



TECNOLÓGICO
DE MONTERREY

Biblioteca
Campus Ciudad de México

Instituto Tecnológico y de Estudios
Superiores de Monterrey
Campus Ciudad de México

*Valuación de Opciones Europeas Mediante Procesos de Lévy
y Transformada Rápida de Fourier*

TESIS QUE PARA RECIBIR EL TÍTULO DE
DOCTORADO EN CIENCIAS FINANCIERAS
PRESENTA

Horacio Alberto Ruiz Olvera

Director de tesis:

Dr. José Antonio Núñez Mora

Lectores:

Dra. Bárbara Ruth Trejo Becerril

Dr. José Víctor Reynoso Vendrell

México D.F., 18 Noviembre 2011

Resumen

En esta investigación se presenta una metodología alterna de valuación de opciones europeas mediante el análisis de procesos de Lévy exponenciales y utilizando la transformada rápida de Fourier. En este trabajo se muestra la forma de valuación mediante esta nueva metodología para el modelo Black-Scholes, el cuál es el único modelo de Lévy exponencial continuo, y para el modelo de Merton (1976), el cual es un modelo de Lévy exponencial con una tasa de arribo de saltos finita. Asimismo se aplica la metodología de valuación de opciones mediante el uso de la transformada rápida de Fourier al modelo Varianza Gamma (VG) de Madan, Carr y Chang (1998) que es un modelo de Lévy exponencial con tasa infinita de arribo de saltos. Los modelos anteriores cuentan con formas cerradas de valuación obtenidas mediante métodos probabilísticos o de ecuaciones diferenciales parciales, sin embargo estas metodologías no nos entregan formas cerradas para modelos más complejos. Si tomamos en cuenta el hecho de que para la valuación de opciones mediante transformada de Fourier (TF) lo único que necesitamos es la función de característica de la distribución del precio logarítmico del subyacente y que existe una función característica única, conocida y con forma cerrada para cada función de densidad, entonces es posible utilizar esta metodología para intentar encontrar un método de valuación alternativo y posiblemente más simple para modelos en los cuales actualmente no existe una forma cerrada. Los modelos de Black-Scholes, Merton y de Madan, Carr y Chang son casos particulares de modelos de Lévy exponenciales más generales. Si la utilización de la TF nos permite desarrollar un método alternativo para la valuación de opciones que nos entregue los mismos resultados que el utilizar las formas cerradas, entonces estaríamos en condiciones de buscar un método alternativo para crear modelos de valuación que quizá sean más simples que los complejos modelos desarrollados a través de métodos probabilísticos o de ecuaciones diferenciales.

Palabras clave: Procesos de Lévy y transformada de Fourier.

Contenido

1. Introducción	5
2. Transformada de Fourier (TF), Transformada Discreta de Fourier (TDF), Función Característica (FC) y Procesos de Lévy	10
2.1 Transformada de Fourier (TF) y Transformada Discreta de Fourier (TDF)	10
2.1.1 Transformada de Fourier.....	10
2.1.2 Transformada discreta de Fourier.....	13
2.1.3 Transformada rápida de Fourier	14
2.1.4 Propiedades de la transformada de Fourier	15
2.2 Función Característica (FC).....	18
2.2.1 Propiedades de la FC	18
2.3 Movimiento Browniano	20
2.4 Procesos de Lévy	21
2.5 Procesos estables	24
2.6 Método simplex de minimización de Nelder-Mead	25
3. El modelo de Fisher Black y MyronScholes	27
3.1 Solución de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes.....	32
3.2 Modelo de valuación Black-Scholes mediante procesos de Lévy	35
3.3 Transformada rápida de Fourier y el precio de la opción	40
4. El modelo de difusión con saltos de Merton.....	42
4.1 Modelo de valuación de Merton mediante procesos de Lévy	47
4.2 Método de valuación mediante transformada de Fourier	49
5. El modelo Varianza Gamma (VG)	50
5.1 Modelo de valuación VG mediante procesos de Lévy	53
5.2 Método de valuación VG mediante transformada de Fourier	58
6. Datos y metodología.....	59
6.1 Estimación de parámetros.....	67
7. Análisis de Resultados	68
8. Conclusiones.....	69
ANEXO 1	71
ANEXO 2	73
Referencias	75

1. Introducción

Sabemos que para la valuación de opciones existe una gran variedad de modelos, ya sea en forma cerrada o que se basan en métodos numéricos para su resolución. Los más sencillos manejan supuestos que no necesariamente explican el comportamiento real del mercado y éstos son los que actualmente se utilizan en la práctica debido a que se trata de modelos de valuación en forma cerrada que implican una gran simplicidad de cálculo aún cuando existen otros modelos que describen mejor dicho comportamiento pero cuya resolución requiere de mayores recursos de cómputo, razón por la cual no se utilizan en la práctica.

El modelo de Black y Scholes (1973) es uno de los avances más importantes en las finanzas modernas. Fischer Black y Myron Scholes publicaron en 1973 su artículo "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" en el Journal of Political Economy en donde, bajo el supuesto de equilibrio general, Black y Scholes obtuvieron una ecuación diferencial parcial de segundo orden, parabólica y lineal, cuya solución culmina en una fórmula cerrada para valorar una opción europea sobre una acción que no paga dividendos, y cuyo precio es conducido por un movimiento geométrico Browniano.

$$C(S_0, T) = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2),$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ y } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

y

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right\}.$$

Desde entonces, la ecuación diferencial parcial de BS ha sido muy popular, pues representa la base para valorar diversos productos derivados, ya que para diferentes condiciones de frontera, sus soluciones representan los precios de muchos productos derivados disponibles en el mercado.

Sin embargo, algunos de sus supuestos como la distribución log-normal del subyacente o el de volatilidad constante no representan el comportamiento real del subyacente en los mercados financieros ya que la densidad del rendimiento logarítmico del subyacente dista de ser normal al presentar un exceso de curtosis y sesgo. Esta inconsistencia ha sido comúnmente conocida como “sonrisa de la volatilidad” o *volatilitysmile* (como se le conoce en la literatura anglosajona). De hecho, este efecto de *smile* en la volatilidad puede ser interpretado como un resultado de la presencia de sesgo y curtosis que no corresponden a una distribución normal en los rendimientos de los activos. Es por ello que la mayoría de los modelos que siguieron al modelo de BS intentan solventar dichas inconsistencias modificando alguno de sus supuestos.

En los mercados financieros se ha observado que ocasionalmente se presentan movimientos inesperados, los cuales ocurren con mayor frecuencia de lo que se esperaría suponiendo una distribución lognormal. Como lo ejemplifican Borak, Detlefsen y Härdle(2005): “si se hace pública alguna pieza clave de información sobre una compañía, esto puede provocar un movimiento inesperado en el precio de la misma. La información normalmente se produce aleatoriamente en el tiempo y el impacto que ésta puede tener en el precio de los activos se puede tratar como una variable aleatoria”. Pensando en este tipo de situaciones, Robert Merton (1976) modifica el proceso que sigue el subyacente proponiendo un proceso de difusión con saltos con el que se extiende el modelo de Black y Scholes al agregar un componente de saltos a la dinámica del precio del subyacente. Autores posteriores como Jarrow y Rosenfeld (1984), Ball y Torous (1985), Jorion (1988) y Venegas Martínez (2001) han sugerido que el agregar saltos a los modelos de valuación de opciones ha ayudado a explicar las inconsistencias mostradas en la práctica por el modelo de Black-Scholes. Merton agrega una componente de saltos mediante un proceso de Poisson, donde el tamaño del salto sigue una distribución lognormal. De esta manera, los saltos siguen un proceso de Poisson homogéneo N_t con intensidad λ .

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dW_t + dN_t.$$

Asímismo Merton propone un cambio en la tendencia del movimiento Browniano dejando todos los demás valores sin cambios, de tal forma que:

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(r - \sigma^2 - \lambda \left[\exp \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] - 1 \right) t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \right\},$$

donde el tamaño de los saltos $Y_i \sim N(\mu, \delta^2)$ es una variable i.i.d la cual es independiente tanto de N_t como de W_t . El movimiento Browniano se encarga de modelar los pequeños movimientos que se dan constantemente en el precio del subyacente, mientras que el proceso de Poisson modela los cambios bruscos e inesperados que ocasionalmente se dan en el precio del subyacente. Con esto Merton logra modelar las colas pesadas presentes en los mercados financieros.

Por otro lado Madan y Seneta (1990), Madan y Milne (1991) proponen el modelo Varianza Gamma (VG) el cual incorpora parámetros adicionales que permiten controlar el sesgo y la curtosis presentes en la densidad de los rendimientos del subyacente. Más adelante Madan, Carr y Chang (1998) obtienen una forma cerrada del modelo VG para evaluar el precio de una opción europea.

El proceso Varianza Gamma modela un movimiento Browniano evaluado aleatoriamente en el tiempo, donde dicho movimiento Browniano tiene tendencia y volatilidad constantes

$$B_t(t; \theta, \sigma) = \theta t + \sigma W(t).$$

Cada unidad de tiempo se supone tiene una longitud dada por una variable aleatoria que sigue un proceso gamma. Esto es, se supone que el rendimiento compuesto continuo sigue una distribución normal, condicional en un movimiento aleatorio en el tiempo que sigue un procesogamma. El proceso gamma, $\gamma(t; \mu, \vartheta)$, con tasa media μ y tasa de cambio ϑ , es un proceso con incrementos independientes gamma sobre intervalos de tiempo que no se traslapan, $(t, t + h)$. Entonces el proceso VG, $X(t; \sigma, \theta, \vartheta)$, se puede definir en términos del movimiento Browniano con tendencia $B_t(t; \theta, \sigma)$ y el proceso gamma $\gamma(t; \mu, \vartheta)$ como:

$$X(t; \sigma, \theta, \vartheta) = B_t(\gamma(t; \mu, \vartheta); \theta, \sigma).$$

Este modelo de valuación de opciones en conjunto con el proceso estocástico que lo conforma, nos entrega dos parámetros adicionales a la volatilidad del movimiento Browniano (σ). El primero de ellos, ϑ , con el cual se puede controlar el incremento en la probabilidad de las colas de la distribución de los rendimientos (colas pesadas) y el segundo, θ , con el que se controla la asimetría observada en la densidad de los rendimientos (sesgo). El proceso estocástico resultante es un proceso de Markov unidimensional homogéneo en el tiempo, por lo que no se tiene un modelo de volatilidad estocástica como tal que permita cambios en la volatilidad condicional.

Recordemos que un proceso estocástico es llamado Markoviano si la distribución de probabilidad de un estado futuro sólo depende de la información actual y no de la anterior. Si se define la variable aleatoria $\Delta^{(h)}S_t = S_{t+h} - S_t$, con $h \geq 0$ arbitrario, se tiene que la distribución de $\Delta^{(h)}S_t$ sólo depende de la información disponible en el tiempo t , es decir, sólo depende del valor de S_t y no de valores anteriores S_m , $m \leq t$. Esto significa que $\Delta^{(h)}S_t$ es un proceso Markoviano.

Con respecto a los procesos homogéneos en el tiempo, recordemos que a partir de la función de densidad que obtuvo Bachelier para el precio de un activo financiero

$$p(u, t+h | s, h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{(u-s)^2}{2t}\right\},$$

con

$$P\{u \leq S_{t+h} \leq u + du | s\} \approx p(u, t+h | s, h)ds,$$

se tiene que para cualquier $h \geq 0$, se cumple la propiedad

$$p(u, t+h | s, h) = p(u, t | s, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{(u-s)^2}{2t}\right\}. \quad (1.1)$$

Si se define ahora la variable aleatoria $\Delta^{(h)}S_t = S_{t+h} - S_h$, con $h \geq 0$ arbitrario, se tiene, a partir de (1.1), que $\Delta^{(h)}S_t$ y $\Delta^{(0)}S_t$ tienen la misma distribución $N(0, t)$. Es decir, la distribución de $\Delta^{(h)}S_t$ sólo depende de la diferencia entre $t + h$ y h . Si se denota $x = u - s$, entonces

$$p(x, t | 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\}.$$

Más generalmente, si h y m son números no negativos arbitrarios, entonces $\Delta^{(h)}S_t$ y $\Delta^{(m)}S_t$ tienen la misma distribución.

El propósito fundamental de este trabajo de investigación es describir una nueva metodología para determinar el precio de una opción europea. Dicha metodología se basa en la aplicación de los conceptos de procesos de Lévy exponenciales y transformada de Fourier. Se trata de hacer la valuación de una opción de tipo europeo cuando el precio del activo subyacente sigue un proceso de Lévy. A diferencia de algunas metodologías de valuación, como Black-Scholes o Merton, que parten de las funciones de densidad para establecer su modelo de valuación, nosotros vamos a partir del hecho de que para toda función de densidad existe una función característica, la cual es única y conocida, y de ahí se presentará un modelo de valuación alternativo mediante el uso de dichas funciones características. Se mostrará cómo obtener la forma de valuación mediante esta nueva metodología a los modelos de Black-Scholes, Merton y la prueba de valuación se llevará a cabo para el modelo Varianza Gamma. Se sabe que existen formas cerradas de valuación para los tres modelos de estudio, sin embargo la importancia del presente trabajo radica en que las formas cerradas de los modelos con los cuáles trabajaremos, las cuales se obtuvieron mediante métodos probabilísticos o de ecuaciones diferenciales parciales, no siempre son tan fáciles de obtener. Existen muchos casos en que estas metodologías no nos entregan formas cerradas para modelos más complejos. Sin embargo, si tomamos en cuenta el hecho de que para la valuación de opciones mediante transformada de Fourier (TF) lo único que necesitamos es la función de característica de la distribución del precio logarítmico del subyacente y que existe una función característica única, conocida y con forma cerrada para cada función de densidad, entonces es posible utilizar esta metodología

para intentar encontrar un método de valuación alternativo y posiblemente más simple para modelos en los cuales actualmente no existe una forma cerrada. Los modelos de Black-Scholes, Merton y de Madan, Carr y Chang son casos particulares de modelos de Lévy exponenciales más generales. Si la utilización de la TF nos permite desarrollar un método alternativo para la valuación de opciones que nos entregue los mismos resultados que el utilizar las formas cerradas, entonces estaríamos en condiciones de buscar un método alternativo para crear modelos de valuación que quizá sean más simples que los complejos modelos desarrollados a través de métodos probabilísticos o de ecuaciones diferenciales en los cuales no se puede llegar a una forma cerrada de valuación. Para la aplicación de esta nueva metodología se supone que la forma analítica de las funciones características asociadas a las funciones de densidad de dichos modelos son conocidas.

La estructura de este trabajo de investigación es como sigue. En el capítulo 2 se recordarán conceptos básicos de transformada de Fourier y transformada discreta de Fourier, función característica y procesos de Lévy. En los capítulos 3, 4 y 5 se revisarán aspectos teóricos sobre los modelos Black-Scholes, Merton y Varianza Gamma. El capítulo 6 explicará el criterio de selección de los datos utilizados en la investigación y se explicará la metodología utilizada. En el capítulo 7 se llevará a cabo el análisis de resultados. En el capítulo 8 se formularán las conclusiones y sugerencias para futuras investigaciones y por último se presentarán los anexos y una lista con las referencias bibliográficas.

2. Transformada de Fourier (TF), Transformada Discreta de Fourier (TDF), Función Característica (FC) y Procesos de Lévy.

2.1 Transformada de Fourier (TF) y Transformada Discreta de Fourier (TDF).

2.1.1 Transformada de Fourier.

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), matemático y físico de nacionalidad francesa, fue el primero en desarrollar la teoría de conducción del calor. La ecuación de difusión de calor, o simplemente la ecuación de calor, es una ecuación diferencial parcial de segundo orden con soluciones explícitas. Estas soluciones describen como se difunde, al transcurrir el tiempo, el calor en una varilla de longitud infinita después de que ha sido calentada en un tiempo inicial. Mientras estudiaba la ecuación de calor, Fourier desarrolló lo que ahora

conocemos como serie de Fourier. En este apartado se revisan los conceptos básicos de transformada de Fourier. Para un tratado más completo sobre este tema se pueden revisar los trabajos de Brigham (1998), Kurmyshev y Sánchez-Yañez (2003) o Calvo (2000). Si se requiere un estudio un tanto más resumido se puede revisar el trabajo de Kazuhisa Matsuda (2004).

Una serie de Fourier es una serie infinita que converge puntualmente a una función continua y periódica. Las series de Fourier constituyen la herramienta básica del análisis de Fourier empleado para analizar funciones periódicas a través de la descomposición de dicha función en una suma infinitesimal de funciones sinusoidales mucho más simples (combinación de senos y cosenos). Entonces, si $f(t)$ es una función periódica con periodo $T = 2\pi$, la serie de Fourier asociada será

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)],$$

donde a_n y b_n se conocen como coeficientes de Fourier de la serie de Fourier de $f(x)$. Expresando $\cos(nx)$ y $\sin(nx)$ en forma exponencial mediante la fórmula de Euler, tenemos que

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{-in\omega t},$$

donde

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

y

$$\alpha_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega t} dt. \quad (2.1)$$

La clase de funciones que pueden ser representadas mediante la serie de Fourier comprende todas las funciones periódicas continuas y, además, cualquier función definida sobre un intervalo infinito. Las funciones no periódicas definidas en el intervalo infinito

$-\infty < t < \infty$ están fuera de dicha clase. Un ejemplo es la función $e^{-|x|}$. El análisis de funciones de este tipo se puede hacer por medio de la integral de Fourier o transformada de Fourier, que es la generalización de las series de Fourier para funciones no periódicas. La transformada integral de Fourier puede introducirse considerando el límite $T \rightarrow \infty$ y $\omega = 2\pi/T \rightarrow 0$ en la ecuación (2.1).

La transformada de Fourier de una función $g(t)$ en el espacio tiempo a una función $\mathcal{G}(\omega)$ en el espacio de frecuencia angular está dada por:

$$\mathcal{G}(\omega) \equiv \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) \equiv \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1-a}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tib\omega} g(t) dt.$$

A su vez, la transformada inversa de Fourier de una función en el espacio de frecuencia angular $\mathcal{G}(\omega)$ a una función en el espacio tiempo $g(t)$ será

$$g(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{G}(\omega)\}(t) \equiv \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1+a}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tib\omega} \mathcal{G}(\omega) d\omega.$$

La TF se puede ver como la descomposición de una función en el espacio tiempo en una serie (suma) de ondas sinusoidales (funciones seno o coseno) de diversas frecuencias, las cuales al sumarse forman la función original. Se trata de la misma función pero vista o formada de dos maneras distintas, de aquí el nombre de “transformada”. Entonces podemos decir que la TF es la representación en frecuencia angular (ω) de una función $g(t)$ del espacio tiempo (las dos contienen la misma información).

Los parámetros de Fourier a y b toman diversos valores dependiendo del propósito de la transformada. Por ejemplo, en el procesamiento de señales es común utilizar los parámetros $(a, b) = (0, -2\pi)$, en la física moderna se utilizan los parámetros $(a, b) = (0, 1)$, etc. En

nuestro caso, donde el fin es calcular funciones características, utilizaremos los parámetros $(a, b) = (1, 1)$ definiendo la transformada de Fourier y la transformada inversa de Fourier como:

$$\mathcal{G}(\omega) \equiv \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{ti\omega} g(t) dt, \quad (2.2)$$

$$g(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{G}(\omega)\}(t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ti\omega} \mathcal{G}(\omega) d\omega. \quad (2.3)$$

2.1.2 Transformada discreta de Fourier.

Si ahora consideramos el caso de una función discreta $g(t) \rightarrow g(t_k)$ donde $t_k = k\Delta$ con $k = 1, 2, \dots, N - 1$ tendremos que la transformada discreta de Fourier se puede escribir como

$$\mathcal{G}(\omega_j) \equiv \mathcal{F}\{g(t_k)\}(\omega_j) \equiv \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2\pi i j k / N} g(t_k), \quad (2.4)$$

donde

$$j = 0, 1, \dots, N - 1.$$

De este modo la transformada inversa de Fourier será

$$g(t_k) \equiv \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{G}(\omega_j)\}(t_k) \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i k j / N} \mathcal{G}(\omega_j). \quad (2.5)$$

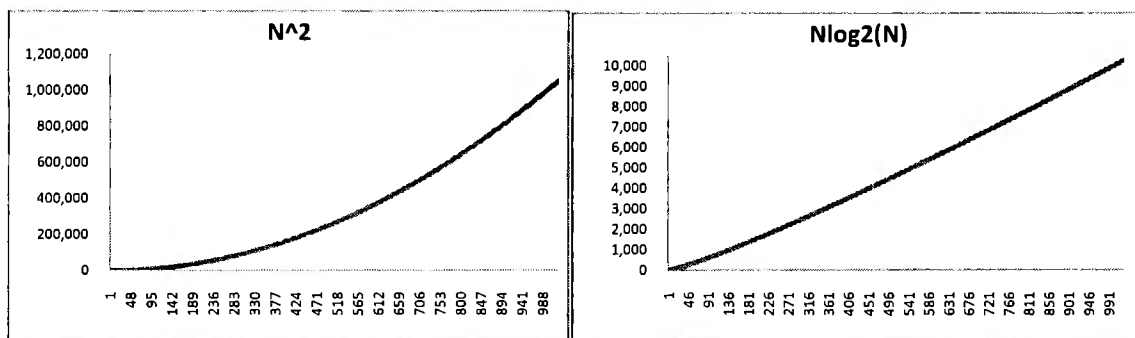
Las definiciones anteriores varían según los gustos en la aparición de ciertas constantes. En ocasiones el exponente puede incluir el factor 2π , en cuyo caso la fórmula no incluye el factor $\frac{1}{2\pi}$. Para recuperar la simetría a veces se pone un factor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ en la definición de la transformada. Además el exponente casi siempre lleva signo negativo en la definición de la transformada, pero algunos autores usan signo positivo, en cuyo caso el signo negativo aparece en la transformada inversa.

2.1.3 Transformada rápida de Fourier.

La transformada discreta de Fourier presentada anteriormente se puede aplicar a cualquier serie compleja. Sin embargo en la práctica este proceso puede consumir mucho tiempo de cómputo, siendo el tiempo proporcional al cuadrado del número de puntos en la serie. En general, si tratamos de calcular el vector $G(\omega_j)$ a partir de $g(t_k)$, o viceversa, necesitamos N^2 productos que contienen números complejos mas $N(N - 1)$ sumandos complejos. Para evitar tal complejidad de cálculos, Cooley y Tukey (1965) descubrieron un algoritmo en el cual únicamente se requieren $N \log_2(N)/2$ operaciones. A este algoritmo se le conoce como transformada rápida de Fourier. Un aspecto importante de la transformada rápida de Fourier es que se trata de un algoritmo recursivo que permite expresar una transformada discreta de Fourier de N elementos como la suma de dos transformadas discretas de Fourier de $N/2$ elementos cada una mediante la siguiente identidad:

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-2\pi i j k / N} = \sum_{k=0}^{N/2-1} a_{2k} e^{-2\pi i j (2k) / N} + \sum_{k=0}^{N/2-1} a_{2k+1} e^{-2\pi i j (2k+1) / N}.$$

En su trabajo, Cooley y Tukey muestran especial atención en la elección de N y muestran que los mejores resultados se obtienen al elegir $N = 2^m$. De esta manera el tiempo de cómputo requerido se vuelve proporcional a $N \log_2(N)$, lo cual implica una enorme reducción en el tiempo de cómputo requerido. Por ejemplo, el tiempo necesario para calcular una transformada discreta de Fourier (DFT) a 1024 puntos tomará aproximadamente 100 veces más que utilizando la transformada rápida de Fourier (FFT).



Matlab® contiene dos funciones que calculan la transformada rápida de Fourier y la transformada rápida inversa de Fourier (fft(x) eifft(x) respectivamente) mediante un algoritmo de transformada rápida que se basa en una rutina desarrollada en el MIT¹ y se calcula mediante la siguiente suma:

$$X(k) = \sum_{j=1}^N e^{-\frac{2\pi i}{N}(j-1)(k-1)} x(j). \quad (2.6)$$

Asimismo, la transformada rápida inversa se calcula en Matlab® como

$$x(j) = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{k=1}^N e^{\frac{2\pi i}{N}(j-1)(k-1)} X(k). \quad (2.7)$$

La ecuación(2.6) es esencial en este trabajo de investigación ya que los algoritmos de valuación que veremos más adelante se desarrollaron en Matlab® utilizando la función fft(x).

2.1.4 Propiedades de la transformada de Fourier.

Algunas propiedades importantes de la transformada de Fourier (en su versión continua) se enuncian a continuación:

Dualidad. La TF tiene la propiedad de simetría. Esto se puede demostrar fácilmente si sustituimos t por $-\omega$ y, a la vez, sustituimos ω por t en la ecuación (2.3)

$$\begin{aligned} g(-\omega) &= \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{G}(t)\}(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(-\omega)it} \mathcal{G}(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega it} \mathcal{G}(t) dt, \end{aligned}$$

o bien,

¹ Dicha rutina se encuentra disponible en el sitio <http://www.fftw.org> y es conocida como la Transformada de Fourier más Rápida de Oeste (TheFastest Fourier Transform in the West)

$$2\pi g(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega it} \mathcal{G}(t) dt. \quad (2.8)$$

Se puede observar que el lado derecho de la ecuación (2.8) es por definición la TF de la función $\mathcal{G}(t)$. Esto significa que si la función $g(t)$ tiene TF igual a $\mathcal{G}(\omega)$, entonces la transformada de Fourier de $\mathcal{G}(t)$ será igual a $2\pi g(-\omega)$.

Linealidad. Una función lineal es aquella que cumple con dos propiedades, la propiedad aditiva ($f(x+y) = f(x) + f(y)$) y la propiedad homogénea ($f(ax) = af(x)$, $a \in \mathbb{R}$). La TF es lineal pues para dos funciones $h(t)$ y $g(t)$, a partir de la ecuación (2.2), se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{ah(t) + bg(t)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ti\omega} [ah(t) + bg(t)] dt \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} e^{ti\omega} h(t) dt + b \int_{-\infty}^{\infty} e^{ti\omega} g(t) dt \\ &= a\mathcal{H}(\omega) + b\mathcal{G}(\omega) \\ &= a\mathcal{F}\{h(t)\}(\omega) + b\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) \end{aligned}$$

Conjugación. De la ecuación (2.2) se puede ver que para una función real $g(t)$, la transformada de Fourier asociada $\mathcal{G}(\omega)$ es una función compleja. Además se puede ver fácilmente que $\mathcal{G}(-\omega) = \overline{\mathcal{G}(\omega)}$. De lo anterior se desprende que

- a) si $g(t)$ es una función par, la TF, $\mathcal{G}(\omega)$, también es par y real,
- b) y si $g(t)$ es una función impar, entonces la TF, $\mathcal{G}(\omega)$, es imaginaria pura.

Lo anterior se puede demostrar fácilmente utilizando la fórmula de Euler.

$$\mathcal{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ti\omega} g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t) g(t) dt + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega t) g(t) dt. \quad (2.9)$$

Si $g(t)$ es una función par, entonces el término imaginario de la ecuación (2.9), $i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega t) g(t) dt$, es igual a cero (dado que la función seno es impar). Por lo tanto la TF de $g(t)$ resultante es una función par perteneciente a los reales.

Si por otro lado $g(t)$ resulta ser una función impar, entonces el término real de la ecuación (2.9), $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t) g(t) dt$, será igual a cero (dado que la función coseno es par). Por lo que la TF resultante será imaginaria pura.

Escalamiento. Si tenemos una función $g(t)$ y su TF $\mathcal{G}(\omega)$, entonces la transformada de Fourier de $g(at)$, con $a \neq 0, a \in \text{Re}$, estará dada por

$$\frac{1}{|a|} \mathcal{G}\left(\frac{\omega}{a}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ti\omega} g(at) dt. \quad (2.10)$$

Lo anterior se demuestra sustituyendo $at = s$ en la ecuación (2.10) para $a > 0$ y $a < 0$.

Desplazamiento en el tiempo. Considere una función $g(t)$ y su TF $\mathcal{G}(\omega)$. Si se sustituye la variable t por $(t - a)$ donde $a \in \text{Re}$, entonces la transformada de Fourier de la función $g(t - a)$ estará dada como

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ti\omega} g(t - a) dt = e^{ai\omega} \mathcal{G}(\omega), \quad (2.11)$$

lo cual se demuestra a continuación sustituyendo $\hat{t} = t - a$ en la ecuación (2.11); entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ti\omega} g(t - a) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\hat{t}+a)i\omega} g(\hat{t}) d(\hat{t} + a) \\ &= e^{ai\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\hat{t}i\omega} g(\hat{t}) d(\hat{t}) \\ &= e^{ai\omega} \mathcal{G}(\omega). \end{aligned}$$

2.2 Función Característica (FC)

Como se sabe, el cálculo de la probabilidad de una variable aleatoria puede realizarse a través de la función de densidad o por medio de la función de distribución. Sin embargo existe otra función que nos permite determinar la distribución de probabilidad de dicha variable aleatoria. Esta función se conoce como Función Característica (FC) y su importancia radica en el hecho de que toda función de densidad tiene una función característica asociada y que existe una relación uno a uno entre ellas. También es importante mencionar que para el caso de procesos de Lévy exponenciales las funciones características asociadas se conocen en forma cerrada o se pueden expresar en términos de funciones matemáticas que en la mayoría de los casos tienen formas más simples que las funciones de densidad a las cuales representan. Esto quiere decir que existe la posibilidad de valorar opciones para modelos de Lévy exponenciales a través de funciones características en vez de utilizar funciones de densidad y que ésta metodología alterna nos facilite la obtención de resultados que de otra manera sería muy laborioso obtener. En esta sección se presenta la definición de función característica de una variable aleatoria.

La función característica $\varphi(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$, de una variable aleatoria X con distribución $F_X(x)$ absolutamente continua y con densidad de probabilidad $F'_X(x) = f_X(x)$ se define como

$$\varphi(\omega) = \mathcal{F}[f_X(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xi\omega} f_X(x) dx = E[e^{xi\omega}], \quad (2.12)$$

es decir, la función característica $\varphi(\omega)$ es la transformada de Fourier de la función de densidad de probabilidad, $f_X(x)$.

2.2.1 Propiedades de la FC

- a. La función característica de una variable aleatoria X siempre existe. En efecto, observemos que el modulo $|e^{xi\omega}|$ satisface

$$|e^{xi\omega}|^2 = |\cos(\omega x) + i\sin(\omega x)|^2 = \cos^2(\omega x) + \sin^2(\omega x) = 1.$$

En consecuencia,

$$|\varphi(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{xi\omega} dF_X(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{xi\omega}| dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dF_X(x) = 1$$

por lo que $\varphi(\omega)$ existe $\forall \omega \in \mathbb{R}$.

b. $\varphi(0) = 1$, ya que $\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dF_X(x) = 1$.

c. $|\varphi(\omega)| \leq 1$, ya que $|\varphi(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{xi\omega} dF_X(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} dF_X(x) = 1$.

d. $\varphi(-\omega) = \overline{\varphi(\omega)}$. En particular, si X es simétrica con respecto al origen, entonces la FC será una función real par, por lo que

$$\varphi(-\omega) = E[e^{-i\omega x}] = E[\overline{e^{i\omega x}}] = \overline{E[e^{i\omega x}]} = \overline{\varphi(\omega)}.$$

e. Si $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ son variables aleatorias independientes, la función característica de su suma será igual al producto de las funciones características de cada uno de los sumandos. Sea $A_n = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$, entonces:

$$\begin{aligned} \varphi_{A_n}(\omega) &= E[e^{i\omega A_n}] = E[e^{i\omega X_1} e^{i\omega X_2} e^{i\omega X_3} \dots e^{i\omega X_n}] \\ &= E[e^{i\omega X_1}] E[e^{i\omega X_2}] E[e^{i\omega X_3}] \dots E[e^{i\omega X_n}] \\ &= \varphi_{X_1}(\omega) \varphi_{X_2}(\omega) \varphi_{X_3}(\omega) \dots \varphi_{X_n}(\omega) \\ &= \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(\omega). \end{aligned}$$

2.3 Movimiento Browniano

El movimiento Browniano tiene sus orígenes hace más de 180 años, en 1827, cuando un botánico de nombre Robert Brown estudiaba el movimiento errático de partículas de polen suspendidas en agua. El botánico escocés encontró que cuando dichas partículas se encontraban suspendidas en agua o en otros líquidos se movían sin cesar y sin orden aparente. A este movimiento errático se le dio el nombre de movimiento Browniano. No fue sino hasta principios del siglo XX que se demostró que el movimiento se debía al constante choque entre las partículas de polen y las moléculas de agua que en aquellos tiempos eran invisibles a los ojos del científico escocés.

Setenta y tres años después, en 1900, el matemático francés Louis Bachelier realizó una tesis sobre el modelado del comportamiento aleatorio de los precios de las acciones de la bolsa de París. En su tesis titulada “Theorie de la Spéculation” Bachelier formuló matemáticamente el movimiento Browniano al estudiar un fenómeno completamente ajeno al estudiado por Robert Brown años antes. El trabajo de Bachelier pasó en el anonimato por 60 años. Fue en 1960 cuando Paul Samuelson se encontró con el trabajo de Bachelier y a partir de entonces el movimiento Browniano, así como sus aspectos teóricos, han sido objeto de numerosos estudios en el área de las finanzas.²

Un movimiento Browniano $W = \{W_t; 0 \leq t \leq \infty\}$ definido en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tiene las siguientes propiedades:

- i) Comienza en cero: $W_0 = 0$.
- ii) $\mathbb{P}(W_0 = 0) = 1$.
- iii) Para $0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s$ es igual en distribución a W_{t-s} .
- iv) Para $0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s$ es independiente de $\{W_u; u \leq s\}$.
- v) Para todo $t > 0$, W_t tiene una distribución Normal $N(0, t)$.

²Se puede leer el tratado de Robert Brown traducido al español dentro del libro *Riesgos financieros y económicos, productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre* publicado por el Dr. Francisco Venegas Martínez, editorial Thomson, 2006.

De lo anterior observamos que el movimiento Browniano inicia en el origen, es continuo por la derecha con límite por la izquierda y tiene incrementos estacionarios e independientes.

El movimiento Browniano es una de las bases en la construcción de los modelos de riesgos financieros y económicos, sin embargo el movimiento Browniano estándar no puede por sí solo representar el comportamiento de todas las variables financieras. Por ejemplo, los precios de los activos no parten de cero, sus incrementos pudieran tener medias distintas de cero o bien pueden tener varianzas que no necesariamente son proporcionales al tiempo. De aquí que exista otro proceso que recibe el nombre de movimiento geométrico Browniano. Este proceso parte de una transformación exponencial de movimiento Browniano estándar. Si W_t es un movimiento Browniano estándar, μ es una constante (tendencia), σ es una constante positiva (volatilidad) y S_0 es un precio inicial conocido, entonces el proceso

$$S_t = S_0 e^{\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\}}$$

es llamado movimiento geométrico Browniano. Observe que

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t,$$

de donde podemos ver que la distribución de $\ln(S_t)$ es normal con

$$E[\ln(S_t)] = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t,$$

y

$$\text{Var}[\ln(S_t)] = \sigma^2 t.$$

2.4 Procesos de Lévy

Un proceso de Lévy puede verse como un proceso estocástico con incrementos independientes y estacionarios, esto es, se puede ver como un proceso de caminata aleatoria en tiempo continuo. La teoría de procesos de Lévy nace con el estudio de las distribuciones infinitamente divisibles y de los procesos con incrementos estacionarios e

independientes. Su estructura general fue descubierta mediante las investigaciones de Lévy, Kolmogorov, Khintchine e Ito, por mencionar algunos.

Antes de definir un proceso de Lévy, tomemos dos procesos bien conocidos como son el movimiento Browniano y el proceso de Poisson. Como sabemos, un movimiento Browniano $W = \{W_t; 0 \leq t \leq \infty\}$ definido en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tiene las siguientes propiedades:

- vi) Comienza en cero: $W_0 = 0$.
- vii) $\mathbb{P}(W_0 = 0) = 1$.
- viii) Para $0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s$ es igual en distribución a W_{t-s} .
- ix) Para $0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s$ es independiente de $\{W_u; u \leq s\}$.
- x) Para todo $t > 0$, W_t tiene una distribución Normal $N(0, t)$.

Por otro lado, un proceso de Poisson con intensidad $\lambda > 0$ definido en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y valuado en los enteros no negativos $N = \{N_t; t \geq 0\}$ tiene las siguientes propiedades:

- i) Comienza en cero: $N_0 = 0$.
- ii) $\mathbb{P}(N_0 = 0) = 1$.
- iii) Para $0 \leq s \leq t$, $N_t - N_s$ es igual en distribución a N_{t-s} .
- iv) Para $0 \leq s \leq t$, $N_t - N_s$ es independiente de $\{N_u; u \leq s\}$.
- v) Para todo $t > 0$, N_t tiene una distribución de Poisson con parámetro λt .

A primera vista, podríamos pensar que el proceso de Poisson y el movimiento Browniano son procesos muy diferentes. Por ejemplo, el movimiento Browniano es continuo mientras que el proceso de Poisson no lo es.

Sin embargo, cuando observamos las propiedades de ambos procesos nos damos cuenta de que tienen características muy similares. Los dos inician en el origen, son continuos por la derecha con límites por la izquierda y tienen incrementos estacionarios e independientes

(propiedades i, ii, iii y iv). Entonces, podemos tomar estas propiedades en común para definir un proceso más general conocido como proceso de Lévy:

Un proceso $X = \{X_t: t \geq 0\}$ definido en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es un proceso de Lévy si cumple con las siguientes propiedades:

- i) $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$.
- ii) Para $0 \leq s \leq t$, $X_t - X_s$ es igual en distribución a X_{t-s} .
- iii) Para $0 \leq s \leq t$, $X_t - X_s$ es independiente de $\{X_u: u \leq s\}$.
- iv) X_t tiene una distribución infinitamente divisible para todo t .
- v) Existe $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$, tal que para todo $\omega \in \Omega_0$ se tiene que $X_t(\omega)$ es continua por la derecha con límite por la izquierda.

El estudio de los procesos de Lévy se ha vuelto de gran importancia debido a que muchos de los modelos de valuación de opciones asumen que la dinámica del precio del activo subyacente sigue un proceso de Lévy exponencial de la forma

$$S_t = S_0 e^{L_t}, \quad (2.13)$$

donde $\{L_t; 0 \leq t \leq T\}$ es un proceso de Lévy. Más adelante se mostrará como distintos modelos de valuación se pueden representar mediante procesos exponenciales de Lévy.

Una característica de los procesos de Lévy de la cual no hemos hablado es que tiene una distribución infinitamente divisible:

Definición. Una variable aleatoria X tiene una distribución infinitamente divisible si para $n=1, 2, 3, \dots$ existe una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d) $X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n}$ tal que

$$X =^d X_{1,n} + X_{2,n} + \dots + X_{n,n}.$$

donde $=^d$ significa igualdad en distribución.

Desde el punto de vista de la FC, sea $\varphi_X(\omega)$ una función característica de la variable aleatoria X , entonces se dice que la distribución de X es infinitamente divisible si para todo $n \in \mathbb{N}$ la función $[\varphi_X(\omega)]^n$ es, a su vez, la función característica de alguna variable aleatoria.

Dada la definición anterior, una manera de establecer si una distribución es infinitamente divisible es a través de su exponente característico el cuál se obtiene mediante la fórmula de Lévy-Khintchine la cual nos dice que $\varphi_X(\omega)$ es la FC de una distribución infinitamente divisible sí y sólo sí $\psi_X(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \log \varphi_X(\omega)$ tiene la forma

$$\psi_X(\omega) = i\gamma\omega - \frac{1}{2}\sigma^2\omega^2 + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{ix\omega} - 1 - ix\omega 1_{\{|x|<1\}}) \nu(dx), \quad (2.14)$$

donde

$$1_{\{|x|<1\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (-1,1), \\ 0 & \text{si } x \notin (-1,1). \end{cases}$$

El resultado anterior es conocido como la fórmula de Lévy-Khintchine y la función $\psi_X(\omega)$ es llamada exponente característico. Se puede demostrar mediante el uso de la fórmula de Lévy-Khintchine que las distribuciones Normal, de Poisson y Gamma son infinitamente divisibles.

2.5 Procesos estables.

Los procesos estables son aquellos cuyo exponente característico corresponde a una distribución estable. Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución estable si para toda $n \geq 1$ se tiene la siguiente igualdad en distribución:

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} b(a_n)X + c_n \quad (2.15)$$

donde $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ son copias independientes de X , $a_n > 0$, $b(a_n) > 0$ y $c_n \in \mathbb{R}$. Si restamos c_n/n a cada uno de los términos de la parte izquierda de la ecuación anterior se puede ver que esto implica que una variable aleatoria con distribución estable también es

infinitamente divisible. A su vez, se dice que una variable aleatoria es estrictamente estable si se cumple la ecuación (2.15) pero con $c_n = 0$.

El índice de estabilidad de un proceso α -estable es una constante $0 < \alpha \leq 2$ tal que $b(a_n) = a^{1/\alpha}$. Sea $\varphi(\omega)$ la función característica de una variable aleatoria $X\alpha$ -estable. Entonces si para $a > 0$, existe $0 < \alpha \leq 2$ y $c(a) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi_X(\omega)^a = \varphi_X(\omega a^{1/\alpha}) \exp(ic\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Cabe mencionar que las distribuciones normales son las únicas distribuciones 2-estables.

2.6 Método simplex de minimización de Nelder-Mead

El método de optimación de Nelder-Mead (1965) es un algoritmo simplex que intenta minimizar una función no-lineal de n variables $f(x)$, con $x \in R^n$, mediante la comparación de sus propios valores sin hacer uso de ningún tipo de derivado. A este tipo de métodos se les conoce como métodos simplex de búsqueda directa. A continuación se presenta el algoritmo de este método debido a que se utilizará más adelante durante la estimación de algunos parámetros.

Cada iteración comienza con un simplex, especificado por sus $n+1$ vértices y por los valores de sus funciones asociadas. Se especifican 4 parámetros que son los coeficientes de reflexión (ρ), de expansión (χ), de contracción (γ) y de encogimiento (σ). Dichos parámetros deben cumplir que

$$\rho > 0, \quad \chi > 1, \quad \chi > \rho, \quad 0 < \gamma < 1 \quad \text{y} \quad 0 < \sigma < 1. \quad (2.16)$$

Al principio de la iteración k -ésima, $k \geq 0$, se genera un simplex Δ_k junto con sus $n+1$ vértices. Se asume que la iteración k comienza ordenando los vértices como $x_1^{(k)}, \dots, x_{n+1}^{(k)}$, de manera que

$$f(x_1^{(k)}) \leq f(x_2^{(k)}) \leq \dots \leq f(x_{n+1}^{(k)}). \quad (2.17)$$

La k -ésima iteración genera un grupo de $n+1$ vértices que definen un simplex diferente para la siguiente iteración, de manera que $\Delta_{k+1} \neq \Delta_k$. Dado que lo que se intenta es minimizar f , en cada iteración se refiere a $x_1^{(k)}$ como el mejor vértice y a $x_{n+1}^{(k)}$ como el peor vértice de manera que $f(x_1^{(k)})$ es el mejor valor de la función y $f(x_{n+1}^{(k)})$ el peor. El resultado de cada iteración puede ser (1) un nuevo vértice o punto aceptado que reemplazará al vértice $x_{n+1}^{(k)}$ en el grupo de vértices para la siguiente iteración o (2) si se lleva a cabo un encogimiento, un nuevo grupo de n puntos es creado, que junto con $x_1^{(k)}$ formarán el simplex de la siguiente iteración.

A continuación se muestra el ejemplo de una iteración del algoritmo de Nelder-Mead:

1. **Orden.** Se ordenan los $n+1$ vértices para satisfacer que $f(x_1) \leq f(x_2) \leq \dots \leq f(x_{n+1})$.
2. **Reflexión.** Se calcula el punto de reflexión x_r a partir de

$$x_r = \bar{x} + \rho(\bar{x} - x_{n+1}) = (1 - \rho)\bar{x} - \rho x_{n+1}, \quad (2.18)$$

donde $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i/n$ es el centroide de los n mejores puntos (todos los vértices excepto x_{n+1}). Luego se evalúa $f_r = f(x_r)$ y si $f_1 \leq f_r < f_n$ entonces se acepta el punto x_r y termina la iteración.

3. **Expansión.** Si $f_r < f_1$, se calcula el punto de expansión x_e

$$x_e = \bar{x} + \chi(x_r - \bar{x}) = \bar{x} + \rho\chi(\bar{x} - x_{n+1}) = (1 + \rho\chi)\bar{x} - \rho\chi x_{n+1}, \quad (2.19)$$

y se evalúa $f_e = f(x_e)$. Si $f_e < f_r$ entonces se acepta el punto x_e y termina la iteración. Si por el contrario, $f_e \geq f_r$, entonces se acepta x_r y termina la iteración.

4. **Contracción.** Si $f_r \geq f_n$, entonces se realiza la contracción entre \bar{x} y el mejor de x_{n+1} y x_r .
 - a. **Afuera.** Si $f_n \leq f_r < f_{n+1}$, entonces se hace la contracción hacia afuera

$$x_c = \bar{x} + \gamma(x_r - \bar{x}) = \bar{x} + \rho\gamma(\bar{x} - x_{n+1}) = (1 + \rho\gamma)\bar{x} - \rho\gamma x_{n+1}, \quad (2.20)$$

y se evalúa $f_c = f(x_c)$. Si $f_c \leq f_r$ entonces se acepta el punto x_c y termina la iteración. De lo contrario, se procede al paso 5 (encogimiento).

b. **Adentro.** Si $f_r \geq f_{n+1}$, entonces se hace la contracción hacia adentro

$$x_{cc} = \bar{x} + \gamma(\bar{x} - x_{n+1}) = (1 + \gamma)\bar{x} - \gamma x_{n+1}, \quad (2.21)$$

y se evalúa $f_{cc} = f(x_{cc})$. Si $f_{cc} < f_{n+1}$ entonces se acepta el punto x_{cc} y termina la iteración. De lo contrario, se procede al paso 5 (encogimiento).

5. **Encogimiento.** Se evalúa f en los n puntos $v_i = x_1 + \sigma(x_i - x_1)$, $i = 2, \dots, n + 1$. De manera que los vértices no ordenados del simplex para la siguiente iteración serán x_1, v_2, \dots, v_{n+1} .

En cada iteración se compara el error estándar de las funciones evaluadas $\left(\sqrt{\sum (f_i - \bar{f})^2 / n}\right)$ contra un valor predeterminado y el proceso de minimización termina cuando dicho error estándar cae por debajo de dicho valor predefinido.

3. El modelo de Fisher Black y Myron Scholes

A principios de la década de los setenta, Fisher Black y Myron Scholes publicaron su artículo "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" (1973). En su investigación, bajo condiciones de equilibrio (condiciones de no arbitraje), desarrollaron un modelo para valorar opciones europeas sobre una acción que no paga dividendos y cuya dinámica es conducida por el movimiento geométrico Browniano.

Black y Scholes obtienen una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden cuya solución es el precio de una opción europea. La condición final es el valor intrínseco del instrumento. Esta ecuación es muy popular y representa la base para valorar muchos y muy

diversos productos derivados, ya que existen en la actualidad diversas extensiones al modelo.

Los supuestos básicos (o condiciones ideales de los mercados de acciones y opciones) del modelo de Black y Scholes son:

- i)* el activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato;
- ii)* el precio del activo subyacente es conducido por el movimiento geométrico Browniano, es decir, el precio es lognormal;
- iii)* la volatilidad del precio del activo subyacente se mantiene constante a través del tiempo;
- iv)* las ventas en corto del subyacente en cuestión son permitidas;
- v)* el mercado del subyacente es líquido y divisible, es decir, el subyacente siempre se puede comprar y vender en cualquier fracción de unidad;
- vi)* no hay costos de transacción (comisiones e impuestos);
- vii)* el mercado opera en forma continua;
- viii)* existe un mercado de crédito, un sistema bancario, en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés constante para todos los plazos, y libre de riesgo (tasa de interés pasiva igual a la activa); y
- ix)* los mercados están en equilibrio, es decir, no existen oportunidades de arbitraje libres de riesgo.

Bajo estos supuestos, el precio de la opción dependerá sólo del precio de la acción, del tiempo al vencimiento y de un conjunto de parámetros conocidos y constantes.

Asimismo, con base en los supuestos anteriores, es posible crear una estrategia de cobertura (dinámica) consistente en una posición larga en la acción y una posición corta en la opción. El valor de una opción europea de compra es claramente función de los diferentes parámetros que intervienen en los términos del contrato, tales como: el precio de ejercicio, K , la fecha de vencimiento, T , el precio del subyacente (acción) en el momento en que se

establece el contrato, S_t , la volatilidad, σ , y la tasa interés, r . Por lo anterior, el precio de la opción se puede escribir como

$$c = c(S_t, t; K, T, \sigma, r).$$

Sea $W = \{W_t; 0 \leq t \leq \infty\}$ un movimiento Browniano definido sobre un espacio de probabilidad con filtración aumentada $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^W)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$.³ Se supone que el activo subyacente al tiempo t , S_t , sigue un movimiento geométrico Browniano. Entonces tenemos que

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (3.1)$$

En la ecuación anterior $\mu \in \mathbb{R}$ es el rendimiento medio esperado (tendencia) y $\sigma > 0$ es la volatilidad instantánea por unidad de tiempo. El proceso dW_t modela las fluctuaciones propias del mercado del subyacente y satisface que

$$\begin{aligned} dW_t &\sim N(0, dt), \\ E[dW_t] &= 0 \text{ y} \\ \text{Var}[dW_t] &= E[(dW_t)^2] = dt. \end{aligned}$$

Durante el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ el activo subyacente cambia de S_t a $S_t + dS_t$ y por ende el precio de la opción cambiará de $c = c(S_t, t)$ a $c + dc$. El cambio en el precio de la opción se puede obtener aplicando el lema de Itô y la ecuación (3.1) como

$$dc = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t. \quad (3.2)$$

Supongamos un portafolio con ω_1 unidades del activo subyacente S_t y ω_2 unidades de una opción de compra sobre el subyacente de precio $c(S_t, t)$. Si Π_t denota el valor actual del portafolio, entonces

³ Usualmente, en los modelos financieros se requiere que los precios actuales y pasados del subyacente sean conocidos para poder hacer un pronóstico. Esta idea se formaliza con el concepto de filtración. Una filtración es una familia $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ de σ -álgebras tales que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ para toda $t \in \mathcal{T}$. La familia \mathbb{F} es creciente en el sentido de que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ cuando $s, t \in \mathcal{T}$ y $s \leq t$. La filtración \mathcal{F}_t puede ser interpretada como un conjunto de información al tiempo t . El hecho de que la filtración esté aumentada significa que hay más información conocida conforme pasa el tiempo y que la información anterior no se olvida.

$$\Pi_t = \omega_1 S_t + \omega_2 c(S_t, t). \quad (3.3)$$

El cambio en el valor del portafolio, durante el instante dt debido a fluctuaciones propias del mercado estará dado por

$$d\Pi_t = \omega_1 dS_t + \omega_2 dc. \quad (3.4)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.1) y (3.2) en (3.4) tenemos que el cambio en el valor del portafolio se puede escribir como

$$\begin{aligned} d\Pi_t = & \left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \mu S_t dt + \left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \sigma S_t dW_t \\ & + \omega_2 \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) dt. \end{aligned} \quad (3.5)$$

En la ecuación (3.5) se puede observar que existe un sumando que corresponde al elemento estocástico en el cambio del valor del portafolio. Este elemento aleatorio (que contiene el factor dW_t) se puede eliminar para ciertos valores de ω_1 y ω_2 .

Si, en particular, se eligen $\omega_2 = 1$ y

$$\omega_1 = -\frac{\partial c}{\partial S_t}, \quad (3.5)$$

se tiene que

$$d\Pi_t^{(\Delta)} = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) dt, \quad (3.6)$$

donde se observa que se ha cubierto el riesgo generado por el elemento estocástico dW_t . A esta cobertura se le conoce como cobertura delta debido a que para eliminar el riesgo en el cambio del valor del portafolio se utilizó el término $\omega_1 = -\frac{\partial c}{\partial S_t} = -\Delta$. Con esta cobertura, el valor de nuestro portafolio queda como

$$\Pi_t^{(\Delta)} = -\frac{\partial c}{\partial S_t} S_t + c(S_t, t) = -\Delta S_t + c(S_t, t). \quad (3.7)$$

Ahora supongamos que existe un sistema bancario donde no existen oportunidades de arbitraje y en el cual se puede prestar y pedir prestado a una tasa constante y libre de riesgo, r . Si depositamos el valor de nuestro portafolio en dicho sistema bancario, entonces durante dt el cambio en el valor del portafolio será

$$d\Pi_t^{(r)} = \Pi_t^{(\Delta)} r dt. \quad (3.8)$$

Dado que no existen oportunidades de arbitraje, podemos afirmar que el mercado está en equilibrio, entonces el rendimiento del portafolio combinado y el que paga el banco deben ser iguales, por lo que

$$d\Pi_t^{(\Delta)} = d\Pi_t^{(r)}. \quad (3.9)$$

Utilizando las ecuaciones (3.6), (3.7) y (3.8), podemos escribir (3.9) como

$$\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) - \left(-\frac{\partial c}{\partial S_t} S_t + c(S_t, t) \right) r = 0,$$

o bien

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + \frac{\partial c}{\partial S_t} r S_t - r c(S_t, t) = 0. \quad (3.10)$$

A la ecuación (3.10) se le conoce como ecuación diferencial parcial de Black-Scholes. Las condiciones de frontera y final para determinar una solución única de la EDP de Black-Scholes están dadas respectivamente por

$$c(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad c(S_t, t) = \max(S_t - K, 0),$$

donde la condición $c(S_t, t) = \max(S_t - K, 0)$ caracteriza el precio de una opción europea de compra sobre S_t .

3.1 Solución de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes

Existen diversos caminos para resolver la EDP de Black-Scholes los cuales no abordaremos en este trabajo debido que no se trata del propósito del mismo y a que dichos métodos de solución ya se encuentran debidamente documentados por un gran número de autores. Únicamente se darán las bases con las cuales se llega a la solución de la EDP de Black-Scholes mediante la aplicación del Teorema de Girsanov.

Sea W_t , con $t \geq 0$, un movimiento Browniano definido en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y supongamos que el activo subyacente sigue un movimiento geométrico Browniano de la forma

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (3.11)$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ es el rendimiento medio esperado (tendencia) y $\sigma > 0$ es la volatilidad instantánea por unidad de tiempo. Podemos reescribir la ecuación anterior como

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t \left(\frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t \right), \quad (3.12)$$

donde el término $\frac{\mu - r}{\sigma}$ es conocido como premio al riesgo.

Si ahora definimos $\widetilde{W}_t = \frac{\mu - r}{\sigma} t + W_t$, entonces podemos escribir la ecuación (3.12) como

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t d\widetilde{W}_t, \quad (3.13)$$

donde $\{\widetilde{W}_t\}_{t \geq 0}$ es también un movimiento Browniano definido en un nuevo espacio de probabilidad equivalente $(\Omega, \mathcal{F}, \widetilde{\mathbb{P}})$.

Si modelamos el precio logarítmico del activo subyacente como un movimiento Browniano con tendencia y cuya densidad de probabilidad está dada por una densidad normal tenemos que

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t, \quad (3.14)$$

y

$$\mathbb{P}(\ln S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp \left[-\frac{\left\{ \ln(S_t) - \left(\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t \right) \right\}^2}{2\sigma^2 t} \right]. \quad (3.15)$$

Entonces podemos decir que Black-Scholes modela el precio del activo subyacente, S_t , como una variable con distribución log-normal cuya densidad está dada por

$$\mathbb{P}(S_t) = \frac{1}{S_t \sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp \left[-\frac{\left\{ \ln(S_t) - \left(\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t \right) \right\}^2}{2\sigma^2 t} \right]. \quad (3.16)$$

A partir de la ecuación (3.14) podemos decir que

$$S_t = S_0 e^{\left\{ \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right\}} \quad (3.17)$$

se encuentra definido bajo el espacio de probabilidad \mathbb{P} . Si ahora aplicamos el teorema de Girsanov y encontramos la medida de probabilidad equivalente neutral al riesgo, $\tilde{\mathbb{P}} \sim \mathbb{P}$, cambiando la tendencia del movimiento geométrico Browniano y manteniendo el parámetro de volatilidad constante tendremos que

$$S_t = S_0 e^{\left\{ \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma \tilde{W}_t \right\}} \quad (3.18)$$

modelará el precio del activo subyacente bajo el espacio de probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$.

El teorema de Girsanov proporciona una medida de probabilidad equivalente definida sobre el espacio original con el cual se ha transformado la tendencia del movimiento geométrico

Browniano original (el rendimiento medio esperado) por una tendencia igual a la tasa libre de riesgo. Esto quiere decir que si dos agentes tienen diferentes expectativas sobre el rendimiento medio esperado de un activo subyacente, estarán dispuestos a omitirlas de sus decisiones de inversión siempre y cuando la volatilidad se mantenga constante. En este caso se dice que la medida de probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$ es neutral al riesgo.⁴

De lo anterior se observa que \tilde{W}_t es un movimiento Browniano en $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathbb{P}})$ bajo el cual el proceso $\{e^{-rt}S_t; 0 \leq t \leq T\}$ es martingala bajo $\tilde{\mathbb{P}}$. Entonces el precio de una opción europea de compra que paga $\max(S_T - K, 0)$ se puede calcular como

$$c(S_t, t) = e^{-r(T-t)} E_t^{\tilde{\mathbb{P}}}[\max(S_T - K, 0)]. \quad (3.19)$$

Dado lo anterior, si $\tilde{\mathbb{P}}(S_t)$ es la densidad de probabilidad de S_t entonces podemos decir que S_t es una variable aleatoria con distribución log-normal y con densidad de probabilidad

$$\tilde{\mathbb{P}}(S_T) = \frac{1}{S_T \sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \exp \left[-\frac{\left\{ \ln(S_T) - \left(\ln(S_t) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t) \right) \right\}^2}{2\sigma^2(T-t)} \right]. \quad (3.20)$$

Utilizando (3.20) el valor esperado de la ecuación (3.19) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} E_t^{\tilde{\mathbb{P}}}[\max(S_T - K, 0)] &= \int_K^{\infty} (S_T - K) \tilde{\mathbb{P}}(S_T) dS_T + \int_0^K (0) \tilde{\mathbb{P}}(S_T) dS_T \\ &= \int_K^{\infty} (S_T - K) \tilde{\mathbb{P}}(S_T) dS_T, \end{aligned} \quad (3.21)$$

de donde el precio de la opción puede reescribirse como

⁴Para una lectura más profunda sobre el teorema de Girsanov se puede consultar el trabajo de Thomas Mikosch, *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*, o bien el libro *Mathematics of Financial Markets* de los autores Robert J. Elliot y P. Ekkehard Kopp.

$$c[S_t, (T - t)] = e^{-r(T-t)} \int_K^{\infty} (S_T - K) \tilde{\mathbb{P}}(S_T) dS_T. \quad (3.22)$$

Utilizando el hecho de que si S_t tiene una distribución log-normal entonces $\ln S_t$ tendrá una distribución normal, y haciendo un cambio de variable se puede resolver la ecuación (3.22) con lo cual se llega a la forma cerrada para valuar una opción europea de compra con $\tau = (T - t)$:

$$c(S_t, \tau) = S_t N(d_1) - e^{-r\tau} K N(d_2), \quad (3.23)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad y \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}.$$

La forma cerrada para valuar una opción europea de venta se puede obtener de manera similar resultando en

$$p(S_t, \tau) = K e^{-r\tau} N(-d_2) - S_t N(-d_1). \quad (3.24)$$

3.2 Modelo de valuación Black-Scholes mediante procesos de Lévy.

En el apartado anterior se pudo llegar a una forma cerrada de valuación de opciones europeas partiendo la distribución de probabilidad del activo subyacente y de su función de densidad. Ahora veremos cómo llegar a una forma de valuación alterna partiendo del hecho de que el modelo B-S sigue un proceso exponencial de Lévy y que la distribución de probabilidad que sigue el activo subyacente junto con su función de densidad tienen una función característica asociada, la cual es matemáticamente más simple y siempre se encuentra en forma cerrada. El propósito de este apartado es describir el modelo alterno para valuar opciones mediante transformada de Fourier y procesos de Lévy. También se describirá la forma general de valuación mediante transformada rápida de Fourier originalmente desarrollada por Madan, Carr y Chang (1998) y Madan y Carr (1999). Se asume que la forma analítica de la función característica asociada a la función de densidad del activo subyacente existe y es conocida.

Como se observa en la ecuación (3.18), el modelo de valuación de Black-Scholes se puede representar como un proceso exponencial de Lévy en el cual eligen un movimiento Browniano con tendencia como proceso de Lévy

$$S_t = S_0 e^{Lt} = S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \tilde{W}_t}.$$

Como vimos en el apartado anterior y asumiendo $t = 0$, el precio de una opción europea de compra es

$$c(T, K) = e^{-rT} \int_K^{\infty} (S_T - K) \tilde{\mathbb{P}}(S_T) dS_T. \quad (3.25)$$

Haciendo un par de cambios de variable: S_T por $\ln S_T$ y K por $\ln K$ tenemos que

$$c(T, K) = e^{-rT} \int_{\ln K}^{\infty} (e^{\ln S_T} - e^{\ln K}) \tilde{\mathbb{P}}(\ln S_T) d \ln S_T. \quad (3.26)$$

Si además decimos que $s_T \equiv \ln S_T$ y que $k \equiv \ln K$ tendremos que

$$c(T, k) = e^{-rT} \int_k^{\infty} (e^{s_T} - e^k) \tilde{\mathbb{P}}(s_T) ds_T. \quad (3.27)$$

Nótese que $c(T, k)$ tiende a S_0 cuando k tiende a $-\infty$, esto es:

$$\begin{aligned} c(T, k) &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{s_T} - e^{-\infty}) \tilde{\mathbb{P}}(s_T) ds_T = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} e^{s_T} \tilde{\mathbb{P}}(s_T) ds_T \\ &= e^{-rT} E^{\tilde{\mathbb{P}}}[e^{s_T} | \mathcal{F}_0], \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde sabemos que por medida martingala equivalente el valor esperado es igual a

$$E^{\tilde{\mathbb{P}}}[e^{s_T}|\mathcal{F}_0] = E^{\tilde{\mathbb{P}}}[S_T|\mathcal{F}_0] = S_0 e^{rT},$$

por lo que

$$c(T, k) = S_0.$$

Una condición suficiente, pero no necesaria, para la existencia de una transformada de Fourier y de su inversa es

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty.$$

Lo anterior significa que el precio de la opción no es integrable y no puede ser transformado por Fourier. Para resolver el problema se agrega un factor $e^{\alpha k}$ (Geman y Eydeland (1995), Madan y Carr (1998)) con el cual se modifica el precio de la opción con lo cual se satisface la condición de integrabilidad seleccionando $\alpha > 0$.

$$c^*(T, k) = e^{\alpha k} c(T, k). \quad (3.29)$$

Del apartado 2.2 sabemos que la función característica de s_T es la transformada de Fourier de su función de densidad, esto es

$$\varphi(\omega) = \mathcal{F}[\tilde{\mathbb{P}}(s_T)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega s_T} \tilde{\mathbb{P}}(s_T) ds_T. \quad (3.30)$$

Si sabemos que $\tilde{\mathbb{P}}(s_T)$ está dado por

$$\tilde{\mathbb{P}}(s_T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp\left[-\frac{\left\{s_T - \left(s_0 + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right)\right\}^2}{2\sigma^2 T}\right], \quad (3.31)$$

entonces se puede obtener la función característica del precio logarítmico del activo subyacente al tiempo T como

$$\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega s_T} \tilde{\mathbb{P}}(s_T) ds_T = \exp \left[i \left\{ s_0 + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T \right\} \omega - \frac{(\sigma^2 T) \omega^2}{2} \right]. \quad (3.32)$$

Si ahora consideramos la transformada de Fourier del precio modificado de la opción de compra (3.29):

$$\psi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega k} c^*(T, k) dk, \quad (3.33)$$

podemos entonces obtener el precio de la opción de compra $c(T, k)$ mediante la transformada inversa de $\psi(\omega)$ de la ecuación (3.33) como

$$\begin{aligned} c^*(T, k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega k} \psi(\omega) d\omega \\ e^{\alpha k} c(T, k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega k} \psi(\omega) d\omega \\ c(T, k) &= \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega k} \psi(\omega) d\omega \\ &= \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-i\omega k} \psi(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Para conocer $\psi(\omega)$ se sustituyen las ecuaciones (3.27) y (3.29) en (3.33) y se resuelven las integrales obteniendo⁵:

⁵Ver Madan D.B., Carr P. y Chang E.C. (1998) *The variance gamma process and option pricing*, Madan D.B., Carr P. (1999) *Option valuation using the Fourier transform*, o bien Borak S., Detlefsen K. y Härdle W. (2005) *FFT based option pricing*.

$$\begin{aligned}
\psi(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega k} e^{\alpha k} c(T, k) dk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} e^{i\omega k} e^{\alpha k} \int_k^{\infty} (e^{sT} - e^k) \tilde{\mathbb{P}}(s_T) ds_T dk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} \tilde{\mathbb{P}}(s_T) \int_{-\infty}^s e^{i\omega k} e^{\alpha k} (e^{sT} - e^k) dk ds_T \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} \tilde{\mathbb{P}}(s_T) \int_{-\infty}^s e^{i\omega k} (e^{sT+\alpha k} - e^{(1+\alpha)k}) dk ds_T \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} \tilde{\mathbb{P}}(s_T) \left(\frac{e^{(\alpha+1+i\omega)s_T}}{\alpha+i\omega} - \frac{e^{(\alpha+1+i\omega)s_T}}{\alpha+1+i\omega} \right) ds_T \\
&= \frac{e^{-rT} \varphi(\omega - (\alpha+1)i)}{\alpha^2 + \alpha - \omega^2 + i(2\alpha+1)\omega}.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Por lo tanto, tomando las ecuaciones (3.34) y (3.35), tenemos que el precio de una opción de compra estará dado por

$$c(T, k) = \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega k} \frac{e^{-rT} \varphi(\omega - (\alpha+1)i)}{\alpha^2 + \alpha - \omega^2 + i(2\alpha+1)\omega} d\omega, \tag{3.36}$$

donde

$$\varphi(\omega) = \exp \left[i \left\{ s_0 + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T \right\} \omega - \frac{(\sigma^2 T) \omega^2}{2} \right] \text{ y } k = \ln K.$$

La ecuación (3.36) es una forma de valuación equivalente a la ecuación (3.23) con la diferencia de que la ecuación (3.36) se encuentra escrita en términos de la función característica. Esta ecuación es importante ya que se trata de la ecuación general de valuación mediante transformada de Fourier, en la cual únicamente se modifica la función característica dependiendo el modelo con el que nos encontremos trabajando.

3.3 Transformada rápida de Fourier y el precio de la opción.

Para aproximar el resultado de la ecuación (3.34) y, por ende, el de la ecuación (3.36) Madan y Carr (1999) aplican transformada discreta de Fourier. Para ilustrar lo anterior supongamos que vamos a calcular un vector $\mathbb{H}_{N \times 1} = \{H_0, H_1, \dots, H_{N-1}\}$ a partir de otro vector $\mathbb{h}_{N \times 1} = \{h_0, h_1, \dots, h_{N-1}\}$ tal que

$$H_n = \sum_{j=0}^{N-1} e^{+ij\frac{2\pi}{N}} h_j, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.37)$$

Sea $\mathbb{H}_{N \times 1} = \{H_0, H_1, \dots, H_{N-1}\}$ la transformada discreta de Fourier del vector $\mathbb{h}_{N \times 1} = \{h_0, h_1, \dots, h_{N-1}\}$. Entonces podemos obtener el vector \mathbb{h} mediante una transformada discreta inversa de Fourier de \mathbb{H} como

$$h_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-ijk\frac{2\pi}{N}} H_j, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.38)$$

En general, si tratamos de calcular el vector \mathbb{H} a partir de \mathbb{h} , o viceversa, necesitamos N^2 productos que contienen números complejos mas $N(N-1)$ sumandos complejos. Para evitar tal complejidad de cálculos, Cooley y Tukey (1965) descubrieron un algoritmo en el cual únicamente se requieren $N \log_2(N)/2$ operaciones. A este algoritmo se le conoce como transformada rápida de Fourier. Un aspecto importante de la transformada rápida de Fourier es que se trata de un algoritmo recursivo que permite expresar una transformada rápida de Fourier de N elementos como la suma de dos transformadas rápidas de Fourier de $N/2$ elementos cada una, lo cual implica que al elegir el valor de N , la mejor opción es una potencia de 2.

Entonces, discretizando la ecuación (3.34) con intervalo de muestreo $\Delta\omega j$ y utilizando la regla trapezoidal podemos escribir

$$c(T, k_n) = \frac{e^{-\alpha k_n}}{\pi} \sum_{j=0}^{N-1} w_j e^{-i\Delta\omega j k_n} \psi(\omega_j) \Delta\omega, \quad (3.39)$$

donde

$$w_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{para } j = 0 \text{ y } N - 1 \\ 1 & \text{otros casos} \end{cases}.$$

Con la transformada rápida de Fourier (FFT) se obtienen las aproximaciones $c(T, k_n)$ y $\psi(\omega_j)$ a partir de N muestras de $c(T, k)$ y de $\psi(\omega)$ con intervalos de muestreo Δk y $\Delta\omega$ respectivamente.

Sea N el número de muestras que se toman para aproximar el precio de la opción $c(T, k)$ y la función característica $\psi(\omega)$. Sea Δk y $\Delta\omega$ los intervalos de muestreo respectivamente. Si K es el rango total de muestreo entonces podemos decir que $K \equiv \Delta k N$. Si hacemos $k_n = -\frac{K}{2} + n\Delta k$ con $n = 0, 1, \dots, N - 1$ entonces tendremos un espacio de N muestras igualmente espaciadas entre ellas y alrededor del 0. Lo mismo sucede si definimos $\Delta\omega \equiv \frac{2\pi}{K} \equiv \frac{2\pi}{\Delta k N}$ y hacemos $\omega_j = -\frac{\Delta\omega N}{2} + j\Delta\omega$ con $j = 0, 1, \dots, N - 1$. Además, de lo anterior vemos que $\Delta\omega\Delta k = \frac{2\pi}{N}$ por lo que podemos aplicar el algoritmo de transformada rápida de Fourier (3.37) a la ecuación (3.39) obteniendo así la forma general discreta de valuación mediante transformada rápida de Fourier:

$$\begin{aligned}
c(T, k_n) &= \frac{e^{-\alpha k_n}}{\pi} \sum_{j=0}^{N-1} w_j e^{-i\Delta\omega j k_n} \psi(\omega_j) \Delta\omega \\
&= \frac{e^{-\alpha k_n}}{\pi} \sum_{j=0}^{N-1} w_j e^{-i\Delta\omega j \left(-\frac{\Delta k N}{2} + n\Delta k\right)} \psi(\omega_j) \Delta\omega \\
&= \frac{e^{-\alpha k_n}}{\pi} \sum_{j=0}^{N-1} w_j e^{i\Delta\omega j \frac{\Delta k N}{2}} e^{-i\Delta\omega j n\Delta k} \psi(\omega_j) \Delta\omega \\
&= \frac{e^{-\alpha k_n}}{\pi} \sum_{j=0}^{N-1} w_j e^{ij\pi} e^{-ijn\frac{2\pi}{N}} \psi(\omega_j) \Delta\omega \\
&= \frac{e^{-\alpha k_n}}{\pi} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-ijn\frac{2\pi}{N}} h_j
\end{aligned} \tag{3.40}$$

donde

$$h_j = w_j e^{ij\pi} \psi(\omega_j) \Delta\omega, \tag{3.41}$$

$$\psi(\omega) = \frac{e^{-rT} \varphi(\omega - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 + \alpha - \omega^2 + i(2\alpha + 1)\omega}, \tag{3.42}$$

$$\varphi(\omega) = \exp \left[i \left\{ s_0 + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T \right\} \omega - \frac{(\sigma^2 T) \omega^2}{2} \right] y \quad k = \ln K. \tag{3.43}$$

4. El modelo de difusión con saltos de Merton

Los modelos de difusión con saltos se han vuelto muy populares en la valuación de opciones. Estos modelos, introducidos inicialmente por Robert Merton (1976), se convirtieron en una muy importante alternativa al modelo de Black-Scholes (1973). Merton (1976) le añade una componente de saltos a la dinámica del precio del activo subyacente para poder capturar el efecto de sesgo y curtosis en la dinámica de los rendimientos del activo subyacente. Autores posteriores como Jarrow y Rosenfeld (1984), Ball y

Torous(1985), Jorion (1988) y Venegas Martínez (2001) han sugerido que el agregar saltos a los modelos de valuación de opciones ha ayudado a explicar las inconsistencias mostradas en la práctica por el modelo de Black-Scholes.

El modelo de difusión con saltos de Merton agrega una componente de saltos mediante un proceso de Poisson N_t , donde el tamaño del salto sigue una distribución lognormal. De esta manera, se introducen tres parámetros adicionales: λ (intensidad del proceso de Poisson), μ (tamaño promedio del salto) y δ (desviación estándar del tamaño del salto) con los cuales se puede controlar el sesgo y la curtosis de la densidad de los rendimientos del activo subyacente. En este modelo, los cambios en el precio de activo subyacente siguen un proceso que consiste de dos componentes: una componente normal modelada por un movimiento Browniano con tendencia y otra componente discontinua la cual es modelada por un proceso de Poisson homogéneo N_t con intensidad λ . Los saltos en los precios de los activos se suponen independientes e idénticamente distribuidos y la probabilidad de que ocurra un salto en el precio del activo durante el instante de tiempo dt se puede escribir como sigue:

$$P\{\text{ocurre un salto durante } dt\} = P\{dN_t = 1\} \cong \lambda dt,$$

$$P\{\text{ningún salto durante } dt\} = P\{dN_t = 0\} \cong 1 - \lambda dt,$$

$$P\{\text{ocurre más de un salto durante } dt\} = P\{dN_t \geq 2\} \cong 0.$$

De lo anterior podemos inferir que existe una probabilidad finita de que ocurra un salto en un tiempo finito. Asimismo nótese que $E[dN_t] = \lambda dt$ y $\text{Var}[dN_t] = \lambda dt$. Como se mencionó anteriormente el parámetro λ es conocido como la intensidad del proceso de Poisson y se define como el número medio esperado de saltos por unidad de tiempo.

Al añadir la componente de salto a la ecuación de difusión (3.1) tenemos que el precio del activo subyacente sigue el proceso

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t + \nu S_t dN_t, \quad (4.1)$$

en donde α y σ representan la media esperada y la volatilidad instantánea en los rendimientos condicionales en que no ocurra ningún salto. Se supone que dW_t y dN_t no se

encuentran correlacionados y cuando ocurre un salto S_t se convierte inmediatamente en $(1 + v)S_t$ por lo que el cambio relativo en el precio de activo provocado por el salto en el tiempo t se puede escribir como

$$\frac{dS_t}{S_t} = \frac{v_t S_t - S_t}{S_t} = v_t - 1$$

Podemos ver a v_t (el tamaño del salto en el tiempo t) como una variable aleatoria independiente de dW_t y dN_t . Dado que se asume que v_t es una variable aleatoria log-normal, entonces $E[v_t] = e^{\mu + \frac{1}{2}\delta^2}$ y $\text{Var}[v_t] = e^{2\mu + \delta^2}(e^{\delta^2} - 1)$ y por ende $E[v_t - 1] = e^{\mu + \frac{1}{2}\delta^2} - 1$ y $\text{Var}[v_t - 1] = \text{Var}[v_t] = e^{2\mu + \delta^2}(e^{\delta^2} - 1)$. De lo anterior podemos escribir la dinámica del rendimiento del activo subyacente para el proceso de difusión con saltos de Merton como

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left[\alpha - \lambda \left(e^{\mu + \frac{1}{2}\delta^2} - 1 \right) \right] dt + \sigma dW_t + (v_t - 1) dN_t. \quad (4.2)$$

Nótese que si no existe ningún salto en el instante de tiempo dt entonces el proceso se vuelve simplemente un movimiento Browniano con tendencia dado que $dN_t = 0$.

Dada la ecuación de la forma

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t + v dN_t)$$

y definiendo $c = c(S_t, t)$ como una función dos veces diferenciable, con segundas derivadas parciales continuas, entonces la diferencial estocástica de $c(S_t, t)$ estará dada por

$$\begin{aligned} dc &= \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt \\ &+ \frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t + [c(S_t(1 + v), t) - c(S_t, t)]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

La ecuación anterior es conocida como el lema de Itô para procesos de difusión con saltos de Poisson. Aplicando la ecuación (4.3) a la ecuación (4.2) para $\ln(S_t)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
d\ln S_t &= \left(\frac{\partial \ln S_t}{\partial t} + \frac{\partial \ln S_t}{\partial S_t} \left[\alpha - \lambda \left(e^{\mu + \frac{1}{2} \delta^2} - 1 \right) \right] S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln S_t}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt \\
&\quad + \frac{\partial \ln S_t}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t + [\ln(v_t S_t) - \ln S_t] \\
&= \left\{ \frac{1}{S_t} \left[\alpha - \lambda \left(e^{\mu + \frac{1}{2} \delta^2} - 1 \right) \right] S_t - \frac{1}{S_t^2} \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \right\} dt \\
&\quad + \frac{1}{S_t} \sigma S_t dW_t + [\ln v_t + \ln S_t - \ln S_t] \\
&= \left\{ \left[\alpha - \lambda \left(e^{\mu + \frac{1}{2} \delta^2} - 1 \right) \right] - \frac{\sigma^2}{2} \right\} dt + \sigma dW_t + \ln v_t.
\end{aligned}$$

Si hacemos $d\ln S_t = \ln S_t - \ln S_0$, tendremos que

$$\begin{aligned}
\ln S_t - \ln S_0 &= \left\{ \left[\alpha - \lambda \left(e^{\mu + \frac{1}{2} \delta^2} - 1 \right) \right] - \frac{\sigma^2}{2} \right\} (t - 0) + \sigma (W_t - W_0) + \sum_{i=1}^{N_t} \ln v_i \\
&= \left\{ \left[\alpha - \lambda \left(e^{\mu + \frac{1}{2} \delta^2} - 1 \right) \right] - \frac{\sigma^2}{2} \right\} t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} \ln v_i,
\end{aligned}$$

por lo que

$$\ln S_t = \ln S_0 + \left\{ \left[\alpha - \lambda \left(e^{\mu + \frac{1}{2} \delta^2} - 1 \right) \right] - \frac{\sigma^2}{2} \right\} t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} \ln v_i.$$

Aplicando exponencial en ambos lados de la ecuación tenemos que

$$\begin{aligned}
S_t &= S_0 \exp \left\{ \left[\alpha - \lambda \left(e^{\mu + \frac{1}{2} \delta^2} - 1 \right) \right] t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} \ln v_i \right\} \\
&= S_0 \exp \left\{ \left[\alpha - \lambda \left(e^{\mu + \frac{1}{2} \delta^2} - 1 \right) \right] t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_t \right\} \exp \left(\sum_{i=1}^{N_t} \ln v_i \right) \\
&= S_0 \exp \left\{ \left[\alpha - \lambda \left(e^{\mu + \frac{1}{2} \delta^2} - 1 \right) \right] t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_t \right\} \prod_{i=1}^{N_t} v_i.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Tomando la ecuación (4.4) y definiendo $\ln v_i \equiv Y_i$ podemos decir que

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left[\alpha - \lambda \left(e^{\mu + \frac{1}{2} \delta^2} - 1 \right) - \frac{\sigma^2}{2} \right] t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \right\}. \quad (4.5)$$

De la ecuación (4.5) se observa que tenemos un proceso exponencial de Lévy en donde Merton elige un proceso de Lévy compuesto por un movimiento Browniano con tendencia más un proceso de saltos de Poisson

$$S_t = S_0 e^{L_t} = S_0 \exp \left\{ \left[\alpha - \lambda \left(e^{\mu + \frac{1}{2} \delta^2} - 1 \right) - \frac{\sigma^2}{2} \right] t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \right\},$$

donde

$$L_t = \left[\alpha - \lambda \left(e^{\mu + \frac{1}{2} \delta^2} - 1 \right) - \frac{\sigma^2}{2} \right] t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i.$$

Entonces, el rendimiento logarítmico $\ln \left(\frac{S_t}{S_0} \right)$ se puede modelar como un proceso de Lévy tal que

$$\ln \left(\frac{S_t}{S_0} \right) = L_t = \left[\alpha - \lambda \left(e^{\mu + \frac{1}{2} \delta^2} - 1 \right) - \frac{\sigma^2}{2} \right] t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i. \quad (4.6)$$

En este caso el rendimiento logarítmico del precio del activo no sigue una distribución normal debido a la incorporación del proceso de Poisson. Sin embargo, dado que se supone que la distribución del tamaño de los saltos es lognormal, se asume que la distribución del rendimiento logarítmico del tamaño de los saltos es normal ($Y_i \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$) y esto nos permite obtener la distribución de $z_t = \ln \left(\frac{S_t}{S_0} \right)$ como una serie rápidamente convergente que tiene la siguiente forma:

$$\mathbb{P}(z_t \in A) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_t = i) \mathbb{P}(z_t \in A | N_t = i),$$

lo cual se puede escribir como

$$\mathbb{P}(z_t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^i}{i!} \text{Normal} \left(z_t; \left[\alpha - \lambda \left(e^{\mu + \frac{1}{2} \delta^2} - 1 \right) - \frac{\sigma^2}{2} \right] t + i\mu, \sigma^2 t + i\delta^2 \right), \quad (4.7)$$

donde

$$\begin{aligned} & \text{Normal}\left(z_t; \left[\alpha - \lambda\left(e^{\mu + \frac{1}{2}\delta^2} - 1\right) - \frac{\sigma^2}{2}\right]t + i\mu, \sigma^2 t + i\delta^2\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 t + i\delta^2)}} \exp\left\{\frac{\left[z_t - \left\{\left(\alpha - \lambda\left(e^{\mu + \frac{1}{2}\delta^2} - 1\right) - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + i\mu\right\}\right]^2}{2(\sigma^2 t + i\delta^2)}\right\}. \end{aligned}$$

De las ecuaciones anteriores se tiene que $\mathbb{P}(N_t = i) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^i}{i!}$ es la probabilidad de que el precio del activo salte i veces durante el intervalo de tiempo t . El siguiente término $\mathbb{P}(z_t \in A | N_t = i) = \text{Normal}\left(z_t; \left[\alpha - \lambda\left(e^{\mu + \frac{1}{2}\delta^2} - 1\right) - \frac{\sigma^2}{2}\right]t + i\mu, \sigma^2 t + i\delta^2\right)$ es la distribución normal de Black-Scholes de los rendimientos logarítmicos asumiendo que el precio del activo saltó i veces durante el intervalo de tiempo t .

4.1 Modelo de valuación de Merton mediante procesos de Lévy.

Como se mencionó en el apartado anterior, de la ecuación (4.5) se observó que tenemos un proceso exponencial de Lévy en donde el proceso de Lévy está compuesto por un movimiento Browniano con tendencia más un proceso de saltos de Poisson

$$S_t = S_0 e^{L_t} = S_0 \exp\left\{\left[\alpha - \lambda\left(e^{\mu + \frac{1}{2}\delta^2} - 1\right) - \frac{\sigma^2}{2}\right]t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i\right\},$$

donde

$$L_t = \left[\alpha - \lambda\left(e^{\mu + \frac{1}{2}\delta^2} - 1\right) - \frac{\sigma^2}{2}\right]t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i.$$

También se observó que el rendimiento logarítmico $\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$ se puede modelar como un proceso de Lévy tal que

$$\ln S_t = \ln S_0 + \left[\alpha - \lambda\left(e^{\mu + \frac{1}{2}\delta^2} - 1\right) - \frac{\sigma^2}{2}\right]t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i.$$

El primer paso para poder utilizar la metodología de valuación mediante transformada de Fourier es obtener la función característica del logaritmo del precio del activo $\ln S_t$. A partir de la ecuación anterior (o bien de la ecuación (4.6)) se puede obtener la dinámica del logaritmo del precio del activo subyacente neutral al riesgo como

$$\ln S_t = \ln S_0 + \left[r - \lambda k - \frac{\sigma^2}{2} \right] t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

donde $k = e^{\mu + \frac{1}{2}\delta^2} - 1$. La distribución de probabilidad de $\ln S_t$ se puede obtener como una serie rápidamente convergente que tiene la siguiente forma:

$$\mathbb{P}(\ln S_t \in A) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_t = i) \mathbb{P}(\ln S_t \in A | N_t = i),$$

obien

$$\mathbb{P}(\ln S_t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^i}{i!} N_{BS} \left(\ln S_t; \ln S_0 + \left[r - \lambda \left(e^{\mu + \frac{1}{2}\delta^2} - 1 \right) - \frac{\sigma^2}{2} \right] t + i\mu, \sigma^2 t + i\delta^2 \right), \quad (4.8)$$

donde

$$\begin{aligned} N_{BS} \left(\ln S_t; \ln S_0 + \left[r - \lambda \left(e^{\mu + \frac{1}{2}\delta^2} - 1 \right) - \frac{\sigma^2}{2} \right] t + i\mu, \sigma^2 t + i\delta^2 \right) \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 t + i\delta^2)}} \exp \left\{ - \frac{\left[\ln S_t - \left\{ \ln S_0 + \left(r - \lambda k - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + i\mu \right\} \right]^2}{2(\sigma^2 t + i\delta^2)} \right\}. \end{aligned}$$

Si hacemos $s_t = \ln S_t$ y después calculamos la transformada de Fourier de (4.8) con parámetros $(a, b) = (1, 1)$ obtendremos la función característica asociada al modelo de Merton:

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{s_t i \omega} \mathbb{P}(s_t) ds_t \\ &= \exp \left\{ \lambda t \left[\exp \left(i\mu\omega - \frac{\delta^2 \omega^2}{2} \right) - 1 \right] + i\omega \left[s_0 + \left(r - \lambda k - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right] - \frac{\sigma^2 \omega^2}{2} t \right\}. \quad (4.9) \end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación (4.9) en la ecuación general de valuación mediante transformada de Fourier, ecuación (3.36), tendremos la forma de valuación asociada al modelo de Merton de difusión con saltos:

$$C_{Merton}(T, k) = \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega k} \frac{e^{-rT} \phi_T(\omega - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 + \alpha - \omega^2 + i(2\alpha + 1)\omega} d\omega, \quad (4.10)$$

donde

$$\phi_T(\omega) = \exp \left\{ \lambda t \left[\exp \left(i\mu\omega - \frac{\delta^2 \omega^2}{2} \right) - 1 \right] + i\omega \left[s_0 + \left(r - \lambda k - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right] - \frac{\sigma^2 \omega^2}{2} t \right\}. \quad (4.11)$$

4.2 Método de valuación mediante transformada de Fourier.

Para implementar la metodología de valuación utilizando transformada rápida de Fourier necesitamos la versión discreta de las ecuaciones (4.10) y (4.11). La buena noticia es que ya contamos con la forma general de valuación mediante transformada de Fourier y simplemente necesitamos adecuarla al modelo de Merton, lo cual no resulta complicado ya que únicamente debemos sustituir la función característica asociada al modelo de Merton en la ecuación (3.40). Entonces, partiendo de la ecuación (3.40) y tomando la función característica asociada al modelo de Merton tendremos que

$$C(T, k_n)_{Merton} = \frac{e^{-\alpha k_n}}{\pi} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-ij n \frac{2\pi}{N}} h_j, \quad (4.12)$$

donde

$$h_j = w_j e^{ij\pi} \psi(\omega_j) \Delta\omega, \quad (4.13)$$

$$\psi(\omega) = \frac{e^{-rT} \phi(\omega - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 + \alpha - \omega^2 + i(2\alpha + 1)\omega}, \quad (4.14)$$

$$\phi_T(\omega) = \exp \left\{ \lambda t \left[\exp \left(i\mu\omega - \frac{\delta^2 \omega^2}{2} \right) - 1 \right] + i\omega \left[s_0 + \left(r - \lambda k - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right] - \frac{\sigma^2 \omega^2}{2} t \right\} \quad (4.15)$$

y

$$w_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{para } j = 0 \text{ y } N - 1 \\ 1 & \text{otros casos.} \end{cases}$$

5. El modelo Varianza Gamma (VG)

Tras el descubrimiento de Black y Scholes en 1973, muchos autores se han dado a la tarea de investigar la forma de explicar y eliminar las inconsistencias presentes en el modelo. Un factor importante que afecta dicho modelo de valuación es el supuesto de normalidad en los cambios de los precios de los activos (o bien el supuesto de log-normalidad en los rendimientos logarítmicos de los precios de los activos), el cual se ha comprobado que no es del todo correcto. Heston (1993) comenta sobre inconsistencias en la valuación debidas al sesgo y curtosis en la distribución de los rendimientos del activo. Por otro lado Rubinstein (1994) y Bates (1995) encuentran que el modelo de Black-Scholes sub-valúa las opciones put posiblemente debido a que la distribución de los rendimientos presenta sesgo negativo y colas anchas, lo cual sugiere que la curva de volatilidad implícita tiene pendiente negativa con respecto al strike. También se ha mostrado que la presencia de smile en la volatilidad sugiere una densidad neutral al riesgo con curtosis mayor a la de una densidad normal y que la presencia de sesgo sugiere que la cola izquierda en la distribución de los rendimientos es más ancha que la cola derecha. El proceso VG fue concebido inicialmente por Madan y Seneta (1990), Madan y Milne (1991). En sus inicios el proceso permitía controlar la volatilidad y la curtosis. Posteriormente fue generalizado por Madan, Carr y Chang (1998) y por Carr y Madan (1999) quienes implementaron al modelo la metodología de valuación mediante transformada de Fourier y pasaron de dos a tres parámetros para así controlar volatilidad, sesgo y curtosis presentes en la densidad de los rendimientos del subyacente.

El modelo VG es un buen ejemplo para ilustrar el potencial de la metodología de valuación mediante transformada de Fourier ya que se trata de un modelo en el cual la función de densidad es complicada mientras que la función característica asociada es mucho más simple. Se trata de un proceso de salto puro con incrementos estacionarios e independientes en el cual se tiene una cantidad infinita de saltos pequeños y una cantidad finita de saltos grandes.

Consideremos una economía en la cual se tiene una acción, una cuenta bancaria y una opción sobre la acción para todos los strikes y vencimientos en un intervalo de tiempo continuo $[0, T]$. Supongamos que el sistema bancario paga una tasa compuesta continua y libre de riesgo r , con lo que el valor de cuenta bancaria al tiempo t es e^{rt} . Asimismo sea el precio de la acción S_t y sea el precio de la opción sobre la acción $C(t; K, T)$ para un strike K y un vencimiento $T > t$.

Consideremos un movimiento Browniano con tendencia θ y volatilidad σ , el cual se evalúa aleatoriamente en el tiempo y supongamos que dicha aleatoriedad en el tiempo sigue un proceso gamma. Al proceso anterior se le conoce como proceso Varianza Gamma (VG) y se puede definir como un proceso estocástico $\{X_t; 0 \leq t \leq T\}$ creado al evaluar un movimiento Browniano con tendencia aleatoriamente en el tiempo (subordinar el tiempo) mediante un subordinador 0-estable (subordinador gamma) con tasa media unitaria.

$$X(t; \vartheta, \theta, \sigma) = B_t(\gamma(t; 1, \vartheta); \theta, \sigma). \quad (5.1)$$

donde

$$B_t(\gamma(t; 1, \vartheta); \theta, \sigma) = \theta(\gamma_t) + \sigma W(\gamma_t), \quad (5.2)$$

donde $W(t)$ es un movimiento Browniano estándar. El proceso gamma, $\gamma(t; \mu, \vartheta)$, con tasa media μ y tasa de cambio ϑ , es un proceso con incrementos independientes gamma sobre intervalos de tiempo que no se traslapan, $(t, t + h)$. La distribución de los incrementos gamma $g = \gamma(t + h; \mu, \vartheta) - \gamma(t; \mu, \vartheta)$ estará dada por la función de densidad gamma con media μh y varianza ϑh

$$f_h(g) = \left(\frac{\mu}{\vartheta}\right)^{\frac{\mu^2 h}{\vartheta}} \frac{g^{\frac{\mu^2 h}{\vartheta} - 1} e^{-\left(\frac{\mu}{\vartheta} g\right)}}{\Gamma\left(\frac{\mu^2 h}{\vartheta}\right)}, \quad g > 0, \quad (5.3)$$

donde $\Gamma(x)$ es la función gamma. Como ya se mencionó, el proceso VG, $X(t; \sigma, \theta, \vartheta)$, se puede definir en términos del movimiento Browniano con tendencia $B_t(t; \theta, \sigma)$ y un proceso gamma con tasa media unitaria $\gamma(t; 1, \vartheta)$. El proceso VG se obtiene evaluando un movimiento Browniano en un tiempo dado por un proceso gamma. De esta manera se obtienen tres parámetros que son la volatilidad del movimiento Browniano σ , la tasa de cambio del proceso gamma ϑ y la tendencia agregada al movimiento Browniano θ . Con esto se logra control sobre el sesgo y curtosis mediante θ y ϑ respectivamente adicionales

al de la volatilidad. El proceso VG se define como un proceso de Lévy de salto puro con una tasa de arribo de saltos infinita donde se tiene una cantidad infinita de saltos pequeños y una cantidad finita de saltos grandes.

Madan, Carr y Chang (1998) expresan la densidad al tiempo t del proceso VG condicional en que se dé el cambio en el tiempo g como una función de densidad normal. Luego sugieren que la densidad no condicional se puede obtener integrando g y utilizando la ecuación (5.3), la distribución de los incrementos gamma. Con esto obtienen la densidad del proceso VG, $f_{X(t)}(X)$, como sigue:

$$f_{X(t)}(X) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi g}} \exp\left(-\frac{(X - \theta g)^2}{2\sigma^2 g}\right) \frac{g^{\frac{t}{\vartheta}-1} \exp\left(-\frac{g}{\vartheta}\right)}{\vartheta^{\frac{t}{\vartheta}} \Gamma\left(\frac{t}{\vartheta}\right)} dg. \quad (5.4)$$

Al evaluar la función característica asociada a la función de densidad del proceso varianza gamma se obtiene que⁶

$$\phi_{X(t)}(\omega) = \left(\frac{1}{1 - i\theta\vartheta\omega + (\sigma^2\vartheta/2)\omega^2} \right)^{\frac{t}{\vartheta}}. \quad (5.5)$$

Condional en el cambio gamma en el tiempo, g , el proceso VG, $X(t)$, se distribuye como una variable normal con media θg y varianza $\sigma\sqrt{g}$, por lo que se puede escribir que

$$X(t) = \theta g + \sigma\sqrt{g}\xi. \quad (5.6)$$

donde ξ es una variable normal estándar independiente de la variable aleatoria g y con media t y varianza ϑt . Al calcular valores esperados tenemos que

$$E[X(t)] = \theta t. \quad (5.7)$$

Luego, para $x = X(t) - E[X(t)]$ se puede escribir

$$x = \theta(g - t) + \sigma\sqrt{g}\xi,$$

por lo que

⁶Para un desarrollo más detallado sobre el cálculo de la función de densidad y de la función característica se pueden ver los trabajos de Madan y Seneta (1990), Madan y Milne (1991), Madan, Carr y Chang (1998) o bien el de Kazuhisa Matsuda (1994).

$$E[x^2] = E[(X(t) - E[X(t)])^2] = \theta^2 \vartheta t + \sigma^2 t. \quad (5.8)$$

Calculando el tercer y cuarto momentos con respecto a la media, x^3 y x^4 , tenemos que

$$E[x^3] = (2\theta^3 \vartheta^2 + 3\sigma^2 \theta \vartheta)t, \quad (5.9)$$

y

$$E[x^4] = (3\sigma^4 \vartheta + 12\sigma^2 \theta^2 \vartheta^2 + 6\theta^4 \vartheta^3)t + (3\sigma^4 + 6\sigma^2 \theta^2 \vartheta + 3\theta^4 \vartheta^2)t^2. \quad (5.10)$$

Evaluando el sesgo mediante las ecuaciones (5.9) y (5.8):

$$\text{sesgo} = \frac{(2\theta^3 \vartheta^2 + 3\sigma^2 \theta \vartheta)t}{\sqrt{(\theta^2 \vartheta + \sigma^2)^3 t^3}} \quad (5.11)$$

se observa que cuando $\theta = 0$ el sesgo es igual a cero y que el signo de θ también determina el signo del sesgo (dado que los otros parámetros son mayores o iguales a cero), por lo que el parámetro θ es el que determina si existe o no un sesgo y su signo.

Suponiendo que no hay sesgo ($\theta = 0$) y haciendo $t = 1$, al dividir el cuarto momento central entre el cuadrado del segundo momento central se evalúa la curtosis como

$$\text{kurtosis} = \frac{3\sigma^4 \vartheta + 3\sigma^4}{\sigma^4} = 3(1 + \vartheta), \quad (5.12)$$

por lo que ϑ es el parámetro que define el grado de exceso de la curtosis presente en la densidad del proceso.

5.1 Modelo de valuación VG mediante procesos de Lévy.

Para el modelo VG tenemos un proceso exponencial de Lévy en el cual se reemplaza el movimiento Browniano estándar por un proceso VG definido en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y se modifica el término de tendencia en el proceso de Lévy, esto es

$$S_t = S_0 \exp(mt + X(t; \sigma, \theta, \vartheta) + \eta t) \quad (5.13)$$

donde

$$\eta = \frac{1}{\vartheta} \ln \left(1 - \theta \vartheta - \frac{\sigma^2 \vartheta}{2} \right),$$

μ es la tasa de rendimiento promedio del activo subyacente bajo el espacio de probabilidad \mathbb{P} . Asumiendo neutralidad al riesgo y encontrando una medida de probabilidad equivalente neutral al riesgo, $\tilde{\mathbb{P}} \sim \mathbb{P}$, es posible sustituir el rendimiento promedio esperado por la tasa libre de riesgo, por lo que podemos reescribir (5.13) como

$$S_t = S_0 \exp(rt + X(t; \sigma, \theta, \vartheta) + \eta t), \quad (5.14)$$

con

$$\eta = \frac{1}{\vartheta} \ln \left(1 - \theta \vartheta - \frac{\sigma^2 \vartheta}{2} \right).$$

Expresando la densidad al tiempo t del logaritmo del precio relativo $z = \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$, condicional en que se dé el cambio en el tiempo g , como una función de densidad normal, la densidad no condicional se puede obtener integrando g para obtener la densidad del proceso z . Tras un buen número de tediosas manipulaciones algebraicas Madan, Carr y Chang obtienen la función de densidad de $z = \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$ cuando los precios siguen la dinámica de la ecuación (5.14) como

$$h(z) = \frac{2 \exp\left(\frac{\theta x}{\sigma^2}\right)}{\sigma \vartheta^{\frac{t}{\vartheta}} \sqrt{2\pi} \Gamma\left(\frac{t}{\vartheta}\right)} \left(\frac{x^2}{\frac{2\sigma^2}{\vartheta} + \theta^2}\right)^{\frac{t}{2\vartheta} - \frac{1}{4}} K_{\frac{t}{\vartheta} - \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sigma^2} \sqrt{x^2 \left(\frac{2\sigma^2}{\vartheta} + \theta^2\right)}\right), \quad (5.15)$$

donde K es una función de Bessel modificada de segundo tipo y de orden $h = \frac{t}{\vartheta} - \frac{1}{2}$ con

$$x = z - mt - \frac{t}{\vartheta} \ln \left(1 - \theta \vartheta - \frac{\sigma^2 \vartheta}{2} \right) t. \quad (5.16)$$

Sabemos que el precio de una opción call europea para un strike K y con vencimiento en t se puede escribir como

$$C(K, t) = e^{-rt} E[\max(S_t - K, 0)]. \quad (5.17)$$

Madan, Carr y Chang (1998) evalúan la ecuación (5.17) basándose en el procedimiento utilizado por Madan y Milne (1991)⁷ y realizando una buena cantidad de cambio de variables encuentran una forma cerrada de valuación para calcular el precio de la opción⁸:

$$C(K, t) = S_0 \Psi \left(d \sqrt{\frac{1-c_1}{\vartheta}}, (\alpha + s) \sqrt{\frac{\vartheta}{1-c_1}}, \frac{t}{\vartheta} \right) - K e^{-rt} \Psi \left(d \sqrt{\frac{1-c_2}{\vartheta}}, \alpha s \sqrt{\frac{\vartheta}{1-c_2}}, \frac{t}{\vartheta} \right) \quad (5.18)$$

donde Ψ está definida en términos de una función de Bessel modificada de segundo tipo y de una función hipergeométrica de dos variables⁹ y cuya forma general es la siguiente:

$$\Psi(a, b, \gamma) = \int_0^{\infty} N \left(\frac{a}{\sqrt{u}} + b\sqrt{u} \right) \frac{u^{\gamma-1} e^{-u}}{\Gamma(\gamma)} du, \quad (5.19)$$

y donde

$$d = \frac{1}{s} \left[\ln \left(\frac{S_0}{K} \right) + rt + \frac{t}{\vartheta} \ln \left(\frac{1-c_1}{1-c_2} \right) \right], \quad (5.19)$$

$$c_1 = \frac{\vartheta(\alpha + s)^2}{2}, \quad (5.20)$$

$$c_2 = \frac{\vartheta\alpha^2}{2}, \quad (5.21)$$

$$\alpha = \zeta s, \quad (5.22)$$

$$\zeta = -\frac{\theta}{\sigma^2} \quad (5.23)$$

y

⁷ La evaluación de (5.17) se lleva a cabo condicional en que exista el cambio aleatorio en el tiempo g , el cual tiene una distribución gamma independiente. Condicional en g , $X(t)$ se distribuye normalmente y el valor de la opción estará dado por una fórmula tipo B-S. El precio de la opción para el modelo VG se obtiene entonces integrando esta fórmula sobre g con respecto a la densidad gamma.

⁸ Ver "Demostración de Teorema 2" en apéndice de Madan, Carr y Chang (1998).

⁹ Ver anexo, ecuación (A11), de Madan Carr y Chang (1998).

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{1 + \left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^2 \left(\frac{\vartheta}{2}\right)}} \quad (5.24)$$

Para implementar la metodología de transformada de Fourier en el cálculo del precio de una opción cuando el subyacente sigue un proceso VG necesitamos la función característica del logaritmo del precio del activo $\ln S_t$. A partir de la ecuación (5.14) podemos establecer la dinámica del logaritmo del precio del activo subyacente como

$$\ln S_t = \ln S_0 + (rt + X(t; \sigma, \theta, \vartheta) + \eta t), \quad (5.25)$$

con

$$\eta = \frac{1}{\vartheta} \ln \left(1 - \theta \vartheta - \frac{\sigma^2 \vartheta}{2} \right).$$

Asimismo, sabemos que un proceso VG, x_t , tiene una función de densidad igual a (5.15), por lo que en este caso podemos reescribir (5.25) en términos del proceso VG como

$$x_t = \ln S_t - \left[\ln S_0 + rt + \frac{1}{\vartheta} \ln \left(1 - \theta \vartheta - \frac{\sigma^2 \vartheta}{2} \right) t \right].$$

Entonces podemos establecer la densidad neutral al riesgo del logaritmo del precio del activo subyacente para el modelo VG de la siguiente manera

$$h(\ln S_t) = \frac{2 \exp\left(\frac{\theta x}{\sigma^2}\right)}{\sigma \vartheta^{\frac{t}{\vartheta}} \sqrt{2\pi} \Gamma\left(\frac{t}{\vartheta}\right)} \left(\frac{x^2}{\frac{2\sigma^2}{\vartheta} + \theta^2}\right)^{\frac{t}{2\vartheta} - \frac{1}{4}} K_{\frac{t}{\vartheta} - \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sigma^2} \sqrt{x^2 \left(\frac{2\sigma^2}{\vartheta} + \theta^2\right)} \right), \quad (5.27)$$

con

$$x_t = \ln S_t - \left[\ln S_0 + rt + \frac{1}{\vartheta} \ln \left(1 - \theta \vartheta - \frac{\sigma^2 \vartheta}{2} \right) t \right]. \quad (5.28)$$

El cálculo de la transformada de Fourier a la función de densidad (5.27) resulta complicado dado que la función de densidad incluye una función de Bessel modificada de segundo tipo. Matsuda (2004) infiere la función característica mediante una lógica muy simple, la cual se muestra a continuación:

Considere el cálculo de la función característica de un proceso que sigue un movimiento Browniano estándar multiplicativo $\{\sigma B_t; 0 \leq t \leq T\}$ como sigue

$$\begin{aligned}
\phi_B(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega B_t} \mathbb{P}(B_t) dB_t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega B_t} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{\left(-\frac{B_t^2}{2\sigma^2 t}\right)} dB_t \\
&= e^{\left(-\frac{\sigma^2 \omega^2 t}{2}\right)}.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Ahora considere un segundo proceso que sigue un movimiento Browniano con tendencia $\{W_t = At + \sigma B_t; 0 \leq t \leq T\}$ de manera que la función característica asociada estará dada por

$$\begin{aligned}
\phi_W(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega W_t} \mathbb{P}(W_t) dW_t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega W_t} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{\left(-\frac{(W_t - At)^2}{2\sigma^2 t}\right)} dW_t \\
&= e^{\left(iAt\omega - \frac{\sigma^2 \omega^2 t}{2}\right)} = e^{(iAt\omega)} e^{\left(-\frac{\sigma^2 \omega^2 t}{2}\right)}.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Lo anterior implica que la función característica de un proceso que sigue un movimiento Browniano con tendencia se puede obtener mediante un simple producto entre la función característica de un proceso que sigue un movimiento Browniano estándar multiplicativo y $e^{(iAt\omega)}$. Utilizando la misma lógica para el modelo VG se tiene que la función característica asociada a la función de densidad del proceso varianza gamma está dada por la ecuación (5.5)

$$\phi_{X(t)}(\omega) = \left(\frac{1}{1 - i\theta\vartheta\omega + (\sigma^2\vartheta/2)\omega^2} \right)^{\frac{t}{\vartheta}}.$$

Entonces, partiendo de la dinámica neutral al riesgo del logaritmo del precio del activo subyacente para el modelo VG, y tomando el término de tendencia $At = \ln S_0 + \left[r + \frac{1}{\vartheta} \ln \left(1 - \theta\vartheta - \frac{\sigma^2\vartheta}{2} \right) \right] t$ Matsuda (2004) establece que la función característica asociada al modelo VG al tiempo $t = T$ y con $\ln S_t = s_t$ está dada por

$$\phi_T(\omega) = \exp \left[i\omega \left\{ \ln S_0 + \left[r + \frac{1}{\vartheta} \ln \left(1 - \theta\vartheta - \frac{\sigma^2\vartheta}{2} \right) \right] t \right\} \right] \left(\frac{1}{1 - i\theta\vartheta\omega + (\sigma^2\vartheta/2)\omega^2} \right)^{\frac{t}{\vartheta}}. \quad (5.31)$$

Entonces, sustituyendo la ecuación (5.31) en la ecuación general de valuación mediante transformada de Fourier, ecuación (3.36), tendremos la forma de valuación asociada al modelo VG:

$$C_{VG}(T, k) = \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega k} \frac{e^{-rT} \phi_T(\omega - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 + \alpha - \omega^2 + i(2\alpha + 1)\omega} d\omega, \quad (5.32)$$

donde

$$\begin{aligned} \phi_T(\omega) = \exp \left[i\omega \left\{ \ln S_0 \right. \right. \\ \left. \left. + \left[r + \frac{1}{\vartheta} \ln \left(1 - \theta\vartheta - \frac{\sigma^2\vartheta}{2} \right) \right] t \right\} \right] \left(\frac{1}{1 - i\theta\vartheta\omega + (\sigma^2\vartheta/2)\omega^2} \right)^{\frac{t}{\vartheta}}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

5.2 Método de valuación VG mediante transformada de Fourier.

Para implementar la metodología de valuación utilizando transformada rápida de Fourier necesitamos la versión discreta de las ecuaciones (5.32) y (5.33). Dado que ya contamos con la forma general de valuación mediante transformada de Fourier, simplemente necesitamos adecuarla al modelo VG de Madan, Carr y Chang (1998), lo cual nuevamente resulta poco complicado ya que únicamente debemos sustituir la función característica asociada al modelo VG en la ecuación (3.40), con lo cual tenemos que

$$C(T, k_n)_{VG} = \frac{e^{-\alpha k_n}}{\pi} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-ij n \frac{2\pi}{N}} h_j, \quad (5.34)$$

donde

$$h_j = w_j e^{ij\pi} \psi(\omega_j) \Delta\omega, \quad (5.35)$$

$$\psi(\omega) = \frac{e^{-rT} \phi(\omega - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 + \alpha - \omega^2 + i(2\alpha + 1)\omega}, \quad (5.36)$$

$$\phi_T(\omega) = \exp \left[i\omega \left\{ \ln S_0 + \left[r + \frac{1}{\vartheta} \ln \left(1 - \theta\vartheta - \frac{\sigma^2\vartheta}{2} \right) \right] t \right\} \right] \left(\frac{1}{1 - i\theta\vartheta\omega + (\sigma^2\vartheta/2)\omega^2} \right)^{\frac{t}{\vartheta}} \quad (5.37)$$

Y

$$w_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{para } j = 0 \text{ y } N - 1 \\ 1 & \text{otros casos.} \end{cases}$$

6. Datos y metodología

El método de valuación mencionado en los apartados anteriores se aplicará a continuación sobre el modelo Varianza-Gamma para valorar opciones sobre índices de acciones de tipo europeo. Para ello se llevó a cabo la recolección de información necesaria para nuestro fin. La base de datos consta de información histórica de niveles de los índices NASDAQ 100 (EU), S&P 500 (EU), NIKKEI 225 (Japón), HANG SENG (Hong Kong), DAX (Alemania), CAC 40 (Francia) y FTSE 100 (Inglaterra) así como de precios históricos de opciones sobre dichos índices. Dicha información contiene niveles de los índices para el periodo de enero-1997 a agosto-2010.

Recordemos que los índices bursátiles son números índices que reflejan la evolución en el tiempo de los precios de los títulos cotizados en un mercado. La muestra de activos que componen el índice obedece a ciertos criterios de elección que en general tienen que ver con el volumen negociado y la capitalización bursátil. Dado que existen distintos tipos de títulos cotizados (acciones, derivados) se pueden calcular diferentes tipos de índices, aunque los más conocidos son los que se refieren a las acciones. Los índices pueden suponer agrupaciones parciales de valores (sectoriales) o globales (generales). La finalidad de los índices bursátiles es reflejar la evolución en el tiempo de los precios de los títulos admitidos a cotización en Bolsa. En resumen tratan de reflejar el comportamiento de todos los valores que cotizan en la bolsa tomados en conjunto como si fuera una sola unidad.

NASDAQ-100

El índice NASDAQ-100 incluye 100 de las emisiones no-financieras más grandes (domésticas y extranjeras) que se encuentran listadas en el mercado accionario de NASDAQ en Estados Unidos. Este índice incluye compañías de los grupos industriales más importantes, pero excluye las emisiones de compañías financieras y/o de inversión. El índice nace en enero de 1985 y es calculado bajo una metodología de capitalización ponderada modificada donde se toma la media de los precios de las acciones ponderada por el criterio de capitalización bursátil. Para formar parte del índice, una emisión debe pertenecer al Mercado Nacional de Nasdaq y cumplir con ciertos criterios de selección:

- La emisión no debe pertenecer a una compañía financiera y/o de inversión.
- Los títulos o valores no pueden ser emitidos por una compañía que se encuentre en proceso de bancarrota.
- Los valores deben tener un volumen de operación promedio de por lo menos 200,000 acciones.
- Si el emisor se encuentra regulado bajo leyes fuera de Estados Unidos, entonces la emisión debe contar con opciones listadas en un mercado reconocido de E.U. o ser elegible para poder listar opciones en un mercado reconocido de E.U.
- Sólo una clase de título por emisor es permitida.
- Que el emisor no haya realizado ningún acuerdo o arreglo que pudiera resultar en que los títulos no sean elegible para pertenecer al índice.
- El emisor no debe contar con estados financieros en los que actualmente se haya retirado una opinión de auditoría.
- La emisora debe haber sido listada por lo menos 2 años antes en algún mercado reconocido a menos que se encontrara calificada dentro del top 25% de las empresas con mayor índice de capitalización en el mercado durante los 6 meses previos, lo cual disminuye el criterio a 1 año.

Cada año se hace una evaluación llamada “Ranking Review” en la que todas las emisoras pertenecientes a NASDAQ se califican en base a su valor de mercado. Las 100 emisoras que cuenten con mayor valor de mercado y que cumplan con los criterios anteriores se retienen en el índice. Si alguna emisora se encontró dentro del índice en la revisión anterior y durante la nueva revisión se encuentra en el lugar 101 a 125 seguirá perteneciendo al

índice. Si una emisora no cumple con estas reglas será reemplazada. Adicionalmente, todas las emisoras son monitoreadas diariamente en caso de cambios en el número de acciones en circulación y en caso de algún cambio NASDAQ se encarga de hacer el ajuste correspondiente ya sea el mismo día o durante el trimestre correspondiente.

S&P 500

Standard & Poor's 500 es un índice perteneciente a Estados Unidos en el cual se incluyen acciones de 500 de las compañías con mayor número de accionistas a nivel público. El índice se enfoca en las compañías con base en Estados Unidos, sin embargo también incluye algunas emisoras extranjeras. S&P 500 es el segundo índice más importante en lo que se refiere a acciones americanas de con mayor capital después del Dow Jones Industrial Average. Este índice inició como tal el 4 de marzo de 1957.

Los componentes del índice son elegidos por un comité, el cual elige las 500 compañías que son más representativas de las industrias pertenecientes a la economía de los Estados Unidos. Las emisoras que no cuentan con ofertas públicas o cuyas acciones no cuentan con suficiente liquidez no son incluidas en el índice.

Tradicionalmente, este índice basa su cálculo en una ponderación de valor de mercado, por lo que los movimientos en los precios de las acciones con mayor capitalización tienen un mayor efecto en el movimiento del índice. Las emisoras son monitoreadas en caso de cambios en el número de acciones en circulación y en caso de algún cambio se hace el ajuste correspondiente. Sin embargo, para prevenir que el valor del índice se mueva bruscamente únicamente por decisiones corporativas, todos los cambios en el valor de mercado debidos a decisiones corporativas se ajustan por un divisor. De igual forma cuando se realiza el reemplazo de una compañía por otra, el divisor se ajusta de manera que el valor de índice se mantenga constante. Todos los ajustes al divisor se llevan a cabo tras el cierre de las operaciones diarias y tras el cálculo del precio de cierre del índice.

NIKKEI 225

El índice *Nikkeiheikinkabuka 225* es un índice perteneciente a la bolsa de valores de Tokyo y se ha calculado diariamente por el diario NihonKeizaiShimbun (Nikkei) desde el 7 de septiembre de 1950. Este índice es el más observado en Japón en lo que se refiere al movimiento accionario y se compone de las emisiones con mayor actividad en la primera

sección de la Bolsa de Tokyo manteniendo un balance de representación de los diferentes sectores industriales de Japón.

El método actual de cálculo del índice Nikkei, llamado método Dow Jones, es utilizado desde 1950 y se basa en un precio promedio ponderado con una ponderación base de un valor par de 50 Yenes por acción. Las acciones son revisadas cada año y los resultados de dicha revisión son publicados en septiembre, aplicando cualquier cambio en octubre a menos que se trate de una emisora que deje de ser elegible para pertenecer al índice en cuyo caso el cambio se realiza inmediatamente. Los cambios en el precio de las acciones debidos a eventos corporativos o debidos a inclusiones o sustituciones de emisoras se ajustan por un divisor.

HANG SENG

El índice HangSeng es uno de los primeros índices existentes en Hong Kong. Su publicación comenzó en 1969 y se ha convertido en el indicador más importante de desempeño del mercado de Hong Kong. Para poder reflejar los movimientos en los sectores principales del mercado, el índice está dividido en cuatro sub-índices donde se encuentran las emisiones de pertenecientes a los sectores de Finanzas, Servicios, Inmobiliaria y Comercio e Industria.

Las acciones que componen el índice se seleccionan mediante un proceso de análisis en donde sólo las compañías con listado primario en la Bolsa de Valores de Hong Kong pueden formar parte del criterio de selección. Para ser elegible, la compañía debe cumplir los siguientes criterios:

1. Debe formar parte de las empresas que constituyen el top 90% del capital de mercado de todas las acciones primarias listadas en la Bolsa de Hong Kong,
2. debe formar parte de las empresas que constituyen el top 90% de transacciones del total de las acciones primarias listadas en la Bolsa de Hong Kong y
3. haber sido listada por lo menos por 24 meses en la Bolsa de Hong Kong o de lo contrario encontrarse dentro de primeros 5 a primeros 25 en el ranking de capitalización de mercado al momento de la revisión.

Si cumple con los criterios anteriores entonces la compañía es elegible para la selección final en donde compite por uno de los 50 lugares en el índice en base al capital de mercado,

al puesto que tiene en cuanto a volumen de transacciones, la posición que mantiene dentro de su sector y el desempeño financiero de la empresa.

Este índice es revisado trimestralmente y su cálculo adopta una metodología de ponderación de valor de mercado ajustada con un valor base de 100.

DAX

El DeutscherAktienindex (DAX) es el índice más utilizado en Alemania como punto de referencia para medir el rendimiento de las acciones dentro de la Bolsa de Valores de Frankfurt. Este índice fue introducido en 1988 con fecha base diciembre de 1987 y valor base de 1000. Se compone de las 30 compañías más grandes y con mayor liquidez que se encuentran listadas en la Bolsa de Frankfurt, las cuales son seleccionadas por capitalización y contratación.

Se trata un índice basado en el desempeño de sus componentes, lo que significa que cualquier evento que afecte directamente el desempeño de una emisión, como el pago de dividendos, se incluye en el cálculo del valor del índice. Se calcula mediante una media aritmética ponderada por capitalización.

Para pertenecer a este índice, la compañía es evaluada en base a los siguientes criterios:

1. La compañía debe haber sido listada por lo menos 3 años antes en la Bolsa de Frankfurt antes de ser incluida en el índice,
2. el capital de mercado con el cuente,
3. el volumen de transacciones que tenga,
4. la disponibilidad de precios anticipados de apertura y
5. el peso específico dentro de la economía alemana.

CAC 40

Este índice toma su nombre del sistema de automatización que utilizó la Bolsa de París en sus inicios (*CotationAssistée en Continu*). El índice CAC 40 está constituido por 40 de las 100 compañías más grandes y con mayor movimiento en Euronext de París donde el país de origen de las compañías seleccionadas puede ser distinto al francés. Las emisoras que forman parte del índice son elegidas basándose en los siguientes criterios:

1. Capital de mercado,
2. el volumen de transacciones en Euronext París y

3. el peso específico que tenga la compañía en Francia.

El valor del índice se calcula en base al valor de mercado ponderado de las emisiones que lo conforman. Su cálculo se realiza con base 1000 al 31 de diciembre de 1987. Cada trimestre se hace una revisión sobre los componentes del índice para ajustarse a cambios provocados por eventos corporativos. La revisión se lleva a cabo por parte del *Conseil Scientifique*, el cual es un Consejo encargado de asegurar que los componentes del índice cumplen con los criterios de selección y que incluyen los ajustes necesarios tras un evento corporativo.

FTSE 100

Este es un índice Inglés que representa el desempeño de las 100 compañías británicas más grandes y con mayor volumen de operación en el Reino Unido. El FTSE 100 inició el 3 de enero de 1984, representa aproximadamente un 85% del capital total del Reino Unido y un 7.8% del mercado de capitales mundial.¹⁰

Este índice es administrado de acuerdo a un grupo de reglas establecidas por un comité independiente, el cual lleva a cabo revisiones trimestrales para asegurar que el índice represente adecuadamente al mercado Inglés.

Para ser parte del índice, la emisora debe cumplir con los siguientes criterios de elegibilidad:

1. Únicamente emisiones 'premium' listadas en la Bolsa de Londres son elegibles,
2. la emisora debe ser una compañía pública,
3. las acciones deben ser suficientemente líquidas y
4. el precio de la acción es razonable y su forma de cálculo aceptada por el comité.

El FTSE 100 se calcula en base al valor de mercado ponderado de las emisiones que lo conforman. Su cálculo se realiza con base 1000 al 30 de diciembre de 1983.

A continuación se muestra una tabla con la descripción de los índices seleccionados:

¹⁰ Según información de *FTSE, TheIndexCompany*.

Índice	Descripción
NASDAQ 100	Índice de las 100 emisiones no-financieras (tanto nacionales como extranjeras) más grandes y con mayor actividad en NASDAQ.
S&P 500	Índice diseñado para medir el desempeño de la economía doméstica mediante los cambios en el valor de mercado agregado de 500 acciones representativas de las mayores industrias.
NIKKEI 225	Se trata del precio promedio ponderado de las 225 mayores compañías japonesas listadas en la primera sección de las bolsa de Tokyo.
DAX	Es un índice de la selección de 30 acciones “blue chip” listadas en la bolsa de Frankfurt.
CAC 40	Este índice se compone de 40 compañías listadas en la bolsa Paris.
HANG SENG	Índice compuesto por 50 de compañías pertenecientes a la bolsa de Hong Kong.
FTSE 100	Índice de las 100 compañías con mayor capitalización listadas en la bolsa de Londres.

Tabla 1. Índices seleccionados para aplicar la metodología de valuación mediante TF.

La selección de los índices se llevó a cabo de manera que se logran aplicar los modelos a tres mercados específicos (americano, europeo y asiático). Se tomaron dos índices por cada región de manera que se pudiera obtener un mayor número de observaciones para cada mercado. Los precios históricos de las opciones sobre los índices mencionados corresponden a precios observados durante 2010.

Para poder llevar a cabo la valuación también fue necesario obtener información sobre las tasas libres de riesgo que se aplicadas. La fuente de información de las tasas fue distinta dependiendo del mercado sobre el que se aplicó el modelo de valuación. En este caso se extrajo información correspondiente a bonos del tesoro de cada uno de los países de interés. En la Tabla 2 se muestran las correspondencias entre tasas e índices. La fuente de toda la información es Bloomberg®.

Una vez que se logró recolectar toda la información necesaria, se procedió a calcular los rendimientos logarítmicos para cada índice como sigue

$$\text{rend log} = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right). \quad (6.1)$$

A continuación se muestra una tabla con información general sobre los índices seleccionados y una matriz de correlaciones de sus rendimientos logarítmicos:

Índice	Tasa libre de riesgo
NASDAQ 100	US 3MonthTreasury Bill
S&P 500	US 3 MonthTreasury Bill
NIKKEI 225	Japan 3Month Treasury Discount Bill
DAX	German 3 MonthBubill
CAC 40	France 3 MonthTreasury Bill
HANG SENG	Hong Kong 3 Month Exchange Fund Bill
FTSE 100	UK 1 Month Generic Treasury Bill

Tabla 2. Tasas libres de riesgo correspondientes a cada índice.

	NASDAQ 100	S&P 500	NIKKEI 225	HANG SENG	DAX	FTSE 100	CAC 40
NASDAQ 100	1	0.94	0.05	0.23	0.58	0.50	0.54
S&P 500	0.94	1	0.10	0.27	0.63	0.57	0.59
NIKKEI 225	0.05	0.10	1	0.60	0.32	0.36	0.34
HANG SENG	0.23	0.27	0.60	1	0.41	0.42	0.40
DAX	0.58	0.63	0.32	0.41	1	0.88	0.92
FTSE 100	0.50	0.57	0.36	0.42	0.88	1	0.94
CAC 40	0.54	0.59	0.34	0.40	0.92	0.94	1

Tabla 3. Matriz de correlaciones de los rendimientos logarítmicos

En la Tabla 3 se puede ver como todos los índices se encuentran positivamente correlacionados y que los índices correspondientes a una misma región tienen una correlación positiva más alta en comparación con índices pertenecientes a otras regiones. Para la valuación de las opciones se hizo la implementación de las ecuaciones (3.23), (5.36) y (5.37) en Matlab®. Se llevó a cabo la valuación de diversas opciones tomando un periodo restante para el vencimiento de entre 665 y 2 días y se hizo una agrupación entre opciones que se encontraban “fuera del dinero” (*Out-of-the-money*), “en el dinero” (*At-the-money*) y “dentro del dinero” (*In-the-money*).

6.1 Estimación de parámetros

Para la estimación de los parámetros se utilizó el método de optimación desarrollado por Nelder-Mead (1965), el cuál es un algoritmo simplex que intenta minimizar una función no-lineal de n variables $f(x)$ con $x \in \mathbb{R}^n$ mediante la comparación de sus propios valores sin hacer uso de ningún tipo de derivado. A este tipo de métodos se les conoce como métodos simplex de búsqueda directa.¹¹ En la Tabla 4 se muestran los parámetros estimados para cada índice:

	Parámetros VG		
	sigma	theta	nu
NASDAQ 100	0.274052	-0.003463	0.207648
S&P 500	0.278212	-0.001562	1.387086
NIKKEI 225	0.288274	-0.003928	0.283609
DAX	0.265619	-0.002047	1.007013
HANG SENG	0.313912	-0.002884	0.118396
FTSE 100	0.253687	-0.001485	0.911501
CAC 40	0.266909	-0.002046	0.340398

Tabla 4. Parámetros estimados

Se observa que en todos los casos la distribución de los rendimientos logarítmicos está ligeramente sesgada a la izquierda (sesgo negativo) y se presenta cierto grado de curtosis. Con los parámetros estimados se calculó el precio de la opción mediante el modelo Varianza-Gamma con transformada de Fourier (VGTF) para luego comparar la valuación contra la forma cerrada de Black-Scholes. Se utilizó la misma volatilidad en ambos cálculos para hacer comparables los resultados. Dicha volatilidad es la que se presenta en la Tabla 4 y fue anualizada en base a 260 días. Se hizo la inclusión de precios observados en el mercado (Bloomberg®) simplemente como información adicional ya que no es posible hacer una comparación real de los precios de mercado contra los precios calculados en este trabajo debido a que los precios calculados suponen que no hay tasa de dividendos mientras que los precios observados en el mercado incluyen este factor en su precio. En el Anexo 1 se listan las opciones evaluadas. A continuación se muestran los resultados obtenidos para el índice NIKKEI.

¹¹ El método simplex de minimización de Nelder-Mead(1965) se explica en el capítulo 2 de este trabajo.

NIKKEI 225	Fecha Valuación	Valor de Índice	Strike	Moneyness	Fecha Vencimiento	Volatilidad	Black-Scholes (forma cerrada)	Varianza- Gamma TF	Precio Mercado (Bloomberg)
OTM									
NKY 11 C9750 Index	24-ago-10	8,995.14	9,750	1.0839	12-nov-10	0.288274	217.40	200.90	108.52
NKY 6/12 C10000 Index	24-ago-10	8,995.14	10,000	1.1117	08-jun-12	0.288274	1,020.20	1,006.00	847.84
ATM									
NKY 11 C9250 Index	13-ago-10	9,253.46	9,250	0.9996	12-nov-10	0.288274	537.50	473.00	429.42
NKY 12/11 C9000 Index	24-ago-10	8,995.14	9,000	1.0005	09-dic-11	0.288274	1,182.60	1,157.00	1,015.53
ITM									
NKY 6/12 C8000 Index	13-ago-10	9,253.46	8,000	0.8645	08-jun-12	0.288274	2,066.30	2,045.00	2,040.55
NKY 6 C8000 Index	24-ago-10	8,995.14	8,000	0.8894	10-jun-11	0.288274	1,464.40	1,435.00	1,492.61

Tabla 5. Resultados obtenidos para el índice NIKKEI.

7. Análisis de Resultados

En general se observó que ambos métodos de valuación entregan precios más altos que los precios observados en el mercado. Esto era de suponerse y se debe que los precios calculados asumen que no hay tasas de dividendos. El mercado incorpora dicho factor en su precio, razón por la cual es entendible que los precios calculados se encuentren por arriba del mercado. Aunque no podemos hacer una comparación formal contra los precios del mercado por motivos como el mencionado anteriormente, es interesante observar que el precio ATM calculado con el modelo Varianza-Gamma está por debajo del precio calculado con la forma cerrada de Black-Scholes y por ende se acerca más al precio observado en el mercado. Esto nos podría indicar como el mercado está incorporando de alguna manera la información histórica en su precio incluyendo efectos de sesgo y curtosis implícitos en dicha información, algo que el modelo VG está reflejando en su valuación y que Black-Scholesno está haciendo. Lo anterior también se observa tanto para las opciones ITM como en las opciones OTM. En el caso del índice HangSeng se observó una volatilidad alta al estimar sus parámetros y esto al parecer no correspondía con la percepción del mercado, por lo que se tomó una muestra más pequeña que en los demás índices para reducir la volatilidad estimada. Los resultados para dicho índice no fueron los esperados. Esto nos puede indicar que el método de estimación posiblemente no es el más indicado.

Se calculó la media de los errores relativos absolutos (MERA) de la siguiente manera:

$$MERA = media \left\{ \left| \frac{P_i^M - P_i^T}{P_i^M} \right| \right\}_{i=1}^n,$$

donde P_i^M indica el precio de mercado y P_i^T indica el precio teórico del modelo de valuación. En la Tabla 6 se presenta el MERA para opciones OTM, ATM e ITM para los índices en los cuales se calculó el precio con las volatilidades de la Tabla 4.

MEDIA DE LOS ERRORES RELATIVOS ABSOLUTOS		
	BS	VGTF
NASDAQ 100	3.98%	2.27%
S&P 500	22.39%	7.74%
NIKKEI 225	27.57%	21.99%
HANG SENG	96.22%	41.20%
DAX	17.41%	7.19%
FTSE 100	58.55%	41.53%
CAC 40	47.25%	45.19%

Tabla 6. Media de los errores relativos absolutos.

Aunque no se puede hacer una comparación real de los precios calculados contra los precios observados en el mercado, en la Tabla 6 se observa como los precios calculados mediante el método de transformada de Fourier (VG) se acercan más al valor observado en el mercado. El hecho de poder contar con los parámetros *Theta* y *Nu* para ajustar el sesgo y la curtosis nos da la posibilidad de incluir información adicional a la valuación para reflejar los movimientos de mercado, por lo que este último es el que nos debiera proporcionar valores más cercanos a los precios de mercado.

8. Conclusiones

Mediante este trabajo de investigación se logró implementar la metodología de valuación de opciones mediante la aplicación de los conceptos de procesos de Lévy y transformada de Fourier. A partir del trabajo de Madan y Seneta (1990), Madan y Milne (1991) y Madan, Carr y Chang (1998), se obtuvo una forma general para evaluar el precio de una opción europea partiendo del hecho de que para toda densidad de probabilidad existe una función característica asociada que es única. Mediante la implementación de la teoría propuesta, se logró aplicar esta metodología al modelo Varianza-Gamma.

Los resultados obtenidos fueron alentadores y sugieren que es posible evaluar opciones mediante modelos que parten de la función característica de la densidad de probabilidad de

la dinámica del subyacente y que esta teoría nos puede ayudar a crear modelos de valuación más sencillos en casos donde la función de densidad de probabilidad sea demasiado compleja como para llegar a una forma cerrada de valuación. Un ejemplo claro es el modelo Varianza-Gamma, el cual requiere de un desarrollo matemático extenso para llegar a una “forma de valuación” un tanto complicada y cuya aplicación no es del todo sencilla. En cambio, partiendo de la función característica, se obtuvo una forma de valuación sencilla y práctica. A partir de las pruebas realizadas, se comprobó que el modelo VG resulta de mayor utilidad para valorar opciones de tipo europeo sobre índices, entregando mejores resultados que modelos más sencillos como Black-Scholes. Esto no es sorpresa, ya que este modelo nos ofrece el control sobre parámetros de sesgo y curtosis, con los cuales se puede modelar de mejor manera el comportamiento del mercado.

Es necesaria una mayor investigación en este campo, sobre todo en cuanto a la aplicación de esta metodología a modelos que se consideren matemáticamente complejos. Se propone hacer el mismo ejercicio estimando los parámetros con información de mercado y aplicarlo en la valuación de opciones sobre otros subyacentes agregando opciones put. También se propone utilizar una metodología diferente para la estimación de parámetros y llevar a cabo un análisis de las griegas. Si se logra el desarrollo de algoritmos que nos permitan calibrar de manera óptima los parámetros de cada modelo y se logra desarrollar un software que no requiera de una capacidad de cómputo muy elevada podríamos tener en nuestras manos poderosas herramientas de valuación de instrumentos derivados.

ANEXO 1.

Listas de opciones evaluadas por índice.

NASDAQ 100	Fecha Valuación	Valor de Índice	Strike	Moneyness	Fecha Vencimiento	Volatilidad	Black-Scholes (forma cerrada)	Varianza-Gamma TF	Precio Mercado (Bloomberg)
OTM									
NDX US 12/17/11 C1875 Index	08-jul-10	1,798.31	1,875	1.0426	17-dic-11	0.274052	207.20	204.30	203.55
NDX US 06/18/11 C1875 Index	21-jul-10	1,817.30	1,875	1.0318	18-jun-11	0.274052	166.91	162.60	159.05
ATM									
NDX US 06/18/11 C1875 Index	23-jul-10	1,875.38	1,875	0.9998	18-jun-11	0.274052	197.21	192.30	187.95
NDX US 06/18/11 C1850 Index	18-ago-10	1,850.80	1,850	0.9996	18-jun-11	0.274052	186.89	181.70	173.45
ITM									
NDX US 06/18/11 C1775 Index	04-ago-10	1,909.20	1,775	0.9297	18-jun-11	0.274052	264.72	259.80	255.45
NDX US 12/17/11 C1775 Index	19-ago-10	1,823.00	1,775	0.9737	17-dic-11	0.274052	253.90	250.30	256.05

S&P 500	Fecha Valuación	Valor de Índice	Strike	Moneyness	Fecha Vencimiento	Volatilidad	Black-Scholes (forma cerrada)	Varianza-Gamma TF	Precio Mercado (Bloomberg)
OTM									
SPX US 03/19/11 C1125 Index	02-jul-10	1,022.58	1,125	1.1002	19-mar-11	0.278212	58.37	52.10	42.65
SPX US 03/19/11 C1125 Index	19-ago-10	1,075.63	1,125	1.0459	19-mar-11	0.278212	71.29	58.34	53.40
ATM									
SPX US 03/19/11 C1075 Index	28-jun-10	1,074.57	1,075	1.0004	19-mar-11	0.278212	102.35	85.60	88.15
SPX US 03/19/11 C1125 Index	05-ago-10	1,125.81	1,125	0.9993	19-mar-11	0.278212	99.60	81.00	76.35
ITM									
SPX US 11/20/10 C1050 Index	26-jul-10	1,115.01	1,050	0.9417	20-nov-10	0.278212	106.12	91.50	94.75
SPX US 08/21/10 C1065 Index	05-ago-10	1,125.81	1,065	0.9460	21-ago-10	0.278212	66.77	65.00	63.35

NIKKEI 225	Fecha Valuación	Valor de Índice	Strike	Moneyness	Fecha Vencimiento	Volatilidad	Black-Scholes (forma cerrada)	Varianza-Gamma TF	Precio Mercado (Bloomberg)
OTM									
NKY 11 C9750 Index	24-ago-10	8,995.14	9,750	1.0839	12-nov-10	0.288274	217.40	200.90	108.52
NKY 6/12 C10000 Index	24-ago-10	8,995.14	10,000	1.1117	08-jun-12	0.288274	1,020.20	1,006.00	847.84
ATM									
NKY 11 C9250 Index	13-ago-10	9,253.46	9,250	0.9996	12-nov-10	0.288274	537.50	473.00	429.42
NKY 12/11 C9000 Index	24-ago-10	8,995.14	9,000	1.0005	09-dic-11	0.288274	1,182.60	1,157.00	1,015.53
ITM									
NKY 6/12 C8000 Index	13-ago-10	9,253.46	8,000	0.8645	08-jun-12	0.288274	2,066.30	2,045.00	2,040.55
NKY 6 C8000 Index	24-ago-10	8,995.14	8,000	0.8894	10-jun-11	0.288274	1,464.40	1,435.00	1,492.61

HANG SENG	Fecha Valuación	Valor de Índice	Strike	Moneyness	Fecha Vencimiento	Volatilidad	Black-Scholes (forma cerrada)	Varianza-Gamma TF	Precio Mercado (Bloomberg)
OTM									
HSI 3 C22000 Index	31-ago-10	20,536.49	22,000	1.0713	30-mar-11	0.313912	1,392.80	1,241.00	659.00
HSI 12/12 C24000 Index	31-ago-10	20,536.49	24,000	1.1687	28-dic-12	0.313912	2,756.30	2,731.00	1,060.00
ATM									
HSI 9 C21800 Index	09-ago-10	21,801.59	21,800	0.9999	29-sep-10	0.313912	1,030.00	661.50	528.00
HSI 10 C21400 Index	07-sep-10	21,401.79	21,400	0.9999	28-oct-10	0.313912	1,011.30	649.00	530.00
ITM									
HSI 9 C21200 Index	06-ago-10	21,678.80	21,200	0.9779	29-sep-10	0.313912	1,298.90	965.70	790.00
HSI 9 C21200 Index	09-ago-10	21,801.59	21,200	0.9724	29-sep-10	0.313912	1,344.80	1,033.00	864.00

DAX	Fecha Valuación	Valor de Índice	Strike	Moneyess	Fecha Vencimiento	Volatilidad	Black-Scholes (forma cerrada)	Varianza- Gamma TF	Precio Mercado (Bloomberg)
OTM									
DAX 10 C6350 Index	19-ago-10	6,075.13	6,350	1.0452	15-oct-10	0.265619	147.56	104.20	101.30
DAX 12/11 C6500 Index	19-ago-10	6,075.13	6,500	1.0699	16-dic-11	0.265619	581.20	542.50	510.50
ATM									
DAX 9 C6150 Index	30-jul-10	6,147.97	6,150	1.0003	17-sep-10	0.265619	240.16	139.60	195.30
DAX 6 C6200 Index	17-ago-10	6,206.40	6,200	0.9990	17-jun-11	0.265619	609.80	539.50	558.80
ITM									
DAX 6 C6150 Index	05-ago-10	6,333.58	6,150	0.9710	17-jun-11	0.265619	720.30	646.70	648.40
DAX 12/12 C6200 Index	05-ago-10	6,333.58	6,200	0.9789	21-dic-12	0.265619	1,107.80	1,069.00	1,088.50

FTSE 100	Fecha Valuación	Valor de Índice	Strike	Moneyess	Fecha Vencimiento	Volatilidad	Black-Scholes (forma cerrada)	Varianza- Gamma TF	Precio Mercado (Bloomberg)
OTM									
UKX 6 C5800 Index	25-ago-10	5,109.40	5,800	1.1352	17-jun-11	0.263687	250.41	237.80	115.00
UKX 12 C5600 Index	01-sep-10	5,366.41	5,600	1.0435	17-dic-10	0.263687	213.86	165.80	123.50
ATM									
UKX 9/11 C5400 Index	07-sep-10	5,407.82	5,400	0.9986	16-sep-11	0.263687	593.52	542.40	434.00
UKX 9/11 C5500 Index	10-sep-10	5,501.64	5,500	0.9997	16-sep-11	0.263687	598.55	546.50	426.50
ITM									
UKX 6 C5400 Index	10-sep-10	5,501.64	5,400	0.9815	17-jun-11	0.263687	566.67	505.20	417.00
UKX 12 C5500 Index	15-abr-10	5,825.01	5,500	0.9442	17-dic-10	0.263687	682.45	619.80	463.00

CAC 40	Fecha Valuación	Valor de Índice	Strike	Moneyess	Fecha Vencimiento	Volatilidad	Black-Scholes (forma cerrada)	Varianza- Gamma TF	Precio Mercado (Bloomberg)
OTM									
CAC 3/12 C4200 Index	16-ago-10	3,597.60	4,200	1.1674	16-mar-12	0.266909	282.53	279.00	159.77
CAC 9/11 C4200 Index	25-ago-10	3,450.19	4,200	1.2173	16-sep-11	0.266909	150.58	151.20	64.55
ATM									
CAC 12/11 C3600 Index	22-jul-10	3,600.57	3,600	0.9998	16-dic-11	0.266909	464.76	453.60	388.99
CAC 12/11 C3600 Index	16-ago-10	3,597.60	3,600	1.0007	16-dic-11	0.266909	450.92	439.40	361.86
ITM									
CAC 12/11 C3600 Index	02-ago-10	3,752.03	3,400	0.9062	16-dic-11	0.266909	655.87	644.50	570.47
CAC 9/11 C3400 Index	16-ago-10	3,597.60	3,400	0.9451	16-sep-11	0.266909	503.66	490.10	440.45

ANEXO 2.

Rutina de Matlab® para el cálculo de los precios de las opciones para el modelo Varianza-Gamma utilizando transformada de Fourier y procesos de Lévy.

```
function[P_VarianzaGamma]=VALUACION_VG()

% S = precio Spot
% rf = tasa libre de riesgo
% sigma = volatilidad instantánea del retorno del activo
% t = maturity
% npower = exponente para determinar la potencia sobre 2 (12 ó 13)

% v = tasa de cambio del proceso gamma(define grado de exceso de kurtosis
o colas pesadas)

% theta = tendencia agregada al movimiento Browniano que determina si
existe sesgo o no(su signo determina el signo del sesgo)

% intmuest = intervalo de muestreo
% alpha = parámetro adicional(valor igual a 1 ó 1.5)
% POSITIVO(NEGATIVO)= CALL(PUT)

clc;

npower = 12;
alpha = 1.5;

S = 1125.81;
rf = 0.001550;
sigma = 0.017254;
strike = 1065;
t = 0.6278;
%Parametros VG estimados mediante la metodología de Nelder-Mead (1965)
v = 1.387086;
theta = -0.001562;

%encuentra numero de puntos
N = 2^npower;

%INTERVALO DE MUESTREO
intmuest = 0.005;

%PARAMETROS PARA EL GRID DE LA FUNCION CARACTERISTICA (0,N*eta)

eta = 2*pi/(N*intmuest);

%se crea el grid de la funcioncaracteristica

g = (0:N-1) * eta;

%se crea el grid de los strikes

k0 = -N*intmuest/2;
k = k0 + (0:N-1) * intmuest;
```



```

%calculo de la funcioncaracteristica

fc = ft_option(rf,sigma,t,alpha,g,v,theta);
w = [0.5 ones(1,N-2) 0.5]; %esta es la regla trapezoidal
h2 = exp(-li*k0*g) .* fc .* w * eta;

%Fourier Inversion

g = fft(h2);
g2 = real(exp(-alpha .*k)/pi .* g);
K = S * exp(k); K = K';
Y = exp(-rf * t) * S * g2; Y = Y';
P_VarianzaGamma = Y;

%Generación de Gráfica
plot(K,Y,'m','linewidth',3);
gridon;
title('Call VARIANZA-GAMMA con Transformada de Fourier')
xlabel('Strike')
ylabel('Precio')
axis([S*0.85 S*1.25 0 300])

%Transformada de fourier del precio modificado de la opcion

function y = ft_option(rf,sigma,t,a,g,v,theta)
y1 = ft_pdf(rf,sigma,t,g-li*(a+1),v,theta);
y2 = a^2 + a - g.^2 + li*(2*a+1)*g;
y = y1./ y2;

%funcioncaracteristica de densidad gaussiana

function res = ft_pdf(rf,sigma,t,g,v,theta)

res = exp(li*g.*((rf+(1/v)*log(1-theta*v-
(0.5*v*sigma*sigma)))*t)).*(1./(1-
li*theta*g.*v+(0.5*v*sigma*sigma*g.^2))).^(t/v);

```

Referencias:

Nelder, J.A., & Mead, R. A simplex method for function minimization. *The Computer Journal*, 7, 308-313.

Lam, K., Chang, E., & Lee, M.C. (2001). An Empirical Test of the Variance Gamma Option Pricing Model. *Pacific-Basin Finance Journal*, 10, no. 3, 1-39.

Carr, P., Geman, H., Madan, D.B., & Yor, M. (2002). The Fine Structure of Asset Returns: An Empirical Investigation. *Journal of Business*, 75, no. 2, 305-332.

Tan, S.M. Chapter 9 The Discrete Fourier transform. *Linear Systems*. The University of Auckland, 1-8.

Lagarias, J., Reeds, J., Wright, M., & Wright, P. (1998). Convergence Properties of the Nelder (Mead Simplex Method in Low Dimensions). *SIAM Journal of Optimization*, 9, no. 1, 112-147.

Cooley, J. W., & Tukey, J. W. (1964). An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. *Mathematics of Computation*, 19, no. 90, 297-301.

Gilliam, D.S. Mathematics 5342 Discrete Fourier Transform. Texas Tech University, 1-16.

Black, F. and Scholes, M. (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81, no. 3, 637-654.

Carr, P., & Madan, D. B. (2000). Factor Models for Option Pricing, 2-18.

Borak, S., Detlefsen, k., & Härdle, W. (2005). FFT Based Option Pricing. SFB 649 Economic Risk, 1-18.

Brigham, E. O. (1988). *The Fast Fourier Transform and Its Applications*, Prentice Hall.

Applebaum, D. (2005). Lectures on Lévy Processes, Stochastic Calculus and Financial Applications, Ovronnaz September 2005, 1-30.

Matsuda, K. (2004). Introduction to Option Pricing with Fourier Transform: Option Pricing with Exponential Lévy Models. Department of Economics The Graduate Center, The City University of New York, 1-241.

León, A., & Serna, G. (2004). Modelos alternativos de valoración de opciones sobre acciones: una aplicación al mercado español. Cuadernos Económicos de ICE N.º 69, 33-49.

Venegas, F. (2001). Opciones, Cobertura y procesos de Difusión con Saltos: Una Aplicación a los Títulos de GCARSO. Oxford University, 203-226.

Han, Z. (2007). Option Pricing with The Fourier Transform Method, Based on The Stochastic Volatility Model. Computational Engineering Department of Computer Science Friedrich Alexander University of Erlangen-Nuremberg. Germany, 1-53.

Carr, P., Madan, D. B. (1998). "Option Valuation Using the Fast Fourier Transform," Journal of Computational Finance 2, 61-73.

Madan, D. B., Carr, P., and Chang, E. (1998). "The Variance Gamma Process and Option Pricing," European Finance Review 2, 79-105.

Carr, P., & Wu, L. (2004). Time-changed Lévy processes and option pricing. Journal of Financial Economics, 71, 113-141.

Calvo.(2000). Transformada de Fourier. Matemática 4, 1-13.

Fiorani, F. The Variance-Gamma Process for Option Pricing, 1-60.

Venegas, F. (2006). Riesgos financieros y económicos, Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre. Thomson Learning.

Merton, Robert C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous, *Journal of Financial Economics* 3, 125-144.

Madan, D.B., Milne, F. (1991). Option pricing with VG martingale components, *Mathematical Finance* 1, 39-55.

Madan, D.B., Seneta, E. (1990). The variance gamma (V.G.) model for share market returns, *Journal of Business* 63, 511-524.