{V}_T$ y por $M_{ic} := \mathbb{E}[(\overline{V}_T - M_1)^i \,|V_0], i \geq 2$, al n-avo momento condicional centrado de $\overline{V}_T$, el precio de la opción en serie es

$$\begin{aligned} C_{sv} = C_{bs}(M_1) &+ \frac{M_{2c}}{2} \left.\frac{\partial^2 C_{bs}(M_1)}{\partial \overline{V}_T^2}\right|_{\overline{V}_T = M_1} + \frac{M_{3c}}{6} \left.\frac{\partial^3 C_{bs}(M_1)}{\partial \overline{V}_T^3}\right|_{\overline{V}_T = M_1} \\ &+ \frac{M_{4c}}{24} \left.\frac{\partial^4 C_{bs}(M_1)}{\partial \overline{V}_T^4}\right|_{\overline{V}_T = M_1} + O(M_{5c}) \end{aligned} \tag{6.5}$$

con derivadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{bs}}{\partial \overline{V}_T} &= \frac{e^{-\mathrm{d}T} S_0 \sqrt{T} e^{-d_1^2/2}}{\sqrt{8\pi \overline{V}_T}}, \\ \frac{\partial^2 C_{bs}}{\partial \overline{V}_T^2} &= \frac{\partial C_{bs}}{\partial \overline{V}_T} \left[\frac{1}{2} \frac{m^2}{(\overline{V}_T T)^2} - \frac{1}{2\overline{V}_T T} - \frac{1}{8} \right] T, \\ \frac{\partial^3 C_{bs}}{\partial \overline{V}_T^3} &= \frac{\partial C_{bs}}{\partial \overline{V}_T} \left[\frac{m^4}{4(\overline{V}_T T)^4} - \frac{m^2(12 + \overline{V}_T T)}{8(\overline{V}_T T)^3} + \frac{48 + 8\overline{V}_T T + (\overline{V}_T T)^2}{64(\overline{V}_T T)^2} \right] T^2, \\ \frac{\partial^4 C_{bs}}{\partial \overline{V}_T^4} &= \frac{\partial C_{bs}}{\partial \overline{V}_T} \left[\frac{1}{8} \frac{m^6}{(\overline{V}_T T)^6} - \frac{3}{32} \frac{m^4(20 + \overline{V}_T T)}{(\overline{V}_T T)^5} \right. \\ &\quad + \frac{3}{128} \frac{m^2(240 + 24\overline{V}_T T + (\overline{V}_T T)^2)}{(\overline{V}_T T)^4} \\ &\quad \left. - \frac{(960 + 144\overline{V}_T T + 12(\overline{V}_T T)^2 + (\overline{V}_T T)^3)}{512(\overline{V}_T T)^3} \right] T^3 \end{aligned}$$

y $m := \ln(S_0/K) + (r - d)T$. Hasta ahora, los momentos condicionales de la varianza integrada han sido calculados analíticamente sólo para unas cuantas especificaciones del proceso de la varianza, esto es:

(1) para el proceso con reversión a la media de Ornstein-Uhlenbeck Cox y Miller (1972, sección 5.8) derivaron los dos primeros momentos condicionales de $\overline{V}_T$;

(2) para el movimiento geométrico Browniano sin tendencia Hull y White (1987) derivaron los tres primeros momentos condicionales de $\overline{V}_T$ y los dos primeros momentos condicionales de $\overline{V}_T$ para el proceso de la varianza con tendencia. Durante la revisión de este trabajo, se vió que Sabanis (2002) derivó los siete primeros momentos condicionales para este proceso;

(3) para el proceso de raíz cuadrada Bollerslev y Zhou (2002) derivaron los dos primeros momentos condicionales. Lewis (2000) derivó los primeros cuatro momentos condicionales de la varianza integrada para la clase general de procesos afines.

Dados los momentos condicionales analíticos de $\overline{V}_T$ es muy fácil valuar opciones Europeas por la aproximación en serie de la ecuación (6.5). García (2001) usó esta fórmula para valuar opciones Europeas bajo el modelo de Heston como una alternativa a la fórmula de valuación del precio de la opción de Heston; ver también Ball y Roma (1994). Ciertamente, implementar soluciones integrales para precios de opciones, como la fórmula de Heston, puede ser muy delicado debido a la divergencia del integrando en algunas regiones del espacio de parámetros.

Se deriva el segundo, tercero y cuarto momento condicional de $\overline{V}_T$ cuando la varianza V_t está conducida por un proceso de difusión GARCH (2). El primer momento condicional ya era conocido en la literatura financiera. En la siguiente proposición se establecen los primeros momentos condicionales.

Momentos de orden mayor son esenciales para capturar el efecto de la 'sonrisa' de las volatilidades implícitas; ver, por ejemplo, Bodurtha y Courtadon (1987) para opciones de tipo de cambio PHLX y Lewis (2000). Se denotan estos momentos condicionales con M_1^{gd}, M_{2c}^{gd}, M_{3c}^{gd} y M_{4c}^{gd}.

Proposición 6.1. Sea $(V_t)_{t\geq 0}$ para satisfacer la ecuación diferencial estocástica (6.2). Dado $(V_0, c_1) \in R^+ \times R^+$ y $c_2 > c_3^2$, el primero y segundo momento condicional de la varianza integrada $\overline{V}_T$ son

$$M_1^{gd} := \mathbb{E}[\overline{V}_T | V_0] = \frac{c_1}{c_2} + \left(V_0 - \frac{c_1}{c_2}\right) \frac{1 - e^{-c_2 T}}{c_2 T}, \tag{6.6}$$

$$
\begin{aligned}
M_{2c}^{gd} := \mathbb{E}[(\overline{V}_T - M_1^{gd})^2 \,|V_0] &= -\frac{e^{-2Tc_2}(c_2V_0 - c_1)^2}{T^2c_2^4} \\
&+ \frac{2e^{(c_3^2-2c_2)T}(2c_1^2 + 2c_1(c_3^2 - 2c_2)V_0 + (2c_2^2 - 3c_2c_3^2 + c_3^4)V_0^2)}{T^2(c_2 - c_3^2)^2(2c_2 - c_3^2)^2} \\
&- \frac{c_3^2(c_1^2(4c_2(3 - Tc_2) + (2Tc_2 - 5)c_3^2) + 2c_1c_2(-2c_2 + c_3^2)V_0 + c_2^2(c_3^2 - 2c_2)V_0^2)}{T^2c_2^4(c_3^2 - 2c_2)^2} \\
&+ \frac{2e^{-Tc_2}c_3^2(2c_1^2(Tc_2^2 - (1 + Tc_2)c_3^2) + 2c_1c_2^2(1 - Tc_2 + Tc_3^2)V_0 + c_2^2(c_3^2 - c_2)V_0^2)}{T^2c_2^4(c_2 - c_3^2)^2}.
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

Estos momentos son obtenidos usando propiedades del movimiento Browniano tales como independencia y estacionariedad de los incrementos no sobrepuestos y la linealidad de $\mathrm{d}V_t$ en V_T. Como ya se observó, para $c_1 = 0$ el proceso de difusión GARCH se reduce al proceso log normal con tendencia y entonces M_1^{gd}, M_{2c}^{gd} se reducen a la media condicional y varianza de $\overline{V}_T$ de Hull y White (1987, p. 287). El tercero y cuarto momentos centrales se proporcionan en el apéndice.

6.4 Proposición sobre momentos condicionales, Proposición 6.1

A continuación, se derivan los dos primeros momentos condicionales de la varianza integrada $\overline{V}_T$ para el proceso de difusión GARCH,

$$
\begin{aligned}
\overline{V_T} = \frac{V_0}{T}\int_0^T \mathrm{d}t e^{-(c_2+(1/2)c_3^2)t} e^{c_3 W_t} + \frac{c_1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t \int_0^t \mathrm{d}s \\
\times\, e^{-(c_2+(1/2)c_3^2)(s-t)} e^{c_3(W_t - W_s)}.
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

Para demostrar la Proposición 6.1 recordemos que, si w es una variable aleatoria normal $w \sim \mathcal{N}(0,t)$, la función generadora de momentos es

$$
\mathbb{E}[e^{\lambda w}] = e^{\lambda^2 t/2}. \tag{6.9}
$$

También se necesita del siguiente lema.

Lema 6.1. $\forall x > y > 0$.

$$
F(x,y) = e^{-(c_2+(1/2)c_3^2)(x+y)}\mathbb{E}[e^{c_3(W_x+W_y)}] = e^{-c_2 x}e^{(c_3^2-c_2)y}. \tag{6.10}
$$

$$\forall x > y > \alpha > 0,$$

$$\begin{aligned} G(x,y,\alpha) &= e^{-(c_2+(1/2)c_3^2)(x+y-\alpha)}\mathbb{E}[e^{c_3(W_x+W_y-W_\alpha)}] \\ &= e^{-c_2x}e^{(c_3^2-c_2)y}e^{(c_2-c_3^2)\alpha}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

$$\forall x > \alpha > y > 0,$$

$$\begin{aligned} H(x,y,\alpha) &= e^{-(c_2+(1/2)c_3^2)(x+y-\alpha)}\mathbb{E}[e^{c_3(W_x+W_y-W_\alpha)}] \\ &= e^{-c_2(x+y-\alpha)}. \end{aligned} \tag{6.12}$$

$$\forall x > y > \alpha > \beta > 0,$$

$$\begin{aligned} L(x,y,\alpha,\beta) &= e^{-(c_2+(1/2)c_3^2)(x+y-\alpha-\beta)}\mathbb{E}[e^{c_3(W_x+W_y-W_\alpha-W_\beta)}] \\ &= e^{-c_2x}e^{(c_3^2-c_2)y}e^{(c_2-c_3^2)\alpha}e^{c_2\beta}. \end{aligned} \tag{6.13}$$

$$\forall x > \alpha > y > \beta > 0,$$

$$\begin{aligned} M(x,y,\alpha,\beta) &= e^{-(c_2+(1/2)c_3^2)(x+y-\alpha-\beta)}\mathbb{E}[e^{c_3(W_x+W_y-W_\alpha-W_\beta)}] \\ &= e^{-c_2(x+y-\alpha-\beta)}. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Demostración. Para demostrar (6.10) se escribe $W_x + W_y = (W_x - W_y) + 2W_y$. Como $(W_x - W_y)$ y W_y son incrementos independientes del movimiento Browniano W,$(W_x - W_y) \sim \mathcal{N}(0, x-y)$ y $2W_y \sim \mathcal{N}(0, 4y)$ se tiene que

$$\mathbb{E}[e^{c_3(W_x+W_y)}] = \mathbb{E}[e^{c_3(W_x-W_y)+2W_y}] = \mathbb{E}[e^{c_3(W_x-W_y)}]\mathbb{E}[e^{c_3 2W_y}],$$

entonces la fórmula (6.10) sigue directamente de (6.9).

Para demostrar (6.11), usa $W_x + W_y - W_\alpha = (W_x - W_y) + 2(W_y - W_\alpha) + W_\alpha$.

Para demostrar (6.12), usa $W_x + W_y - W_\alpha = (W_x - W_\alpha) + W_y$.

Para demostrar (6.13), usa $W_x + W_y - W_\alpha - W_\beta = (W_x - W_y) + 2(W_y - W_\alpha) + W_\alpha - W_\beta$.

Para demostrar (6.14), usa $W_x + W_y - W_\alpha - W_\beta = (W_x - W_\alpha) + (W_y - W_\beta)$.

6.4.1. Primer momento condicional

El primer momento condicional de $\overline{V}_T$ está dado por

$$\begin{aligned}
M_1^{gd} :&= \mathbb{E}[\overline{V}_T \,|V_0] \\
&= \frac{V_0}{T}\int_0^T \mathrm{d}t e^{-(c_2+(1/2)c_3^2)t}\mathbb{E}[e^{c_3 W_t}] + \frac{c_1}{T} \\
&\times \int_0^T \mathrm{d}t \int_0^t \mathrm{d}s e^{(c_2+(1/2)c_3^2)(s-t)}\mathbb{E}[e^{c_3(W_t - W_s)}].
\end{aligned}$$

Como $W_t \sim \mathcal{N}(0,t)$ y $(W_t - W_s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, usando (6.9) se obtiene el primer momento condicional 6.6 en la Proposición 6.1,

$$\begin{aligned}
M_1^{gd} :&= \frac{V_0}{T}\int_0^T \mathrm{d}t e^{-(c_2+(1/2)c_3^2)t}\mathbb{E}[e^{c_3 W_t}] + \frac{c_1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t \int_0^t \mathrm{d}s \\
&\times e^{(c_2+(1/2)c_3^2)(s-t)} e^{(1/2)c_3^2(t-s)} \\
&= V_0 \int_0^T e^{-c_2 t}\mathrm{d}t + c_1 \int_0^T \mathrm{d}t \int_0^t \mathrm{d}s e^{c_2(s-t)} \\
&= \frac{V_0}{c_2}\left(\frac{1-e^{-c_2 T}}{T}\right) + \frac{c_1}{T}\int_0^T \frac{1-e^{-c_2 t}}{c_2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{c_1}{c_2} + \left(V_0 - \frac{c_1}{c_2}\right)\frac{1-e^{-c_2 T}}{c_2 T}.
\end{aligned}$$

6.4.2. Segundo momento condicional

El segundo momento condicional de $\overline{V}_T$ está dado por

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\overline{V}_T^2|V_0] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{T^2}\int_0^T \mathrm{d}r_2\int_0^T \mathrm{d}r_1(V_{r_1}V_{r_2})\right]\\ &= \frac{1}{T^2}\int_0^T \mathrm{d}r_2\int_0^T \mathrm{d}r_1\mathbb{E}[V_{r_1}V_{r_2}]\\ &= \frac{2!}{T^2}\int_0^T \mathrm{d}r_2\int_0^{r_2} \mathrm{d}r_1\mathbb{E}[V_{r_1}V_{r_2}]\\ &= \frac{2!}{T^2}\int_0^T \mathrm{d}r_2\int_0^{r_2} \mathrm{d}r_1(\mathbb{E}[A]+\mathbb{E}[B]+\mathbb{E}[C]+\mathbb{E}[D]),\end{aligned} \tag{6.15}$$

donde

$$\begin{aligned}A &:= V_0^2 e^{-(c_2+(1/2)c_3^2)(r_1+r_2)+c_3(W_{r_1}+W_{r_2})},\\ B &:= c_1V_0e^{-(c_2+(1/2)c_3^2)r_1+c_3W_{r_1}}\int_0^{r_2}\mathrm{d}s_2 e^{(c_2+(1/2)c_3^2)(s_2-r_2)+c_3(W_{r_2}-W_{s_2})},\\ C &:= c_1V_0e^{-(c_2+(1/2)c_3^2)r_2+c_3W_{r_2}}\int_0^{r_1}\mathrm{d}s_1 e^{(c_2+(1/2)c_3^2)(s_1-r_1)+c_3(W_{r_1}-W_{s_1})},\\ D &:= c_1^2\int_0^{r_1}\mathrm{d}s_2\int_0^{r_2}\mathrm{d}s_1 e^{(c_2+(1/2)c_3^2)(s_1-r_1+s_2-r_2)}e^{c_3(W_{r_1}-W_{s_1}+W_{r_2}-W_{s_2})}.\end{aligned}$$

Se calcula cada término restante en (6.15).

(i) Cálculo de

$$\begin{aligned}&\frac{2}{T^2}\int_0^T \mathrm{d}r_2\int_0^{r_2}\mathrm{d}r_1\mathbb{E}[A]\\ &\quad= \frac{2}{T^2}\int_0^T \mathrm{d}r_2\int_0^{r_2}\mathrm{d}r_1 V_0^2 e^{-(c_2+(1/2)c_3^2)(r_1+r_2)}\mathbb{E}[e^{c_3(W_{r_1}+W_{r_2})}].\end{aligned}$$

Como $r_2 > r_1 > 0$, se usa la fórmula (6.10) con $x = r_2$ y $y = r_1$

$$\frac{2}{T^2}\int_0^T \mathrm{d}r_2\int_0^{r_2}\mathrm{d}r_1\mathbb{E}[A] = \frac{2V_0^2}{T^2}\int_0^T \mathrm{d}r_2\int_0^{r_2}\mathrm{d}r_1 F(r_2,r_1)$$

e iterando integrales

$$\begin{aligned}&\frac{2}{T^2}\int_0^T \mathrm{d}r_2\int_0^{r_2}\mathrm{d}r_1\mathbb{E}[A]\\ &= \frac{2V_0^2}{T^2}\left[\frac{e^{-(2c_2-c_3^2)T}}{(c_3^2-2c_2)(c_3^2-c_2)}+\frac{e^{-c_2T}}{c_2(c_3^2-c_2)}-\frac{1}{c_2(c_3^2-2c_2)}\right].\end{aligned} \tag{6.16}$$

(ii) Cálculo de

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{T^2}\int_0^T \mathrm{d}r_2 \int_0^{r_2} \mathrm{d}r_1 \mathbb{E}[B] \\
&= \frac{2c_1 V_0}{T^2}\int_0^T \mathrm{d}r_2 \int_0^{r_2} \mathrm{d}r_1 \int_0^{r_1} \mathrm{d}s_1 e^{-(c_2+(1/2)c_3^2)(r_2+r_1-s_1)} \\
&\times \mathbb{E}[e^{c_3(W_{r_2}+W_{r_1}-W_{s_1})}].
\end{aligned}$$

Como $r_2 > r_1 > s_1 > 0$, usa la fórmula (6.11) con $x = r_2$, $y = r_1$ y $\alpha = s_1$ para obtener

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{T^2}\int_0^T \mathrm{d}r_2 \int_0^{r_2} \mathrm{d}r_1 \mathbb{E}[B] = \frac{2c_1 V_0}{T^2}\int_0^T \mathrm{d}r_2 \int_0^{r_2} \mathrm{d}r_1 \int_0^{r_1} \mathrm{d}s_1 G(r_2, r_1, s_1) \\
&= \frac{c_1 V_0}{T^2 c_2^4 (c_2 - c_3^2)^2(-2c_2 + c_3^2)}[-c_2 e^{-Tc_2}(-2c_2 + c_3^2) \\
&\times (c_2^2(-2+Tc_2) + 2c_2c_3^2 - (2+Tc_2)c_3^4) \\
&+ c_2(c_2 - c_3^2)^2(2c_2(1-Tc_2) + (Tc_2 - 2)c_3^2) + 2c_2^4 e^{T(c_3^2-2c_2)}].
\end{aligned} \tag{6.17}$$

(iii) Cálculo de

$$\frac{2}{T^2}\int_0^T \mathrm{d}r_2 \int_0^{r_2} \mathrm{d}r_1 \mathbb{E}[C]$$

Simplemente note que

$$\int_0^T \mathrm{d}r_2 \int_0^T \mathrm{d}r_1 \mathbb{E}[B] = \int_0^T \mathrm{d}r_2 \int_0^T \mathrm{d}r_1 \mathbb{E}[C]. \tag{6.18}$$

(iv) Cálculo de

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{T^2}\int_0^T \mathrm{d}r_2 \int_0^{r_2} \mathrm{d}r_1 \mathbb{E}[D] \\
&= \frac{2c_1^2}{T^2}\int_0^T \mathrm{d}r_2 \int_0^{r_2} \mathrm{d}r_1 \int_0^{r_2} \mathrm{d}s_2 \int_0^{r_1} \mathrm{d}s_1 \\
&\times (e^{(-c_2+(1/2)c_3^2)(r_2+r_1-s_2-s_1)} \mathbb{E}[e^{c_3(W_{r_1}-W_{s_1}+W_{r_2}-W_{s_2})}]).
\end{aligned}$$

Se divide el dominio de integración de s_2 y s_1 de la siguiente forma:

$$\frac{2}{T^2}\int_0^T \mathrm{d}r_2 \int_0^{r_2} \mathrm{d}r_1 \mathbb{E}[D]$$

$$= \frac{2c_1^2}{T^2}\int_0^T \mathrm{d}r_2 \int_0^{r_2} \mathrm{d}r_1 \int_0^{r_1} \mathrm{d}s_2 \int_0^{s_2} \mathrm{d}s_1(\ldots) \tag{6.19}$$

$$+ \frac{2c_1^2}{T^2}\int_0^T \mathrm{d}r_2 \int_0^{r_2} \mathrm{d}r_1 \int_0^{r_1} \mathrm{d}s_2 \int_{s_2}^{r_1} \mathrm{d}s_1(\ldots) \tag{6.20}$$

$$+ \frac{2c_1^2}{T^2}\int_0^T \mathrm{d}r_2 \int_0^{r_2} \mathrm{d}r_1 \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}s_2 \int_0^{r_1} \mathrm{d}s_1(\ldots). \tag{6.21}$$

En la partición previa se usó la fórmula (6.13) con $x = r_2$, $y = r_1$,$\alpha = s_2$, $\beta = s_1$ en (6.19) conforme $T > r_2 > r_1 > s_2 > s_1 > 0$; fórmula (6.13) con $x = r_2$, $y = r_1$,$\alpha = s_2$, $\beta = s_1$ en (6.20) conforme $T > r_2 > r_1 > s_1 > s_2 > 0$; fórmula (6.13) con $x = r_2$, $y = r_1$,$\alpha = s_2$, $\beta = s_1$ en (6.21) conforme $T > r_2 > s_2 > r_1 > s_1 > 0$; entonces

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{T^2}\int_0^T \mathrm{d}r_2 \int_0^{r_2} \mathrm{d}r_1 \mathbb{E}[D] \\
&= \frac{2c_1^2}{T^2}\int_0^T \mathrm{d}r_2 \int_0^{r_2} \mathrm{d}r_1 \int_0^{r_1} \mathrm{d}s_2 \int_0^{s_2} \mathrm{d}s_1 L(r_2,r_1,s_2,s_1) \\
&+ \frac{2c_1^2}{T^2}\int_0^T \mathrm{d}r_2 \int_0^{r_2} \mathrm{d}r_1 \int_0^{r_1} \mathrm{d}s_2 \int_{s_2}^{r_1} \mathrm{d}s_1 L(r_2,r_1,s_2,s_1) \\
&+ \frac{2c_1^2}{T^2}\int_0^T \mathrm{d}r_2 \int_0^{r_2} \mathrm{d}r_1 \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}s_2 \int_0^{r_1} \mathrm{d}s_1 M(r_2,r_1,s_2,s_1).
\end{aligned}$$

e iterando integrales

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{T^2}\int_0^T \int_0^{r_2} \mathbb{E}[D]\mathrm{d}r_1\mathrm{d}r_2 \\
&= \frac{c_1^2}{T^2c_2^4(c_2-c_3^2)^2(-2c_2+c_3^2)^2} \\
&\times [-2e^{-Tc_2}(c_3^2-2c_2)^2(c_2^2-Tc_2^3-2c_2c_3^2+(3+Tc_2)c_3^4) \\
&+ (c_2-c_3^2)^2((4c_2^2(Tc_2-1)^2-4c_2(4+Tc_2(-3+Tc_2))c_3^2 \\
&+ (6+Tc_2(-4+Tc_2))c_3^4) + (+4e^{T(c_3^2-2c_2)}c_2^4)].
\end{aligned} \tag{6.22}$$

Sumando (6.16), (6.17), (6.18) y (6.22) se obtiene el segundo momento condicional de $\overline{V_T}$:

$$
\begin{aligned}
M_2^{gd} :&= \mathbb{E}[\overline{V}_T^2 \,|V_0] \\
&= \frac{1}{T^2 c_2^4 (c_2 - c_3^2)^2 (-2c_2 + c_3^2)^2} c_1^2 \\
&\times [e^{-2Tc_2}(-2e^{Tc_2}(-2c_2 + c_3^2)^2 \\
&\times (c_1^2(c_2^2 - Tc_2^3 - 2c_2c_3^2 + (3 + Tc_2)c_3^4) \\
&+ c_1c_2(c_2^2(-2 + Tc_2) + 2c_2c_3 - (2 + Tc_2)c_3^4)V_0 \\
&+ c_2^3(c_2 - c_3^2)V_0^2) + e^{2Tc_2}(c_2 - c_3^2)^2(c_1^2(4c_2^2(-1 + Tc_2)^2 \\
&- 4c_2(4 + Tc_2(-3 + Tc_2))c_3^2 + (6 + Tc_2(-4 + Tc_2))c_3^4) \\
&+ 2c_1c_2(2c_2 - c_3^2)(2c_2(-1 + Tc_2) - (-2 + Tc_2)c_3^2) \\
&\times V_0 + 2c_2^3(2c_2 - c_3^2)V_0^2) + 2e^{Tc_3^2}c_2^4(2c_1^2 - 2c_1(2c_2 - c_3^2)V_0 \\
&+ (2c_2^2 - 3c_2c_3^2 + c_3^4)V_0^2))].
\end{aligned}
\tag{6.23}
$$

El segundo momento central condicional de $\overline{V_T}$, M_{2c}^{gd} establecido en 6.7 de la Proposición 6.1 está dado por $M_{2c}^{gd} = M_2^{gd} - (M_1^{gd})^2$.

6.5 Fórmula de valuación

Dados los primeros cuatro momentos condicionales de $\overline{V}_T$, bajo el modelo de difusión GARCH el precio de la opción de compra es

$$
\widetilde{C^{gd}} = C_{bs}(M_1^{gd}) + \frac{M_{2c}}{2} \left. \frac{\partial^2 C_{bs}}{\partial \overline{V}_T^2} \right|_{\overline{V}_T = M_1^{gd}} + \frac{M_{3c}^{gd}}{6} \left. \frac{\partial^3 C_{bs}}{\partial \overline{V}_T^3} \right|_{\overline{V}_T = M_1^{gd}} + \frac{M_{4c}}{24} \left. \frac{\partial^4 C_{bs}}{\partial \overline{V}_T^4} \right|_{\overline{V}_T = M_1^{gd}}
\tag{6.24}
$$

Aunque M_1^{gd}, M_{2c}^{gd}, M_{3c}^{gd} y M_{4c}^{gd} son expresiones largas, la fórmula de aproximación en forma cerrada (6.24) puede ser fácilmente implementada en cualquier paquete de software dando precios de opciones solamente insertando parámetros al modelo sin mayores esfuerzos computacionales.

Como se mostrará en la siguiente sección, esta fórmula de aproximación (6.24) es muy confiable para un conjunto grande razonable de parámetros. Intuitivamente, cuando el tiempo a la madurez T es "corto", $\overline{V}_T$ no está muy lejos de $M_1^{gd} := \mathbb{E}[\overline{V}_T \,|V_0]$, entonces se espera que la aproximación 6.24 converja rápidamente. Cuando el tiempo a la madurez T aumenta y la condición $2c_2 > c_3^2$ se mantiene, por la ley fuerte de los grandes números, $\overline{V}_T$ tiende a c_1/c_2, y el valor de la media de la distribución estacionaria V_t, M_{2c}, M_{3c} y M_{4c} se van a cero. Por lo tanto, esperamos que la fórmula de aproximación 6.24 funcione bien también en plazos "largos". Por el contrario, en el modelo Hull y White (1987), donde la varianza V_T sigue un proceso log normal sin tendencia, M_{2c} y M_{3c} tienden a infinito cuando T se incrementa y la serie 6.5 falla al otorgar un precio correcto; Hull y White (1987) y Gesser y Poncet (1997). El efecto de moverse a un proceso de reversión a la media de un proceso log normal es para evitar que la varianza explote o se vaya a cero cuando T se incrementa.

La condición $2c_2 > 3c_3^2$ asegura que la distribución estacionaria de V_t tenga momentos finitos (al menos) de hasta orden cuarto. Cuando $2c_2$ se aproxima a $3c_3^2$, la fórmula (6.24) se vuelve menos confiable para vencimientos largos, como en los Cuadros 7 y 8, donde la condición es violada. En este caso, el proceso de la varianza es "demasiado volátil", esto es, el parámetro de volatilidad de la volatilidad c_3 es"demasiado grande" y/o la tasa de reversión es demasiado débil (c_2 es "demasiado pequeño"). Sin embargo, esta condición parece estar generalmente satisfecha en mercados de opciones.

Lewis (2000) derivó una aproximación de forma cerrada de precios de opciones europeas para una clase grande de modelos de volatilidad estocástica incluyendo el modelo de difusión GARCH (6.1) y (6.2). La fórmula de aproximación de Lewis está basada en una expansión en serie de Taylor de segundo orden de algunas integrales complejas alrededor de $c_3 = 0$; Lewis (2000, pp. 77-84). Tomando una expansión de Taylor de los momentos en nuestra fórmula (6.24) alrededor de $c_3 = 0$ y truncando en el segundo orden se generaría la fórmula de Lewis. Por lo tanto, para el modelo de difusión GARCH, esta aproximación resulta más confiable.

Capítulo 7

Simulaciones Monte Carlo

Introducción

En este capítulo se realiza la simulación Monte Carlo del precio de la opción para verificar si, en efecto, la fórmula propuesta funciona adecuadamente. La simulación se realiza para la opción de compra y la opción de venta. Aunque puede ser redundante pues se llega de una a otra mediante la paridad put-call. El resultado es bastante satisfactorio y concluye con que la metodología propuesta es buena, aunque no como se esperaba, pues el cuarto momento puede ser bastante inestable.

7.1 Discretización de una ecuación de Euler usando esquema de Milstein

Con el fin de comprobar la veracidad de la aproximación (6.24) se estiman los precios de las opciones europeas usando simulaciones Monte Carlo. La ventaja de este enfoque es que el error estándar de las estimaciones es conocido. Concretamente, se calcula el precio de la opción de acuerdo a la ecuación (6.3) usando el método Monte Carlo condicional; referencia Boyle et al.(1997). Se divide el intervalo de tiempo $[0, T]$ en s subintervalos y se dibujan s variables independientes normal estándar $(v_i)_{i=1,\dots,s}$. Se simula la variable aleatoria V_t en (6.2) en el período discreto iT/s, para $i = 1, \dots, s$. Usando el esquema Milstein (referencia Kloeden y Platen, 1999), se tiene para el caso unidimensional la siguiente forma del esquema de Euler

$$Y_{n+1} = Y_n + a\Delta + b\Delta W,$$

donde

$$\Delta = \tau_{n+1} - \tau_n = I_{(0)} = J_{(0)}$$

es el tamaño del subintervalo en la discretización de tiempo $[\tau_n, \tau_{n+1}]$ y

$$\Delta W = W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n}$$

es el incremento $N(0; \Delta)$ del proceso de Wiener W en $[\tau_n, \tau_{n+1}]$. Se agrega al esquema de Euler el término

$$bb' I_{(1,1)} = \frac{1}{2} bb' \{(\Delta W)^2 - \Delta\}$$

de la expansión en serie de Taylor del lema de Itô, entonces se obtiene el esquema de Milstein[1]0

$$Y_{n+1} = Y_n + a\Delta + b\Delta W + \frac{1}{2} bb' \{(\Delta W)^2 - \Delta\},$$

el cual para la ecuación (6.2) queda de la forma

$$V_i = c_1 \Delta t + V_{i-1}(1 - c_2^* \Delta t + c_3 \sqrt{\Delta t} v_i) + \frac{1}{2} c_3^2 V_{i-1}^2 ((\sqrt{\Delta t} v_i)^2 - \Delta t),$$

donde $\Delta t := T/s$.

7.2 Valuación de la opción mediante simulación Monte Carlo de la varianza

Para valuar la opción, se calcula el precio Black-Scholes de la opción de compra $C_{bs}^{(n)}$ con volatilidad al cuadrado $s^{-1} \sum_{i=1}^{s} V_i$. Finalmente, iterando este procedimiento N veces se obtiene la estimación Monte Carlo del precio de la opción de compra

$$C_{mc} := N^{-1} \sum_{n=1}^{N} C_{bs}^{(n)},$$

[1]0 El esquema de Milstein tiene orden de convergencia fuerte γ=1.0 bajo el supuesto de que $a \in C^{1,1}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ y $b \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$. Por tanto, con la adición de un término más al esquema de Euler para formar el esquema de Milstein se incrementa el orden de convergencia de γ=0.5 a γ=1.0. El orden fuerte γ=1.0 del esquema de Milstein corresponde a la del esquema de Euler en caso determinístico sin ruido, es decir, con $b \equiv 0$. El término adicional del esquema de Milstein marca el punto de divergencia del análisis numérico estocástico del determinístico. En este sentido, se puede ver al esquema de Milstein como la generalización propia del caso determinístico del esquema de Euler para el criterio fuerte de convergencia porque el esquema de Milstein da el mismo orden de convergencia fuerte que para el caso determinístico de Euler.

Cuando N se va a infinito, C_{mc} converge en probabilidad al precio de la opción de compra implicado por (6.3). Nótese que no se necesita simular el proceso del precio S. Para obtener el precio de la opción de venta se usa la paridad put-call, sin embargo, para usar repetidamente el modelo se simuló nuevamente con Monte Carlo para la opción de venta.

7.3 Resultados de la Simulación

Para simular el proceso de la varianza (6.2) se usan parámetros inferidos en la estimación empírica del modelo (6.1) y (6.2). Típicamente para rendimientos logarítmicos diarios de índices y de divisas, la media incondicional de V_t, c_1/c_2^*, fluctúa de 0.01 a 0.1 por año usando 252 días de operación. La 'vida media' varía de unos cuantos días a alrededor de medio año; ver referencia en Chesney y Scott (1989), Taylor y Xu (1994), Xu y Taylor (1994) y Guo (1996, 1998). Esto implica que c_2^* fluctúa entre 1 y 40. Hay que recordar que para este modelo la 'vida media' equivale a $\ln(2)/c_2^*$ años y es el tiempo necesario después de un shock para reducir a la mitad la desviación de V_t de su valor medio de largo plazo, dado que no hay más shocks. Para el parámetro c_3, las estimaciones empíricas del modelo discreto GARCH (1,1)-M de los rendimientos logarítmicos diarios de índices y de divisas fluctúa de 1 a 4; ver, por ejemplo, Hull y White (1987b, 1988) y Guo (1996, 1998). Para rendimientos logarítmicos de acciones, estos cálculos son generalmente más pequeños. Para las simulaciones, se consideraron en la valuación de opciones europeas plazos de 10 a 1260 días laborales (5 años). Se escribió un código en Matlab para realizar 10,000 simulaciones. El tiempo de cálculo de cada precio varía de 5 minutos para el plazo más corto hasta 15 minutos para el plazo más largo en una PC Pentium IV, con Windows XP.

En los Cuadros 1 y 2 se simula el proceso de la varianza ajustada al riesgo (6.2) usando valores en los parámetros que se obtienen del artículo de Guo (1996) para el tipo de cambio yen/dólar. Estos valores son, para $c_1 = 0.16$, para $c_2^* = 18$ y para $c_3 = 1.8$. Igual que en el documento de Guo (1996), suponemos que el premio al riesgo de la varianza $\lambda(S, V, t) = 0$. El proceso de la varianza revierte a la media rápidamente (la vida media es de alrededor 10 días) y es un tanto volátil, el rango de dos desviaciones para V_t es de

0.003 a 0.014. Los Cuadros 1 y 2 muestran los precios de las opciones de compra y de venta, respectivamente, empezando por el precio Monte Carlo denotado por Cmc y Pmc; el precio de la opción Cgd(n) y Pgd(n) (denotado gd pues se refiere a difusión GARCH) del precio de la fórmula (6.24) cuando n llega hasta el orden $n = 1, 2, 3, 4$ y el error de valuación correspondiente $e_p(n)\%$ definido como $e_p(n)\% := 100(Cgd(n) - Cmc)/Cmc$. Los errores de valuación e_p permiten darnos cuenta de la contribución de cada término en el precio de la opción. Los errores de valuación promedio para el Cuadro 1 son $e_p(2)$, $e_p(3)$ y $e_p(4)$ son -0.08579%, -0.04031% y -0.11894%, respectivamente. Mientras que para la opción de venta, Cuadro 2, los errores de valuación promedio son -0.19651%, -0.08483% y -0.15735%, respectivamente. Aunque el proceso de la varianza es volátil, la alta tasa de reversión de c_2^* implica que el proceso de varianza integrada $\overline{V}_T$ tiende a estar alrededor de $\mathbb{E}(\overline{V}_T|V_0)$ y que la aproximación (6.24) funciona correctamente. De hecho, casi todos los errores son prácticamente nulos en todos los plazos y valores de ejercicio pues están dentro del diferencial de compra y venta observado en los mercados de divisas. Generalmente, los diferenciales de compra y venta en los mercados de divisas son mayores al 2% del precio de las opciones fuera del dinero y cerca del 1% para opciones más liquidas en el dinero.

En los Cuadros 3 y 4 se simula el proceso de la varianza (6.2) usando los parámetros que usan Meleberg y Werker (2001) para el índice holandés EOE. La prima de riesgo de la varianza es para opciones de compra europeas sobre el índice holandés. La correlación estimada entre el precio y la volatilidad fue insignificante. Los coeficientes neutrales al riesgo son $c_1 = 0.53$, $c_2^* = 29.23$ y $c_3 = 3.65$. El valor de la media en el largo plazo para la varianza es de 0.018 y el rango de dos desviaciones estándar de V_t es de $0 - 0.038$. Los Cuadros 3 y 4 están organizados como los Cuadros 1 y 2. Los errores de valuación promedio para el Cuadro 3 de $e_p(2)$, $e_p(3)$ y $e_p(4)$ son -0.71695%, -0.40186% y -0.05132%, respectivamente. Mientras que para la opción de venta, Cuadro 4, los errores de valuación promedio son 0.04573%, -0.08131% y -0.20349%, respectivamente. Los resultados son mixtos pues para el caso de la opción de compra la variabilidad del primer término es la mayor mientras que para la opción de venta la variabilidad del cuarto término es la mayor.

Cuadro 1

T	K	Cmc	Cgd(2)	Cgd(3)	Cgd(4)	ep(2)%	ep(3)%	ep(4)%
10	90	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	95	5.0022	5.0021	5.0021	5.0021	-0.0014	-0.0012	-0.0014
	100	0.7465	0.7468	0.7469	0.7468	0.0298	0.0489	0.0374
	105	0.0034	0.0033	0.0034	0.0033	-2.2420	-1.8470	-2.3597
	110	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
30	90	10.0009	10.0008	10.0008	10.0008	-0.0005	-0.0005	-0.0005
	95	5.0803	5.0803	5.0800	5.0801	-0.0002	-0.0063	-0.0030
	100	1.2912	1.2918	1.2924	1.2920	0.0511	0.0960	0.0604
	105	0.0996	0.1002	0.0998	0.1000	0.5259	0.1767	0.3945
	110	0.0024	0.0023	0.0024	0.0023	-4.3631	-1.4851	-3.3017
60	90	10.0185	10.0184	10.0184	10.0184	-0.0011	-0.0011	-0.0011
	95	5.2999	5.2995	5.2992	5.2993	-0.0065	-0.0128	-0.0113
	100	1.8256	1.8283	1.8290	1.8288	0.1470	0.1821	0.1760
	105	0.3504	0.3499	0.3496	0.3497	-0.1421	-0.2305	-0.2074
	110	0.0367	0.0365	0.0364	0.0363	-0.6833	-0.9926	-1.0413
90	90	10.0661	10.0665	10.0664	10.0664	0.0035	0.0025	0.0025
	95	5.5385	5.5403	5.5401	5.5392	0.0328	0.0302	0.0129
	100	2.2387	2.2409	2.2414	2.2432	0.0995	0.1223	0.2013
	105	0.6178	0.6156	0.6155	0.6146	-0.3467	-0.3646	-0.5097
	110	0.1132	0.1133	0.1131	0.1127	0.1498	-0.0747	-0.4529
120	90	10.1392	10.1395	10.1393	10.1380	0.0025	0.0005	-0.0123
	95	5.7745	5.7761	5.7760	5.7745	0.0277	0.0272	0.0003
	100	2.5835	2.5889	2.5893	2.5937	0.2094	0.2245	0.3948
	105	0.8723	0.8722	0.8722	0.8709	-0.0057	-0.0064	-0.1554
	110	0.2182	0.2189	0.2187	0.2163	0.3311	0.2189	-0.8581
180	90	10.3297	10.3296	10.3294	10.3239	-0.0013	-0.0032	-0.0564
	95	6.2149	6.2163	6.2163	6.2158	0.0228	0.0236	0.0148
	100	3.1726	3.1726	3.1729	3.1819	0.0002	0.0077	0.2936
	105	1.3449	1.3464	1.3465	1.3466	0.1100	0.1152	0.1219
	110	0.4709	0.4735	0.4734	0.4667	0.5573	0.5256	-0.8962
252	90	10.5910	10.5930	10.5929	10.5845	0.0190	0.0181	-0.0612
	95	6.6909	6.6921	6.6921	6.6942	0.0173	0.0182	0.0492
	100	3.7541	3.7551	3.7553	3.7678	0.0271	0.0314	0.3636
	105	1.8547	1.8551	1.8552	1.8582	0.0185	0.0223	0.1835
	110	0.8040	0.8063	0.8063	0.7977	0.2920	0.2833	-0.7817

Cuadro 1 (Continuación)

T	K	Cmc	Cgd(2)	Cgd(3)	Cgd(4)	ep(2)%	ep(3)%	ep(4)%
504	90	11.5359	11.5440	11.5440	11.5387	0.0706	0.0706	0.0246
	95	8.0631	8.0579	8.0579	8.0660	-0.0649	-0.0644	0.0354
	100	5.2981	5.3118	5.3118	5.3272	0.2587	0.2597	0.5500
	105	3.3030	3.3054	3.3054	3.3145	0.0737	0.0746	0.3498
	110	1.9388	1.9445	1.9445	1.9410	0.2951	0.2957	0.1151
756	90	12.4276	12.4205	12.4205	12.4196	-0.0571	-0.0571	-0.0644
	95	9.1585	9.1520	9.1521	9.1620	-0.0712	-0.0709	0.0372
	100	6.4997	6.5046	6.5046	6.5195	0.0746	0.0751	0.3051
	105	4.4614	4.4624	4.4624	4.4732	0.0206	0.0213	0.2643
	110	2.9538	2.9594	2.9594	2.9607	0.1899	0.1902	0.2315
1260	90	13.9367	13.9447	13.9447	13.9482	0.0575	0.0575	0.0826
	95	10.9168	10.9231	10.9231	10.9335	0.0579	0.0579	0.1532
	100	8.3985	8.3926	8.3926	8.4059	-0.0704	-0.0701	0.0875
	105	6.3293	6.3311	6.3311	6.3423	0.0294	0.0295	0.2054
	110	4.6962	4.6946	4.6946	4.7000	-0.0348	-0.0346	0.0800

Cuadro 1. Cgd se refiere al precio GARCH de difusión para una opción de compra de la fórmula 6.24 truncado hasta el orden n, para $n = 1, 2, 3, 4$; $e_p(i)\% = 100(Cgd(n) - Cmc)/Cmc$. Los parámetros del modelo son: $S_0 = 100$, $r = d = 0$; $\mathrm{d}V_t = (0.16 - 18V_t)\mathrm{d}t + 1.8V_t\mathrm{d}W_t$, $V_0 = 0.16/18$.

Cuadro 2

T	K	Pmc	Pgd(2)	Pgd(3)	Pgd(4)	ep(2)%	ep(3)%	ep(4)%
10	90	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	95	0.0022	0.0021	0.0021	0.0021	-3.1412	-2.4353	-3.0388
	100	0.7465	0.7468	0.7469	0.7468	0.0298	0.0489	0.0374
	105	5.0034	5.0033	5.0034	5.0033	-0.0015	-0.0013	-0.0015
	110	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	0.0000	0.0000	0.0000
30	90	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	-9.0312	-3.3684	-4.0632
	95	0.0803	0.0803	0.0800	0.0801	-0.0075	-0.3934	-0.1876
	100	1.2912	1.2918	1.2924	1.2920	0.0511	0.0960	0.0604
	105	5.0996	5.1002	5.0998	5.1000	0.0102	0.0035	0.0076
	110	10.0024	10.0023	10.0024	10.0023	-0.0011	-0.0001	-0.0011
60	90	0.0185	0.0184	0.0184	0.0184	-0.3637	-0.4404	-0.5750
	95	0.2999	0.2995	0.2992	0.2993	-0.1166	-0.2253	-0.1990
	100	1.8256	1.8283	1.8290	1.8288	0.1470	0.1821	0.1760
	105	5.3504	5.3500	5.3496	5.3497	-0.0093	-0.0151	-0.0136
	110	10.0367	10.0365	10.0364	10.0363	-0.0023	-0.0033	-0.0043
90	90	0.0661	0.0665	0.0664	0.0664	0.6067	0.3636	0.3130
	95	0.5385	0.5403	0.5401	0.5392	0.3369	0.3109	0.1328
	100	2.2387	2.2409	2.2414	2.2432	0.0995	0.1223	0.2013
	105	5.6178	5.6156	5.6155	5.6146	-0.0381	-0.0402	-0.0560
	110	10.1132	10.1133	10.1131	10.1127	0.0013	-0.0006	-0.0046
120	90	0.1392	0.1395	0.1393	0.1380	0.1768	0.0375	-0.9248
	95	0.7745	0.7761	0.7760	0.7745	0.2066	0.2026	0.0023
	100	2.5835	2.5889	2.5893	2.5937	0.2094	0.2245	0.3948
	105	5.8723	5.8722	5.8722	5.8709	-0.0009	-0.0009	-0.0230
	110	10.2182	10.2189	10.2187	10.2163	0.0067	0.0047	-0.0187
180	90	0.3297	0.3296	0.3294	0.3239	-0.0417	-0.0851	-1.7658
	95	1.2149	1.2163	1.2163	1.2158	0.1167	0.1208	0.0755
	100	3.1726	3.1726	3.1729	3.1819	0.0002	0.0077	0.2936
	105	6.3449	6.3464	6.3465	6.3466	0.0233	0.0244	0.0258
	110	10.4709	10.4735	10.4734	10.4667	0.0249	0.0240	-0.0400
252	90	0.5910	0.5930	0.5929	0.5845	0.3327	0.3194	-1.0908
	95	1.6909	1.6921	1.6921	1.6942	0.0685	0.0721	0.1945
	100	3.7541	3.7551	3.7553	3.7678	0.0271	0.0314	0.3636
	105	6.8547	6.8551	6.8552	6.8582	0.0053	0.0063	0.0499
	110	10.8035	10.8063	10.8063	10.7977	0.0259	0.0259	-0.0537

Cuadro 2 (Continuación)

T	K	Pmc	Pgd(2)	Pgd(3)	Pgd(4)	ep(2)%	ep(3)%	ep(4)%
504	90	1.5359	1.5440	1.5440	1.5387	0.5302	0.5302	0.1838
	95	3.0631	3.0579	3.0579	3.0660	-0.1709	-0.1696	0.0932
	100	5.2981	5.3118	5.3118	5.3272	0.2587	0.2597	0.5500
	105	8.3030	8.3054	8.3054	8.3145	0.0293	0.0297	0.1392
	110	11.9388	11.9445	11.9445	11.9410	0.0480	0.0480	0.0187
756	90	2.4276	2.4205	2.4205	2.4196	-0.2928	-0.2924	-0.3299
	95	4.1585	4.1520	4.1521	4.1620	-0.1568	-0.1561	0.0819
	100	6.4997	6.5046	6.5046	6.5195	0.0746	0.0751	0.3051
	105	9.4614	9.4624	9.4624	9.4732	0.0097	0.0101	0.1246
	110	12.9538	12.9594	12.9594	12.9607	0.0431	0.0431	0.0531
1260	90	3.9367	3.9447	3.9447	3.9482	0.2042	0.2042	0.2926
	95	5.9168	5.9231	5.9231	5.9335	0.1071	0.1073	0.2822
	100	8.3985	8.3926	8.3926	8.4059	-0.0704	-0.0701	0.0875
	105	11.3293	11.3311	11.3311	11.3423	0.0162	0.0162	0.1151
	110	14.6962	14.6946	14.6946	14.7000	-0.0110	-0.0110	0.0258

Cuadro 2. Pgd se refiere al precio GARCH de difusión para una opción de venta de la fórmula 6.24 truncado hasta el orden n, para $n = 1, 2, 3, 4$; $e_p(i)\% = 100(Pgd(n) - Pmc)/Pmc$. Los parámetros del modelo son: $S_0 = 100$, $r = d = 0$; $\mathrm{d}V_t = (0.16 - 18V_t)\mathrm{d}t + 1.8V_t\mathrm{d}W_t$, $V_0 = 0.16/18$.

El cuarto término en (6.24) es inestable a través de los distintos plazos de vencimiento y precios de ejercicio debido a la alta variabilidad de la cuarta derivada de la función Black Scholes.

En los Cuadros 5, 6, 7 y 8 se usan valores en los parámetros que generan un proceso de varianza razonable como argumenta Hull y White (1988). En los Cuadros 5 y 6 se tiene para $c_1 = 0.18$, para $c_2^* = 2$ y para $c_3 = 0.8$. El valor del parámetro c_2^* es pequeño e implica una velocidad baja de reversión a su valor medio en el proceso de la varianza (6.2), con una vida promedio de 87 días hábiles. La media incondicional y la desviación estándar de V_t son 0.090 y 0.039, respectivamente, y el rango de dos desviaciones estándar para V_t es de 0.011-0.169. Como la volatilidad de V_t no es muy grande, el proceso de $\overline{V}_T$ tiende a estar alrededor de $\mathbb{E}(\overline{V}_T|V_0)$ y por lo tanto, la aproximación (6.24) resulta bastante confiable. Los errores de valuación promedio para el Cuadro 5 de $e_p(2)$, $e_p(3)$ y $e_p(4)$ son -0.02888%, 0.04259% y -0.00445%, respectivamente. Mientras que para la opción de venta, Cuadro 6, los errores de valuación promedio son -0.03888%, 0.03440% y 0.01351%, respectivamente.

En los Cuadros 7 y 8 se pone c_1 y c_2^* igual que en los Cuadros 5 y 6 y $c_3 = 1.2$. Esto implica que la desviación estándar de V_t es de 0.068 y el rango de dos desviaciones estándar para V_t es de 0-0.225. Los errores de valuación promedio para el Cuadro 7 de la opción de compra de $e_p(2)$, $e_p(3)$ y $e_p(4)$ son -0.3630%, 0.40173% y -4569.96468%, respectivamente. Mientras que para la opción de venta, el Cuadro 8, los errores de valuación promedio son -0.25635%, 0.41926% y 501.34007%, respectivamente. Los errores promedio de $e_p(3)$ de los Cuadros 7 y 8 son muy pequeños pero mayores que en los Cuadros 5 y 6 debido a que el proceso de la varianza es más volátil que en el caso anterior. Los errores de valuación de $e_p(4)$ son muy grandes respecto a los demás, sobre todo en los plazos largos porque el cuarto momento incondicional de V_t no es finito debido a que la restricción de que $2c_2 > 3c_3^2$ es violada.

Por último, en los Cuadros 9 y 10, se usa $c_1 = 0.09$, $c_2^* = 4$ y $c_3 = 01.2$ como en el libro de Lewis (2000a). La media incondicional de V_t es 0.022, la vida media es de alrededor de 44 días de operación y el rango de dos desviaciones estándar para V_t es de 0.001-0.043.

También, para este caso, los errores de valuación son pequeños y los promedios para el Cuadro 9 en la opción de compra de $e_p(2)$, $e_p(3)$ y $e_p(4)$ son -0.05888%, -0.02007% y -1.63773%, respectivamente. Mientras que para la opción de venta, Cuadro 10, los errores de valuación promedio son 0.02447%, 0.02762% y 0.3186%, respectivamente.

Aunque los errores de valuación e_p en los Cuadros 1-10 son muy pequeños, estos errores parecen mostrar cierta conducta sobre todo en los vencimientos largos. Una explicación a esto podría ser la siguiente. El precio de la opción Black-Scholes, la cual es el primer término en la fórmula de aproximación (6.24), tiende a ser mayor que su valor Monte Carlo correspondiente. El segundo momento del valor de la opción es casi siempre negativo, reduciendo la variación de precio de la fórmula Black-Scholes y explicando parcialmente los errores de valuación negativos de $e_p(2)$ en los cuadros 5-10. El tercer momento de la aproximación es casi siempre positivo ocasionando que los errores de valuación en $e_p(3)$ sean positivos como se observa en los Cuadros. La contribución del cuarto momento en la fórmula de aproximación es mixta, no tiene un valor positivo o negativo claro.

Los resultados de la simulación reportados en los Cuadros 1-10 muestran que, en plazos cortos y opciones muy fuera del dinero, los precios otorgados por el segundo momento de la fórmula de aproximación no son suficientemente confiables, dado que el error de valuación $e_p(2)$ es mayor que la tolerancia del diferencial de las posturas compra y venta. Usando la aproximación del precio del tercer momento se reduce el error ocasionado por el momento anterior y los errores de $e_p(3)$ suelen estar dentro de la tolerancia del diferencial de compra y venta. En ciertos casos (los de los Cuadros 1-4), debido a la inestabilidad del cuarto momento en la fórmula de aproximación (6.24) se generan errores de valuación grandes. Por lo tanto, es conveniente truncar después de tres términos la fórmula de valuación (6.24) para mayor simplicidad, y en ciertos casos, hasta para una aproximación más precisa.

La fórmula de aproximación hasta el tercer momento tiene errores menores al 1% en promedio para opciones en el dinero y menores al 2% para opciones fuera del dinero. Por lo tanto, esta fórmula de aproximación otorga precios confiables en una tolerancia razonable esperada por fricciones del mercado.

Cuadro 3

T	K	Cmc	Cgd(2)	Cgd(3)	Cgd(4)	ep(2)%	ep(3)%	ep(4)%
10	90	10.0002	10.0001	10.0002	10.0003	-0.0009	0.0001	0.0011
	95	5.0334	5.0330	5.0322	5.0321	-0.0097	-0.0250	-0.0272
	100	1.0562	1.0582	1.0608	1.0562	0.1844	0.4372	-0.0021
	105	0.0438	0.0428	0.0418	0.0421	-2.1816	-4.5409	-3.7224
	110	0.0006	0.0004	0.0005	0.0006	-37.3682	-14.1786	2.0161
30	90	10.0238	10.0242	10.0240	10.0219	0.0039	0.0019	-0.0191
	95	5.3081	5.3107	5.3071	5.3138	0.0489	-0.0188	0.1063
	100	1.8377	1.8317	1.8389	1.8292	-0.3265	0.0647	-0.4625
	105	0.3643	0.3614	0.3580	0.3648	-0.7951	-1.7266	0.1291
	110	0.0438	0.0449	0.0435	0.0421	2.4624	-0.7157	-3.8739
60	90	10.1506	10.1523	10.1495	10.1508	0.0172	-0.0103	0.0025
	95	5.7852	5.7902	5.7898	5.7913	0.0863	0.0796	0.1046
	100	2.5946	2.5996	2.6052	2.6003	0.1902	0.4091	0.2180
	105	0.8885	0.8868	0.8868	0.8880	-0.1860	-0.1866	-0.0519
	110	0.2318	0.2343	0.2307	0.2331	1.0744	-0.4807	0.5339
90	90	10.3441	10.3461	10.3438	10.3414	0.0193	-0.0029	-0.0261
	95	6.2308	6.2347	6.2355	6.2353	0.0629	0.0749	0.0721
	100	3.2044	3.1904	3.1942	3.1981	-0.4383	-0.3175	-0.1973
	105	1.3603	1.3657	1.3668	1.3669	0.4028	0.4785	0.4851
	110	0.4924	0.4926	0.4903	0.4874	0.0402	-0.4296	-1.0086
120	90	10.5669	10.5675	10.5661	10.5596	0.0058	-0.0075	-0.0690
	95	6.6392	6.6393	6.6403	6.6417	0.0017	0.0165	0.0382
	100	3.6962	3.6883	3.6911	3.7008	-0.2119	-0.1367	0.1265
	105	1.8006	1.7985	1.7997	1.8018	-0.1194	-0.0539	0.0655
	110	0.7681	0.7730	0.7717	0.7649	0.6365	0.4723	-0.4129
180	90	11.0426	11.0316	11.0311	11.0225	-0.0993	-0.1039	-0.1817
	95	7.3616	7.3552	7.3561	7.3621	-0.0875	-0.0754	0.0069
	100	4.5310	4.5229	4.5245	4.5405	-0.1785	-0.1421	0.2100
	105	2.5656	2.5603	2.5613	2.5685	-0.2071	-0.1685	0.1118
	110	1.3468	1.3378	1.3375	1.3300	-0.6646	-0.6861	-1.2408
252	90	11.5817	11.5781	11.5780	11.5718	-0.0314	-0.0323	-0.0858
	95	8.0987	8.0983	8.0990	8.1089	-0.0047	0.0037	0.1262
	100	5.3566	5.3551	5.3561	5.3748	-0.0284	-0.0090	0.3399
	105	3.3446	3.3481	3.3488	3.3600	0.1038	0.1262	0.4604
	110	1.9734	1.9835	1.9836	1.9796	0.5118	0.5153	0.3147

Cuadro 3 (Continuación)

T	K	Cmc	Cgd(2)	Cgd(3)	Cgd(4)	ep(2)%	ep(3)%	ep(4)%
504	90	13.2760	13.2723	13.2724	13.2751	-0.0280	-0.0273	-0.0069
	95	10.1480	10.1536	10.1540	10.1680	0.0556	0.0595	0.1975
	100	7.5656	7.5763	7.5769	7.5957	0.1412	0.1490	0.3975
	105	5.4798	5.5196	5.5199	5.5352	0.7259	0.7321	1.0098
	110	3.9224	3.9318	3.9320	3.9375	0.2405	0.2454	0.3848
756	90	14.6907	14.6939	14.6940	14.7004	0.0215	0.0222	0.0658
	95	11.7595	11.7614	11.7615	11.7757	0.0163	0.0172	0.1379
	100	9.2818	9.2758	9.2760	9.2933	-0.0656	-0.0633	0.1239
	105	7.1968	7.2146	7.2148	7.2300	0.2476	0.2504	0.4613
	110	5.5388	5.5398	5.5400	5.5488	0.0174	0.0199	0.1797
1260	90	17.0533	17.0468	17.0468	17.0553	-0.0383	-0.0383	0.0116
	95	14.3354	14.3296	14.3297	14.3425	-0.0404	-0.0397	0.0496
	100	11.9439	11.9608	11.9609	11.9755	0.1413	0.1421	0.2644
	105	9.9154	9.9195	9.9196	9.9332	0.0418	0.0428	0.1801
	110	8.1983	8.1788	8.1789	8.1892	-0.2378	-0.2368	-0.1106

Cuadro 3. Cgd se refiere al precio GARCH de difusión para una opción de compra de la fórmula 6.24 truncado hasta el orden n, para $n = 1, 2, 3, 4$; $e_p(i)\% = 100(Cgd(n) - Cmc)/Cmc$. Los parámetros del modelo son: $S_0 = 100$, $r = d = 0$; $\mathrm{d}V_t = (0.53 - 29.23V_t)\mathrm{d}t + 3.65V_t\mathrm{d}W_t$, $V_0 = 0.53/29.23$.

Cuadro 4

T	K	Pmc	Pgd(2)	Pgd(3)	Pgd(4)	ep(2)%	ep(3)%	ep(4)%
10	90	0.0002	0.0001	0.0002	0.0003	-49.2687	-20.2165	32.7732
	95	0.0334	0.0330	0.0322	0.0321	-1.4464	-3.7731	-4.0799
	100	1.0562	1.0582	1.0608	1.0562	0.1844	0.4372	-0.0021
	105	5.0438	5.0428	5.0418	5.0421	-0.0189	-0.0393	-0.0322
	110	10.0006	10.0004	10.0005	10.0006	-0.0023	-0.0013	-0.0003
30	90	0.0238	0.0242	0.0240	0.0219	1.7016	0.6711	-8.0385
	95	0.3081	0.3107	0.3071	0.3138	0.8427	-0.3221	1.8309
	100	1.8377	1.8317	1.8389	1.8292	-0.3265	0.0647	-0.4625
	105	5.3643	5.3614	5.3580	5.3648	-0.0540	-0.1174	0.0088
	110	10.0438	10.0449	10.0435	10.0421	0.0110	-0.0029	-0.0168
60	90	0.1506	0.1524	0.1495	0.1508	1.1954	-0.7235	0.1938
	95	0.7852	0.7902	0.7898	0.7912	0.6362	0.5869	0.7709
	100	2.5946	2.5996	2.6052	2.6003	0.1902	0.4091	0.2180
	105	5.8885	5.8868	5.8868	5.8880	-0.0281	-0.0281	-0.0079
	110	10.2318	10.2343	10.2307	10.2331	0.0242	-0.0110	0.0125
90	90	0.3441	0.3461	0.3438	0.3414	0.5683	-0.0876	-0.7807
	95	1.2308	1.2347	1.2355	1.2353	0.3184	0.3794	0.3647
	100	3.2044	3.1904	3.1942	3.1981	-0.4383	-0.3175	-0.1973
	105	6.3603	6.3657	6.3668	6.3669	0.0861	0.1023	0.1038
	110	10.4924	10.4926	10.4903	10.4874	0.0020	-0.0199	-0.0475
120	90	0.5669	0.5675	0.5661	0.5596	0.1113	-0.1372	-1.2899
	95	1.6392	1.6393	1.6403	1.6417	0.0070	0.0668	0.1547
	100	3.6962	3.6883	3.6911	3.7008	-0.2119	-0.1367	0.1265
	105	6.8006	6.7985	6.7997	6.8018	-0.0316	-0.0143	0.0174
	110	10.7681	10.7730	10.7717	10.7649	0.0456	0.0335	-0.0296
180	90	1.0426	1.0316	1.0311	1.0225	-1.0511	-1.0972	-1.9268
	95	2.3616	2.3552	2.3561	2.3621	-0.2727	-0.2350	0.0216
	100	4.5310	4.5229	4.5245	4.5405	-0.1785	-0.1421	0.2100
	105	7.5656	7.5603	7.5613	7.5685	-0.0702	-0.0571	0.0379
	110	11.3468	11.3378	11.3375	11.3300	-0.0789	-0.0815	-0.1476
252	90	1.5817	1.5781	1.5780	1.5718	-0.2322	-0.2366	-0.6298
	95	3.0987	3.0983	3.0990	3.1089	-0.0123	0.0096	0.3298
	100	5.3566	5.3551	5.3561	5.3748	-0.0284	-0.0090	0.3399
	105	8.3446	8.3481	8.3488	8.3600	0.0416	0.0506	0.1846
	110	11.9734	11.9835	11.9836	11.9796	0.0843	0.0852	0.0518

Cuadro 4 (Continuación)

T	K	Pmc	Pgd(2)	Pgd(3)	Pgd(4)	ep(2)%	ep(3)%	ep(4)%
504	90	3.2760	3.2723	3.2724	3.2751	-0.1150	-0.1107	-0.0283
	95	5.1480	5.1537	5.1540	5.1680	0.1105	0.1165	0.3900
	100	7.5656	7.5763	7.5769	7.5957	0.1412	0.1490	0.3975
	105	10.4798	10.5196	10.5199	10.5352	0.3796	0.3825	0.5285
	110	13.9224	13.9318	13.9320	13.9375	0.0675	0.0690	0.1085
756	90	4.6907	4.6939	4.6940	4.7004	0.0672	0.0698	0.2062
	95	6.7595	6.7614	6.7615	6.7757	0.0278	0.0305	0.2404
	100	9.2818	9.2758	9.2760	9.2933	-0.0656	-0.0633	0.1239
	105	12.1968	12.2146	12.2148	12.2300	0.1460	0.1477	0.2723
	110	15.5388	15.5398	15.5400	15.5488	0.0061	0.0074	0.0641
1260	90	7.0533	7.0468	7.0468	7.0553	-0.0930	-0.0920	0.0278
	95	9.3354	9.3296	9.3297	9.3425	-0.0619	-0.0609	0.0764
	100	11.9439	11.9608	11.9609	11.9755	0.1413	0.1421	0.2644
	105	14.9154	14.9195	14.9196	14.9332	0.0278	0.0285	0.1196
	110	18.1983	18.1788	18.1789	18.1892	-0.1070	-0.1064	-0.0498

Cuadro 4. Pgd se refiere al precio GARCH de difusión para una opción de venta de la fórmula 6.24 truncado hasta el orden n, para $n = 1, 2, 3, 4$; $e_p(i)\% = 100(Pgd(n) - Pmc)/Pmc$. Los parámetros del modelo son: $S_0 = 100$, $r = d = 0$; $\mathrm{d}V_t = (0.53 - 29.23V_t)\mathrm{d}t + 3.65V_t\mathrm{d}W_t$, $V_0 = 0.53/29.23$.

Cuadro 5

T	K	Cmc	Cgd(2)	Cgd(3)	Cgd(4)	ep(2)%	ep(3)%	ep(4)%
10	90	10.0901	10.0898	10.0897	10.0892	-0.0030	-0.0040	-0.0090
	95	5.6309	5.6305	5.6305	5.6285	-0.0080	-0.0082	-0.0437
	100	2.3793	2.3814	2.3814	2.3857	0.0890	0.0903	0.2706
	105	0.7150	0.7143	0.7143	0.7125	-0.1017	-0.1022	-0.3552
	110	0.1488	0.1485	0.1485	0.1469	-0.2244	-0.2378	-1.3028
30	90	10.7884	10.7902	10.7900	10.7892	0.0171	0.0153	0.0079
	95	7.0042	7.0008	7.0010	7.0014	-0.0491	-0.0459	-0.0411
	100	4.1192	4.1164	4.1169	4.1181	-0.0673	-0.0559	-0.0258
	105	2.1832	2.1837	2.1840	2.1844	0.0264	0.0378	0.0575
	110	1.0476	1.0473	1.0472	1.0465	-0.0281	-0.0414	-0.1121
60	90	11.9061	11.9061	11.9061	11.9064	0.0003	0.0003	0.0028
	95	8.5166	8.5118	8.5133	8.5126	-0.0556	-0.0383	-0.0463
	100	5.8122	5.8074	5.8095	5.8083	-0.0821	-0.0460	-0.0658
	105	3.7787	3.7855	3.7871	3.7863	0.1795	0.2219	0.2018
	110	2.3698	2.3642	2.3646	2.3647	-0.2385	-0.2225	-0.2187
90	90	12.9057	12.8977	12.8990	12.8988	-0.0617	-0.0516	-0.0532
	95	9.7122	9.7092	9.7128	9.7105	-0.0317	0.0056	-0.0176
	100	7.1006	7.0994	7.1040	7.1008	-0.0169	0.0482	0.0037
	105	5.0446	5.0503	5.0542	5.0518	0.1136	0.1907	0.1421
	110	3.4866	3.5033	3.5052	3.5046	0.4777	0.5336	0.5144
120	90	13.8097	13.7841	13.7873	13.7860	-0.1855	-0.1623	-0.1718
	95	10.7524	10.7309	10.7372	10.7328	-0.1997	-0.1411	-0.1820
	100	8.1904	8.1859	8.1935	8.1879	-0.0548	0.0376	-0.0306
	105	6.1335	6.1281	6.1348	6.1302	-0.0882	0.0213	-0.0546
	110	4.5243	4.5104	4.5147	4.5125	-0.3063	-0.2128	-0.2605
180	90	15.3358	15.3346	15.3424	15.3375	-0.0076	0.0432	0.0113
	95	12.4738	12.4598	12.4717	12.4625	-0.1123	-0.0169	-0.0906
	100	9.9929	10.0057	10.0192	10.0082	0.1284	0.2635	0.1534
	105	7.9238	7.9502	7.9628	7.9530	0.3337	0.4928	0.3686
	110	6.2685	6.2582	6.2678	6.2614	-0.1646	-0.0116	-0.1139
252	90	16.9288	16.9328	16.9458	16.9361	0.0238	0.1006	0.0433
	95	14.2151	14.1984	14.2158	14.2009	-0.1173	0.0051	-0.0997
	100	11.8503	11.8214	11.8406	11.8237	-0.2436	-0.0816	-0.2242
	105	9.7899	9.7811	9.7995	9.7837	-0.0901	0.0978	-0.0631
	110	8.0705	8.0493	8.0646	8.0527	-0.2633	-0.0727	-0.2208

Cuadro 5 (Continuación)

T	K	Cmc	Cgd(2)	Cgd(3)	Cgd(4)	ep(2)%	ep(3)%	ep(4)%
504	90	21.3743	21.3323	21.3521	21.3366	-0.1963	-0.1036	-0.1762
	95	18.8629	18.8771	18.9001	18.8812	0.0750	0.1970	0.0968
	100	16.6513	16.6736	16.6980	16.6776	0.1342	0.2807	0.1582
	105	14.7249	14.7049	14.7292	14.7092	-0.1355	0.0295	-0.1063
	110	12.8953	12.9531	12.9757	12.9579	0.4479	0.6232	0.4851
756	90	24.6619	24.7519	24.7696	24.7680	0.3650	0.4367	0.4303
	95	22.4251	22.4614	22.4811	22.4792	0.1619	0.2498	0.2413
	100	20.4215	20.3740	20.3946	20.3926	-0.2327	-0.1318	-0.1416
	105	18.5537	18.4754	18.4961	18.4942	-0.4218	-0.3102	-0.3205
	110	16.7576	16.7517	16.7716	16.7698	-0.0352	0.0836	0.0728
1260	90	30.0753	30.1473	30.1589	30.2051	0.2395	0.2781	0.4317
	95	28.1574	28.0749	28.0874	28.1381	-0.2931	-0.2487	-0.0686
	100	26.1260	26.1558	26.1688	26.2219	0.1139	0.1637	0.3669
	105	24.4926	24.3791	24.3923	24.4457	-0.4632	-0.4093	-0.1913
	110	22.6814	22.7344	22.7475	22.7993	0.2337	0.2915	0.5198

Cuadro 5. Cgd se refiere al precio GARCH de difusión para una opción de compra de la fórmula 6.24 truncado hasta el orden n, para $n = 1, 2, 3, 4$; $e_p(i)\% = 100(Cgd(n) - Cmc)/Cmc$. Los parámetros del modelo son: $S_0 = 100$, $r = d = 0$; $\mathrm{d}V_t = (0.18 - 2V_t)\mathrm{d}t + 0.8V_t\mathrm{d}W_t$, $V_0 = 0.18/2$.

Cuadro 6

T	K	Pmc	Pgd(2)	Pgd(3)	Pgd(4)	ep(2)%	ep(3)%	ep(4)%
10	90	0.0901	0.0898	0.0897	0.0892	-0.3806	-0.3964	-1.0315
	95	0.6309	0.6305	0.6305	0.6285	-0.0719	-0.0730	-0.3906
	100	2.3793	2.3814	2.3814	2.3857	0.0890	0.0903	0.2706
	105	5.7150	5.7143	5.7143	5.7125	-0.0127	-0.0127	-0.0444
	110	10.1488	10.1485	10.1485	10.1469	-0.0032	-0.0032	-0.0190
30	90	0.7884	0.7902	0.7900	0.7892	0.2343	0.2104	0.1119
	95	2.0042	2.0008	2.0010	2.0014	-0.1714	-0.1604	-0.1435
	100	4.1192	4.1164	4.1169	4.1181	-0.0673	-0.0559	-0.0258
	105	7.1832	7.1837	7.1840	7.1844	0.0080	0.0115	0.0175
	110	11.0476	11.0473	11.0472	11.0465	-0.0029	-0.0038	-0.0102
60	90	1.9061	1.9061	1.9062	1.9064	-0.0002	0.0045	0.0171
	95	3.5166	3.5118	3.5133	3.5126	-0.1346	-0.0928	-0.1121
	100	5.8122	5.8074	5.8095	5.8083	-0.0821	-0.0460	-0.0658
	105	8.7787	8.7855	8.7871	8.7863	0.0773	0.0955	0.0869
	110	12.3698	12.3642	12.3646	12.3647	-0.0455	-0.0423	-0.0415
90	90	2.9057	2.8977	2.8990	2.8988	-0.2743	-0.2299	-0.2368
	95	4.7122	4.7092	4.7128	4.7105	-0.0653	0.0115	-0.0363
	100	7.1006	7.0994	7.1040	7.1008	-0.0169	0.0482	0.0037
	105	10.0446	10.0503	10.0542	10.0518	0.0569	0.0958	0.0719
	110	13.4866	13.5033	13.5052	13.5046	0.1236	0.1377	0.1333
120	90	3.8097	3.7842	3.7873	3.7860	-0.6711	-0.5874	-0.6228
	95	5.7524	5.7309	5.7372	5.7328	-0.3736	-0.2643	-0.3395
	100	8.1904	8.1859	8.1935	8.1879	-0.0548	0.0376	-0.0306
	105	11.1335	11.1281	11.1348	11.1302	-0.0488	0.0114	-0.0299
	110	14.5243	14.5104	14.5147	14.5125	-0.0956	-0.0660	-0.0812
180	90	5.3358	5.3346	5.3424	5.3375	-0.0220	0.1250	0.0331
	95	7.4738	7.4598	7.4717	7.4625	-0.1870	-0.0281	-0.1515
	100	9.9929	10.0057	10.0192	10.0082	0.1284	0.2635	0.1534
	105	12.9238	12.9502	12.9628	12.9530	0.2044	0.3019	0.2261
	110	16.2685	16.2582	16.2678	16.2614	-0.0634	-0.0044	-0.0438
252	90	6.9288	6.9328	6.9458	6.9361	0.0582	0.2461	0.1054
	95	9.2151	9.1984	9.2158	9.2009	-0.1810	0.0075	-0.1535
	100	11.8503	11.8214	11.8406	11.8237	-0.2436	-0.0816	-0.2242
	105	14.7899	14.7811	14.7995	14.7837	-0.0596	0.0649	-0.0420
	110	18.0705	18.0493	18.0646	18.0527	-0.1173	-0.0326	-0.0985

Cuadro 6 (Continuación)

T	K	Pmc	Pgd(2)	Pgd(3)	Pgd(4)	ep(2)%	ep(3)%	ep(4)%
504	90	11.3743	11.3323	11.3521	11.3366	-0.3689	-0.1948	-0.3310
	95	13.8629	13.8771	13.9001	13.8812	0.1021	0.2680	0.1317
	100	16.6513	16.6736	16.6980	16.6776	0.1342	0.2807	0.1582
	105	19.7249	19.7049	19.7292	19.7092	-0.1012	0.0220	-0.0794
	110	22.8953	22.9531	22.9757	22.9579	0.2523	0.3510	0.2733
756	90	14.6619	14.7519	14.7696	14.7680	0.6139	0.7346	0.7237
	95	17.4251	17.4614	17.4811	17.4792	0.2084	0.3215	0.3106
	100	20.4215	20.3740	20.3946	20.3926	-0.2327	-0.1318	-0.1416
	105	23.5537	23.4754	23.4961	23.4942	-0.3322	-0.2444	-0.2524
	110	26.7576	26.7517	26.7716	26.7698	-0.0220	0.0523	0.0456
1260	90	20.0753	20.1473	20.1589	20.2051	0.3588	0.4166	0.6467
	95	23.1574	23.0749	23.0874	23.1381	-0.3564	-0.3024	-0.0835
	100	26.1260	26.1558	26.1688	26.2219	0.1139	0.1637	0.3669
	105	29.4926	29.3791	29.3923	29.4457	-0.3847	-0.3399	-0.1589
	110	32.6814	32.7344	32.7475	32.7993	0.1622	0.2023	0.3608

Cuadro 6. Pgd se refiere al precio GARCH de difusión para una opción de venta de la fórmula 6.24 truncado hasta el orden n, para $n = 1, 2, 3, 4$; $e_p(i)\% = 100(Pgd(n) - Pmc)/Pmc$. Los parámetros del modelo son: $S_0 = 100$, $r = d = 0$; $\mathrm{d}V_t = (0.18 - 2V_t)\mathrm{d}t + 0.8V_t\mathrm{d}W_t$, $V_0 = 0.18/2$.

Cuadro 7

T	K	Cmc	Cgd(2)	Cgd(3)	Cgd(4)	ep(2)%	ep(3)%	ep(4)%
10	90	10.0917	10.0910	10.0910	-99.8450	-0.0065	-0.0065	-1089.38
	95	5.6296	5.6299	5.6299	-379.3650	0.0053	0.0046	-6838.71
	100	2.3780	2.3784	2.3785	825.2640	0.0129	0.0205	34603.48
	105	0.7140	0.7135	0.7135	-364.6350	-0.0588	-0.0622	-51172.48
	110	0.1498	0.1499	0.1498	-304.3220	0.0600	-0.0088	-203280.42
30	90	10.7885	10.7905	10.7894	-9.2441	0.0189	0.0088	-185.68
	95	6.9936	6.9913	6.9924	15.8980	-0.0326	-0.0161	127.32
	100	4.0999	4.1018	4.1043	36.0908	0.0457	0.1079	780.28
	105	2.1743	2.1733	2.1747	13.3906	-0.0470	0.0146	515.84
	110	1.0442	1.0458	1.0450	-17.9397	0.1557	0.0801	-1818.10
60	90	11.8874	11.8930	11.8934	12.3215	0.0470	0.0504	3.65
	95	8.4699	8.4821	8.4906	7.3111	0.1449	0.2448	-13.68
	100	5.7619	5.7705	5.7826	3.7936	0.1491	0.3596	-34.15
	105	3.7606	3.7537	3.7629	2.4532	-0.1835	0.0612	-34.76
	110	2.3345	2.3461	2.3483	2.5105	0.4943	0.5885	7.53
90	90	12.8571	12.8658	12.8737	12.9510	0.0678	0.1292	0.73
	95	9.6757	9.6570	9.6791	10.5224	-0.1936	0.0354	8.75
	100	7.0389	7.0387	7.0669	8.2505	-0.0029	0.3981	17.21
	105	5.0253	4.9948	5.0186	5.9344	-0.6074	-0.1338	18.09
	110	3.4571	3.4635	3.4754	3.7251	0.1842	0.5281	7.74
120	90	13.7387	13.7322	13.7529	13.7211	-0.0472	0.1035	-0.12
	95	10.6503	10.6565	10.6972	10.5955	0.0579	0.4401	-0.51
	100	8.1286	8.1021	8.1511	8.0200	-0.3254	0.2777	-1.33
	105	6.0653	6.0492	6.0927	5.9833	-0.2649	0.4521	-1.35
	110	4.4610	4.4479	4.4753	4.4247	-0.2921	0.3221	-0.81
180	90	15.2827	15.2445	15.3010	15.2633	-0.2502	0.1195	-0.12
	95	12.4034	12.3456	12.4311	12.3601	-0.4662	0.2231	-0.34
	100	9.9545	9.8810	9.9784	9.8939	-0.7379	0.2409	-0.60
	105	7.8189	7.8294	7.9202	7.8444	0.1342	1.2959	0.32
	110	6.2033	6.1533	6.2224	6.1730	-0.8053	0.3084	-0.48
252	90	16.8763	16.8054	16.9104	16.7117	-0.4198	0.2024	-0.97
	95	14.0859	14.0469	14.1869	13.8847	-0.2772	0.7167	-1.42
	100	11.7207	11.6590	11.8138	11.4693	-0.5264	0.7944	-2.14
	105	9.6724	9.6211	9.7694	9.4484	-0.5303	1.0033	-2.31
	110	8.0108	7.9033	8.0272	7.7838	-1.3420	0.2050	-2.83

Cuadro 7 (Continuación)

T	K	Cmc	Cgd(2)	Cgd(3)	Cgd(4)	ep(2)%	ep(3)%	ep(4)%
504	90	21.3011	21.1406	21.3528	20.5347	-0.7535	0.2427	-3.59
	95	18.7485	18.6659	18.9123	17.9087	-0.4406	0.8736	-4.47
	100	16.5076	16.4522	16.7143	15.6302	-0.3357	1.2521	-5.31
	105	14.5816	14.4824	14.7423	13.6820	-0.6803	1.1021	-6.16
	110	12.8268	12.7376	12.9793	12.0342	-0.6956	1.1888	-6.17
756	90	24.6399	24.5477	24.7689	23.3934	-0.3743	0.5234	-5.05
	95	22.1876	22.2418	22.4880	20.9034	0.2442	1.3539	-5.78
	100	20.0646	20.1454	20.4041	18.7221	0.4025	1.6918	-6.69
	105	18.4246	18.2442	18.5036	16.8323	-0.9792	0.4287	-8.64
	110	16.6492	15.5234	16.7728	15.2090	-6.7617	0.7426	-8.65
1260	90	30.2846	29.9524	30.1190	27.9051	-1.0969	-0.5468	-7.85
	95	27.9002	27.8693	28.0485	25.6174	-0.1109	0.5314	-8.18
	100	26.0987	25.9431	26.1297	23.5845	-0.5964	0.1186	-9.63
	105	24.2693	24.1628	24.3515	21.7907	-0.4390	0.3385	-10.21
	110	22.4488	22.5177	22.7038	20.2166	0.3067	1.1357	-9.94

Cuadro 7. Cgd se refiere al precio GARCH de difusión para una opción de compra de la fórmula 6.24 truncado hasta el orden n, para $n = 1, 2, 3, 4$; $e_p(i)\% = 100(Cgd(n) - Cmc)/Cmc$. Los parámetros del modelo son: $S_0 = 100$, $r = d = 0$; $\mathrm{d}V_t = (0.18 - 2V_t)\mathrm{d}t + 1.2V_t\mathrm{d}W_t$, $V_0 = 0.18/2$.

Cuadro 8

T	K	Pmc	Pgd(2)	Pgd(3)	Pgd(4)	ep(2)%	ep(3)%	ep(4)%
10	90	0.0917	0.0910	0.0910	-109.8450	-0.6700	-0.7489	-119943.02
	95	0.6296	0.6299	0.6299	-384.3650	0.0468	0.0411	-61145.83
	100	2.3780	2.3784	2.3785	825.2640	0.0129	0.0205	34603.48
	105	5.7140	5.7135	5.7135	-341.6350	-0.0073	-0.0078	-6078.95
	110	10.1498	10.1499	10.1498	-294.3220	0.0012	0.0002	-2999.78
30	90	0.7885	0.7905	0.7894	-19.2441	0.2561	0.1257	-2540.73
	95	1.9936	1.9913	1.9924	10.8980	-0.1145	-0.0563	446.65
	100	4.0999	4.1018	4.1043	36.0908	0.0457	0.1079	780.28
	105	7.1743	7.1733	7.1747	18.3906	-0.0143	0.0044	156.33
	110	11.0442	11.0458	11.0450	-7.9397	0.0149	0.0077	-171.89
60	90	1.8874	1.8930	1.8935	2.3215	0.2940	0.3199	22.99
	95	3.4699	3.4821	3.4906	2.3111	0.3538	0.5976	-33.39
	100	5.7619	5.7705	5.7826	3.7936	0.1491	0.3596	-34.15
	105	8.7606	8.7537	8.7629	7.4532	-0.0788	0.0263	-14.92
	110	12.3345	12.3461	12.3483	12.5105	0.0939	0.1117	1.42
90	90	2.8571	2.8658	2.8737	2.9510	0.3065	0.5830	3.28
	95	4.6757	4.6570	4.6791	5.5224	-0.4006	0.0732	18.10
	100	7.0389	7.0387	7.0669	8.2505	-0.0029	0.3981	17.21
	105	10.0253	9.9948	10.0186	10.9344	-0.3045	-0.0668	9.06
	110	13.4571	13.4635	13.4754	13.7251	0.0472	0.1357	1.99
120	90	3.7387	3.7322	3.7529	3.7211	-0.1733	0.3795	-0.46
	95	5.6503	5.6565	5.6972	5.5955	0.1086	0.8295	-0.96
	100	8.1286	8.1021	8.1511	8.0200	-0.3254	0.2777	-1.33
	105	11.0653	11.0492	11.0927	10.9833	-0.1451	0.2480	-0.74
	110	14.4610	14.4479	14.4753	14.4247	-0.0904	0.0991	-0.25
180	90	5.2827	5.2445	5.3010	5.2633	-0.7233	0.3462	-0.36
	95	7.4034	7.3456	7.4311	7.3601	-0.7816	0.3736	-0.58
	100	9.9545	9.8810	9.9784	9.8939	-0.7379	0.2409	-0.60
	105	12.8189	12.8294	12.9202	12.8444	0.0821	0.7904	0.19
	110	16.2033	16.1533	16.2224	16.1730	-0.3083	0.1182	-0.18
252	90	6.8763	6.8054	6.9104	6.7117	-1.0301	0.4960	-2.39
	95	9.0859	9.0469	9.1869	8.8847	-0.4301	1.1115	-2.21
	100	11.7207	11.6590	11.8138	11.4693	-0.5264	0.7944	-2.14
	105	14.6724	14.6211	14.7694	14.4484	-0.3496	0.6611	-1.52
	110	18.0108	17.9033	18.0272	17.7838	-0.5969	0.0910	-1.26

Cuadro 8 (Continuación)

T	K	Pmc	Pgd(2)	Pgd(3)	Pgd(4)	ep(2)%	ep(3)%	ep(4)%
504	90	11.3011	11.1406	11.3528	10.5347	-1.4203	0.4574	-6.78
	95	13.7485	13.6659	13.9123	12.9087	-0.6009	1.1913	-6.10
	100	16.5076	16.4522	16.7143	15.6302	-0.3357	1.2521	-5.31
	105	19.5816	19.4824	19.7423	18.6820	-0.5066	0.8207	-4.59
	110	22.8268	22.7376	22.9793	22.0342	-0.3909	0.6680	-3.47
756	90	14.6399	14.5477	14.7689	13.3934	-0.6300	0.8809	-8.51
	95	17.1876	17.2418	17.4880	15.9034	0.3153	1.7477	-7.47
	100	20.0646	20.1454	20.4041	18.7221	0.4025	1.6918	-6.69
	105	23.4246	23.2442	23.5036	21.8323	-0.7702	0.3372	-6.79
	110	26.6492	26.5234	26.7728	25.2090	-0.4719	0.4640	-5.40
1260	90	20.2846	19.9524	20.1190	17.9051	-1.6377	-0.8164	-11.73
	95	22.9002	22.8693	23.0485	20.6174	-0.1351	0.6474	-9.96
	100	26.0987	25.9431	26.1297	23.5845	-0.5964	0.1186	-9.63
	105	29.2693	29.1628	29.3515	26.7907	-0.3640	0.2807	-8.46
	110	32.4488	32.5177	32.7038	30.2166	0.2122	0.7857	-6.87

Cuadro 8. Pgd se refiere al precio GARCH de difusión para una opción de venta de la fórmula 6.24 truncado hasta el orden n, para $n = 1, 2, 3, 4$; $e_p(i)\% = 100(Pgd(n) - Pmc)/Pmc$. Los parámetros del modelo son: $S_0 = 100$, $r = d = 0$; $\mathrm{d}V_t = (0.18 - 2V_t)\mathrm{d}t + 1.2V_t\mathrm{d}W_t$, $V_0 = 0.18/2$.

Cuadro 9

T	K	Cmc	Cgd(2)	Cgd(3)	Cgd(4)	ep(2)%	ep(3)%	ep(4)%
10	90	10.0002	10.0002	10.0002	10.0009	-0.0002	-0.0002	0.0068
	95	5.0522	5.0523	5.0522	5.0592	0.0008	0.0002	0.1386
	100	1.1883	1.1895	1.1896	1.1532	0.0968	0.1043	-2.9513
	105	0.0666	0.0670	0.0669	0.0783	0.5244	0.4582	17.4407
	110	0.0008	0.0008	0.0008	0.0000	-4.4111	-3.3776	-100.0000
30	90	10.0421	10.0419	10.0418	10.0417	-0.0024	-0.0034	-0.0044
	95	5.4280	5.4273	5.4269	5.4273	-0.0131	-0.0199	-0.0120
	100	2.0553	2.0536	2.0546	2.0539	-0.0820	-0.0358	-0.0694
	105	0.4921	0.4913	0.4910	0.4914	-0.1591	-0.2246	-0.1396
	110	0.0744	0.0747	0.0744	0.0744	0.4659	-0.0151	0.0337
60	90	10.2436	10.2415	10.2395	10.2408	-0.0204	-0.0399	-0.0272
	95	6.0118	6.0085	6.0088	6.0092	-0.0542	-0.0498	-0.0420
	100	2.8969	2.8961	2.8995	2.8969	-0.0303	0.0892	-0.0009
	105	1.1191	1.1225	1.1230	1.1233	0.3044	0.3500	0.3768
	110	0.3544	0.3550	0.3527	0.3545	0.1491	-0.4792	0.0278
90	90	10.5075	10.5073	10.5040	10.5076	-0.0022	-0.0336	0.0007
	95	6.5241	6.5224	6.5243	6.5238	-0.0268	0.0034	-0.0050
	100	3.5438	3.5421	3.5484	3.5430	-0.0458	0.1303	-0.0221
	105	1.6804	1.6732	1.6756	1.6747	-0.4290	-0.2856	-0.3415
	110	0.6950	0.6955	0.6924	0.6963	0.0698	-0.3765	0.1839
120	90	10.7876	10.7907	10.7873	10.7923	0.0287	-0.0029	0.0435
	95	6.9796	6.9823	6.9862	6.9839	0.0387	0.0947	0.0625
	100	4.0746	4.0879	4.0965	4.0884	0.3271	0.5372	0.3394
	105	2.1560	2.1634	2.1679	2.1651	0.3439	0.5522	0.4214
	110	1.0437	1.0443	1.0417	1.0464	0.0565	-0.1993	0.2587
180	90	11.3544	11.3566	11.3550	11.3596	0.0192	0.0051	0.0456
	95	7.7914	7.7896	7.7964	7.7910	-0.0237	0.0638	-0.0059
	100	5.0206	5.0069	5.0181	5.0068	-0.2733	-0.0514	-0.2763
	105	3.0188	3.0206	3.0281	3.0219	0.0577	0.3075	0.1018
	110	1.7282	1.7202	1.7200	1.7235	-0.4607	-0.4723	-0.2726
252	90	11.9981	12.0028	12.0036	12.0056	0.0388	0.0455	0.0621
	95	8.6000	8.6251	8.6334	8.6266	0.2919	0.3875	0.3086
	100	5.9503	5.9284	5.9400	5.9288	-0.3679	-0.1731	-0.3604
	105	3.8895	3.9051	3.9140	3.9065	0.3990	0.6283	0.4352
	110	2.4817	2.4745	2.4770	2.4775	-0.2897	-0.1905	-0.1708

Cuadro 9 (Continuación)

T	K	Cmc	Cgd(2)	Cgd(3)	Cgd(4)	ep(2)%	ep(3)%	ep(4)%
504	90	13.9304	13.9603	13.9637	13.9655	0.2146	0.2390	0.2519
	95	10.9162	10.9329	10.9394	10.9446	0.1527	0.2122	0.2599
	100	8.4085	8.4004	8.4082	8.4148	-0.0967	-0.0041	0.0743
	105	6.3345	6.3412	6.3481	6.3537	0.1056	0.2156	0.3034
	110	4.7078	4.7103	4.7148	4.7175	0.0525	0.1485	0.2063
756	90	15.5587	15.5798	15.5828	15.5949	0.1357	0.1549	0.2327
	95	12.7638	12.7339	12.7384	12.7604	-0.2344	-0.1992	-0.0268
	100	10.2959	10.2944	10.2994	10.3254	-0.0151	0.0335	0.2860
	105	8.2779	8.2391	8.2438	8.2673	-0.4693	-0.4121	-0.1288
	110	6.5659	6.5348	6.5384	6.5541	-0.4737	-0.4179	-0.1788
1260	90	18.2238	18.2373	18.2392	18.2696	0.0741	0.0846	0.2514
	95	15.5572	15.6034	15.6058	15.6479	0.2972	0.3127	0.5833
	100	13.2598	13.2842	13.2869	13.3339	0.1841	0.2045	0.5590
	105	11.1747	11.2602	11.2628	11.3075	0.7655	0.7888	1.1888
	110	9.5167	9.5077	9.5100	9.5462	-0.0950	-0.0713	0.3093

Cuadro 9. Cgd se refiere al precio GARCH de difusión para una opción de compra de la fórmula 6.24 truncado hasta el orden n, para $n = 1, 2, 3, 4$; $e_p(i)\% = 100(Cgd(n) - Cmc)/Cmc$. Los parámetros del modelo son: $S_0 = 100$, $r = d = 0$; $\mathrm{d}V_t = (0.09 - 4V_t)\mathrm{d}t + 1.2V_t\mathrm{d}W_t$, $V_0 = 0.09/4$.

Cuadro 10

T	K	Pmc	Pgd(2)	Pgd(3)	Pgd(4)	ep(2)%	ep(3)%	ep(4)%
10	90	0.0002	0.0002	0.0002	0.0009	-4.8285	-2.8039	311.5586
	95	0.0522	0.0523	0.0522	0.0592	0.0832	0.0121	13.4143
	100	1.1883	1.1895	1.1896	1.1532	0.0968	0.1043	-2.9513
	105	5.0666	5.0670	5.0669	5.0783	0.0069	0.0061	0.2293
	110	10.0008	10.0008	10.0008	9.9999	0.0001	0.0001	-0.0092
30	90	0.0421	0.0419	0.0418	0.0417	-0.4934	-0.9164	-1.1110
	95	0.4280	0.4273	0.4269	0.4273	-0.1666	-0.2519	-0.1516
	100	2.0553	2.0536	2.0546	2.0539	-0.0820	-0.0358	-0.0694
	105	5.4921	5.4913	5.4910	5.4914	-0.0142	-0.0200	-0.0126
	110	10.0744	10.0747	10.0744	10.0744	0.0031	0.0001	0.0001
60	90	0.2436	0.2415	0.2395	0.2408	-0.8513	-1.6703	-1.1247
	95	1.0118	1.0085	1.0088	1.0092	-0.3218	-0.2961	-0.2496
	100	2.8969	2.8961	2.8995	2.8969	-0.0303	0.0892	-0.0009
	105	6.1191	6.1225	6.1230	6.1233	0.0557	0.0640	0.0689
	110	10.3544	10.3550	10.3527	10.3545	0.0055	-0.0167	0.0007
90	90	0.5075	0.5073	0.5040	0.5076	-0.0411	-0.6994	0.0153
	95	1.5241	1.5224	1.5243	1.5238	-0.1147	0.0146	-0.0215
	100	3.5438	3.5421	3.5484	3.5430	-0.0458	0.1303	-0.0221
	105	6.6804	6.6732	6.6756	6.6747	-0.1079	-0.0718	-0.0859
	110	10.6950	10.6955	10.6924	10.6963	0.0045	-0.0245	0.0120
120	90	0.7876	0.7907	0.7873	0.7923	0.3970	-0.0405	0.6002
	95	1.9796	1.9823	1.9862	1.9839	0.1365	0.3340	0.2203
	100	4.0746	4.0879	4.0965	4.0884	0.3271	0.5372	0.3394
	105	7.1560	7.1634	7.1679	7.1651	0.1036	0.1664	0.1270
	110	11.0437	11.0443	11.0416	11.0464	0.0052	-0.0193	0.0242
180	90	1.3544	1.3566	1.3550	1.3596	0.1614	0.0396	0.3844
	95	2.7914	2.7896	2.7964	2.7910	-0.0662	0.1781	-0.0164
	100	5.0206	5.0069	5.0181	5.0068	-0.2733	-0.0514	-0.2763
	105	8.0188	8.0206	8.0281	8.0219	0.0217	0.1158	0.0383
	110	11.7282	11.7202	11.7200	11.7235	-0.0680	-0.0697	-0.0398
252	90	1.9981	2.0028	2.0036	2.0056	0.2330	0.2741	0.3747
	95	3.6000	3.6251	3.6334	3.6266	0.6974	0.9257	0.7371
	100	5.9503	5.9284	5.9400	5.9288	-0.3679	-0.1731	-0.3604
	105	8.8895	8.9051	8.9140	8.9065	0.1746	0.2749	0.1904
	110	12.4817	12.4745	12.4770	12.4775	-0.0578	-0.0378	-0.0338

Cuadro 10 (Continuación)

T	K	Pmc	Pgd(2)	Pgd(3)	Pgd(4)	ep(2)%	ep(3)%	ep(4)%
504	90	3.9304	3.9603	3.9637	3.9655	0.7595	0.8476	0.8929
	95	5.9162	5.9329	5.9394	5.9446	0.2812	0.3914	0.4788
	100	8.4085	8.4004	8.4082	8.4148	-0.0967	-0.0041	0.0743
	105	11.3345	11.3412	11.3481	11.3537	0.0594	0.1202	0.1696
	110	14.7078	14.7103	14.7148	14.7175	0.0169	0.0475	0.0658
756	90	5.5587	5.5798	5.5828	5.5949	0.3794	0.4335	0.6521
	95	7.7638	7.7339	7.7384	7.7604	-0.3851	-0.3277	-0.0443
	100	10.2959	10.2944	10.2994	10.3254	-0.0151	0.0335	0.2860
	105	13.2779	13.2391	13.2438	13.2673	-0.2925	-0.2571	-0.0801
	110	16.5659	16.5348	16.5384	16.5541	-0.1876	-0.1658	-0.0710
1260	90	8.2238	8.2373	8.2392	8.2696	0.1639	0.1875	0.5565
	95	10.5572	10.6034	10.6058	10.6479	0.4380	0.4608	0.8595
	100	13.2598	13.2842	13.2869	13.3339	0.1841	0.2045	0.5590
	105	16.1747	16.2602	16.2628	16.3075	0.5289	0.5450	0.8213
	110	19.5167	19.5077	19.5099	19.5462	-0.0463	-0.0350	0.1510

Cuadro 10. Pgd se refiere al precio GARCH de difusión para una opción de venta de la fórmula 6.24 truncado hasta el orden n, para $n = 1, 2, 3, 4$; $e_p(i)\% = 100(Pgd(n) - Pmc)/Pmc$. Los parámetros del modelo son: $S_0 = 100$, $r = d = 0$; $\mathrm{d}V_t = (0.09 - 4V_t)\mathrm{d}t + 1.2V_t\mathrm{d}W_t$, $V_0 = 0.09/4$.

Capítulo 8

Conclusiones, recomendaciones y posibles líneas de investigación.

Conclusiones

En esta tesis se derivaron analíticamente los primeros cuatro momentos condicionales de la varianza integrada bajo el supuesto de que la volatilidad del activo subyacente tiene una volatilidad cunducida por un proceso de difusión GARCH. Estos momentos se utlizaron para obtener una fórmula de aproximación analítica para valuar opciones europeas. Se llevaron a cabo varios experimentos de simulación Monte Carlo para mostrar que la fórmula basada en los primeros cuatro momentos produce, bajo ciertas condiciones de los parámetros, resultados adecuados para todos los precios de ejercicio y todos los vencimientos (pequeños y grandes). Asimismo, se mostró la inestabilidad del segundo y, cuando no se cumplen ciertas condiciones en los parámetros, del cuarto momento.

Los resultados se resumen de la siguiente forma. Cuando el tiempo de madurez es corto, $\overline{V}_T$ no está muy lejos de $M_1^{gd} := \mathbb{E}[\overline{V}_T\,|V_0]$. Es decir, el procedimiento propuesto de valuación es adecuado en plazos cortos. Mientras que cuando el tiempo a la madurez T se incrementa y la condición $2c_2 > c_3^2$ se mantiene, entonces por la ley fuerte de los grandes números $\overline{V}_T$ tiende a c_1/c_2 y los valores de la distribución estacionaria V, M_{2c}, M_{3c} y M_{4c} tienden a cero. Por lo tanto, la fórmula de aproximación (6.24) funciona bien también en plazos "largos". Es decir, corrige la deficiencia del modelo de Hull y White (1987) para valuar opciones en el largo plazo. En dicho modelo, la varianza V_T sigue un proceso lognormal sin tendencia, y M_{2c} y M_{3c} tienden a infinito cuando T se incrementa y la fórmula (6.5) falla en producir un precio correcto. El efecto que se obtiene al considerar un proceso de reversión a la media en lugar de un proceso lognormal es que se evita que la varianza explote o se vaya a cero cuando T se incrementa.

Para hablar de la estabilidad que tiene el modelo es necesario referirse a los supuestos de éste. La condición $2c_2 > 3c_3^2$ asegura que la distribución estacionaria de V_t tenga momentos finitos (al menos) de hasta el cuarto orden. Cuando $2c_2$ se aproxima a $3c_3^2$, la fórmula (6.24) se vuelve menos confiable para vencimientos largos, como se muestra en los Cuadros 7 y 8, donde la condición es violada. Cuando c_3^2 tiende a $2c_2$, la curtosis de las distribuciones de los rendimientos logarítmicos diverge a infinito. En este caso, el proceso de la varianza es "demasiado volátil", esto es, el parámetro de volatilidad de la volatilidad c_3 es "demasiado grande" y/o la tasa de reversión es demasiado débil (c_2 es "demasiado pequeña"). Aunque los errores de valuación e_p en los Cuadros 1-10 son muy pequeños, salvo para los Cuadros 7 y 8, estos errores parecen mostrar cierta conducta (en el primer momento son, en general negativos y en el tercer momento son positivos y, en general, muy pequeños) sobre todo en vencimientos grandes. Una explicación de esto podría ser que el precio de la opción Black-Scholes, la cual es el primer término en la fórmula de aproximación (6.24), tiende a ser mayor que su correspondiente valor Monte Carlo. El segundo momento del valor de la opción es casi siempre negativo, reduciendo la variación de precio de la fórmula Black-Scholes y explicando parcialmente los errores de valuación negativos de $e_p(2)$ en los Cuadros 5-10. El tercer momento de la aproximación casi siempre es positivo, ocasionando que los errores en valuación en $e_p(3)$ sean positivos como se observa en los Cuadros 1-10. La contribución del cuarto momento en la fórmula de aproximación es mixta, tiene un valor ambiguo.

Los resultados de la simulación muestran que, en plazos cortos y opciones "muy" fuera del dinero, los precios obtenidos a través del segundo momento de la fórmula de aproximación no son suficientemente buenos, dado que el error de valuación $e_p(2)$ es mayor que la tolerancia del diferencial de las posturas de compra y venta, que es del 2%. Al utilizar la aproximación del precio del tercer momento se reduce el error ocasionado por el momento anterior y los errores de $e_p(3)$ suelen estar dentro de la tolerancia del diferencial de compra y venta. En ciertos casos (Cuadros 1-4), debido a la inestabilidad del cuarto momento en la fórmula de aproximación (6.24) se generan errores de valuación grandes.

Por lo tanto, esta fórmula de aproximación produce precios confiables en una tolerancia razonable esperada por fricciones del mercado. Evidentemente, una línea de investigación (futura) interesante es elaborar un modelo donde se permita la correlación del rendimiento del precio del activo con aquella del proceso de la varianza. Esto permitiría valuar opciones sobre acciones donde existe una correlación negativa debido al apalancamiento financiero.

Apéndice A. Fórmula completa de valuación de la opción

Las siguientes fórmulas de valuación fueron obtenidas en el programa Matematica. Se usó este recurso debido a que para desarrollar el tercer y cuarto momento aumentaba el grado de complejidad.

Primer momento de la varianza integrada:

$$momuno(T) = -\frac{e^{-Tc_2}(-c_1+c_2V_0)}{Tc_2^2} + \frac{c_1(-1+Tc_2)}{Tc_2^2} + \frac{V_0}{Tc_2};$$

Segundo momento de la varianza integrada:

$$momdue(T) = \frac{1}{T^2c_2^4(c_2-c_3^2)^2(-2c_2+c_3^2)^2}(e^{-2Tc_2}(-2e^{Tc_2}(-2c_2+c_3^2)^2(c_1^2(c_2^2-Tc_2^3- 2c_2c_3^2+(3+Tc_2)c_3^4)+c_1c_2(c_2^2(-2+Tc_2)+2c_2c_3^2-(2+Tc_2)c_3^4)V_0+c_2^3(c_2-c_3^2)V_0^2)+ e^{2tc_2}(c_2-c_3^2)^2(c_1^2(4c_2^2(-1+Tc_2)^2-4c_2(4+Tc_2(-3+Tc_2))c_3^2+(6+Tc_2(-4+Tc_2))c_3^4 +2c_1c_2(2c_2-c_3^2)(2c_2(-1+Tc_2)-(-2+Tc_2)c_3^2)V_0+2c_2^3(2c_2-c_3^2)V_0^2)+2e^{Tc_3^2}c_2^4(2c_1^2- 2c_1(2c_2-c_3^2)V_0+(2c_2^2-3c_2c_3^2+c_3^4)V_0^2)));$$

Segundo momento central de la varianza integrada:

$$momduec(T) = \frac{1}{T^2c_2^4(c_2-c_3^2)^2(-2c_2+c_3^2)^2}(e^{-2Tc_2}(c_1^2((-1+e^{Tc_2})(1+5e^{Tc_2}) c_3^8+4c_2^4(-1+e^{Tc_3^2}+e^{Tc_2}(4+e^{Tc_2})Tc_3^2)-2c_2c_3^6(-3+2e^{Tc_2}(-4+Tc_3^2)+e^{2Tc_2}(11+ Tc_3^2))-2c_2^3c_3^2(-6+16e^{Tc_2}Tc_3^2+e^{2Tc_2}(6+5Tc_3^2))+c_2^2c_3^4(-13+4e^{Tc_2}(-4+5Tc_3^2)+ e^{2Tc_2}(29+8Tc_3^2)))-2c_1c_2(2c_2-c_3^2)(-(-1+e^{2Tc_2})c_3^6+2c_2^3(-1+e^{Tc_3^2}+2e^{Tc_2}Tc_3^2) +2c_2c_3^4(-2+e^{2Tc_2}+e^{Tc_2}(1+Tc_3^2))-c_2^2c_3^2(-5+e^{2Tc_2}+2e^{Tc_2}(2+3Tc_3^2)))V_0+c_2^2 (2c_2^2-3c_2c_3^2+c_3^4)(2(-1+e^{Tc_3^2})c_2^2+(3-4e^{Tc_2}+e^{2Tc_2})c_2c_3^2-(-1+e^{Tc_2})^2c_3^4)V_0^2));$$

Tercer momento de la varianza integrada:

momtre(T)=a(T)+3b(T)+3dd(T)+h(T);

Pasos preliminares para calcular el tercer momento de la varianza integrada

$a(T) = (2e^{-24Tc_2}(2(-3e^{23Tc_2} + e^{24Tc_2} - e^{3T(7c_2+c_3^2)} + 3e^{T(22c_2+c_3^2)})c_2^2 + (15e^{23Tc_2} -$

$7e^{24Tc_2} + e^{3T(7c_2+c_3^2)} - 9e^{T(22c_2+c_3^2)})c_2c_3^2 + 6e^{23Tc_2}(-1 + e^{Tc_2})c_3^4)V_0^3/(T^3c_2(2c_2 - 3c_3^2)$

$(c_2 - 2c_3^2)(c_2 - c_3^2)(2c_2 - c_3^2));$

$b(T) = (2e^{-3Tc_2}c_1(2(-2e^{2Tc_2} + e^{3Tc_2} + e^{T(c_2+c_3^2)})Tc_2^7 - 24e^{2Tc_2}(-1 + e^{Tc_2})c_3^{12}+$

$4e^{2Tc_2}c_2c_3^{10}(25(-1 + e^{Tc_2}) + 3(1 + e^{Tc_2})Tc_3^2 + c_2^3c_3^6(-183e^{2Tc_2} + 151e^{3Tc_2} - e^{3Tc_3^2}+$

$33e^{T(c_2+c_3^2)} + (39e^{2Tc_2} + 107e^{3Tc_2} - 6e^{T(c_2+c_3^2)})Tc_3^2 + c_2^5c_3^2(-43e^{2Tc_2} + 19e^{3Tc_2} -$

$5e^{3T_3^2} - 47e^{2Tc_2}Tc_3^2 + 59e^{3Tc_2}Tc_3^2 + e^{T(c_2+c_3^2)}(29 + 4Tc_3^2)) + c_2^4c_3^4(122e^{2Tc_2} -$

$74e^{3Tc_2} + 20e^{2Tc_2}Tc_3^2 - 107e^{3Tc_2}Tc_3^2 + e^{T(c_2+c_3^2)}(-52 + 7Tc_3^2)) + c_2^6(6e^{2Tc_2} -$

$2e^{3Tc_2} + 2e^{3Tc_3^2} + 24e^{2Tc_2}Tc_3^2 - 17e^{3Tc_2}Tc_3^2 - e^{T(c_2+c_3^2)}(6 + 7Tc_3^2)) - 2e^{2Tc_2}c_2^2c_3^8$

$(-85 + 22Tc_3^2 + e^{Tc_2}(85 + 28Tc_3^2)))V_0^2)/(T^3c_2^3(c_2 - 2c_3^2)^2(c_2 - c_3^2)^3(4c_2^2-$

$8c_2c_3^2 + 3c_3^4));$

$dd(T) = (e^{-3Tc_2}c_1^2(16e^{2Tc_2}(-1 + e^{Tc_2})T^2c_2^{12} + 432e^{2Tc_2}(-1 + e^{Tc_2})c_3^{20} - 72e^{2Tc_2}c_2c_3^{18}$

$(50(-1 + e^{Tc_2}) + 3(1 + e^{Tc_2})Tc_3^2) - 32Tc_2^{11}(e^{T(c_2+c_3^2)} - 2e^{2Tc_2}(1 + 2Tc_3^2) + e^{3Tc_2}(1+$

$6Tc_3^2)) + 12e^{2Tc_2}c_2^2c_3^{16}(1081(-1 + e^{Tc_2}) + 3Tc_3^2(46 + 54e^{Tc_2} + (-1 + e^{Tc_2})Tc_3^2))-$

$6e^{2Tc_2}c_2^3c_3^{14}(4460(-1 + e^{Tc_2}) + Tc_3^2(881 - 38Tc_3^2 + e^{Tc_2}(1281 + 62Tc_3^2)))+$

$e^{2Tc_2}c_2^4c_3^{12}(35112(-1 + e^{Tc_2}) + Tc_3^2(9128 - 481Tc_3^2 + e^{Tc_2}(17632 + 1681Tc_3^2)))$

$+ c_2^8c_3^4(20(-147e^{2Tc_2} + 89e^{3Tc_2} - 5e^{3Tc_3^2} + 63e^{T(c_2+c_3^2)}) + Tc_3^2(100e^{T(c_2+c_3^2)} + e^{2Tc_2}$

$(-3868 + 8088e^{Tc_2} + (247 + 6153e^{Tc_2})Tc_3^2))) - 8c_2^9c_3^2(8(-9e^{2Tc_2} + 4e^{3Tc_2} -$

$e^{3Tc_3^2} + 6e^{T(c_2+c_3^2)}) + Tc_3^2(39e^{T(c_2+c_3^2)} + e^{2Tc_2}(-273 - 50Tc_3^2 + 30e^{Tc_2}(10 + 13Tc_3^2$

$$)))) + 8c_2^{10}(2(-3e^{2Tc_2} + e^{3Tc_2} - e^{3Tc_3^2} + 3e^{T(c_2+c_3^2)}) + Tc_3^2(22e^{T(c_2+c_3^2)} + e^{2Tc_2}(-74$$
$$- 47Tc_3^2 + e^{Tc_2}(52 + 127Tc_3^2)))) + 2c_2^7c_3^6(4506e^{2Tc_2} - 3554e^{3Tc_2} + 38e^{3Tc_3^2} -$$
$$990e^{T(c_2+c_3^2)} + Tc_3^2(136e^{T(c_2+c_3^2)} + e^{2Tc_2}(1181 - 478Tc_3^2 - 9e^{Tc_2}(979 + 452Tc_3^2$$
$$)))) + 4c_2^5c_3^{10}(7749e^{2Tc_2} - 7669e^{3Tc_2} + e^{3Tc_3^2} - 81e^{T(c_2+c_3^2)} + Tc_3^2(18e^{T(c_2+c_3^2)} +$$
$$e^{2Tc_2}(-2207 + 50Tc_3^2 - e^{Tc_2}(6511 + 1095Tc_3^2)))) + 2c_2^6c_3^8(-9732e^{2Tc_2} + 9044$$
$$e^{3Tc_2} - 14e^{3Tc_3^2} + 702e^{T(c_2+c_3^2)} + Tc_3^2(-138e^{T(c_2+c_3^2)} + e^{2Tc_2}(1698 + 331Tc_3^2 + e^{Tc_2}$$
$$(12960 + 3649Tc_3^2)))))V_0)/(T^3c_2^5(2c_2 - c_3^2)^2(c_2 - 2c_3^2)^2(c_2 - c_3^2)^4(-2c_2 + c_3^2)^2);$$
$$h(T) = (e^{-3Tc_2}c_1^3(16e^{3Tc_2}T^3c_2^{13} - 2160e^{2Tc_2}(-1 + e^{Tc_2})c_3^{20} - 48e^{2Tc_2}T^2c_2^{12}(-1$$
$$+ e^{Tc_2}(1 + 4Tc_3^2)) + 144e^{2Tc_2}c_2c_3^{18}(-119 + 6Tc_3^2 + e^{Tc_2}(119 + 9Tc_3^2)) - 12$$
$$e^{2Tc_2}c_2^2c_3^{16}(4805(-1 + e^{Tc_2}) + 3Tc_3^2(176 - 3Tc_3^2 + 3e^{Tc_2}(100 + 3Tc_3^2))) +$$
$$8Tc_2^{11}(6e^{T(c_2+c_3^2)} - 12e^{2Tc_2}(1 + 4Tc_3^2) + e^{3Tc_2}(6 + Tc_3^2(78 + 127Tc_3^2))) +$$
$$12e^{2Tc_2}c_2^3c_3^{14}(9072(-1 + e^{Tc_2}) + Tc_3^2(1562 - 57Tc_3^2 + 3e^{Tc_2}(1081 + Tc_3^2(81$$
$$+ Tc_3^2)))) + 3e^{2Tc_2}c_2^4c_3^{12}(-42616(-1 + e^{Tc_2}) + Tc_3^2(-9528 + 481Tc_3^2 - e^{Tc_2}$$
$$(26760 + Tc_3^2(3843 + 124Tc_3^2)))) + c_2^8c_3^4(4524e^{2Tc_2} - 3076e^{3Tc_2} + 52e^{3Tc_3^2}$$
$$- 1500e^{T(c_2+c_3^2)} + 3Tc_3^2(8e^{T(c_2+c_3^2)} - 13e^{2Tc_2}(-236 + 19Tc_3^2) - e^{Tc_2}(7108 +$$
$$3Tc_3^2(2937 + 904Tc_3^2)))) + e^{2Tc_2}c_2^5c_3^{10}(97440(-1 + e^{Tc_2}) + Tc_3^2(22512 -$$
$$600Tc_3^2 + e^{Tc_2}(105336 + Tc_3^2(26448 + 1681Tc_3^2)))) + 3c_2^9c_3^2(16(-15e^{2Tc_2}$$
$$+ 7e^{3Tc_2} - e^{3Tc_3^2} + 9e^{T(c_2+c_3^2)}) + Tc_3^2(116e^{T(c_2+c_3^2)} - 8e^{2Tc_2}(179 + 50Tc_3^2) + e^{3Tc_2}$$
$$(1780 + Tc_3^2(4044 + 2051Tc_3^2)))) + 2c_2^7c_3^6(12(-743e^{2Tc_2} + 651e^{3Tc_2} - e^{3Tc_3^2}$$
$$+ 93e^{T(c_2+c_3^2)}) + Tc_3^2(-198e^{T(c_2+c_3^2)} + 6e^{2Tc_2}(-714 + 239Tc_3^2) + e^{3Tc_2}(27132$$
$$+ Tc_3^2(19440 + 3649Tc_3^2)))) + 8c_2^{10}(6e^{2Tc_2} - 2e^{3Tc_2} + 2e^{3Tc_3^2} - 6e^{T(c_2+c_3^2)} +$$
$$3Tc_3^2(-10e^{T(c_2+c_3^2)} + e^{2Tc_2}(42 + 47Tc_3^2 - 2e^{Tc_2}(16 + 75Tc_3^2 + 65T^2c_3^4)))) +$$
$$2c_2^6c_3^8(24912e^{2Tc_2} - 24320e^{3Tc_2} + 2e^{3Tc_3^2} - 594e^{T(c_2+c_3^2)} + 3Tc_3^2(36e^{T(c_2+c_3^2)}$$
$$+ e^{2Tc_2}(-742 - 331Tc_3^2 - e^{Tc_2}(15338 + Tc_3^2(6511 + 730Tc_3^2)))))))/(T^3c_2^6$$
$$(c_2 - c_3^2)^4(-2c_2 + c_3^2)^2(2c_2^2 - 7c_2c_3^2 + 6c_3^4)^2);$$

Tercer momento central de la varianza integrada:

momtrec(T)=momtre(T)-3momdue(T)*momuno(T)+2(momuno(T))^3;

Pasos preliminares para obtener el cuarto momento de la varianza integrada

$$cccc(T) = (e^{-4Tc_2c_1^4}(\frac{1}{(2c_2-5c_3^2)^2(c_2-3c_3^2)^2}(16c_2^5(c_2-c_3^2)^3(108e^{T(2c_2+c_3^2)}c_2^3(c_2-3c_3^2)^2$$
$$(2c_2-3c_3^2)^3(2c_2^2-5c_2c_3^2+2c_3^4)(2c_2^3(1+2Tc_2)-c_2^2(23+24Tc_2)c_3^2+c_2(55+49Tc_2)$$
$$c_3^4-(28+39Tc_2)c_3^6+10Tc_3^8)+4e^{T(c_2+3c_3^2)}c_2^3(2c_2-5c_3^2)^2(c_2-2c_3^2)(-2c_2+c_3^2)^4(2c_2^3$$
$$(8+3Tc_2)-c_2^2(101+45Tc_2)c_3^2+3c_2(63+40Tc_2)c_3^4-27(4+5Tc_2)c_3^6+54Tc_3^8)+$$
$$(c_2-2c_3^2)^2(3e^{6Tc_3^2c_2^3}(-2c_2+c_3^2)^4(-c_2+c_3^2)^3(-2c_2+3c_3^2)+e^{4Tc_2}(2c_2-5c_3^2)^2(c_2-$$
$$3c_3^2)^2(c_2-2c_3^2)^2(4c_2^2-8c_2c_3^2+3c_3^4)(2c_2^3(-47+12Tc_2)-c_2^2(-245+72Tc_2)c_3^2+3c_2$$
$$(-61+22Tc_2)c_3^4-18(-2+Tc_2)c_3^6-12e^{3Tc_2}(2c_2-5c_3^2)^2(c_2-3c_3^2)^2(-2c_2+c_3^2)^4$$
$$(-2c_2^3(-4+3Tc_2)+c_2^2(-11+27Tc_2)c_3^2-3c_2(9+13Tc_2)c_3^4+18(2+Tc_2)c_3^6))))+$$
$$e^{Tc_2}(384e^{3Tc_2}T^4c_2^{21}-1088640e^{2Tc_2}(-1+e^{Tc_2})c_3^{34}+155520e^{2Tc_2}c_2c_3^{32}(110(-1+e^{Tc_2})$$
$$+(3+4e^{Tc_2})Tc_3^2)-192e^{2Tc_2}T^3c_2^{20}(40+e^{Tc_2}(16+41Tc_3^2))+25920e^{2Tc_2}c_2^2c_3^{30}(-4901$$
$$(-1+e^{Tc_2})+3Tc_3^2(-92+Tc_3^2-2e^{Tc_2}(64+Tc_3^2)))+96T^2c_2^{19}(24e^{T(c_2+c_3^2)}+8e^{2Tc_2}$$
$$(-66+197Tc_3^2)+e^{3Tc_2}(288+Tc_3^2(672+781Tc_3^2)))+576e^{2Tc_2}c_2^3c_3^{28}(1035281(-1+$$
$$e^{Tc_2})+9Tc_3^2(10077-222Tc_3^2+T^2c_3^4+4e^{Tc_2}(3607+Tc_3^2(123+Tc_3^2))))+48Tc_2^{18}$$
$$(-16(330e^{2Tc_2}+211e^{3Tc_2}+6e^{3Tc_3^2}+48e^{T(c_2+c_3^2)})+Tc_3^2(-456e^{T(c_2+c_3^2)}-24e^{2Tc_2}(-874$$
$$+1187Tc_3^2)-e^{3Tc_2}(11712+Tc_3^2(13136+9177Tc_3^2))))+72e^{2Tc_2}c_2^5c_3^{24}(69613544$$
$$(-1+e^{Tc_2})+Tc_3^2(11483725-538556Tc_3^2+7044T^2c_3^4+4e^{Tc_2}(4039583+Tc_3^2$$
$$(321190+9636Tc_3^2+81T^2c_3^4))))+72e^{2Tc_2}c_2^4c_3^{26}(-27642057(-1+e^{Tc_2})+2Tc_3^2$$
$$(-4(424365+610916e^{Tc_2})+9Tc_3^2(6350-56Tc_3^2-e^{Tc_2}(15052+Tc_3^2(272+T$$
$$c_3^2)))))+12e^{2Tc_2}c_2^6c_3^{22}(-818909178(-1+e^{Tc_2})+Tc_3^2(-48(3719500+4982193$$

$e^{Tc_2}) + Tc_3^2(11376429 - 208568Tc_3^2 - 2e^{Tc_2}(12700125 + Tc_3^2(560128 + 8091T$

$c_3^2))))) + 8c_2^{17}(-16(2556e^{2Tc_2} - 2993e^{3Tc_2} + 140e^{3Tc_3^2} + 297e^{T(c_2+c_3^2)}) + 3Tc_3^2(32$

$(6177(e^{2Tc_2} + 4183e^{3Tc_2} + 57e^{3Tc_3^2} + 570e^{T(c_2+c_3^2)}) + 3Tc_3^2(1136e^{T(c_2+c_3^2)} + 24e^{2Tc_2}$

$(-5314 + 4349Tc_3^2) + e^{3Tc_2}(73856 + 3Tc_3^2(17632 + 8275Tc_3^2))))) + 12e^{2Tc_2}c_2^7c_3^{20}$

$(1269260796(-1 + e^{Tc_2}) + Tc_3^2(363696354 + 87Tc_3^2(-361368 + 9493Tc_3^2) + 2$

$e^{Tc_2}(227606412 + Tc_3^2(30871824 + Tc_3^2(1870710 + 41371Tc_3^2))))) + 12c_2^{16}c_3^2$

$(16(35532e^{2Tc_2} - 39143e^{3Tc_2} + 716e^{3Tc_3^2} + 2895e^{T(c_2+c_3^2)}) + Tc_3^2(-192(17955e^{2Tc_2}$

$+ 12823e^{3Tc_2} + 79e^{3Tc_3^2} + 1002e^{T(c_2+c_3^2)}) + Tc_3^2(-11568e^{T(c_2+c_3^2)} - 8e^{2Tc_2}(-531606$

$+ 292319Tc_3^2) - 3e^{3Tc_2}(863392 + Tc_3^2(442192 + 147613Tc_3^2))))) + 2c_2^{11}c_3^{12}(-8$

$(542156499e^{2Tc_2} - 543758891e^{3Tc_2} + 25916e^{3Tc_3^2} + 1576476e^{T(c_2+c_3^2)}) + 3Tc_3^2(4$

$(308825073e^{2Tc_2} + 287653588e^{3Tc_2} + 9228e^{3Tc_3^2} + 368160e^{T(c_2+c_3^2)}) + 3Tc_3^2(6248$

$e^{T(c_2+c_3^2)} + 10e^{2Tc_2}(-11444452 + 1276647Tc_3^2) + 3e^{3Tc_2}(38353568 + Tc_3^2(6103656$

$+ 486067Tc_3^2))))) + c_2^8c_3^{18}(8(2346596811e^{2Tc_2} - 2346712235e^{3Tc_2} + 242e^{3Tc_3^2}+$

$115182e^{T(c_2+c_3^2)}) + 3Tc_3^2(-16(146977935e^{2Tc_2} + 170354944e^{3Tc_2} + 18e^{3Tc_3^2} + 1620$

$e^{T(c_2+c_3^2)}) + Tc_3^2(-2592e^{T(c_2+c_3^2)} - 4e^{2Tc_2}(-68874423 + 2647036Tc_3^2) - e^{3Tc_2}$

$(458657736 + Tc_3^2(36587344 + 1164515Tc_3^2))))) + 3c_2^{10}c_3^{14}(24(198161351e^{2Tc_2}$

$- 198371959e^{3Tc_2} + 1844e^{3Tc_3^2} + 208764e^{T(c_2+c_3^2)}) + Tc_3^2(-48(64083585e^{2Tc_2}+$

$63835615e^{3Tc_2} + 458e^{3Tc_3^2} + 22536e^{T(c_2+c_3^2)}) + Tc_3^2(-45576e^{T(c_2+c_3^2)} - 4e^{2Tc_2}$

$(-161720031 + 12914366Tc_3^2) - 3e^{3Tc_2}(253435304 + Tc_3^2(32481776+$

$1939967Tc_3^2))))) + 6c_2^{15}c_3^4(-48(223984e^{2Tc_2} - 236951e^{3Tc_2} + 1592e^{3Tc_3^2} + 11375$

$e^{T(c_2+c_3^2)}) + Tc_3^2(32(1160916e^{2Tc_2} + 871889e^{3Tc_2} + 2274e^{3Tc_3^2} + 36840e^{T(c_2+c_3^2)}) + Tc_3^2$

$(8472e^{T(c_2+c_3^2)} + 8e^{2Tc_2}(-4029894 + 1570091Tc_3^2) + e^{3Tc_2}(20961696 + Tc_3^2(8142048$

$+ 1997167Tc_3^2))))) + c_2^{14}c_3^6(16(23080896e^{2Tc_2} - 23799335e^{3Tc_2} + 54536e^{3Tc_3^2}+$

$663903e^{T(c_2+c_3^2)}) + 3Tc_3^2(-16(17284530e^{2Tc_2} + 13639313e^{3Tc_2} + 288264e^{T(c_2+c_3^2)})+$

$Tc_3^2(63672e^{T(c_2+c_3^2)} - 8e^{2Tc_2}(-22090578 + 6262307Tc_3^2) - e^{3Tc_2}(124669056 + Tc_3^2$

$(37983472 + 6975539Tc_3^2))))) + 3c_2^{12}c_3^{10}(112(12116733e^{2Tc_2} - 12203296e^{3Tc_2}+$

$2425e^{3Tc_3^2} + 84138e^{T(c_2+c_3^2)}) + Tc_3^2(-32(48511350e^{2Tc_2} + 42540175e^{3Tc_2} + 4965e^{3Tc_3^2}$
$+ 161322e^{T(c_2+c_3^2)}) + Tc_3^2(38064e^{T(c_2+c_3^2)} - 4e^{2Tc_2}(-141844929 + 21734224Tc_3^2) - e^{3Tc_2}$
$(497215896 + Tc_3^2(97803824 + 10298073Tc_3^2))))) + 12c_2^9c_3^{16}(-8(191637276e^{2Tc_2}$
$- 191694796e^{3Tc_2} + 253e^{3Tc_3^2} + 57267e^{T(c_2+c_3^2)}) + Tc_3^2(755185674e^{2Tc_2} + 809769256$
$e^{3Tc_2} + 948e^{3Tc_3^2} + 60264e^{T(c_2+c_3^2)} + Tc_3^2(4536e^{T(c_2+c_3^2)} + e^{2Tc_2}(-119111094 + 6664153$
$Tc_3^2 + 2e^{Tc_2}(83071068 + Tc_3^2(8478774 + 374113Tc_3^2)))))) + 12c_2^{13}c_3^8(-8(14997237$
$e^{2Tc_2} - 15230735e^{3Tc_2} + 10877e^{3Tc_3^2} + 222621e^{T(c_2+c_3^2)}) + Tc_3^2(36(5231033e^{2Tc_2}+$
$4343280e^{3Tc_2} + 1589e^{3Tc_3^2} + 41486e^{T(c_2+c_3^2)}) + Tc_3^2(-25152e^{T(c_2+c_3^2)} + e^{2Tc_2}$
$(-90592854 + 18886327Tc_3^2 + e^{Tc_2}(70563768 + Tc_3^2(17191812 + 2386973$
$Tc_3^2)))))))))/(3T^3c_2^8(2c_2 - 3c_3^2)^3(c_2 - c_3^2)^6(2c_2^2 - 5c_2c_3^2 + 2c_3^4)^4);$

$cccv(T) = \frac{1}{T^3c_2^7}(4e^{-4Tc_2}c_1^3(e^{3Tc_2}(-120(-1 + e^{Tc_2}) + Tc_2(60(1 + e^{Tc_2}) + Tc_2(12 + T$
$c_2 + e^{Tc_2}(-12 + Tc_2)))) + (8c_2^5(-192(e^{3Tc_2} + 3e^{T(2c_2+c_3^2)} + e^{T(c_2+3c_3^2)})Tc_2^{11} + 16200$
$e^{3Tc_2}(-1 + e^{Tc_2})c_3^{20} - 1620e^{3Tc_2}c_2c_3^{18}(53(-1 + e^{Tc_2}) + 10Tc_3^2) + 18c_2^2c_3^{16}(-6584e^{3Tc_2}$
$+ 11209e^{4Tc_2} - e^{6Tc_3^2} - 4374e^{T(2c_2+c_3^2)} - 250e^{T(c_2+3c_3^2)} + 30(244e^{3Tc_2} + 81e^{T(2c_2+c_3^2)} + 5$
$e^{T(c_2+3c_3^2)})Tc_3^2) - 48c_2^9c_3^2(156e^{3Tc_2} + 7e^{4Tc_2} - 3e^{6Tc_3^2} - 36e^{T(2c_2+c_3^2)} - 124e^{T(c_2+3c_3^2)} + 24$
$(25e^{3Tc_2} + 59e^{T(2c_2+c_3^2)} + 15e^{T(c_2+3c_3^2)})Tc_3^2) + 16c_2^{10}(28e^{3Tc_2} + e^{4Tc_2} - e^{6Tc_3^2} - 28$
$e^{T(c_2+3c_3^2)} + 6(37e^{3Tc_2} + 99e^{T(2c_2+c_3^2)} + 29e^{T(c_2+3c_3^2)})Tc_3^2) + 24c_2^8c_3^4(2228e^{3Tc_2} + 131$
$e^{4Tc_2} - 23e^{6Tc_3^2} - 972e^{T(2c_2+c_3^2)} - 1364e^{T(c_2+3c_3^2)} + 18(311e^{3Tc_2} + 639e^{T(2c_2+c_3^2)} + 139$
$e^{T(c_2+3c_3^2)})Tc_3^2) - 3c_2^3c_3^{14}(41552e^{3Tc_2} + 92373e^{4Tc_2} - 53e^{6Tc_3^2} - 122472e^{T(2c_2+c_3^2)} -$
$11400e^{T(c_2+3c_3^2)} + 6(25049e^{3Tc_2} + 15957e^{T(2c_2+c_3^2)} + 1245e^{T(c_2+3c_3^2)})Tc_3^2) + 9c_2^6c_3^8$
$(55900e^{3Tc_2} + 6833e^{4Tc_2} - 169e^{6Tc_3^2} - 43848e^{T(2c_2+c_3^2)} - 18716e^{T(c_2+3c_3^2)} + 14(6173$
$e^{3Tc_2} + 9111e^{T(2c_2+c_3^2)} + 1381e^{T(c_2+3c_3^2)})Tc_3^2 - 12c_2^7c_3^6(2(8824e^{3Tc_2} + 719e^{4Tc_2} - 49$
$e^{6Tc_3^2} - 5454e^{T(2c_2+c_3^2)} - 4040e^{T(c_2+3c_3^2)}) + 3(11051e^{3Tc_2} + 19453e^{T(2c_2+c_3^2)} + 3563$
$e^{T(c_2+3c_3^2)})Tc_3^2) + c_2^4c_3^{12}(551204e^{3Tc_2} + 246581e^{4Tc_2} - 593e^{6Tc_3^2} - 691092e^{T(2c_2+c_3^2)}$

$$- 106100e^{T(c_2+3c_3^2)} + 6(142943e^{3Tc_2} + 131787e^{T(2c_2+c_3^2)} + 12997e^{T(c_2+3c_3^2)})Tc_3^2)-$$

$$3c_2^5c_3^{10}(238628e^{3Tc_2} + 49543e^{4Tc_2} - 407e^{6Tc_3^2} - 229392e^{T(2c_2+c_3^2)} - 58372e^{T(c_2+3c_3^2)}$$

$$+ 2(168535e^{3Tc_2} + 201987e^{T(2c_2+c_3^2)} + 24895e^{T(c_2+3c_3^2)})Tc_3^2)))/((2c_2 - 5c_3^2)^2(c_2$$

$$- 3c_3^2)^2(2c_2 - 3c_3^2)^3(c_2 - 2c_3^2)^3(c_2 - c_3^2)^3(-2c_2 + c_3^2)^2) + (4e^{Tc_2}c_2^3(-144(e^{2Tc_2}$$

$$- 2e^{T(c_2+c_3^2)})T^2c_2^{12} - 3888e^{2Tc_2}(-1 + e^{Tc_2})c_3^{20} + 216e^{2Tc_2}c_2c_3^{18}(137(-1 + e^{Tc_2}) + 6(2$$

$$+ e^{Tc_2})Tc_3^2) + 54e^{2Tc_2}c_2^3c_3^{14}(3695(-1 + e^{Tc_2}) + 2Tc_3^2(628 + 301e^{Tc_2} - 47Tc_3^2))-$$

$$108e^{2Tc_2}c_2^2c_3^{16}(929(-1 + e^{Tc_2}) + 2Tc_3^2(92 + 45e^{Tc_2} - 3Tc_3^2)) + 48Tc_2^{11}(-3e^{T(c_2+c_3^2)}$$

$$(-9 + 22Tc_3^2) + e^{2Tc_2}(27 + e^{Tc_2} + 33Tc_3^2)) + 3c_2^5c_3^{10}(6(-6483e^{2Tc_2} + 12551e^{3Tc_2}+$$

$$7e^{3Tc_3^2} - 6075e^{T(c_2+c_3^2)}) + Tc_3^2(e^{2Tc_2}(80478 + 27164e^{Tc_2} - 7905Tc_3^2) - 324e^{T(c_2+c_3^2)}$$

$$(-69 + 14Tc_3^2))) + 8c_2^{10}(-297e^{2Tc_2} - 20e^{3Tc_2} - 7e^{3Tc_3^2} + 324e^{T(c_2+c_3^2)} + 3Tc_3^2(3$$

$$e^{T(c_2+c_3^2)}(-189 + 208Tc_3^2) - e^{2Tc_2}(585 + 29e^{Tc_2} + 303Tc_3^2))) + 36c_2^9c_3^2(8(75e^{2Tc_2}$$

$$+ 8e^{3Tc_2} + e^{3Tc_3^2} - 84e^{T(c_2+c_3^2)}) + Tc_3^2(e^{T(c_2+c_3^2)}(1659 - 1102Tc_3^2) + e^{2Tc_2}(1809+$$

$$125e^{Tc_2} + 490Tc_3^2))) + 3c_2^6c_3^8(-2(10377e^{2Tc_2} + 22685e^{3Tc_2} + 67e^{3Tc_3^2} - 33129$$

$$e^{T(c_2+c_3^2)}) + 3Tc_3^2(342e^{T(c_2+c_3^2)}(-51 + 13Tc_3^2) + e^{2Tc_2}(-33882 - 7852e^{Tc_2} + 1511$$

$$Tc_3^2))) + 9c_2^7c_3^6(14166e^{2Tc_2} + 6184e^{3Tc_2} + 74e^{3Tc_3^2} - 20424e^{T(c_2+c_3^2)} + Tc_3^2(e^{2Tc_2}$$

$$(30870 + 4684e^{Tc_2} + 1063Tc_3^2) - 4e^{T(c_2+c_3^2)}(-5442 + 1807Tc_3^2))) + 2c_2^4c_3^{12}$$

$$(117207e^{2Tc_2} - 128863e^{3Tc_2} - 8e^{3Tc_3^2} + 11664e^{T(c_2+c_3^2)} + 3Tc_3^2(324e^{T(c_2+c_3^2)}(-6+$$

$$Tc_3^2(324e^{T(c_2+c_3^2)}(-6 + Tc_3^2) + e^{2Tc_2}(-24552 - 10639e^{Tc_2} + 2631Tc_3^2))) + 3c_2^8c_3^4$$

$$(-25686e^{2Tc_2} - 4928e^{3Tc_2} - 202e^{3Tc_3^2} + 30816e^{T(c_2+c_3^2)} + 3Tc_3^2(-e^{2Tc_2}(18882+$$

$$1898e^{Tc_2} + 2513Tc_3^2) + 2e^{T(c_2+c_3^2)}(-7875 + 3571Tc_3^2)))))/((c_2 - c_3^2)^5(-2c_2+$$

$$c_3^2)^2(2c_2^2 - 7c_2c_3^2 + 6c_3^4)^3) + 2e^{Tc_2}c_2(\frac{1}{(c_2 - c_3^2)^5(2c_2 - c_3^2)^3}(6e^{Tc_2}c_2(6e^{2Tc_2}(-c_2$$

$$+ c_3^2)^5(-2c_2(-5 + Tc_2) + (-4 + Tc_2)c_3^2) + 6e^{Tc_3^2}c_2^5(2c_2(5 + Tc_2) - 3(2 + Tc_2) - 3$$

$$(2 + Tc_2)c_3^2 + Tc_3^4) + e^{Tc_2}(-2c_2 + c_3^2)^3(-Tc_2^4(12 + T^2c_2^2) + 3c_2^2(12 + Tc_2(8 + T$$

$$c_2(2 + Tc_2)))c_3^2 - 3c_2(2 + Tc_2)(6 + Tc_2(2 + Tc_2))c_3^4 + (24 + Tc_2(18 + Tc_2(6+$$

$$Tc_2)))c_3^6))) + \frac{1}{(c_2 - c_3^2)^4(2c_2 - c_3^2)^3}(3e^{Tc_2}(-6e^{Tc_3^2}c_2^6 + 3e^{2Tc_2}(c_2 - c_3^2)^4(2c_2^2(49$$

$$+ 2Tc_2)) - 2c_2(44 + Tc_2(-17 + 2Tc_2))c_3^2 + (20 + Tc_2(-8 + Tc_2))c_3^4) - e^{Tc_2}(-2$$

$$c_2 + c_3^2)^3(-c_2^3(36 + Tc_2(24 + Tc_2(6 + Tc_2))) + 3c_2^2(3 + Tc_2)(14 + Tc_2(4 + Tc_2))$$

$$c_3^2 - 3c_2(48 + Tc_2(30 + Tc_2(8 + Tc_2)))c_3^4 + (60 + Tc_2(36 + Tc_2(9 + Tc_2)))c_3^6)))$$

$$\frac{1}{(c_2 - c_3^2)^6(2c_2 - c_3^2)^3}(4e^{Tc_2}c_2^2(6e^{2Tc_2}(c_2 - c_3^2)^6 - e^{Tc_2}(-2c_2 + c_3^2)^3(-c_2^3(-36+$$

$$Tc_2(24 + Tc_2(-6 + Tc_2))) + 3c_2^2(6 + Tc_2(6 + Tc_2(-3 + Tc_2)))c_3^2 - 3T^3c_2^4c_3^4+$$

$$(6 + Tc_2(6 + Tc_2(3 + Tc_2)))c_3^6) - 3e^{Tc_3^2}c_2^4(2c_2^2(49 + 2Tc_2(9 + Tc_2)) - 2c_2(54$$

$$+ Tc_2(37 + 6Tc_2))c_3^2 + (30 + Tc_2(48 + 13Tc_2))c_3^4 - 2T(5 + 3Tc_2)c_3^6 + T^2c_3^8)))+$$

$$(3c_2^4(-9e^{T(c_2+c_3^2)}c_2^2(2c_2 - 3c_3^2)^3(2c_2^4(9 + 2Tc_2(1 + Tc_2)) - 14c_2^3(6 + Tc_2(3 + 2T$$

$$c_2))c_3^2 + c_2^2(162 + Tc_2(128 + 77Tc_2))c_3^4 - 2c_2(60 + Tc_2(79 + 53Tc_2))c_3^6+$$

$$(30 + 7Tc_2(12 + 11Tc_2))c_3^8 - 4T(4 + 7Tc_2)c_3^{10} + 4T^2c_3^{12}) + 2(e^{3Tc_2}(2c_2 - 3c_3^2)^3$$

$$(c_2 - 2c_3^2)^4(c_2 - c_3^2)^2 + 9e^{2Tc_2}(c_2 - 2c_3^2)^4(-2c_2 + c_3^2)^3(2c_2^2(-3 + Tc_2) - c_2(-6$$

$$+ 5Tc_2)c_3^2 + 3(1 + Tc_2)c_3^4) + e^{3Tc_3^2}c_2^2(c_2 - c_3^2)^2(2c_2 - c_3^2)^3(2c_2^2(13 + 3Tc_2) - c_2$$

$$(70 + 27Tc_2)c_3^2 + 3(15 + 13Tc_2)c_3^4 - 18Tc_3^6))))/((c_2^2 - 3c_2c_3^2 + 2c_3^4)^4(4c_2^2 - 8$$

$$c_2c_3^2 + 3c_3^4)^3)))V_0);$$

$$ccvv(T) = (12e^{-4Tc_2}c_1^2(64(-2e^{3Tc_2} + e^{4Tc_2} + e^{T(2c_2+c_3^2)})T^2c_2^{19} - 388800e^{3Tc_2}(-1+$$

$$e^{Tc_2})c_3^{34} + 38880e^{3Tc_2}c_2c_3^{32}(123(-1 + e^{Tc_2}) + 5(1 + e^{Tc_2})Tc_3^2) - 64Tc_2^{18}(2(-3e^{3Tc_2}+$$

$$e^{4Tc_2} + 3e^{T(2c_2+c_3^2)} - e^{T(c_2+3c_3^2)}) + (-47e^{3Tc_2} + 28e^{4Tc_2} + 19e^{T(2c_2+c_3^2)})Tc_3^2) + c_2^8c_3^{18}(-4$$

$$(-87180526e^{3Tc_2} + 82867745e^{4Tc_2} + 6493e^{6Tc_3^2} + 4491477e^{T(2c_2+c_3^2)} - 185189$$

$$e^{T(c_2+3c_3^2)}) - 2(43420665e^{3Tc_2} + 166924160e^{4Tc_2} - 2949480e^{T(2c_2+c_3^2)} + 66271$$

$$e^{T(c_2+3c_3^2)})Tc_3^2 - 9(644697e^{3Tc_2} + 9096265e^{4Tc_2} + 27398e^{T(2c_2+c_3^2)})T^2c_3^4) + 432$$

$$e^{3Tc_2}c_2^3c_3^{28}(211401(-1 + e^{Tc_2}) + Tc_3^2(28157 + 33917e^{Tc_2} + 45(-18 + 23e^{Tc_2})Tc_3^2))$$

$$+ 6c_2^5c_3^{24}(-59482779e^{3Tc_2} + 59459979e^{4Tc_2} + 16e^{6Tc_3^2} + 23409e^{T(2c_2+c_3^2)} - 625$$

$$e^{T(c_2+3c_3^2)} + Tc_3^2(13607785e^{3Tc_2} + 21724033e^{4Tc_2} + 150e^{T(c_2+3c_3^2)} - 641820e^{3Tc_2}Tc_3^2$$

$$+ 1830432e^{4Tc_2}Tc_3^2 + 270e^{T(2c_2+c_3^2)}(-54 + 5Tc_3^2))) + 432e^{3Tc_2}c_2^2c_3^{30}(-62074(-1+$$

$e^{Tc_2}) - 15Tc_3^2(354 - 5Tc_3^2 + e^{Tc_2}(384 + 5Tc_3^2))) + c_2^6 c_3^{22}(-4(-113199214e^{3Tc_2} +$

$112764754e^{4Tc_2} + 316e^{6Tc_3^2} + 445419e^{T(2c_2+c_3^2)} - 11275e^{T(c_2+3c_3^2)} + Tc_3^2(-$

$121252158e^{3Tc_2} - 234508356e^{4Tc_2} - 10170e^{T(c_2+3c_3^2)} + 4852321e^{3Tc_2}Tc_3^2 -$

$29139145e^{4Tc_2}Tc_3^2 - 972e^{T(2c_2+c_3^2)}(-821 + 65Tc_3^2))) + 16c_2^{16}c_3^2(-4(-113e^{3Tc_2} + 33$

$e^{4Tc_2} + 14e^{6Tc_3^2} + 141e^{T(2c_2+c_3^2)} - 75e^{T(c_2+3c_3^2)} + Tc_3^2(6798e^{3Tc_2} - 3236e^{4Tc_2} + 890$

$e^{T(c_2+3c_3^2)} + 12395e^{3Tc_2}Tc_3^2 - 11643e^{4Tc_2}Tc_3^2 - 28e^{T(2c_2+c_3^2)}(159 + 104Tc_3^2))) + 16c_2^{17}$

$(4(-4e^{3Tc_2} + e^{4Tc_2} + e^{6Tc_3^2} + 6e^{T(2c_2+c_3^2)} - 4e^{T(c_2+3c_3^2)}) + Tc_3^2(-600e^{3Tc_2} + 236e^{4Tc_2} -$

$128e^{T(c_2+3c_3^2)} - 1986e^{3Tc_2}Tc_3^2 + 1455e^{4Tc_2}Tc_3^2 + 3e^{T(2c_2+c_3^2)}(164 + 209Tc_3^2))) + c_2^{12}c_3^{10}$

$(-4(-3891797e^{3Tc_2} + 2321690e^{4Tc_2} + 22193e^{6Tc_3^2} + 1873497e^{T(2c_2+c_3^2)} - 325583$

$e^{T(c_2+3c_3^2)}) + Tc_3^2 - 29961883e^{4Tc_2}Tc_2^3 + 22e^{T(2c_2+c_3^2)}(-145704 + 8767Tc_3^2)))$

$- c_2^{10}c_3^{14}(4(-28360072e^{3Tc_2} + 22847352e^{4Tc_2} + 23842e^{6Tc_3^2} + 5996679e^{T(2c_2+c_3^2)} - 507801$

$e^{T(c_2+3c_3^2)} + Tc_3^2(-17859534e^{3Tc_2} + 176406076e^{4Tc_2} + 173630e^{T(c_2+3c_3^2)} + 6877709$

$e^{3Tc_2}Tc_3^2 + 80441787e^{4Tc_2}Tc_3^2 - 28e^{T(2c_2+c_3^2)}(116169 + 13403Tc_3^2))) + c_2^9 c_3^{16}(2(-$

$110238103e^{3Tc_2} + 98260745e^{4Tc_2} + 29854e^{6Tc_3^2} + 12690201e^{T(2c_2+c_3^2)} - 742697$

$e^{T(c_2+3c_3^2)}) + Tc_3^2(26349978e^{3Tc_2} + 273581950e^{4Tc_2} + 209156e^{T(c_2+3c_3^2)} +$

$9882314e^{3Tc_2}Tc_3^2 + 91836531e^{4Tc_2}Tc_3^2 + e^{T(2c_2+c_3^2)}(-6514884 + 14287c_3^2))) +$

$4c_2^{14}c_3^6(-4(-45770e^{3Tc_2} + 18973e^{4Tc_2} + 1313e^{6Tc_3^2} + 37614e^{T(2c_2+c_3^2)} - 12130$

$e^{T(c_2+3c_3^2)} + Tc_3^2(826170e^{3Tc_2} - 640130e^{4Tc_2} + 34238e^{T(c_2+3c_3^2)} + 548745e^{3Tc_2}Tc_3^2$

$- 1037394e^{4Tc_2}Tc_3^2 - 3e^{T(2c_2+c_3^2)}(102450 + 17549Tc_3^2))) + c_2^7 c_3^{20}(-445792586$

$e^{3Tc_2} + 438195378e^{4Tc_2} + 7448e^{6Tc_3^2} + 7829190e^{T(2c_2+c_3^2)} - 239430e^{T(c_2+3c_3^2)} +$

$Tc_2^3(126623202e^{3Tc_2} + 318513862e^{4Tc_2} + 49304e^{T(c_2+3c_3^2)} - 1269508e^{3Tc_2}Tc_3^2 +$

$56247703e^{4Tc_2}Tc_3^2 + 9e^{T(2c_2+c_3^2)}(-330912 + 21109Tc_3^2))) + 4c_2^{15}c_3^4(8(-2915e^{3Tc_2}$

$+ 1009e^{4Tc_2} + 176e^{6Tc_3^2} + 2979e^{T(2c_2+c_3^2)} - 1249e^{T(c_2+3c_3^2)}) + Tc_3^2(-184152e^{3Tc_2}$

$+ 109520e^{4Tc_2} - 14048e^{T(c_2+3c_3^2)} - 201398e^{3Tc_2}Tc_3^2 + 256995e^{4Tc_2}Tc_3^2 + e^{T(2c_2+c_3^2)}$

$(93096 + 32627Tc_3^2))) + 12e^{3Tc_2}c_2^4c_3^{26}(-17669509(-1 + e^{Tc_2}) - 6Tc_3^2(535452$

$- 22097Tc_3^2 + e^{Tc_2}(732954 + 39377Tc_3^2))) + c_2^{13}c_3^8(4(-985480e^{3Tc_2} + 491223$

$e^{4Tc_2} + 12943e^{6Tc_3^2} + 633714e^{T(2c_2+c_3^2)} - 152400e^{T(c_2+3c_3^2)} + Tc_3^2(-10240008$

$e^{3Tc_2} + 10966076e^{4Tc_2} - 206048e^{T(c_2+3c_3^2)} - 3902118e^{3Tc_2}Tc_3^2 + 12682297$

$e^{4Tc_2}Tc_3^2 + e^{T(2c_2+c_3^2)}(2594412 + 127181Tc_3^2))) + c_2^{11}c_3^{12}(2(-23599099e^{3Tc_2}+$

$16584631e^{4Tc_2} + 54280e^{6Tc_3^2} + 7930125e^{T(2c_2+c_3^2)} - 969937e^{T(c_2+3c_3^2)}) + Tc_3^2$

$(-30238938e^{3Tc_2} + 89558314e^{4Tc_2} + 4928e^{T(c_2+3c_3^2)} + 327648e^{3Tc_2}Tc_3^2+$

$55366833e^{4Tc_2}Tc_3^2 - 3e^{T(2c_2+c_3^2)}(-387568 + 160051Tc_3^2))))V_0^2/(T^3c_2^5(2c_2-$

$5c_3^2)^2(c_2 - 3c_3^2)^2(2c_2 - 3c_3^2)^2(c_2 - 2c_3^2)^4(c_2 - c_3^2)^5(2c_2 - c_3^2)^3);$

$cvvv(T) = (8e^{-6Tc_2}c_1(4(-3e^{5Tc_2} + e^{6Tc_2} - e^{3T(c_2+c_3^2)} + 3e^{T(4c_2+c_3^2)})Tc_2^{10} + 2160e^{5Tc_2}$

$(-1 + e^{Tc_2})c_3^{18} - 216e^{5Tc_2}c_2c_3^{16}(49(-1 + e^{Tc_2}) + 5(1 + e^{Tc_2})Tc_3^2) + 36e^{5Tc_2}c_2^2c_3^{14}(623$

$(-1 + e^{Tc_2}) + (137 + 157e^{Tc_2})Tc_3^2) + c_2^4c_3^{10}(6(-4705e^{5Tc_2} + 3409e^{6Tc_2} - 143$

$e^{3T(c_2+c_3^2)} + 1431e^{T(4c_2+c_3^2)} + 8e^{2T(c_2+3c_3^2)} + (2619e^{5Tc_2} + 16703e^{6Tc_2} + 127e^{3T(c_2+c_3^2)}-$

$1809e^{T(4c_2+c_3^2)})Tc_3^2) - 2c_2^3c_3^{12}(-15133e^{5Tc_2} + 13513e^{6Tc_2} - 85e^{3T(c_2+c_3^2)} + 1701$

$e^{T(4c_2+c_3^2)} + 4e^{2T(c_2+3c_3^2)} + 3(1235e^{5Tc_2} + 2143e^{6Tc_2} + 5e^{3T(c_2+c_3^2)} - 135e^{T(4c_2+c_3^2)})Tc_3^2)$

$- 6c_2^5c_3^8(-2971e^{5Tc_2} + 1684e^{6Tc_2} - 271e^{3T(c_2+c_3^2)} + 1539e^{T(4c_2+c_3^2)} + 19e^{2T(c_2+3c_3^2)}+$

$(-775e^{5Tc_2} + 2278e^{6Tc_2} + 26e^{3T(c_2+c_3^2)} - 129e^{T(4c_2+c_3^2)})Tc_3^2) - 4c_2^9(-4e^{5Tc_2} + e^{6Tc_2}$

$- 4e^{3T(c_2+c_3^2)} + 6e^{T(4c_2+c_3^2)} + e^{2T(c_2+3c_3^2)} + 9(-5e^{5Tc_2} + 2e^{6Tc_2} - e^{3T(c_2+c_3^2)} + 4$

$e^{T(4c_2+c_3^2)})Tc_3^2) + 6c_2^6c_3^6(-1221e^{5Tc_2} + 544e^{6Tc_2} - 249e^{3T(c_2+c_3^2)} + 903e^{T(4c_2+c_3^2)}$

$+ 23e^{2T(c_2+3c_3^2)} + (-1070e^{5Tc_2} + 1219e^{6Tc_2} - e^{3T(c_2+c_3^2)} + 188e^{T(4c_2+c_3^2)}Tc_3^2)+$

$3c_2^8c_3^2(2(-44e^{5Tc_2} + 13e^{6Tc_2} - 28e^{3T(c_2+c_3^2)} + 54e^{T(4c_2+c_3^2)} + 5e^{2T(c_2+3c_3^2)} + (-373$

$e^{5Tc_2} + 189e^{6Tc_2} - 39e^{3T(c_2+c_3^2)} + 223e^{T(4c_2+c_3^2)})Tc_3^2) - 6c_2^7c_3^4(-310e^{5Tc_2} + 111$

$e^{6Tc_2} - 118e^{3T(c_2+c_3^2)} + 302e^{T(4c_2+c_3^2)} + 15e^{2T(c_2+3c_3^2)} + (-610e^{5Tc_2} + 427e^{6Tc_2}-$

$25e^{3T(c_2+c_3^2)} + 240e^{T(4c_2+c_3^2)})Tc_3^2))V_0^3/(T^3c_2^3(c_2-3c_3^2)^2(c_2-2c_3^2)^3(c_2-c_3^2)^3$

$(8c_2^3 - 36c_2^2c_3^2 + 46c_2c_3^4 - 15c_3^6));$

$vvvv(T) = (4e^{-4Tc_2}(2(-4e^{3Tc_2} + e^{4Tc_2} + e^{6Tc_3^2} + 6e^{T(2c_2+c_3^2)} - 4e^{T(c_2+3c_3^2)})c_2^3 - 3(-16$

$e^{3Tc_2} + 5e^{4Tc_2} + e^{6Tc_3^2} + 18e^{T(2c_2+c_3^2)} - 8e^{T(c_2+3c_3^2)})c_2^2c_3^2 + (-82e^{3Tc_2} + 37e^{4Tc_2} + e^{6Tc_3^2} +$

$54e^{T(2c_2+c_3^2)} - 10e^{T(c_2+3c_3^2)})c_2c_3^4 - 30e^{3Tc_2}(-1+e^{Tc_2})c_3^6)V_0^4)/(T^3c_2(2c_2-5c_3^2)(c_2 -$

$3c_3^2)(2c_2-3c_3^2)(c_2-2c_3^2)(c_2-c_3^2)(2c_2-c_3^2));$

Cálculo del cuarto momento de la varianza integrada:

$momquattro(T) = \frac{cccc(T)}{T} + \frac{cccv(T)}{T} + \frac{ccvv(T)}{T} + \frac{cvvv(T)}{T} + \frac{vvvv(T)}{T};$

$$mom4compcentrale(T) = -4momtre(T) * momuno(T) + 6momdue(T) * momuno(T)^2 - 3momuno(T)^4;$$

Cálculo del cuarto momento central de la varianza integrada:

momquattroc(T)=momquattro(T)+mom4compcentrale(T);

Cálculo del valor de cada momento:

price2[T, k] = BlackScholesCall[S_0, k,Sqrt[momuno[T]],r,d,T] + 0.5*momduec[T]*der2[T, k];

price3[T, k] = BlackScholesCall[S_0, k,Sqrt[momuno[T]],r,d,T] + 0.5*momduec[T]*der2[T, k] + 1/6* momtrec[T]*der3[T, k];

price4[T, k] = BlackScholesCall[S_0, k,Sqrt[momuno[T]],r,d,T] + 0.5*momduec[T]*der2[T, k] + 1/6* momtrec[T]*der3[T, k] + (1/24)* momquattroc[T]*der4[T, k]

Bibliografía

Arnold, L. (1974). Stochastic Differential Equations: Theory and applications, Wiley, New York, NY.

Ball, C.A., Roma, A. (1994). Stochastic Volatility Option Pricing, *Journal of Financial Quantitative Analysis*, 29, 589-607.

Billingsley, P. (1968). Convergence of Probability Measures, Wiley, New York, NY.

Black, F., Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economics*, 81, 637-659.

Bodurtha, J., Courtadon, G. (1987). Tests of the American Option Pricing Model in the Foreign Currency Option Market, *Journal of Financial Quantitative Analysis*, 22, 153-167.

Bollerslev, T., (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.

Bollerslev, T., Zhou, H., (2002). Estimating Stochastic Volatility Diffusion Using Conditional Moments of Integrated Volatility, *Journal of Econometrics*, 109, 33-65.

Boyle, P., Broadie, M., Glasserman, P., (1997). Monte Carlo Methods for Security Pricing, *Journal of Economical Dynamics Control*, 21, 1267-1321.

Brennan, M. J. (1979). The Pricing of Contingent Claims in Discrete Time Models, *Journal of Finance*, 34, 5368.

Chernov, M., Ghysels, E. (2000). A Study Towards a Unified Approach to the Joint Estimation of Objective and Risk-Neutral Measures for the Purpose of Options Valuation, *Journal of Financial Economics*, 56, 407-458.

Chesney, M., Scott, L.O. (1989). Pricing European Currency Options: A Comparison of the Modified Black-Scholes Model and a Random Variance Model, *Journal of Financial Quantitative Analysis*, 24, 267-284.

Cont, R. (2001). Empirical Properties of Asset Returns: Stylized Facts and Statistical Issues, *Quantitative Finance*, 1, 223-236.

Cox, D.R., Miller, H.D. (1972). The Theory of Stochastic Processes, Chapman & Hall, London.

Dacorogna, M.M., Genay, R., Müller, U. A., Olsen, R.B., Pictet, O.V. (2001). An Introduction to High-Frequency Finance, Academic Press, San Diego, CA.

Duan, J. (1995). The GARCH option pricing model. Mathematical Finance, 5, 1332.

Duan, J., Gauthier, G., & Simonato, J. (1999). An Analytical Approximation for the GARCH Option Pricing Model, *Journal of Computational Finance*, 2, 75116.

Eisenberg, Lawrence (1985). "Relative Pricing from No-Arbitrage Conditions: Random Variance Option Pricing", Working Paper, University of Illinois, Department of Finance.

Engle, R. F. Bollerslev, T. (1986). Modelling the Persistence of Conditional Variances, *Econometric Review*, 5, 1-50.

Engle, R. F., Lee, G.G.J. (1996). Estimating Diffusion Models of Stochastic Volatility. In: Rossi, P.E. (Ed.), Modeling Stock Market Voletility: Bridging the Gap to Continuous Time, Academic Press, New York, pp. 333-384.

Ethier, S.N. and T.G. Kurtz (1986). Markov Processes: Characterization and Convergence, Wiley, New York, NY.

Fama, E. (1965). The Behaviour of Stock Prices, *Journal of Business*, 38, 34-105.

Garcia, R., Lewis, M.A., Renault, E. (2001). Estimation of Objective and Risk-Neutral Distributions Based on Moments of the Integrated Volatility, Working Paper, Cirano.

Garman (1976). "A General Theory of Asset Valuation under Diffusion State Processes", Working Paper No. 50, University of California, Berkeley.

Geske, R. (1979). "The Valuation of Compound Options", *Journal of Financial Economics* 7, 63-81.

Gesser, V.,Poncet, P. (1997). Volatility Patterns: Theory and Some Evidence from the Dollar-Mark Option Market, *Journal of Derivatives*, 5, 46-65.

Guo, D. (1996). The predictive power of implied stochastic variance from currency options, *Journal of Futures Markets*, 16, 915-942.

Guo, D. (1998). The risk premium of volatility implicit in currency options, *Journal of Business Economical Statistics*, 16, 498-507.

Heston, S. (1993). A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options, *Review of Financial Studies*, 6, 327-343.

Hull, J., White, A. (1987a). The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities, *Journal of Finance*, 42, 281-300.

Hull, J., White, A. (1987b). Hedging the Risks from Writing Foreign Currency Options, *Journal of International Money Finance*, 42, 131-152.

Hull, J., White, A. (1988). An Analysis of the Bias in Option Pricing Caused by a Stochastic Volatility, *Journal of International Economics*, 24, 129-145.

Johnson, N. L. and S. Kotz (1970). Distributions in Statistics: Continuous Univariate Distributions - I, Wiley, New York, NY.

Johnson, N. L. (1979). "Option Pricing When the Variance is Changing", Graduate School of Management, Working Paper, 11-79, University of California, Los Angeles.

Johnson and David Shanno (1985). "Option Pricing When the Variance is Changing", Graduate School of Administration, Working Paper, 85-07, University of California, Davis.

Jones, C.S. (2003). The Dynamics of Stochastic Volatility: Evidence from Underlying and Options Market, *Journal of Economy*, 116, 181-224.

Jorion, P. (1995). Predicting Volatility in the Foreign Exchange Market, *Journal of Finance*, 50, 507-528.

Karatzas, I., Shreve, S. (1991). Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer, New York.

Kloeden, P.E., Platen, E. (1999). Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Springer, New York.

Kushner, H.J. (1984). Approximation and Weak Convergence Methods for Random Processes, with Applications to Stochastic Systems Theory, M.I.T. Press, Cambridge, MA.

Lewis, A.L. (2000a). Option Valuation Under Stochastic Volatility, Finance Press, CA, USA.

Lewis, A.L. (2000b). Analytical Expressions for the Moments of the Integrated Volatility in Affine Stochastic Volatility Models, Working paper, Cirano.

Liptser, R.S. and A.N. Shiryayev (1977). Statistics of Random Processes, Vol. I, Springer Verlag, New York, NY.

Mandelbrot, B. (1963). The Variation of Certain Speculative Prices, *Journal of Business*, 36, 394419.

Melenberg, B., Werker, B.J.M. (2001). The Pricing of Volatility Risk: an Empirical Example, Working paper, Tilburg University.

Melino, A., Turnbull, S.M. (1990). Pricing Foreign Currency Options with Stochastic Volatility, *Journal of Econometrics*, 45, 239265.

Merton, R.C. (1973). Theory of Rational Option Pricing, *Bell Journal of Economics Management Science*, 4, 141183.

Merton (January 1976). "Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous", *Journal of Financial Economics*, 3, 125-144.

Nelson, D.B. (1988). Stationarity and Persistence in the GARCH(1, 1) Model, Graduate School of Business, working paper series in economics and econometrics, no. 88-68, forthcoming in Econometric Theory, University of Chicago, Chicago, IL,.

Nelson, D.B. (1990). ARCH Models as Diffusion Approximations, *Journal of Econometrics*, 45, 738.

Renault, E., Touzi, N. (1996). Option Hedging and Implied Volatilities in a Stochastic Volatility Model, *Mathematical Finance*, 6, 279302.

Rubinstein, M. (1976). The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options, *Bell Journal of Economics and Management Science*, 7, 407 425.

Sabanis, S. (2002). Stochastic volatility, *International Journal of Theoretical Applicational Finance*, 5, 515530.

Scott., Louis O. (1986). "Option Pricing When the Variance Changes Randomly: Theory and an Application", Working Paper, University of Illinois, Department of Finance.

Scott, L.O. (1987). Option Pricing when the Variance Change Randomly: Theory, Estimation and an Application, *Journal of Financial Quantitative Analysis*, 22, 419438.

Stroock, D.W. and S.R.S. Varadhan (1979). Multidimensional Diffusion Processes, Springer Verlag, Berlin.

Taylor, S.J. (1994). Modeling Stochastic Volatility: a Review and Comparative Study, *Mathematical Finance*, 4, 183204.

Taylor, S.J., Xu, X. (1994). The Magnitude of Implied Volatility Smiles: Theory and Empirical Evidence for Exchange Rates, *Review of Futures Markets*, 13, 355380.

Wiggins, James B. (1985). "Stochastic Variance Option Pricing", Sloan School of Management, Massachusetts Institute of Technology.

Wiggins, J. (1987). Option Values under Stochastic Volatility, *Journal of Financial Economics*, 19, 351372.

Wong, E. (1964). The Construction of a Class of Stationary Markoff Processes, In: Belleman, R. (Ed.), 16th Symposium in Applied Mathematics, Stochastic Processes in Mathematical Physics and Engineering.American Mathematical Society, Providence, pp. 264276.