

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS
SUPERIORES DE MONTERREY

CAMPUS CIUDAD DE MÉXICO



PROCESOS HURST Y MOVIMIENTO BROWNIANO
FRACCIONAL EN MERCADOS
FRACTALES

DOCTORADO EN CIENCIAS FINANCIERAS

TESIS PRESENTADA POR

GUILLERMO SIERRA JUÁREZ

ASESOR

DR. FRANCISCO VENEGAS MARTÍNEZ



**TECNOLÓGICO
DE MONTERREY.**

BIBLIOTECA
Campus Ciudad de México

ENERO 2007

Resumen

El supuesto de independencia en la definición del movimiento browniano que es el proceso estocástico que se utiliza en la deducción de la ecuación del Modelo Black-Scholes, la valuación de derivados, la curva de estructura de plazos es cuestionado en el presente trabajo. Los resultados de la aplicación de la metodología (R/S) de la teoría de fractales para la determinación del coeficiente Hurst, revelan un comportamiento de memoria larga en alguna de las variables de mercado representativas de México y Estados Unidos.

El movimiento browniano fraccional (MBF) es un proceso estocástico más general, que como caso particular contiene a los procesos independientes como al movimiento browniano. A partir de este proceso y con bases matemáticas más generales construidas desde un espacio de Hilbert se recuperan ideas y conceptos de las finanzas del mercado Black-Scholes como son las probabilidades condicionadas, las martingalas y el lema generalizado de Itô. Con base en estos nuevos procesos y herramientas se deduce una forma más general de valuación de derivados y la ecuación Black-Scholes, así como la ecuación general de bonos y la estructura de plazos del modelo de tasas de Vasicek, útiles en los casos en donde las series financieras muestran comportamientos de persistencia.

Esta generalización se extiende al método H-J-B para la determinación consumo óptimo en un proceso browniano fraccional, en donde además del activo subyacente, también se modela la volatilidad con un segundo proceso browniano fraccional independiente del primero. Al final se deduce una ecuación Black-Scholes generalizada para un derivado cuyo subyacente y su volatilidad son modelados por MBF.

Indice

Acta de examen
Portada
Dedicatoria
Agradecimientos

RESUMEN 1

INDICE 2

TABLAS Y GRAFICAS 5

INTRODUCCION 6

PARTE I

CAPITULO 1 10

Mercados Fractales contra Mercados Tradicionales

1.1 Fractales

1.1.1 Antecedentes

1.1.2 Fractales

1.2 Análisis de Mercados

1.2.1 Teoría Tradicional del mercado de capitales

1.2.2 Revisión de Mercados

1.2.3 Hipótesis de Mercados Fractales

1.3 Comportamiento de Variables Financieras de México y Estados Unidos

1.4 Estadística Fractal contra Browniano Fraccional

CAPITULO 2 22

Procesos de Hurst

2.1 Coeficiente o Exponente Hurst

2.1.1 Antecedentes del Proceso Hurst

2.1.2 Rango Reescalado (R/S)

2.1.3 Valores del Coeficiente Hurst

2.1.4 Ciclos Periódicos y No Periódicos

2.1.5 El Color del Ruido y la Dimensión fractal

- 2.2 Determinación del Coeficiente Hurst
- 2.2.1 Metodología
- 2.2.2 Coeficiente Hurst en el Mercado de México y Estados Unidos

CAPITULO 3 34

Antecedentes Matemáticos del Movimiento Browniano Fraccional

- 3.1 Movimiento Browniano y Movimiento Browniano Fraccional
- 3.1.1 Movimiento Browniano y Cálculo de Itô
- 3.1.2 Movimiento Browniano Fraccional
- 3.2 Antecedentes Matemáticos
- 3.2.1 Revisión del Espacio de Hilbert y Métrica
- 3.2.2 Principales Lemas y Teoremas
- 3.2.3 Producto Wick
- 3.2.4 Movimiento Geométrico Browniano Fraccional
- 3.2.5 Fórmula Fraccional de Itô
- 3.2.6 Derivadas Fraccionales
- 3.2.7 Teorema de Girsanov
- 3.2.8 Teorema de Expansión de Caos Wiener-Ito en términos de Int.It.
- 3.3 Expectativas Cuasicondicionales
- 3.3.1 Definiciones
- 3.3.2 Teorema Fraccional Clarck-Ocone
- 3.3.3 Principales Resultados

PARTE II

CAPITULO 4 47

Ecuación Black-Scholes Fraccional

- 4.1 Mercados de Movimiento Browniano y Browniano Fraccional
- 4.1.1 Ecuación Black-Scholes Tradicional
- 4.1.2 Precio de una Opción Call Europea en un Mercado Browniano Fraccional
- 4.1.3 Ecuación de Black-Scholes Fraccional
- 4.2 Aplicación a la Valuación de Opciones Call Europeas
- 4.2.1 Resultados del Mercado de México y de Estados Unidos

CAPITULO 5	58
Modelo de Tasa con Movimiento Browniano Fraccional	
5.1	Modelo de Tasas Vasicek con Movimiento Browniano Fraccional
5.1.1	Modelo de Tasas Vasicek con Movimiento Browniano
5.1.2	Modelo de Tasas Vasicek con Movimiento Browniano Fraccional
5.2	Aplicación del Modelo de Tasas Vasicek con MBF al caso de tasas en México
5.2.1	Determinación de los parámetros del Modelo de Tasas Vasicek con MBF
5.2.2	Resultados del Modelo de Tasas Vasicek con MBF
CAPITULO 6	65
Método Hamilton-Jacobi-Bellman (H-J-B) en Mercado Brownianos Fraccionales	
6.1	Método H-J-B con MBF
6.1.1	Planteamiento del Problema del Consumidor Estocástico con MBF
6.1.2	Solución al Problema del Consumidor Estocástico
6.2	Método H-J-B con MBF y Volatilidad Estocástica
6.2.1	Volatilidad Estocástica en los Mercados
6.2.2	Planteamiento del Prob. del Consumidor con Volatilidad Estocástica con MBF
6.2.3	Solución del Prob. del Consumidor con Volatilidad Estocástica con MBF
CONCLUSIONES	78
BIBLOGRAFIA	80
APENDICES(A,B,C)	82

Tablas y Gráficas

Tablas

- Tabla 1.1 Resumen estadístico de variables de mercado
- Tabla 2.1 Resultados de H para IPC, TDC, DJI, TDCUS
- Tabla 2.2 Resultados de H para periodos distintos
- Tabla 4.1 Parámetros para estimación de opciones call
- Tabla 5.1 Parámetros para estimación de la tasa Vasicek
- Tabla 6.1 Resultados de H para las volatilidades de las variables

Gráficas

- Gráfica 1.1 Serie IPC (1990-2006)
- Gráfica 1.2 Rendimiento diario del IPC (1990-2006)
- Gráfica 1.3 Serie TDC (Peso-Dólar) (1992-2006)
- Gráfica 1.4 Rendimiento diario del TDC(1992-2006)
- Gráfica 1.5 Serie DJI (1999-2006)
- Gráfica 1.6 Rendimiento diario del DJI(1992-2006)
- Gráfica 1.7 Serie TDCUS(Dólar-Euro) (2001-2006)
- Gráfica 1.8 Rendimiento diario del TDCUS(Dólar-Euro)(1992-2006)
- Gráfica 1.9 Relación Proceso de Levy, Procesos Autosimilares y Gaussianos
- Gráfica 2.0a) Grupos de la metodología (R/S)
- Gráfica 2.0b) Metodología (R/S) en el caso de hidrología
- Gráfica 2.1 Estadístico $\ln(R/S)$ del IPC y DJI vs $\ln(n)$
- Gráfica 2.2 Estadístico V_n del IPC y DJI vs $\ln(n)$
- Gráfica 2.3 Estadístico $\ln(R/S)$ del TDC y TDCUS vs $\ln(n)$
- Gráfica 2.4 Estadístico V_n del TDC y TDCUS vs $\ln(n)$
- Gráfica 4.1 Precios de opciones call del IPC para diferentes H
- Gráfica 4.2 Precios de opciones call del DJI para diferentes H
- Gráfica 4.3 Precios de opciones call del TDC para diferentes H
- Gráfica 4.4 Precios de opciones call del TDCUS para diferentes H
- Gráfica 5.1 Comparativo Estructura de Plazos Vasicek($H = 0.0005$)
- Gráfica 5.2 Comparativo Estructura de Plazos Vasicek($H = 0.005$)
- Gráfica 6.1 Volatilidad anual del IPC(2000-2006)
- Gráfica 6.2 Volatilidad anual del DJI(1999-2006)
- Gráfica 6.3 Volatilidad anual del TDC(1999-2006)
- Gráfica 6.4 Volatilidad anual del TDCUS(1999-2006)

Introducción

El movimiento browniano y el cálculo de Itô son las bases matemáticas sobre las que se han construido varios de los conceptos y resultados de las Finanzas y la Administración de Riesgos actuales. El modelo de Black-Scholes, la valuación de derivados, la estimación de curvas de tasas de interés y la medición de los diferentes tipos de riesgos fueron desarrollados con la ayuda de estos procesos matemáticos y con ciertos supuestos sobre las características de las variables financieras y los mercados.

Con el paso de tiempo se ha encontrado que algunos de los supuestos financieros o matemáticos no se ajustan a la realidad, por lo que se requiere cada vez de teorías más generales que incluyan como casos particulares a las ya existentes. Un ejemplo, es el supuesto sobre el comportamiento Gaussiano de los rendimientos de instrumentos financieros. Una distribución de tipo normal, debido a sus características, simplifica la valuación de derivados. Sin embargo, en un análisis de rendimientos de las series reales, sus distribuciones presentan sesgos, mayor curtosis en sus valores centrales o bien colas anchas, e incluso pueden tener distribuciones diferentes de la normal. Por lo tanto, cada vez se busca la utilización de funciones más generales como la de Lévy o con la teoría de valores extremos para realizar evaluaciones más precisas. De la misma manera, en forma más general, se siguen proponiendo la utilización de distintos procesos estocásticos o teorías, como la de fractales, para lograr una mejor explicación de los fenómenos financieros.

En la literatura sobre el tema de fractales además de los artículos seminales de Hurst[9] con su estudio de hidrología y su metodología (R/S) para la determinación del coeficiente del mismo nombre y de los importantes artículos de Mandelbrot[12] y [13], considerado padre de la geometría fractal, en el tema del movimiento browniano fraccional, los libros de Peters[21] y [22] son una referencia importante sobre las ideas, técnicas y conceptos de los mercados fractales. Su obra resume el estado del arte actual de las teorías de fractales y caos y su relación con los mercados financieros. De forma sencilla aplica estos conceptos matemáticos al análisis de los mercados principalmente de Estados Unidos. También describe el artículo el trabajo de McCulloch [14] y [15] sobre la estadística fractal y en particular la evaluación de opciones con funciones más generales como son las de Levy (también es recomendable consultar al autor original). Por otra parte, el trabajo de Palomas Molina [20] es primer antecedente sobre la aplicación del método Rango Reescalado para la determinación del coeficiente Hurst para el caso de México.

Los primeros intentos de recuperar algunas propiedades, como la de no arbitraje, cuando se trabaja con el movimiento browniano fraccional fueron hechos por de Dai and Hayde[3] y Lin[11]. Debido a que los esfuerzos en esta dirección no pudieron eliminar la presencia de arbitraje, una nueva integral y el producto Wick fueron analizadas por Desagupta [4][5] y Shryaveev[24]. Una vez justificada esta propiedad para procesos brownianos fraccionales con el nuevo formalismo, quien ha publicado la mayor cantidad de material sobre el movimiento browniano fraccional y su aplicación en las Finanzas han

sido Oksendal[9] y Hu[7], además de Duncan y Pasik-Duncan[6]. Estos trabajos se inician desde la métrica de un espacio de Hilbert y van recuperando varias de las técnicas matemáticas que el modelo Black-Scholes tradicional utiliza, además mediante el uso del producto Wick y las derivadas Malliavin es posible reconstruir una idea generalizada del teorema de Girsanov, de las esperanzas condicionales y de lema de Itô para su posterior aplicación en las finanzas. Los artículos de Necula[16][17] presentan otra perspectiva de los trabajos de Oksendal y Hu y de forma práctica presenta una deducción de la ecuación Black-Scholes a partir de movimientos browniano fraccionales. En otro trabajo, Rosek[23] también presenta una deducción alternativa del lema de Itô para el caso fraccional y por último los trabajos de Giovanni Vasconcelos[15] presentan un resumen importante del paso de los modelos brownianos clásicos a los brownianos fraccionales y sus implicaciones en los supuestos y resultados.

El objetivo principal del presente trabajo de tesis es la generalización de tres resultados fundamentales de finanzas: la valuación de opciones call europeas, la estructura de plazos con el modelo Vasicek y el planteamiento y solución óptima de consumo y cartera del problema del consumidor estocástico. Estas generalizaciones se construyen con la propuesta de un proceso estocástico conocido como movimiento browniano fraccional que a diferencia del movimiento browniano tradicional incorpora en los modelos las características de independencia (o no) propias de las series financieras estudiadas y con prácticamente los mismos supuestos financieros de los modelos desarrollados con el movimiento browniano tradicional.

Para la aplicación del movimiento browniano fraccional en los problemas mencionados es necesaria también la generalización de la herramienta matemática y la reproducción de los principales resultados del mundo de Black-Scholes, esta revisión es realizada en el capítulo 3.

Por otro lado, de la utilización y resultados obtenidos del movimiento browniano fraccional se hace necesaria la estimación del coeficiente Hurst (H) que mide el tipo de independencia o dependencia de una serie y la distingue como serie fractal y para el cálculo de este coeficiente se aplica la metodología Rango Reescalado (R/S) propuesta por el mismo Hurst. En el capítulo 2 se hace una descripción amplia del coeficiente y la metodología.

Un segundo objetivo del trabajo es la aplicación de la metodologías de Hurst a los resultados obtenidos de las ecuaciones Black-Scholes fraccional y general de los bonos con variables financieras representativas de México y Estados Unidos con el fin de comparar valuaciones de opciones y curvas de interés obtenidas a partir del movimiento browniano tradicional y fraccional.

La hipótesis que el trabajo propone es que el supuesto de independencia de las variables financieras del mundo Black-Scholes es un supuesto teórico y no es necesariamente se cumple en la realidad. La aplicación de la metodología (R/S) para el cálculo del exponente Hurst a las variables financieras (y sus volatilidades) de México y Estados Unidos muestran en la mayoría de los casos características de persistencia o memoria larga. Debido a que

varias series financieras no cumplen el supuesto de independencia se vuelve necesaria una teoría más general que incluya esta nueva propiedad e incorporarla en algunos resultados de las finanzas.

A continuación se presenta un breve resumen de los temas analizados en cada uno de los capítulos.

El capítulo 1 es una introducción a los fractales y su relación con los mercados financieros. Se revisa la teoría tradicional de mercados y se contrasta la hipótesis de mercados eficientes con la hipótesis de mercados fractales. Este planteamiento sirve como introducción al desarrollo del coeficiente Hurst del capítulo siguiente. En la parte final se muestra cualitativamente el comportamiento de los rendimientos de variables financieras del mercado en México y Estados Unidos, cuyo objetivo es mostrar que el comportamiento de las variables financieras reales en ocasiones no concuerda con los supuestos teóricos.

El capítulo 2 está dedicado a los orígenes, comportamiento y metodología de cálculo del coeficiente Hurst que entre otras funciones nos sirve para determinar las características de independencia de una serie y distinguir series de tiempo y series fractales. Se explica, y posteriormente se aplica la metodología (R/S) al caso de variables financieras reales consideradas como representativas de los mercados de México y Estados Unidos como son: el Tipo de Cambio peso-dólar (TDC), el Índice de Precios y Cotizaciones de la bolsa mexicana de valores (IPC), el Índice Dow Jones Industrial (DJI) y Tipo de Cambio Dólar-Euro (TDCUS) con el objetivo de determinar si estas series tienen propiedades de independencia, persistencia o antipersistencia. Entonces el siguiente paso es construir una ecuación Black-Scholes más general, en donde se refleje el comportamiento de independencia o no de las series. En el siguiente capítulo se colocan las bases para la construcción de esta ecuación.

En el capítulo 3 se establecen las bases de la herramienta matemática y las justificaciones para la construcción del movimiento browniano fraccional y se mencionan las características que cumple el nuevo proceso. A partir de un espacio más general como el de Hilbert, se construye el producto Wick, las derivadas Malliavian, las probabilidades cuasicondicionales, así como lemas, teoremas y resultados de mayor importancia. Este capítulo sirve de antecedente matemático al siguiente.

En el capítulo 4 se deduce la ecuación de Black-Scholes y el precio de una opción call europea, considerando un activo subyacente descrito por el proceso propuesto como movimiento browniano fraccional. Esta nueva valuación de opciones se aplica al caso de las variables IPC, DJI, TDC y TDCUS con sus características de persistencia y se compara con la valuación tradicional Black-Scholes que si considera el supuesto de independencia. La finalidad es comparar la valuación de opciones con efectos de persistencia con las valuaciones tradicionales.

El capítulo 5 es otra generalización importante que deduce la ecuación general de los bonos y la estructura de plazos para un modelo Vasicek considerando como término

estocástico un movimiento browniano fraccional. Se hace un comparativo entre las tasas resultantes considerando el proceso estocástico tradicional y el propuesto.

Por último en el capítulo 6 se busca generalizar el método H-J-B del consumidor estocástico considerando el movimiento browniano fraccional y las esperanzas condicionales o cuasicondicionales. Después de resolver el sistema, se determinan el consumo y las inversiones óptimas y se recupera la ecuación Black-Scholes fraccional. De la misma forma que los subyacentes de índices y tipo de cambio se modelan con un MBF, se aplica la misma metodología de Hurst del capítulo 2 a la volatilidad de las variables financieras (IPC, DJI, TDC y TDCUS) y se encuentra la justificación de proponer una volatilidad también como un MBF. El problema se resuelve aplicando también H-J-B y se llega a plantear un ecuación y una propuesta de solución para Black-Scholes con volatilidad estocástica.

Al final se presenta las conclusiones que se consideran más importantes de este trabajo.

De manera simplificada se puede pensar que el trabajo esta dividido en dos partes, la primera de ellas esta integrada por los primeros tres capítulos en donde se proporcionan los elementos y el marco de trabajo. En estos capítulos son analizados el comportamiento de los mercados, las metodologías de independencia y las bases y herramientas matemáticas necesarios para las aplicaciones de finanzas.

En la segunda parte, en los tres últimos capítulos se mencionan las principales aportaciones de la tesis. En el capítulo 4 la primera aportación es el comparativo entre las valuaciones de opciones europeas resultado de la aplicación de la ecuación Black-Scholes Fraccional con los resultados del coeficientes Hurst obtenidos del capítulo 2. En el Capítulo 5 la deducción de la ecuaciones general de los bonos, su estructura de plazos, su comparativo y su conclusión es una contribución del presente trabajo. Por último los resultados teóricos y las deducciones de las ecuaciones, incluyendo el caso de volatilidad estocástica y sus soluciones también son resultado de este trabajo.

Capítulo 1

Mercados Fractales contra Mercados Tradicionales

1.1 Fractales¹

1.1.1 Antecedentes

La cultura occidental, desde la época de los griegos, ha vivido obsesionada en encontrar y trabajar con formas simétricas y contornos suaves, de tal manera que desde la antigüedad se desarrolló una geometría basada en estas formas conocidas como puras. Platón afirmaba que el mundo, considerado como real, consistía de ese tipo de formas que eran creadas por una fuerza o una entidad llamada -el bien- que ocasionalmente podía ser visualizada a través de la mente. También suponía que el mundo en que vivimos es una copia imperfecta del mundo real y fue creada por una entidad diferente llamada Demiurge. Esta copia inferior resultaba ser áspera, asimétrica y sujeta a decadencia. Aunque la geometría griega fue formalizada posteriormente por Euclides, Platón reconoció la incapacidad de la misma para describir el mundo, para su forma de pensar, el problema no era la geometría sino nuestro propio mundo.

La geometría fractal es la geometría de Demiurge, a diferencia de la geometría Euclidiana, esta se basa en las formas ásperas y asimétricas. Los objetos no son variaciones de unas cuantas formas perfectas, sino más bien son de complejidad infinita y entre más cercanas y más cuidadosas sean las revisiones más detalles son revelados.

Si se considera el ejemplo clásico de un pino de navidad, los dibujos de los niños o bien los logos comerciales de un árbol navideño consisten de un triángulo simétrico que simula las hojas y ramas con una base rectangular angosta que sirve de base de tronco. En la vida real un árbol, y en particular un pino, es una red de ramas, sobre ramas que sucesivamente son cada vez más pequeñas y los troncos no son muy simétricos, ni de contornos suaves, además de considerar que cada pino es diferente. La geometría euclidiana no puede replicar un pino real, solo se puede crear una aproximación, un pino navideño es un claro ejemplo de que una forma fractal, esta compuesto por una estructura global pero localmente es aleatorio. En general, se sabe como es un pino con cierta precisión pero también se sabe que individualmente cada rama es diferente.

Puede pensarse a la geometría euclidiana como una simplificación del mundo de Demiurge. En contraste, la geometría fractal está caracterizada por la autosimilaridad y un incremento en complejidad bajo una magnificación. Una de sus intensiones como geometría del espacio y que también se extiende al concepto del tiempo es generar visiones más realistas con el apoyo de las computadoras.

¹ La secciones 1.1 y 1.2 están basados principalmente en los libros de Peters[21] y [22]

1.1.2 Fractales

En la actualidad no existe una definición precisa de lo que es un fractal, ni siquiera, Benoit Mandelbrot, el padre de la geometría fractal ha desarrollado una definición precisa y formal, aunque no es demasiado difícil de reconocer cuando se encuentra alguno.

En términos prácticos los fractales tienen ciertas propiedades que son ideales para propósitos de modelación y ciertas características que los hacen medibles. Entre la variedad de definiciones sobre los fractales podemos mencionar son las siguientes:

- a) Son objetos matemáticos que conforman la geometría del Caos
- b) Proviene del latín que significa roto debido a que se asocia con las discontinuidades de las funciones
- c) Son objetos matemáticos cuya dimensión es fraccionaria
- d) Un objeto matemático que posee esencialmente dos características: autosimilaridad y dimensión fractal

La primera y más importante propiedad de los fractales es la autosimilaridad, que significa que todas sus partes están relacionadas de alguna forma con el todo o bien cada una de las partes del objeto tienen las características del objeto completo. Esta propiedad hace a los fractales invariantes en la escala.

En resumen, la geometría fractal o geometría de la naturaleza como también se le conoce, es un conjunto de estructuras irregulares y complejas que puede ser descrita a través de algoritmos matemáticos y computacionales; que sustituyen a los puntos, rectas y superficies de la matemática tradicional y tienen la propiedad fundamental de autosimilaridad y de vivir en dimensiones fraccionarias

1.2 Análisis de Mercados

1.2.1 Teoría Tradicional de Mercado de Capitales

En el mundo de las finanzas, un grupo de analistas se inclinan a pensar que los mercados financieros tienen un comportamiento cercano al determinista, mientras que por otra parte hay un grupo que piensa que el comportamiento de ellos es completamente aleatorio. Se abre una tercera posibilidad con los mercados fractales, al considerar que ambas posiciones pueden ser correctas.

Un tipo de análisis conocido como Rango Reescalado (R/S)² es un método utilizado para distinguir series fractales de otro tipo de series de tiempo y revelando su estructura de autosimilaridad.

² El capítulo 2 revisa ampliamente esta metodología

Es común modelar los procesos financieros con variables independientes de tipo estocástico con una hipótesis de comportamiento de movimiento browniano, en donde cada resultado es independiente del anterior.

El movimiento browniano tiene características deseables de tipo matemático y estadísticamente supone comportamientos normales de sus distribuciones de probabilidades pueden ser calculadas con precisión. El desarrollo de la teoría tradicional de mercados de capitales se ha basado durante largo tiempo en conceptos de juegos justos, martingalas y movimientos brownianos. La hipótesis de mercados eficientes (HME) pretende explicar la estructura estadística de los mercados.

La teoría presupone que los mercados son -eficientes-, es decir, que los precios reflejan toda la información actualizada que puede influir en los eventos futuros, además considera que los inversionistas reaccionan de forma inmediata con la llegada de nueva información. También la teoría supone que los rendimientos del mercado de cualquier activo se distribuyen normalmente y que todos ellos tienen los mismos horizontes de inversión. Sin embargo, existe evidencia empírica de que los rendimientos en los mercados en general no se comportan de acuerdo a esta distribución. En la sección 1.3 se pueden observar estos hechos.

La Hipótesis de Mercado Fractal (HMF) proporciona una estructura económica y matemática al análisis de los mercados fractales. A través de la hipótesis de mercados fractales es posible entender la existencia de la estructura estadística de autosimilaridad y también la forma de como el riesgo es distribuido entre los inversionistas.

1.2.2 Revisión de Mercados

La HME pretende explicar la estructura estadística de los mercados, Bachelier (1900) fue el primero en proponer que los mercados siguen una caminata aleatoria y que puede ser modelada por el cálculo de probabilidad estándar. El propuso una base empírica a su trabajo de investigación.

El requisito más importante de la HME es que las observaciones necesariamente tienen que ser independientes, o al menos de memoria corta. Esto solamente podría ocurrir si los precios se movieran de acuerdo a una caminata aleatoria, un movimiento browniano, o si la mejor estimación del precio futuro es el precio presente, es decir se comporta de acuerdo a una martingala o un juego justo. El modelo de caminata aleatoria afirma que los cambios en los precios no pueden ser inferidos de cambios de precios pasados, además de que el modelo no considera la información exógena fundamental o económica. Los precios actuales reflejan toda la información disponible y todos los inversionistas tienen igual acceso a ella, por lo tanto los inversionistas en forma agregada no pueden ganarle sistemáticamente al mercado debido a la eficiencia del mismo.

Para justificar la HME con una metodología científica tradicional a partir de información empírica y evidencia estadística el razonamiento hubiera sido el siguiente:

- a) Se observa un comportamiento o estructura en un sistema o proceso
- b) Se desarrolla una teoría o modelo para ajustar los hechos conocidos
- c) Se revisa y modifica la teoría vigente para explicar nuevos hechos conocidos

En el caso de HME la teoría fue desarrollada para justificar el uso de una herramienta estadística que requiere de independencia estadística o memoria de corto plazo. De acuerdo con HME los cambios en los precios deberían estar bien representados por una distribución normal. Pero en la realidad se encuentran distribuciones de colas pesadas que frecuentemente son evidencia de un sistema de memoria larga generada por un sistema estocástico no lineal. Si bien la HME se desarrolla en un ambiente matemático más fácil, es necesario, trabajar una hipótesis de mercado que ajuste los hechos observados y tome en cuenta porque los mercados no se comportan de esa forma.

Otro concepto de gran importancia es la liquidez que es diferente de volumen comerciado. Las crisis más fuertes han ocurrido cuando ha existido una baja liquidez con un alto volumen comerciado. Con esta idea podría pensar en la liquidez como: volumen comerciado no balanceado.

En el sistema de capitales de oferta y demanda se requiere de liquidez del mercado para asegurar:

- a) El precio obtenido por el inversionista sea lo más cercano a lo que el mercado considera justo
- b) Inversionistas con diferentes horizontes de inversión puedan comerciar eficientemente con otro
- c) No haya pánico o estampidas cuando la oferta y la demanda no estén balanceadas

En los mercados reales, los inversionistas requieren de un mercado líquido y la HME prácticamente no considera nada acerca de la liquidez, se piensa que los precios siempre son justos independientemente de la liquidez o pensando que siempre habrá la posibilidad de tener liquidez.

Por otra parte existe una diferencia entre un mercado estable y un mercado eficiente, si bien, un mercado estable es un mercado líquido y si un mercado es líquido entonces puede considerarse que los precios están cercanos a su valor justo. Cuando hay ausencia de liquidez, los inversionistas participantes estarán deseosos de tomar cualquier precio sea justo o no.

Si toda la información tiene el mismo impacto sobre todos los inversionistas, no debería haber falta de liquidez. Sin embargo, los inversionistas no son homogéneos, algunos deben comerciar para generar utilidades todos los días, otros deben comerciar para utilizar pasivos que están altamente apalancados. Todos los inversionistas que comercian en el mercado simultáneamente tienen diferentes horizontes de tiempo. Entonces la fuente de liquidez es generada debido a que los inversionistas poseen diferentes horizontes de inversión, diferente conjunto de información y consecuentemente diferente concepto de precio justo.

En forma de resumen, de los hechos empíricos observados de los mercados, una nueva hipótesis tendría al menos que tratar de explicar porqué las distribuciones de colas pesadas existen cuando hay diferentes horizontes de inversión y porqué en la estructura de plazos de las volatilidad la desviación estándar de los rendimientos se incrementa mas rápido que la raíz cuadrada del tiempo.

Cuando los mercados son considerados estables, HME trabaja relativamente bien. Sin embargo, durante momentos de pánico o estampidas, los modelos dejan de funcionar como las singularidades en física ya que HME son modelos de equilibrio.

1.2.3 Hipótesis de Mercados Fractales

La Hipótesis de Mercados Fractales HMF enfatiza la importancia de la liquidez y de los diferentes horizontes de inversión en el comportamiento de los inversionistas. Para que la hipótesis sea tan general como sea posible no se le exigirá ningún requerimiento de tipo estadístico sobre los procesos.

La información por si misma no tiene un impacto uniforme sobre los precios, esta será asimilada en forma diferente por los diferentes horizontes de inversión.

En resumen la HMF propone los siguientes puntos ³:

- a) El mercado es estable cuando está constituido de un gran número de horizontes de inversiones, lo cual asegura la liquidez del mercado
- b) El conjunto de información está más relacionado a la sensibilidad del mercado y a factores técnicos del corto que del largo plazo. Conforme el horizonte de inversión se incrementa, la información de los fundamentales de largo plazo domina. Entonces los cambios en los precios pueden reflejar información importante solo para ese horizonte de inversión.
- c) Si un evento ocurre que hace cuestionable la validez de la información fundamental, los inversionistas de largo plazo dejarán de participar en el mercado o comenzarán a comerciar basados en el conjunto de información de corto plazo. Cuando todos los horizontes de inversión del mercado se reducen a un mismo nivel, el mercado se vuelve inestable.
- d) Los precios reflejan una combinación de comercio técnico de corto plazo y valuación fundamental de largo plazo. Los cambios en los precios de corto plazo son probablemente más volátiles o ruidosos que los de largo. Las tendencias corto plazo son probablemente resultados del comportamiento colectivo. No hay razón para creer que la longitud de las tendencias de corto plazo está relacionada con las tendencias económicas de largo plazo.
- e) Si un título no tiene un vínculo al ciclo económico, entonces no habrá tendencia de largo plazo. Por tanto, comercio, liquidez e información dominaran en el corto plazo.

³ Esta propuesta fué hecha por Peters, para mayor información consultar [21] y [22]

1.3 Comportamiento de Variables Financieras de México y Estados Unidos

Esta sección muestra de forma gráfica y mediante la estimación de ciertos estadísticos y la prueba de Jarque-Bera que la Hipótesis de Normalidad sobre varias variables del mercado en general no puede ser aceptada con facilidad. La prueba Jarque-Bera es un test de distribución de normalidad, dicha prueba mide la diferencia del sesgo y la curtosis con otra prueba que se presupone normal. La prueba se distribuye como Ji-cuadrada con dos grados de libertad y su hipótesis nula es que se trate de una distribución normal. Una probabilidad pequeña conduce al rechazo de la hipótesis

En el caso de México se revisan dos de sus variables financieras de mercado más importantes y representativas: el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) y el tipo de cambio peso-dólar interbancario 48 horas al cierre de compra (TDC). Para el caso de el mercado de Estados Unidos también se analizan dos variables importantes, el índice Dow Jones Industrial (DJI) y el tipo de cambio dólar-euro (TDCUS). Se debe mencionar que para las cuatro variables se toma el caso de los rendimientos diarios.

En la siguiente Tabla 1.1 se resumen los estadísticos de las cuatro variables, así como el resultado de la prueba Jarque- Bera.

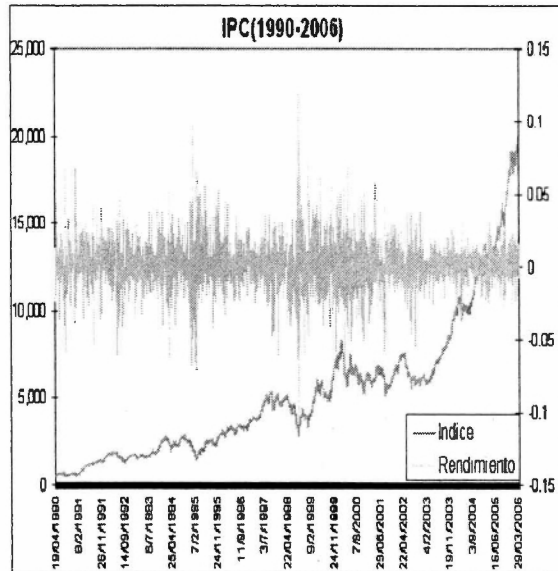
Tabla 1.1

Serie	Med.	D.E.	Sesgo	Curtosis	J - Bera	Prob.
IPC	9×10^{-4}	0.016	-0.013	8.53	5,119	0.00
TDC	4×10^{-4}	0.009	1.350	117.02	1.9×10^6	0.00
DJI	1×10^{-4}	0.011	-0.044	6.39	863.00	0.00
TDCUS	-2×10^{-4}	0.005	0.061	4.95	286	0.00

La grafica 1.1 muestra la historia diaria y el rendimiento del IPC de abril de 1990 a abril de 2006. Si bien el índice ha crecido de manera importante, sus rendimientos diarios se mueven de manera alternada entre valores positivos y negativos.

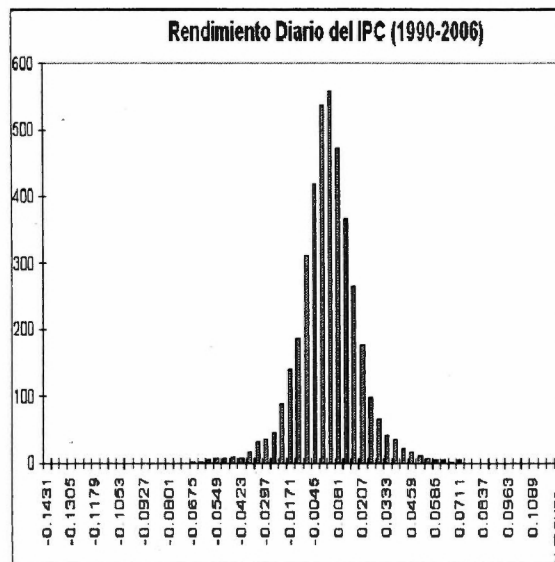
En este caso de acuerdo con el resultado de la prueba Jarque Bera sobre los rendimientos diarios de la Tabla 1.1 se rechaza la hipótesis nula, por lo tanto no podemos aceptar la distribución como una normal.

A continuación se presenta la Gráfica 1.1



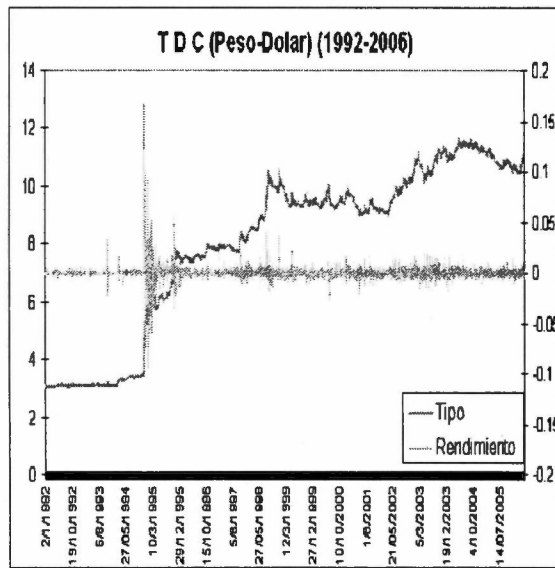
Gráfica 1.1

En la gráfica 1.2 se aprecia el histograma de los rendimientos diarios del IPC, aunque tiene forma de campana, la parte central está muy picuda y se les asigna una probabilidad de ocurrencia a rendimientos extremos positivos y negativos (en este caso a -0.1431 y mayores a 0.1089). De la Tabla 1.1 la media de los rendimientos del IPC en 16 años es prácticamente cero, con un pequeño sesgo negativo y una distribución leptocúrtica (es decir muy picuda en el centro y con colas anchas) como se puede observar a simple vista.



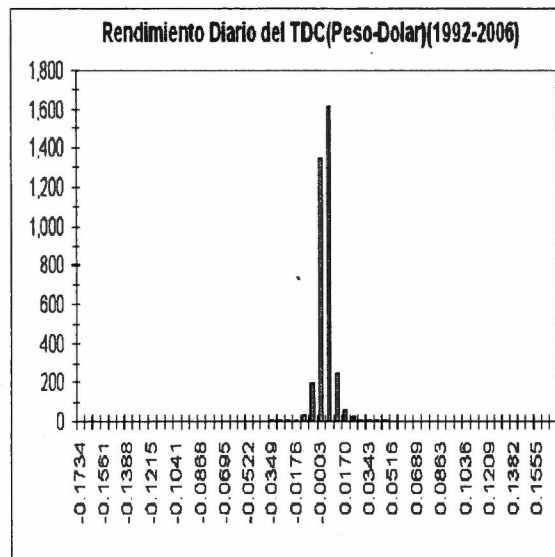
Gráfica 1.2

En el segundo caso del TDC en las gráfica 1.3 aparecen la evolución diaria del TDC y su rendimiento de enero de 1992 a abril de 2006. Se aprecia que el TDC de 1992 a fines de 1994 se manejaba con una política de tipo de cambio fijo, en los años siguientes se ha mostrado un crecimiento, sus rendimientos diarios también se mueven de manera alternada entre rendimientos positivos y negativos.



Gráfica 1.3

En la gráfica siguiente 1.4 aparece el histograma de los rendimientos diarios del TDC, en esta caso a simple vista no se observa una forma de campana, la parte central esta muy picuda y aunque cae rápidamente se les asigna una probabilidad de ocurrencia a rendimientos extremos positivos y negativos (en este caso a -0.1734y mayores a 0.1639).

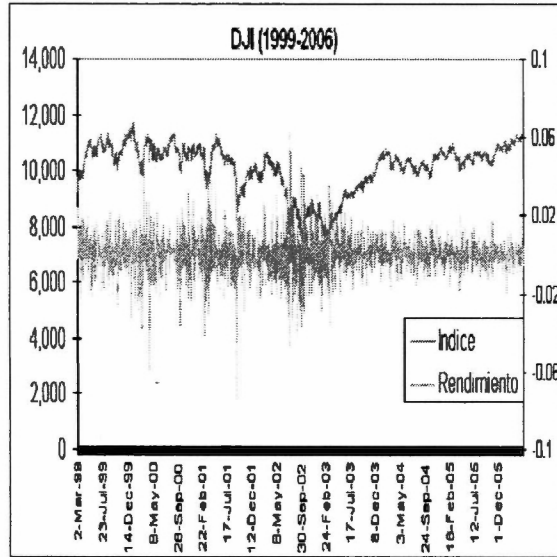


Gráfica 1.4

Mercados Fractales contra Mercados Tradicionales

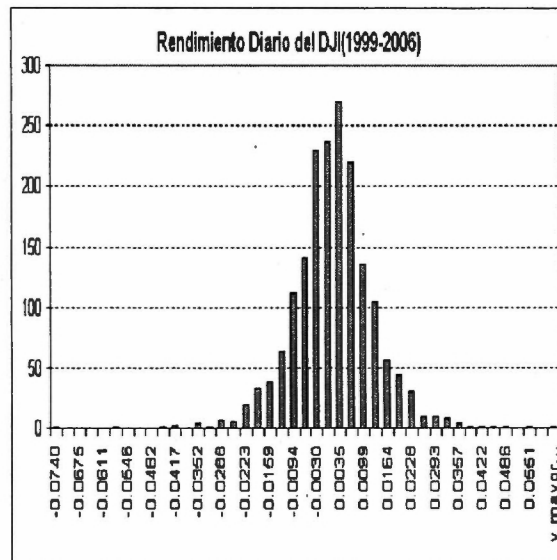
De la Tabla 1.1 se observa que el rendimiento promedio del TDC en 14 años es prácticamente cero, con un pequeño sesgo positivo y una distribución leptocúrtica. De manera similar al caso anterior, con la prueba Jarque-Bera se rechaza la hipótesis nula de que el TDC se comporte como una distribución normal.

Para el caso del mercado de Estados Unidos en la gráfica 1.5 aparece el Índice Dow Jones (DJI) y su rendimiento diario de Marzo de 1999 a Abril del 2006.

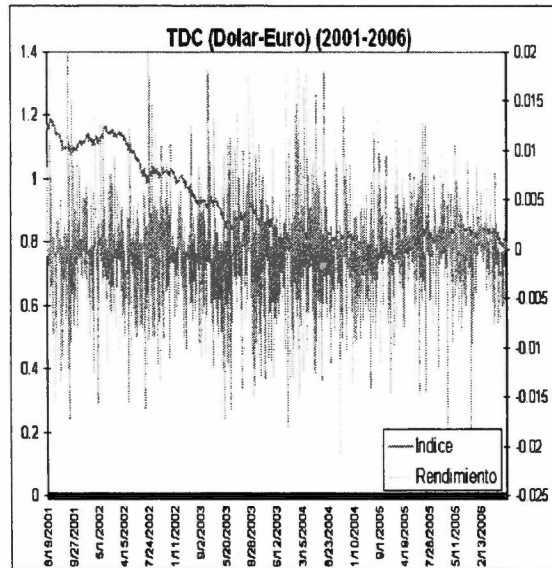


Gráfica 1.5

De la Tabla 1.1 y de la gráfica siguiente 1.6 del histograma de los rendimientos diarios de DJI, también se rechaza la hipótesis de Normalidad a partir de la prueba de Jarque Bera. La media de los rendimientos también es cero, un pequeño sesgo negativo y una distribución de características leptocúrticas.

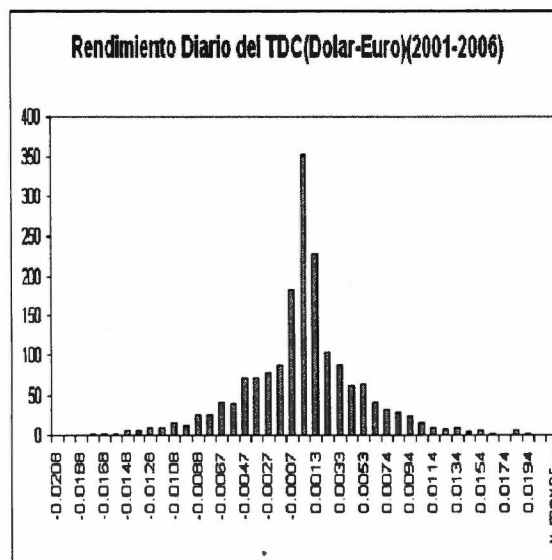


Finalmente la gráfica 1.7 y 1.8 muestran el comportamiento del tipo de cambio dólar-euro (TDCUS) del 2001 al 2006. Si bien en este caso también los rendimientos tienen media cero, se presenta un sesgo positivo y su curtosis se acerca más al de una normal.



Gráfica 1.7

De la Tabla 1.1 de la prueba Jarque-Bera y de la grafica siguiente 1.8, también se rechaza la posibilidad de que esta variable se comporte como una distribución normal.



Gráfica 1.8

De la revisión y gráficas anteriores y de los estadísticos de la Tabla 1.1 se puede observar que el comportamiento de las variables seleccionadas del mercado mexicano IPC y TDC y DJI y TDCUS para el mercado de Estados Unidos no poseen las características de una distribución normal, por lo que no debería ser un paso directo aceptar utilizar la Hipótesis de los mercados eficientes de las variables financieras reales y nos hace reflexionar sobre la utilización de la Hipótesis de Mercados Fractales(HMF).

1.4 Estadística Fractal contra Browniano Fraccional

Si bien el modelo Black-Scholes tiene una estructura poderosa y elegante y considera a los mercados como Gaussianos ⁴, completos, eficientes y libres de arbitraje. Algunas de los principales aspectos que alejan los mercados reales con respecto a los mercado Black-Scholes son los siguientes:

- i) Los rendimientos de los activos, en general, no se distribuyen de forma tan parecida a una normal teórica sino que con frecuencia las distribuciones de variables reales presentan colas pesadas y curtosis.

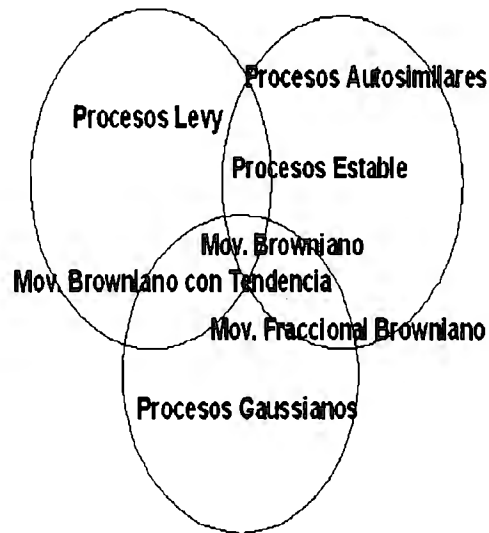
- ii) Las series de los subyacentes presentan efectos de memoria larga y por lo tanto los eventos tampoco son completamente independientes.

Del mismo modo la autosimilaridad puede tener diferentes orígenes, si proviene de una alta variabilidad en donde los incrementos son independientes y de colas pesadas su descripción puede realizarse con procesos de Lévy. En cambio si las series tiene la propiedad de una alta dependencia, entonces su modelación debería de ser con movimientos brownianos fraccionales.

En el primer caso es posible plantear una solución a través de la construcción de funciones de Lévy con características estables y con la ayuda de sus funciones características es posible modelar distribuciones muy generales. En el artículo de McCulloch [14] y [15] se muestran algunas características de la funciones de Lévy y el resultado de la estimación del valor de una opción call.

⁴ Las distribuciones normales presentan dos ventajas: entran directamente en la teoría de límite central y la suma de normales se distribuye como normal

El segundo caso corresponde a series donde sus eventos muestran cierta persistencia, este tipo de problemas pueden planearse a través de una generalización del movimiento browniano conocida como movimiento browniano fraccional con la utilización del coeficiente Hurst. El desarrollo de los siguientes capítulos estará enfocado al planteamiento y solución de este problema.



Gráfica 1.9

Dentro de los principales resultados de este capítulo se ha mostrado que existe evidencia para rechazar la hipótesis de normalidad de las variables representativas del mercado de México y Estados Unidos IPC, TDC, DJI y TDCUS. En el siguiente capítulo se analizará con el método Rango Reescalado (R/S) estas variables financieras y se buscará determinar las características de independencia de cada una de ellas. Hay que recordar que en caso de no cumplir el supuesto de independencia no podría satisfacer la Hipótesis de Mercados Eficientes. Además para que estas variables se encuentran descritas en los mercados fractales será necesario comprobar la existencia de diferentes horizontes de inversión, es decir la estabilidad de los mercados.

Capítulo 2

Procesos de Hurst

2.1 Coeficiente o Exponente Hurst

2.1.1 Antecedentes del Proceso Hurst

El primero en estudiar las series fractales fué el científico británico Harold Edwin Hurst (1880-1978). Posteriormente, sus ideas fueron retomadas por Mandelbrot quien colocó su trabajo en un contexto más general bajo el nombre de Análisis de Rango Reescalado (R/S). El R/S es un método estadístico utilizado para evaluar la ocurrencia de eventos poco comunes y es una herramienta ideal para procesos físicos y financieros, aunque no se limita solamente a este tipo de eventos. El parámetro que resulta de un análisis (R/S) es el coeficiente o exponente Hurst que es una medida de independencia de las series de tiempo y una manera de distinguir series fractales.

Hurst era constructor de presas en los inicios del Siglo XX y por un tiempo trabajó en el proyecto de la presa del río Nilo. En el momento del diseño de la presa se le presentó un problema interesante de hidrología concerniente en determinar la capacidad de almacenamiento dependiente del flujo que entra al río proveniente de diferentes elementos como lluvias y riachuelos y un flujo controlado de salida del río utilizado primordialmente en el riego. Con anterioridad, muchos hidrólogos habían supuesto este comportamiento del influjo como un proceso aleatorio, una suposición razonable cuando se trabaja en un ecosistema complejo. Sin embargo, a él no le pareció que se explicara de forma tan fácil este comportamiento. El estudió los registros históricos (de 622 D.C. a 1469 D.C.) que mantenían los egipcios y observó que en el proceso, flujos más grandes del promedio eran seguidos por sobre flujos todavía más grandes. Inesperadamente el proceso cambiaba a flujos menores que el promedio y eran seguidos por flujos todavía menores que los anteriores. Parecían ciclos pero cuya longitud no era periódica. Un análisis estándar revelaba la no existencia de correlación estadísticamente significativa entre las observaciones, por lo que Hurst desarrollo su propia metodología.

Por otra parte Hurst estaba enterado del trabajo de Einstein sobre el movimiento browniano. Este último había encontrado que la distancia que una partícula errática suspendida en un fluido cubre se incrementa con la raíz cuadrada del tiempo, si escribimos esto en forma de ecuación tenemos que:

$$R = T^{0.50} \tag{2.1}$$

Donde R = distancia y T = tiempo.

La ecuación anterior es conocida como regla de un medio y es utilizada principalmente en estadística. En finanzas se utiliza para asumir que la dispersión de los rendimientos se incrementa con la raíz cuadrada del tiempo.

Para aplicar este concepto a series de tiempo que no sean movimientos brownianos, como el de la partícula errática de Einstein, se debería considerar una ecuación que tomará en cuenta que los componentes de las series de tiempo no son independientes. Hurst al resolver su problema relacionado con la capacidad de la presa encontró la siguiente ecuación que generaliza la idea anterior que sólo era aplicable a movimientos brownianos (Mandelbrot y Wallis lo probaron en 1969):

$$(R/S)_n = cn^H. \quad (2.2)$$

donde (R/S) se conoce como el estadístico -Rango Reescalado-

c = constante

n = indicador del valor de la serie de tiempo

H = exponente o coeficiente Hurst

2.1.2 Rango Reescalado (R/S)

R/S tiene media cero y se expresa en términos de la desviación estándar. En general los valores de R/S se incrementan con n , por el valor de la ley de potencias igual al exponente Hurst, esta es la primera conexión del fenómeno Hurst y la geometría Fractal. Hay que mencionar además que el método R/S es un análisis no paramétrico que no requiere de una distribución específica. Para que una serie pueda ser considerada como fractal, el requisito clave que debe de cumplir es una escala de ley de potencia.

El exponente de Hurst se determina por medio de una regresión lineal de los puntos de $\ln(R/S)_n$ contra $\ln(n)$ como se muestra en la siguiente ecuación

$$\ln(R/S)_n = \log(c) + H \log(n), \quad (2.3)$$

Si el sistema tuviera la característica de independencia entonces $H = 0.50$. Sin embargo, como resultado de su investigación de la presa del río Nilo encontró un coeficiente de $H = 0.91$. Si comparamos el ejemplo de la partícula errática de Einstein con un $H = 0.91$ entonces esta última partícula cubriría una distancia mayor que otra con un proceso aleatorio en el mismo periodo. Mandelbrot demostró empíricamente que en series de tiempo cuyas observaciones son independientes el estadístico (R/S) son asintóticamente proporcional a la raíz cuadrada, es decir si $H = 0.5$ resulta un evento aleatorio puro. Hurst supone como hipótesis nula que el comportamiento de fenómeno sea de una

caminata aleatoria o un movimiento browniano, si este fuera el caso la ecuación del rango reescalado estaría dado por:

$$\log(R/S)_n = 0.5(\log n + \log \frac{\pi}{2}). \quad (2.4)$$

2.1.3 Valores del Coeficiente Hurst

Si $H = 0.50$ implica un proceso independiente. Es importante notar que un análisis (R/S) no requiere que el proceso subyacente se distribuya normalmente, sólo independiente. Como el análisis R/S es no paramétrico por lo que pueden considerarse distribuciones otro tipo de distribuciones como la t de student, gamma etc.

Si $0.50 < H < 1.00$ implica series de tiempo persistentes, es decir caracterizadas por efectos de memoria de largo plazo. Teóricamente lo que suceda hoy impactará en el futuro por siempre como por ejemplo cambios semanales de ahora están correlacionados con los cambios semanales futuros. Además se ha encontrado que las series persistentes son las más comunes encontradas en la naturaleza y en los mercados de capitales y economía.

Si $0.00 < H < 0.50$ significa antipersistencia en la serie de tiempo. Un sistema antipersistente cubre menos distancia que uno aleatorio, en el caso de una partícula errática. Para que ocurra debe dar marcha atrás a así mismo con mayor frecuencia que en un proceso aleatorio. Algunos teóricos igualan este comportamiento con un proceso de reversión a la media, que sin embargo asume que el sistema bajo estudio tiene media estable. Suposición no tan fácilmente aceptada en este caso.

2.1.4 Ciclos Periódicos y No Periódicos

La ciencia occidental siempre ha tratado de encontrar ciclos periódicos o regulares debido a la importancia que tenían en la naturaleza los ciclos agrícolas y los eventos celestes. Esta creencia también desde los antiguos griegos por ejemplo Aristóteles creó un modelo de universo basado en el movimiento de los cuerpos en círculos perfectos.

Sin embargo, en la economía y los mercados no hay razones para pensar que los ciclos tienen que ser periódicos. En la teoría de Caos, los ciclos pueden no ser periódicos y aunque tienen una duración promedio, la duración exacta de ciclos promedio no se conoce. Hurst(1951) fue el primero en notar que un comportamiento periódico de un subyacente puede ser detectado con un análisis R/S.

De acuerdo con Peters para valores muy grandes de observaciones se esperaría que el exponente H tienda a 0.5 y que el efecto de memoria de largo plazo se disipe. Este comportamiento asintótico de largo plazo nos dice que existen ciclos para los cuales los efectos de tendencia están presentes y a partir de un cierto valor las observaciones son independientes. Estos ciclos no son regulares y se llaman ciclos no periódicos.

En una gráfica log/log de un análisis R/S el fin de cada ciclo de frecuencias y el inicio del siguiente puede detectarse visualmente de los breaks y flattening en las gráficas. Pero hay una forma más fácil de ver cuando los breaks en las gráficas log/log ocurren con el objeto de hacer una mejor estimación del ciclo. El siguiente estadístico fue propuesto por Hurst (1951) para probar la estabilidad. Se ha probado que este estadístico proporciona una medida más precisa de la longitud del ciclo y trabaja particularmente bien en presencia de ruido.

Tal estadístico se define como:

$$V_n = (R/S)_n n^{\frac{1}{2}}. \quad (2.5)$$

Un gráfico del estadístico V_n contra el logaritmo del número de observaciones $\log(n)$ sería plano u horizontal si el proceso fuera independiente y aleatorio. Por otra parte, si el proceso fuera persistente y R/S fuera escalado a una tasa mayor que el cuadrado de la raíz del tiempo ($H > 0.50$) entonces la distribución de puntos en la gráfica tendría pendiente creciente y si estuviéramos hablando de un proceso antipersistente ($H < 0.50$) la gráfica sería de pendiente negativa. Graficando V en el eje de la Ys y $\log(n)$ en el eje de la Xs, los "breaks" ocurrirían cuando el estadístico V se aplane, en esos puntos los procesos de memoria larga se han disipado.

Una análisis R/S es capaz de determinar ciclos periódicos, incluso cuando ellos son superpuestos, incluso se tienen herramientas para eso. La potencia real del análisis R/S es encontrar los ciclos no periódicos. Un ciclo no periódico no tiene frecuencia absoluta, en lugar de ello tiene una frecuencia promedio. Nos hemos llegado a acostumbrar sobre las implicaciones de la palabra periódico cada vez que se utiliza la palabra ciclo.

2.1.5 El Color del Ruido y la Dimensión fractal

Si $0 < H < 0.50$ se considera que se tiene ruido rosa y está relacionado con la antipersistencia. El ruido rosa abunda en la naturaleza y está relacionado a procesos de relajación (equilibrio dinámico) y turbulencia.

Si $0.50 < H < 1.00$ se tiene un ruido negro. Este ruido aparece en procesos cíclicos de largo plazo, como nivel de ríos, número de manchas solares y cambios de precios en las bolsas de valores. Y tres efectos están relacionados a este ruido: Efectos Joseph (efectos causados por tendencias y ciclos), Noah (discontinuidades hacia arriba y hacia debajo de las observaciones) y Mirror (de relación entre diferente tipos de ruido)

A partir del exponente H puede determinarse la dimensión fractal como $D = 2 - H$, un movimiento browniano tiene una dimensión fractal de 1.5. Si $H > 0.5$ la dimensión fractal disminuirá y tenderá a acercarse a una recta, en el caso contrario si $H < 0.5$ la dimensión fractal aumentará y se acercará a una superficie.

2.2 Determinación del Coeficiente Hurst

2.2.1 Metodología

Como se menciona anteriormente, Hurst desarrolló una metodología para el cálculo del coeficiente H . Inicialmente su estudio se aplicó al caso del flujo del río Nilo, pero en términos generales puede aplicarse a cualquier serie que se sospeche se comporte como fractal en cualquier otra área de estudio. A continuación se describe en detalle la metodología: ⁵

1. Se inicia con una serie de tiempo de tamaño M , pero como nos interesa los rendimientos logarítmicos entonces la serie original se reduce a una nueva serie de tiempo de tamaño $N = M - 1$ donde cada rendimiento está definido por:

$$N_i = \log \left(\frac{M_{i+1}}{M_i} \right), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (2.6)$$

2. Se divide este periodo de tiempo N en A subperiodos contiguos de longitud n , tal que $A * n = N$. Se nombra cada uno de los subperiodos o subgrupos I_a , con $a = 1, 2, 3, \dots, A$. Y cada elemento en I_a es etiquetado $N_{k,a}$, tal que $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Y para cada subperiodo I_a de longitud n , el valor promedio está definido por la siguiente expresión:

$$e_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_{k,a}. \quad (2.7)$$

3. La diferencia de cada elemento $N_{k,a}$ con respecto a la media e_a para cada subperiodo I_a se van sumando para obtener una la serie de tiempo acumulada $(X_{k,a})$, definida como:

$$X_{k,a} = \sum_{i=1}^k (N_{i,a} - e_a), \quad k = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2.8)$$

4. El rango R_{I_a} se define como la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de $X_{k,a}$ para cada subperiodo I_a :

⁵ Para mayor información sobre el coeficiente Hurst o la metodología (R/S) consultar Peters[22]

$$R_{I_a} = \text{Max}(X_{k,a}) - \text{Min}(X_{k,a}), \quad (2.9)$$

donde $1 \leq k \leq n$.

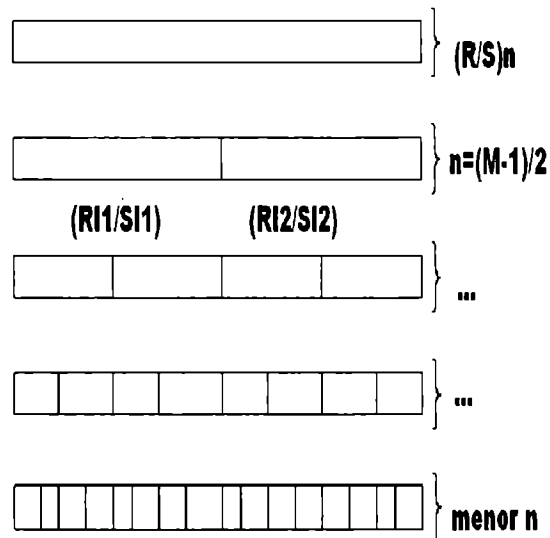
5. Por otro lado, se calcula la desviación estándar muestral S_{I_a} de la forma tradicional para cada periodo I_a :

$$S_{I_a} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (N_{k,a} - e_a)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.10)$$

6. Para cada periodo I_a , su rango R_{I_a} se normaliza dividiendo por su desviación estándar muestral S_{I_a} correspondiente. Por lo tanto el rango reescalado para cada subperiodo I_a es igual a R_{I_a}/S_{I_a} . Como tenemos A periodos continuos de longitud n, entonces tomamos el valor promedio R/S para periodos de longitud y que esta definido como:

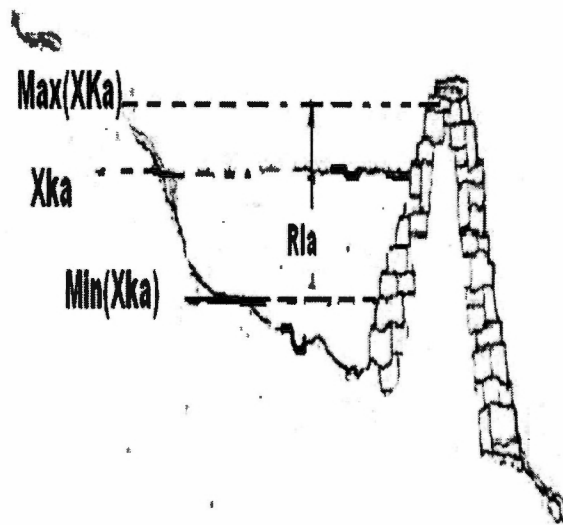
$$(R/S)_n = (1/A) \sum_{a=1}^A (R_{I_a}/S_{I_a}). \quad (2.11)$$

7. La longitud n o el tamaño del subperiodo se incrementada al siguiente valor posible de tal forma que $\frac{M-1}{n}$ sea un valor entero. Iniciamos con el valor más pequeño de acuerdo a la condición anterior y se repiten los pasos del 1 al 6 se repiten hasta $n = (M - 1)/2$ utilizando siempre la serie completa (ver grafica 2.0 a). Posteriormente aplicamos una regresión de mínimos cuadrados de $\log(R/S)_n$ contra $\log(n)$. La ordenada al origen es el $\log(c)$ y la pendiente de la ecuación es la estimación del exponente Hurst H .



Gráfica 2.0a)

La grafica 2.0 b) muestra la representación de las variables del Rango-Reescalado ($\text{Max}(X_{k,a}), \text{Min}(X_{k,a}), R_{I_a}$) para el caso de un subperiodo de tiempo a en el problema original de Hurst de la determinación de los cambios de flujos en la construcción de la presa. El flujo proveniente de riachuelos y lluvia es depositado en una presa. Los valores máximo y mínimo de las acumulación de las diferencias respecto de la media establecen el rango entre el que podrá variar el nivel del agua en la presa.



Gráfica 2.0b)

2.2.2 Prueba de Significancia del Coeficiente Hurst

En la sección anterior se ha mencionado los pasos para la determinación del coeficiente Hurst (H) y el comportamiento de los procesos de acuerdo a su valor. Sin embargo, en la práctica es necesario distinguir si un coeficiente de 0.50001 con un cierto número de datos es considerado un proceso independiente o con tendencia. Para evaluar esto se debe plantear una prueba de significancia sobre los resultados de un análisis (R/S,) similar a las pruebas "t" de las regresiones lineales.

Inicialmente Hurst estableció su Hipótesis Nula sobre una distribución binomial resultado del lanzamiento de volados más tarde Feller llegó a un resultado similar por otro camino. Se supone en la hipótesis nula que $H = 0.5$ tiene un comportamiento de caminata aleatoria o de browniano tradicional y por tanto de independencia contra las hipótesis alternativas ($H < > 0.5$) que corresponde a comportamiento persistente o antipersistente de los procesos. Los valores propuestos para el valor esperado y la varianza del coeficiente (H) son:

$$E(R'(n)) = (n\pi/2)^{0.5} \quad (2.12a)$$

$$Var(E(R'(n))) = (\pi^2/6 - \pi/2)n \quad (2.12b)$$

La ecuación anterior fue corregida por Alanis and Lloyd (1976) para la determinación del valor esperado del rango reescalado y después de una corrección empírica (ver Peters) se llega a una ecuación para el valor esperado de H :

$$E(R/S_n) = \left(\frac{n-0.5}{n}\right) \left(\frac{n\pi}{2}\right) \sum_{r=1}^{n-1} \sqrt{\frac{n-r}{r}} \quad (2.13a)$$

Debido a que los valores de R/S son normalmente distribuidos, entonces podemos tomar los valores de H como también normalmente distribuidos, en esta caso la varianza esperada del exponente Hurst empíricamente se demuestra es:

$$Var(H) = \frac{1}{T} \quad (2.13b)$$

Donde T es el número de observaciones de la muestra.

A partir de las ecuaciones (2.13 a) y (2.13 b) podemos determinar el nivel de significancia con un estadístico que nos dice cuantas desviaciones estándar se encuentra alejado del valor medio $E(H)$ y el valor obtenido de H en el proceso de Rango-Reescalado.

2.2.3 Coeficiente Hurst en el Mercado de México y Estados Unidos

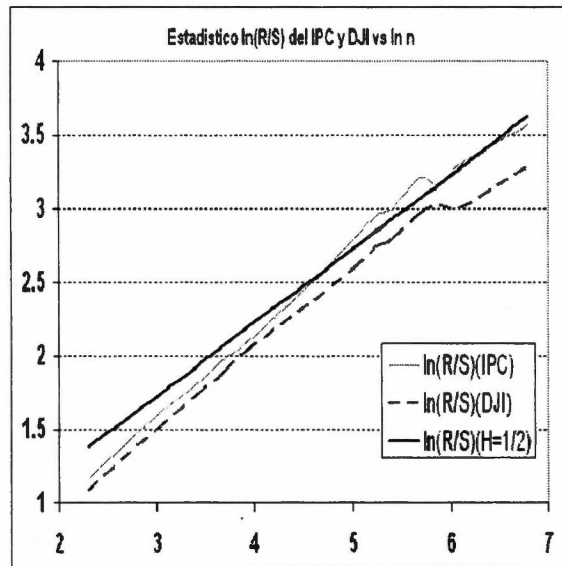
En la presente sección se aplicará la metodología (R/S) descrita anteriormente para la estimación del coeficiente Hurst al caso del mercado financiero de México en dos de sus variables más importantes y representativas: el Índice de precios y Cotizaciones (IPC) y el tipo de cambio peso-dólar (TDC). Y para el caso del mercado de Estados Unidos (EU) las variables analizadas, también seleccionadas por su importancia, son: el Índice Dow Jones Industrial (DJI) y el tipo de cambio dólar-euro. Con el fin de averiguar, de acuerdo a sus características de independencia, si en estos dos mercados las series pueden ser consideradas como fractales. En el caso del IPC tomamos la serie SF 43716 de cierre del Índice de Precios y Cotizaciones de 1800 datos que van del 4 de Enero de 1999 al 20 de Febrero de 2006. En el caso de TDC se toma la serie SF 43788 del Tipo de Cambio pesos por dólar EUA interbancario 48 horas al cierre de compra de 2800 datos que van del 2 de Enero de 1995 al 14 de Febrero del 2006. Para el caso de EU la serie de DJI y tipo de cambio Dólar Euro van del 19 de Junio de 1999 al 22 de Mayo del 2006.

Para poder aplicar la metodología del inciso anterior se desarrollo un programa en Visual Basic for applications(ver apéndice A) y hay que considerar que el tamaño de los diferentes conjuntos de n para el IPC, TDC, DJI y TDCUS son:

10,20,30,40,50,100,150,180,200,225,300,360,450, 900 (para las primeras tres series) y
14,28,35,70,80,112,140,175,200,280,350,400,700, 1400 (para la última).

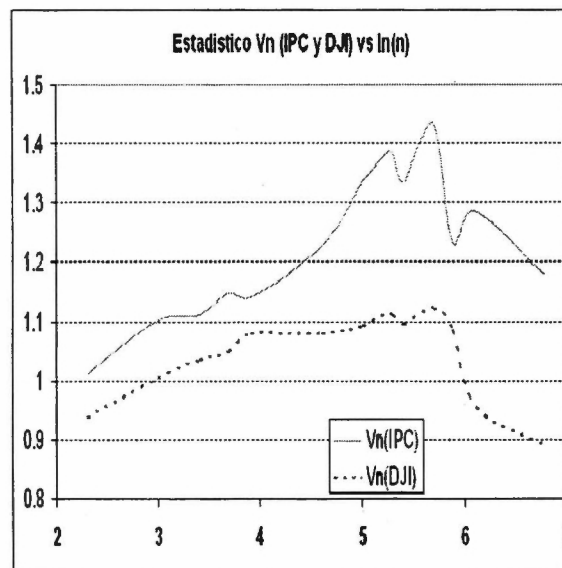
Vale la pena aclarar que la diferencia en el tamaño de n para las diferentes series se debe a que las submuestras deben ser múltiplos de la serie original y como se ha mencionado las series originales son de tamaño distinto.

La grafica 2.1 muestra las curvas asociadas a las variables $\log(R/S)$ contra $\log(n)$ para el caso de los índices IPC y DJI comparadas con el caso browniano de incrementos independientes ($H = 1/2$). Se puede apreciar que la función tiene una pendiente positiva, que llega hasta el valor de seis, donde registra una pequeña caída y luego continúa su ascenso.

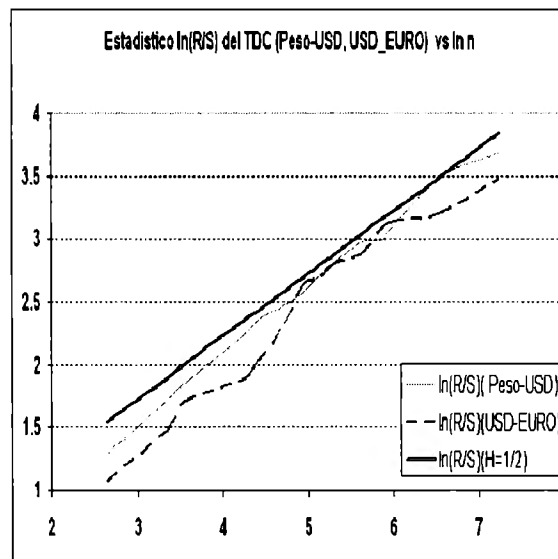


Gráfica 2.1

En la siguiente gráfica 2.2 aparece un comparativo del estadístico V_n del IPC y DJI.

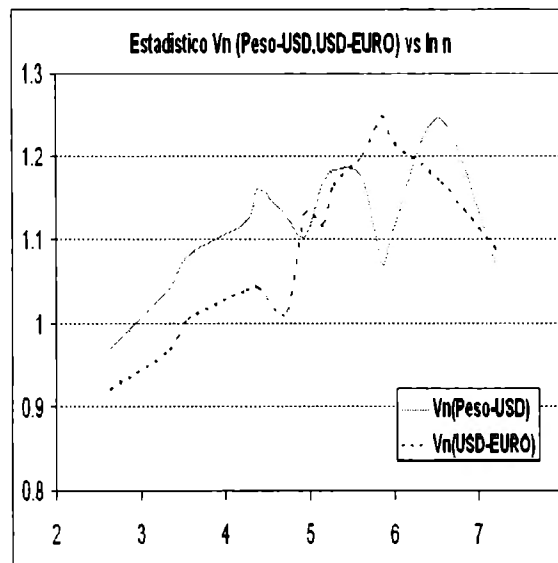


En la gráfica 2.3 se muestran las variables $\log(R/S)$ contra $\log(n)$ para los casos del TDC y TDCUS comparadas con el caso ($H = 1/2$). En el caso TDC la función tiene una pendiente positiva y constante casi hasta el valor de seis y su comportamiento es parecido al del IPC. El TDCUS, tiene un comportamiento más irregular.



Gráfica 2.3

El estadístico de periodo V_n para los tipos de cambio TDC TDCUS se muestra en la siguiente gráfica 2.4



Gráfica 2.4

Aplicando la metodología de sección 2.2.1, después de seguir los pasos del algoritmo se hace una regresión de $\log(R/S)$ contra $\log(n)$. Los resultados para $H, E(H), DE(H)$ para cada una de las cuatro series aparecen en la siguiente tabla 2.1:

Tabla 2.1

Serie	H	R^2	$E(H)$	$DE(H)$	$(H - E(H))/DE(H)$
IPC	0.5573	0.990	0.5744	0.0235	0.7277
TDC	0.5255	0.994	0.5475	0.0189	1.1640
DJI	0.5038	0.988	0.5744	0.0235	3.0043
TDCUS	0.5587	0.995	0.5744	0.0235	0.6681

En la Tabla anterior se puede observar la estimación del coeficiente Hurst para las series de IPC , TDC, DJI y TDCUS del mercado mexicano y estadounidense. En general, si nos fijamos solamente en el exponente H se podría afirmar que no se comportan como una caminata aleatoria o un movimiento browniano sino más bien como una serie persistente, salvo el caso del Dow Jones que es la serie más cercana a un comportamiento browniano tradicional. En el artículo de Palomas(2002) para rendimientos diarios del IPC obtiene un coeficiente de $H = 0.5838$ y si hace una permutación de los datos obtiene una $H = 0.5088$, la diferencia se puede explicar por el tamaño de la muestra.

Sin embargo, si tomamos en cuenta el valor esperado y la desviación estándar(DE) los resultados no son significativos y se mantiene la Hipotesis Nula de un comportamiento independiente, por lo que aunque teóricamente los valores de H son mayores que 0.5, estadísticamente no pueden ser considerados de características persistentes.

De acuerdo con la sección 2.1.4, si uno observa las gráficas 2.1 y 2.3 para el IPC y TDC y de 2.2 a 2.3 para el DJI y TDCUS y conforme a los criterios mencionados y al estadístico V_n , podemos pensar que el mercado mexicano y estadounidense de índices tienen un ciclo de alrededor de $\log = 5.29$ lo que significa un periodo de alrededor de 198 días hábiles, es decir un ciclo de aproximadamente año de días naturales. En las variables del tipo de cambio (TDC y TDCUS) el periodo esta cerca de $\log = 4.38$ o bien de 80 días hábiles, es decir 16 semanas.

Un ejercicio adicional para confirmar la variación de los valores de H consiste en dividir cada unas de las series IPC, DJI, TDC y TDCUS, en cinco muestras del mismo tamaño y consecutivas en el tiempo. Considerando que cada una de las series tiene distinto número de elementos cuando se aplica la metodología de Hurst a cada grupo tenemos los siguientes resultados que se muestran en la Tabla 2.2.

Tabla 2.2

Serie	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
IPC	0.6644	0.5904	0.5923	0.5497	0.5768
TDC	0.57006	0.5919	0.6032	0.5992	0.5010
DJI	0.5582	0.6293	0.6030	0.5451	0.5011
TDCUS	0.5423	0.5699	0.5971	0.5470	0.5702

De la tabla anterior se pueden obtener al menos dos conclusiones importantes; la primera de ellas es inmediata y se refiere a que el exponente Hurst depende del tamaño de la muestra y del momento en el tiempo de la medición, en cierta forma su valuación es parecida a al estadístico de la volatilidad. Por lo tanto, es importante precisar en cualquier cálculo del valor de H , tamaño o el número de datos y el momento en que se tomó la muestra y realizar las pruebas de significancia. La segunda conclusión propia de las series es que el valor del exponente Hurst los últimos periodo (a excepción del TDCUS) resultan ser menores. Lo que implicaría que en tiempos recientes las series muestran tendencia a alejarse de las características de persistencia e irse moviendo hacia los mercados brownianos tomando en consideración que todas las muestras son del mismo tamaño.

Dentro de los principales resultados de este capítulo se aplica la metodología de Rango Reescalado (R/S) para la estimación del coeficiente Hurst de la series IPC, TDC, DJI y TDCUS y poder determinar sus características de independencia. En el próximo capítulo se hace una presentación de manera más formal matemáticamente hablando del movimiento browniano fraccional, así como las bases, herramientas y resultados más importantes que involucran y dependen del coeficiente Hurst , estudiado en el presente capítulo.

Capítulo 3

Antecedentes Matemáticos del Movimiento Browniano Fraccional

3.1 Movimiento Browniano y Movimiento Browniano Fraccional

El objetivo del presente Capítulo es proporcionar la justificación y la base técnica matemática para la utilización del movimiento Browniano Fraccional y la extensión de los conceptos y teoremas para su aplicación en las Finanzas, así como su relación con movimiento browniano tradicional.

3.1.1 Movimiento Browniano y Cálculo de Itô

Un movimiento browniano $(W(t))_{t>0}$ (o también conocido como proceso de Wiener) en un espacio de probabilidad fijo, con una filtración esta definido por las siguientes propiedades:

- i) $W(0) = 0$
- ii) Si $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, entonces $W(t_2) - W(t_1), W(t_3) - W(t_2), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ son variables aleatorias independientes
- iii) Si $s < t \Rightarrow$ entonces $W(t) - W(s)$ se distribuye como $N(0, t - s)$
- iv) Además se requiere de continuidad de las trayectorias

Adicionalmente se pueden mencionar dos importantes propiedades del movimiento browniano: la autosimilaridad y relación que posee con el ruido Blanco. Recordemos que la autosimilaridad está definida por la siguiente propiedad:

$$W(at) = a^{\frac{1}{2}}W(t), \quad \forall t. \quad (3.1)$$

Esta igualdad es en el sentido de distribución de probabilidad, es decir que $W(at)$ y $a^{\frac{1}{2}}W(t)$ tienen exactamente las mismas distribuciones, en otras palabras, cualquier parte finita de una trayectoria de movimiento browniano cuando es reescalada apropiadamente es indistinguible de la trayectoria del todo. En el lenguaje fractal decimos que la trayectoria del movimiento es una curva fractal de dimensión $D = 2$. Con respecto a la segunda propiedad, la derivada de un movimiento browniano $(W(t))_{t>0}$ es llamada un proceso de ruido blanco

$$\psi = \frac{dW}{dt}, \quad (3.2)$$

además el ruido blanco satisface las siguientes condiciones:

$$E[\psi(t)] = 0 \quad (3.3a)$$

$$E[\psi(t)\psi(t')] = 0. \quad (3.3b)$$

Por otro lado, se define la integral sobre un proceso Wiener de la manera siguiente:

$$I(t) = \int_0^t g(t')dW(t') \quad (3.4)$$

Esta integral es del tipo Riemann- Stieltjes, y si se toma un partición del intervalo $[0, T]$, consideramos las siguientes sumas:

$$I_n = \sum_{i=1}^n g(t_{i-1})\delta W(t_i) \equiv \sum_{i=1}^n g(t_{i-1})[W(t_i) - W(t_{i-1})]. \quad (3.5)$$

Donde $g(t)$ debe ser independiente del siguiente incremento $\delta W(t_i)$ del movimiento browniano y bajo condiciones apropiadas sobre $g(t)$ es posible mostrar que las sumas I_n convergen en el sentido media cuadrada. Utilizando la independencia de $g(t)$ que el valor esperado de los incrementos brownianos es cero, se sigue:

$$E[I(t)] = E\left[\int_0^t g(t')dW(t')\right] = 0, \quad (3.6)$$

también la integral estocástica obedece la propiedad de isometría

$$E[I(t)^2] = E\left[\left(\int_0^t g(t')dW(t')\right)^2\right] = \int_0^t E(g^2(t'))dt'. \quad (3.7)$$

Un proceso de gran utilidad para el modelado de activos subyacentes dentro de las finanzas es el conocido como geométrico browniano

$$dS = \mu Sdt + \sigma SdW \quad (3.8)$$

donde μ y σ son constantes y con la condición inicial $S(t_0) = S_0$

3.1.2 Movimiento Browniano Fraccional

El MBF fué originalmente definido por Kolmogorov dentro de un espacio de Hilbert y en un inicio lo llamó proceso Wienerhelix, posteriormente Mandelbrot le dió el nombre de movimiento browniano fraccional.

Un movimiento browniano fraccional (MBF)(B_H) con parámetro Hurst (H), $0 < H < 1$, es un proceso Gaussiano que se define de tal forma que:

- i) $B_H(0) = 0$
- ii) $E[B_H(t)] = 0 \forall t \in R$
- iii) $C_H(t, s) = E[B_H(s)B_H(t)] = H(2H - 1) \int_0^t \int_0^t |t - s|^{2H-2} dsdt$
 $= \frac{1}{2}[|s|^{2H} + |t|^{2H} - |s - t|^{2H}]; \forall s, y, t \in R$

en particular cuando $s = t$ y $H = 1/2$ entonces $\text{Var}_H(t) = C_H(t, t) = t$

El coeficiente Hurst (H) determina el signo de la covarianza de los eventos pasados y futuros, y dependiendo de su valor tiene una cierta interpretación:

Si $H = \frac{1}{2}$ y $C_H(t, s) = 0$ entonces $B_H(t)$ coincide con el movimiento browniano

Si $H > \frac{1}{2}$ y $C_H(t, s) > 0$ entonces $B_H(t)$ es persistente en el sentido que tiene una dependencia de largo plazo

Si $H < \frac{1}{2}$ y $C_H(t, s) < 0$ entonces $B_H(t)$ es antipersistente

Recordemos que los posibles valores de H y sus características había sido ya revisadas en las secciones 2.1.3 y 2.1.5.

De la misma forma que el Movimiento Browniano, el MBF tiene la propiedad de autosimilaridad, que es la propiedad más importante de los sistemas fractales. El MBF también es autosimilar si para cualquier $H \in (0, 1)$ y $\alpha > 0$ (de la misma forma que la ecuación 3.1 del caso browniano tradicional)

$$B_H(\alpha t) = \alpha^H B_H(t), \quad \forall t \quad (3.9)$$

Otra manera de interpretar la persistencia de H tiene que ver con la convergencia del siguiente estadístico ρ_n que puede tener los siguientes casos con ρ_n definido como:

$$\rho_n := E[B_H(1) \cdot (B_H(n+1) - B_H(n))]$$

a) Si $\rho_n > 0 \forall n = 1, 2, \dots$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n = \infty$ entonces $H > \frac{1}{2}$ y $B_H(t)$ es persistente o de largo plazo

b) Si $\rho_n < 0 \forall n = 1, 2, \dots$ y en este caso $\sum_{n=1}^{\infty} |\rho_n| < \infty$ entonces $H < \frac{1}{2}$ entonces $B_H(t)$ es antipersistente

En los casos $H \neq \frac{1}{2}$, el MBF no puede ser considerado como un proceso Markoviano, ni como martingala y por tanto no puede ser analizado mediante el cálculo estocástico tradicional. En el artículo [7] hace referencia a los trabajos de Dasgupta[5][6] y Shiryaev [24] ⁶en donde entre otras cosas sostienen que la integral de trayectoria definida como una suma de Riemann:

$$\int_0^T \phi(t, w) dB_H(t) = \lim_{\delta t_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{N-1} \phi(t_k) \cdot (B(t_{k+1}) - B(t_k)) \quad (3.10)$$

⁶ Para una análisis más detallado consultar los artículos originales

Si $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$, es una partición de $[0, T]$ y $\delta t_k = t_{k+1} - t_k$, y además si el límite existe, en general tiene un valor esperado diferente de cero

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T \phi(t, w) dB_H(t) \right] \neq 0 \quad (3.11)$$

En consecuencia, con la integral de trayectoria los procesos no son libres de arbitraje, recordemos que a las posibilidades de hacer utilidades libres de riesgo sin dinero inicial es llamado oportunidad de arbitraje o simplemente arbitraje. En un mercado libre de arbitraje cualquier portafolio sin riesgo debe tener rendimientos iguales a la tasa libre de riesgo.

En un nuevo intento por sustituir el problema de arbitraje de las integrales de trayectorias, ahora se considera la integral conocida como Skorohod (Wick-Itô) desarrollada por Duncan, Hu and Pasik-Duncan y que se denota por:

$$\int_0^T \phi(t, w) \delta_H(t) \quad (3.12)$$

Y que también puede definirse en términos de suma de Riemann como sigue:

$$\int_0^T \phi(t, w) dB_H(t) = \lim_{\delta t_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{N-1} \phi(t_k) \diamond (B(t_{k+1}) - B(t_k)) \quad (3.13)$$

donde \diamond denota el producto Wick, entonces si se llega a un valor esperado de cero:

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T \phi(t, w) \delta_H(t) \right] = 0. \quad (3.14)$$

Por lo tanto, con esta nueva integral es importante desarrollar un cálculo equivalente de ruido blanco para poder trabajar con coeficientes Hurst diferentes de 0.5. Además de demostrar si los procesos son martingalas también es interesante conocer las reglas de operaciones del producto Wick que hacen la diferencia en estas nuevas integrales con las integrales de trayectoria ordinarias.

3.2 Antecedentes Matemáticos

3.2.1 Revisión del Espacio de Hilbert y Métrica

Supongamos un coeficiente Hurst (H) constante, tal que $\frac{1}{2} < H < 1$ y definimos una función ϕ de la siguiente manera:

$$\phi_H(t, s) = H(2H - 1)|t - s|^{2H-2} \quad \text{con } t, s \in R. \quad (3.15)$$

Sea $f : R \rightarrow R$ es medible, entonces decimos que $f \in L^2_\phi(R)$ (Conjunto de las funciones cuadrado integrables) si

$$|f|_\phi^2 := \int_R \int_R f(s)f(t)\phi(t,s)dsdt < \infty. \quad (3.16)$$

Definiendo el producto interior

$$\langle f, g \rangle_\phi := \int_R \int_R f(s)g(t)\phi_H(t,s)(t,s)dsdt \quad f, g \in L^2_\phi(R) \quad (3.17)$$

Tenemos que $(L^2_\phi(R), \langle \cdot, \cdot \rangle_\phi)$ es un espacio de Hilbert

Por otra parte si $f \in L^2_\phi$ se define

$$\int_R f(t)dB_H(t) := \lim_{m \rightarrow \infty} \int_R f_m(t)dB_H(t) \quad (3.18)$$

en donde

$$f_m(t) = \sum_i a_i^m \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t) \quad (3.19a)$$

$$\int_R f_m(t)dB_H(t) = \sum_i a_i^m (B_H(t_{i+1}) - B_H(t_i)). \quad (3.19b)$$

3.2.2 Principales Lemas y Teoremas

A continuación se enuncian los lemas y teoremas más sobresalientes para su aplicación en los siguientes capítulos. Para la demostración de los Lemas 1,2 y 3 mostrados a continuación consultar Hu and Oksendal (2000):

Lema 1 Isometría de Itô

Si $f \in L^2_\phi(R)$ entonces

$$E \left(\int_R f(t)dB_H(t) \right)^2 = |f|_\phi^2 \quad (3.20)$$

y por otra parte si $f \in L^2_\phi(R)$ entonces se define

$$\epsilon(f) := \exp \left(\int_R f dB_H - \frac{1}{2} |f|_\phi^2 \right) \quad (3.21)$$

Lema 2

El span lineal de $(\epsilon(f), f \in L^2_\phi(R))$ es denso en $L^2(\mu)$ donde (μ) es la Ley de probabilidad de B_H .

Consideremos para el lema siguiente los polinomios de Hermite, recordando que están definidos por

$$h_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2/2}). \quad (3.22)$$

Se sigue que si $B_H(t)$ es un movimiento browniano fraccional y tenemos que si $f \in L^2_\phi(R)$ entonces

$$\langle w, f \rangle = \int_R f(t) dB_H(t, w) \quad (3.23)$$

Sea $I = (N_0^N)$ el conjunto finito de todos los multíndices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, de enteros no negativos, (N es el conjunto de números $N_0 = NU\{0\}$), entonces si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in I$, tenemos lo siguiente:

$$H_\alpha(w) := h_{\alpha_1}(\langle w, e_1 \rangle) h_{\alpha_2}(\langle w, e_2 \rangle) \dots h_{\alpha_n}(\langle w, e_n \rangle). \quad (3.24)$$

En particular si $\epsilon^{(1)} := (1, 0, 0, 0)$ denota el i-ésimo vector unitario $H_{\epsilon^{(1)}}(w) := h_1(\langle w, e_1 \rangle) = \langle w, e_1 \rangle = \int_R e_1(t) dB_H(t)$.

Lema 3 (Teorema de Expansión de Caos Fraccional Wiener-Itô)

Sea $X \in L^2(\mu)$ entonces existe una constante $c_\alpha \in R$ y $\alpha \in I$ tal que

$$X(w) = \sum_{\alpha} c_\alpha H_\alpha(w) \text{ en } L^2(\mu), \quad (3.25)$$

además

$$\|X\|_{L^2(\mu)}^2 = \sum_{\alpha \in I} \alpha! c_\alpha^2 \quad (3.26)$$

donde $\alpha! := \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$.

Definimos $(S)_H^*$ como el conjunto de todas las expansiones formales :

$$G(w) = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha H_\alpha(w) \quad (3.27)$$

tales que:

$$\|G\|_{H, -q}^2 = \sum_{\alpha \in I} \alpha! c_\alpha^2 (2N)^{-\alpha q} < \infty \text{ para alguna } q \in N. \quad (3.28)$$

3.2.3 Producto Wick ⁷

Sean $F(w) = \sum_{\alpha \in I} a_\alpha H_\alpha(w) \in (S)_H^*$ y $G(w) = \sum_{\alpha \in I} b_\alpha H_\alpha(w) \in (S)_H^*$ definimos el producto Wick de F y G por

$$(F \diamond G)(w) = \sum_{\alpha, \beta \in I} a_\alpha b_\beta H_{\alpha+\beta}(w) \quad (3.29)$$

Además tenemos si $F, G \in (S)_H^* \Rightarrow F \diamond G \in (S)_H^*$

Y por otra parte si f y $g \in L_\phi^2(R)$ entonces

$$\left(\int_R f dB_H \right) \diamond \left(\int_R g dB_H \right) = \left(\int_R f dB_H \right) \left(\int_R g dB_H \right) - \langle f, g \rangle_\phi \quad (3.30)$$

Si $X \in (S)_H^*$ entonces definimos su potencia Wick $X^{\circ n}$ por

$$X^{\circ n} = X \diamond X \diamond X, \dots, \diamond X \text{ (nfactores)}. \quad (3.31)$$

Y definimos la exponencial Wick de la siguiente $\exp^\diamond(X)$ forma

$$\exp^\diamond(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^{\circ n}. \quad (3.32)$$

Qué de forma más general se puede tener:

$$\epsilon(f) = \exp^\diamond(\langle w, f \rangle) = \exp(\langle w, f \rangle - \frac{1}{2} |f|_\phi^2) \quad \forall f \in L_\phi^2(R). \quad (3.33)$$

Por otra parte si $f, g \in L_\phi^2(R)$ tenemos que:

$$\epsilon(f) \diamond \epsilon(g) = \epsilon(f + g) = \epsilon(f)\epsilon(g)e^{-\langle f, g \rangle}. \quad (3.34)$$

El ruido blanco fraccional $W_H(t)$ en el tiempo t se define como

$$W_H(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_R e_i(v) \phi(t, v) dv \right] \int_R e_i(t) dB_H(t) \quad (3.35)$$

$W_H(t) \in (S)_H^* \forall t$, además si $t \rightarrow B_H(t)$ es diferenciable en $(S)_H^*$ se puede llegar a

$$\frac{d}{dt} B_H(t) = W_H(t) \text{ en } (S)_H^* \quad (3.36)$$

Qué justifica el nombre de ruido blanco fraccional

⁷ Los resultados y las demostraciones del producto Wick se pueden revisar más ampliamente en Oksendal(2004) y Hu and Oksendal(2000)

Si $Y : R \rightarrow (S)_H^*$ es una función tal que $Y(t) \diamond W_H(t)$ es integrable en $(S)_H^*$ entonces definimos la integral de tipo Itô fraccional por

$$\int_R Y(t) dB_H(t) := \int_R Y(t) \diamond W_H(t) dt \quad (3.37)$$

3.2.4 Movimiento Geométrico Browniano Fraccional

Consideremos la ecuación diferencial estocástica fraccional

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dB_H(t), X(0) = x > 0 \quad (3.38)$$

Donde x, μ y σ son constantes, reescribiremos la ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \mu X(t) + \sigma X(t) \diamond dW_H(t) = (\mu + \sigma W(t)) \diamond X(t). \quad (3.39)$$

Utilizando el cálculo Wick vemos que la solución de la ecuación está dada por:

$$X(t) = x \exp^{\diamond(\mu t + \sigma \int_0^t W_H(s) ds)} = x \exp^{\diamond(\mu t + \sigma B_H(t))} \quad (3.40)$$

Y al final tenemos que

$$X(t) = x \exp(\sigma B_H(t) + \mu t - \frac{1}{2} \sigma^2 t^{2H}). \quad (3.41)$$

Sea $L_\phi^{1,2}(R)$ que denota el complemento del conjunto de todos los procesos adaptados $F_t^{(H)}$, $f(t) = f(t, w)$ de tal forma que

$$|f|_{L_\phi^{1,2}(R)}^2 := E_{\mu\phi} \left[\int_R \int_R f(s) f(t) \phi(s, t) ds dt \right] + E_{\mu\phi} \left[\left(\int_R D_S^\phi f(s) ds \right)^2 \right] < \infty \quad (3.42)$$

donde D_s^ϕ es la derivada de ϕ si $D_S F$ es la derivada Malleavin (definida más adelante) $D_s^\phi F = \int_R \phi(s, t) D_t F dt$. Se tiene la siguiente isometría ⁸

$$E \left[\left(\int_R f(t, w) dB_H(t) \right)^2 \right] = |f|_{L_\phi^{1,2}}^2 \quad (3.43)$$

$$E \left[\int_R f(t, w) dB_H(t) \right] = 0 \quad \forall f \in L_\phi^{1,2}(R). \quad (3.44)$$

⁸ Para mayor detalle consultar Hu and Oksendal (2000) y Necula (2002)

3.2.5 Fórmula Fraccional de Itô

Supongamos que $X(t)$ sigue el siguiente proceso browniano fraccional

$$dX(t) = \mu(t, w)dt + \sigma(t, w)dB_H(t) \quad \mu, \sigma \in L_\phi^{1,2} \quad (3.45)$$

Si $f \in C^2(R \times R)$ entonces tenemos ⁹

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) = & f(0, X(0)) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X(s))ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X(s))\mu(s)ds + \\ & + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X(s))\sigma(s)dB_H(s) + \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X(s))\sigma(s)D_s^\phi X(s)ds \end{aligned} \quad (3.46)$$

3.2.6 Derivadas Fraccionales

Sea $F : S'(R) \rightarrow R$ es una función dada y sea $\gamma \in S'(R)$, decimos que F tiene una derivada direccional en la dirección γ si

$$D_\gamma F(w) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(w + \epsilon\gamma) - F(w)}{\epsilon}. \quad (3.47)$$

Existe en $(S)_H^*$, en este caso decimos que $D_\gamma F$ es la derivada direccional de F en la dirección γ . Decimos que $F : S'(R) \rightarrow R$ es diferenciable si existe un mapeo $\Psi : R \rightarrow (S)_H^*$ tal que

$$\Psi(t)\gamma(t) = \Psi(t, w)\gamma \quad (3.48)$$

es integrable y

$$D_\gamma F(w) = \int_R \Psi(t, w)\gamma(t)dt \quad \forall \gamma \in L^2(R). \quad (3.49)$$

En este caso

$$D_t F(w) := \frac{dF(t, w)}{dw} := \Psi(t, w) \quad (3.50)$$

Y a $D_t F(w)$ se le llama gradiente estocástico o derivada Hida/Malliavian de F en t. La propuesta y resultados de esta derivada pueden consultarse en Hu and Oksendal(2002) y Duncan, Hu and Pasik-Duncan(2002)

⁹ Para máyor detalle consultar Hu and Oksendal (2000) y Necula(2002)

3.2.7 Teorema de Girsanov

Si se considera un movimiento browniano con tendencia

$$\tilde{W}(t) = at + W(t) \quad (3.51)$$

con $0 \leq t \leq T$ y a una constante diferente de cero.

$\tilde{W}(t)$ no es martingala y su valor esperado es diferente de cero, sin embargo, puede existir otra medida de probabilidad Q con respecto a la cual el proceso $W(t)$ puede llegar a ser un proceso browniano estándar. Este resultado se conoce como Teorema de Girsanov.

El proceso $\tilde{W}(t)$ dado por la ecuación anterior es un movimiento browniano estándar respecto a la medida de probabilidad Q definida por:

$$\frac{df}{dQ}(\tilde{x}, t) = M_t(\tilde{x}) \frac{df}{dP}(\tilde{x}, t) \quad (3.52)$$

donde M_t es el proceso

$$M_t = \exp(-aW_t - \frac{1}{2}a^2t) = \exp(-a\tilde{W}_t + \frac{1}{2}a^2t). \quad (3.53)$$

En la versión del Movimiento Browniano Fraccional, sea $T > 0$ y γ una función continua con $supp \gamma \subset [0, T]$ y K una función con $supp K \subset [0, T]$ tal que

$$\langle K, \gamma \rangle_\phi = \langle \gamma, f \rangle_{L^2} \quad \forall f \quad supp f \subset [0, T] \quad (3.54)$$

Definiendo la medida de probabilidad $\tilde{\mu}$ sobre la σ -álgebra $F_T^H = B(B_H(s), s \leq T)$ por

$$\frac{d\tilde{\mu}}{d\mu} = \exp^\circ(-\langle w, K \rangle) \quad (3.55)$$

Entonces $\tilde{B}(t) = B_H(t) + \int_0^t \gamma_s ds$ es un movimiento browniano fraccional bajo $\tilde{\mu}$, este teorema puede revisarse en Oksendal(2004) para mayor detalle.

3.2.8 Teorema de Expansión de Caos Wiener-Ito en términos ¹⁰ de Integrales Iteradas

Denotemos $L_\phi^2(R^n)$ el espacio de funciones que son simétricas con respecto a sus n variables y $\|f\|_{L^2(R^n)}^2 < \infty$. Definimos la integral iterada como:

$$I_n(f) := \int_{R^n} f dB_H^{\otimes n} := n! \int_{s_1 < \dots < s_n} f(s_1, \dots, s_n) dB_H(s_1), \dots, dB_H(s_n) \quad (3.56)$$

¹⁰ Este teorema fué propuesto y demostrado por Hu and Oksendal (2000)

Sea $X \in L^2(\mu)$ entonces existe un $f_n \in L^2_\phi(R^n)$ tal que

$$X(w) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) \in L^2(\mu); \quad f_n \in L^2_\phi(R^n) \quad (3.57)$$

y

$$\|X\|_{G_k}^2 := \sum_{n=0}^{\infty} n! \|f_n\|_{L^2_\phi(R^n)}^2 \quad (3.58)$$

Decimos que la expansión formal está dada por:

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{R^n} g_n dB_H^{\otimes n}(t); \quad g_n \in L^2_\phi(R^n) \quad (3.59)$$

Pertenece al espacio $G_{-q} = G_{-q}(\mu_\phi)$ si

$$\|G\|_{G_{-q}}^2 := \sum_{n=0}^{\infty} n! \|g_n\|_{L^2_\phi(R^n)}^2 e^{-2qn} < \infty, \quad (3.60)$$

donde se define $G^* = G(\mu_\phi) = \sqcup_{q \in \mathbb{N}} G_{-q}(\mu_\phi)$

3.3 Expectativas Cuasicondicionales

3.3.1 Definiciones

Sea $G = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{R^n} g_n dB_H^{\otimes n} \in G^*$ definimos las expectativas condicionales(o cuasicondicionales) de G con respecto a F_t^H por:

$$\tilde{E}_t[G] := \tilde{E}[G|F_t^H] := \sum_{n=0}^{\infty} \int_{R^n} g_n(s) \mathbf{1}_{0 < s < t}(s) dB_H^{\otimes n}(s) \quad (3.61)$$

A partir de lo anterior se generan los siguientes resultados que consiguió Necula en su trabajo del (2002)

- a) Sea $F \in G^*$ tenemos que $\tilde{E}_t[F] \in G^*$
- b) Sea $F, G \in G^*$ tenemos que $\tilde{E}_t[F \diamond G] = \tilde{E}_t[F] \diamond \tilde{E}_t[G]$
- c) Sea $F \in L^2(\mu)$, $\tilde{E}_t[F] = F$ si y solo si F es F_t^H medible

(3.62)

Un proceso X_t es adaptado a una filtración $F(t)_{t>0}$ si X_t es F_t medible $\forall t > 0$, X_t genera un flujo de información que representa la información contenida en la trayectoria de $X(t)$ en el tiempo t .

Un proceso estocástico M_t es llamado Martingala respecto a la filtración F_t con $t \geq 0$ si

- i) M_t es adaptado a la filtración $F_{t \geq 0}$
- ii) $E[|M_t|] < \infty \quad \forall t \geq 0$
- iii) $E[M_t | F_{t_0}] = M_{t_0} \quad \forall t \geq t_0$

(3.63)

El movimiento browniano es una martingale, otra forma de referirse usualmente a las martingales es como juego justo. Diremos que un proceso estocastico adaptado F_t^H $M(tw)$ es cuasi martingale si $M(t) \in G^*$, $\forall t$ y $\tilde{E}_s[M(t)] = M(s), \forall t > s$ y se siguen los resultados para los brownianos fraccionales, también del trabajo de Necula(2002)

- a) $B_H(t)$ es cuasi martingale
- b) Sea $f \in L^2_\phi(R)$ y $\epsilon(t) := \exp(\int_0^t f(s)dB_H(s) - \frac{1}{2}|\int_0^t f(s)ds|_\phi^2)$ decimos que $\epsilon(t)$ es cuasi Martingale
- c) Sea $f \in L^{1,2}_\phi(R)$ y $M(t) := \int_0^t f(s, w)dB_H(s)$ tenemos que $M(t)$ es cuasi Martingale

(3.64)

3.3.2 Teorema Fraccional Clarck-Ocone

- a) Sea $F \in G^*$ y F es F_T^H medible. Entonces $\tilde{E}_t[D_t F] \in G^*$ y

$$F(w) = E[F] + \int_0^T \tilde{E}_t[D_t F] \diamond W_H(t) \quad (3.65a)$$

- b) Sea $F \in L^2(\mu)$ y F es F_T^H medible. Entonces $\tilde{E}_t[D_t F] \in L^{1,2}_\phi$ y

$$F(w) = E[F] + \int_0^T \tilde{E}_t[D_t F] \diamond dB_H(t) \quad (3.65b)$$

El teorema anterior, es un resultado del trabajo de Necula(2002)

3.3.3 Principales Resultados

A continuación se muestran algunos importantes resultados, obtenidos y demostrados por Necula(2002) sobre expectativas cuasi-condicionales que tendrán su aplicación principalmente en determinación del precio de una opción call europea del Capítulo 4.

Sea (Ω, K, μ) un campo de probabilidad tal que $B_H(t, w)$ es un movimiento browniano fraccional con respecto a μ .

Resultado 1

Para toda t tal que $0 < t < T$ y $\lambda \in C$ tenemos que:

$$\tilde{E}_t[e^{\lambda B_H(T)}] = e^{\lambda B_H(T) + \frac{\lambda^2}{2}(T^{2H} - t^{2H})}. \quad (3.66)$$

Resultado 2

Sea f una función tal que $\tilde{E}[f(B_H(T))] < \infty$ entonces $\forall t < T$

$$\tilde{E}[f(B_H(T))] = \int_R \frac{1}{\sqrt{2\pi(T^{2H} - t^{2H})}} \exp\left(-\frac{(x - B_H(t))^2}{2(T^{2H} - t^{2H})}\right) f(x) dx. \quad (3.67)$$

Resultado 3

Sea $A \in B(R)$ entonces

$$\tilde{E}_t[\mathbf{1}_A(B_H(T))] = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi(T^{2H} - t^{2H})}} \exp\left(-\frac{(x - B_H(t))^2}{2(T^{2H} - t^{2H})}\right) dx. \quad (3.68)$$

Resultado 4

Asegura que hay una medida μ^* tal que $B_H^*(t)$ es un movimiento browniano bajo μ^* , denotaremos que $\tilde{E}[\cdot]$ la expectativa cuasicondicional respecto a μ^* , considere

$$Z(t) = \epsilon(-\theta \mathbf{1}_{[0,t]}) = \exp\left(-\theta B_H(t) - \frac{\theta^2}{2} t^{2H}\right). \quad (3.69)$$

Resultado 5

Sea f una función tal que $\tilde{E}[f_H(T)] < \infty$ para toda $t \leq T$

$$\tilde{E}_t^*[f(B_H(T))] = \frac{1}{Z(t)} \tilde{E}_t[f(B_H(T)Z(T))]. \quad (3.70)$$

En los primeros tres capítulos se presentan bases y el marco sobre el que desarrollaran las aplicaciones en los capítulos 4, 5 y 6. Los estudios de las variables financieras sobre normalidad, análisis de independencia y sobre coeficiente Hurst del IPC, TDC, DJI y TD-CUS. Así como los las definiciones, lemas, teoremas y resultados matemáticos construidos desde un espacio más general como es el espacio de Hilbert del presente capítulo sirven de soporte, como es el caso de movimiento geométrico fraccional, la fórmula fraccional de Itô y las esperanzas cuasicondicionales para que en los capítulos 4 y 5 se realice el planteamiento, la solución y la valuación de opciones call europeas y la deducción de la estructura de plazos del modelo Vasicek, así como los comparativos con los modelos tradicionales. También se hacen uso de estas herramientas en la aplicación del Método H-J-B del capítulo 6.

Capítulo 4

Ecuación Black-Scholes Fraccional

4.1 Mercados de Movimiento Browniano y Browniano Fraccional

4.1.1 Ecuación Black-Scholes Tradicional

Los contratos de futuros y opciones reciben el nombre genérico de derivados o de pasivos contingentes. Una opción es un contrato que da al poseedor el derecho, más no la obligación de comprar o vender cierto activo a un precio convenido en algún momento fijo del futuro. En particular una opción Call Europea con precio de ejercicio K , con vencimiento en T y sobre un subyacente S , es un contrato que da el derecho a comprar o vender el activo subyacente a un precio K en el tiempo T .

La ecuación Black-Scholes publicada 1973 y derivada por Fischer Black y Myron Scholes (simultáneamente por RC Merton) es una ecuación lineal diferencial parcial parabólica con valores en la frontera. Dicha ecuación presupone que el comportamiento del subyacente asociado al derivado puede modelarse en su término estocástico con un movimiento browniano y para su derivación hace uso de al menos dos conceptos básicos de Finanzas: la cobertura y el no arbitraje.

La reducción de la incertidumbre o aleatoriedad es conocida como cobertura y una eliminación perfecta del riesgo utilizando un portafolio de dos instrumentos (una opción y su subyacente) es conocida como cobertura delta. Una vez que se cuenta con el rendimiento libre de riesgo del portafolio anterior, este debería de ser igual al rendimiento de una cuenta bancaria que pague una cierta tasa de interés fija, recordando que arbitraje es la posibilidad de hacer utilidades libres de riesgo sin un capital inicial o bien la posibilidad de generar utilidades infinitas con una pequeña inversión inicial.

Para la deducción del modelo de Black-Scholes se considera los siguientes supuestos:

- i) Existe una tasa libre de riesgos constante y varianza constante
- ii) El mercado es liquido para el activo subyacente y el derivado
- iii) No hay costos de transacción
- iv) Se presta y se pide prestado a la misma tasa
- v) No se pagan dividendos.
- v) No hay oportunidades de arbitraje.

Utilizando los conceptos y supuestos anteriores se llega a la ecuación de Black-Scholes, donde $C = C(t, S)$ es el derivado de un subyacente S :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \quad (4.1a)$$

con condición de frontera

$$C(t, S) = \text{Max}(S - K, 0). \quad (4.1b)$$

cuya solución para una opción call europea en cualquier $0 \leq t \leq T$ precio de ejercicio K , vencimiento T , varianza σ^2 y tasa libre de riesgo r está dada por:

$$C(t, S(t)) = S(t)N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \quad (4.2a)$$

en donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (4.2b)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \quad (4.2c)$$

4.1.2 Precio de una Opción Call Europea en un Mercado Browniano Fraccional

Consideremos dos posibilidades de inversión en un mercado Black-Scholes Fraccional: una cuenta bancaria con una tasa libre de riesgo y una acción en un mundo neutral al riesgo modelado por un movimiento geométrico browniano fraccional (ecuación 3.45) descritos por las ecuaciones siguientes

$$dM(t) = rM(t)dt, \quad M(0) = 1, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.3)$$

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)d\tilde{B}_H(t), \quad S(0) = S > 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.4)$$

El precio de un título en $0 \leq t \leq T$ medible acotado con $F \in L^2(\mu)$ está dado por

$$F(t) = e^{-r(T-t)}\tilde{E}_t[F], \quad (4.5)$$

donde denotaremos por $\tilde{E}[\cdot]$ las expectativas cuasicondicionales con respecto a las medidas neutrales al riesgo del capítulo 3. Algunos trabajos ¹¹ han demostrado que este mercado es completo y no existe arbitraje.

El precio de una opción call europea en cualquier $0 \leq t \leq T$, dado un precio de ejercicio K , una tasa libre de riesgo r , una volatilidad σ^2 , un vencimiento en T y un coeficiente Hurst H de la serie financiera subyacente esta dado por:

¹¹ Ver Hu and Oksendal (2000)

$$C(t, S(t)) = S(t)N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \quad (4.6)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}, \quad (4.7a)$$

y

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}. \quad (4.7b)$$

Demostración ¹²

El precio de una opción call en cualquier $0 \leq t \leq T$, un precio de ejercicio K , una tasa libre de riesgo r , volatilidad σ^2 y vencimiento en T está dado por la siguiente expresión de expectativas cuasi condicionales:

$$\begin{aligned} C(t, S(t)) &= \tilde{\mathbb{E}}_t[e^{-r(T-t)}\text{Max}(S(T) - K, 0)] \\ &= \tilde{\mathbb{E}}_t[e^{-r(T-t)}S(T)1_{S(T)>K}] - Ke^{-r(T-t)}\tilde{\mathbb{E}}_t[1_{S(T)>K}]. \\ &= e^{-r(T-t)}\tilde{\mathbb{E}}_t[S(T)1_{S(T)>K}] - Ke^{-r(T-t)}\tilde{\mathbb{E}}_t[1_{S(T)>K}] \end{aligned} \quad (4.8)$$

Recordando que $S(t)$ es un geométrico browniano fraccional, de la ecuación (3.41)

$$S(t) = S_0 e^{\sigma B_H + \mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^{2H}}. \quad (4.9)$$

Denotaremos a d_2^* por

$$d_2^* = \frac{\ln(K/S) - rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T^{2H}}{\sigma} \quad (4.10)$$

Calculando el primer término de la ecuación (4.8), y utilizando el resultado de la ecuación (3.67) se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}_t[1_{S(T)>K}] &= \tilde{\mathbb{E}}_t[1_{x>d_2^*}(B_H(T))] \\ &= \int_{d_2^*}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T^{2H}-t^{2H})}} \exp\left(-\frac{(x-B_H(t))^2}{2(T^{2H}-t^{2H})}\right) dx \\ &= \int_{\frac{d_2^* - B_H(t)}{\sqrt{2\pi(T^{2H}-t^{2H})}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{B_H(t) - d_2^*}{\sqrt{2\pi(T^{2H}-t^{2H})}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\ &= N(d_2). \end{aligned} \quad (4.11)$$

¹² Esta basada en el trabajo de Necula(2002)

Ahora consideremos el proceso

$$B_H^* = B_H(t) - \sigma t^{2H}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.12)$$

y supongamos que hay una medida μ^* bajo la cual $B_H^*(t)$ es un movimiento browniano fraccional, denotaremos

$$Z(t) = \exp(\sigma B_H(t) - \frac{\sigma}{2} t^{2H}). \quad (4.13)$$

Y utilizando el resultado 5 del capítulo 3

$$\tilde{E}_t^*[f(B_H(T))] = \frac{1}{Z(t)} \tilde{E}_t[B_H(T)Z(T)] \quad (4.14)$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_t[S(T)1_{S(T)>K}] &= e^{rT} \tilde{E}_t^*[Z(T)1_{x>d_2^*(B(T))}] \\ &= e^{rT} Z(t) \tilde{E}_t^*[1_{x>d_2^*(B(T))}] \\ &= e^{rT} Z(t) \tilde{E}_t^*[1_{S(T)>K}]. \end{aligned} \quad (4.15).$$

Además de la ecuación 4.9 podemos escribir $\ln(S(t))$:

$$\begin{aligned} \ln(S(T)) &= \ln S + rT - \frac{\sigma^2}{2} T^{2H} + \sigma B_H(T) \\ &= \ln S + rT + \frac{\sigma^2}{2} T^{2H} + \sigma B_H^*(T), \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde

$$d_1^* = \frac{\ln(K/S) - rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T^{2H}}{\sigma}. \quad (4.17)$$

Por otro lado, para calcular el segundo término de la ec (4.8) y utilizando el resultado 2 del capítulo 3

$$\begin{aligned} \tilde{E}_t^*[1_{S(T)>K}] &= \tilde{E}_t^*[1_{x>d_1^*(B(T))}] \\ &= \int_{d_1^*}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T^{2H}-t^{2H})}} \exp\left(-\frac{(x-B_H^*(t))^2}{2(T^{2H}-t^{2H})}\right) dx \\ &= \int_{\frac{d_1^*-B_H^*(t)}{\sqrt{(T^{2H}-t^{2H})}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{B_H^*(t)-d_1^*}{\sqrt{(T^{2H}-t^{2H})}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\ &= N(d_1), \end{aligned} \quad (4.18)$$

entonces se obtiene

$$\tilde{E}_t[S(T)1_{S(T)>K}] = e^{rT}Z(T)N(d_1) = e^{rT}e^{-rT}S(t)N(d_1) = S(t)N(d_1) \quad (4.19)$$

Se hace notar que la diferencia en la valuación con respecto al precio del call en un mercado Black-Scholes tradicional es que en los términos d_1 y d_2 están considerados los parámetros H y el tiempo inicial t .

4.1.3 Ecuación de Black-Scholes Fraccional

El objetivo de la presente sección es derivar una generalización de la Ecuación Black-Scholes considerando los mismos supuestos de la ecuación browniana clásica pero con la diferencia de que en el término estocástico del activo subyacente estará descrito por un movimiento browniano fraccional.

Consideremos que el precio de un derivado sobre un activo subyacente $S(T)$ está dado por $C(t, S(t))$ que es la solución de la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial C(t, S)}{\partial t} + H\sigma^2 t^{2H-1} S^2 \frac{\partial^2 C(t, S)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C(t, S)}{\partial S} - rC(t, S) = 0 \quad (4.20a)$$

con la condición de Frontera

$$C(t, S) = \text{Max}(S - K, 0). \quad (4.20b)$$

Demstración

Se considera el comportamiento del activo subyacente como:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB_H(t). \quad (4.21)$$

y de un derivado, que puede ser un call europeo, función del tiempo descrito por la siguiente expresión de acuerdo a la ecuación(3.46) del Capítulo 3

$$dC(t, S) = \frac{\partial C(t, S)}{\partial t}dt + \mu S \frac{\partial C(t, S)}{\partial S}dt + \sigma S \frac{\partial C(t, S)}{\partial S}dB_H(t) + \sigma D_s^\phi S(t) \frac{\partial^2 C(t, S)}{\partial S^2}. \quad (4.22)$$

Consideremos también del Capítulo 3 la derivada en un MFB(Para mayores detalles consultar Duncan, Hu and Pasik-Duncan (2002)y Necula (2002))

$$D_\tau^\phi S(\tau) = \int_0^\infty D_\tau S(\tau)\phi(\tau, u)du, \quad (4.23)$$

y recordemos que

$$S(t) = S_0 \exp(\sigma B_H(t) + \mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^{2H}). \quad (4.24)$$

entonces para poder calcular la derivada se necesita primero calcular $D_\tau S(\tau)$

$$\begin{aligned} D_\tau S(\tau) &= S(\tau) D_u[\sigma B_H(\tau) + \mu\tau - \frac{\sigma^2}{2}\tau^{2H}] \\ &= S(\tau) D_u(\sigma B_H(\tau)) \\ &= \sigma S(\tau) 1_{[0,\tau]}(u) \end{aligned} \quad (4.25)$$

se sigue que sustituyendo la ecuación (4.25) en la ecuación (4.23)

$$\begin{aligned} D_\tau^\phi S(\tau) &= \int_0^\infty \sigma S(\tau) 1_{[0,\tau]}(u) \phi(\tau, u) du = \sigma S(\tau) \int_0^\tau \phi(\tau, u) du \\ &= \sigma S(\tau) \int_0^\tau H(2H-1)t^{2H-2} dt = \sigma S(\tau) H \tau^{2H-1}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Con lo anterior el diferencial del derivado como función del subyacente y t, el Lema de Itô generalizado se escribe como:

$$dC(t, S) = \left[\frac{\partial C(t, S)}{\partial t} + \mu S \frac{\partial C(t, S)}{\partial S} + \sigma^2 S^2 H t^{2H-1} \frac{\partial^2 C(t, S)}{\partial S^2} \right] dt + \sigma S \frac{\partial C(t, S)}{\partial S} dB_H(t). \quad (4.27)$$

Siguiendo la misma idea de la ecuación Black-Scholes original, se construye un portafolio de cobertura con una combinación de un derivado y su subyacente:

$$\pi = w_1 S(t) + w_2 C(t, S) \quad (4.28)$$

o bien el cambio diferencial del portafolio

$$d\pi = w_1 dS(t) + w_2 dC(t, S) \quad (4.29)$$

sustituyendo dS y dC en la ecuación (4.28) tenemos

$$\begin{aligned} d\pi &= w_1 [\mu S dt + \sigma S dB_H] + w_2 \left[\left(\frac{\partial C(t, S)}{\partial t} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mu S \frac{\partial C(t, S)}{\partial S} + \sigma^2 S^2 H t^{2H-1} \frac{\partial^2 C(t, S)}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial C(t, S)}{\partial S} dB_H(t) \right]. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Una posible combinación de posiciones que hacen que la parte estocástica se elimine es:

$$w_1 = -\frac{\partial C}{\partial S}, \quad w_2 = 1 \quad (4.31)$$

Entonces el cambio en el portafolio denotado por $d\pi^{(1)}(t)$ queda como:

$$d\pi^{(1)} = \frac{\partial C(t, S)}{\partial t} + \sigma^2 S^2 H t^{2H-1} \frac{\partial^2 C(t, S)}{\partial S^2}. \quad (4.32)$$

Por otra parte, el rendimiento de un portafolio libre de riesgo de una cuenta bancaria esta dado por:

$$d\pi(t)^{(2)} = \pi r dt = \left(-\frac{\partial C}{\partial S} + C\right) r dt. \quad (4.33)$$

Debido a la existencia no arbitraje podemos igualar los rendimientos de los portafolios (1) y (2) y después de organizar términos llegamos a la ecuación Black-Scholes Fraccional:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \sigma^2 S^2 H t^{2H-1} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + r S \frac{\partial C}{\partial S} - r C = 0 \quad (4.34a)$$

con condiciones de Frontera:

$$C(t, S) = \text{Max}(S - K, 0). \quad (4.34b)$$

De forma alternativa la ecuación de Black-Scholes Fraccional también se puede representar en términos de las griegas y comprobar que la solución encontrada ecuación (4.6) en la sección anterior satisface la ecuación ¹³:

$$\Theta + r S \delta + H \sigma^2 t^{2H-1} S^2 \Gamma - r C = 0. \quad (4.35)$$

y donde cada una de las griegas en el caso browniano fraccional esta dado por(Para mayor detalle consultar Necula 2002):

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) \quad (4.36a)$$

$$\nabla = \frac{\partial C}{\partial K} = -e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (4.36b)$$

$$v = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S f(d_1) \sqrt{T^{2H} - t^{2H}} \quad (4.36c)$$

$$\rho = \frac{\partial C}{\partial r} = (T - t) K e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (4.36d)$$

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{N''(d_1)}{S \sigma \sqrt{T^{2H} - t^{2H}}} \quad (4.36e)$$

$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial t} = -r K e^{-r(T-t)} N(d_2) - H t^{2H-1} \sigma K e^{-r(T-t)} \frac{N'(d_2)}{\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}. \quad (4.36f)$$

¹³ Esta propuesta puede revisarse en el trabajo de Necula(2002)

Cuando se sustituyen las ecuaciones 4.36 (a,e, f) el valor de $C(t,S)$ y la identidad ¹⁴ siguiente se verifica que la solución propuesta satisface la ecuación Black-Scholes Fraccional. La f es la función de densidad de una normal estándar.

4.2 Aplicación a la Valuación de Opciones Call Europeas

4.2.1 Resultados del Mercado de Mexico y de Estados Unidos

En esta sección se realiza la valuación de opciones call europeas sobre los subyacentes ($S(t)$) del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC), del Dow Jones (DJI), del tipo de cambio peso dólar (TDC) y del tipo de cambio dólar-euro (TDCUS) para diferentes valores de H que están entre 0.5 y 1.0 . En particular, se conocen los valores H de cada una de las series anteriores, ya que fueron estimados en el capítulo 2 con la metodología R/S que determina las características de independencia de las variables. Los parámetros necesarios con los que se evaluaron las opciones call aparecen en la siguiente Tabla 4.1 para el caso de los mercados mexicano y norteamericano.

Tabla 4.1

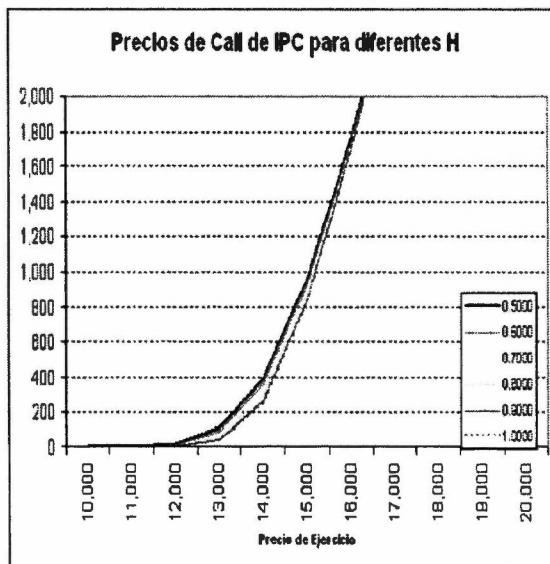
Serie	<i>D.E.</i>	<i>r</i>	K	T	<i>H</i>
IPC	0.1369	0.09	15,000	0.5	0.5573
DJI	0.1156	0.09	11,000	0.5	0.5038
TDC	0.0572	0.03	10.5	0.5	0.5255
TDCUS	0.0561	0.03	0.78	0.5	0.5587

Las gráficas 4.1 y 4.2 muestran diferentes curvas de precios de las opciones call de los índices IPC y DJI respectivamente como función de $S(t)$ y del coeficiente Hurst H . Se puede observar que conforme el valor de H va creciendo las curvas del precio del call se van desplazando de forma casi paralela hacia la parte inferior de la figura. Este comportamiento para el caso del precio de los dos índices puede resumirse como, dado un valor de $S(t)$ mientras el valor de H va aumentando de 0.5 a 1 es decir entre más persistente sea la serie del subyacente, la valuación teórica tradicional Black-Scholes de un call es mayor sobrevaluando que el valor teórico de una opción valuada pro Black-Scholes Fraccional. En otras palabras, entre mayor sea la dependencia de una serie financiera con su pasado, el precio de una opción call europea calculado con la ecuación fraccional será menor que el valor de un call europeo obtenido por el método tradicional. El mismo efecto sucede con las opciones de tipo put europea.

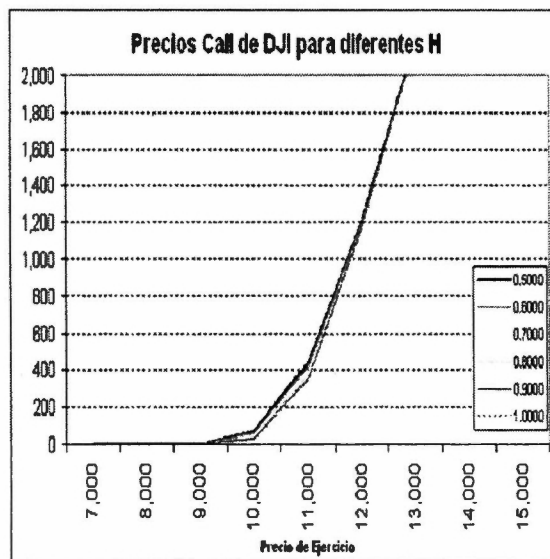
Observando las mismas gráficas parece que el mayor cambio en el precio del call para ambos índices ocurre cuando se encuentran cerca del precio de ejercicio. Sin embargo, la mayor diferencia ocurre cuando se combinan los dos efectos: estar fuera del dinero $S < K$ y H muy cercana a uno. En este caso, para cualquiera de los dos índices, el precio de la opción fraccional puede llegar a estar cien por ciento por debajo de la valuación

¹⁴ $SN'((d_1) = Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)$

tradicional. Para los valores específicos de H obtenidos de la metodología del Capítulo 2 y que aparecen en la Tabla 4.1 las valuaciones de las opciones call fraccional para los índices IPC y DJI pueden llegar a estar por debajo del precio call tradicional en 44% y 8% respectivamente. (Se puede consultar Apéndice C para revisar cambios porcentuales.)



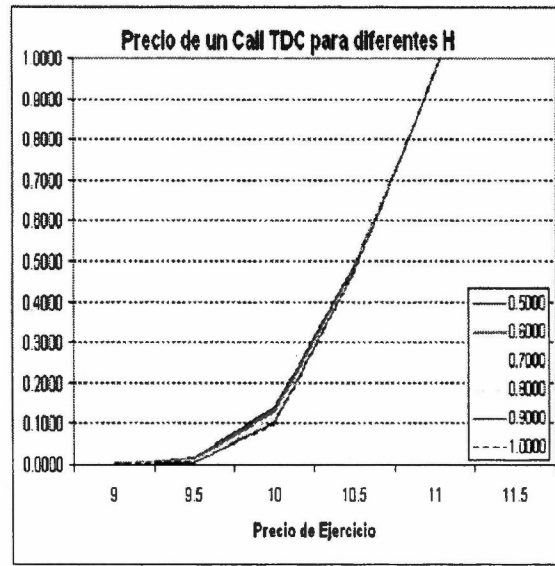
Gráfica 4.1



Gráfica 4.2

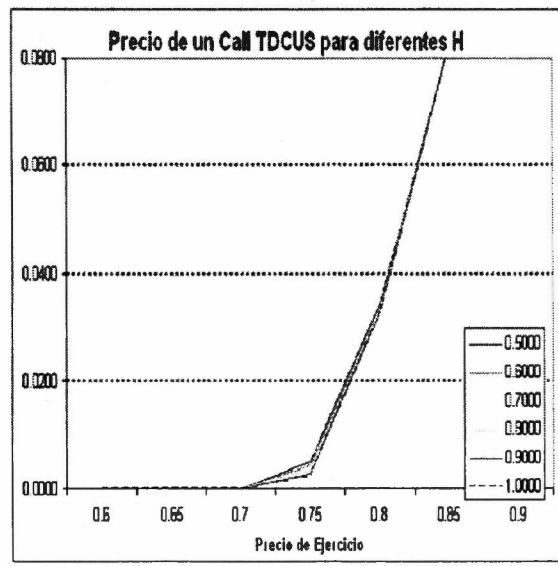
En las gráficas 4.3 y 4.4 de las opciones call sobre los tipos de cambio TDC y TDCUS como función de $S(t)$ también se observa el mismo efecto del caso anterior. Este efecto se vuelve más importante conforme H se acerca a 1.

En particular para los valores calculados de H del capítulo 2 para TDC y TDUS las valuaciones del nuevo modelo estarán por debajo del 16% y 82% respectivamente con respecto a la valuación Black-Scholes tradicional.



Gráfica 4.3

La diferencia para los dos tipos también se acentúa cuando como en el caso anterior cuando se está fuera del dinero y el coeficiente Hurst es casi uno, entonces se puede llegar a un valor de la opción del método fraccional cien por ciento menor que en el caso Black-Scholes tradicional. (Consultar apéndice C)



Gráfica 4.4

Ecuación Black-Scholes con MBF

El mismo comportamiento de los calls con subyacentes de índices y tipos de cambio también se aprecia en los PUTS europeos sobretodo cuando se está cerca de H igual a uno y fuera del dinero $S > K$.

En el siguiente capítulo de forma similar al presente, se harán las deducciones de la ecuación general de los bonos y se estimará la estructura de plazos proponiendo un modelo de tasa corta Vasicek basados en el modelo fraccional que dependerá del coeficiente Hurst del capítulo 2 y de la tasa interbancaria (TIIE) considerada como tasa corta. En la parte final se compara las curvas de tasas obtenidas por los dos procesos estocásticos.

Capítulo 5

Modelo de Tasas con Movimiento Browniano Fraccional

5.1 Modelo de Tasas Vasicek con Movimiento Browniano Fraccional

5.1.1 Modelo de Tasas Vasicek con Movimiento Browniano

El modelo de tasas Vasicek, desarrollado por el autor del mismo nombre en 1977, describe el comportamiento de la tasa corta o tasa spot. A partir de esta descripción es posible deducir una ecuación general de los bonos, que es una ecuación lineal diferencial parcial de segundo orden con valores a la frontera, de hecho, su estructura es similar a la ecuación de Black-Scholes. La solución a dicha ecuación nos proporciona el precio de un bono en sus diferentes plazos y de manera equivalente a partir de esta solución se puede obtener la función de estructura de plazos, es decir la tasa de interés también para cada uno de los plazos.

Para la deducción de la ecuación general de los bonos se utilizan dos principios: la cobertura y la no existencia de arbitraje. El primero se utiliza en la construcción de un portafolio integrado por dos bonos con diferentes vencimientos y que en una combinación de ambos se elimina la parte estocástica del problema. La condición de arbitraje se ocupa en el momento de igualar los rendimientos libres de riesgo con los de una cuenta bancaria de tasa fija.

Una característica importante del modelo propuesto es la reversión a la media, es decir, que no importa cual es el valor inicial de la tasa corta, en el largo plazo se converge a un cierto valor de tasa de interés. A continuación se presenta la forma de comportamiento exógeno de la tasa en el modelo Vasicek ¹⁵:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW, \quad (5.1)$$

en donde W es un proceso Wiener, y b es el valor del parámetro al que converge la tasa corta, los valores de a y b pueden deducirse de los históricos de la tasa corta. Con dicho modelo se llega a construir la estructura de plazos que tiene la forma siguiente:

$$B = B(t, r_t) = e^{A(t,T) - r_t D(t,T)} \quad (5.2a)$$

con condición de frontera siguiente:

$$A(T, T) = D(T, T) = 0. \quad (5.2b)$$

y en donde $A(t, T)$ y $D(t, T)$ estan dados por:

¹⁵ Para mayor detalle consultar Vasicek(1977)

$$A = \frac{1}{a^2} (D - (T - t)) (a^2 b - \frac{1}{2} \sigma^2) - \frac{\sigma^2 D^2}{4a} \quad (5.2c)$$

$$D(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}. \quad (5.2d)$$

Se debe mencionar la existencia de otros supuestos importantes, como es la existencia de un mercado donde se puede prestar y pedir prestado y la simetría en la información de los agentes. También hay que mencionar que una limitación importante del modelo Vasicek, es que su función de estructura de plazos, dependiendo del valor de los parámetros, pueden llegar a proponer tasas de interés negativas.

5.1.2 Modelo de Tasas Vasicek con Movimiento Browniano Fraccional

En esta sección se propone que la tasa corta sea descrita por un modelo de Vasicek con regresión a la media, pero el término estocástico debe estar modelado por un movimiento browniano fraccional a diferencia del caso anterior, es decir, un modelo para series de tasas que posean características más generales que solamente la independencia. Además, se consideran los mismos supuestos mencionados en la sección anterior del caso Vasicek modelado por el browniano tradicional.

Se inicia considerando un modelo de tasa corta de Vasicek con reversión a la media, donde dB_H es un movimiento browniano fraccional

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dB_H. \quad (5.3)$$

Con esta propuesta de esta tasa corta de acuerdo al modelo de Vasicek Fraccional es posible construir la ecuación general de los bonos con la condición de frontera siguiente:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \sigma^2 H t^{2H-1} \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + a(b - r_t) \frac{\partial B}{\partial r} - rB = 0 \quad (5.4a)$$

$$B(r_T, T; T) = 1. \quad (5.4b)$$

Demostración

Se considera dos bonos de tasa fija con diferentes vencimientos en T_1 y T_2 dados por:

$$B_1 = B_1(t, r_t; T_1) \quad (5.5a)$$

$$B_2 = B_2(t, r_t; T_2). \quad (5.5b)$$

Y se construye un portafolio que este integrado por los dos bonos con diferentes fechas de vencimiento

$$\pi = w_1 B_1 + w_2 B_2, \quad (5.6)$$

o bien en términos de incrementos, el cambio en el portafolio es:

$$d\pi = w_1 dB_1 + w_2 dB_2. \quad (5.7)$$

Por otra parte, se sabe que el cambio en el precio de cualquiera de los dos bonos, de acuerdo al lema de Itô fraccional del Capítulo 4 ecuación (4.27), esta dado por:

$$dB_i = \left(\frac{\partial B_i}{\partial t} + a(b - r_t) \frac{\partial B_i}{\partial r} + \sigma^2 H t^{2H-1} \frac{\partial^2 B_i}{\partial r^2} \right) dt + \frac{\partial B_i}{\partial r} \sigma dB_{iH(t)}. \quad (5.8)$$

Se sustituye la ecuación (5.8) en (5.7) y el cambio del valor del portafolio será:

$$\begin{aligned} d\pi = & w_1 \left[\left(\frac{\partial B_1}{\partial t} + a(b - r_t) \frac{\partial B_1}{\partial r} + \sigma^2 H t^{2H-1} \frac{\partial^2 B_1}{\partial r^2} \right) dt + \frac{\partial B_1}{\partial r} \sigma dB_{1H(t)} \right] \\ & + \\ & w_2 \left[\left(\frac{\partial B_2}{\partial t} + a(b - r_t) \frac{\partial B_2}{\partial r} + \sigma^2 H t^{2H-1} \frac{\partial^2 B_2}{\partial r^2} \right) dt + \frac{\partial B_2}{\partial r} \sigma dB_{2H(t)} \right]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Después de organizar términos se llega a lo siguiente:

$$d\pi^{(1)} = w_1 \left(\frac{\partial B_1}{\partial t} + \sigma^2 H t^{2H-1} \frac{\partial^2 B_1}{\partial r^2} \right) dt + w_2 \left(\frac{\partial B_2}{\partial t} + \sigma^2 H t^{2H-1} \frac{\partial^2 B_2}{\partial r^2} \right) dt, \quad (5.10)$$

con la siguiente condición se busca eliminar la parte estocástica (browniano fraccional) para tener un portafolio de cobertura

$$w_1 \frac{\partial B_1}{\partial r} + w_2 \frac{\partial B_2}{\partial r} = 0. \quad (5.11)$$

Una posible solución que hace satisface la ecuación anterior y hace el valor estocástico cero es:

$$w_1 = 1, \quad (5.12a)$$

$$w_2 = - \frac{\frac{\partial B_1}{\partial r}}{\frac{\partial B_2}{\partial r}}. \quad (5.12b)$$

Por otro lado, el rendimiento de un portafolio en un mercado libre de riesgos esta dado por:

$$d\pi^{(2)} = r_t \pi dt = r_t \left(B_1 - \frac{\frac{\partial B_1}{\partial r}}{\frac{\partial B_2}{\partial r}} \right). \quad (5.13)$$

Si se iguala el rendimiento libre de riesgo de los portafolios 1 y 2 y se tiene:

$$\frac{\frac{\partial B_1}{\partial t} + \sigma^2 H t^{2H-1} \frac{\partial^2 B_1}{\partial r^2} - r B_1}{\frac{\partial B_1}{\partial r}} = \frac{\frac{\partial B_2}{\partial t} + \sigma^2 H t^{2H-1} \frac{\partial^2 B_2}{\partial r^2} - r B_2}{\frac{\partial B_2}{\partial r}}, \quad (5.14a)$$

de la ecuación anterior, la forma de la expresión es independiente del vencimiento del bono, es decir:

$$\frac{\frac{\partial B}{\partial t} + \sigma^2 H t^{2H-1} \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} - r B}{\frac{\partial B}{\partial r}} = m(r, t). \quad (5.14b)$$

Es fácil comprobar como en el caso tradicional que m debe ser:

$$m = -a(b - r_t). \quad (5.15)$$

Y de esta forma se llega a la ecuación general de los bonos

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \sigma^2 H t^{2H-1} \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + a(b - r_t) \frac{\partial B}{\partial r} - r B = 0,$$

con la condición de frontera $B(r_T, T; T) = 1$

Solución de la Ecuación General de los Bonos Fraccional

La solución de la ecuación general de los bonos (5.4 a y b) nos proporciona el precio del bono en un mercado browniano fraccional, para encontrarla se propone una solución del siguiente tipo:

$$B = B(t, r_t) = e^{A(t,T) - r_t D(t,T)} \quad (5.16a)$$

con

$$A(T, T) = D(T, T) = 0. \quad (5.16b)$$

Se sustituye las derivadas parciales $(\frac{\partial B}{\partial t})$, $(\frac{\partial B}{\partial r})$ y $(\frac{\partial^2 B}{\partial r^2})$ y derivando respecto de B se llega a:

$$\frac{\partial A}{\partial t} - r \frac{\partial D}{\partial t} + \sigma^2 H t^{2H-1} D^2 - a(b - r_t) D - r_t = 0. \quad (5.17)$$

Luego se deriva respecto a r_t y se obtiene una ecuación con una sola variable que resulta más fácil de resolver

$$\frac{\partial D}{\partial t} = aD(t, T) - 1 \quad (5.18.)$$

con solución

$$D(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}. \quad (5.19)$$

Se sustituye en las ecuaciones anteriores y se llega a la siguiente expresión que sólo depende de A:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = b - be^{-a(T-t)} - \frac{\sigma^2 H}{a^2} t^{2H-1} + \frac{2\sigma^2}{a^2} t^{2H-1} e^{-a(T-t)} - \frac{\sigma^2 H}{a^2} t^{2H-1} e^{-2a(T-t)}. \quad (5.20)$$

Resolviendo la ecuación diferencial anterior, que es relativamente directo y después de ordenar términos se llega a:

$$A = \frac{b}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^3} - \frac{\sigma^2}{4a^3} - b(T-t) - \frac{b}{a} e^{-a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2a^2} (T^{2H} - t^{2H}) + \frac{2\sigma^2 H}{a^3} e^{-a(T-t)} \left(t - \frac{1}{a}\right)^{2H-1} - \frac{\sigma^2 H}{2a^3} e^{-2a(T-t)} \left(t - \frac{1}{2a}\right)^{2H-1} \quad (5.21)$$

En el caso límite cuando $H \rightarrow \frac{1}{2}$ se tiene que los valores de de las funciones $A(t, T)$ y $D(t, T)$ de caso browniano fraccional convergen a la solución del browniano tradicional, es decir

$$D_{MBF} \rightarrow D_{MB} \text{ y } A_{MBF} \rightarrow A_{MB} \text{ entonces } B_{MBF}(t, T) \rightarrow B_{MB}(t, T)$$

y como $D \neq D(H)$, el valor de la función D en el caso browniano y browniano fraccional es el mismo.

5.2 Aplicación del Modelo de Tasas Vasicek con MBF al caso de tasas en México

5.2.1 Determinación de los parámetros del Modelo de Tasas Vasicek con MBF

Así como es posible conocer precio de un bono $B(t, r_t; T)$ como función de $D(t, T)$ y $A(t, T)$ en el caso del mercado browniano fraccional, también es se puede, a partir del precio del bono, determinar la función de estructura de plazos con ayuda de la expresión siguiente:

$$R(t, T) = \frac{rD - A}{T - t}. \quad (5.22)$$

Para poder determinar la estructura de plazos, fue necesario primero calcular los parámetros que aparecen en la Tabla 5.1. Para el análisis se tomaron 320 datos la tasa interbancaria diaria de México (TIIE) del 31 de Enero de 2005 al 4 de Abril de 2006. En donde σ corresponde a la desviación estándar histórica de la serie y los valores de a y b se obtienen a partir de los estimadores de la regresiones siguientes, donde r_t es la tasa TIIE de corto plazos para el tiempo t :

$$r_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 r_t + \epsilon_t \quad (5.23)$$

Si discretizamos la ecuación (5.3) para r_t y t e identificamos términos con la ecuación (5.23), concluimos que pueden determinarse los valores de a y b a partir de los estimadores β_0 y β_1 de la regresión anterior

$$a = 1 - \beta_1 \tag{5.24a}$$

$$b = \frac{\beta_0}{1 - \beta_1} \tag{5.24b}$$

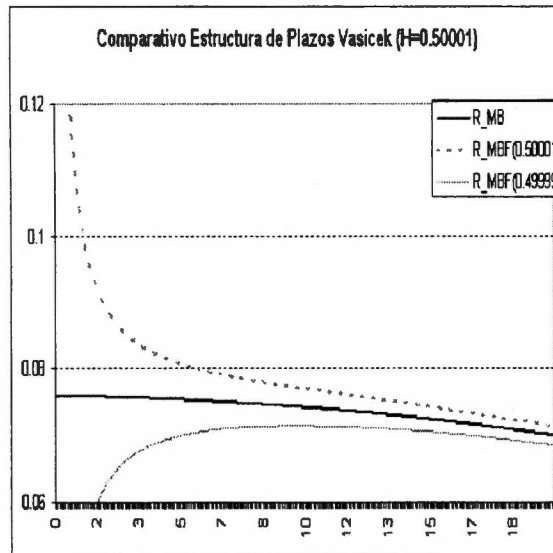
Los valores de los parámetros se muestran en la tabla 5.1 siguiente, se debe hacer notar que al momento de hacer la regresión estamos suponiendo que los errores se comportan de forma normal, algo que en estricto sentido no es verdad, pero que se tolera para una primera aproximación debido a que forma parte de los supuestos básicos de las regresiones:

Tabla 5.1

Párametros	b	a	r	σ
Valores	0.099	-0.006	7.6	0.008

5.2.2 Resultados del Modelo de Tasas Vasicek con MBF

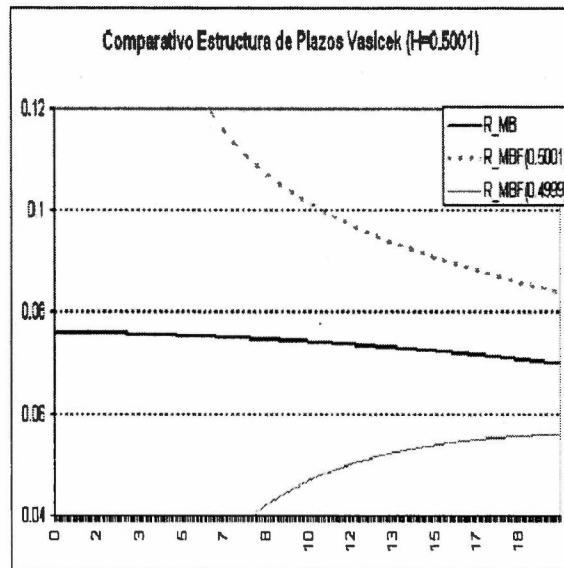
Las gráficas 5.1 y 5.2 muestran un comparativo de las curvas de la estructura de plazos del modelo Vasicek obtenidas a partir de un modelo de tasas corta con término browniano tradicional y browniano fraccional para valores de H ligeramente diferentes de 0.5. Se debe mencionar que la curva de estructura de plazos es mucho más sensible a pequeñas variaciones del coeficiente Hurst que en el caso de la valuación del Call Europeo del Capítulo 4, además se puede verificar que ahora el valor de la estructura de plazos $R(t, T)$ es función de t y H .



Gráfica 5.1

Si H tiene un pequeño cambio y pasa de 0.5 a 0.50001 como se aprecia en la gráfica 5.1 en el largo plazo (plazos mayores a 5 años) las tasas de los modelos de estructura de plazos del modelo Vasicek tradicional quedan por debajo del Vasicek Fraccional y tienden a converger a un mismo valor. Sin embargo, en el corto plazo el valor de la curva fraccional se dispara y crece desproporcionalmente. En la misma gráfica también aparece el caso donde H pasa 0.5 a 0.49999 y se observa el mismo efecto, pero la explosión de las tasas es en sentido contrario.

En la gráfica 5.2 se muestra que sucede con la curva de estructura de plazos si H se mueve diez veces más que en caso anterior, aumentando a 0.5001 ó disminuyendo a 0.4999. Aunque sigue siendo una pequeña perturbación también se observa que la curva fraccional converge pero de forma más lenta que en el primer ejercicio. En este caso, aunque la diferencia entre las dos curvas es todavía más notoria, la estructura de plazos tradicional se encuentra por debajo de la curva fraccional.



Gráfica 5.2

De las observaciones anteriores, se puede concluir que el supuesto de independencia de los incrementos de la serie de las tasas como en el caso de la TIIE resulta ser más importante que en los casos de las valuaciones de las opciones analizada en el capítulo 4. Como consecuencia, cuando una serie de tasas cortas de interés presenta características de persistencia, el modelo de la estructura de plazos de Vasicek sólo proporciona una buena aproximación en el largo plazo.

En el último capítulo se desarrolla el método H-J-B para resolver el problema del consumidor estocástico con apoyo de los resultados matemáticos del capítulo 3. Posteriormente se generaliza el resultado incluyendo un comportamiento estocástico de la volatilidad, también modelada por un movimiento browniano fraccional. La justificación se encuentra al aplicar la metodología Rango Reescalado del capítulo 2 al caso de las volatilidades del IPC, TDC, DJI y TDCUS.

Capítulo 6

Método Hamilton - Jacobi - Bellman (HJB) en Mercados Brownianos Fraccionales

6.1 Método H-J-B con MBF

6.1.1 Planteamiento del Problema del Consumidor Estocástico

Se supone la existencia de un agente racional que representa a todos los inversionistas y que obtiene utilidad del consumo. Este agente desea integrar un portafolio con la posibilidad de elegir entre tres diferentes tipos de activos: un bono de tasa fija, una acción y un derivado sobre esa acción. El problema consiste en determinar el consumo óptimo y las inversiones en cada uno de los títulos de tal forma que maximicen su utilidad. Para resolver este problema se utilizara el método H-J-B extendido a los resultados del capítulo 3.

El problema del consumidor se plantea con la siguiente función a maximizar conocida como función de utilidad indirecta o función de consumo con una función de utilidad $u(C_0) = \ln C_0$

$$J(W, t) = \max \tilde{E} \left[\int_0^t \ln C_0 e^{-\rho t} dt | F_t \right], \quad (6.1)$$

donde \tilde{E} son las expectativas cuasicondicionales definidas en el capítulo 3.

La restricción presupuestal del flujo a invertir esta dada por el cambio en la riqueza definida de la siguiente forma :

$$dA = A(w_1 dR_B + w_2 dR_S + (1 - w_1 - w_2) dR_C) - C_0 dt, \quad (6.2)$$

y los rendimientos de los tres activos dado por:

$$dR_B = \frac{dB}{B} = r dt \quad (6.3a)$$

para el bono,

$$dR_S = \frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dB_H \quad (6.3b)$$

para la acción y

$$dR_C = \frac{dC}{C} = \alpha_C dt + \sigma_C dB_H \quad (6.3c)$$

para el derivado.

Las constantes w_1 , w_2 y $1 - w_1 - w_2$ son las proporciones del portafolio asignados al bono libre de riesgo, la acción y el derivado respectivamente y dB_H es un movimiento browniano fraccional. Por otro lado α_C y σ_C están dados por:

$$\alpha_C = \frac{1}{C} \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \sigma^2 S^2 H t^{2H-1} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right), \quad (6.4a)$$

$$\sigma_C = \frac{S}{C} \left(\frac{\partial C}{\partial S} \right) \sigma \quad (6.4b)$$

Sustituyendo dR_B , dR_S y dR_C en A y organizando términos tenemos que la evolución de la riqueza esta dada por dA:

$$dA = \alpha_A dt + \sigma_A dB_H, \quad (6.5)$$

con α_A y σ_A dados por

$$\alpha_A = A(w_1 r + w_2 \mu (1 - w_1 - w_2) \alpha_C - \frac{C_0}{A}) \quad (6.6a)$$

$$\sigma_A = A(w_2 \sigma + (1 - w_1 - w_2) \sigma_C). \quad (6.6b)$$

6.1.2 Solución del Problema del Consumidor Estocástico

El método H-J-M estocástico consiste en encontrar C_0, w_1 y w_2 que maximice la ecuación (6.1) sujeto a la restricción de la ecuación (6.5), donde $\tilde{E}[\cdot]$ es la esperanza cuasi condicional definida en el Capítulo 3. La función $J(w_1, w_2, C_0)$ puede escribirse como:

$$J(w_1, w_2, C_0) = \max_{\{C_0, w_1, w_2\}} \tilde{E} \left[\int_t^{t+dt} \ln C_0 e^{-\rho t} dt + \int_{t+dt}^{\infty} \ln C_0 e^{-\rho t} dt | F_t \right]. \quad (6.7)$$

Y luego puede expresarse como:

$$J(w_1, w_2, C_0) = \max_{\{C_0, w_1, w_2\}} \tilde{E} [\ln C_0 e^{-\rho t} dt + o(dt) + J(t, A) + dJ(t, A) + o(dt) | F_t]. \quad (6.8)$$

Sustituyendo $dJ(t, A)$ del Lema de Itô fraccional del Capítulo 4, ecuación (4.27) y luego de cancelar y despreciar términos no significativos

$$J(w_1, w_2, C_0) = \max_{\{C_0, w_1, w_2\}} \tilde{E} \left[\ln C_0 e^{-\rho t} dt + J(t, A) + \left(\frac{\partial J}{\partial t} + \alpha_A \frac{\partial J}{\partial A} + \sigma_A^2 H t^{2H-1} \frac{\partial^2 J}{\partial A^2} \right) dt + A \sigma_A \frac{\partial J}{\partial A} dB_H | F_t \right]. \quad (6.9)$$

Tomando el valor esperado condicional y después de ordenar términos se llega a:

$$0 = \max_{\{C_0, w_1, w_2\}} \left[\ln C_0 e^{-\rho t} + \left(\frac{\partial J}{\partial t} + \alpha_A \frac{\partial J}{\partial A} + \sigma_A^2 H t^{2H-1} \frac{\partial^2 J}{\partial A^2} \right) dt \right]. \quad (6.10)$$

Se propone la solución para $J(t, A)$ como la siguiente:

$$J(t, A) = V(A) e^{-\rho t}, \quad (6.11a)$$

con sus derivadas parciales:

$$\frac{\partial J(t, A)}{\partial t} = -\rho V(A) e^{-\rho t}, \quad (6.11b)$$

$$\frac{\partial J(t, A)}{\partial A} = V'(A) e^{-\rho t}, \quad (6.11c)$$

$$\frac{\partial^2 J(t, A)}{\partial A^2} = V''(A) e^{-\rho t}. \quad (6.11d)$$

Sustituyendo las ecuaciones de (6.11 b,c,d) en 6.10 y organizando términos se llega a:

$$0 = \ln C_0 - \rho V(A) + \alpha V'(A) + \sigma_A^2 H t^{2H-1} V''(A). \quad (6.12)$$

Y se propone una solución para $V(A)$ de la siguiente forma:

$$V(A) = \beta_0 + \beta_1 \ln A, \quad (6.13a)$$

$$V'(A) = \frac{\beta_1}{A}, \quad (6.13b)$$

$$V''(A) = -\frac{\beta_1}{A^2}, \quad (6.13c)$$

y sustituyendo las ecuaciones (6.13) en (6.12) se tiene:

$$0 = \ln C_0 - \rho(\beta_0 + \beta_1 \ln A) + \alpha_A \frac{\beta_1}{A} - \sigma_A^2 H t^{2H-1} \frac{\beta_1}{A^2}. \quad (6.14)$$

Derivando parcialmente la ecuación anterior respecto a C_0 , w_1 y w_2 se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$C_0 = \frac{A}{\beta_1}, \quad (6.15a)$$

$$w_1 + \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_c}\right) w_2 = 1 + \frac{r - \alpha_c}{2\sigma_c^2 H t^{2H-1}}, \quad (6.15b)$$

$$w_1 + \frac{(\sigma - \sigma_c)^2}{(\sigma_c^2 - \sigma_c \sigma)} w_2 = 1 + \frac{\mu - \alpha_c}{2(\sigma_c^2 - \sigma_c \sigma) H t^{2H-1}}. \quad (6.15c)$$

Ahora se debe seleccionar cualquiera de las ecuaciones 6.15 b y c porque no se satisfacen simultáneamente. Seleccionando la primera de ellas se considera la opción $w_1 = 0$ tenemos lo siguiente.

$$w_1 = 0 \quad (6.16a)$$

$$w_2 = \frac{1 + \frac{r - \alpha_c}{2Ht^{2H-1}\sigma_c^2}}{\left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_c}\right)} \quad (6.16b)$$

$$1 - w_1 - w_2 = 1 - \frac{1 + \frac{r - \alpha_c}{2Ht^{2H-1}\sigma_c^2}}{\left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_c}\right)}. \quad (6.16c)$$

De la solución anterior, se aprecia que el consumo no se ve afectado por un cambio en el tipo de proceso estocástico, mientras que la proporción de la riqueza en cada título ahora son función del exponente Hurst y de tiempo inicial t . Esta solución implica no considerar bonos y la posición de la acción esta cubierta con la posición del derivado. Consideraando otra solución, como es la de esquina ¹⁶, por ejemplo: $w_1 = 0$ y $w_2 = 1$ sustituyendo en las ecuaciones (6.15), las expresiones de (6.4) para α_c y σ_c se llega a:

$$\frac{\partial C(t, S)}{\partial t} + H\sigma^2 t^{2H-1} S^2 \frac{\partial^2 C(t, S)}{\partial S^2} + (\mu - 2\sigma^2 H t^{2H-1}) S \frac{\partial C(t, S)}{\partial S} - rC(t, S) = 0, \quad (6.17)$$

que corresponde a la ecuación Black-Scholes Fraccional (4.20) cuando $r = \mu - 2\sigma^2 H t^{2H-1}$, si la comparamos con la expresión para el valor de mercado de riesgo $\mu = r + \lambda\sigma$, en un mercado de estas características dicho valor es:

$$\lambda = 2\sigma H t^{2H-1} \quad (6.18)$$

Por lo tanto es posible llegar a la ecuación Black-Scholes (ecuación 4.20) considerando la aplicación del método H-J-B. La solución esta dada por las ecuaciones 4.6 y 4.7.

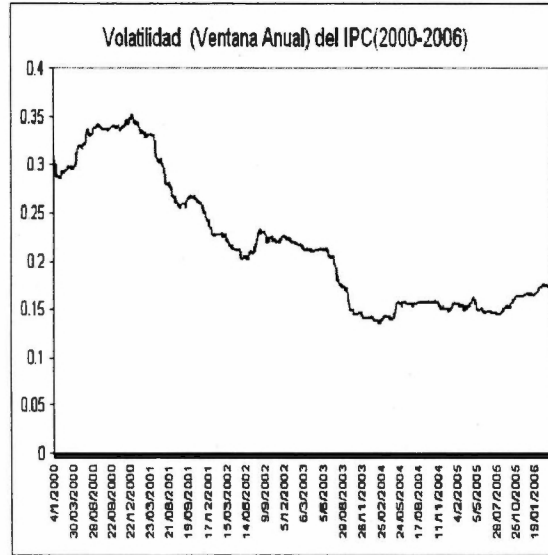
6.2 Método HJB con MBF y Volatilidad Estocástica

6.2.1 Volatilidad Estocástica en los Mercados

En los capítulos anteriores, en la modelación del comportamiento de los activos subyacentes con procesos estocásticos se ha considerado siempre dentro de los supuestos de los movimientos brownianos o brownianos fraccionales que la volatilidad del proceso es una constante en el tiempo. Sin embargo, un sencillo análisis gráfico del comportamiento de la volatilidad de las mismas variables del mercado de México y Estados Unidos (IPC, DJI, TDC y TDCUS) se puede verificar que esto no es necesariamente es correcto.

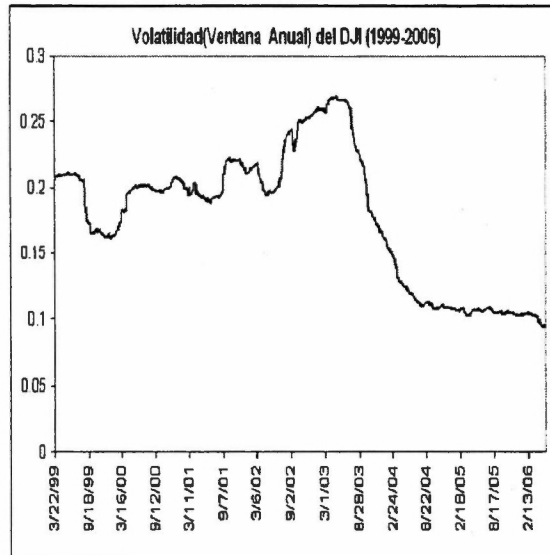
¹⁶ Nos interesa principalmente este tipo solución por que nuestro fin es poder realizar la valuación más que analizar las propiedades de optimización

Para cada una de las series mencionadas se toma una ventana móvil de un año ¹⁷ para el cálculo de la volatilidad. La gráfica 6.1 presenta la volatilidad del IPC con información 1600 datos que van de enero del 2000 a abril del 2006. Debido a la diferencias en el tamaño de las muestras para las cuatro series, las fechas de inicio y fin de los datos no coinciden.



Gráfica 6.1

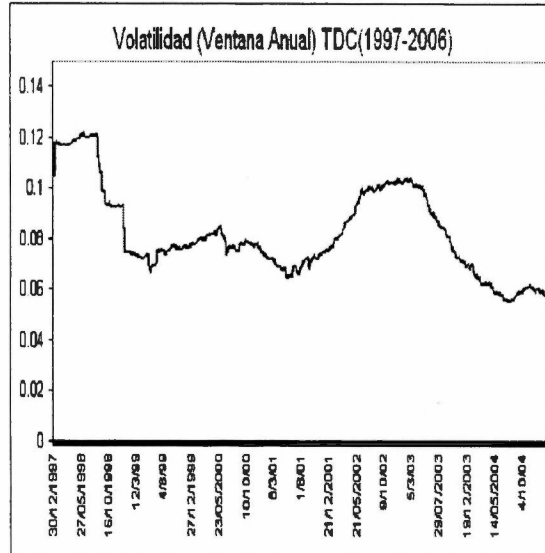
La gráfica 6.2 muestra la volatilidad del DJI (una serie de 1800 datos) de Marzo de 1999 a Mayo de 2006



Gráfica 6.2

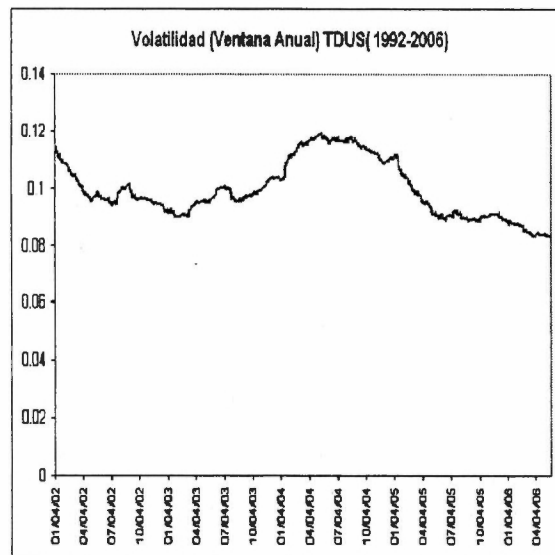
¹⁷ Para días hábiles y días naturales se toman años de 252 y 365 datos respectivamente

Con 1800 datos se calcula la volatilidad del TDC de 1997 a 2006, esto se puede observar en la gráfica 6.3.



Gráfica 6.3

Finalmente en la gráfica 6.4 se muestra la volatilidad de TDCUS con 1600 datos que llegan van de enero del 2002 a enero del 2006.



Gráfica 6.4

De las gráficas anteriores se observa que la volatilidad no tiene las características para ser considerada como una constante, sino que más bien, tendría que ser modelada por un proceso estocástico. Tradicionalmente este proceso se ha modelado con un movimiento

browniano, como es el caso de artículo de 1987 para la valuación de opciones con volatilidad estocástica de Hull and White. En dicho trabajo se llega a una solución cerrada para la generalización de la formula Black-Scholes considerando la volatilidad modelada por un movimiento browniano tradicional. Considerando estos hechos, el siguiente paso es preguntarse si las series de las volatilidades de los índices IPC y DJI y de los tipos de cambio TDC y TDUS son series con eventos persistentes, antipersistentes o independientes y si son series fractales. Para determinar que propiedades poseen, se vuelve a aplicar la metodología (R/S) para el cálculo del coeficiente Hurst del Capítulo 2. Los resultados de este análisis se muestran en la siguiente tabla 6.1:

Tabla 6.1

Serie	H
IPC	0.7407
TDC	0.7111
DJI	0.7449
TDCUS	0.6492

Sorprendentemente la volatilidad de las series (IPC, DJI, TDC y TDCUS) muestran una persistencia ($H > 0.5$) mayor que la de los rendimientos originales. Este resultado es muy interesante e invita a modelar el comportamiento de la volatilidad mediante un movimiento browniano fraccional. Por ejemplo, se puede pensar en un activo subyacente S modelado por un browniano fraccional con un exponente Hurst H_1 , cuya volatilidad V a su vez, sea modelada por otro browniano fraccional exponente Hurst H_2 como en el caso siguiente:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB_{H_1}, \quad (6.19)$$

$$dV = \alpha V dt + \beta V dB_{H_2}, \quad (6.20)$$

Con $V = \sigma^2$ y además podemos suponer en el caso más sencillo que los dos brownianos fraccionales no tienen ninguna correlación, es decir: $COV(dB_{H_1}, dB_{H_2}) = 0$

Ahora se propone un derivado que sea función de un subyacente y de la volatilidad estocástica del mismo, entonces $C=C(t,S,V)$ y la generalización del lema de Itô y de las ecuaciones (3.46) y (4.27) del Capítulo 3 y 4 quedaría de la forma siguiente:

$$\frac{dC}{C} = \alpha_c dt + \kappa_c dB_{H_1} + \eta_c dB_{H_2} \quad (6.21)$$

con α_c , κ_c y η_c dados por:

$$\alpha_c = \frac{1}{C} \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \alpha \frac{\partial C}{\partial V} + \sigma^2 S^2 H_1 t^{2H_1-1} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \beta^2 V^2 H_2 t^{2H_2-1} \frac{\partial^2 C}{\partial V^2} \right) \quad (6.22a)$$

$$\kappa_c = \frac{1}{C} \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} \quad (6.22b)$$

$$\eta_c = \frac{1}{C} \beta V \frac{\partial C}{\partial V}. \quad (6.22c)$$

6.2.2 Planteamiento del Problema del Consumidor Estocástico con Volatilidad Estocástica con MBF

Considerando los mismos supuestos de 6.1 del agente racional que construye un portafolio con la posibilidad de elegir tres diferentes tipos de activos, un bono de tasa fija de tipo, una acción y un derivado sobre esa acción, pero suponiendo que la volatilidad estocástica se describe con un movimiento browniano fraccional. Nuevamente el problema consiste en determinar el consumo óptimo y las inversiones en cada uno de sus títulos de tal forma que maximicen su utilidad y para resolverlo utilizaremos el método H-J-B.

La restricción presupuestal del cambio en la riqueza compuesta por los rendimientos del bono, la acción y el derivado, donde w_1, w_2 y $1 - w_1 - w_2$ son las proporciones del portafolio asignados a cada uno de los activos respectivamente y donde dB_H es un movimiento browniano fraccional, y de la sección anterior α_C y σ_C entonces tenemos:

$$dA = \alpha_A dt + \sigma_{A1} dB_{H1} + \sigma_{A2} dB_{H2} \quad (6.23a)$$

con α_A y σ_{A1} y σ_{A2} como

$$\alpha_A = A(w_1 r + w_2 \mu + (1 - w_1 - w_2) \alpha_C - \frac{C_0}{A}) \quad (6.23b),$$

$$\sigma_{A1} = A(w_2 \sigma + (1 - w_1 - w_2) \kappa_C), \quad (6.23c)$$

$$\sigma_{A2} = A \eta_c (1 - w_1 - w_2). \quad (6.23d)$$

6.2.3 Solución del Problema del Consumidor Estocástico con Volatilidad Estocástica con MBF

Se aplica el método H-J-B estocástico y el problema de elección consiste en encontrar C_0 , w_1 y w_2 que maximice la ecuación (6.24) sujeta a la restricción (6.23), donde recordemos que $\tilde{\mathbb{E}}[\cdot]$ es la esperanza cuasi condicional del capítulo 3

$$J(w_1, w_2, C_0) = \max_{\{C_0, w_1, w_2\}} \tilde{\mathbb{E}} \left[\int_t^\infty \ln C_0 e^{-\rho t} dt | F_t \right]. \quad (6.24)$$

que también puede escribirse como:

$$J(w_1, w_2, C_0) = \max_{\{C_0, w_1, w_2\}} \tilde{E} \left[\int_t^{t+dt} \ln C_0 e^{-\rho t} dt + \int_{t+dt}^{\infty} \ln C_0 e^{-\rho t} dt | F_t \right]. \quad (6.25)$$

y se sigue:

$$J(w_1, w_2, C_0) = \max_{\{C_0, w_1, w_2\}} \tilde{E} [\ln C_0 e^{-\rho t} dt + o(dt) + J(t, A) + dJ(t, A) + o(dt) | F_t]. \quad (6.26)$$

Se sustituyen $dJ(t, A)$ del Lema de Itô fraccional de los Capítulos 3 y 4 y después de ordenar y despreciar algunos términos

$$J(w_1, w_2, C_0) =$$

$$\max_{\{C_0, w_1, w_2\}} \tilde{E} \left[\ln C_0 e^{-\rho t} dt + J + \left(\frac{\partial J}{\partial t} + \alpha_A \frac{\partial J}{\partial A} + (\sigma_{A1}^2 H_1 t^{2H_1-1} + \sigma_{A2}^2 H_2 t^{2H_2-1}) \frac{\partial^2 J}{\partial A^2} \right) dt + \sigma_{A1} \frac{\partial J}{\partial A} dB_{H1} + \sigma_{A2} \frac{\partial J}{\partial A} dB_{H2} \right]. \quad (6.27)$$

Se toma el valor esperado condicionado y se llega a:

$$0 = \max_{\{C_0, w_1, w_2\}} \left[\ln C_0 e^{-\rho t} + \left(\frac{\partial J}{\partial t} + \alpha_A \frac{\partial J}{\partial A} + (\sigma_{A1}^2 H_1 t^{2H_1-1} + \sigma_{A2}^2 H_2 t^{2H_2-1}) \frac{\partial^2 J}{\partial A^2} \right) dt \right]. \quad (6.28)$$

Se propone la solución para $J(t, A)$ del siguiente estilo:

$$J(t, A) = V(A) e^{-\rho t}, \quad (6.29a)$$

$$\frac{\partial J(t, A)}{\partial t} = -\rho V(A) e^{-\rho t}, \quad (6.29b)$$

$$\frac{\partial J(t, A)}{\partial A} = V'(A) e^{-\rho t}, \quad (6.29c)$$

$$\frac{\partial^2 J(t, A)}{\partial A^2} = V''(A) e^{-\rho t}. \quad (6.29d)$$

Sustituyendo la ecuación (6.29) en (6.28) y después de acomodar términos se llega a:

$$0 = \ln C_0 - \rho V(A) + \alpha V'(A) + (\sigma_{A1}^2 H_1 t^{2H_1-1} + \sigma_{A2}^2 H_2 t^{2H_2-1}) V''(A). \quad (6.30)$$

Como siguiente paso, ahora se propone una solución para $V(A)$ de la siguiente forma:

$$V(A) = \beta_0 + \beta_1 \ln A, \quad (6.31a)$$

$$V'(A) = \frac{\beta_1}{A} \quad (6.31b)$$

$$V''(A) = -\frac{\beta_1}{A^2}. \quad (6.31c)$$

Y tenemos de sustituir las ecuaciones (6.31) en la ecuación (6.30)

$$0 = \ln C_0 - \rho(\beta_0 + \beta_1 \ln A) + \alpha_A \frac{\beta_1}{A} - (\sigma_{A1}^2 H_1 t^{2H_1-1} + \sigma_{A2}^2 H_2 t^{2H_2-1}) \frac{\beta_1}{A^2}. \quad (6.32)$$

Se deriva parcialmente la ecuación anterior respecto a C_0 , w_1 y w_2 y se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{1}{C_0} - \frac{\beta_1}{A}, \quad (6.33a)$$

$$r - \alpha_c = -2\kappa_c H_1 t^{2H_1-1} (w_2 \sigma (1 - w_1 - w_2) \kappa_c) - 2\eta_c^2 H_2 t^{2H_2-1} (1 - w_1 - w_2), \quad (6.33b)$$

$$\mu - \alpha_c = -2(\kappa_c - \sigma) H_1 t^{2H_1-1} (w_2 \sigma + (1 - w_1 - w_2) \kappa_c) - 2\eta_c^2 H_2 t^{2H_2-1} (1 - w_1 - w_2). \quad (6.33c)$$

después de arreglar las expresiones anteriores quedan como:

$$C_0 = \frac{A}{\beta_1}, \quad (6.34a)$$

$$w_1 + \left(1 + \frac{H_1 t^{2H_1-1} \sigma \kappa_c}{H_1 t^{2H_1-1} \kappa_c^2 + H_2 t^{2H_2-1} \eta_c^2}\right) w_2 = 1 + \frac{r - \alpha_c}{2(H_1 t^{2H_1-1} \kappa_c^2 + H_2 t^{2H_2-1} \eta_c^2)} \quad (6.34b)$$

$$w_1 + \left(1 + \frac{H_1 t^{2H_1-1} \sigma (\kappa_c - \sigma)}{H_1 t^{2H_1-1} \kappa_c (\kappa_c - \sigma) + H_2 t^{2H_2-1} \eta_c^2}\right) w_2 = 1 + \frac{\mu - r}{2(H_1 t^{2H_1} \kappa_c (\kappa_c - \sigma) + \eta_c^2 H_2 t^{2H_2})}. \quad (6.34c)$$

Como en el caso anterior, se tiene que elegir entre las ecuaciones 6.34 b y c, si se elige la primera de ellas y se toma una solución $w_1 = 0$ se tiene la siguiente solución:

$$w_1 = 0, \quad (6.35a)$$

y

$$w_2 = \frac{1 + \frac{r - c}{2(H_1 t^{2H_1} \kappa_c^2 + H_2 t^{2H_2-1} \eta_c^2)}}{1 + \frac{H_1 t^{2H_1} \sigma \kappa_c}{H_1 t^{2H_1} \kappa_c^2 + H_2 t^{2H_2-1} \eta_c^2}}, \quad (6.35b)$$

$$1 - w_1 - w_2 = 1 - \frac{1 + \frac{r - c}{2(H_1 t^{2H_1} \kappa_c^2 + H_2 t^{2H_2-1} \eta_c^2)}}{1 + \frac{H_1 t^{2H_1} \sigma \kappa_c}{H_1 t^{2H_1} \kappa_c^2 + H_2 t^{2H_2-1} \eta_c^2}}. \quad (6.35c)$$

Otra vez la solución del consumo no es efectada por un cambio en el tipo de proceso estocástico que lo modela, mientras que las posibles inversiones ahora son funciones de los exponentes Hurst (H_1 y H_2) y de tiempo inicial t . El resultado implica no tener posición en bonos y cubrir la posición de la acción con el derivado.

Si en la ecuación (6.33) se toma solución de esquina $w_1 = 0$ y $w_2 = 1$, se sustituyen las expresiones generales de κ_c y α_c (6.22) a) y b) se llega a la ecuación Black-Scholes equivalente para movimientos brownianos fraccionales con volatilidad estocástica fraccional.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \alpha \frac{\partial C}{\partial V} + \sigma^2 S^2 H_1 t^{2H_1-1} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \beta^2 V^2 H_2 t^{2H_2-1} \frac{\partial^2 C}{\partial V^2} - rC = 0. \quad (6.36)$$

en donde $r = \mu - 2\sigma^2 H_1 t^{2H_1-1}$ y el valor de mercado de riesgo estará dado por:

$$\lambda = 2\sigma H_1 t^{2H_1-1} \quad (6.37)$$

La ecuación (6.36) es similar a la ecuación Black-Scholes con volatilidad estocástica obtenida por Hull and White (1987) pero con la diferencia que los procesos estocástico considerados son movimientos brownianos fraccionales y no existe correlación entre el comportamiento del subyacente y su volatilidad.

Como se conoce la solución del problema Hull and White se propone una solución de la ecuación (6.36) de características similares como la siguiente:

$$C(t, S) = C_{BSF} + g(K)d_1 d_2 + h(K)d_1^2 d_2^2 \quad (6.37)$$

donde C_{BSF} , d_1 y d_2 son las soluciones (ecuaciones 4.2 a, b y c) de la ecuación Black-Scholes (4.20 a y b) que en la deducción se considera el movimiento browniano fraccional. Las funciones $g(K)$ y $h(K)$ están por determinarse y dependen de $K = T^{2H_1} - t^{2H_1}$.

A partir de la ecuación anterior 6.37 se calculan las derivadas $(\frac{\partial C}{\partial t})$, $(\frac{\partial C}{\partial S})$, $(\frac{\partial C}{\partial V})$, $(\frac{\partial^2 C}{\partial S^2})$, $(\frac{\partial^2 C}{\partial V^2})$ y posteriormente se sustituyen en la ecuación (6.36) .

Después de sustituir, agrupar y acomodar términos se llega la expresión siguiente:

$$\left[\frac{\partial C}{\partial t} + H\sigma^2 t^{2H-1} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC \right] + [P_1(K)g'(K) + P_2(K)g(K) - P_3(K)] + [U_1 h'(K) + U_2(K)h(K) - U_3(K)] = 0 \quad (6.38)$$

Una solución posible de la ecuación anterior (6.38) ocurre cuando cada uno de los términos [] se hacen cero, es decir:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + H\sigma^2 t^{2H-1} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \quad (6.39a)$$

$$P_1(K)g'(K) + P_2(K)g(K) - P_3(K) = 0 \quad (6.39b)$$

$$U_1 h'(K) + U_2(K)h(K) - U_3(K) = 0 \quad (6.39c)$$

Se identifica la ecuación (6.39 a) como la ecuación Black-Scholes Fraccional(ecuación 6.20) y estamos seguros que se satisface. Las ecuaciones (6.39 b y c) son ecuaciones diferenciales de las funciones g(K) y h(K). Una vez que se encuentran estas funciones que dependen de P_1, P_2, P_3, U_1, U_2 y U_3 se puede determinar la solución de (6.37), sus valores están dados dados por:

$$P_1(K) = -2H_1 t^{2H_1-1} d_1 d_2 \quad (6.40a)$$

$$P_2(K) = [(d_1 + d_2) \left(\frac{\partial d_1}{\partial t} + rS \frac{\partial d_1}{\partial S} + \sigma^2 S^2 H_1 t^{2H_1} \frac{\partial^2 d_1}{\partial S^2} + \alpha \frac{\partial d_1}{\partial V} + \beta^2 V H_2 t^{2H_2-1} \frac{\partial^2 d_1}{\partial V^2} \right) - r d_1 d_2] + \left[\frac{d_1 \sqrt{V} H_1 t^{2H_1}}{\sqrt{K}} + 2\sigma^2 S^2 H_1 t^{2H_1-1} \left(\frac{\partial d_1}{\partial S} \right)^2 - \frac{\alpha}{2} d_1 \sqrt{\frac{K}{V}} + \beta^2 V H_2 t^{2H_2-1} \left(-\sqrt{\frac{K}{V}} \right) \frac{\partial d_1}{\partial V} + 2 \left(\frac{\partial d_1}{\partial V} \right)^2 \right] \quad (6.40b)$$

$$P_3(K) = [SN'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial V} - Ke^{r(T-t)} N'(d_2) \left(\frac{\partial d_2}{\partial V} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K}{V}} \right)] \quad (6.40c)$$

$$U_1(K) = -2H_1 t^{2H_1-1} d_1^2 d_2^2 \quad (6.40d)$$

$$U_2(K) = [(d_1 + d_2) d_1 d_2 \left(\frac{\partial d_1}{\partial t} + rS \frac{\partial d_1}{\partial S} + \sigma^2 S^2 H_1 t^{2H_1} \frac{\partial^2 d_1}{\partial S^2} + \alpha \frac{\partial d_1}{\partial V} + \beta^2 V H_2 t^{2H_2-1} \frac{\partial^2 d_1}{\partial V^2} \right) - r d_1^2 d_2^2] + [d_1^2 d_2 H_1 t^{2H_1-1} \sqrt{\frac{K}{V}} + (d_1^2 + 4d_1 d_2 + d_2^2) \left(\frac{\partial d_1}{\partial S} \right)^2 - \frac{1}{2} d_1^2 d_2 \sqrt{\frac{K}{V}}] + \beta^2 V H_2 t^{2H_2-1} \left(\left(\frac{\partial d_1}{\partial V} \right)^2 (d_1 + d_2)^2 - \frac{1}{2} (d_1 + d_2) d_1 \sqrt{\frac{K}{V}} \frac{\partial d_1}{\partial V} + \left(\frac{\partial d_1}{\partial V} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K}{V}} \right) d_1 d_2 - \frac{1}{2} d_1^2 \left(\frac{\partial d_1}{\partial V} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K}{V}} \right) \right) \quad (6.40e)$$

$$U_3(K) = [SN'(d_1) \frac{\partial^2 d_1}{\partial V^2} + SN''(d_1) (\frac{\partial d_1}{\partial V})^2 - Ke^{-r(T-t)} N'(d_2) (\frac{\partial^2 d_1}{\partial V^2} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{K}{V^3}})] - [Ke^{-r(T-t)} N''(d_2) (\frac{\partial d_1}{\partial V} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K}{V}})] \quad (6.40f)$$

debido a las características de la ecuación diferencial las soluciones para $g(K)$ y $h(K)$ están dadas por:

$$g(K) = e^{-\int P(K)dK} \left[\int e^{\int P(K)dK} q(K)dK \right] + ce^{-\int P(K)dK} \quad (6.41a)$$

$$h(K) = e^{-\int U(K)dK} \left[\int e^{\int U(K)dK} v(K)dK \right] + ce^{-\int U(K)dK} \quad (6.41b)$$

con:

$$P(K) = \frac{P_2}{P_1} \quad q(K) = \frac{P_3}{P_1} \quad U(K) = \frac{U_2}{U_1} \quad V(K) = \frac{U_3}{U_1}$$

La solución de la ecuación (6.36) no se presenta como un problema sencillo de resolver y con una solución no práctica. Se plantea como un problema abierto a futuras investigaciones nuevas formas de resolver el problema, así como la reducción de la solución a la valuación de un derivado con volatilidad estocástica del método de Hull and White cuando el coeficiente $H = 1/2$.

Conclusiones

1.- La primera aportación del presente trabajo de tesis muestra que los valores obtenidos del coeficiente Hurst por el método (R/S) para las series financieras (IPC,DJI,TDC y TDCUS) del mercado mexicano y norteamericano, si bien en un inicio parecen poseer características de persistencia (teóricamente $H > 0.5$), estadísticamente no son significativas por lo que se conserva la hipótesis de independencia de las series. De manera complementaria, en un hecho más conocido, se observa que el comportamiento observado de distribuciones de las variables financieras mencionadas presentan sesgos y curtosis.

2.- Debido a que puede no satisfacerse el supuesto matemático de independencia del movimiento browniano tradicional en las variables financieras reales. En la presente tesis se propone la utilización de un proceso estocástico más general conocido como Movimiento Browniano Fraccional (MBF). Desde que se establece su definición, el MBF captura las características de independencia en el coeficiente Hurst(H) de la variable analizada. Con este nuevo proceso estocástico se construye en un espacio más general las propiedades más importantes del mercado Black-Scholes como son: la no existencia de arbitraje, medidas equivalentes de probabilidad, martingalas y probabilidades condicionales (o cuasicondicionales).

3.- Con el proceso MBF es posible reproducir la ecuación de Black-Scholes y la valuación de derivados en un contexto más general que toma en cuenta las características particulares del mercado dentro del coeficiente H . De los resultados obtenidos, como una aportación del presente trabajo, se llega a la conclusión de que el modelo Black-Scholes Fraccional teórico estima un precio menor para las opciones calls y puts europeas en caso de que el activo subyacente posea propiedades de persistencia. Esta diferencia con la estimación de precio Black-Scholes tradicional es mayor conforme mayor sea la dependencia o correlación de las series, es decir para H cercana a uno y se acentúa más cuando la opción esta fuera del dinero. La combinación de ambos efectos puede llegar a generar un precio con el método browniano fraccional cien por ciento menor que el obtenido por el browniano tradicional.

4.- Utilizando en la modelación de la tasa corta Vasicek un MBF como término estocástico, se puede deducir la ecuación general de los Bonos, y su función de estructura de plazos. Comparando esta curva con la obtenida del modelo Vasicek del browniano tradicional se observa que la curva de tasas es extremadamente sensible al valor de H , es decir, al supuesto de independencia de incrementos de las series de tasas cortas es muy estricto. Para el caso de la tasa interbancaria (TIIE) con una pequeña perturbación alrededor del valor de $H = 1/2$, la función pierde su forma en el corto plazo y los valores de las tasas se disparan, aunque en el largo plazo ambas curvas convergen, respetando su característica de reversión a la media. Por lo tanto, en series con persistencia, el modelo de estructura de plazos de Vasicek para tasas de interés es una buena aproximación en el largo plazo, además para cada plazo las tasas de interés del modelo Vasicek fraccional son mayores

que las del modelo Vasicek tradicional ($H > 1/2$) . El planteamiento, la deducción de las ecuaciones y soluciones así como los comparativos son contribuciones de esta tesis.

5.- Aplicando el método H-J-B generalizado, es decir con un proceso de un MBF, las formas de las ecuaciones y las soluciones no cambian en esencia en comparación con las deducidas con el cálculo de Ito Tradicional. Ahora la diferencia es que tanto las ecuaciones como las soluciones dependen del valor del coeficiente Hurst(H) y el tiempo inicial del proceso(t).

6.-De la misma forma que las series de los índices y del tipo de cambio para México y Estados Unidos presentan propiedades de persistencia, así también las volatilidades de dichas series presentan persistencia con mayor claridad que las series originales, de hecho son significativas. Por lo anterior, se propone un modelo donde el activo subyacente y su volatilidad cada uno tenga un comportamiento de un MBF. Con la aplicación del método H-J-B sobre un activo y su volatilidad modelados por dos procesos brownianos fraccionales no correlacionados es posible llegar a una ecuación de tipo Black-Scholes generalizada. La aplicación del método H-J-B fraccional, la propuesta de solución, así como la estimación de persistencia de la volatilidad a través del metodo (R/S) también son aportaciones del presente trabajo.

7.-Con los procesos Hurst y el MBF es posible generalizar conceptos y formalizaciones matemáticas del mercado teórico Black-Scholes y vincularlo con información de los mercados reales. Esta situación gradualmente nos lleva a ir sustituyendo las hipótesis de los mercados eficientes por las de mercados fractales.

Bibliografia

- [1] Black, F. and M. Scholes(1973) The pricing of Options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, pp. 637-659.
- [2] Cont. R (1994), Long dependence in financial markets, Centre de Mathematiques appliquees, Ecole Polytechnique France / Finances Publiques, 49(2), pp. 282-286.
- [3] Dai W. and C. Hayde(1996) Itô Formula with respect to fractional brownian motion and its application, *J. Appl. Math. Stoch.*, Anal 9, pp. 439-448.
- [4] Dasgupta A. (1997) Fractional Brownian Motion: Its properties and applications to stochastic integration. Ph. D. Thesis, Dept. of Statistic, University of Carolina at Chapel Hill.
- [5] Desagupta ,A. and G. Kallianpur(2000) Arbitrage opportunities for class of Gladyshev process, *Appl. Math.Optim.*, 41, 377-385.
- [6] Duncan,T. E., Y., Hu and B.,Pasik-Duncan (2002) Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion, *SIAMJ.Control Optim.*, 38, pp. 582-612.
- [7] Hu, Y. and B. Oksendal (2000)Fractional White Noise Calculus and Applications to Finance, Preprint University of Oslo.
- [8] Hull, J. and A. White(1987)The Pricing of Options on Assets on Stochastic Volatilities, *The Journal of Finance*,42(2),pp.281-300.
- [9] Hurst, H.(1951)The long-term storage capacity of reservoirs *Transactions of American Society Civil Engineer*, pp. 116 - 195.
- [10] Kravych, Y. (2002)Stock Price Modelling by Long-Memory Process, Overview of the Fractional Brownian Motion Approach, University of New Wales Sydney Australia.
- [11] Lin, S. (1995) Stochastic analysis of fractional brownian motion and applications *SIAM Review 10*, pp. 422 - 437.
- [12] Mandelbrot, B. (1982)The Fractal Geometry of Nature, NY W.H. Freeman
- [13] Mandelbrot, B. and V. Ness (1968) Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications, *SIAM review 10*, 11(3).
- [14] McCulloch J.(1985) The value of european Options with Log-Stable Uncertainty, Working paper.
- [15] McCulloch J.(1978) The pricing of Short Lived Options when Price Uncertainty is Log-symetris stable, Working paper.
- [16] Necula C. (2002) Modelling and detecting Long Memory in Stock returns, Academy of Economic Studies, Dissertation Paper.
- [17] Necula C. (2002) Option Pricing in a Fractional Borwnian Motion Enviroment, Academy of Economic Studies, Bicharest Romania.
- [18] Norros, I., E. Valkeila., and J. Virtamo (1999) An Elementary approach to a Girsanov Formula and Other Analytical Results on Fractional Brownian Motions,it Bernoulli5(4).
- [19] Oksendal B.(2004) Fractional Brownian Motion in Finance Preprint University of Oslo.
- [20] Palomas E.(2002) Evidencia e Implicaciones del fenomeno Hurst en el mercado de capitales, *Gaceta de economia*, Ano 8, Num 15.
- [21] Peters, E. (1991), Chaos and Order in Capital Markets, New York: John Wiley and Sons.
- [22] Peters, E., Fractal Market Analysis(Applying Chaos Theory to Invesment an Economic) New York: John Wiley and Sons.

- [23] Rosek S. and R. (2006) Schobel Risk Preference Based Option Pricing in Fraccional Brownian Market, Preprint Faculty of Economics and Business Administration, University of Tbingen, Germany.
- [24] Shiryaev A. (1998) On arbitrage and replication for fractal model, Shiryaev and Sulem. editors, Workshop on mathematical finance, INRIA, Paris.
- [25] Vasconcelos G. (2004) A guide walk down wall street: an introduction to econophysics, Universidade Federal Pernambuco Brasil.
- [26] Vasicek, O. (1977) An equilibrium characterization of term structure, *Journal of Financial Economics*, 5, pp. 177-188.
- [27] Wilmott, P. (2005) Quantitative Finance, Wiley.

Apéndices

Apéndice A

Programa VB para estimar el Coeficiente Hurst

```
Private Sub CommandButton1 Click()
Dim eA As Double
Dim NkA As Double
Dim NkkA As Double
Dim XkA As Double
Dim MaXkA As Double
Dim MinXkA As Double
Dim R As Double
For i = 6 To (Cells(1, 2) + 4) Step 1
Cells(i, 4) = Application.WorksheetFunction.Ln(Cells(i + 1, 2) / Cells(i, 2))
Next i
For j = 1 To Cells(3, 2) Step 1
NkA = Cells(Cells(2, 2) * (j - 1) + 6, 4)
For K = 1 To (Cells(2, 2) - 1) Step 1
NkA = NkA + Cells(Cells(2, 2) * (j - 1) + 6 + K, 4)
Next K
Cells(j + 5, 5) = NkA / Cells(2, 2)
Next j
For j = 1 To Cells(3, 2) Step 1
For K = 1 To (Cells(2, 2)) Step 1
Cells(Cells(2, 2) * (j - 1) + K + 5, 6) = Cells(Cells(2, 2) * (j - 1) +
K + 5, 4) - Cells(j - 1 + 6, 5)
Next K
Next j
' For j = 1 To Cells(3, 2) Step 1
XkA = Cells(Cells(2, 2) * (j - 1) + 6, 6)
Cells(Cells(2, 2) * (j - 1) + 6, 7) = XkA
For K = 1 To (Cells(2, 2) - 1) Step 1
XkA = XkA + Cells(Cells(2, 2) * (j - 1) + 6 + K, 6)
Cells(Cells(2, 2) * (j - 1) + 6 + K, 7) = XkA
Next K
Next j
,
For j = 1 To Cells(3, 2) Step 1
Cells(j + 5, 8) = Cells(Cells(2, 2) * (j - 1) + 6, 7)
MaXkA = Cells(j + 5, 8)
For K = 1 To (Cells(2, 2) - 1) Step 1
If Cells(Cells(2, 2) * (j - 1) + K + 6, 7) > MaXkA Then
```

```

MaXkA = Cells(Cells(2, 2) * (j - 1) + K + 6, 7)
Else
MaXkA = MaXkA
End If
Cells(j + 5, 8) = MaXkA
Next K
Next j
For j = 1 To Cells(3, 2) Step 1
Cells(j + 5, 9) = Cells(Cells(2, 2) * (j - 1) + 6, 7)
MinXkA = Cells(j + 5, 9)
For K = 1 To (Cells(2, 2) - 1) Step 1
If Cells(Cells(2, 2) * (j - 1) + K + 6, 7) < MinXkA Then
MinXkA = Cells(Cells(2, 2) * (j - 1) + K + 6, 7)
Else
MinXkA = MinXkA
End If
Cells(j + 5, 9) = MinXkA
Next K
Next j
For l = 1 To Cells(3, 2) Step 1
Cells(5 + l, 10) = Cells(5 + l, 8) - Cells(5 + l, 9)
Next l
For j = 1 To Cells(1, 2) Step 1
Cells(j + 5, 11) = Cells(j + 5, 6) * Cells(j + 5, 6)
Next j
For j = 1 To Cells(3, 2) Step 1
NkkA = Cells(Cells(2, 2) * (j - 1) + 6, 11)
For K = 1 To (Cells(2, 2) - 1) Step 1
NkkA = NkkA + Cells(Cells(2, 2) * (j - 1) + 6 + K, 11)
Next K
Cells(j + 5, 12) = NkkA
Next j
R = Cells(6, 15)
For i = 1 To Cells(3, 2) - 1 Step 1
R = R + Cells(6 + i, 15)
Next i
Cells(9, 18) = R / Cells(3, 2)
End Sub

```

Apéndice B

Evaluación Fraccional Neutral al Riesgo

El precio de cualquier título en $0 \leq t \leq T$ medible acotado con $F \in L^2(\mu)$ esta dada por

$$F(t) = e^{-r(T-t)} \tilde{E}_t[F], \quad (B.1)$$

donde denotaremos por $\tilde{E}_t[\cdot]$ las expectativas cuasicondicionales con respecto a las medidas neutrales al riesgo del capítulo 3.

Demostración

(basada en Necula(2002))

En un mercado completo podemos construirse un portafolio replicante de $((m(t), s(t)))$ tal que:

$$F(t) = m(t)M(t) + s(t)S(t) \quad (B.2)$$

con $F(T) = F$

y tenemos que:

$$dF(t) = m(t)dM(t) + s(t)dS(t) \quad (B.3)$$

después de sustituir y acomodar términos

$$dF(t) = rF(t)dt + \sigma s(t)S(t)dB_H(t) \quad (B.4)$$

premultiplicando por e^{-rt} e integrando se sigue:

$$e^{-rT}F(t) = F(0) + \int_0^t e^{-r\tau} \sigma s(\tau)S(\tau)dB_H(\tau), \quad 0 \leq t \leq T \quad (B.5)$$

por el teorema fraccional Clark-Ocone del Capitulo 3 se tiene que

$$e^{-rT}F = \tilde{E}[F] + e^{-rT} \int_0^T \tilde{E}_\tau[D_\tau F]dB_H(\tau) \quad (B.6)$$

de la completez del mercado tenemos

$$\tilde{E}_\tau[D_\tau F] = e^{-r(T-\tau)} \sigma s(\tau)S(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq T \quad (B.7)$$

y tenemos que

$$e^{-rT}F = \tilde{E}[F] + \int_0^T e^{-r\tau} \sigma s(\tau)S(\tau)dB_H(\tau) \quad (B.8)$$

Considerando $\tilde{E}_t[\cdot]$ se sigue:

$$\tilde{E}_t[e^{-rT}F] = \tilde{E}[F] + \tilde{E}_t \left[\int_0^T e^{-r\tau} \sigma s(\tau)S(\tau)dB_H(\tau) \right] \quad (B.9)$$

Usando los resultados de cuasi martingalas del inciso anterior

$$\tilde{\mathbb{E}}_t[e^{-rT}F] = \tilde{\mathbb{E}}[F] + \int_0^t e^{-r\tau} \sigma s(\tau) S(\tau) dB_H(\tau) \quad (B.10)$$

Y comparando ecuaciones llegamos a

$$F(t) = e^{-r(T-t)} \tilde{\mathbb{E}}_t[F]. \quad (B.11)$$

APENDICE C

	IPC	DJI	TDC	TDCUS
Desv Stan	0.1369	0.1156	0.0572	0.0561
r	0.0900	0.0300	0.0900	0.0300
k	15.000	11.000	10.5000	0.7800
T	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
t	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

OPCIONES PUT

IPC 100%

	0.53	0.56	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-0.01	-0.01	-0.02	-0.02	-0.02	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03
-0.08	-0.14	-0.24	-0.33	-0.40	-0.47	-0.52	-0.56	-0.59	-0.62	-0.64	-0.64
-0.44	-0.83	-1.41	-2.04	-2.62	-3.15	-3.64	-4.09	-4.51	-4.88	-5.22	-5.22
-1.49	-2.81	-4.83	-7.11	-9.31	-11.43	-13.47	-15.44	-17.33	-19.15	-20.90	-20.90
-3.62	-6.64	-11.39	-16.72	-21.83	-26.71	-31.38	-35.84	-40.10	-44.16	-48.02	-48.02
-6.62	-12.38	-20.87	-30.05	-38.46	-46.11	-53.06	-59.33	-64.97	-70.01	-74.49	-74.49
-10.68	-19.62	-32.21	-44.94	-55.72	-64.77	-72.28	-78.45	-83.46	-87.48	-90.66	-90.66
-15.48	-27.81	-44.09	-59.16	-70.67	-79.32	-85.70	-90.31	-93.58	-95.84	-97.38	-97.38
-20.79	-36.36	-55.42	-71.26	-81.94	-88.96	-93.44	-96.23	-97.90	-98.87	-99.42	-99.42
-26.37	-44.79	-65.46	-80.67	-89.55	-94.57	-97.29	-98.70	-99.41	-99.74	-99.89	-99.89

TDC

	0.5255	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
-0.006405	-0.01	-0.02	-0.03	-0.03	-0.03	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04
-0.194412	-0.37	-0.71	-1.01	-1.28	-1.52	-1.73	-1.91	-2.07	-2.21	-2.33	-2.33
-1.554699	-3.02	-5.94	-8.76	-11.48	-14.11	-16.65	-19.09	-21.46	-23.74	-25.95	-25.95
-5.557453	-10.69	-20.55	-29.62	-37.93	-45.52	-52.42	-58.66	-64.29	-69.33	-73.83	-73.83
-12.63778	-23.53	-42.32	-57.14	-68.65	-77.45	-84.08	-88.97	-92.51	-95.03	-96.78	-96.78
-22.11676	-39.17	-64.08	-79.45	-88.64	-93.94	-96.89	-98.47	-99.28	-99.68	-99.86	-99.86
-32.89532	-54.80	-80.58	-92.09	-96.96	-98.90	-99.63	-99.88	-99.97	-99.99	-100.00	-100.00
-43.92022	-68.40	-90.75	-97.50	-99.38	-99.86	-99.97	-99.99	-100.00	-100.00	-100.00	-100.00
-54.38409	-79.07	-96.06	-99.34	-99.90	-99.99	-100.00	-100.00	-100.00	-100.00	-100.00	-100.00

DJI

	0.5038	0.56	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	-0.05	-0.07	-0.10	-0.12	-0.14	-0.15	-0.16	-0.16	-0.17	-0.17	-0.17
-0.06	-0.88	-1.49	-2.16	-2.78	-3.35	-3.88	-4.36	-4.80	-5.21	-5.57	-5.57
-0.33	-4.86	-8.36	-12.31	-16.13	-19.81	-23.36	-26.79	-30.03	-33.27	-36.34	-36.34
-0.95	-13.60	-22.83	-32.72	-41.65	-49.69	-56.89	-63.29	-68.96	-73.94	-78.29	-78.29
-1.93	-26.05	-41.62	-56.33	-67.83	-76.69	-83.40	-88.40	-92.06	-94.67	-96.51	-96.51
-3.23	-39.96	-59.85	-75.57	-85.57	-91.74	-95.43	-97.56	-98.75	-99.38	-99.71	-99.71
-4.78	-53.35	-74.49	-87.92	-94.55	-97.66	-99.05	-99.63	-99.87	-99.96	-99.99	-99.99

TDCUS

	0.5587	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-0.04	-0.03	-0.06	-0.08	-0.10	-0.11	-0.12	-0.12	-0.13	-0.13	-0.13	-0.13
-1.69	-1.44	-2.82	-4.13	-5.37	-6.55	-7.67	-8.74	-9.74	-10.69	-11.58	-11.58
-11.50	-9.85	-19.02	-27.51	-35.36	-42.59	-49.24	-55.31	-60.85	-65.88	-70.42	-70.42
-31.39	-27.34	-48.11	-63.63	-75.00	-83.18	-88.93	-92.89	-95.55	-97.29	-98.40	-98.40
-54.34	-48.54	-74.59	-88.00	-94.59	-97.68	-99.06	-99.64	-99.87	-99.96	-99.99	-99.99