



**TECNOLÓGICO
DE MONTERREY**



**TECNOLÓGICO
DE MONTERREY.**

Biblioteca
Campus Ciudad de México

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Ciudad de México
Doctorado en Ciencias Financieras

Dr. José Antonio Núñez Mora
Director de Tesis

Dr. Alejandro Segundo Valdés
Lector

Dr. Antonio Ruiz Porras
Lector

Guillermo Einar Moreno Quezada
Alumno

*Discontinuidad en la BMV: aplicando procesos poisson-gaussianos a los
activos nacionales. Desechando la distribución normal.*

Índice

Origen de la investigación.....	3
Ejemplos del impacto de la distribución normal.....	12
Antecedentes.....	46
Planteamiento de la problemática.....	52
Marco Teórico.....	53
Alcance de la investigación y formulación de la hipótesis.....	61
Metodología (Diseño longitudinal).....	62
Análisis de datos y resultados.....	64
Conclusiones finales.....	72
Bibliografía.....	74

Origen de la investigación

En este capítulo damos un vistazo a los modelos que tienen como supuesto básico que los precios de activos se comporten log-normales o que los rendimientos se comporten normalmente.

Es importante ver como desde sus inicios la teoría financiera, en su afán por simplificar sus supuestos, no ha desarrollado en modelo de valuación con distribuciones no normales, parecido al caso de Black & Scholes (1973). Existen trabajos que ya desarrollan teoría con distribuciones como por ejemplo los realizados por Bandorff-Nielsen en los años de 1995 y 1998, la publicación de Blattberg y Gonedes en 1971, el trabajo de Bibby y Sorensen en 1995 y la publicación de Cont y Tankov en 2004.

Así, corremos grandes riesgos ante la falta de exactitud en nuestros cálculos. Si es cierto que de entrada para mercados más sofisticados la teoría actual no es suficientemente exacta pensemos ahora en el caso de nuestros activos nacionales. Definitivamente es importante encontrar la distribución de nuestros activos para llegar a obtener mejores cálculos para productos derivados.

De inicio revisaremos el modelo básico de Black and Scholes, para valuación de opciones europeas pasando también por su enfoque probabilista para después hablar un poco de modelos que tienen que ver con no solo modelar el movimiento del subyacente sino también su volatilidad.

Definitivamente no podíamos dejar atrás a las opciones americanas y por eso también revisaremos que hay de lo más sobresaliente en este tema.

Inclusive hablaremos de opciones exóticas y sus características generales.

Considerando que la teoría financiera que corresponde a la administración de riesgos actual puede subdividirse en el cálculo de productos derivados, los modelos de tasas de interés y Bonos y finalmente el área de riesgos financieros y económicos trataremos de no solo enfocarnos a revisar el primer subgrupo sino también a mencionar los modelos para predicción de tasas de interés especialmente los que tocan el tema de la tasa de interés instantánea o tasa corta.

Así, el objetivo es revisar algunos de los modelos base y modelos sobresalientes en la teoría financiera para valuación de derivados y tasas.

Aún cuando el movimiento Browniano es una de las bases en la construcción de los modelos de riesgos financieros y económicos, este no puede representar por si mismo el comportamiento de todas las variables financieras.

Los supuestos básicos o condiciones ideales de los mercados de acciones y opciones del modelo de Fisher Black y Myron Scholes (1973) incluyen que los precios de los activos subyacentes son conducidos por el movimiento geométrico browniano, es decir que los precios son log-normales.

Lo anterior refleja una debilidad muy fuerte al considerar condiciones de normalidad en los precios de activos que en general comienzan en **valores diferentes de cero, tienen incrementos con medias diferentes de cero y varianzas que no son proporcionales al tiempo.**

El modelo de Fisher Black y Myron Scholes

Es importante retomar la descripción de este modelo, debido a que en sus supuestos básicos encontramos la normalidad en los rendimientos de los activos.

En el año de 1973 Black y Scholes publicaron el artículo: "The pricing of options and corporate liabilities". En la investigación, bajo condiciones de no arbitraje (condiciones de equilibrio), se desarrolló un modelo para valorar opciones europeas que no paga dividendos y cuya dinámica es conducida por el movimiento geométrico browniano.

Es en este mismo trabajo se proporciona una derivación alternativa de su fórmula empleando el CAPM (Capital Asset Pricing Model) en una versión en tiempo continuo.

La ecuación diferencial parcial de segundo orden cuya solución es el precio de una opción europea que se presenta en el artículo es muy popular en el sector financiero y representa la base para valorar diversos productos derivados, ya que para distintas soluciones de frontera sus soluciones representan los precios de los derivados financieros que se encuentran disponibles en el mercado.

Los supuestos básicos del modelo Black & Scholes son:

- i. el activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato;

- ii. **el precio del activo subyacente es conducido por el movimiento geométrico browniano, es decir, el precio es lognormal,**
- iii. **la volatilidad del precio en el activo subyacente se mantiene constante en el tiempo,**
- iv. las ventas en corto del subyacente son permitidas,
- v. el mercado subyacente es líquido y divisible lo que significa que el subyacente se puede comprar o vender en cualquier fracción del título,
- vi. no existen los costos de transacción,
- vii. el mercado opera en forma continua,
- viii. existe un mercado de crédito, un sistema bancario, en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés constante para todos los plazos y libre de riesgo,
- ix. todos los agentes comparten exactamente la misma información (información simétrica) y,
- x. los mercados están en equilibrio lo que equivale a que no existen oportunidades de arbitraje.

Es precisamente en los puntos *ii* y *iii* donde debido a la dinámica de nuestros activos nacionales no podemos acatar los supuestos del modelo propuesto por Black y Scholes.

Así, observamos como el movimiento supone un comportamiento normal con media cero y varianza constante a través del tiempo.

Recordando dentro del modelo de B&S (enfoque probabilista) la valuación neutral al riesgo de una opción europea de compra

Sabemos que el precio de una opción de compra europea en el tiempo t con precio de ejercicio K y vencimiento en T , $c = c(S_t, t; K, T, \sigma, r)$, está dada por la esperanza del valor presente del valor intrínseco de la forma:

$$c = e^{-r(T-t)} E\{\max(S_T - K, 0) | F_t\}$$

Entonces,

$$c = e^{-r(T-t)} \int \max(s - K, 0) f_{S_T | S_t}(s | S_t) ds$$

donde la $f_{S_T | S_t}$ es la función de densidad del precio del activo subyacente en un mundo neutral al riesgo.

Por lo tanto,

$$c = e^{-r(T-t)} \int_K^{\infty} (s - K) f_{S_t|S_t}(s | S_t) ds$$

$$c = e^{-r(T-t)} \int_{s>K} s f_{S_t|S_t}(s | S_t) ds - Ke^{-r(T-t)} \int_{s>K} f_{S_t|S_t}(s | S_t) ds$$

Sustituyendo la función de densidad tenemos que:

$$c = e^{-r(T-t)} \int_{s>K} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2\right\} ds$$

$$- Ke^{-r(T-t)} \int_{s>K} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2\right\} ds$$

Se denota cada integral respectivamente como $i1$ e $i2$.

Y tenemos que,

$$i1 = e^{-r(T-t)} S_t \int_{\left\{\varepsilon > \frac{\ln(K/S_t) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma(T-t)}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} e^{\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}\varepsilon + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} d\varepsilon$$

$$= S_t \int_{\left\{\varepsilon - \sigma\sqrt{T-t} > \frac{\ln(K/S_t) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma(T-t)}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\varepsilon - \sigma\sqrt{T-t})^2} d\varepsilon$$

$$= S_t \int_{\left\{-\infty < u < \frac{\ln(S_t/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma(T-t)}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

Ya en el cálculo anterior se describe a $\varepsilon \sim N(0,1)$ además de usar el cambio de variable $u = \varepsilon - \sigma\sqrt{T-t}$.

Para la segunda integral tenemos que,

$$\begin{aligned} i2 &= -Ke^{-r(T-t)} \int_{\varepsilon > \frac{\ln(K/S_t) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma(T-t)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon \\ &= -Ke^{-r(T-t)} \int_{-\infty > \varepsilon > \frac{\ln(S_t/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma(T-t)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto de las ecuaciones anteriores podemos escribir que

$$c = S_t \Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \Phi(d_2),$$

dónde la función $\Phi(d)$ es la función de distribución acumulada de $\varepsilon \sim N(0,1)$, es decir,

$$\Phi(d) = \mathbb{P}_{\varepsilon} \{ \varepsilon \leq d \} = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon = 1 - \Phi(-d)$$

$$d_1 = d_1(S_t, t; T, K, r, \sigma) = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{1}{2} \sigma^2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = d_2(S_t, t; T, K, r, \sigma) = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r - \frac{1}{2} \sigma^2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} = d_1 - \sigma \sqrt{T - t}.$$

De igual manera podemos escribir que la valuación neutral al riesgo de una opción europea de venta es

$$p = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1)$$

Entonces observamos que para el cálculo del precio de una opción de compra (call) o de venta (put) se tienen supuestos de normalidad debido a que $\Phi(d)$ que representa la función de distribución acumulada es $N \sim (0,1)$.

Como hemos visto en los ejemplos anteriores, el concepto de distribución normal o gaussiana por si mismo ha sido el eje para el desarrollo de la teoría financiera.

Hasta hace 10 años todos los trabajos realizados más conocidos se han hecho bajo la hipótesis de normalidad. Sabemos que los precios de un activo no pueden ser normales, simplemente porque estos nunca son negativos. Por lo anterior se trabaja con rendimientos de activos y no con precios de subyacentes.

Se ha vuelto una práctica común pensar que los rendimientos de un activo siguen una distribución normal. Claro que sabemos que si los rendimientos se observan de alta frecuencia diarios o inclusive intra día las condiciones cambian y no se comportan normalmente.

Si comparáramos las distribuciones empíricas de los rendimientos diarios de varios de los títulos que cotizan en los mercados de capitales contra las distribuciones teóricas observamos que las primeras presentan, casi siempre, sesgo, curtosis excesiva y colas anchas o pesadas lo que nos impide ajustar las series con las distribuciones teóricas.

Ahora bien, si analizamos rendimientos unimodales de activos y comparamos una distribución estandarizada empírica contra una distribución normal estándar observaríamos que la cresta de la distribución empírica es más alta.

Lo anterior debido a que ambas distribuciones tienen la misma desviación estándar lo que incluye también que las colas de la distribución empírica tienen que ser más anchas para compensar el área de la cresta. La cresta más alta nos dice que hay una mayor probabilidad de movimientos pequeños que la de una variable aleatoria con una distribución normal.

Lo que si podemos concluir es que si nuestros rendimientos en cuestión se comportan normalmente entonces los precios del subyacente seguirán una distribución log-normal.

Hemos hablado ya de cómo las bases de la teoría financiera moderna contemplan erróneamente los precios de los activos siguiendo una distribución lognormal, así no solo es en estas bases donde encontramos que es una equivocación usar ese supuesto.

Cuando recordamos que la volatilidad de un subyacente no es constante ni observable concluimos que se requiere de un tratamiento especial en la valuación de los productos derivados.

Nuestra primera opción es modelar esta varianza a través de un proceso estocástico mismo que debe ser introducido en nuestro modelo básico de valuación de opciones.

Ejemplos del impacto de la distribución normal

El modelo de Heston para valuación de activos con volatilidad estocástica

Steven I. Heston publicó en el *Review of Financial Studies* (1993) una metodología para valorar opciones sobre una acción con volatilidad estocástica. De lo más relevante en este trabajo es como a través de la obtención de las funciones características de las probabilidades neutrales al riesgo da las soluciones de una ecuación diferencia parcial de segundo orden.

Obtiene también de estas probabilidades neutrales al riesgo una fórmula similar a la de Black and Scholes para la valuación de una opción europea de compra.

La dinámica estocástica que conduce a la volatilidad en el modelo de Heston supone un precio actual S_t de una acción y sigue un proceso de la forma:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t,$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma_t > 0$ y $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad.

Se supone también además que la volatilidad instantánea, σ_t , sigue un proceso del tipo Ornstein-Uhlenbeck de la forma:

$$d\sigma_t = -\beta\sigma_t dt + \delta dU_t$$

donde $\{U_t\}_{t \geq 0}$ es también un movimiento Browniano definido. El modelo supone que los procesos dW_t y dU_t se encuentran correlacionados entre sí con lo que podemos escribir que:

$$\text{Cov}(dW_t, dU_t) = \rho dt$$

Observamos que tanto el precio como su volatilidad son conducidos por movimientos geométricos Brownianos lo que significa que se consideran log-normales tanto los precios como su correspondiente volatilidad.

El modelo de Hull y White contemplando volatilidad estocástica

En 1987, Hull y White propusieron un modelo para valuar opciones europeas cuando la volatilidad de un subyacente es dirigida por un movimiento geométrico Browniano contemplando una serie de Taylor hasta sus términos de tercer orden.

El proceso neutral al riesgo que conduce al precio del subyacente está dado por

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_t S_t dU_t,$$

donde el parámetro de tendencia representa la tasa de interés libre de riesgo. El proceso U_t es un movimiento browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad. En este caso hay una modificación de la fórmula de B&S sustituyendo la varianza promedio en $[t, T]$,

$$\bar{\sigma}_{t,T}^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_u^2 du,$$

por el parámetro de varianza. Es raro el caso donde la volatilidad de una función es una función conocida del tiempo, es por eso que lo mejor es considerarla como un proceso estocástico.

Desafortunadamente este modelo comienza con el supuesto de que el precio de un activo subyacente sigue una distribución lognormal, así que nuevamente para nuestro país no es muy útil.

El modelo de Barone-Adesi y Whaley para valuación de opciones americanas (1987).

Pero ¿qué hay de parte de la valuación de opciones americanas? Recordemos que una opción americana otorga al tenedor el derecho de ejercicio en cualquier momento del tiempo a diferencia de las opciones europeas donde el ejercicio solo se puede realizar en la fecha de vencimiento de la opción.

Para este caso podemos retomar los trabajos realizados por Barone-Adesi y Whaley que proponen una fórmula relativamente sencilla de aproximación para valorar opciones americanas.

Se trata de una descomposición del precio de la opción en el precio de una opción europea y el premio por ejercicio anticipado.

Se supone que el precio el activo subyacente al tiempo t, S_t , es conducido por un movimiento Browniano, neutral al riesgo,

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

donde r es una tasa de interés constante y libre de riesgo de incumplimiento y σ es la volatilidad instantánea del activo. Se supone que el subyacente es una acción con una estructura de dividendos dada por,

$$dD_t = qS_t dt$$

donde q es la tasa instantánea de pago de dividendos.

Se denota $C = C(S_t, t)$ como el precio de una opción americana de compra donde K es el precio de ejercicio entonces se debería de satisfacer la restricción

$$C(S_t, t) \geq \max(S_t - K, 0),$$

ya que una opción americana es más cara que una europea.

Para la valuación de este tipo de opciones nos enfrentamos, aunado a tener que calcular el valor de la opción de cada instante, también hay que especificar si se ejerce o no la opción para cada valor de S_t .

Lo anterior se hace estableciendo un valor crítico, S^* , para cada valor de t , mismo que marca la frontera entre las regiones de ejercicio y no ejercicio.

Para hacer más simple el planteamiento se supone que el valor de S^* es único de tal forma que si $S_t \geq S^*$ la opción deberá ejercerse y si $S_t \leq S^*$ la opción deberá mantenerse.

Si no es óptimo el ejercicio anticipado, entonces el precio de una opción americana de compra, $C = C(S_t, t)$, satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} + (r - q) S_t \frac{\partial C}{\partial S_t} - rC = 0$$

Como sabemos que una opción americana es más cara, podemos definir a $\varepsilon(S_t, t)$ como el premio por el ejercicio anticipado de la opción y decir que:

$$C(S_t, t) = c_{BS}(S_t, t) + \varepsilon(S_t, t),$$

despejando tenemos que,

$$\varepsilon(S_t, t) = C(S_t, t) - c_{BS}(S_t, t).$$

Como sabemos que $C(S_t, t)$ también satisface una ecuación similar a la diferencial parcial que satisface el ejercicio no optimo anticipado, tomando en cuenta distintas condiciones de frontera entonces podemos escribir que

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 + (r - q) S_t \frac{\partial \varepsilon}{\partial S_t} - r \varepsilon = 0.$$

Después se define un cambio de variable $\tau = T - t$ junto con dos nuevos parámetros $M = 2r\sigma^{-2}$ y $N = 2(r - q)\sigma^{-2} - 1$ se escribe como:

$$-\frac{M}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + S_t^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial S_t^2} + (N + 1) S_t \frac{\partial \varepsilon}{\partial S_t} - M \varepsilon = 0.$$

Después se supone una solución de la forma $\varepsilon(S_t, g) = g(\tau) f(S_t, g(\tau))$, con $f(S_t, 0) = 0$, entonces se tiene que:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial S_t} = g \frac{\partial f}{\partial S_t},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial S_t^2} = g \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2},$$

y además

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = \frac{dg}{d\tau} f + g \frac{\partial f}{\partial g} \frac{dg}{d\tau} = \frac{dg}{d\tau} = \frac{dg}{d\tau} \left(f + g \frac{\partial f}{\partial g} \right)$$

entonces podemos obtener que:

$$S_t^2 \frac{\partial^2}{\partial S_t^2} + (N + 1) S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} - M f \left[1 + \frac{1}{rg} \frac{dg}{d\tau} \left(1 + \frac{g}{f} \frac{\partial f}{\partial g} \right) \right] = 0.$$

Elegimos ahora como candidato de g a $g(\tau) = 1 - e^{-r\tau}$ para obtener

$$\frac{1}{r} \frac{dg}{d\tau} = 1 - g(\tau).$$

Al final se obtiene que

$$S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} + (N+1)S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} - \frac{M}{g} f - (1-g)M \frac{\partial f}{\partial g} = 0.$$

Se puede observar que cuando $\tau \rightarrow \infty$, entonces $1 - g \rightarrow 0$. Por lo tanto si existen tiempos de vencimiento grandes el último término resulta ser poco significativo. Entonces se supone que

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial g} = 0$$

así,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{dg}{d\tau} f = \lim_{\tau \rightarrow \infty} r e^{-r\tau} f(S_t, 1 - e^{-r\tau}) = r f(S_t, 0) = 0.$$

Consecuentemente para tiempos pequeños de vencimiento $\frac{\partial f}{\partial g}$ es insignificante. Entonces podemos eliminar el último término con lo que nos quedaría la expresión:

$$S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} + (N+1)S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} - \frac{M}{g} f = 0.$$

La ecuación anterior es una diferencial parcial de segundo orden en f . Se supone una ecuación de la forma $f(S_i, g) = \alpha S_i^q$ con $q=q(g)$.

Entonces tenemos que,

$$\frac{\partial f}{\partial S_i} = aqS_i^{q-1}$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S_i^2} = aq(q-1)S_i^{q-2}.$$

Y obtenemos que,

$$aS_i^q \left(q^2 + Nq - \frac{M}{g} \right) = 0.$$

Las raíces de la ecuación cuadrática dentro del paréntesis son:

$$q1 = \frac{-N - \sqrt{N^2 + 4(M/g)}}{2} \text{ y,}$$

$$q2 = \frac{-N + \sqrt{N^2 + 4(M/g)}}{2}$$

Se puede observar que $M/g = 0$ implica que $q1 < 0$ y $q2 > 0$. Las dos raíces dependen de g . Así, la solución de la ecuación diferencial está dada por la combinación lineal de dos soluciones independientes:

$$f(S_i, g) = \alpha S_i^{q1} + \beta S_i^{q2},$$

donde α y β son constantes por determinar. Dado que $qI < 0$, si suponemos $\alpha \neq 0$ entonces $S_t \rightarrow 0$ conduce a $f \rightarrow \infty$. Lo anterior es imposible ya que si $S_t \rightarrow 0$, el premio por ejercicio anticipado también debería hacerlo.

Por lo tanto, $\alpha = 0$ y el premio por ejercicio anticipado está definido únicamente por el segundo término de $f(S_t, g)$, lo que reduce la expresión de valuación de la opción americana de compra, a:

$$C(S_t, \tau) = c_{BS}(S_t, \tau) + \beta g S_t^{q^2}.$$

La expresión anterior cumple que si $S_t = 0$, entonces $C(S_t, \tau) = 0$. También hay que ver que si S_t aumenta entonces también $C(S_t, \tau) = 0$ debe aumentar y entonces $\beta > 0$. Sean S^* y $\beta > 0$ tales que

$$S^* - K = c(S^*, \tau) + g(\tau)\beta(S^*)^{q^2},$$

donde K es el precio de ejercicio y S^* es el precio crítico por ejercicio anticipado. Si $S_t \geq S^*$, entonces se puede escribir que,

$$S_t - K \geq c(S^*, \tau) + g(\tau)\beta(S^*)^{q^2},$$

y el precio de la opción americana es $C(S_t, \tau) = S_t - K$ mientras que para precios $S_t < S^*$ el lado derecho de $C(S_t, \tau) = c_{BS}(S_t, \tau) + \beta g S_t^{q^2}$ es igual $C(S_t, \tau)$. Derivamos con respecto a S^* la ecuación $S^* - K = c(S^*, \tau) + g(\tau)\beta(S^*)^{q^2}$, y tenemos que

$$1 = e^{-q\tau} \Phi[d_1(S^*)] + g(\tau)q_2\beta(S^*)^{q_2-1}$$

donde,

$$d_1(S^*) = \frac{\ln\left(\frac{S^*}{K}\right) + \left(r - q + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{T}}$$

y $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución acumulada de una variable aleatoria normal estándar. Entonces la solución del sistema de ecuaciones debe satisfacer:

$$S^* - K = c_{BS}(S^*, \tau) + \frac{\{1 - e^{-q\tau} \Phi[d_1(S^*)]\}S^*}{q_2}$$

$$\beta = \frac{1 - e^{-q\tau} \Phi[d_1(S^*)]}{g(\tau)q_2(S^*)^{q_2-1}}$$

La primera ecuación depende únicamente de S^* y al momento que se cuenta con dicho valor, éste es sustituido en la segunda ecuación. Entonces, el precio de una opción americana de compra es:

$$C(S_t, \tau) = \begin{cases} c_{BS}(S_t, \tau) + A_2\left(\frac{S_t}{S^*}\right), & \text{si } S_t < S^* \\ S_t - K & \text{si } S_t \geq S^* \end{cases}$$

Donde

$$A_2 = \frac{S^*}{q_2} \{1 - e^{-q\tau} \Phi[d_1(S^*)]\} > 0.$$

Así, volvemos a enfrentar el problema del supuesto de normalidad en el comportamiento del precio del subyacente al incorporar a $\Phi(\cdot)$ **que es la función de distribución acumulada normal estándar.**

Lo anterior se debe a que dentro de la descomposición del precio de la que hablamos en párrafos anteriores, se involucra la teoría disponible de B&S para opciones europeas siendo nuevamente un problema el usar este modelo si es que se llegará a requerir el cálculo de opciones americanas con activos nacionales.

Ahora bien, también debemos revisar algunos modelos más sofisticados para valuación de opciones con precio de ejercicio flotante como el de Goldman, Sosin y Gatto (1979) .

Modelo de Goldman, Sosin y Gatto para valuación de opciones con precio de ejercicio flotante (1979)

Recordemos que una opción de compra con precio de ejercicio igual al valor mínimo del subyacente otorga al propietario del contrato el derecho de adquirir el subyacente al menos precio observado durante la vida del instrumento. De igual forma en el caso de ser una opción de venta da al propietario el derecho de vender al precio más alto observado en la vida del instrumento.

Para este tipo de opciones, que fueron presentadas en 1979 por Goldman, Sosin y Gatto, el principio de reflexión de un movimiento Browniano con tendencia y el teorema de Girsanov son fundamentales.

Los supuestos básicos del modelo de GSG, para valorar opciones con precios de ejercicio flotante, dependiente del valor máximo o mínimo del activo subyacente son:

- i) El precio del activo subyacente es conducido por un movimiento geométrico Browniano, lo que significa que el precio es lognormal;**
- ii) La volatilidad, σ , del precio del activo se mantiene a través del tiempo;
- iii) Las ventas en corto del subyacente son permitidas;
- iv) El mercado del subyacente es líquido y divisible;
- v) No hay costos de transacción (comisiones e impuestos);
- vi) El mercado opera en forma continua;
- vii) Existe un mercado de crédito, un sistema bancario, en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés constante para todos los plazos, y libre de riesgo r ;
- viii) No existen oportunidades de arbitraje.

Si nos fijamos bien podemos observar que los supuestos básicos de B&S se mantienen solo que ahora se trata de valorar contratos con precio de ejercicio flotante.

Así estos modelos sufren de las mismas desventajas que el original B&S debido a su supuesto de normalidad en el comportamiento de los precios del subyacente.

Las opciones sobre el máximo y mínimo precio observado del subyacente con precio de ejercicio fijo usadas para negociar divisas, títulos de capital e índices bursátiles, estudiadas por primera vez por Conze y Viswanathan en 1991, así como las opciones con barreras estudiadas por Robert Merton en 1973 siguen el mismo camino que nuestro ejemplo anterior.

Hemos estado revisando modelos que se enfocan al cálculo de contratos de compra y venta tanto del tipo europeo como del tipo americano. Ahora, vayamos a los modelos de tasas que también involucran supuestos de normalidad en el comportamiento de las tasas de interés.

La mayor parte de los modelos que se tienen disponibles para la valuación de bonos cupón cero se concentran en el cálculo de la llamada tasa spot, tasa instantánea o tasa corta. El cálculo de la tasa corta nunca se ha podido usar para pronosticar el futuro, por el contrario el reto está en poder explicar su comportamiento en el mercado. Se trata de lograr explicar sus propiedades estadísticas como su precios promedio, probabilidades de ocurrencia, tendencia, sesgo, reversión y claro su curtosis y sus colas anchas.

Una definición sencilla de la tasa corta se puede escribir como la tasa de interés de plazo más corto disponible en el mercado asociada a un bono cupón cero.

Al igual que el precio de un subyacente, para el caso de la tasa corta no podemos aceptar que su comportamiento está determinado por una función conocida en el tiempo ya que está tiene un comportamiento impredecible. Lo anterior se explica debido a que su nivel depende de la oferta y demanda de los títulos de deuda al plazo más corto disponible en el mercado.

Debido a que no es posible predecir la dinámica de la tasa corta, se ha visto la posibilidad de modelarla a través de un proceso estocástico. Efectivamente, estamos hablando de que existen muchos modelos de tasa corta vinculados con el movimiento geométrico Browniano.

El modelo de tasa corta de Merton.

(Valuación de bonos cupón cero)

Robert C. Merton, en 1973, propuso uno de los primeros modelos para explicar la tasa corta. Para muchos, este trabajo representa uno de los artículos más fascinantes sobre matemáticas financieras ya que contiene muchos detalles importantes de la teoría de tasas de interés en tiempo continuo.

Este modelo cuenta con varias limitaciones. Entre ellas está que la curva de rendimiento y la tasa forward decrecen sin cota conforme el tiempo aumenta, que la esperanza y la varianza condicionales de la tasa corta crecen sin límite al transcurrir el tiempo, que no presenta reversión a la media y que existe una probabilidad de que la tasa tome valores negativos.

A pesar de estas limitaciones propias del modelo nuestro interés radica en la forma en que se propone la dinámica estocástica de la tasa corta.

Se considera un movimiento Browniano $(W_t)_{t \geq 0}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad. Se supone que el comportamiento de la tasa corta es conducido por:

$$dr_t = bdt + \sigma dW_t$$

dónde tanto b como σ son conocidas y mayores a cero. Entonces tenemos que:

$$r_s = r_t + b(s-t) + \sigma \int_t^s dW_u, \quad s > t.$$

evidentemente se está diciendo que r_t se distribuye normalmente con media y varianza condicionales teniendo entonces:

$$E[r_s | F_t] = r_t + b(s-t)$$

$$Var[r_s | F_t] = \sigma^2(s-t)$$

Lo anterior se debe a que sabemos que:

$$\int_t^s dW_u = W_s - W_t$$

$$E[W_s - W_t | F_t] = 0$$

$$Var[W_s - W_t | F_t] = s - t$$

Entonces tenemos que si $s > t$

$$E[r_s - b_s | F_t] = r_t - b_t$$

Si observamos detenidamente podemos concluir que la tasa corta menos su tendencia es prácticamente una martingala lo que significa que el mejor pronóstico de $r_s - b_s$ con la información disponible hasta el tiempo $s > t$ es $r_t - b_t$.

Veamos como se determina el precio del bono cupón cero. Mediante el enfoque probabilista el precio de un bono cupón cero que se emite en el tiempo t y que para una unidad monetaria en el tiempo T está dado por:

$$B(t, T) = E\{\exp(\int_t^T r_s ds) | F_t\}$$

Sumemos ahora las tasas cortas instantáneas durante $[t, T]$

$$I(t, T) = \int_t^T r_s ds$$

Entonces tomando en cuenta la dinámica de origen tenemos que,

$$\begin{aligned} I(t, T) &= r_t(T-t) + \frac{1}{2}b(T-t)^2 + \sigma \int_t^T \int_t^s dW_u ds \\ &= r_t(T-t) + \frac{1}{2}b(T-t)^2 + \sigma \int_t^T (W_s - W_t) ds \\ &= r_t(T-t) + \frac{1}{2}b(T-t)^2 + \sigma(\int_t^T W_s ds - W_t(T-t)). \end{aligned}$$

Se integra por partes la integral de la ecuación anterior y se obtiene que:

$$\int_t^T W_s ds = TW_T - tW_t - \int_t^T s dW_s$$

Sustituyendo tenemos que,

$$\begin{aligned}
I(t, T) &= r_t(T-t) + \frac{1}{2}b(T-t)^2 + \sigma(TW_t - tW_t - \int_t^T s dW_s - W_t(T-t)) \\
&= r_t(T-t) + \frac{1}{2}b(T-t)^2 + \sigma(T(W_T - W_t) - \int_t^T s dW_s) \\
&= r_t(T-t) + \frac{1}{2}b(T-t)^2 + \sigma(T \int_t^T dW_s - \int_t^T s dW_s) \\
&= r_t(T-t) + \frac{1}{2}b(T-t)^2 + \sigma(\int_t^T (T-s) dW_s)
\end{aligned}$$

Entonces tenemos que $I(t, T)$ que es igual a $\int_t^T r_s ds$ es normal con media y varianza:

$$E[I(t, T) | F_t] = r_t(T-t) + \frac{1}{2}b(T-t)^2$$

$$Var[I(t, T) | F_t] = \sigma^2 \int_t^T (T-s)^2 ds = \frac{1}{3}\sigma^2(T-t)^3$$

Lo anterior es posible debido a que sabemos que con $f(s) = T-s$:

$$Var[\int_t^T f(s) dW_s | F_t] = E[(\int_t^T f(s) dW_s)^2 | F_t] = \int_t^T f^2(s) ds$$

Entonces, de acuerdo a las propiedades de la distribución normal, se tiene que el precio del bono $B(r_t, t; T)$ saísface:

$$\begin{aligned}
B(r_t, t; T) &= E[\exp\{-I(t, T)\} | F_t] \\
&= \exp\{-E[I(t, T) | F_t] + \frac{1}{2}Var[I(t, T) | F_t]\}
\end{aligned}$$

Sustituyendo tenemos que,

$$B(r_t, t; T) = \exp\left\{-r_t(T-t) - \frac{b}{2}(T-t)^2 + \frac{\sigma^2}{6}(T-t)^3\right\}$$

Si quisiéramos calcular también la tasa de rendimiento al vencimiento asociada a este mismo cupón cero tendríamos que denotar $D(t, T) = T - t$ y escribir también que:

$$A(t, T) = -\frac{b}{2}(T-t)^2 + \frac{\sigma^2}{6}(T-t)^3$$

Para entonces redefinir $B(r_t, t; T)$ como:

$$B(r_t, t; T) = e^{A(t, T) - r_t D(t, T)}.$$

entonces la estructura de plazos de la tasa de interés estaría dada por:

$$R(t, T) = -\frac{\ln B(t, T)}{T-t} = \frac{r_t D(t, T) - A(t, T)}{T-t} = r_t + \frac{b}{2}(T-t) - \frac{\sigma^2}{6}(T-t)^2.$$

Con este primer modelo observamos como **los supuestos de normalidad conducen todo el proceso en la obtención del precio de un bono cupón cero.**

El modelo de Vasicek con enfoque en ecuaciones diferenciales parciales

Veamos ahora otro modelo relevante que involucra la modelación de tasa corta en la valuación de bonos cupón cero. En 1977 Oldrich Alfons Vasicek publico otra de las consideradas las más importantes contribuciones a la teoría de tasas de interés en tiempo continuo.

Comencemos por aclarar que este ejemplo también describe la dinámica estocástica de una tasa de interés instantánea, que presenta reversión a la media, a través de un movimiento Browniano que modela el riesgo de mercado.

En el modelo se estudia la dinámica de una tasa corta que presenta reversión a la media hacia una constante. El comportamiento anterior se llega a observar recurrentemente cuando se analizan series de tiempo de tasas de corto plazo. La noción de reversión a la media se formaliza a través de un proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

Sea $\{W_t\}_{t \geq 0}$ un movimiento browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad entonces tenemos que la tasa corta, r_t , es conducida por la ecuación diferencial estocástica:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

Donde a , b y σ son mayores que cero y conocidas. La W_t además de ser normal, es la única fuente de incertidumbre. La ecuación anterior es una simplificación de la integral estocástica:

$$\begin{aligned}
r_t - r_s &= \int_a^b (b - r_u) du + \int_a^b \sigma dW_u \\
&= ab(t-s) - a \int_a^b r_u du + \sigma \int_a^b dW_u.
\end{aligned}$$

Lo anterior es importante señalarlo debido a que lo que realmente buscamos es la integral estocástica. Debemos pensar en la integral estocástica cuando escribimos la ecuación diferencial estocástica.

Dentro del grupo de los modelos de equilibrio general se encuentra el de Vasicek ya que usa condiciones de no arbitraje para caracterizar el precio de un bono cupón cero en un tiempo dado. Nuevamente denotaremos el precio del bono mediante $B=B(r_t, t; T)=B(t, T)$. Entonces, para el modelo de Vasicek el precio del bono deberá satisfacer:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + a(b - r_t) \frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0.$$

Teniendo que la condición final correspondiente al pago del bono al vencimiento es $B(T, T) = 1$. Además, definiendo que las condiciones de frontera dependen de a , b , σ y r_t y suponiendo que:

$$B(r_t, t; T) = e^{A(t, T) - r_t D(t, T)}$$

Entonces podemos decir que forzosamente que $A(T, T) = D(T, T) = 0$ debido a que $B(T, T) = 1$.

Ahora obtenemos las derivadas parciales con base en

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + a(b - r_t) \frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0$$

de B con respecto de t y r_t , además de la segunda derivada parcial con respecto a r_t .

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \left(\frac{\partial A}{\partial t} - r_i \frac{\partial D}{\partial t} \right) B$$

$$\frac{\partial B}{\partial r_i} = -DB$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial r_i^2} = D^2 B.$$

Sustituyendo en $\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_i^2} + a(b-r_i) \frac{\partial B}{\partial r_i} - r_i B = 0$ tenemos que,

$$\frac{\partial A}{\partial t} - r_i \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 - a(b-r_i)D - r_i = 0$$

Factorizando r_i tendríamos que

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 - abD + r_i \left(-\frac{\partial D}{\partial t} + aD - 1 \right) = 0$$

Si derivamos con respecto a r_i tenemos que

$$-\frac{\partial D}{\partial t} + aD - 1 = 0$$

Que es lo mismo que $\frac{\partial D}{\partial t} = aD - 1$. Así, tomando en cuenta la condición

final $D(T, T) = 0$ podemos escribir la solución de la ecuación anterior como:

$$\begin{aligned}
D(t,T) &= D(T,T)e^{-a(T-t)} - e^{-a(T-t)} \int_t^T e^{a(T-s)} ds \\
&= -e^{-a(T-t)} \int_t^T e^{a(T-s)} ds \\
&= \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}.
\end{aligned}$$

Si sustituimos nuestro resultado anterior en

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 - abD + r_t \left(-\frac{\partial D}{\partial t} + aD - 1\right) = 0 \text{ tenemos que,}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial A}{\partial t} - r_t(aD - 1) + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 + (ar_t - ab)D - r_t \\
&= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 - abD.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial t} &= abD - \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 \\
&= b(1 - e^{-a(T-t)}) - \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-a(T-t)})^2.
\end{aligned}$$

Escribimos ahora la solución de la ecuación diferencial ordinaria anterior sin olvidar nuestra condición de frontera $A(T,T) = 0$:

$$\begin{aligned}
A(t, T) &= b(t - T) - b \int e^{-a(T-s)} ds - \frac{\sigma^2}{2a^2} (t - T) \\
&+ \frac{\sigma^2}{a^2} \int e^{-a(T-s)} ds - \frac{\sigma^2}{2a^2} \int e^{-2a(T-s)} ds \\
&= b(t - T) - \frac{b}{a} (e^{-a(T-t)} - 1) - \frac{\sigma^2}{2a^2} (t - T) \\
&+ \frac{\sigma^2}{a^3} (e^{-a(T-t)} - 1) - \frac{\sigma^2}{4a^3} (e^{-2a(T-t)} - 1) \\
&= b(t - T) = -\frac{b}{a} (e^{-a(T-t)} - 1) - \frac{\sigma^2}{2a^2} (t - T) \\
&+ \frac{\sigma^2}{2a^3} (e^{-a(T-t)} - 1) + \frac{\sigma^2}{2a^3} (e^{-a(T-t)} - 1) \\
&- \frac{\sigma^2}{4a^3} (e^{-2a(T-t)} - 1) \\
&= \frac{1}{a^2} (t - T) (a^2 b - \frac{1}{2} \sigma^2) + \frac{1}{a^2} D (a^2 b - \frac{1}{2} \sigma^2) \\
&+ \frac{\sigma^2}{2a^3} (e^{-a(T-t)} - 1) - \frac{\sigma^2}{4a^3} (e^{-2a(T-t)} - 1).
\end{aligned}$$

Entonces tenemos que:

$$A(t, T) = \frac{1}{a^2} (D(t, T) - T + t) (a^2 b - \frac{1}{2} \sigma^2) - \frac{\sigma^2 D^2(t, T)}{4a}.$$

Es importante señalar como el proponer una solución de la forma $B(r_t, t; T) = e^{A(t, T) - r_t D(t, T)}$ además de que ha permitido transformar una

ecuación diferencial parcial de segundo orden en un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, muestra nuevamente el estar trabajando con un r_t considerada normal.

Veamos ahora la generación de la estructura de plazos. Tenemos la relación:

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln B(t, T).$$

Sustituimos la $A(t, T)$ y la $D(t, T)$ que calculamos anteriormente y tenemos que:

$$\begin{aligned} R(t, T) &= -\frac{1}{T-t} \ln B(t, T) \\ &= \frac{1}{T-t} [r_t D(t, T) - A(t, T)] \\ &= \frac{1}{T-t} \left[r_t D(t, T) + (D(t, T) - T + t) \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) - \frac{\sigma^2 D^2(t, T)}{4a} \right] \\ &= r_t \frac{D(t, T)}{T-t} - \left(\frac{D(t, T)}{T-t} - 1 \right) \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) + \frac{\sigma^2 D^2(t, T)}{4a(T-t)} \\ &= r_t \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} - \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} - 1 \right) \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) + \frac{\sigma^2 (1 - e^{-a(T-t)})^2}{4a^3(T-t)}. \end{aligned}$$

Se puede observar que la tasa larga disponible en el mercado satisface que:

$$R(t, \infty) = b - \frac{\sigma^2}{2a^2}$$

Entonces tenemos que,

$$R(t, T) = R(t, \infty) + [r_t - R(t, \infty)] \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} + \frac{\sigma^2(T-t)}{4a} \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} \right)^2 \right)$$

O lo que es lo mismo:

$$R(t, T) = R(t, \infty) + [r_t - R(t, \infty)] M(t, T) + \frac{\sigma^2(T-t)}{4a} M^2(t, T)$$

$$\text{donde } \rightarrow M(t, T) = \frac{D(t, T)}{T-t}$$

Finalmente para este modelo expresamos el precio de un bono cupón cero en términos de r_t , $R(t, \infty)$ y $D(t, T)$. Definamos primero que:

$$B(r_t, t; T) = e^{-R(t, T)(T-t)}$$

Entonces sustituyendo el valor de $R(t, T)$ tenemos que el precio de un bono cupón cero que se coloca en el tiempo t y que vence en el tiempo T se escribe como:

$$B(r_t, t; T) = \exp \left\{ -R(t, \infty)(T-t) - [r_t - R(t, \infty)] D(t, T) - \frac{\sigma^2}{4a} D^2(t, T) \right\}.$$

Ahora, veamos modelos más sofisticados para la descripción de la tasa corta con reversión a la media. Específicamente, la tasa debe seguir un proceso de la forma:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma r_t^\beta dW_t,$$

donde a , b y σ son constantes positivas $\beta \geq 0$ y $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad.

El modelo de tasa corta de Cox, Ingersoll y Ross (CIR)

Observemos que en la ecuación anterior existe un término aleatorio con varianza $\sigma^2 r_t^{2\beta}$ por unidad de tiempo, donde $\beta = 0$. No debemos olvidar que los valores que nos interesan de β son 0 y $1/2$ ya que estos valores son los que permiten analizar la dinámica de la tasa corta. El modelo de Vasicek adopta a $\beta = 0$ y el modelo CIR adopta a $\beta = 1/2$. Si llegáramos a usar valores distintos de los mencionados anteriormente enfrentaríamos una alta complejidad y dificultad técnica para obtener soluciones analíticas.

Recordemos como en el modelo de Vasicek, la estructura de plazos nos puede llevar a dar valores negativos. Esta imperfección se elimina con el modelo de Cox, Ingersoll y Ross en el año de 1985, donde se propone que la dinámica de la tasa corta sea conducida por la ecuación:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t.$$

Para este caso nuestra intención es dar a notar como en este modelo, a pesar de que es una versión alternativa y corrección del modelo de Vasicek, deja

atrás la propuesta de que el comportamiento de la tasa corta este conducido por una variable aleatoria normal. Al tener el término $\sqrt{r_t}$ el proceso de la tasa corta deja de tener una distribución normal. Estamos ahora frente a una distribución Ji-cuadrada no central. Como en el modelo de Vasicek, este proceso tiene reversión a la media pero aquí la varianza es proporcional a $\sigma^2 r$ por unidad de tiempo lo que nos indica que a medida que la tasa de interés aumenta también lo hace su desviación estándar.

Para determinar la distribución de este modelo se considera de inicio un proceso Ornstein - Uhlenbeck de la forma:

$$dy_t = -ay_t dt + \sigma dU_t,$$

Donde $a, \sigma > 0$ y $\{U_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad. Para darle solución a la ecuación anterior podemos escribir una solución similar a la de una ecuación diferencial no homogénea de primer orden, sabiendo que:

$$\begin{aligned} dy_t &= e^{-at} (y_0 + \sigma \int_0^t e^{as} dU_s) \\ &= y_0 e^{-at} + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dU_s. \end{aligned}$$

donde y_t se asume normal con medio y varianza condicionales:

$$E[y_t | y_0] = y_0 e^{-at}$$

$$Var[y_t | y_0] = \sigma^2 \int_0^t e^{-2a(t-s)} ds = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}).$$

Ahora bien, si aplicamos el lema de Itô a $x_t = y_t^2$ escribiríamos que:

$$\begin{aligned} dx_t &= \left(-a \frac{\partial x_t}{\partial y_t} y_t + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 x_t}{\partial y_t^2}\right) dt + \frac{\partial x_t}{\partial y_t} \sigma dU_t \\ &= 2y_t(-ay_t dt + \sigma dU_t) + \sigma^2 dt \\ &= 2y_t dy_t + \sigma^2 dt. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que se tienen $M_{1t}, M_{2t}, \dots, M_{nt}$ movimiento Brownianos independientes definidos mismo que definan los procesos Ornstein – Uhlenbeck siguientes,

$$dy_{kt} = -\frac{1}{2} \alpha y_{kt} dt + \frac{1}{2} \sigma dM_{kt}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Entonces tenemos que,

$$y_{kt} = e^{-\alpha t/2} \left(y_{k0} + \frac{1}{2} \sigma \int_0^t e^{as/2} dM_{ks} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Con media y varianza:

$$E[y_{kt} | y_{k0}] = y_{k0} e^{-\alpha t/2} = \mu_{k,t}$$

$$Var[y_{kt} | y_{k0}] = \frac{\sigma^2}{4} \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} ds = \frac{\sigma^2}{4\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) = \nu_t^2$$

Consideremos ahora el proceso siguiente,

$$r_t = \sum_{k=1}^n y_{kt}^2 \Rightarrow \frac{r_t}{v_t^2} \sim X^2(n, \gamma_t)$$

$$\text{donde} \quad \gamma_t = \frac{1}{v_t^2} \sum_{k=1}^n \mu_{k,t}^2.$$

Así vemos como r_t / v_t^2 sigue una distribución Ji- cuadrada con n grados de libertad, teniendo un parámetro de centralidad γ_t .

Hemos visto como en el modelo CIR se trata, además de corregir errores como los de la no negatividad de las tasas de interés el dejar de utilizar la distribución normal en la conducción de la tasa corta.

De cualquier manera, para el caso de nuestros activos nacionales, la Ji- cuadrada tampoco sería un buen candidato de modelación.

Veamos ahora un modelo más, el modelo de Ho y Lee publicado en 1986, un modelo que originalmente está desarrollado en tiempo discreto. Para hacerlo comparable con los modelos que hemos estado revisando usaremos su planteamiento en tiempo continuo.

Seguimos buscando evidencia de los supuestos de normalidad en los modelos de tratan de explicar la dinámica de la tasa corta.

El modelo de Ho y Lee

Como en los modelos que hemos revisado, este modelo también tiene un solo factor de incertidumbre, la tendencia es dependiente del tiempo e independiente de la tasa corta. El proceso que conduce a la tasa corta es:

$$dr_t = h_t dt + \sigma dW_t,$$

donde $\sigma > 0$ es una constante, $h_t = h(t)$ es una función del tiempo y $W_t \sim (0,t)$ lo que significa que la dinámica estocástica de la tasa corta sigue una distribución normal y su integral estocástica es:

$$r_t = r_0 + \int_0^t h_s ds + \sigma \int_0^t dW_s$$

con media y varianza de la forma,

$$E[r_t | F_0] = r_0 + \int_0^t h_s ds$$

$$\text{Var}[r_t | F_0] = \sigma^2 t,$$

Donde F_0 representa la información disponible hasta el tiempo $t = 0$.

La volatilidad es constante e independiente al nivel de la tasa corta en el tiempo, además de que con la función h_t tenemos la determinación en promedio del movimiento de la tasa con base en el rendimiento anterior.

Para este caso ya hemos evidenciado la presencia de los supuestos de normalidad por lo que solo aclararemos que el modelo sigue con una

ecuación diferencial parcial que se resuelve a través de la construcción de una curva inicial de ceros para terminar con la calibración de la curva de rendimiento y finalmente determinar el precio de un bono cupón cero de la forma:

$$B(r_t, t; T) = \exp\left\{\ln\left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)}\right) - (T - t) \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \frac{\sigma^2}{2} t(T - t)^2 - r_t(T - t)\right\}.$$

Veamos un modelo más, publicado en el año de 1990, donde se calibra una estructura de plazos con una curva inicial de ceros, como en el caso del modelo de Ho –Lee, utilizando observaciones de precios de bonos.

El modelo de Hull y White

Este modelo retoma lo propuesto por Vasicek cuando define la dinámica de la tasa corta con la ecuación diferencial estocástica:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma W_t,$$

donde a , b , y σ son constantes positivas y $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad. Hull y White hacen una modificación para incluir un parámetro pasando de b a b_t lo que hace que el parámetro b sea ahora dependiente del tiempo. Entonces tenemos que la tasa corta es conducida ahora por,

$$dr_t = a(b_t - r_t)dt + \sigma dW_t.$$

Nuevamente estamos frente a un proceso que involucra la normalidad en el comportamiento de la tasa corta. Este modelo sigue también los pasos de los dos últimos mencionados anteriormente, partiendo de su propia ecuación diferencial parcial, calibra su curva inicial de ceros para así llegar a tener su curva de rendimiento $R(t,T)$ y finalmente determinar el precio del bono cupón cero.

Finalmente, veamos el modelo de Black, Derman y Toy publicado en 1990 dónde nuevamente la tasa corta sigue una distribución lognormal además de realizar la valuación de los bonos a través de arboles binomiales.

En el modelo la curva de rendimiento se obtiene de la estructura actual de plazos de la tasa de interés y de una estructura estimada de plazos de la volatilidad.

El modelo de Black, Derman y Toy (1990).

Aunque sabemos que el interés de los autores por no obtener valores negativos para la tasa corta, no es útil que se utilice recurrentemente el supuesto de que esta sigue un proceso log normal.

Para comparar este modelo con los mencionados anteriormente mostraremos su planteamiento en tiempo continuo. Se supone que la dinámica de la tasa corta es conducida por la ecuación:

$$r_t = \mu_t e^{\sigma_t W_t},$$

donde μ_t y σ_t son la media y la volatilidad de la tasa corta al tiempo t y $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano estándar definido sobre un espacio fijo de probabilidad.

Usando las leyes de los logaritmos podemos escribir la ecuación anterior como:

$$r_t = e^{\ln \mu_t + \sigma_t W_t}$$

ó como,

$$\ln r_t = \ln \mu_t + \sigma_t W_t,$$

Entonces tenemos que,

$$W_t = \frac{\ln r_t - \ln \mu_t}{\sigma_t}.$$

Y podemos concluir que la diferencia, logarítmica, de r_t con su media por unidad de riesgo se distribuye como una variable aleatoria $N \sim (0, t)$. Así, nuevamente este modelo recurre a la distribución normal para hacer sus cálculos más básicos.

Hemos hasta ahora revisado dos grandes espacios de la teoría financiera moderna, el área de los productos derivados donde se pretende determinar el precio de contratos de compra y venta de subyacentes y el área de la valuación de Bonos a través de la modelación de la tasa corta.

Para el área de derivados revisamos los modelos de Heston, Hull y White, Barone-Adesi y Whaley, Goldman-Sosin y Gatto y el de Black & Scholes incluyendo su enfoque probabilista.

Ahora, para el área de tasas abordamos los modelos de Merton, Vasicek, Cox, Ingersoll, Ross (CIR), Ho-Lee, y Black, Derman, Toy. Revisar estos modelos es muy importante para realmente dimensionar la cantidad de modelos que usan supuestos de normalidad como condiciones básicas en sus propuestas. Si bien es cierto que en el desarrollo de la teoría financiera era más importante el contar con desarrollos que nos permitieran saber como calculas productos derivados y modelar tasas de interés en la actualidad se requieren herramientas que permitan ofrecerle al mercado cálculos más cercanos a la realidad.

Claro que cada mercado por sus características intrínsecas puede ajustar a distintas distribuciones pero es responsabilidad de quien realiza los cálculos el tener la herramienta que le sirva al inversionista o comprador de productos financieros ya que finalmente es ese inversionista quien corre los riesgos durante las operaciones financieras.

Si no queremos ser catalogados como una economía no desarrollada debemos de no solo estar al tanto de lo que se tiene como herramientas para el área financiera sino por el contrario buscar entender nuestros propios mercados para ofrecer modelos que realmente ajusten con la realidad nacional.

Antecedentes

Existen ya otros trabajos empíricos como el artículo de “Distribución de los rendimientos de mercado mexicano accionario” (Trejo, Nuñez y Lorenzo 2005) donde se ha mostrado la no existencia de normalidad en los rendimientos de la bolsa Mexicana de Valores.

En este trabajo ajusta mucho mejor la distribución NIG que la normal. Dentro de los resultados se rechazó la hipótesis nula de normalidad con la prueba omnibus (Urzúa 1997). Además la hipótesis nula de distribución *t-Student* con la prueba KS (nota de la prueba KS) se rechazó a un nivel de significancia del 1%. Todos los cálculos anteriores se obtuvieron usando máxima verosimilitud.

El análisis comparativo de distribuciones se realizó generando 1000 simulaciones de la distribución NIG y de la *t-Student* con los parámetros calculados para cada una de las series además de aplicó la prueba de Kolmogorov –Smirnov donde la hipótesis nula fue que las series se desdistribuyen como *t-Student* o como NIG.

En el 38% de los casos las NIG resultó ser la distribución, el 3% resultó ser la *t-Student*. En el 13.5% la NIG se presenta como un mejor ajuste a la *t-Student* y finalmente en el 46% de los casos la prueba no es contundente acerca de cual es la distribución.

También en este trabajo, tomando en cuenta que no solamente los criterios para elegir un proceso estocástico deben ser estadísticos sino deben de considerar la experiencia de los investigadores, se presentan tres posibles aplicaciones del tipo de proceso que se estudia en el artículo.

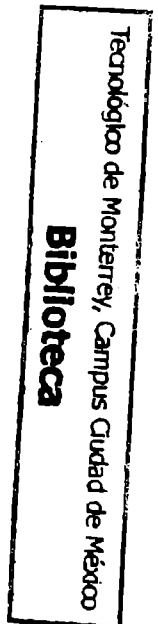
La modelación neutral al riesgo con procesos de *Levy* exponenciales, el cálculo del VaR y los modelos de heterocedasticidad condicional son cálculos que, según los autores, debieran ya incorporar otra clase de distribuciones en la modelación de las series de tiempo.

Se concluye debido al análisis y comparación de resultados que el movimiento browniano no es la herramienta adecuada para modelar las series financieras mexicanas y que los procesos estocásticos estacionarios pueden ser una alternativa para modelar nuestros activos si es que se relaja el supuesto de normalidad.

Entonces tenemos que voltear al uso de proceso de *Levy* más generales para obtener modelos más cercanos que nos ayuden a minimizar el riesgo en los cálculos. En este trabajo se propone la función normal inversa gaussiana para modelar las finanzas en México.

En trabajos como el de Ramirez (2004) se trata también el tema del tratamiento de distribuciones de rendimientos con colas gordas o anchas. Sabemos que el supuesto de normalidad es esencial para los modelos de valuación de riesgos o de fijación de precios de activos debido a que los resultados más importantes vienen de los dos primeros momentos de una distribución normal (Kon, 1994).

Modelos como el APT o el CAPM requieren que los precios de los activos se comporten como variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con una varianza finita, estable y bien definida para garantizar la convergencia de los momentos de la distribución empírica a los momentos de una distribución normal teórica en función del crecimiento de la muestra.



Los cálculos para el Valor en Riesgo donde los factores de riesgo, volatilidades y matrices de correlaciones también requieren la convergencia mencionada en el párrafo anterior para asegurarse de que exista normalidad multivariada es otro caso donde se requiere de la normalidad para evitar errores en el cálculo de los requerimientos de capital en riesgo de las organizaciones.

La convergencia de los parámetros es alta solo para intervalos de tiempo relativamente largos, especialmente para series de rendimientos de un mes, por lo que la hipótesis de normalidad resulta seriamente cuestionable al tener que realizar análisis con series diarias o de alta frecuencia.

En este trabajo se describe como en el afán de querer resolver el problema de la normalidad algunos se han enfocado a adoptar los procesos de Itô que involucran la suma de un valor inicial, una integral de tiempo y finalmente una integral estocástica.

Es importante resaltar las características del proceso de Itô debido a que por la parte de la integral de tiempo tiene incrementos instantáneos cuyas medias, pueden fluctuar estocásticamente en el tiempo. Así, si pensamos en la integral estocástica las varianzas y covarianzas también pueden moverse en el tiempo.

Además de lo descrito anteriormente, Ramírez (2004) menciona que existe una segunda característica por la que los procesos de Itô son buenos candidatos que tiene que ver con que permiten simular los precios de una obligación contingente a partir de una estrategia de negociación cuyos valores iniciales y de dispersión son iguales a los del propio proceso de Itô.

Teniendo mercados dinámicamente completos, el precio de cualquier obligación contingente se puede replicar con la información generada en un proceso de Wiener.

De la gama de procesos de Itô utilizados en el área financiera, especialmente en la administración de riesgos e ingeniería financiera, los movimientos brownianos son los preferidos de uso debido a que pueden medir los cambios en los valores de portafolios cuando los precios de los activos que los conforman se mueven de forma extrema.

Así, se han inclusive incorporado ecuaciones de otras áreas de estudio como la Física para lograr una mejor modelación de los mercados y extender los modelos.

Estas extensiones aunado a las caminatas aleatorias, las mezclas gaussianas, las martingalas y las cadenas de Markov forman parte de los procesos de Itô. Además tenemos también los procesos de Poisson, las distribuciones *t-Student* y los modelos de heterocedasticidad condicional, que son de las técnicas más usadas por los analistas financieros. Así tenemos lo que podemos llamar procesos estocásticos alternativos a la distribución normal.

Recientemente se publicó un artículo sobre los procesos Poisson-Gaussianos para el caso mexicano (Núñez, Segundo y de la Cruz 2007). En este trabajo a través del uso de máxima verosimilitud se analiza el comportamiento de acciones como Alfa, Carso, Kimberly, Com Mex, ICA, Coca Cola, CEMEX, Apasco y BIMBO durante 10 años.

En sus resultados nos dan evidencia de cómo para su muestra escogida la distribución Poisson-Gaussiana tiene un mejor ajuste en comparación con otras distribuciones probadas en el mismo trabajo. A pesar de la conclusión

anterior, existieron algunos casos donde el uso de la verosimilitud de un ARCH supero el ajuste de la Poisson- Gaussiana.

Entonces, en este trabajo volvemos a tener evidencia de que las series de tiempo de datos financieros no pueden describirse con modelos gaussianos puros debido a la discontinuidad de los datos.

Pero no solo en artículos se ha comenzado a notar la necesidad de buscar nuevas distribuciones que nos permitan tener mejores cálculos financieros, en “Riesgos financieros y económicos” de Venegas (2006) se dedica un capítulo completo al tema que hemos venido tocando desde el inicio de este trabajo.

Se habla de cómo la evidencia empírica nos ha demostrado que en temas como sesgo, curtosis excesiva y colas pesadas la distribución normal simplemente no ajusta a las series de precios en los activos nacionales.

Específicamente muestran el ejemplo de GCARSO A1. Se observa que tan lejos se encuentra la distribución empírica de los rendimientos de una distribución normal así como la cercanía con una mezcla de una variable normal con un proceso de Poisson.

Evidentemente, se encuentran que la cresta de la distribución empírica es superior a la de la distribución normal. Ya que sabemos que ambas distribuciones tienen la misma desviación estándar y la cresta de la distribución empírica es mayor, esta última tendrá necesariamente colas más pesadas.

El hecho de que existan colas más pesadas nos da una mayor probabilidad de que valores extremos ocurran en comparación con la distribución normal.

En el libro utilizan una gráfica denominada *cuantil-cuantil* o *Q-Q*, que es también una herramienta para visualizar la diferencia entre una distribución empírica y una distribución normal.

Esta gráfica se elabora ordenando los rendimientos logarítmicos observados en forma creciente denotados como R_t , con un índice t que va de 1 hasta T . Después se obtienen los valores Q_t de la función de distribución acumulada de una variable aleatoria normal estándar que proporcionan el valor $(t-0.5)/T$. Por último se gráfica cada punto (Q_t, R_t) .

Cuando la curva que une los puntos es una línea recta se espera el cumplimiento del supuesto de normalidad de las observaciones R_t .

Para el caso de GCARSO A1 la curva se observó muy lejos de ser una recta por la presencia de las colas anchas.

Planteamiento de la problemática (Valor potencial)

Este trabajo pretende probar una distribución distinta que ajuste al comportamiento real de los precios de los activos nacionales: una distribución que siga un proceso poisson-gaussiano.

La conveniencia de este trabajo es describir de una manera más realista el comportamiento de los rendimientos correspondientes a los subyacentes (activos mexicanos) y los cálculos de los modelos citados en la sección anterior.

Las implicaciones prácticas para futuros trabajos reside en incorporar en los modelos actuales la participación de la distribución Poisson-gaussiana sustituyendo los supuestos de normalidad; Aunque sabemos que lo anterior seguramente llevará tiempo será completamente necesario si pretendemos tener cálculos cada vez más precisos dentro de la teoría financiera moderna.

La utilidad metodológica es tener una aproximación mas certera al cálculo de los productos derivados y la valuación de riesgos financieros entre otros.

Marco Teórico

Para este trabajo retomamos el artículo de Sanjiv R Das (máxima verosimilitud) “Poisson-Gaussian Processes and the Bond Markets” publicado en julio de 1998.

El artículo propone y estima una clase de procesos poisson-gaussianos que permite tener saltos en las tasas de interés. La estimación se realiza usando estimadores para tiempo continuo y tiempo discreto. Se encuentra que los procesos con saltos tienen características especiales que los modelos de difusión no llegan a capturar.

Además se desarrolla la función característica, momentos y densidad de la función de difusión de saltos estocástica.

Así, se encuentra evidencia de que existen modelos de difusión que pueden modelar bastante bien los procesos con saltos. Se modelan tasas de interés.

¿Por qué deberíamos esperar que un modelo que incluya saltos sea más satisfactorio? ¿Será posible que en nuestros mercados los niveles de bursatilidad, consecuencia de la oferta y demanda de los activos, sean tan altos que mantengan continuidad en los precios? Existen crudas evidencias estadísticas que sugieren que lo anterior no sucede.

La modelación con saltos nos ayuda a tener mejores aproximaciones en series que muestran excesiva curtosis y colas anchas.

La volatilidad de las tasas de interés es muy alta sobre todo al término del plazo ¹ y los cambios en las mismas demuestran considerable sesgo y curtosis.

El proceso estocástico

En el apartado 2 del trabajo de Das se muestra el proceso estocástico base que se emplea de la siguiente forma:

$$dr = k(\theta - r)dt + \nu dz + Jd\pi(h)$$

Donde θ es un parámetro de tendencia central para la tasa de interés r que revierte a la tasa k . Por lo tanto la tasa de interés se explica con un *drift* de reversión a la media y dos términos variables; el primero es un proceso de difusión y el segundo es la incorporación de un proceso *Poisson* con salto variable J .

Es importante señalar que el coeficiente la varianza en la difusión es ν^2 y la llegada de los saltos está gobernada por un proceso *Poisson* π con parámetro de frecuencia dado por h que denota el número de saltos por año. Los procesos de difusión y *Poisson* son independientes, además de ser independientes de J al mismo tiempo.

La función característica

Para determinar el impacto de los saltos en las tasas de interés se requiere un análisis de la distribución de probabilidad sobre un proceso de difusión con saltos y los momentos de esa distribución. La función característica de los procesos de difusión con saltos ofrece la obtención no solo de la función de densidad sino también las funciones de los momentos.

El ejercicio supone que al inicio estamos en $t = 0$ y que a continuación estaremos en $t = T$. Se está interesado en la distribución de $r(T)$ dado que el valor de r se define en el tiempo cero como $r(0) = r_0 = r$. Se utiliza la ecuación de Kolmogorov inversa para la obtención de la función característica $F(r; T = 0; s)$ sujeta a la condición:

$$F(r, T = 0; s) = \exp(isr) \text{ donde } i = \sqrt{-1}$$

La ecuación inversa de Kolmogorov es:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial r} k(\theta - r) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \nu^2 - \frac{\partial F}{\partial T} + hE[F(r + J) - F(r)]$$

Obteniendo la solución:

$$F(r, T = 0; s) = \exp[A(T; s) + rB(T; s)]$$

$$A(T; s) = \int (k\theta B(T; s) + \frac{1}{2}\nu^2 B(T; s)^2 + hE[e^{jB(T; s)} - 1])dt.$$

$$B(T; s) = is \exp(-kT)$$

Teniendo la función característica se procedió a obtener las funciones de la densidad y momentos para cualquier selección en la distribución de saltos.

Los Momentos

Para obtener los momentos se diferencio la función característica sucesivamente respecto de s para después encontrar el valor de la derivación cuando $s = 0$.

Denotamos μ_n para cualquier enésimo momento y F_n será la derivación enésima de F con respecto de s por lo que

$$F_n = \frac{\partial^n F}{\partial s^n}$$

Entonces,

$$\mu_n = \frac{1}{i^n} [F_n | s = 0]$$

Así mismo, definimos $E(J^n)$ con $n = 1, 2, 3, 4$ como el enésimo momento en el que se dan los saltos. Los cuatro primeros momentos son:

$$\mu_1 = (\theta + \frac{hE[J]}{k})(1 - e^{-kT}) + re^{-kT}$$

$$\mu_2 = \frac{\nu^2 + hE[J^2]}{2k}(1 - e^{-2kT}) + \mu_1^2$$

$$\mu_3 = hE[J^3](\frac{1 - e^{-3kT}}{3k}) + 3\mu_1(\nu^2 + hE[J^2])(\frac{1 - e^{-2kT}}{2k}) + \mu_1^3$$

$$\begin{aligned} \mu_4 = & hE[J^4](\frac{1 - e^{-4kT}}{4k}) + 3((\nu^2 + hE[J^2])(\frac{1 - e^{-2kT}}{2k}))^2 \\ & + 4\mu_1 hE[J^3](\frac{1 - e^{-3kT}}{3k}) + 6\mu_1^2((\nu^2 + hE[J^2])(\frac{1 - e^{-2kT}}{2k})) + \mu_1^4 \end{aligned}$$

Cualquier distribución con saltos donde los momentos son conocidos es finita y admisible.

La función de densidad

La estimación con un proceso Poisson-Gaussiano en tiempo continuo requiere de la función de probabilidad densidad condicional correspondiente a la función del proceso de difusión de saltos. Si t es el día de hoy y τ es el tiempo del intervalo entonces el horizonte de tiempo al final se puede escribir como $T = t + \tau$. Así, el autor aplicando la inversa de Fourier a la función característica $F(r(t), \tau; s)$ obtiene la función de densidad $f(r(t), \tau)$:

$$f[r(t + \tau) | r(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}[\exp(-isr(t + \tau))F(r(t), \tau; s)]ds$$

La estimación se obtiene usando máxima verosimilitud usando una serie de tasas de interés discreta $r(t), t = 0, \dots, T$. Si a los intervalos entre las observaciones se les llama Δ entonces la función de máxima verosimilitud que debe ser maximizada es:

$$L = \max_{k; \theta; \nu; h(\{E[J^n]\}, \forall n) t=0} \sum_{t=0}^{T-1} \log(f[r(t + \Delta) | r(t)])$$

Es decir,

$$\max_{k; \theta; \nu; h(\{E[J^n]\}, \forall n) t=0} \sum \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}[\exp(-isr(t + \Delta)) F(r(t), \Delta; s)] ds$$

Aproximación en tiempo discreto

Se estima una tasa de interés Poisson-Gaussiana usando una aproximación de bernoulli que nos dice que en cada momento del tiempo puede o no ocurrir un salto.

Tenemos la expresión

$$\Delta r = k(\theta - r)\Delta t + \nu \Delta z + J(\mu, \gamma^2) \Delta \pi(q)$$

dónde:

Δr es el rendimiento del activo

k es la tasa de reversión del rendimiento

θ es un parámetro de tendencia central

ν es la desviación estándar

Δz es el movimiento browniano estándar

$J(\mu, \gamma^2)$ es el shock del salto

$\Delta\pi(q)$ es el incremento poisson dado por una distribución bernoulli con parámetro:

$$q = h\Delta t + O(\Delta t)$$

El modelo (tiempo discreto)

$$f[r(s) | r(t)] = q \exp\left(\frac{-(r(s) - r(t) - k(\theta - r(t))\Delta t - \mu)^2}{2(\nu^2 \Delta t + \gamma^2)}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi(\nu^2 \Delta t + \gamma^2)}} \\ + (1 - q) \exp\left(\frac{-(r(s) - r(t) - k(\theta - r(t))\Delta t)^2}{2\nu^2 \Delta t}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu^2 \Delta t}} \quad s > t$$

Ahora, la aproximación de Bernoulli se alcanza de la siguiente manera: definimos $Y_i = 1$ si un salto ocurre y de lo contrario tenemos que $Y_i = 0$ para toda $i = 1, 2, 3, \dots, N$ y donde $\Delta t = T/N$ para la serie que pasa por T .

Entonces tenemos que:

$$\Pr[Y_i = 0] = 1 - h\Delta t + O(\Delta t)$$

$$\Pr[Y_i = 1] = h\Delta t + O(\Delta t)$$

$$\Pr[Y_i > 1] = P(\Delta t)$$

Ahora, denotemos $M = \sum_{i=1}^N Y_i$ donde M es distribuida binomial y es la suma de las variables *Bernoulli* independientes. Para x eventos tenemos que,

$$\Pr[M = x] = {}^N C_x (hT/N)^x (1 - hT/N)^{N-x}, \quad \forall x$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr[M = x] = \frac{e^{-hT} (hT)^x}{x!}$$

Entonces, tenemos que la aproximación de Bernoulli converge con la densidad del proceso de Poisson.

El modelo descuida el hecho de que al trabajar con tasas de interés que pueden en algún momento pueden para el modelo adquirir valores negativos hecho que en la realidad no es posible. Así, se corrige este error reemplazando los valores de tasas de interés por los rendimientos en activos nacionales mismos que si pueden llegar a presentar valores tanto positivos como negativos.

Claro que no queremos únicamente tener un punto de vista para confirmar la utilidad de una distribución y es por eso que incorporaremos dos cálculos más. Primero incorporaremos a nuestro modelo base un componente ARCH para modelar nuestra volatilidad:

$$\nu(s + \Delta t)^2 = a_0 + a_1[r(s) - E(r(s))]^2$$

Ahora tenemos que estimar nuestros nuevos parámetros a_0 y a_1 . Finalmente, probaremos como nos ajusta un proceso ARCH Gaussiano puro y compararemos nuestras tres posibilidades.

Alcance de la investigación y formulación de la hipótesis

Este trabajo propone el uso de modelos poisson-gaussianos para los cálculos de la teoría financiera debido a la naturaleza de los activos nacionales. Los cambios para muchos de los modelos vigentes no serán sencillos sobre todo pensando que la distribución normal, usada generalmente, facilita mucho los cálculos por ser matemáticamente sencilla y amigable. Así, deseamos darle confianza a nuestros cálculos en materia de productos derivados o valuaciones de bonos. Presentamos entonces nuestra hipótesis:

Ho: Que los activos nacionales seleccionados ajustan a modelos poisson-gaussianos con un 95% de confiabilidad.

H1: Que uno de los modelos alternativos (gaussiano, poisson-gaussiano - arch o arch) ajuste mejor que el modelo poisson-gaussiano.

Metodología y base de datos

Se escogieron 11 activos tomando de cada uno la serie comprendida a partir del 1 de enero de 1994 hasta el 31 de diciembre del 2004. Los activos escogidos son:

- | | |
|--------------------------|----------------|
| 1. MASECA | 6. BANORTE |
| 2. VITRO | 7. INBURSA |
| 3. ALFA | 8. CONTINENTAL |
| 4. CEMENTOS
CHIHUAHUA | 9. DESC |
| 5. SORIANA | 10. PEÑOLES |
| | 11. ELEKTRA |

Para realizar la simulación a través de máxima verosimilitud nos apoyamos en el software de resolución matemática “MATLAB” ya que es una plataforma que contiene la función “fmincon” misma herramienta que puede minimizar u obligar al valor mínimo a una función no lineal y multivariada.

Lo que se desea es encontrar el punto mínimo de la función de rendimientos dependiendo principalmente de la probabilidad denotada por el parámetro “ q ” (aproximación de Bernoulli).

La programación en MATLAB aunque nos ahorra gran parte del trabajo no nos puede garantizar en un solo barrido el mínimo de la función por lo que manualmente probamos los valores de “ q ” en intervalos de .1 donde la misma “ q ” toma valores respetando la restricción: $1 < q < 0$.

Para escoger nuestra “q” candidato nos fijamos en el “fval”, de tal forma que donde encontráramos el mínimo valor tendríamos la “q” que cumpliría con la máxima verosimilitud. Veamos los cálculos realizados para el activo MASECA:

MASECA	
q	Fval
1	0.00110
0.1	0.00064
0.2	0.00002
0.3	0.00001
0.4	0.00000
0.5	0.00002
0.6	0.00001
0.7	0.00053
0.8	0.00000
0.9	0.00000

Podemos observar que para este caso el extremo valor de q=1 es el que menor fval nos arrojó. Ahora veamos el ejemplo de VITRO, ALFA y CEMENTOS CHIHUAHUA:

VITRO	
Q	fval
1	0.00003
0.1	0.00110
0.2	0.00006
0.3	0.00003
0.4	0.00001
0.5	0.10000
0.6	0.00000
0.7	0.00062
0.8	0.00001
0.9	0.00001

ALFA	
q	Fval
0.6848	0.00004
0.1	0.00010
0.2	0.00240
0.3	0.00000
0.4	0.00000
0.5	0.00000
0.6	0.00000
0.7	0.00000
0.8	0.00000
0.9	0.00000

q	fval
0.9998	0.00001
0.1	0.00008
0.2	0.00016
0.3	0.00040
0.4	Indeter
0.5	0.00008
0.6	0.00036
0.7	0.00010
0.8	0.00000
0.9	0.00000

En estos casos ya no tenemos un valor extremo de “q” ya que respectivamente observamos. Es importante recordar que el “fval” nos da también el grado de confianza con el que ajusta nuestra distribución.

Análisis de datos y resultados

Para comenzar es necesario observar el comportamiento general de la muestra de rendimientos escogida. En el siguiente cuadro se muestran los primeros cuatro momentos de las series:

	Media	Varianza	Sesgo	Curtosis
MASECA	0.000144	0.000139	0.663113	7.946081
VITRO	-0.00018	0.000212	0.16907	4.612304
ALFA	0.000346	0.00014	0.35862	6.274714
C CHI	0.000339	0.000156	0.623742	11.97588
SORIANA	0.000458	0.00012	0.197454	2.395316
BANORTE	0.000291	0.000206	-1.21452	29.31402
INBURSA	0.000315	0.000103	0.210359	5.2599
CONTINEN	0.000398	0.000125	0.239374	2.424389
DESC	0.000099	0.000170	0.352506	4.341103
PEÑOLES	0.000395	0.000143	0.12628	6.951944
ELEKTRA	0.000254	0.000194	0.084229	5.62941

Es importante ver como los valores en la columna del cuarto momento superan por mucho el valor correspondiente al de una distribución normal.

Ahora, presentaremos los resultados correspondientes a los tres modelos para cada uno de los activos estudiados. Observemos, además de los parámetros, su error estándar y el valor del *Log-likelihood*. Iremos haciendo algunos comentarios sobre los resultados en cada uno de los activos para al final de la sección mostrar una tabla donde se concentrarán los resultados. Recordemos que estamos buscando los errores estándar menores y el mayor *Log-likelihood* por el uso de máxima verosimilitud. Comenzaremos con MASECA.

MASECA

Parámetro	Poisson-Gaussiano	ARCH-Poisson Gaussiano	ARCH Gaussiano
k	-0.0014 (.06931)	-0.0001 (.004799)	-0.0011 (.042203)
θ	1.1786 (.005078)	-3.6415 (.016431)	0.3221 (.003805)
ν	8.0979 (.021611)		
μ	0.0009 (.18807)	-0.0002 (.022828)	
γ	-2.7449 (.043594)	4.8879 (.018184)	
q	0.1 (.020567)	0.8573 (.004262)	
a_0		7.1571 (.032129)	16.6557 (.014989)
a_1		2.3965 (.020545)	23.8322 (.12224)
<i>Log-Likelihood</i>	0.00064	0.00290	0.00023

Para este primer activo podemos observar que contrario a lo que se esperaría según la hipótesis y, aunque el modelo Poisson-Gaussiano presenta en los parámetros errores estándar muy pequeños, el máximo valor del *Log-Likelihood* lo tiene el modelo ARCH Poisson-Gaussiano.

VITRO

Parámetro	Poisson-Gaussiano	ARCH-Poisson Gaussiano	ARCH Gaussiano
k	-183.699 (.019891)	-0.0007 (.165358)	0 (0)
θ	0.985 (.032312)	0.8425 (.010301)	-99.2026 (.001723)
ν	409.7319 (.019927)		
μ	-141.323 (.019871)	-0.0008 (.16696)	
γ	87.4553 (.019867)	38.0478 (.183086)	
q	0.5 (.019865)	0.5 (.019863)	
a_0		49.202 (.136893)	100.877 (.001665)
a_1		18.418 (.057445)	64.0465 (.00107)
<i>Log-Likelihood</i>	0.1	0.000023	0.00000385

ALFA

Parámetro	Poisson-Gausiano	ARCH-Poisson Gausiano	ARCH Gausiano
k	.0302 (.007917)	0.0002 (.016417)	0 (.00273)
θ	-46.9609 (.013328)	4.9373 (.003184)	-239.149 (.015954)
ν	72.3008 (.011743)		
μ	3.1973 (.019855)	0.0003 (.050781)	
γ	2.4698 (.019856)	1.442 (.019889)	
q	.4709 (.0198)	0.2357 (.004873)	
a_0		17.1615 (.013131)	199.8691 (.012985)
a_1		8.2928 (.021239)	71.4545 (.019651)
<i>Log-Likelihood</i>	.0034	0.00023	0.0000003

Siguiendo el mismo criterio que con el MASECA, las series de VITRO, ALFA y CEMENTOS CHIHUAHUA ajustan al modelo Poisson-Gaussiano.

CEMENTOS CHIHUAHUA

Parámetro	Poisson-Gausiano	ARCH-Poisson Gausiano	ARCH Gausiano
k	-0.0042 (.067837)	-0.153 (.001403)	0 (0.00000209)
θ	1.9413 (.013752)	-5.8137 (.000202)	0.0024 (0.00000066)
ν	9.7405 (.036278)		
μ	0.0016 (.027076)	-1.1788 (000482)	
γ	2.5148 (.031685)	134.2507 (.)	
q	0.883 (.009312)	1 (0)	
a_0		44.555 (.000662)	0.2498 (0.00001481)
a_1		41.1693 (.000776)	3.9827 (0.0002938)
<i>Log-Likelihood</i>	0.0004	0.0000017	0.0000001

SORIANA

Parámetro	Poisson-Gausiano	ARCH-Poisson Gausiano	ARCH Gausiano
k	0.0227 (.00975)	-0.0013 (.000103)	0 (.002586)
θ	-117.202 (.019362)	-11.4097 (.000249)	-221.9763 (.016708)
ν	147.9133 (.013902)		
μ	5.0552 (.020187)	-0.0289 (.000234)	
γ	4.1334 (.020188)	41.7938 (.000363)	
q	0.5403 (.019934)	0.9999 (.00001)	
a_0		9.5173 (.000204)	179.9072 (.012885)
a_1		25.9715 (.000265)	179.9072 (.012885)
<i>Log-Likelihood</i>	0.0010	0.0000085	0.0000004

BANORTE

Parámetro	Poisson-Gausiano	ARCH-Poisson Gausiano	ARCH Gausiano
k	-178.744 (.023551)	-0.0025 (.000753)	-0.0027 (.023856)
θ	0.9135 (.032815)	-0.5222 (.001321)	0.7504 (.003388)
ν	394.3696 (.021481)		
μ	-107.825 (.020918)	-0.0036 (.001507)	
γ	75.0643 (.020874)	10.665 (.001136)	
q	0.3 (.020851)	0.9983 (.000016)	
a_0		4.7278 (.001693)	10.407 (.021392)
a_1		3.378 (.0006928)	2.5383 (.020708)
<i>Log-Likelihood</i>	0.0802	0.0008	0.0013

Para los casos de SORIANA y BANORTE nuevamente encontramos que el modelo que mejor ajusta es el Poisson Gaussiano con valores en el *Log-Likelihood* de .0010 y .0802 respectivamente.

INBURSA

Parámetro	Poisson-Gausiano	ARCH-Poisson Gausiano	ARCH Gausiano
k	-0.0003 (.015137)	0.0004 (0)	0.0009 (.038554)
θ	-0.1699 (.018513)	-316.4096 (.000376)	2.2066 (.003455)
ν	10.7267 (.009484)		
μ	0 (.051273)	0.4795 (0)	
γ	1.3167 (.020905)	191.5677 (.000225)	
q	0.4 (.020912)	0.4 (.000002)	
a_0		249.7866 (.000291)	12.1917 (.039588)
a_1		235.6428 (.0002761)	15.2003 (.062793)
<i>Log-Likelihood</i>	0.0002	0.000010	0.000231

INBURSA es un caso en el que podemos recomendar tanto el modelo de Poisson Gausiano como el ARCH Gausiano para explicar la serie.

CONTINENTAL

Parámetro	Poisson-Gausiano	ARCH-Poisson Gausiano	ARCH Gausiano
k	-0.0009 (.002797)	0 (.007264)	-0.0001 (.00362)
θ	16.9366 (.012637)	-81.2025 (.143663)	-9.1785 (.006532)
ν	18.7241 (.008859)		
μ	0.0139 (.04167)	0.0012 (.617036)	
γ	10.2461 (.001873)	29.9721 (.051674)	
q	0.9999 (0)	0.5 (.020499)	
a_0		112.5202 (.021704)	23.1702 (.00734)
a_1		33.6485 (.034242)	5.6549 (.0202)
<i>Log-Likelihood</i>	0.00004	0.00001	0.00009

Continental definitivamente se ajusta con el ARCH Gausiano.

DESC

Parámetro	Poisson-Gausiano	ARCH-Poisson Gausiano	ARCH Gausiano
k	0.1048 (.00672)	0.0162 (.00002)	NA
θ	-187.536 (.018023)	-53.5109 (.00052)	NA
ν	147.0128 (.021626)		NA
μ	28.7696 (.019923)	0.9191 (.00005)	NA
γ	22.7448 (.019962)	46.6795 (.00015)	NA
q	0.7 (.019973)	1 (.00003)	NA
a_0		22.4288 (.00009)	NA
a_1		116.7212 (.00035)	NA
<i>Log-Likelihood</i>	0.02710	0.00000404	NA

Para el caso de DESC y Peñoles nuevamente el modelo que ajusta es el Poisson Gaussiano. Debemos notar que en el caso de DESC la naturaleza de la serie no nos permitió realizar la modelación para el ARCH Gaussiano por lo que únicamente estamos comparando los dos modelos restantes.

PEÑOLES

Parámetro	Poisson-Gausiano	ARCH-Poisson Gausiano	ARCH Gausiano
k	0.0232 (.006284)	0.0003 (.013646)	0 (.002861)
θ	-52.2402 (.014196)	4.8749 (.009477)	-215.5053 (.016176)
ν	64.2077 (.012814)		
μ	4.2898 (.020209)	0 (.054577)	
γ	2.8746 (.020218)	1.1899 (.022361)	
q	0.3 (.020228)	0.1 (.02023)	
a_0		15.8737 (.027674)	187.4776 (.013485)
a_1		5.5144 (.076401)	65.7586 (.020029)
<i>Log-Likelihood</i>	0.00710	0.00027	0.000000407

ELEKTRA

Parámetro	Poisson-Gausiano	ARCH-Poisson Gausiano	ARCH Gausiano
k	0.0372 (.010295)	-0.0001 (.031592)	0.0001 (.01276)
θ	-128.917 (.019135)	5.5685 (.006933)	7.1465 (.005267)
ν	156.4107 (.016534)		
μ	9.6107 (.020782)	0.0004 (.111602)	
γ	9.4877 (.020787)	6.3482 (.029981)	
q	0.5124 (.020801)	0.5 (02082)	
a_0		17.9397 (.051216)	22.0021 (.011539)
a_1		32.3036 (.045644)	8.3656 (.020169)
<i>Log-Likelihood</i>	0.00280	0.00008	0.00010

Finalmente ELEKTRA muestra nuevamente que el modelo Poisson-Gausiano es el mejor candidato para explicar la serie. Veamos un resumen de las últimas páginas respecto al modelo que ajusto para los distintos activos:

ACTIVO / MODELO	Poisson-Gausiano	ARCH-Poisson Gausiano	ARCH Gausiano
MASECA		✓	
VITRO	✓		
ALFA	✓		
CEMENTOS CHI	✓		
SORIANA	✓		
BANORTE	✓		
INBURSA	✓		✓
CONTINENTAL			✓
DESC	✓		
PEÑOLES	✓		
ELEKTRA	✓		

Tenemos que de los 11 activos estudiados, 9 aceptan la hipótesis nula que recordemos decía que: “Que los activos nacionales seleccionados ajustan a modelos poisson-gaussianos con un 95% de confiabilidad”.

Por lo tanto aceptamos la hipótesis nula en un 81.81%. Así, podemos decir que estamos ante un modelo que ciertamente funciona con las series de activos mexicanos.

Conclusiones Finales

Estamos usando modelos anidados lo que nos permite llegar a conclusiones previas a observar detenidamente cada uno de nuestros activos.

Tenemos en primer lugar el modelo ARCH-Gaussiano-Poisson que es el modelo paraguas de nuestro trabajo. De ahí se desprende el modelo Gaussiano-Poisson. Por otra de las ramas del mismo modelo paraguas se desprende el modelo ARCH-Gaussiano.

Hemos comentado los resultados de nuestros once activos y hemos visto como más del 80% de los mismos ajustaron al modelo Poisson-Gaussiano por lo que aceptamos nuestra hipótesis nula. Claro que debido a lo anidado de los modelos también obtuvimos series que ajustaban con nuestros modelos alternativos.

Así, es importante que veamos los casos de MASECA, INBURSA y CONTINENTAL que inclusive para el segundo caso ajustó perfectamente para dos de los modelos propuestos.

Hemos pasado por toda una reflexión de la teoría financiera viendo como los supuestos de normalidad prevalecen en todo momento. El hombre aún no es capaz de crear una serie de números aleatorios, sin embargo sigue buscando modelar series de tiempo, series que contienen un componente aleatorio que no necesariamente se distribuye normalmente.

Tanto para el caso de los modelos de derivados como en los modelos de tasas hemos visto como todos los cálculos se hacen con supuestos de normalidad, inclusive vimos como algunos modelos involucran en sus

cálculos distribuciones Ji-cuadrada no centrales (El modelo de tasa corta de Cox, Ingersoll y Ross) pero aún así no resuelven el problema para el caso mexicano.

Lo anterior es un impedimento ya que solamente en la medida en que seamos más exactos con nuestros cálculos para determinar el precio de una opción ya sea americana o europea o para explicar el comportamiento de la tasa corta, será que el mercado confíe más en usar productos financieros en su vida cotidiana.

Bibliografía

Das, Sanjiv R. (1998). "Poisson Gaussian Processes and the Bond Markets". *NBER Working Paper Series*, No. 6631.

Das, Sanjiv R. (2002). "The Surprise Element: Jumps in Interest Rates", *Journal of Econometrics*, 106, 2002, pp.27-65.

Barndorff-Nielsen, O. E. (1998). "Processes of normal inverse gaussian type", *Finance and Stochastics*, Vol. 2, pp. 41-68.

Barndorff-Nielsen, O. E. (1995). "Normal inverse Gaussian processes and the modeling of stock returns", research report 300, Department of theoretical statistics, Institute of mathematics, University of Aarhus.

Blattberg, R. C. y N. J. Gonedes (1971). "A comparison of the stable and student distributions as statistical models for stock prices", research report, Graduate school of Business, University of Chicago.

Bibby, B. M. y M. K. Sorensen (1995). "A hyperbolic diffusion model stock prices", research report 331, Department of theoretical statistics, Institute of mathematics, University of Aarhus.

Cont, R. y P. Tankov (2004). "Financial modelling with jump processes", Chapman and Hall/*CRC Financial Mathematics Series*, Reino Unido.

Trejo B., Nuñez J. A. y Lorenzo A. (2004). "Distribución de los rendimientos del Mercado mexicano accionario". *Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Ciudad de México*.

Ramírez, J.C.(2004). "Usos y limitaciones de los procesos estocásticos en el tratamiento de distribuciones de rendimientos con colas gordas". *La revista de análisis económico*, 19, pp. 51-76.

Black F. y Scholes M. (1973). "The pricing of options and corporate liabilities". *The journal of political economy*. Vol 81, No. 3, pp. 637-654.

Heston, S.I. (1993). "A closed-form solution for options with Stochastic volatility with application to bond and currency options". *Review of financial studies*. Vol. 6, No. 2, pp. 327-343.

Hull, J.C. y White A. (1987). "The pricing of options on assets with stochastic volatility". *Journal of finance*. Vol. 42, No. 2, pp. 281-300.

Barone-Adesi, G. y R. E. Whaley (1987). "Efficient analytic approximation of american option values". *Journal of finance*. Vol. 42, No. 2, pp. 301-320.

Goldman, M. B., H. B. Sosin y M.A. Gatto (1979). "Path dependent options: buy at the low, sell at the high". *The journal of finance*". Vol. 34, No. 5, pp. 1111-1127.

Merton, R. C. (1973). "On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates". *The journal of finance*. Vol. 29, No. 2, pp. 449-470.

Vasicek, O. (1977). "An equilibrium characterization of the term structure". *Journal of financial economics*, Vol. 5, No.2, pp. 177-188.

Cox, J. C., J. E. Ingersoll y S. A. Ross (1985). "A theory of the term structure of interest rates." *Econometrica*, Vol. 53, No.2, pp.363-384.

Ho, T. y S. Lee (1986). "Term structure movements and pricing interest rate contingent claims". *Journal of finance*, Vol. 41, No. 5, pp. 1129-1142.

Hull, J.C. y White A. (1990). "Pricing interest-rate-derivative-securities". *The review of financial studies*, Vol. 3, No. 4, pp.573-592.

Black, F., E. Derman, y W. Toy (1990). "A one-factor model of interest rates and its application to treasury bond options". *Financial analysts journal*, Vol. 46, No. 1, pp. 33-39.

Núñez J. A., A. Segundo, J. L. de la Cruz, (2008). "Procesos poisson-gaussianos para el análisis de rendimientos en el mercado accionario en México". *Estudios aplicados de economía*. Universidad Autónoma de Madrid.

Urzúa, C. M.(1997). "Omnibus test for multivariate normality base on a class of maximum entropy distributions". *Advances in econometrics*, 12, 341-358.

Wackerly D., Menderhall III W. y R. Scheaffer (2002). *Estadística matemática con aplicaciones*. Sexta Edición. Editorial Thomson.