TECNOLÓGICO DE MONTERREY

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Campus Ciudad de México

Endogeneidad de los sistemas bancario y financiero

en el sistema económico

TESIS QUE PARA RECIBIR EL TÍTULO DE

DOCTORADO EN CIENCIAS FINANCIERAS

PRESENTA

Abigail Rodríguez Nava

Director de tesis:

Dr. Francisco Venegas Martínez

Codirector:

Dr. Igor P. Rivera González

Lectores:

Dr. José Antonio Núñez Mora, Dr. Fernando Cruz Aranda

México D. F., 20 Marzo 2009

RESUMEN

El problema de investigación consiste en mostrar formalmente que las características de los sistemas bancario y financiero inciden en las decisiones de los agentes económicos. Se trata de una investigación teórica que es relevante porque no existe una formalización de consenso en la que se incorporen características de los mercados financieros como son el carácter estocástico de los precios, o bien, la probabilidad de incumplimiento en las obligaciones contraídas.

Además, la gran mayoría de la literatura especializada sólo considera el estudio de agentes económicos representativos (consumidores, firmas, gobierno o bancos), pero sin vincular su comportamiento entre sí, ni con el resto del sistema económico; aquí se pretende se relacionar las decisiones de un agente económico con las decisiones de otros a través del planteamiento de sus problemas objetivo.

En primer lugar, presentamos y comparamos los modelos alternativos que explican las decisiones de producción de una firma competitiva cuando existe incertidumbre en los precios, ya sea respecto a los insumos o respecto al bien elaborado. La comparación y análisis de las distintas posibilidades de formalización se complementa con dos propuestas: un modelo de optimización cuando la tasa de interés real es estocástica, y un modelo en el cual la decisión de la firma incluye elegir entre opciones financieras tipo europeo.

También se desarrolla un modelo de equilibrio general en el que las decisiones de los agentes consumidores y firmas está sujeta a la incertidumbre existente en la tasa de interés, se asume que el comportamiento de ésta puede describirse a través de un movimiento geométrico browniano estándar. El modelo conserva las hipótesis tradicionales acerca del comportamiento optimizador de firmas y consumidores. Como resultados se encuentra que la demanda y la oferta de capital y trabajo reproducen las características de los modelos deterministas; asimismo se determinan las trayectorias óptimas de consumo y producción.

Por último, se propone un modelo de optimización que muestra las decisiones de un banco comercial representativo en un escenario con incertidumbre; ésta se expresa en depósitos y créditos bancarios estocásticos, así como en la probabilidad de que los clientes receptores de los créditos, incumplan con sus compromisos de pago. El modelo determina los precios de los servicios bancarios que permiten maximizar las ganancias de este agente económico.

1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo introductorio puntualizamos el problema de investigación que orienta este documento y subrayamos su justificación. También presentamos las hipótesis generales de trabajo que sustentan la investigación y señalamos cómo se ha organizado ésta. Finalmente, precisamos las aportaciones que hemos realizado en cada fase, nuestra principal contribución al problema que nos atañe, y esbozamos los resultados obtenidos.

1. 1 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El problema de investigación consiste en mostrar formalmente que las características de los sistemas bancario y financiero inciden en las decisiones de los agentes económicos.

Aun cuando en gran parte de la literatura económico – financiera, y sobre todo la de carácter empírico, se considera al sistema bancario como parte del sistema financiero, en esta investigación elegimos hacer una distinción entre ambos con el fin recuperar las características esenciales de cada uno de ellos.

Así, entendemos al sistema bancario como el conjunto de instituciones, agentes y reglamentaciones, cuya función primordial es la captación de recursos del público en forma de ahorro y el otorgamiento de créditos. En cambio, definimos al sistema financiero como el conjunto de instituciones, agentes y reglamentaciones que tiene por objeto la administración (intermediación y transferencia) del riesgo asociado a instrumentos financieros.

Se trata de una investigación teórica que es relevante porque no existe una formalización de consenso en la que se incorporen características de los mercados financieros como son el carácter estocástico de los precios, o bien, la probabilidad de incumplimiento en las obligaciones contraídas.

Además, la gran mayoría de la literatura especializada sólo considera el estudio de agentes económicos representativos (consumidores, firmas, gobierno o bancos), pero sin vincular su comportamiento entre sí, ni con el resto del sistema económico; aquí se pretende se relacionar las decisiones de un agente económico con las decisiones de otros a través del planteamiento de sus problemas objetivo.

1.2 HIPÓTESIS DE TRABAJO

Las hipótesis de trabajo que sustentan la investigación son:

1) El escenario económico determinista con el que tradicionalmente se modelan las decisiones de los agentes: consumidores, firmas y bancos comerciales puede extenderse para incorporar características estocásticas de los mercados; ambos tipos de modelos, deterministas y estocásticos son coincidentes en sus resultados.

2) Los bancos comerciales buscan optimizar sus ganancias determinando los precios de sus servicios, considerando que los flujos de sus activos y pasivos son estocásticos.

1.3 METODOLOGÍA

Para responder el problema de investigación seguimos las siguientes fases:

a) Identificación de las principales corrientes de pensamiento económico que explican las decisiones de los agentes: consumidores, firmas y bancos comerciales.

b) Lectura y examen detallado del planteamiento que propone cada corriente teórica. Sobre todo se buscó determinar cuáles son los alcances y limitaciones de cada uno, cómo se formaliza la elección intertemporal e identificar modelos que incorporen la presencia de factores estocásticos.

c) Formalización del sistema económico. Se desarrollan tres modelos del comportamiento de los agentes y sus equilibrios parciales.

En primer lugar, presentamos y comparamos los modelos alternativos que explican las decisiones de producción de una firma competitiva cuando existe incertidumbre en los precios, ya sea respecto a los insumos o respecto al bien elaborado. Pueden distinguirse tres posibilidades para representar el comportamiento de las firmas: modelos de optimización de la utilidad esperada por parte de las empresas, modelos de maximización del valor presente de las ganancias esperadas, y modelos que incorporan la presencia de títulos financieros ante la existencia de mercados contingentes. La comparación y análisis de las distintas posibilidades de formalización se complementa con dos propuestas: un modelo de optimización cuando la tasa de interés real es estocástica, debido a que su dinámica puede describirse mediante un movimiento browniano estandarizado; y un modelo en el cual la decisión de la firma incluye elegir entre opciones financieras tipo europeo.

En la segunda propuesta se desarrolla un modelo de equilibrio general en el que las decisiones de los agentes consumidores y firmas está sujeta a la incertidumbre existente en la tasa de interés, se asume que el comportamiento de ésta puede describirse a través de un movimiento geométrico browniano estándar, o bien, a través de un proceso de Ornstein - Uhlenbeck. El modelo conserva las hipótesis tradicionales acerca del comportamiento optimizador de firmas y consumidores. Como resultados se encuentra que la demanda y la oferta de capital y trabajo reproducen las características de los modelos deterministas; asimismo se determinan las trayectorias óptimas de consumo y producción.

Por último, se propone un modelo de optimización que muestra las decisiones de un banco comercial representativo en un escenario con incertidumbre; ésta se expresa en depósitos y créditos bancarios estocásticos, así como en la probabilidad de que los clientes receptores de los créditos, incumplan con sus compromisos de pago. El modelo determina los precios de los servicios bancarios que permiten maximizar las ganancias de este agente económico.

2. DECISIONES DE PRODUCCIÓN DE LAS FIRMAS BAJO INCERTIDUMBRE DE PRECIOS

En este capítulo presentamos tres enfoques distintos, dentro de la teoría neoclásica, que comparten el propósito de explicar las decisiones de una firma competitiva en condiciones de incertidumbre de precios: maximización de la utilidad esperada, maximización de los beneficios esperados y maximización de ganancias con presencia de títulos financieros y mercados contingentes.

Las tres vertientes buscan precisar cuáles son los criterios que una firma considera al elegir la cantidad de producción y las cantidades de insumos que demanda, cuando el único elemento que se excluye del marco plenamente competitivo es la información perfecta. En los escenarios que se exploran, la información es simétrica pero incompleta; existe incertidumbre porque no se conocen con certeza los precios de todos los bienes, aunque se presupone cuáles serán éstos.

En los modelos que se examinan sólo se considera la decisión de producción; no contemplamos otras elecciones de la firma como la inversión o el financiamiento.

Centramos la comparación de los tres enfoques en las características básicas de su formalización, en sus ventajas y limitaciones, y en sus resultados.

El capítulo está organizado así: en la sección 2. 1 se presenta la primera propuesta de formalización basada en la Teoría de la utilidad esperada de von Neumann y Morgenstern (1944); en la sección 3.1 se analiza el enfoque de maximización de los beneficios cuando existe incertidumbre, y se propone un modelo propio al respecto; en la sección 4.1 se introducen títulos financieros como elemento necesario para la decisión del productor, donde también se incluye una propuesta propia; por último en la sección 5.1 resumimos las conclusiones del capítulo.

2.1 LA UTILIDAD ESPERADA RESPECTO A LOS BENEFICIOS

La primera formalización conocida, y la más utilizada para representar el comportamiento de una firma competitiva bajo incertidumbre de precios, se basa en la teoría de la utilidad esperada. Se trata de un marco analítico, desarrollado en primera instancia para representar el comportamiento del consumidor, en el que los agentes eligen entre alternativas riesgosas (loterías), cada una de éstas, proporciona un conjunto de resultados posibles a los que se asocia una probabilidad objetiva y conocida.

En esta sección sólo señalamos los conceptos básicos asociados con la teoría de la utilidad esperada; en el Apéndice A presentamos otros conceptos fundamentales para la comprensión de este enfoque.

Definición 2.1. Una lotería simple, L, es un vector de probabilidades $L=(p_1, \ldots, p_N)$, donde $p_n \geq 0$ para todo n, y $\sum_{n=1}^{N} p_n = 1$.

En una lotería cada p_n se interpreta como lo que se obtendrá con la probabilidad p si el resultado o consecuencia n ocurre. Así, cada resultado posible n, es una variable aleatoria de la que se conoce su distribución de probabilidades.

En este escenario, cada uno de los n resultados o eventos posibles, puede interpretarse como la realización de diferentes condiciones de la naturaleza en un instante del tiempo, o bien, como la realización de condiciones del mundo similares en distintos instantes del tiempo. Por lo tanto, la teoría de la utilidad esperada no implica necesariamente la elección intertemporal.

Definición 2.2. Una función de utilidad esperada von Neumann - Morgenstern $U=:\mathcal{L} \rightarrow R$ es la asignación de números $(u_1,\ldots, u_N)$ a los N resultados posibles, tales que para cada lotería simple $L=(p_1, \ldots, p_N) \in \mathcal{L}$, se tiene: $U(L) = u_1 p_1 + \ldots + u_N p_N$. La utilidad esperada de una lotería es el valor esperado de las utilidades de los N resultados posibles.

La utilidad esperada permite jerarquizar las preferencias de los agentes no sólo en términos ordinales, sino también en términos cardinales; esto es así porque la incorporación de probabilidades de los sucesos permite al individuo decidir qué tan preferible es un resultado a otro.

Teorema de la utilidad esperada. Si la relación racional de preferencias $\succeq$, sobre el espacio de lotería $\mathcal{L}$, satisface los axiomas de continuidad e independencia, entonces la relación de preferencias admite una representación en términos de la utilidad esperada.

Dadas dos loterías $L=(p_1, \ldots, p_N)$ y $L'=(p'_1, \ldots, p'_N)$, entonces: $L \succeq L'$ si y sólo sí $\sum_{n=1}^{N} u_n p_n \geq \sum_{n=1}^{N} u_n p'_n$.

La decisión de la firma significa, en este enfoque, elegir el nivel de producción con el que se espera obtener la máxima utilidad de los beneficios; los beneficios resultantes son inciertos, aunque de forma indirecta porque dependen de una variable incierta: los precios de los bienes terminados, o los precios de los insumos.

2.1.1 Criterio de elección del nivel de producción

La propuesta básica para modelar la decisión de las firmas se debe a Sandmo A. (1971). Él supone que la actividad de la firma puede representarse por las siguientes funciones:

$$F(x) = C(x) + B \tag{2.1}$$

$$\Pi(x) = Px - C(x) - B \tag{2.2}$$

En la ecuación (2.1) se indica que la función de producción del bien x, $F(x)$, depende de los costos variables $C(x)$ y de costos fijos B. En la ecuación (2.2) se definen los beneficios como las diferencia entre los ingresos obtenidos por la venta del producto, Px y los costos de producción.

Sandmo supone que los precios P de las unidades producidas son una variable aleatoria con función de densidad $f(P)$ y $E[P]=\mu$. No existe incertidumbre asociada a los precios de los insumos. La utilidad esperada de las ganancias (función tipo von Neumann – Morgenstern) es:

$$E\left[U\left(Px - C(x) - B\right)\right] \tag{2.3}$$

La función de utilidad de la firma $U(\Pi)$ es cóncava, continua y diferenciable (específicamente, es positiva decreciente de las ganancias). La concavidad de la función de utilidad indica que la firma muestra aversión al riesgo.

De la ecuación (2.3) se obtienen las condiciones necesarias y suficientes para un máximo:

$$E\left[U'(\Pi)\left(P - C'(x)\right)\right] = 0 \tag{2.4}$$

$$E\left[U''(\Pi)\left(P - C'(x)\right)^2 - U'(\Pi)C''(x)\right] < 0 \tag{2.5}$$

La condición (4) puede reescribirse como:

$E\left[U'(\Pi)P\right] = E\left[U'(\Pi)C'(x)\right]$, o bien:

$$E\left[U'(\Pi)(P - \mu)\right] = E\left[U'(\Pi)(C'(x) - \mu)\right] \tag{2.6}$$

A partir de esta última ecuación se obtiene:

$$C'(x) \leq \mu \tag{2.7}$$

De (2.7) se deduce que en el nivel de producción óptimo, el costo marginal debe ser menor o igual al precio esperado.

2.1.2 Grados de incertidumbre

Sandmo incluye en su propuesta la comparación entre las decisiones de una firma cuando no existe incertidumbre en los precios, y cuando sí existe. Al respecto, la comparación cardinal entre $U'(\Pi)$ y $U'[E(\Pi)]$, depende de la relación existente entre P y μ.

Además, Sandmo realiza una prueba de dominancia estocástica de segundo orden para comparar entre dos alternativas riesgosas. Para ello, propone expresar ahora el precio aleatorio de un bien como $\gamma P+\theta$, para preservar la media esperada de los precios, se establece:

$$dE[\gamma P+\theta]=0, \quad d\theta/d\gamma=-\mu$$

Junto con Sandmo, Batra R. y Ullah A. (1974) intentan probar que el volumen de producto elaborado por una firma tiende a disminuir ante el incremento en la incertidumbre de los precios, medida a través de la varianza de éstos γ, y bajo el supuesto de que el coeficiente de aversión absoluta al riesgo es decreciente en las ganancias, es decir:

$$\frac{\partial x}{\partial \gamma}<0\text{, siempre que } \frac{\partial R_A}{\partial \Pi}<0; \qquad R_A=-\frac{U''(\Pi)}{U'(\Pi)}$$

Más adelante, Ishii Y. (1977), generaliza el resultado anterior a partir de un supuesto menos restrictivo; es suficiente que el coeficiente de aversión absoluta al riesgo sea no creciente para asegurar que ante el incremento en la incertidumbre del precio del bien elaborado, se reduzca la producción.

En un estudio más reciente Eeckhoudt L. y Hansen P. (1980), muestran un resultado similar para el nivel de producción de la firma, basándose en dos supuestos: la firma es adversa al riesgo (no es relevante el coeficiente de aversión absoluta al riesgo) y la variación en la incertidumbre de precios está acotada por la existencia de un precio máximo p_M y uno mínimo p_m, diferentes al precio aleatorio original P, pero que como éste tienen la misma esperanza matemática.

2.1.3 Comentarios al enfoque de la utilidad esperada de los beneficios

La modelación de las decisiones de la firma con base en la teoría de la utilidad esperada permite considerar diferentes tipos de unidades económicas productivas, diferenciadas por su actitud hacia el riesgo (aversión, neutralidad o gusto), en lugar de considerar que todas las empresas son neutrales al riesgo.[1]

No obstante, el análisis está limitado principalmente por las siguientes razones:

a) El criterio tradicional (positivo) de decisión entre distintas alternativas de producción se basa en elegir aquella alternativa que proporcione el máximo volumen de beneficios. En términos de la utilidad esperada, se elige con base en el valor esperado de una lotería, es decir, comparando las utilidades esperadas. Si bien este criterio es útil en términos normativos, para la economía positiva no es una adecuada representación de la elección de una empresa dada la imposibilidad de representar sus preferencias de producción a través de funciones de utilidad.

b) En este enfoque, la decisión de la firma no necesariamente es intertemporal. Cuando la firma elige su nivel de producción se enfrenta a un conjunto de pares precio – probabilidad en el espacio de loterías, e indirectamente a los pares utilidad de beneficios - probabilidad, cualesquiera de esos pares puede ocurrir en un instante del tiempo.

En el análisis del comportamiento de la firma, la intuición que resulta es que siempre se preferirá la lotería donde el precio más elevado del bien terminado tenga asociado una mayor probabilidad; o bien, si la incertidumbre está presente en los precios de los insumos, donde la mayor probabilidad se asocie a los menores precios.

c) Las medidas de aversión al riesgo no proporcionan resultados invariables porque dependen de las funciones de utilidad con que se representen las preferencias.

---

[1] En ocasiones se supone que las firmas son neutrales al riesgo bajo los argumentos de que poseen grandes montos de riqueza, gran cantidad de derechos de propiedad, considerable experiencia financiera y fácil acceso a los mercados de capitales. Esta idea es sostenida por autores como Martin Bailey, Costas Azariadis y Joseph Stiglitz.

d) Se conserva la Paradoja de Allais que cuestiona la validez del axioma de independencia.

Por último, señalamos una extensión al enfoque original, ésta consiste en suponer que los resultados esperados se definen en términos monetarios, es decir, el agente maximiza una función de utilidad que depende de cantidades de dinero (para la firma, esto significa que los precios y los beneficios se definen unidades monetarias).[2]

2.2 EL VALOR PRESENTE DE LAS GANANCIAS ESPERADAS

En esta sección se examina el problema de optimización de una firma competitiva; busca maximizar el volumen de beneficios esperados en cada instante del tiempo, pero cuando no se conoce con certeza el precio del bien o los precios de los insumos en cada fecha.

En el escenario determinista, la función objetivo de la firma es:[3]

$$\text{Max } V = \int_0^\infty (p_t Q_t - w_t L_t - G_t I_t) e^{-\delta t} dt \tag{2.8}$$

Sujeto a:

$$Q_t = F(K_t, L_t) - C(\dot{K}) \tag{2.9}$$

$$\dot{K} = I_t - \mu K_t, \qquad K(0) = K_0 \tag{2.10}$$

$$K_t, L_t > 0 \tag{2.11}$$

Donde p es el precio del bien producido Q, L es la cantidad del insumo trabajo, K la cantidad del insumo capital, I la cantidad de nuevos bienes de inversión, w es el precio del trabajo (salario real), G el precio de los bienes de inversión y μ la tasa de depreciación del capital; todas estas variables (excepto la tasa de depreciación) varían con el tiempo y su valor es plenamente conocido.

---

[2] La función de utilidad esperada definida sobre cantidades monetarias, a veces se denomina función de utilidad Bernoulli.

[3] El modelo representativo de optimización de ganancias de una firma, en un marco intertemporal y determinista se debe a Treadway (1969); extensiones de este modelo se pueden encontrar en Nadiri (1982).

La restricción (2.9) establece que la cantidad de bienes producidos, depende de la función de producción $F(K, L)$ y del costo asociado a la variación del capital $C(\dot{K})$. La ecuación (2.10) establece que la variación en el stock de capital es igual a la nueva inversión menos la depreciación del capital, con la condición inicial de que el nivel de capital en el tiempo $t = 0$ es K_0. Por último, en la ecuación (2.11) se establece que la cantidad de los insumos utilizados debe ser positiva, una condición necesaria para que se efectúe la producción.

Para resolver el problema de optimización utilizamos el siguiente hamiltoniano:

$$H = e^{-\delta t}\{pF(K,L) - pC(I-\mu K) - wL - GI + \lambda(I-\mu K)\}$$

De donde se obtienen las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial H}{\partial L} = pF_L(K,L) - w$$

$$\frac{\partial H}{\partial K} = pF_K(K,L) + \mu pC'(I-\mu K) - \mu\lambda$$

O bien:

$$\frac{\partial H}{\partial K} = p\frac{\partial Q}{\partial K} - \mu\lambda$$

Definiendo:

$$\lambda(t) = \int_t^{\infty} p\frac{\partial Q}{\partial K} e^{-(r+\mu)(\tau-t)} d\tau$$

$$\lambda(t) = G + pC'(I-\mu K) = G + pC'(\dot{K})$$

Si ambas expresiones se derivan respecto al tiempo y se igualan, entonces:

$$pC''(\dot{K}) = (r+\mu)\lambda - \mu pC'(I-\mu K) - pF_K(K,L)$$

$$pC''(\dot{K}) = (r+\mu)G + (r+\mu)pC'(I-\mu K) - \mu pC'(I-\mu K) - pF_K(K,L)$$

Lo que conduce a las condiciones de equilibrio con las que se alcanza la máxima producción y beneficios:

$$F_L(K_t, L_t) = w_t \tag{2.12}$$

$$\ddot{K} = \frac{(r_t+\mu)g_t - F_K(K_t,L_t) + r_t C'(\dot{K})}{C''(\dot{K})}, \quad g_t = G_t/p_t \tag{2.13}$$

$$\lim_{t\to\infty} C'(\dot{K})e^{-rt} = 0 \tag{2.14}$$

En (2.12) se establece que el producto marginal del trabajo debe ser igual al salario real.

En (2.13) se indica que el valor presente del producto marginal del capital (cuasi - fijo), es equivalente al costo marginal de la inversión. La ecuación (2.14) establece que el valor presente de los costos marginales de la variación en el capital es cero cuando el tiempo tiende a infinito.

Como señalamos al comienzo de esta sección, el problema de maximización de beneficios con incertidumbre de precios consiste en reproducir este escenario básico, pero introduciendo como elementos de riesgo la aleatoriedad en los precios asociados.

En este enfoque se supone que los precios aleatorios se definen en el espacio fijo de probabilidad (Ω, F, P) y en la partición del tiempo $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = t$, del intervalo $[0,t]$. Los elementos que definen el espacio de probabilidad son: Ω, el conjunto de posibles resultados o estados de la naturaleza, cuyos subconjuntos son los eventos; F, una sigma-álgebra o conjunto de eventos relevantes; y P, una medida de probabilidad.

La elección de la firma bajo incertidumbre, es en este contexto siempre una decisión intertemporal.

2.2.1 Riesgo de ganancia

Una propuesta representativa del enfoque se debe a Scott (1983), se supone que el nivel de ganancias esperadas está dado por:

$$E[\Pi_t] = F(K_t, L_t) - w_t L_t - r_t K_t \tag{2.15}$$

Y el valor esperado V de la firma es:

$$V_t = \frac{1}{i}E(\Pi_t) - \frac{\lambda}{i}Cov(\Pi_t, \Pi_t^m), \quad Cov(\Pi_t, \Pi_t^m) = \sigma_t^{jm} = \rho_t^{jm}\sigma_t^j\sigma_t^m, \quad \sigma_j^2 = K^2\sigma_r^2 \tag{2.16}$$

Donde i es la tasa de interés libre de riesgo, λ es el precio del riesgo de ganancia por unidad del valor de mercado del capital, $Cov(\Pi_t, \Pi_t^m) = \sigma_t^{jm}$ expresa la covarianza entre los beneficios de la firma Π_t y los beneficios de otras firmas en el mercado Π_t^m, ρ_t^{jm} indica la correlación entre las ganancias de la firma j y las ganancias del mercado, σ_t^j es la desviación estándar de las ganancias de la firma, y σ_t^m es la desviación estándar de las ganancias del mercado.

El modelo supone que la firma desconoce el precio de los insumos, no obstante, los salarios w_t y las tasas de interés r_t vigentes en cada fecha t, tienen medias conocidas w y r, y varianzas σ_w^2, σ_r^2 independientes entre sí. Formalmente lo que se conoce acerca de los precios de los insumos capital y trabajo puede expresarse como:

$$r_t \sim \left(r, \sigma_r^2\right), \qquad w_t \sim \left(w, \sigma_w^2\right), \qquad Cov\left(\sigma_r^2, \sigma_w^2\right) = 0$$

Con base en las ecuaciones (2.15) y (2.16) y suponiendo que existe una tasa de rendimiento constante permitida legalmente s, el problema de optimización de la firma es:

$$\underset{\{L,K\}}{Max} \quad Z_t = \frac{1}{i}\left[F(K_t, L_t) - w_t L_t - r_t K_t\right] - \frac{\lambda}{i}(\rho_t^{jm} \sigma_t^m K_t \sigma_t^r) - \frac{\phi}{i}\left[F(K_t, L_t) - w_t L_t - sK_t\right] \quad (2.17)$$

Donde ϕ es el multiplicador de Lagrange asociado con la restricción de la tasa de rendimiento.

Como condiciones de equilibrio para obtener los máximos beneficios se debe cumplir:

$$F_L(K_t, L_t) = w_t \quad (2.18)$$

$$F_K(K_t, L_t) = \frac{1}{1-\phi}\left[r_t - \phi s + \lambda \rho_t^{jm} \sigma_t^m \sigma_t^r\right] \quad (2.19)$$

Los resultados (2.18) y (2.19) son semejantes a los obtenidos con certidumbre. En (2.18) se muestra que en la elección óptima el producto marginal del trabajo iguala al salario real; en (2.19) se concluye que el producto marginal del capital es una proporción de la tasa de interés del riesgo de ésta y del riesgo de las ganancias del mercado.

2.2.2 Maximización de beneficios con tasa de interés estocástica

En el modelo que proponemos a continuación, suponemos que la firma desconoce el precio del capital o tasa de interés, pero supone que la dinámica de ésta se representa a través de un movimiento geométrico browniano.

La firma representativa maximiza el flujo esperado de ganancias Π_t:

$$Max \ E\left\{\int_0^\infty f(\Pi_t)e^{-\rho t} \mid F_0\right\}, \qquad 0 < \rho < 1 \quad (2.20)$$

Donde ρ es la tasa de descuento.

$S.a \quad d\Pi_t = F(K_t, L_t)dt - w_t L_t dt - K_t dR_t \qquad (2.21)$

La ecuación (2.21) representa la evolución de los beneficios Π_t. Las ganancias de cada fecha t, dependen de la producción $F(K_t, L_t)$ y el costo que se paga por los factores capital y trabajo. El salario real w_t, varía con el tiempo, pero su magnitud se conoce con certeza.

La tasa de interés varía de acuerdo con la ecuación diferencial estocástica:

$$dR_t = \frac{dr_t}{r_t} = (\mu - \delta)dt + \sigma dZ_t, \quad dZ_t \sim N(0, dt) \qquad (2.22)$$

Entonces, (2.21) puede reescribirse como:

$$d\Pi_t = F(K_t, L_t)dt - w_t L_t dt - K_t(\mu - \delta)dt - K_t \sigma dZ_t$$

$$d\Pi_t = \Pi_t[F(K_t, L_t) - w_t L_t - K_t(\mu - \delta)]dt - K_t \sigma dZ_t \qquad (2.23)$$

En el problema de optimización descrito por las ecuaciones anteriores, la variable de control es r_t; la variable de control es Π_t, o equivalentemente las variables L_t y K_t porque para maximizar los beneficios la firma elige las cantidades óptimas de trabajo y capital.

Definimos:

$$J(\Pi_t, t) = E\left\{\int_t^{\infty} f(\Pi_t)e^{-\rho s} \mid F_t\right\} = V(\Pi_t)e^{-\rho t} \qquad (2.24)$$

Que puede reescribirse como:

$$J(\Pi_t, t) = \max_{\Pi|[t,\infty)} E\left\{\int_t^{t+dt} f(\Pi_s)e^{-\delta s}ds + \int_{t+dt}^{\infty} f(\Pi_s) \middle| F_t\right\}$$

$$J(\Pi_t, t) = \max_{\Pi|[t,t+dt]} E\left\{\int_t^{t+dt} f(\Pi_s)e^{-\delta s}ds + \int_{t+dt}^{\infty} J(\Pi_t + d\Pi_t, t + dt) \middle| F_t\right\}$$

Utilizando el teorema del valor medio para integrales definidas y la expansión en series de Taylor:

$$J(\Pi_t, t) = E\left\{f(\Pi_s)e^{-\delta s}dt + (0)dt + J(\Pi_t, t) + dJ(\Pi_t, t) \middle| F_t\right\}$$

Si aplicamos el lema de Itô para una ecuación diferencial estocástica con un movimiento browniano, entonces:

$$J(\Pi_t, t) = E\left\{f(\Pi_t)e^{-\delta t} + (0)dt + J(\Pi_t, t) + J_r\Big(J_t + [f(K_t, L_t) - w_t L_t - K_t(\mu - \delta)]\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}J_{rr}\sigma^2 r_t K_t^2\Big)dt + J_r \sigma_t r_t K_t dZ_t \middle| F_t\right\}$$

Donde los subíndices de J_t, J_r, J_{rr}, denotan las primeras o segundas derivadas parciales de la función solución $J(r_t, t)$.

Si se obtienen los valores esperados en los términos de la ecuación anterior y se simplifica, obtenemos la ecuación de Hamilton – Jacobi - Bellman:

$$0=\max_{\Pi_t} E\left\{ f(\Pi_t)e^{-\delta t} + J_t + J_r\left[f(K_t,L_t) - w_t L_t - K_t(\mu-\delta)\right]dt + \frac{1}{2}J_{rr}\sigma^2 r_t^2 K_t^2 \right\} \qquad (2.25)$$

A partir de (2.25) obtenemos las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial HJB}{\partial K_t} = J_r f_K(K_t,L_t) - J_r(\mu-\delta) + J_{rr}\sigma_t^2 r_t^2 K_t \qquad (2.26)$$

$$\frac{\partial HJB}{\partial L_t} = J_r f_L(K_t,L_t) - w_t \qquad (2.27)$$

Junto con la condición de transversalidad que asegura un valor presente de los beneficios reales esperados, igual a cero.

$$\lim_{t\to\infty} \Pi e^{-\rho t} = 0 \qquad (2.28)$$

Proponemos como candidato solución de (2.25) a:

$$J(r_t,t) = r_t^{\alpha} e^{-\delta t}, \qquad \alpha > 0, \qquad 0 < \delta < 1 \qquad (2.29)$$

De la cual, obtenemos las derivadas parciales:

$$J_t = -\delta r_t^{\alpha} e^{-\delta t}$$

$$J_r = \alpha r_t^{\alpha-1} e^{-\delta t}$$

$$J_{rr} = \alpha(\alpha-1) r_t^{\alpha-2} e^{-\delta t}$$

Sustituyendo (2.29) y sus derivadas en las condiciones de primer orden, y luego simplificando:

$$J_r f_K(K_t,L_t) = J_r(\mu-\delta) + J_{rr}\sigma_t^2 r_t^2 K_t$$

$$\alpha r_t^{\alpha-1} e^{-\delta t} f_K(K_t,L_t) = \alpha r_t^{\alpha-1} e^{-\delta t}(\mu-\delta) + \alpha(\alpha-1) r_t^{\alpha-2} e^{-\delta t}\sigma_t^2 r_t^2 K_t$$

$$r_t^{\alpha-1} f_K(K_t,L_t) = r_t^{\alpha-1}(\mu-\delta) + (\alpha-1) r_t^{\alpha}\sigma_t^2 K_t$$

$$f_K(K_t,L_t) = (\mu-\delta) + (\alpha-1) r_t \sigma_t^2 K_t \qquad (2.30)$$

De la segunda condición de equilibrio:

$$J_r f_L(K_t, L_t) = J_r w_t$$

$$f_L(K_t, L_t) = w_t \tag{2.31}$$

El resultado mostrado en la ecuación (2.30) indica la condición por la cual se determina la cantidad óptima de capital; éste se elige donde la productividad marginal del capital iguale al valor promedio esperado de la tasa de interés (μ -δ) más la proporción $(\alpha - 1)\sigma_t^2 K_t$ de la tasa de interés. Recuérdese que este resultado se obtuvo en un escenario intertemporal en el que la tasa de interés tiene una dinámica representada por un movimiento geométrico browniano.

La ecuación (2.31) reproduce el resultado del caso determinista, si no existe un riesgo asociado a la variación en el tiempo del salario real, entonces la cantidad óptima de trabajo debe satisfacer que el producto marginal de éste iguale al salario real.

2.2.3 Comentarios al enfoque de maximización del valor presente de los beneficios esperados

Es conveniente señalar que el enfoque de maximización de beneficios esperados, bajo incertidumbre, se caracteriza por el uso de una definición precisa para las variables que se consideran aleatorias; esta definición consiste en la descripción de la función de distribución de probabilidad de la variable aleatoria, o como en el modelo que proponemos en la sección anterior, en la descripción del proceso estocástico que representa la dinámica de la variable aleatoria.

La definición precisa de las variables aleatorias es bastante útil porque permite efectuar estudios de contrastación empírica.

Por otro lado, a diferencia del enfoque de maximización de la utilidad esperada, en el que la actitud hacia el riesgo es un supuesto del modelo incorporado a través de la forma de la función de utilidad, aquí, la actitud hacia el riesgo, por parte de la firma, se observa en los resultados, cuando al elegir sus decisiones contempla las características de las variables aleatorias, su nivel promedio y su volatilidad (en nuestro caso, μ -δ y σ_t^2).

Por último señalamos que este enfoque recupera y extiende el planteamiento tradicional determinista de la firma, tanto el del escenario estático, como el caso intertemporal.

2.3 INCORPORACIÓN DE TÍTULOS FINANCIEROS Y BIENES CONTINGENTES

En esta sección se considera la presencia de títulos financieros asociados a la existencia de mercados contingentes, y examinamos la influencia de tales títulos sobre las decisiones de producción.

El escenario básico consiste en una economía compuesta por un conjunto completo de bienes contingentes. Los bienes se distinguen entre sí por sus características físicas, por su disponibilidad espacial, su disponibilidad temporal, y de acuerdo al estado de la naturaleza en el que son viables.

Los conceptos primordiales de este enfoque analítico son:

Definición 4.1. Para todo bien físico $n= 1, 2, \ldots, N$ y estados $s= 1, 2, \ldots, S$, un bien contingente ns es un título que da el derecho a recibir una unidad del bien físico n si el estado s ocurre.

Definición 4.2. Dado un conjunto finito de estados y un conjunto finito de títulos contingentes, y dado que la matriz $D= N\text{x}S$, denota el número de unidades pagadas por el título n en el estado s; si span(D)= $\{D^T\theta : \theta \in R^N\}$, denota el conjunto de pagos posibles con la elección del vector θ de títulos, los mercados son completos si se cumple que span (D) $=R^S$.

La completitud de los mercados de bienes contingentes significa que existe igual número de títulos, mercados contingentes y estados de la naturaleza.

La incertidumbre en este escenario está presente porque no se conoce cuál es el estado del mundo que prevalecerá en el futuro, y por lo tanto no se conoce con certeza cuáles bienes estarán disponibles; la información es incompleta, pero simétrica. En estas condiciones, los agentes económicos son similares en sus gustos, preferencias y tecnología de producción; sólo difieren entre sí, en las expectativas y creencias respecto a la probabilidad de ocurrencia de los eventos futuros.

2.3.1 Contratos de futuros

En esta sección examinamos la propuesta de Feder, G., Just, R. y Schmitz, A. (1980). Ellos proponen un modelo en el que las decisiones de producción dependen de los precios de los factores y de los precios de los contratos futuros. En su modelo, la incertidumbre está presente en el precio spot de los bienes en los mercados futuros, y sólo afecta las decisiones de compra y venta de contratos futuros.

El problema de optimización de una firma es:

$$\max_{K,U} EU\{P[F(K)-X]+(P_0X-CK)(1+r)\} \tag{2.32}$$

Donde U es la función de utilidad de la firma, K es el volumen de insumo, X es el volumen de contratos futuros vendidos, C es el costo por unidad de insumo, P es el precio spot o precio del producto en la fecha de venta, P_0 es el precio futuro, r es la tasa real de interés. Entonces la ecuación (2.32) expresa que las ganancias esperadas igualan al valor de la producción no comprometida con contratos futuros, más el valor de los contratos futuros, menos el costo de los insumos.

A partir de (2.32) se calculan las condiciones de equilibrio:

$$\frac{\partial EU}{\partial K}=E\{U'PF_K-C(1+r)\} \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial EU}{\partial X}=E\{U'P_0(1+r)-P\} \tag{2.34}$$

Si $\{PF_K-C(1+r)\}=F_K\{P_0(1+r)-P\}$

Entonces $F_K=\dfrac{C}{P_0}$ (2.35)

Un primer resultado se muestra en la ecuación (2.35). La decisión de producción se establece donde el producto marginal del factor utilizado iguala a la relación entre el costo del insumo y el precio futuro conocido en el contrato; así, en la decisión de producción no influye la incertidumbre asociada a los precios spot, ni tampoco la actitud hacia el riesgo implícita en la función de utilidad.

El modelo básico se extiende para examinar cómo la incertidumbre de los precios spot incide en la decisión de comercialización de contratos futuros. A partir de la ecuación (2.34) se escribe:

$$P_0=\frac{\overline{P}}{(1+r)}$$

Donde $\overline{P}$ es el precio spot observado y P_0 el precio futuro pactado (precio forward) para la fecha de entrega del bien.

Y se define, al volumen de producto sujeto a incertidumbre de precios como: $Z = F(K) - X$, entonces se establece que:

$$Z \underset{>}{\overset{<}{=}} 0 \text{ si } P_0 \underset{<}{\overset{>}{=}} \frac{\overline{P}}{(1+r)} \tag{2.36}$$

Lo que significa que, en términos del valor presente, si el precio futuro acordado P_0 es mayor que el precio spot esperado $\overline{P}$, la firma adquiere posiciones cortas en contratos futuros, vende contratos futuros sobre el bien en exceso a su producción planeada $Z<0$. Si el precio futuro acordado es menor que la expectativa del precio spot, la firma especula adquiriendo posiciones largas en contratos futuros $Z>0$.

Este segundo resultado reproduce la condición para la no existencia de arbitraje en contratos futuros:

$$F_0 = S_0 e^{r(T-t)} \tag{2.37}$$

Donde F_0 es el precio futuro acordado, S_0 el precio spot, r la tasa de interés libre de riesgo y T-t el plazo al vencimiento del contrato.

De acuerdo con (2.37), si se verifica la igualdad, no existen posibilidades de arbitraje; si $F_0 < S_0 e^{r(T-t)}$, es decir, si se estima que el precio futuro acordado será menor que el precio spot observado, conviene adquirir títulos de futuros de compra del bien; si $F_0 > S_0 e^{r(T-t)}$ conviene adquirir títulos de futuros de venta del bien.

Es importante notar que en el momento en que la incertidumbre se despeja, cuando se observa el par fecha – evento que ha ocurrido, los contratos futuros deben cerrarse efectuando las transacciones (entregando los bienes) a los precios futuros acordados, lo cual generará ganancias o pérdidas a las firmas (adicionales al resultado de optimización de la producción) de acuerdo a si sus expectativas de precios se verificaron.

2.3.2 Contratos de opciones financieras

A continuación presentamos una propuesta alternativa a la examinada en la sección anterior; la diferencia es que aquí suponemos la presencia de opciones financieras tipo europeo.

En este caso, el problema de optimización de la firma consiste en maximizar el valor esperado que obtendrá con la producción y con los contratos que lleve a cabo en cada estado de la naturaleza; se representa con alguna de las siguientes posibilidades:

$$\max_{VE}\left\{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\left[P_iF(X_i)-G(X_i)\right]+Mc_i\right\}=\max_{VE}\left\{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\left[P_iF(X_i)-G(X_i)\right]+M\max\left[S_T-K,0\right]\right\} \quad (2.38)$$

$$\max_{VE}\left\{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\left[P_iF(X_i)-G(X_i)\right]-Mc_i\right\}=\max_{VE}\left\{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\left[P_iF(X_i)-G(X_i)\right]-M\max\left[S_T-K,0\right]\right\}$$

$$=\max_{VE}\left\{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\left[P_iF(X_i)-G(X_i)\right]+M\min\left[K-S_T,0\right]\right\} \quad (2.39)$$

$$\max_{VE}\left\{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\left[P_iF(X_i)-G(X_i)\right]+Mp_i\right\}=\max_{VE}\left\{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\left[P_iF(X_i)-G(X_i)\right]+M\max\left[K-S_T,0\right]\right\} \quad (2.40)$$

$$\max_{VE}\left\{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\left[P_iF(X_i)-G(X_i)\right]-Mp_i\right\}=\max_{VE}\left\{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\left[P_iF(X_i)-G(X_i)\right]-M\max\left[K-S_T,0\right]\right\}$$

$$=\max_{VE}\left\{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\left[P_iF(X_i)-G(X_i)\right]+M\min\left[S_T-K,0\right]\right\} \quad (2.41)$$

Donde $F(X_i)$ representa la producción utilizando el insumo X en el estado de la naturaleza i (par fecha – evento), $G(X_i)$ representa la función de costos asociada con la producción del bien, α_i indica la probabilidad asociada a la ocurrencia del estado i (note que $\sum_{i=1}^{N}\alpha_i=1$), M indica la cantidad de títulos de opciones europeas que se adquieren sobre el bien subyacente (que puede ser el mismo bien producido), c_i es el precio de un contrato call (opción de compra) calculado para el estado i, p_i es el precio de un put (opción de venta), S_T es el precio spot observado en la fecha de expiración del título, K es el precio de ejercicio establecido en el contrato.

Con base en esta notación, las ecuaciones anteriores indican que el valor esperado de los beneficios de la firma es igual a la diferencia entre el valor de los productos elaborados y su costo en cada par fecha – evento, más las pérdidas o ganancias asociadas al valor de los títulos de las opciones europeas en cada estado de la naturaleza, es decir, el número de contratos de opciones M por el precio de cada título.

Específicamente, en la ecuación (2.38) se supone la compra de opciones de compra, en (2.39) la venta de opciones de compra, en (2.40) la compra de opciones de venta y en (2.41) la venta de opciones de venta.

Bajo el escenario descrito, tenemos un conjunto completo de bienes contingentes representados en los títulos de las opciones financieras; se trata de un conjunto completo porque asuminos que existe un contrato call o put para cada estado de la naturaleza *i*.

En cualesquiera de los problemas de optimización descritos, la firma elige el nivel de producción del bien y el número de títulos de opciones financieras.

En todos los casos se obtiene como condición de equilibrio:

$$F'(X_i) = \frac{1}{\alpha_i}\frac{G'(X_i)}{P_i} \tag{2.42}$$

Lo que significa que la producción óptima en cada estado de la naturaleza debe cumplir que la productividad marginal del insumo iguale a su costo marginal ponderado por la probabilidad de ocurrencia de ese estado, α_i.

Por otro lado, la elección del número de títulos financieros, depende de la relación entre el precio spot del bien en los mercados futuros y del precio de ejercicio pactado.

El rendimiento esperado asociado con una posición larga en un call, de acuerdo con la ecuación (2.38), establece que se adquieren más títulos si se espera que $S_T \geq K$ porque esto generará ganancias a la firma si la opción se ejerce. Para posiciones call cortas (2.39) se adquirirán más títulos si $S_T < K$ (si se espera que la contraparte no ejerza la opción). Las firmas mantendrán posiciones put largas (2.40) si $S_T \leq K$, dado que así se generarán más ganancias. Por último, de acuerdo con la ecuación (2.41) la firma elegirá posiciones put cortas si espera que $S_T > K$.

Una diferencia adicional con el modelo presentado en la sección 2.3.1 es que aquí, cuando la incertidumbre se despeja, las firmas tienen el derecho de ejercer o no la opción, lo que implica que aunque se han pagado los precios de las opciones, los bienes contingentes pueden ser o no entregados a los precios pactados.

2.3.3 Comentarios a la presencia de títulos financieros y bienes contingentes

En los modelos de optimización del valor presente de los beneficios de un productor, que incorpora en su decisión la presencia de títulos financieros, los resultados fundamentales son:

a) La incorporación de títulos financieros significa que en la fecha actual se establecen contratos para la entrega futura de los bienes (compra o venta). La entrega de los bienes está condicionada a la ocurrencia de un par fecha – suceso, los precios de los títulos financieros y los precios futuros son plenamente conocidos y son pactados en la fecha en que se suscribe el contrato, y los precios spot de los bienes en cada fecha se desconocen.

Si las firmas pueden determinar un conjunto de planes de producción, cada uno de los cuales establece para cada par fecha – evento, la cantidad de producción, las cantidades de insumos requeridos y el precio futuro asociado, entonces no hay incertidumbre acerca del valor presente del plan de producción óptimo; siempre y cuando exista un conjunto completo de bienes contingentes.

Cuando se afirma que la empresa no toma en cuenta la incertidumbre al decidir su plan óptimo de producción, esto significa que la firma no considera sus preferencias o actitudes hacia el riesgo. Sin embargo, es importante subrayar que las expectativas acerca del par fecha – evento que sucederá, sí se consideran porque a cada plan de producción se asocia una probabilidad de ocurrencia.

b) La firma no considera en su decisión de producción el precio spot de los bienes que existirá en cualquier par fecha – evento del futuro. Estos precios sólo influyen en sus decisiones de inversión especulativa, es decir, en el tipo y en la cantidad de contratos financieros que se elegirán. Este hecho es válido en el caso en que existe un conjunto completo de bienes contingentes.

2. 4 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

En este capítulo, hemos presentado tres enfoques alternativos para representar las decisiones de producción de una firma cuando existe incertidumbre asociada a los precios del bien producido o a los insumos requeridos; las condiciones de formalización de cada uno de ellos conducen a obtener diferentes resultados.

Bajo el enfoque de la teoría de la utilidad esperada, la elección del volumen de producción óptimo implica seleccionar un conjunto de pares precio – probabilidad en el espacio de loterías, de modo que se obtenga la máxima utilidad. La elección no necesariamente es intertemporal.

Si el criterio de elección se basa en comparar magnitudes de utilidad esperada, este criterio es débil en términos prácticos ante la imposibilidad de representar las preferencias de producción de una firma mediante funciones de utilidad.

Bajo este enfoque se reconoce que las decisiones de producción de la firma están condicionadas por su actitud hacia el riesgo, esta actitud está implícita en las características de la función de utilidad.

El segundo escenario analizado consiste en la maximización de las ganancias esperadas, cuando se supone que la incertidumbre está asociada en los precios aleatorios. Se trata de reproducir las características de un modelo de producción intertemporal determinista, sólo que ahora se incluye la aleatoriedad de los precios; se supone que en cada instante del tiempo ocurre un precio aleatorio del cual se conoce su distribución de probabilidad.

Los principales resultados de este esquema con incertidumbre en los precios de los insumos son: a) se obtienen criterios similares al caso determinista, para la elección del volumen de producción, se elige producir donde el producto marginal del insumo utilizado iguale a su precio marginal, más una fracción de la volatilidad de los precios; b) la descripción precisa de los precios aleatorios (su función de distribución de probabilidad, o el proceso estocástico que define su dinámica) permite efectuar ejercicios de contrastación empírica; c) la actitud hacia el riesgo por parte de las firmas incide en la elección de producción a través de la media y la volatilidad de los precios.

En el tercer enfoque, la incertidumbre se asocia a la existencia de bienes contingentes con títulos financieros. En este escenario se conocen todos los pares fecha – evento posibles y sus respectivas probabilidades, se conocen los precios de los títulos financieros, los precios futuros de los bienes, y los precios spot asociados con cada estado de la naturaleza. La firma maximiza el valor esperado resultante de la realización de los planes de producción para cada estado de la naturaleza y de las ganancias o pérdidas derivadas de la comercialización de títulos financieros.

Si a estas condiciones se añade la existencia de un conjunto completo de bienes contingentes, los resultados son: a) la decisión de producción no considera la incertidumbre, es decir no es afectada por las actitudes hacia el riesgo de la firma ni por las expectativas de los precios spot de los bienes; b) los precios spot esperados para cada par fecha – evento sólo complementan el valor esperado de las ganancias, porque inciden en la decisión de compra y/o venta de títulos financieros.

Apéndice 2. A

En esta sección se presentan algunos conceptos complementarios a la sección 2.1.

a) Axiomas de la utilidad esperada.

Continuidad. La relación de preferencia $\succsim$ sobre el espacio de loterías es continuo, si para las loterías L, L' y L'', los conjuntos: $\{\alpha L + (1-\alpha)L' \succsim L''\}$ y $\{\alpha L + (1-\alpha)L' \precsim L''\}$ con $0<\alpha<1$, son ambos cerrados.

Independencia. La relación de preferencia $\succsim$ sobre el espacio de loterías satisface el axioma de independencia, si para las loterías L, L' y L'', con $0<\alpha<1$, se tiene que $L \succsim L'$ si y sólo si: $\{\alpha L + (1-\alpha)L'' \succsim \alpha L' + (1-\alpha)L''\}$.

b) Paradoja de Allais.

Dadas, las loterías L_1, L_1', L_2, L_2', pertenecientes al espacio de loterías, si $L_1 \succ L_1'$, y es posible expresar L_2 en términos de L_1, y L_2' en términos de L_1' (por ejemplo $L_2 = L_1+\varepsilon$, y $L_2' = L_1'+\varepsilon$), entonces necesariamente debe cumplirse que $L_2 \succ L_2'$; sin embargo, los agentes eligen $L_2' \succ L_2$, incumpliendo el axioma de independencia.

c) Medidas de aversión al riesgo.

Las principales medidas de aversión al riesgo son el coeficiente de aversión absoluta al riesgo α, y el coeficiente de aversión relativa al riesgo α_r:

$$\alpha = -\frac{U''(L^e)}{U'(L^e)} \qquad \alpha_r = -\frac{L^e U''(L^e)}{U'(L^e)}$$

Donde L^e es la ganancia esperada.

Si ambos coeficientes son constantes, el coeficiente de aversión absoluta al riesgo significa que el individuo ordena sus preferencias sobre las loterías, independientemente de su riqueza; y el coeficiente de aversión relativa al riesgo indica que el individuo es menos adverso al riesgo entre mayor sea su riqueza.

d) Incremento de incertidumbre.

Dadas dos distribuciones de probabilidad de los pagos monetarios obtenidos a través de dos loterías, $F(x)$, y $G(x)$, dos criterios para comparar cuál de ellas ofrece mayor rendimiento o menor riesgo son:

Dominancia estocástica de primer orden. La distribución $F(x)$ domina estocásticamente en primer orden a la distribución G(x), si para toda función no decreciente u: $\Re \rightarrow \Re$: $\int u(x) dF(x) \geq \int u(x) dG(x)$. Este concepto significa que la media de los pagos monetarios x, bajo la distribución $F(x)$ asociada con la lotería A, siempre es mayor que la media de los pagos monetarios x bajo la distribución $G(x)$ asociada con la lotería B.

Dominancia estocástica de segundo orden. La distribución $F(x)$ domina estocásticamente en segundo orden a la distribución G(x), si ambas tienen la misma media, y si para toda función no decreciente u: $\Re \rightarrow \Re$: $\int u(x) dF(x) \geq \int u(x) dG(x)$. Este concepto significa que si la media de los pagos monetarios x es la misma bajo las distribuciones $F(x)$ y $G(x)$, la distribución $F(x)$ asociada con la lotería A, tiene menor varianza o riesgo respecto a los pagos monetarios x, que la distribución $G(x)$ asociada con la lotería B.

3. EQUILIBRIO GENERAL CON TASA DE INTERÉS ESTOCÁSTICA

Un rasgo esencial de la competencia perfecta es que los agentes económicos poseen información completa y simétrica acerca de los precios actuales y futuros; este supuesto ha conducido a que gran parte de los modelos de equilibrio general se construyan en contextos deterministas.

En este documento se propone un modelo en competencia perfecta donde tienen plena vigencia las características de racionalidad de los agentes económicos, flexibilidad de precios y cantidades, homogeneidad de bienes, propiedad privada y plena descentralización de las decisiones.

La racionalidad económica se expresa en agentes que maximizan su utilidad sujetos a su restricción presupuestal y firmas que maximizan sus ganancias sujetas a la tecnología disponible. Tanto los consumidores como las empresas, toman decisiones intertemporales considerando que sólo se produce un bien, y la existencia de dos factores de producción: capital y trabajo.

Sin embargo, suponemos que existe un elemento de incertidumbre: no se conocen los valores actual y futuro de la tasa de interés real, pero se asume que su comportamiento aleatorio puede describirse mediante un movimiento geométrico browniano, o bien, mediante un proceso de Ornstein - Uhlenbeck; introducimos este supuesto con la finalidad de determinar cómo se modifican las decisiones de consumo y producción respecto al escenario tradicional.

Como sabemos, en el escenario determinista, la demanda de bienes (normales) es una función positiva del ingreso de los consumidores, y las funciones de oferta de insumos capital y trabajo son positivas respecto a los precios relativos de estos bienes. Por otro lado, en el escenario determinista, la oferta de producto es una función positiva respecto al precio relativo del bien, y la demanda de insumos es negativa respecto al precio de éstos. En este documento se muestra que estos resultados se mantienen en el escenario estocástico.

El capítulo se organiza así: en la sección 3.1 describimos la dinámica estocástica de la tasa de interés, en la sección 3.2 analizamos el comportamiento del consumidor representativo, en la sección 3.3 mostramos cómo es la decisión de la firma, en la sección 3.4

se deducen las trayectorias óptimas de consumo y producción, y finalmente, en la sección 3.5 presentamos las conclusiones.

3.1 DINÁMICA ESTOCÁSTICA DE LA TASA DE INTERÉS

Actualmente, existe en la literatura financiera una amplia variedad de modelos estocásticos que describen el comportamiento de la tasa de interés instantánea. En esta sección sólo describiremos las propiedades de dos de ellos: el movimiento geométrico browniano y el proceso de Ornstein - Uhlenbeck.

En 1965, Paul Samuelson en el documento: "Racional Theory of Warrant Prices", propuso que la dinámica del precio de un activo puede representarse mediante la ecuación diferencial estocástica de un movimiento geométrico browniano:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \alpha dt + \sigma dZ_t, \text{ o bien} \qquad dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dZ_t \qquad dZ_t \sim N(0, dt) \qquad (3.1)$$

Donde S_t es el precio del activo, α es el rendimiento esperado instantáneo, σ es la varianza del rendimiento y Z_t es un proceso browniano.

Más adelante, esta misma ecuación fue utilizada en 1973 por Fisher Black y Myron Scholes en el artículo "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" como base para determinar el precio de una opción europea; y en el mismo año por Robert C. Merton en el artículo "Theory of Racional Option Pricing", para determinar el precio de un bono cupón cero.

Para modelar el comportamiento de la tasa de interés instantánea, la ecuación anterior puede escribirse como:

$$\frac{dr_t}{r_t} = \alpha dt + \sigma dZ_t, \text{ o bien} \qquad dr_t = \alpha r_t dt + \sigma r_t dZ_t \qquad dZ_t \sim N(0, dt) \qquad (3.2)$$

Esta ecuación expresa que la tasa de interés varía en el tiempo de acuerdo con un componente tendencial αdt y un componente aleatorio σdZ_t; ambos componentes varían proporcionalmente con r_t, lo que implica que si $t \to \infty$ entonces la media y la volatilidad de la tasa de interés se incrementan sin límite. Una dificultad adicional es que la tasa de interés puede adquirir valores negativos si se modela de esta forma.

En 1930, los físicos L. S. Ornstein y G. E. Uhlenbeck en el documento "On the Theory of Brownian Motion", propusieron una ecuación que ilustra el movimiento cinético de los gases:

$$\frac{dm_t}{dt} = -xm_t + \sigma dZ_t, \qquad dZ_t \sim N(0, dt) \tag{3.3}$$

Donde m_t representa una molécula de gas, y x,σ son constantes positivas. Las ideas centrales de la ecuación eran que el término de tendencia $-xm_t$ podría adquirir valores positivos o negativos y siempre en torno al cero de acuerdo con el valor de m_t; además, aun en el caso en que m_t fuera cero, la molécula de gas no dejaría de presentar un movimiento aleatorio.

El proceso de Ornstein – Uhlenbeck fue utilizado por Oldrich Alfons Vasicek en el artículo: "An Equilibrium Characterization of the Term Structure" (1977) para representar la dinámica de la tasa de interés.

En particular, si se utiliza el cambio de variable $m_t = xr_t - xb$ en la ecuación anterior, entonces, ésta se reescribe como:

$$\frac{d(xr_t - xb)}{dt} = -x(xr_t - xb) + \sigma dZ_t$$

Simplificando:

$$xdr_t = -x(xr_t - xb) + \sigma dZ_t$$

$$dr_t = x(b - r_t) + \sigma dZ_t, \qquad x, b>0 \tag{3.4}$$

Así expresada, la variación de la tasa de interés a lo largo del tiempo indica que ésta fluctúa en torno a la media de largo plazo b, en particular si $r_t > b$, entonces la tasa de interés es forzada a disminuir y si $r_t < b$, la tasa de interés tiende a aumentar; la velocidad de ajuste está determinada por x.

3. 2 ELECCIÓN DE LOS CONSUMIDORES BAJO INCERTIDUMBRE DE LA TASA DE INTERÉS

Los consumidores maximizan el flujo esperado de la utilidad que obtendrán en cada momento del tiempo por el consumo de bienes. Suponemos que estos agentes son adversos al riesgo, y por tanto es posible representar su utilidad a través de una función logarítmica respecto al consumo.[4]

El problema de optimización del consumidor representativo es:

$$\text{Max } E\left\{\int_0^{\infty} \ln(C_t)e^{-\rho t}dt \mid F_0\right\}, \qquad 0<\rho<1 \tag{3.5}$$

Donde C_t es el consumo en el instante t, ρ es la tasa subjetiva de descuento y F_0 denota la información disponible en t=0.

La maximización del flujo de utilidad esperada queda restringida a la variación de la riqueza del individuo, dada por:

$$\text{S. a } \; da_t = a_t\varepsilon_t w dt + a_t(1-\varepsilon_t)dR_t - C_t dt \qquad 0<\varepsilon_t<1 \tag{3.6}$$

$$\varepsilon_t = \frac{\gamma N_t^s}{a_t} \tag{3.7}$$

$$(1-\varepsilon_t) = \frac{\gamma K_t^s}{a_t} \tag{3.8}$$

En (3.6) se expresa la ecuación de evolución de la riqueza real a_t (o restricción presupuestal intertemporal) del consumidor; ésta se constituye por la fracción ε_t que se obtiene por el trabajo (el producto de la tasa de salario real w por las unidades de trabajo N_t^s ofrecidas a la producción), la fracción (1-ε_t) que se obtiene por la propiedad de capital (el producto de la tasa de interés real dR_t por las unidades de capital K_t^s ofrecidas a la producción) y la reducción ocasionada por el gasto en consumo C_t. El parámetro γ se introduce para expresar en tasas las cantidades de los bienes trabajo y capital.

El rendimiento que se obtiene al ofrecer capital a las firmas es:

$$dR_t = \frac{dr_t}{r_t} = (\mu-\delta)dt + \sigma dZ_t, \quad dZ_t \sim N(0,dt) \tag{3.9}$$

En la ecuación (3.9) se establece que la variación de la tasa de interés se describe por una ecuación diferencial estocástica, donde μ es una constante conocida, δ es la tasa constante de depreciación del capital, σ es la volatilidad de la tasa de interés y Z_t es un

---

[4] Una función $f(x)$ doblemente diferenciable y cóncava representa preferencias adversas al riesgo si y sólo si $f''(x) < 0$.

movimiento browniano estandarizado, es decir Z_t tiene rendimientos normales independientes con $E[Z_t]=0$ y $Var[Z_t]=dt$.

La sustitución de (3.9) en (3.6) conduce a la restricción presupuestal:

$$da_t = a_t\varepsilon_t w dt + a_t(1-\varepsilon_t)[(\mu-\delta)dt + \sigma dZ_t] - C_t dt$$

$$da_t = a_t\left[\varepsilon_t w + (1-\varepsilon_t)(\mu-\delta) - \frac{C_t}{a_t}\right]dt + a_t(1-\varepsilon_t)\sigma dZ_t \qquad (3.10)$$

Si se define:

$$J(a_t,t) = E\left\{\int^{\infty} \ln(C_s)e^{-\rho s}ds \mid F_t\right\} \qquad (3.11)$$

Y escribimos esto como:

$$J(a_t,t) = \max E\left\{\int^{+dt} \ln(C_s)e^{-\delta s}ds + \int_{+dt}^{\infty} \ln(C_s)\middle| F_t\right\}$$

$$J(a_t,t) = \max E\left\{\int^{+dt} \ln(C_s)e^{-\delta s}ds + J(a_t + da_t, t+dt)\middle| F_t\right\}$$

Utilizando el teorema del valor medio para integrales definidas y la expansión en series de Taylor:

$$J(a_t,t) = \max E\left\{\ln(C_s)e^{-\rho s}dt + (0)dt + J(a_t,t) + dJ(a_t,t)\middle| F_t\right\}$$

Si aplicamos el lema de Itô para una ecuación diferencial estocástica con un movimiento browniano, entonces:

$$J(a_t,t) = E\left\{\ln(C_t)e^{-\rho t} + (0)dt + J(a_t,t) + J_t dt + J_a a_t[\varepsilon_t w + (1-\varepsilon_t)(\mu-\delta) - C_t/a_t]dt\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}J_{aa}a_t^2\sigma^2(1-\varepsilon_t)^2\right)dt + J_a a_t\sigma(1-\varepsilon_t)dZ_t\left| F_t\right\}$$

Donde los subíndices de J_t, J_a, J_{aa}, denotan las primeras o segundas derivadas parciales de la función solución $J(a_t, t)$.

Si se obtienen los valores esperados en los términos de la ecuación anterior y se simplifica, obtenemos la ecuación de Hamilton – Jacobi - Bellman:

$$HJB(C_t,\varepsilon_t;a_t,t) = \left\{\ln(C_t) + J_t + J_a a_t\left(\varepsilon_t w + (1-\varepsilon_t)(\mu-\delta) - \frac{C_t}{a_t}\right)\right.$$

$$+\frac{1}{2}J_{aa}a_t^{\ 2}\sigma^2(1-\varepsilon_t)^2\Bigg\}$$

Si C_t y ε_t son óptimos, entonces se obtiene la siguiente ecuación diferencial parcial de segundo orden:

$$0=\left\{\ln(C_t)+J_t+J_a a_t\left(\varepsilon_t w+(1-\varepsilon_t)(\mu-\delta)-\frac{C_t}{a_t}\right)+\frac{1}{2}J_{aa}a_t^2\sigma^2(1-\varepsilon_t)^2\right\} \tag{3.12}$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial HJB}{\partial C_t}=\frac{1}{C_t}-J_a \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial HJB}{\partial \varepsilon_t}=J_a a_t w-J_a a_t(\mu-\delta)-J_{aa}a_t^{\ 2}(1-\varepsilon_t)\sigma^2 \tag{3.14}$$

Además de la condición de transversalidad:

$$\lim_{t\to\infty} ae^{-\rho t}=0$$

Esta última condición garantiza que al final del horizonte de planeación, el valor de la riqueza real del individuo, en valor presente, es cero.

Ahora bien, el candidato de solución de (3.12) es:

$$J(a_t,t)=\alpha_0+\alpha_1\ln(a_t) \tag{3.15}$$

De donde:

$$J_a=\frac{\alpha_1}{a_t} \tag{3.16}$$

$$J_{aa}=-\frac{\alpha_1}{a_t^2} \tag{3.17}$$

Si determinamos los coeficientes de (3.15) como:

$$\alpha_1=\frac{1}{\rho}$$

$$\alpha_0=\frac{1}{\rho}\left\{\ln(\rho)+\frac{1}{\rho}\big(\varepsilon_t w+(1-\varepsilon_t)(\mu-\delta)-\rho\big)-\frac{1}{2\rho}(1-\varepsilon_t)^2\sigma^2\right\}$$

Entonces, al sustituir α_1 en las ecuaciones (3.16) y (3.17) y éstas a su vez en (3.13) y (3.14) se obtiene:

$$\frac{1}{C_t} = \frac{1}{\rho a_t}$$

$$C_t = \rho a_t \tag{3.18}$$

Es decir, en cada fecha t, el consumo óptimo es una proporción constante de la riqueza. También se obtiene:

$$a_t \frac{1}{\rho a_t} w - a_t \frac{1}{\rho a_t}(\mu - \delta) = -\frac{1}{\rho a_t^2} a_t^2 (1-\varepsilon_t)\sigma^2$$

$$w - (\mu - \delta) = -(1-\varepsilon_t)\sigma^2$$

$$(1-\varepsilon_t) = \frac{(\mu - \delta) - w}{\sigma^2} \tag{3.19}$$

En esta última ecuación utilizamos las definiciones (3.7) y (3.8):

$$\varepsilon_t = \frac{\gamma N_t^s}{a_t} \qquad\qquad (1-\varepsilon_t) = \frac{\gamma K_t^s}{a_t}$$

Por lo tanto:

$$K_t^s = a_t \frac{(\mu - \delta) - w}{\gamma\sigma^2} \tag{3.20}$$

$$N_t^s = \frac{a_t}{\gamma}\left\{1 + \frac{w - (\mu - \delta)}{\sigma^2}\right\} \tag{3.21}$$

Evaluamos ahora las propiedades de los resultados (3.20) y (3.21):

$$\frac{\partial K_t^s}{\partial(\mu - \delta)} = \frac{a_t}{\gamma\sigma^2}$$

$$\frac{\partial^2 K_t^s}{\partial(\mu - \delta)^2} = 0$$

$$\frac{\partial K_t^s}{\partial\sigma^2} = -\frac{a_t[(\mu - \delta) - w]}{\gamma(\sigma^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 K_t^s}{\partial(\sigma^2)^2} = \frac{2a_t[(\mu - \delta) - w]}{\gamma(\sigma^2)^3}$$

De (3.20) considérese que (μ-δ), es la parte determinista que explica la variación del rendimiento del capital, por tanto, si $\mu > \delta$ entonces, la cantidad de capital que los hogares ofrecen a las firmas en cada fecha t, es positiva respecto al rendimiento esperado de la tasa de interés. Asimismo, se observa que la oferta de capital es negativa creciente respecto a la volatilidad de la tasa de interés, un resultado que refleja la aversión al riesgo de los consumidores.

Respecto a las propiedades de la oferta de trabajo:

$$\frac{\partial N_t^s}{\partial w} = \frac{a_t}{\gamma\sigma^2}$$

$$\frac{\partial^2 N_t^s}{\partial w^2} = 0$$

Como se observa, el trabajo que se ofrece en cada instante del tiempo varía positivamente con el salario real; asimismo, dado que el individuo obtiene su riqueza por el capital y el trabajo que ofrece a las firmas, note que un incremento en el rendimiento que se obtiene por ofrecer capital, reduce la oferta de trabajo.

Ahora bien, si se desea representar más fielmente la dinámica de la tasa de interés real a través del proceso de Ornstein – Uhlenbeck, ésta se comporta de acuerdo con:

$$dR_t = x(b - r_t)dt + \sigma dZ_t, \qquad dZ_t \sim N(0, dt) \tag{3.22}$$

Lo que significa que la tasa de interés fluctúa hacia su media de largo plazo b, mientras que el componente estocástico dZ_t indica que se fluctúa de forma errática en torno al valor promedio de largo plazo.

Si deseamos considerar la depreciación del capital δ, podemos suponer que $b = m - \delta$, donde m es una constante.

Al utilizar la ecuación (3.22) en lugar de (3.8) la restricción presupuestal es ahora:

$$da_t = a_t\left[\varepsilon_t w + (1-\varepsilon_t)x(b - r_t) - \frac{C_t}{a_t}\right]dt + a_t(1-\varepsilon_t)\sigma dZ_t \tag{3.23}$$

Por lo tanto, si C_t y ε_t son óptimos, tenemos la siguiente ecuación diferencial parcial de segundo orden:

$$0 = \left\{\ln(C_t) + J_t + J_a a_t\left(\varepsilon_t w + (1-\varepsilon_t)x(b - r_t) - \frac{C_t}{a_t}\right) + \frac{1}{2}J_{aa}a_t^2\sigma^2(1-\varepsilon_t)^2\right\} \tag{3.24}$$

A partir de la ecuación (3.24) obtenemos como condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial HJB}{\partial C_t} = \frac{1}{C_t} - J_a \tag{3.25}$$

$$\frac{\partial HJB}{\partial \varepsilon_t} = J_a a_t w - J_a a_t x(b - r_t) - J_{aa} a_t^2 (1 - \varepsilon_t)\sigma^2 \tag{3.26}$$

Conservando como candidato de solución de (3.24) a la ecuación (3.15) y a las derivadas (3.16) y (3.17), pero utilizando como coeficientes:

$$\alpha_1 = \frac{1}{\rho}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\rho}\left\{\ln(\rho) + \frac{1}{\rho}\left(\varepsilon_t w + (1 - \varepsilon_t)x(b - r_t) - \rho\right) - \frac{1}{2\rho}(1 - \varepsilon_t)^2 \sigma^2\right\}$$

Sustituyendo α_1 en las ecuaciones (3.16) y (3.17) y éstas en (3.25) y (3.26) se obtiene:

$$C_t = \rho a_t \tag{3.27}$$

$$(1 - \varepsilon_t) = \frac{x(b - r_t) - w}{\sigma^2} \tag{3.28}$$

Nuevamente, usando las definiciones de ε_t y $(1\text{-}\varepsilon_t)$:

$$K_t^s = a_t \frac{x(b - r_t) - w}{\gamma\sigma^2} \tag{3.29}$$

$$N_t^s = \frac{a_t}{\gamma}\left\{1 + \frac{w - x(b - r_t)}{\sigma^2}\right\} \tag{3.30}$$

Obtenemos por tanto que si la dinámica de la tasa de interés real sigue un proceso Ornstein – Uhlenbeck, los comportamientos del consumo y de la oferta de trabajo y capital son similares a los que se obtienen cuando la tasa de interés real varía de acuerdo a un proceso geométrico browniano; note en particular que si $b\text{-}r_t > 0$, la oferta de capital es positiva respecto a la tasa de interés real.

3.3 ELECCIÓN DE LAS FIRMAS BAJO INCERTIDUMBRE DE LA TASA DE INTERÉS

La firma representativa maximiza el flujo esperado de ganancias o equivalentemente maximiza el valor real de su producción esperada:

$$\text{Max } E\left\{\int_0^{\infty}(Y_t)^{\eta} e^{-\rho t} \mid F_0\right\}, \qquad 0<\rho<1 \qquad 0<\eta<1 \tag{3.31}$$

Donde Y_t representa el valor real de la producción obtenida con los insumos capital y trabajo, η es el grado de homogeneidad de la función de producción (que puede exhibir rendimientos a escala, generalmente se suponen constantes) y ρ es la tasa de descuento.

$$\text{S. a } \; d\Pi_t = Y_t dt - \Pi_t \theta_t w dt - \Pi_t(1-\theta_t)dR_t \tag{3.32}$$

La ecuación (3.32) representa la evolución de los beneficios Π_t. Las ganancias de cada fecha t, dependen del valor de la producción Y_t y el costo que se paga por los factores capital K_t^d y trabajo N_t^d, éstos expresados en términos de su participación en los beneficios:

$$\theta_t = \frac{\xi N_t^d}{\Pi_t} \tag{3.33}$$

$$(1-\theta_t) = \frac{\xi K_t^d}{\Pi_t} \tag{3.34}$$

Como en el caso del consumidor, los rendimientos que se pagan por la utilización del capital siguen la ecuación diferencial estocástica:

$$dR_t = \frac{dr_t}{r_t} = (\mu-\delta)dt + \sigma dZ_t, \quad dZ_t \sim N(0,dt)$$

Entonces, puede reescribirse (3.32) como:

$$d\Pi_t = \Pi_t\left[\frac{Y_t}{\Pi_t} - \theta_t w - (1-\theta_t)(\mu-\delta)\right]dt - \Pi_t(1-\theta_t)\sigma dZ_t \tag{3.35}$$

Definimos:

$$J(\Pi_t, t) = E\left\{\int_t^{\infty}(Y_s)^{\eta} e^{-\rho s} \mid F_t\right\} \tag{3.36}$$

Entonces, puede expresarse la siguiente ecuación de Hamilton – Jacobi – Bellman:

$$\text{Max}(Y_t,\theta_t;\Pi_t,t) = \left\{(Y_t)^{\eta} + J_t + J_{\Pi}\Pi_t\left(\frac{Y_t}{\Pi_t} - \theta_t w - (1-\theta_t)(\mu-\delta)\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}J_{\Pi\Pi}\Pi_t^2(1-\theta_t)^2\sigma^2\right\}$$

Si Y_t y θ_t son óptimos, entonces se obtiene la siguiente ecuación diferencial parcial de segundo orden en V:

$$0=\left\{(Y_t)^{\eta}-J_t+J_{\Pi}\Pi_t\left(\frac{Y_t}{\Pi_t}-\theta_t w-(1-\theta_t)(\mu-\delta)\right)+\frac{1}{2}J_{\Pi\Pi}\Pi_t^2(1-\theta_t)^2\sigma^2\right\} \tag{3.37}$$

A partir de (3.37) obtenemos las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial HJB}{\partial Y_t}=\eta Y_t^{\eta-1}+J_{\Pi} \tag{3.38}$$

$$\frac{\partial HJB}{\partial \theta_t}=-J_{\Pi}\Pi_t w+J_{\Pi}\Pi_t(\mu-\delta)-J_{\Pi\Pi}\Pi_t^2(1-\theta_t)\sigma^2 \tag{3.39}$$

Junto con la condición de transversalidad que asegura un valor presente de los beneficios reales esperados, igual a cero.

$$\lim_{t\to\infty}\Pi e^{-\rho t}=0$$

Proponemos como candidato de solución de (3.37) a:

$$J=\beta_0+\beta_1\Pi_t^{\gamma} \qquad 0<\gamma<1 \tag{3.40}$$

Entonces:

$$J_{\Pi}=\beta_1\gamma\Pi_t^{\gamma-1} \tag{3.41}$$

$$J_{\Pi\Pi}=\beta_1\gamma(\gamma-1)\Pi_t^{\gamma-2} \tag{3.42}$$

Con el coeficiente:

$$\beta_1=-\frac{1}{\rho}$$

Sustituyendo éste en las ecuaciones (3.41) y (3.42) y éstas a su vez en (3.38) y (3.39) se obtiene:

$$\eta Y_t^{\eta-1}=\frac{\gamma\Pi_t^{\gamma-1}}{\rho}$$

$$Y_t=\left(\frac{\gamma}{\eta\rho}\right)^{\frac{1}{\eta-1}}(\Pi_t)^{\frac{\gamma-1}{\eta-1}} \tag{3.43}$$

De la segunda condición de equilibrio se obtiene:

$$-\Pi_t\frac{\gamma}{\rho}\Pi_t^{\gamma-1}w+\Pi_t\frac{\gamma}{\rho}\Pi_t^{\gamma-1}(\mu-\delta)=\Pi_t^2\frac{\gamma}{\rho}(\gamma-1)\Pi_t^{\gamma-2}(1-\theta_t)\sigma^2$$

$$\Pi_t^{\gamma}w-\Pi_t^{\gamma}(\mu-\delta)=-(\gamma-1)\Pi_t^{\gamma}(1-\theta_t)\sigma^2$$

$$w-(\mu-\delta)=-(\gamma-1)(1-\theta_t)\sigma^2$$

$$(1-\theta_t)=\frac{(\mu-\delta)-w}{\sigma^2(\gamma-1)} \tag{3.44}$$

Si utilizamos las definiciones (3.33) y (3.34):

$$\theta_t=\frac{\xi N_t^d}{\Pi_t}, \qquad (1-\theta_t)=\frac{\xi K_t^d}{\Pi_t}$$

$$K_t^d=\Pi_t\frac{(\mu-\delta)-w}{\xi\sigma^2(\gamma-1)} \tag{3.45}$$

$$N_t^d=\Pi_t\frac{(\gamma-1)\sigma^2-(\mu-\delta)+w}{\xi\sigma^2(\gamma-1)} \tag{3.46}$$

Examinamos ahora los resultados obtenidos. La ecuación (3.43) expresa la oferta de producto; determinamos sus propiedades respecto a los beneficios esperados:

$$\frac{\partial Y_t}{\partial \Pi_t}=\frac{\gamma-1}{\eta-1}(\Pi_t)^{\frac{\gamma-1}{\eta-1}-1}\left(\frac{\gamma}{\eta\rho}\right)^{\frac{1}{\eta-1}}$$

$$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial \Pi_t^{\,2}}=\left(\frac{\gamma-1}{\eta-1}\right)\left(\frac{\gamma-\eta}{\eta-1}\right)(\Pi_t)^{\frac{\gamma-\eta}{\eta-1}-1}\left(\frac{\gamma}{\eta\rho}\right)^{\frac{1}{\eta-1}}$$

La primera derivada es positiva porque $(\gamma\text{-}1)<0$ y $(\eta\text{-}1)<0$ debido a que el valor de los parámetros es $0<\gamma<1$ y $0<\eta<1$; mientras que el signo de la segunda derivada depende del valor de $(\gamma\text{-}\eta)$. Entonces, podemos afirmar que la oferta de producto es una función positiva de los beneficios esperados.

La ecuación (3.45) representa la demanda de capital. Sus propiedades son:

$$\frac{\partial K_t^d}{\partial(\mu-\delta)}=\frac{\Pi_t}{\xi\sigma^2(\gamma-1)}$$

$$\frac{\partial^2 K_t^d}{\partial(\mu-\delta)^2}=0$$

$$\frac{\partial K_t^d}{\partial\sigma^2}=-\frac{\Pi_t\left[(\mu-\delta)-w\right]}{\xi(\sigma^2)^2(\gamma-1)}$$

$$\frac{\partial^2 K_t^d}{\partial(\sigma^2)^2} = \frac{2\Pi_t[(\mu-\delta)-w]}{\xi(\sigma^2)^3(\gamma-1)}$$

Observando el signo del parámetro γ, puede afirmarse que la demanda de capital es negativa constante respecto al rendimiento promedio esperado de la tasa de interés (μ-δ). La demanda de capital también es positiva creciente de la volatilidad esperada de la tasa de interés; este hecho no es sorprendente si consideramos que en la literatura económica y financiera generalmente se asume que la firma es neutral al riesgo.

Respecto a la demanda de trabajo (3.46):

$$\frac{\partial N_t^d}{\partial w} = \frac{\Pi_t}{\xi\sigma^2(\gamma-1)}$$

$$\frac{\partial^2 N_t^d}{\partial w^2} = 0$$

Obtenemos que la demanda de trabajo disminuye conforme se incrementa el salario real.

Si ahora utilizamos el proceso de Ornstein – Uhlenbeck para representar la dinámica de la tasa de interés de acuerdo con la ecuación (3.22), si Y_t y θ_t son óptimos, entonces la ecuación Hamilton – Jacobi – Bellman es:

$$0 = \left\{(Y_t)^\eta - J_t + J_\Pi \Pi_t\left(\frac{Y_t}{\Pi_t} - \theta_t w - (1-\theta_t)x(b-r_t)\right) + \frac{1}{2}J_{\Pi\Pi}\Pi_t^2(1-\theta_t)^2\sigma^2\right\} \qquad (3.47)$$

A partir de (3.47) obtenemos las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial HJB}{\partial Y_t} = \eta Y_t^{\eta-1} + J_\Pi \qquad (3.48)$$

$$\frac{\partial HJB}{\partial \theta_t} = -J_\Pi \Pi_t w + J_\Pi \Pi_t x(b-r_t) - J_{\Pi\Pi}\Pi_t^2(1-\theta_t)\sigma^2 \qquad (3.49)$$

Conservando como candidato solución de (3.47) a la función (3.40) y sus derivadas (3.41) y (3.42) y el valor del coeficiente β_1, entonces de las condiciones de primer orden se obtiene:

$$Y_t = \left(\frac{\gamma}{\eta\rho}\right)^{\frac{1}{\eta-1}}(\Pi_t)^{\frac{\gamma-1}{\eta-1}} \qquad (3.50)$$

$$-\Pi_t \frac{\gamma}{\rho} \Pi_t^{\gamma-1} w + \Pi_t \frac{\gamma}{\rho} \Pi_t^{\gamma-1} x(b - r_t) = \Pi_t^2 \frac{\gamma}{\rho} (\gamma - 1) \Pi_t^{\gamma-2} (1 - \theta_t) \sigma^2$$

$$w - x(b - r_t) = -(\gamma - 1)(1 - \theta_t) \sigma^2$$

$$(1 - \theta_t) = \frac{x(b - r_t) - w}{\sigma^2 (\gamma - 1)} \tag{3.51}$$

Recuperando las definiciones de θ_t y $(1-\theta_t)$:

$$K_t^d = \Pi_t \frac{x(b - r_t) - w}{\xi \sigma^2 (\gamma - 1)} \tag{3.52}$$

$$N_t^d = \frac{\Pi_t (\gamma - 1)\sigma^2 - \Pi_t (\mu - \delta) + \Pi_t w}{\xi \sigma^2 (\gamma - 1)} \tag{3.53}$$

Los resultados (3.50), (3.52) y (3.53) muestran que cuando la tasa de interés sigue un proceso Ornstein – Uhlenbeck, la oferta de producto, la demanda de capital y la demanda de trabajo se comportan de la misma manera que en el caso en que la tasa de interés sigue un proceso geométrico browniano.

3.4 EQUILIBRIO GENERAL

En esta sección deducimos cuáles son las trayectorias de equilibrio del consumo y del producto que representan el equilibrio general, en el caso de base cuando la tasa de interés se comporta de acuerdo con un movimiento geométrico browniano.[5]

En el caso del consumidor, si sustituimos en (3.10) las ecuaciones de equilibrio del consumo, del trabajo y del capital obtenidas:

$$da_t = a_t \left[\left(\frac{\sigma^2 - (\mu - \delta) + w}{\sigma^2} \right) w + \left(\frac{(\mu - \delta) - w}{\sigma^2} \right) (\mu - \delta) - \rho \right] dt + a_t \left(\frac{(\mu - \delta) - w}{\sigma^2} \right) \sigma dZ_t$$

[5] En un problema de optimización intertemporal, las trayectorias de consumo y producción representan el equilibrio general competitivo si éstas cumplen: a) las cantidades resultantes demandadas (u ofrecidas) de bienes en cada instante del tiempo son nulas o positivas, b) en cada instante del tiempo se satisfacen las restricciones de los problemas de optimización, c) las secuencia de consumo y de producción son resultado de un ejercicio de optimización, d) se satisfacen las condiciones de transversalidad. Véase Mas-Collell, A., Whinston, M. D. y Green, J. (1995). *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, EUA, capítulo 20.

$$da_t = a_t\left[\frac{\sigma^2(w-\rho)+\left((\mu-\delta)-w\right)^2}{\sigma^2}\right]dt + a_t\left(\frac{(\mu-\delta)-w}{\sigma}\right)dZ_t$$

Si aplicamos el lema de Itô a $dln\ a_t$:

$$d\ln a_t = \left[(w-\rho)+\frac{1}{2}\left(\frac{(\mu-\delta)-w}{\sigma}\right)^2\right]dt + \frac{(\mu-\delta)-w}{\sigma}dZ_t \tag{3.54}$$

Tenemos una ecuación diferencial estocástica, cuya solución es:

$$a_t = a_0\exp\left\{\left[(w-\rho)+\frac{1}{2}\left(\frac{(\mu-\delta)-w}{\sigma}\right)^2\right]t + \frac{(\mu-\delta)-w}{\sigma}\varepsilon\sqrt{t}\right\} \tag{3.55}$$

Donde $Z_t = \varepsilon\sqrt{t}$.

Entonces, podemos expresar la trayectoria óptima del consumo como:

$$C_t = \frac{1}{\rho}a_0\exp\left\{\left[(w-\rho)+\frac{1}{2}\left(\frac{(\mu-\delta)-w}{\sigma}\right)^2\right]t + \frac{(\mu-\delta)-w}{\sigma}\varepsilon\sqrt{t}\right\} \tag{3.56}$$

Ahora bien, con la finalidad de obtener la trayectoria óptima de producción, sustituimos primero los valores óptimos de Y_t y θ_t en (3.35):

$$d\Pi_t = \Pi_t\left[\left(\frac{\sigma^2(\gamma-1)-(\mu-\delta)+w}{\sigma^2(\gamma-1)}\right)w + \left(\frac{(\mu-\delta)-w}{\sigma^2(\gamma-1)}\right)(\mu-\delta) - \left(\frac{\gamma}{\eta\rho}\right)^{\frac{1}{\eta-1}}(\Pi_t)^{\frac{\gamma-1}{\eta-1}-1}\right]dt$$

$$-\left(\frac{(\mu-\delta)-w}{\sigma^2(\gamma-1)}\right)\Pi_t\sigma dZ_t$$

Simplificando y haciendo el cambio de variable $\nu = \left(\frac{\gamma}{\eta\rho}\right)^{\frac{1}{\eta-1}}$:

$$d\Pi_t = \Pi_t\left[\left(\frac{\sigma^2(\gamma-1)w-[(\mu-\delta)+w]^2}{\sigma^2(\gamma-1)}\right) - \nu(\Pi_t)^{\frac{\gamma-\eta}{\eta-1}}\right]dt - \left(\frac{(\mu-\delta)-w}{\sigma(\gamma-1)}\right)\Pi_t dZ_t$$

Si aplicamos el lema de Itô a $dln\ \Pi_t$ obtenemos la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$d\ln\Pi_t = \left[w+\frac{1}{2}\left(\frac{(\mu-\delta)-w}{\sigma(\gamma-1)}\right)^2\right]dt + \frac{(\mu-\delta)-w}{\sigma(\gamma-1)}dZ_t \tag{3.57}$$

Cuya solución es:

$$\Pi_t = \Pi_0 \exp\left\{\left[w + \frac{1}{2}\left(\frac{(\mu-\delta)-w}{\sigma(\gamma-1)}\right)^2\right]t + \frac{(\mu-\delta)-w}{\sigma(\gamma-1)}\varepsilon\sqrt{t}\right\} \tag{3.58}$$

Donde $Z_t = \varepsilon\sqrt{t}$. Y la trayectoria óptima de la producción es:

$$Y_t = \left\{Y_0 v \exp\left\{\left[w + \frac{1}{2}\left(\frac{(\mu-\delta)-w}{\sigma(\gamma-1)}\right)^2\right]t + \frac{(\mu-\delta)-w}{\sigma(\gamma-1)}\lambda\sqrt{t}\right\}\right\}^{\frac{\gamma-1}{\eta-1}} \tag{3.59}$$

En (3.56) y en (3.59) se han obtenido las trayectorias óptimas del consumo y del producto.

3.5 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

El modelo que se ha desarrollado en este documento, muestra que los rasgos esenciales que caracterizan las decisiones de los agentes en plena vigencia de la competencia perfecta y en los escenarios de optimización determinista, no se alteran cuando se incorpora incertidumbre a través de una tasa de interés estocástica.

Específicamente, obtenemos que el consumo es una función positiva constante de la riqueza. Los hogares son propietarios del capital y del trabajo, ellos ofrecen ambos a las firmas de forma positiva respecto a sus precios relativos.

Por su parte las firmas eligen producir esperando obtener los máximos beneficios en cada instante del tiempo; para ello demandan insumos de forma negativa respecto al precio relativo de éstos.

Los resultados para las decisiones de consumidores y firmas son semejantes en los casos en que el comportamiento de la tasa real de interés se describe mediante un movimiento geométrico browniano y mediante un proceso Ornstein – Uhlenbeck.

4. DECISIONES DE LOS BANCOS COMERCIALES EN CONDICIONES DE RIESGO E INCERTIDUMBRE

En la literatura económica y financiera, la formalización de las decisiones de los bancos comerciales se desarrolla de acuerdo con alguna de las siguientes líneas de investigación: explicación de la maximización de beneficios, problemas y contradicciones asociados con la determinación de los objetivos de los bancos comerciales, maximización de beneficios en presencia de información asimétrica, estrategias de competencia bancaria, estructura del sistema bancario, regulación bancaria, y crisis y riesgo sistémicos.

En este capítulo, proponemos un modelo en el que se formaliza cómo son las decisiones de optimización de beneficios de un banco comercial representativo. Éste ofrece sus servicios en una estructura de mercado similar a la de la competencia perfecta, excepto porque existe información incompleta entre los agentes, aunque simétrica.

En nuestro modelo, proponemos incorporar la presencia de incertidumbre a través de flujos estocásticos de depósitos y créditos; la variación de cada uno de ellos a lo largo del tiempo, puede representarse mediante la ecuación diferencial estocástica del movimiento geométrico browniano. Asimismo, en nuestro modelo consideramos la existencia del riesgo de crédito que representamos a través de la probabilidad instantánea de incumplimiento de los clientes del banco respecto a los créditos que se les han otorgado.

En la sección 4.1 revisamos la literatura existente respecto a la optimización de beneficios de los bancos comerciales; en la sección 4.2, exponemos el balance contable básico de un banco comercial; en la sección 4.3, mostramos cómo se formaliza la probabilidad de incumplimiento para un momento específico del tiempo y la probabilidad instantánea de cumplimiento; en la sección 4.4 desarrollamos el problema de optimización del banco comercial que conduce a determinar los rendimientos óptimos de los créditos y depósitos; y en la sección 4.5 presentamos las conclusiones del capítulo.

4.1 LA DECISIÓN DE OPTIMIZACIÓN DE UN BANCO COMERCIAL

El problema de modelar la decisión de optimización de ganancias de un banco comercial ha sido planteado en escenarios estáticos y dinámicos, y entre éstos, en condiciones deterministas o de incertidumbre.

El ejemplo representativo de la formalización estática lo aporta James Tobin (1982). Aquí, el banco comercial debe elegir el volumen de créditos que otorga y la cantidad de activos de inversión sin conocer el volumen de los depósitos con que cuenta. Se trata entonces de elegir un portafolio precautorio que maximice sus ganancias. El modelo también supone que la capacidad bancaria de retener depósitos depende del tamaño del banco en relación con los otros bancos existentes.

Al igual que ocurre con las firmas, la decisión óptima para cada banco, se encuentre en una situación competitiva o monopolista, es elegir la cantidad de activos y de pasivos, tal que para cada variante de títulos se verifique la igualdad entre ingreso marginal y costo marginal.

Una de las primeras propuestas para formalizar la elección intertemporal, se debe a Michael Klein (1971). En esa propuesta, los bancos poseen como activos: efectivo, bonos gubernamentales y títulos privados. Los pasivos del banco se componen por depósitos de corto y largo plazo.

Se asume que el banco debe pagar una penalidad si no mantiene suficiente efectivo, pero obtiene un rendimiento seguro respecto a los bonos gubernamentales, y obtiene un rendimiento aleatorio exógeno de los títulos privados debido a que se sospecha el incumplimiento de las compañías privadas; es importante destacar que Klein sólo supone que el rendimiento por los créditos (títulos privados) que otorga siempre es menor que el establecido en el contrato de crédito. En equilibrio, se determinan la tasa de rendimiento que se paga por los depósitos y la que debe recibir el banco de los títulos privados.

Otra de las propuestas pioneras fue la de Richard Towey (1974). En su modelo, la actividad principal de los bancos es la creación de servicios de depósitos, éstos dependen del ingreso real, la tasa de interés del mercado, los servicios adicionales que ofrece el banco, el costo de los servicios adicionales y la demanda de depósitos de otros bancos. Asimismo, se supone que el banco central impone un requerimiento de reservas a los bancos comerciales.

Con estos supuestos, el modelo determina las ganancias de los bancos provenientes de ofrecer un conjunto de depósitos, otorgar créditos y de los cargos por los servicios asociados. Para alcanzar las ganancias máximas, el ingreso marginal de los servicios de depósitos debe igualar al costo marginal. El documento también vincula los servicios de depósitos (o la demanda de dinero global que se crea a través de la actividad bancaria) con la oferta de dinero que determina el banco central.

Maureen O'Hara (1983), considera en su modelo que el administrador del banco comercial maximiza su utilidad proveniente de los beneficios esperados considerando las exigencias de los accionistas (y su deseo de maximizar el rendimiento sobre capital) y de la regulación bancaria.

El problema básico consiste en elegir la composición óptima de activos y pasivos tomando en cuenta que los rendimientos son aleatorios y exógenos porque el banco enfrenta el riesgo de mercado y el riesgo de crédito. En equilibrio, el administrador elige la cantidad de fondos donde la utilidad marginal de su consumo iguala a la desutilidad marginal de su consumo futuro; también se elige la cantidad de activos que satisface la igualdad entre el rendimiento de éstos y su costo marginal.

En la propuesta de Ronald Ratti (1980), el banco maximiza la utilidad esperada de sus beneficios eligiendo los volúmenes óptimos de créditos, valores gubernamentales y reservas; el problema esencial consiste en ajustar esas cantidades suponiendo que el banco es un agente adverso al riesgo (su función de utilidad es cóncava), la incertidumbre respecto al volumen de los depósitos existentes en cada momento del tiempo, y la presencia de riesgo de crédito exógeno.

A diferencia de los modelos anteriores, John Hull (1989) desarrolla el problema de valuar los contratos financieros que mantiene un banco representativo, suponiendo que éstos presentan riesgo de crédito, por ejemplo, la valuación de swaps de monedas. Con esto, se busca determinar cuáles títulos son más adecuados para ajustar el balance contable bancario, aunque no se aborda el problema de maximización de ganancias.

Por último, una propuesta novedosa es la de Raghuram Rajan (1994), en ella, se busca explicar la maximización de las ganancias, pero asociada con la creación de una reputación dentro del mercado crediticio.

Se supone que el propósito del banco comercial es que sus clientes lo reconozcan como facilitador del crédito y que sus competidores reconozcan sus habilidades para otorgar créditos riesgosos y obtener ganancias de éstos.

4.2 EL BALANCE GENERAL BANCARIO

El balance general de una institución bancaria está constituido por sus activos y pasivos. Los activos son todos los títulos y bienes que les permiten obtener utilidades, entre los que se encuentran las reservas, valores, depósitos en otros bancos, cuentas de efectivo en proceso de cobranza, créditos o préstamos otorgados, y capital físico. Los pasivos son los títulos que le permiten al banco obtener recursos financieros, pero que implican el pago de rendimientos por parte del banco; entre éstos se encuentran los depósitos en cuentas de ahorro, los depósitos a largo plazo, los préstamos solicitados a otras instituciones y el capital bancario.

En el siguiente cuadro se escribe en forma simplificada el balance general de un banco.

Cuadro 1. Balance general de un banco comercial

Activos	Pasivos
Préstamos otorgados	Depósitos
Bonos gubernamentales	Capital bancario
Reservas	

4. 3 PROBABILIDAD INSTANTÁNEA DE INCUMPLIMIENTO CON TASA DE RECUPERACIÓN NULA

En el área de riesgo de crédito, la pérdida esperada por incumplimiento, en un mundo neutral al riesgo, se estima a partir de la comparación entre el valor esperado de un título privado riesgoso con el valor esperado de un título similar gubernamental (libre de riesgo).

Si se considera la siguiente nomenclatura:

$B_G(t,T)$ = Precio de un título gubernamental en la fecha t

$B_C(t,T)$ = Precio de un título privado en la fecha t

$r_G(t,T)$ = Tasa de rendimiento entre t y T de un título gubernamental

$r_C(t,T)$ = Tasa de rendimiento entre t y T de un título privado

VN = Valor nominal de títulos públicos y privados

Entonces, suponiendo la existencia de dos bonos con idénticos valor nominal y madurez, el diferencial entre el título privado y el público, es decir la pérdida esperada por incumplimiento es:

$$V(t,T) = B_G(t,T) - B_C(t,T) \tag{4.1}$$

En términos del valor presente de los títulos, considerando capitalización instantánea de interés, el diferencial de precios de los títulos es:

$$V(t,T) = VNe^{-r_G(t,T)(T-t)} - VNe^{-r_C(t,T)(T-t)} \tag{4.2}$$

La pérdida esperada respecto a lo que se hubiera obtenido si no se presentara incumplimiento es:

$$v(t,T) = \frac{VNe^{-r_G(t,T)(T-t)} - VNe^{-r_C(t,T)(T-t)}}{VNe^{-r_G(t,T)(T-t)}} \tag{4.3}$$

Si se prescinde del valor nominal de los títulos, la ecuación anterior se reescribe como:

$$v(t,T) = \frac{e^{-r_G(t,T)(T-t)} - e^{-r_C(t,T)(T-t)}}{e^{-r_G(t,T)(T-t)}}$$

$$v(t,T) = 1 - e^{r_G(t,T)(T-t) - r_C(t,T)(T-t)} \tag{4.4}$$

$$v(t,T) = 1 - e^{-H(t,T)(T-t)}$$

La ecuación (4.4) determina cuál es la probabilidad acumulada de incumplimiento de un título riesgoso, durante el periodo *T-t*, desde el inicio de vigencia del título en la fecha *t*, hasta la fecha de valuación *T*.

Para determinar la probabilidad instantánea de incumplimiento en una fecha específica τ, tal que $t < \tau < T$, restamos la probabilidad de incumplimiento durante τ-*t* a la probabilidad de incumplimiento durante *T-t*, es decir:

$$P(\tau) = v(t,T) - v(t,\tau) = \left(1 - e^{r_G(t,T)(T-t) - r_C(t,T)(T-t)}\right) - \left(1 - e^{r_G(t,\tau)(\tau-t) - r_C(t,\tau)(\tau-t)}\right)$$

$$P(\tau) = v(t,T) - v(t,\tau) = -e^{r_G(t,T)(T-t) - r_C(t,T)(T-t)} + e^{r_G(t,\tau)(\tau-t) - r_C(t,\tau)(\tau-t)}$$

$$P(\tau) = v(t,T) - v(t,\tau) = -e^{-H(t,T)(T-t)} + e^{-H(t,\tau)(\tau-t)} \tag{4.5}$$

Donde:

$$H(t,T)(T-t) = r_G(t,T)(T-t) - r_C(t,T)(T-t)$$

$$H(t,\tau)(\tau-t) = r_G(t,\tau)(\tau-t) - r_C(t,\tau)(\tau-t)$$

La ecuación (4.5) describe la probabilidad de incumplimiento en el instante τ cuando no existe recuperación de los créditos.

A partir de (4.5), también puede determinarse la probabilidad de cumplimiento en τ.

$$Q(\tau) = 1 - P(\tau) = 1 + e^{-H(t,T)(T-t)} - e^{-H(t,\tau)(\tau-t)} \tag{4.6}$$

Utilizaremos más adelante este resultado para estimar las ganancias posibles del banco comercial, los créditos que otorga son estocásticos, pero también hay incertidumbre respecto a si sus clientes cumplirán los compromisos de pago contraídos.

4.4 MODELO DE OPTIMIZACIÓN DE UN BANCO COMERCIAL

El problema de optimización de un banco comercial consiste en maximizar el valor presente de los beneficios esperados Π_t, condicionado al conjunto de información disponible F_0, y utilizando la tasa de descuento δ, es decir:

$$\text{Max} \quad E\left\{\int_0^\infty f(\Pi_t)e^{-\delta t}\,|F_0\right\}, \qquad 0<\delta<1 \tag{4.7}$$

Con las restricciones:

$$d\Pi_t = r_L dL + rR_t + r_G G_t - r_D dD - r_B CB \tag{4.8}$$

$$dL = \mu_L L_t dt + \sigma_L L_t dW_t\,, \qquad dW_t \sim N(0,\sigma^2) \tag{4.9}$$

$$dD = \mu_D D_t dt + \sigma_D D_t dZ_t\,, \qquad dZ_t \sim N(0,\sigma^2) \tag{4.10}$$

$$\text{Cov}\,(dW_t, dZ_t) = \rho\, dt \tag{4.11}$$

Donde:

r_L = Tasa de interés de préstamos (o créditos) bancarios

r = Tasa de interés interbancaria

r_G = Tasa de rendimiento de títulos gubernamentales

r_D = Tasa de interés de depósitos bancarios

r_B = Tasa de rendimiento del capital bancario

L_t = Volumen de créditos otorgados en el tiempo t

D_t = Volumen de depósitos recibidos en el tiempo t

μ_L = Media de largo plazo de los créditos otorgados

σ_L = Volatilidad de los créditos otorgados

μ_D = Media de largo plazo de los depósitos recibidos

σ_L = Volatilidad de los depósitos recibidos

dW_t, dZ_t = Movimientos brownianos estandarizados

La ecuación (4.8) expresa la evolución en el tiempo de los beneficios, éstos dependen de los rendimientos positivos de los activos: préstamos, bonos gubernamentales y reservas bancarias y de los costos asociados con los pasivos: depósitos y capital bancario.

Las ecuaciones (4.9) y (4.10) expresan el comportamiento estocástico de los préstamos o créditos y de los depósitos, respectivamente. Con la expresión (4.11) se supone que los movimientos brownianos de los préstamos y los depósitos están correlacionados. Se supone que esta correlación es positiva debido a que un aumento de los depósitos se traduce en un incremento de recursos para el otorgamiento de créditos.

Para resolver el problema del banco comercial definimos:

$$J(L_t,D_t,t)=E\left\{\int_t^{\infty} f(\Pi_s)e^{-\delta s}ds \,\middle|\, F_t\right\} \tag{4.12}$$

$$J(L_t,D_t,t)=E\left\{\int_t^{t+dt} f(\Pi_s)e^{-\delta s}ds+\int_{t+dt}^{\infty} f(\Pi_s)e^{-\delta s}ds \,\middle|\, F_t\right\}$$

$$J(L_t,D_t,t)=E\left\{\int_t^{t+dt} f(\Pi_s)e^{-\delta s}ds+J(L_t+dL_t,D_t+dD_t,t+dt) \,\middle|\, F_t\right\}$$

Utilizando el teorema del valor medio para integrales definidas y la expansión en series de Taylor:

$$J(L_t,D_t,t)=E\left\{f(\Pi_t)e^{-\delta t}dt+(0)dt+J(L_t,D_t,t)+dJ(L_t,D_t,t) \,\middle|\, F_t\right\}$$

Si aplicamos el lema de Itô para una ecuación diferencial estocástica con dos movimientos brownianos, entonces:

$$\begin{aligned} J(L_t,D_t,t)=E\Bigg\{ & f(\Pi_t)e^{-\delta t}+(0)dt+J(L_t,D_t,t)+\Big(J_t+J_L\mu_L r_L L_t+\frac{1}{2}J_{LL}\sigma_L^2 r_L^2 L_t^2 \\ & +J_D\mu_D r_D D_t+\frac{1}{2}J_{DD}\sigma_D^2 r_D^2 D_t^2+J_{LD}\sigma_L r_L L_t\rho\sigma_D r_D D_t\Big)dt+J_L\sigma_L r_L L_t dW_t+J_D\sigma_D r_D D_t dZ_t \,\Big|\, F_t\Bigg\} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Donde los subíndices de J_t, J_L, J_D, J_{DD}, J_{LL}, J_{LD}, denotan las primeras o segundas derivadas parciales de la función $J(L_t, D_t, t)$.

Con el fin de incorporar los componentes del balance bancario que sólo dependen del tiempo, es decir, las reservas, los títulos gubernamentales y el capital bancario, en el ejercicio de optimización, reescribimos las ecuaciones (4.9) y (4.10):

$$dL = L_t\left(\mu_L + \frac{rR_t}{L_t} + \frac{r_G G}{L_t}\right)dt + \sigma_L L_t dW_t, \qquad dW_t \sim N(0,\sigma^2) \tag{4.14}$$

$$dD = D_t\left(\mu_D + \frac{r_B CB_t}{D_t}\right)dt + \sigma_D D_t dZ_t, \quad dZ_t \sim N(0,\sigma^2) \tag{4.15}$$

Considerando la esperanza matemática de (4.13) e incorporando en ésta (4.14) y (4.15) se obtiene la ecuación de Hamilton – Jacobi – Bellman (HJB):

$$0 = \left\{ f(\Pi_t)e^{-\delta t} + \left[J_t + J_L r_L L_t\left(\mu_L + \frac{rR_t}{L_t} + \frac{r_G G_t}{L_t}\right) + \frac{1}{2}J_{LL}\sigma_L^2 r_L^2 L_t^2 + J_D r_D D_t\left(\mu_D + \frac{r_B CB_t}{D_t}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2}J_{DD}\sigma_D^2 r_D^2 D_t^2 + J_{LD}\sigma_L r_L L_t \rho \sigma_D r_D D_t\right] dt \middle| F_t \right\} \tag{4.16}$$

A partir de esta ecuación obtenemos las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial HJB}{\partial r_L} = J_L L_t\left(\mu_L + \frac{rR_t}{L_t} + \frac{r_G G_t}{L_t}\right) + J_{LL}\sigma_L^2 r_L L_t^2 + J_{LD}\sigma_L L_t \rho \sigma_D r_D D_t \tag{4.17}$$

$$\frac{\partial HJB}{\partial r_D} = J_D D_t\left(\mu_D + \frac{r_B CB_t}{D_t}\right) + J_{DD}\sigma_D^2 r_D D_t^2 + J_{LD}\sigma_L r_L L_t \rho \sigma_D D_t \tag{4.18}$$

Proponemos como candidato solución de la ecuación (4.16) a la función:

$$J = \frac{1}{\delta} L_t^{\alpha} D_t^{1-\alpha} e^{-\delta t}, \qquad 0<\alpha<1 \tag{4.19}$$

A partir de ésta obtenemos:

$$J_t = -L_t^{\alpha} D_t^{1-\alpha} e^{-\delta t}$$

$$J_L = \frac{\alpha}{\delta} L_t^{\alpha-1} D_t^{1-\alpha} e^{-\delta t}$$

$$J_D = \frac{1-\alpha}{\delta} L_t^{\alpha} D_t^{-\alpha} e^{-\delta t}$$

$$J_{LL} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{\delta} L_t^{\alpha-2} D_t^{1-\alpha} e^{-\delta t}$$

$$J_{DD} = -\frac{\alpha(1-\alpha)}{\delta} L_t^{\alpha} D_t^{-\alpha-1} e^{-\delta t}$$

$$J_{LD} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\delta} L_t^{\alpha-1} D_t^{-\alpha} e^{-\delta t}$$

Sustituyendo estas derivadas parciales en (4.17) y (4.18) obtenemos:

$$\frac{\alpha}{\delta}L_t^{\alpha-1}D_t^{1-\alpha}e^{-\delta t}L_t\left(\mu_L+\frac{rR_t}{L_t}+\frac{r_GG_t}{L_t}\right)+\frac{\alpha(\alpha-1)}{\delta}L_t^{\alpha-2}D_t^{1-\alpha}e^{-\delta t}\sigma_L^2r_LL_t^2$$

$$=-\frac{\alpha(1-\alpha)}{\delta}L_t^{\alpha-1}D_t^{-\alpha}e^{-\delta t}\sigma_LL_t\rho\sigma_Dr_DD_t$$

Simplificando:

$$\left(\mu_L+\frac{rR_t}{L_t}+\frac{r_GG_t}{L_t}\right)+(\alpha-1)\sigma_L^2r_L=-(1-\alpha)\sigma_L\rho\sigma_Dr_D \tag{4.20}$$

Y de (4.18):

$$\frac{1-\alpha}{\delta}L_t^{\alpha}D_t^{-\alpha}e^{-\delta t}D_t\left(\mu_D+\frac{r_BCB_t}{D_t}\right)-\frac{\alpha(1-\alpha)}{\delta}L_t^{\alpha}D_t^{-\alpha-1}e^{-\delta t}\sigma_D^2r_DD_t^2$$

$$=-\frac{\alpha(1-\alpha)}{\delta}L_t^{\alpha-1}D_t^{-\alpha}e^{-\delta t}r_L\sigma_LL_t\rho\sigma_DD_t$$

Simplificando:

$$\left(\mu_D+\frac{r_BCB_t}{D_t}\right)-\alpha\sigma_D^2r_D=-\alpha\sigma_Lr_L\rho\sigma_D \tag{4.21}$$

La ecuación expresada en (4.20) proviene de la optimización de la tasa de interés que debe recibir el banco de los créditos que otorga. Con el fin de interpretar este resultado, recuperamos la ecuación (4.4) de la tercera sección; definimos la probabilidad acumulada de incumplimiento de un título riesgoso como:

$$v(t,T)=1-e^{r_G(t,T)(T-t)-r_C(t,T)(T-t)}$$

De donde podemos obtener ahora que:

$$r_G=\ln[1-v(t,T)]+r_C \tag{4.22}$$

Donde se expresa la tasa de los títulos gubernamentales en términos de la probabilidad acumulada de incumplimiento de los títulos privados; sin embargo nos interesa la probabilidad instantánea, no la acumulada, por lo tanto, de (4.5):

$$v(t,T)=P(\tau)+v(t,\tau)$$

Utilizando este cambio de variable en (4.22):

$$r_G=\ln[1-P(\tau)-v(t,\tau)]+r_C \tag{4.23}$$

O bien:

$$r_G = \ln[Q(\tau) - \nu(t,\tau)] + r_C \tag{4.24}$$

En (4.24), se muestra el rendimiento de los títulos gubernamentales en términos de la probabilidad instantánea de sí cumplimiento $Q(\tau)$, de los títulos privados.

Ahora encontramos los determinantes de la tasa crédito. De (4.20) resolvemos para r_L:

$$r_L = \left[-(1-\alpha)\sigma_L \rho \sigma_D r_D - \left(\mu_L + \frac{rR_t}{L_t} + \frac{r_G G_t}{L_t} \right) \right] \left[(\alpha - 1)\sigma_L^2 \right]^{-1}$$

Sustituimos aquí (4.24), suponiendo que el rendimiento de los títulos privados riesgosos equivalen justamente al rendimiento de los créditos que el banco otorga, es decir $r_C = r_L$:

$$r_L = \left[-(1-\alpha)\sigma_L \rho \sigma_D r_D - \left(\mu_L + \frac{rR_t}{L_t} + \frac{\left[\ln(Q(\tau) - \nu(t,\tau)) + r_L\right] G_t}{L_t} \right) \right] \left[(\alpha - 1)\sigma_L^2 \right]^{-1}$$

$$r_L = \left\{ \frac{(1-\alpha)\sigma_L \rho \sigma_D r_D + \mu_L + \frac{rR_t}{L_t} + \frac{G_t \ln\left(Q(\tau) - \nu(t,\tau)\right)}{L_t}}{(1-\alpha)\sigma_L^2} \right\} \left[\frac{L_t}{L_t - G_t(1-\alpha)\sigma_L^2} \right]$$

Y en el instante t:

$$r_L = \left\{ \frac{(1-\alpha)\sigma_L \rho \sigma_D r_D + \mu_L + \frac{rR_t}{L_t} + \frac{G_t \ln\left(Q(t) - \nu(0,t)\right)}{L_t}}{(1-\alpha)\sigma_L^2} \right\} \left[\frac{L_t}{L_t - G_t(1-\alpha)\sigma_L^2} \right] \tag{4.25}$$

Entonces, la tasa de créditos óptima depende de las siguientes variables y signos (las condiciones bajo las cuales se obtienen estos signos se muestran en el Apéndice 4B):

$$r_L = f\left(\overset{-}{G_t}, \overset{-}{L_t}, \overset{-}{R_t}, \overset{-}{\sigma_L} . \overset{-}{Q(t)}, \overset{+}{P(t)} \right) \tag{4.26}$$

Es decir, la tasa de créditos óptima tiende a aumentar cuando se incrementa la probabilidad instantánea de incumplimiento. La tasa de los créditos se reduce si aumenta la cantidad de reservas y títulos públicos que el banco posee, cuando se incrementa la demanda de créditos y la volatilidad de éstos, y cuando se incrementa la probabilidad de cumplimiento instantáneo de los créditos.

A partir de (4.21):

$$r_D = \frac{\alpha \sigma_L r_L \rho \sigma_D + \left(\mu_D + \frac{r_B CB}{D_t} \right)}{\alpha \sigma_D^2} \tag{4.27}$$

Por lo tanto,

$$r_D = f\left(\overset{+}{CB_t}, \overset{-}{D_t}, \overset{+}{\sigma_D} \right) \tag{4.28}$$

La tasa de interés para los depósitos bancarios, es una función negativa de la cantidad de depósitos; también es una función creciente del capital bancario y de la volatilidad de los depósitos.

4.5 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

En este documento se ha desarrollado un modelo de optimización de ganancias para un banco comercial representativo.

En la mayor parte de las propuestas al respecto, la elección del banco se asemeja a la de una firma en competencia perfecta; se trata de elegir cantidades óptimas tomando los precios como dados. En los modelos intertemporales, las decisiones de este agente económico son función de tasas de rendimiento aleatorias.

En cambio, en nuestra propuesta, se terminan las tasas óptimas de depósitos y préstamos (tasas pasivas y activas); mientras que la incertidumbre está presente en depósitos y préstamos estocásticos, además de la probabilidad de que los prestatarios (clientes del banco) incumplan con sus compromisos de pago.

Como resultados, se encuentra que la tasa de crédito depende negativamente de las magnitudes que constituyen los activos del banco, así como de la volatilidad de los créditos, pero esta tasa se incrementa con la probabilidad de incumplimiento instantánea asociada al préstamo.

Por otro lado, el rendimiento que el banco ofrece a los depósitos es una función negativa de los depósitos bancarios, y positiva del capital bancario y de la volatilidad de los depósitos.

Apéndice 4. A

En esta sección definimos el lema de Itô para una ecuación diferencial estocástica con dos movimientos brownianos:

Dada la ecuación diferencial estocástica con dos factores de riesgo: dW_t, dZ_t:

$$dS_t = \mu(S_t,t)dt + \sigma_1(S_t,t)dW_t + \sigma_2(S_t,t)dZ_t$$

Cov (dW_t, dZ_t)= $\rho\, dt$

El lema de Itô con dos factores de riesgo es:

$$dy = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S_t}\mu(S_t,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}\left(\sigma_1^2(S_t,t) + \sigma_2^2(S_t,t)\right) + 2\sigma_1(S_t,t)\sigma_2(S_t,t)\rho\right]dt$$

$$+\frac{\partial f}{\partial S_t}\sigma_1(S_t,t)dW_t + \frac{\partial f}{\partial S_t}\sigma_2(S_t,t)dZ_t$$

Apéndice 4. B

A partir de la ecuación:

$$r_L = \left\{\frac{(1-\alpha)\sigma_L\rho\sigma_D r_D + \mu_L + \dfrac{rR_t}{L_t} + \dfrac{G_t \ln\left(Q(t) - v(0,t)\right)}{L_t}}{(1-\alpha)\sigma_L^2}\right\}\left[\frac{L_t}{L_t - G_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right]$$

Si, $L_t/(L_t - G_t(1-\alpha)\sigma_L^2) < 0$, entonces, se obtiene:

$$\frac{\partial r_L}{\partial R_t} < 0,\quad \frac{\partial r_L}{\partial \sigma_L} < 0,\quad \frac{\partial r_L}{\partial Q(t)} < 0,\quad \frac{\partial r_L}{\partial P(t)} > 0.$$

Ahora, resolvemos:

$$\frac{\partial r_L}{\partial L_t} = \frac{\partial}{\partial L_t}\left\{\frac{(1-\alpha)\sigma_L\rho\sigma_D r_D}{(1-\alpha)\sigma_L^2} + \frac{\mu_L}{(1-\alpha)\sigma_L^2} + \frac{rR_t}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2} + \frac{G_t \ln\left(Q(t) - v(0,t)\right)}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right\}\left[\frac{L_t}{L_t - G_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right]$$

$$+\left\{\frac{(1-\alpha)\sigma_L\rho\sigma_D r_D}{(1-\alpha)\sigma_L^2} + \frac{\mu_L}{(1-\alpha)\sigma_L^2} + \frac{rR_t}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2} + \frac{G_t \ln\left(Q(t) - v(0,t)\right)}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right\}\frac{\partial}{\partial L_t}\left[\frac{L_t}{L_t - G_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right]$$

$$\frac{\partial r_L}{\partial L_t} = \left\{-\frac{rR_t}{L_t^2(1-\alpha)\sigma_L^2} - \frac{G_t \ln\left(Q(t) - v(0,t)\right)}{L_t^2(1-\alpha)\sigma_L^2}\right\}\left[\frac{L_t}{L_t - G_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right]$$

$$+\left\{\frac{(1-\alpha)\sigma_L\rho\sigma_D r_D}{(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{\mu_L}{(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{rR_t}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{G_t\ln(Q(t)-\nu(0,t))}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right\}\left[\frac{-G_t(1-\alpha)\sigma_L^2}{(L_t-G_t(1-\alpha)\sigma_L^2)^2}\right]$$

Si como antes, $L_t/(L_t-G_t(1-\alpha)\sigma_L^2)<0$, el signo del primer miembro de la ecuación anterior es positivo y el signo del segundo término es negativo, entonces $\frac{\partial r_L}{\partial L_t}<0$ si:

$$\left\{-\frac{rR_t}{L_t^2(1-\alpha)\sigma_L^2}-\frac{G_t\ln(Q(t)-\nu(0,t))}{L_t^2(1-\alpha)\sigma_L^2}\right\}\left[\frac{L_t}{L_t-G_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right]<$$

$$\left\{\frac{(1-\alpha)\sigma_L\rho\sigma_D r_D}{(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{\mu_L}{(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{rR_t}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{G_t\ln(Q(t)-\nu(0,t))}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right\}\left[\frac{G_t(1-\alpha)\sigma_L^2}{(L_t-G_t(1-\alpha)\sigma_L^2)^2}\right]$$

Por último, resolvemos:

$$\frac{\partial r_L}{\partial G_t}=\frac{\partial}{\partial G_t}\left\{\frac{(1-\alpha)\sigma_L\rho\sigma_D r_D}{(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{\mu_L}{(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{rR_t}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{G_t\ln(Q(t)-\nu(0,t))}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right\}\left[\frac{L_t}{L_t-G_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right]$$
$$+\left\{\frac{(1-\alpha)\sigma_L\rho\sigma_D r_D}{(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{\mu_L}{(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{rR_t}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{G_t\ln(Q(t)-\nu(0,t))}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right\}\frac{\partial}{\partial G_t}\left[\frac{L_t}{L_t-G_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right]$$

$$\frac{\partial r_L}{\partial G_t}=\frac{\partial}{\partial G_t}\left\{\frac{\ln(Q(t)-\nu(0,t))}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right\}\left[\frac{L_t}{L_t-G_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right]$$
$$+\left\{\frac{(1-\alpha)\sigma_L\rho\sigma_D r_D}{(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{\mu_L}{(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{rR_t}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{G_t\ln(Q(t)-\nu(0,t))}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right\}\left[\frac{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}{(L_t-G_t(1-\alpha)\sigma_L^2)^2}\right]$$

El primer término es negativo y el segundo positivo, por tanto, $\frac{\partial r_L}{\partial G_t}<0$, si se cumple:

$$\frac{\partial}{\partial G_t}\left\{\frac{\ln(Q(t)-\nu(0,t))}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right\}\left[\frac{L_t}{L_t-G_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right]>$$

$$\left\{\frac{(1-\alpha)\sigma_L\rho\sigma_D r_D}{(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{\mu_L}{(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{rR_t}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{G_t\ln(Q(t)-\nu(0,t))}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right\}\left[\frac{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}{(L_t-G_t(1-\alpha)\sigma_L^2)^2}\right]$$

5. CONCLUSIONES

En este documento se han presentado tres propuestas que extienden el marco analítico tradicional determinista, para incorporar características del sistema bancario y financiero, en las decisiones de los agentes económicos, específicamente el carácter estocástico de los precios y la aleatoriedad de los flujos financieros (pasivos y activos).

En primer lugar, se hizo una comparación de los modelos alternativos existentes en la literatura que explican las decisiones de producción de una firma competitiva cuando existe incertidumbre en los precios de los insumos, o bien, en los precios de los bienes que se ofrecen al mercado por la propia firma. Los modelos representativos son: la optimización de la utilidad esperada por parte de las empresas, modelos de maximización del valor presente de las ganancias esperadas, y modelos que incorporan la presencia de títulos financieros ante la existencia de mercados contingentes.

A partir de este primer análisis se desarrollaron dos propuestas: un modelo de optimización cuando la tasa de interés real es estocástica, debido a que su dinámica puede describirse mediante un movimiento browniano estandarizado; y un modelo en el cual la decisión de la firma incluye elegir entre opciones financieras tipo europeo.

En el primer modelo, la principal conclusión es que el escenario estocástico extiende los resultados deterministas conocidos: la demanda de insumos, en particular, del capital depende en forma negativa del promedio de largo plazo de la tasa de interés; además, se encuentra que la demanda de capital también varía de forma negativa con al volatilidad de este precio; y para la elección del volumen de producción, se encuentra que se elige producir donde el producto marginal del insumo utilizado iguale a su precio marginal, más una fracción de la volatilidad de los precios.

El principal resultado del segundo modelo, en que las firmas eligen considerando la existencia de opciones financieras tipo europeo, bajo el supuesto de existencia de un conjunto completo de bienes contingentes, la firma maximiza el valor esperado resultante de la realización de los planes de producción para cada estado de la naturaleza y de las ganancias o pérdidas derivadas de la comercialización de títulos financieros. Los principales resultados son que bajo las condiciones señaladas, la decisión de producción no considera la incertidumbre, es decir no es afectada por las actitudes hacia el riesgo de la firma ni por las expectativas de los precios spot de los bienes; además, los precios spot esperados para cada par fecha – evento sólo complementan el valor esperado de las ganancias, porque inciden en la decisión de compra y/o venta de títulos financieros.

En la segunda propuesta se elaboró un modelo de equilibrio general en el que las decisiones de los agentes consumidores y firmas están sujeta a la incertidumbre existente en la tasa de interés, suponiendo que ésta puede describirse a través de un movimiento geométrico browniano estándar, o a través de un proceso de Ornstein - Uhlenbeck. De esta propuesta destaca que la elección de los consumidores respecto a la oferta del insumo cuyo precio es estocástico, varía en forma positiva de su precio y negativa respecto a la volatilidad de éste.

Finalmente, en la tercera propuesta se desarrollo un modelo de optimización que muestra las decisiones de un banco comercial representativo en un escenario con incertidumbre; ésta se expresa en depósitos y créditos bancarios estocásticos, y en la probabilidad de que los clientes receptores de los créditos, incumplan con sus compromisos de pago. El modelo es relevante porque la literatura teórica al respecto, supone que los precios o las cantidades de pasivos y activos son determinadas por los bancos, a la manera de una firma monopolista; aquí, en un contexto competitivo, el banco comercial determina los precios de los servicios bancarios que permiten maximizar sus ganancias.

BIBLIOGRAFÍA

Batra, R. N. y Ullah, A. (1974). "Competitive Firm and the Theory of Input Demand under Price Uncertainty", *The Journal of Political Economy*, Vol. 82, No. 3, pp. 537-548.

Booth, L. D. (1983). "Total Price Uncertainty and the Theory of the Competitive Firm", *Economica*, New Series, Vol. 50, No. 198, pp. 183-191.

Coes, D. V. (1977). "Firm Output and Changes in Uncertainty", *The American Economic Review*, Vol. 67, No. 2, pp. 249-251.

Diamond, D. W. y Dybvig, P. H. (1986). "Banking Theory, Deposit Insurance, and Bank Regulation", *The Journal of Business*, Vol. 59, No. 1, pp. 55-68.

Duffie, D. (2001). *Dynamic Asset Pricing Theory*, 3rd. edition, Princenton University Press, USA.

Eeckhoudt, L. y Hansen, P. (1980). "Minimum and Maximum Prices, Uncertainty, and the Theory of the Competitive Firm", *The American Economic Review*, Vol. 70, No. 5, pp. 1064-1068.

Feder, G.; Just, R. E. y Schmitz, A. (1980). "Futures Markets and the Theory of the Firm under Price Uncertainty", *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 94, No. 2, pp. 317-328.

Freixas, X. y Rochet, J. C. (1997). *Microeconomics of Banking*, MIT, USA.

Hull, J. (1989). "Assessing Credit Risk in a Financial Institution's Off-Balance Sheet Commitments", *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 24, No. 4, pp. 489-501.

Hull, J. (2003). *Options, Futures and Other Derivatives*, 5a. ed., Prentice Hall, USA.

Ishii, Y. (1977). "On the Theory of the Competitive Firm under Price Uncertainty: Note", *The American Economic Review*, Vol. 67, No. 4, pp. 768-769.

Klein, M. (1971). "A Theory of the Banking Firm", *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 3, No. 2, pp. 205-218.

Mas-Collell, A., Whinston, M. D. y Green, J. (1995). *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, EUA.

Merton, R. C. (1973) "Theory of Rational Option Pricing", *The Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4, No. 1, pp. 141 – 183.

Nadiri, M. I. (1982). "Producers Theory", *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. II, CH. 10, edited by K. J. Arrow and M.D. Intriligator, North Holland Publishing Company, The Netherlands.

O'Hara (1983). "A Dynamic Theory of the Banking Firm", *The Journal of Finance*, Vol. 38, No. 1, pp. 127-140.

Rajan, R. G. (2004). "Why Bank Credit Policies Fluctuate: A Theory and Some Evidence", *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 109, No. 2, pp. 399-441.

Ratti, R. (1980). "Bank Attitude Toward Risk, Implicit Rates of Interest, and the Behavior of an Index of Risk Aversion for Commercial Banks", *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 95, No.2, pp. 309-331.

Samuelson, P. (1965). "Rational Theory of Warrant Prices", *Industrial Management Review*, No. 6, pp. 13-31.

Sandmo, A. (1971). "On the Theory of the Competitive Firm under Price Uncertainty", *The American Economic Review*, Vol. 61, No. 1, pp. 65-73.

Scott, F. (1983). "A Note on Uncertain Input Prices, Profit Risk, and the Rate-of-Return Regulated Firm", *Land Economics*, Vol. 59, No. 3, pp. 337-341.

Steele, M.J. (2001). *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Springer – Verlag, USA.

Tobin, J. (1982). "The Commercial Banking Firm: A Simple Model", *The Scandinavian Journal of Economics*, Vol. 84, No. 4, pp. 495-530.

Towey, R. (1974). "Money Creation and the Theory of the Banking Firm", *The Journal of Finance*, Vol. 29, No. 1, pp. 57-72.

Treadway, A. B. (1969). "On Rational Entrepreneurial Behavior and the Demand for Investment", *Review of Economic Studies*, No. 38, 1969, pp. 227-239.

Uhlenbeck, G. E. y Ornstein, L. S. (1930). "On the Theory of Brownian Motion", *Physical Review*, Vol. 36, pp. 823-841.

Vasicek, O. (1977). "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, No. 5, pp. 177-188.

Venegas M., F. *Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*, Thomson, México, 2006.