INSTITUTO TECNOLOGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY
CAMPUS CIUDAD DE MEXICO

PRUEBA DE EFICIENCIA CONTRA CAOS BASADA EN EXPONENTES DE LYAPUNOV

ARTURO LORENZO VALDÉS
Ph. D.

FEBRERO, 2001

ITESM
CAMPUS CIUDAD DE MEXICO
BIBLIOTECA

RESUMEN

En este trabajo se desarrolla un estimador del exponente de Lyapunov dominante para una serie de tiempo estocástica. Se emplean métodos de regresión polinomial local y se demuestra que el estimador es consistente bajo el supuesto de linealidad. Se utiliza el estimador para probar la hipótesis nula de caminata aleatoria contra la hipótesis alternativa de caos. La prueba estadística se aplica en la serie del Índice de Precios y Cotizaciones de México resultando que no se rechaza la hipótesis de caminata aleatoria.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS iv

LISTA DE TABLAS v

INTRODUCCIÓN 1

CAPÍTULO 1

SISTEMAS DINÁMICOS CAÓTICOS 4

1.1. Sistemas dinámicos 5

1.2. Sistemas caóticos 10

1.3. Exponentes de Lyapunov 13

1.4. Análisis de series de tiempo no lineales 15

1.5. Reconstrucción del espacio fase 16

1.6. Datos sustitutos de series de tiempo 19

CAPÍTULO 2

ESTIMACIÓN DE EXPONENTES DE LYAPUNOV 22

2.1. Regresión local lineal 22

2.2. Estimación de los exponentes de Lyapunov 27

2.3. Consistencia del estimador 29

CAPÍTULO 3

EFICIENCIA DEL MERCADO ACCIONARIO MEXICANO 33

3.1. Mercados eficientes 34

3.2. No linealidad en el IPC 36

3.3. Prueba de caminata aleatoria contra caos 40

CONCLUSIONES 45

BIBLIOGRAFÍA 47

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Atractor del mapa de Hénon 9

Figura 1.2 Series de tiempo generadas con la ecuación logística cuando a) a=2, b) a=4 con valores iniciales x_0=0.7 (línea sólida) y x_0=0.7001 (línea punteada). 12

Esquema de Urbach del proceso de tres fases para analizar una serie de tiempo no lineal. 16

Figura 1.3 Fracción de los vecinos falsos como función de la dimensión de inserción para el mapa de Hénon. 19

Figura 1.4 Distribución empírica, nivel de significancia y cuantil λ^*correspondiente. 20

Figura 2.1 Serie de tiempo generada por la función sin(x) con un término de perturbación. Se obtienen las estimaciones por regresión local lineal de la función y de su derivada para h=1 (a), h=0.3 (b) y h=0.1 (c). 26

Figura 2.2 Estimación de la función logística y su derivada con un ancho de banda h=0.15, a partir de datos simulados con perturbaciones. 27

Figura 2.3. Función del estimador del exponente de Lyapunov con respecto al número de observaciones de la serie $y_t = 0.7y_{t-1} + \varepsilon_t$. 32

Figura 3.1 Fracción de los vecinos falsos como función de la dimensión de inserción para la serie de los logaritmos del IPC. 41

Figura 3.2. Valores del estadístico del exponente de Lyapunov calculado para la serie del logaritmo del IPC. 41

Figura 3.3. a) Serie del logaritmo del IPC (y) con respecto al día anterior (x) y estimación de la función por regresión local lineal con h=0.5 std(y). b) Estimación por regresión local lineal de la derivada de la función. 42

Figura 3.4. Distribución empírica de los exponentes de Lyapunov generados con la técnica de datos sustitutos. 43

LISTA DE TABLAS

Tabla 3.1 Estadístico de Hsieh de los residuales del ajuste lineal de los rendimientos del IPC. 39

Tabla 3.2. Estadístico BDS de los residuales del ajuste lineal de los rendimientos del IPC, con n la dimensión de inserción y k el radio. 39

Tabla 3.3. Cuantiles de la distribución empírica de los exponentes de Lyapunov. 43

INTRODUCCIÓN

En años recientes el estudio de los mercados financieros ha cobrado relevancia. Gran parte de los análisis sin embargo, suponen que estos mercados se comportan en forma eficiente. Lo anterior significa, siguiendo la hipótesis de eficiencia del mercado, que los agentes no pueden diseñar una estrategia de inversión que genere beneficios extraordinarios tomando en cuenta tan solo los precios anteriores de los activos.

Tomando el caso de México, para que el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) fuera considerado como un mercado eficiente se esperaría se comporte como una caminata aleatoria es decir, de manera estocástica.

En este trabajo se diseña una prueba estadística para contrastar la hipótesis de caminata aleatoria contra la alternativa de caos y se prueba precisamente en este mercado.

Al utilizar series de observaciones de los precios de varios activos, se han detectado irregularidades y comportamientos aparentemente impredecibles siendo muy diferente lo que sucede con series de tiempo lineales ampliamente estudiadas y que además son las que están ligadas a la hipótesis de eficiencia de mercado. En este caso, la mejor predicción que puede hacerse para el precio futuro, es el precio actual por lo que si los precios siguen una caminata aleatoria no se tendrían ganancias extraordinarias.

Por esta razón se han desarrollado métodos para analizar estas series pero asumiendo que tienen un comportamiento no lineal.

Estos métodos están basados en el estudio de sistemas dinámicos modelados de una manera determinista por ecuaciones diferenciales en las que el futuro está en función del estado actual. Se trata de sistemas en donde el estado futuro es demasiado sensible a

pequeñas perturbaciones o a las condiciones iniciales que los generan y se les denominan caóticos. Ejemplo de este comportamiento es el conocido *efecto mariposa* en el que la condición de la existencia de determinado fenómeno en el futuro depende si en este momento se pisa o no a una mariposa.

Esta es la base de la teoría del caos que ha buscado desarrollar métodos para analizar series de tiempo deterministas.

Parece improbable que los rendimientos en los mercados financieros puedan explicarse a través de un proceso determinista, parece más bien que en la realidad son estocásticos, es decir, siguen tal comportamiento sensible a las condiciones iniciales. En estos casos por lo tanto, la hipótesis de eficiencia de mercado no se cumple ya que es posible predecir el precio de los activos en el corto plazo a partir de los precios pasados.

El objetivo del estadístico es probar la supuesta eficiencia del mercado accionario debido al comportamiento de caminata aleatoria contra la hipótesis alternativa de caos, mediante el diseño de un estimador del exponente de Lyapunov, con lo que estaremos midiendo la sensibilidad a pequeñas perturbaciones.

El trabajo se divide en tres secciones, en la primera parte se presentan brevemente los elementos básicos de los sistemas dinámicos, así como qué los hacen caóticos y además se sugiere un proceso para estudiar series de tiempo no lineales.

En el segundo capítulo se desarrolla el estadístico para estimar el exponentes de Lyapunov dominante basado en técnicas de regresión polinomial local. En esta parte se demuestra la consistencia del estimador bajo el supuesto de linealidad. La técnica de regresión polinomial local es una forma de suavizamiento en la que una función es

estimada aplicando regresión polinomial a cada sección de los datos. En nuestro caso el polinomio es lineal.

En la última sección se presentan los resultados obtenidos al aplicar el estadístico a la serie del IPC y contrastar la hipótesis de caminata aleatoria contra caos empleando las técnicas estudiadas en los capítulos anteriores.

CAPÍTULO 1

SISTEMAS DINÁMICOS CAÓTICOS

En este capítulo se presentan las ideas y conceptos básicos para el análisis de series de tiempo no lineales. Es muy común que las series de tiempo parezcan exhibir un comportamiento irregular y que aparentemente sería impredecible, por lo que el estudio de estos datos es relevante para muchas disciplinas. Muchos fenómenos económicos y financieros son estudiados usando observaciones hechas en el tiempo. El objetivo principal de estos análisis, es descubrir el comportamiento de dichas series y entender el proceso que las genera o mejor dicho, su dinámica.

Muchos de los métodos desarrollados para el análisis de series de tiempo se basan en la teoría de los sistemas dinámicos, sin embargo intentar predecir el comportamiento de estos sistemas cuando exhiben una dinámica caótica es un problema complejo.

Han sido varios los intentos por enfrentar los fenómenos de la realidad económica que vaya más allá de una explicación determinista. Un buen ejemplo de estos estudios se encuentra en el área de la economía dinámica, siendo más específicos, el mercado de capitales resulta un campo fértil para la aplicación del análisis no lineal.

Basados en las condiciones antes descritas y ante la dificultad para comprender el comportamiento y predecirlo con las técnicas habituales, nos lleva a utilizar otras técnicas más sofisticadas en la modelación de dichos sistemas. El descubrimiento de caos determinístico nos permite comprender el comportamiento errático de los sistemas aplicando estas nuevas técnicas.

1.1 Sistemas dinámicos

Un sistema dinámico es un conjunto de elementos que están relacionados entre sí y forman una unidad que cambia de estado a través del tiempo. Tal sistema está constituido por un espacio fase o espacio estado, cuyas coordenadas describen el estado dinámico en cualquier instante, definido por una regla de comportamiento en el tiempo que especifica la evolución de todas las variables de estado.

El estado de un sistema en un tiempo particular se define como la condición de todos los elementos del sistema en ese tiempo.

El estado fase es la colección de posibles estados de un sistema dinámico. Un estado particular en el estado fase, especifica el sistema completamente, es decir, si conociéramos el estado actual del sistema y la dinámica que éste sigue, tendríamos una representación completa del futuro inmediato.

Definición 1.1.- Un sistema dinámico es una tripleta (Ω,ϕ,T), donde Ω es el espacio estado o espacio fase representando todos los posibles estados del sistema, de tal manera que para cada $t \in T$, con T el conjunto de tiempos posible, el sistema se encuentra en uno de los posibles estados $x(t) \in \Omega$. Por lo general, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y T puede ser los reales o los enteros positivos. El sistema dinámico tiene un operador $\phi : \Omega \times T \to \Omega$ tal que

$$\frac{dx}{dt} = \phi(x,t) \qquad x \in \Omega,\ t \in T \tag{1.1}$$

Una solución de la ecuación (1.1) es una función $f(t)$ tal que

$$\frac{df(t)}{dt} = \phi(f(t),t) \qquad \forall t \in T .$$

Esta función nos indica el camino seguido en el espacio fase de la solución de un problema con valores iniciales y es llamada órbita o trayectoria del sistema dinámico.

Sistemas como el anterior son llamados no autónomos ya que la función ϕ, depende directamente de t. En estos sistemas, el mapa o campo vectorial, depende explícitamente del tiempo, entonces de acuerdo a la definición de espacio fase, debemos incluir el tiempo como una coordenada en el espacio fase para conocer el siguiente movimiento. Cuando la función ϕ no depende directamente del tiempo, el sistema es autónomo.

Si las variables estado toman valores continuos, la órbita de un sistema en tiempo continuo es una curva, mientras que la órbita en tiempo discreto es una serie de puntos y se representa como

$$x_{t+1} = \phi(x_t) \qquad x \in \Omega,\ t \in \mathbb{N} \tag{1.2}$$

En este caso, a la función ϕ se le llama mapa y es simplemente una función en el espacio fase que proporciona el siguiente estado del sistema dado su valor actual. La función debe tener un valor único para cada estado, pero pueden existir diferentes estados que llevan a la misma imagen.

Como ejemplo de un mapa, tenemos el conocido mapa logístico o función logística

$$x_{t+1} = \alpha x_t(1 - x_t) \qquad x \in [0,1],\ t \in \mathbb{N} \tag{1.3}$$

Este sistema se puede interpretar como un modelo de crecimiento poblacional que depende de dos términos, uno lineal y otro cuadrático. El término lineal describe un crecimiento a una tasa $a>1$, de la población sin restricción de recursos. El término cuadrático describe el crecimiento considerando restricciones de competencia. El espacio estado en este caso es el intervalo [0,1] por lo que a no debe ser mayor a cuatro ya que la función $f(x) = x(1-x) \leq 1/4$ para toda x.

Una interpretación económica de la función logística, es considerarla como el comportamiento de los precios de un activo. La parte lineal sólo consideraría un activo que no tiene competencia, es decir no existe otro activo por el que pueda sustituirse, por lo que su precio crece sin restricciones. La parte cuadrática estaría incorporando dicha competencia con otros activos.

Un mapa continuo con inversa continua se conoce como homeomorfismo. Un homeomorfismo que tiene al menos una derivada continua con inversa continua y diferenciable es un difeomorfismo.

Iterar un mapa significa aplicar repetidamente el mapa. Esta serie es la órbita o trayectoria del sistema dinámico dada la condición inicial

$$x_{t+2} = \phi(x_{t+1}) = \phi(\phi(x_t)) = \phi \circ \phi(x_t) = \phi^2(x_t)$$
$$x_{t+n} = \phi^n(x_t)$$

Para la función logística en (1.3) en dos pasos tenemos

$$x_{t+2} = \phi(x_{t+1}) = \phi(ax_t(1-x_t)) = a(ax_t(1-x_t))(1-(ax_t(1-x_t)).$$

Los sistemas dinámicos se clasifican en conservativos y disipativos. En los primeros, ciertas propiedades físicas del sistema permanecen constantes en el tiempo, por lo que la dimensión del espacio fase permanece constante. Retomando el ejemplo del activo sin competencia, el sistema es conservativo si el precio del activo siempre es el mismo, es decir, si $x_{t+1} = x_t$ para toda t. Los sistemas disipativos se caracterizan por la contracción del espacio fase (o de algunas medidas físicas), a medida que pasa el tiempo por lo que se

converge a determinados estados del sistema. Estos últimos son los que trataremos en este trabajo.

Un primer paso para el estudio de la dinámica de un sistema, es definir el conjunto de invariantes. Supongamos el sistema discreto (1.2), decimos que el conjunto $S \subseteq \Omega$, es invariante bajo el mapa ϕ, si $\phi(S) \subseteq S$. Esto significa que cada vez que apliquemos el mapa ϕ a algún punto de S, obtenemos otro punto en S. Con esto decimos que si un conjunto S es invariante, cualquier trayectoria que empiece en S termina en S.

En ciertas aplicaciones financieras por ejemplo, se pide que los rendimientos sean no negativos, es decir, iniciar con rendimientos positivos que nos lleven a terminar con rendimientos positivos.

También nos interesa localizar las regiones del espacio estado que capturan todas las trayectorias que están cerca, a eso se le conoce como atractores. Un atractor es un subconjunto del espacio estado en el que se acumulan las trayectorias del sistema. Es simplemente un estado en el que el sistema se estabiliza. Podemos decir que un atractor es un conjunto en el espacio fase que tiene una vecindad en la que cada punto permanece cerca y se aproxima al atractor cuando se hace tender el tiempo al infinito. La vecindad de puntos que eventualmente se acercan al atractor es el conjunto o dominio de atracción.

El atractor más simple es un punto fijo estable que en términos económicos se conoce como equilibrio estable. Podemos considerar también como atractor las soluciones periódicas o ciclos límite en los que un punto x es periódico en ϕ con periodo k, si $\phi^k(x) = x,\ k > 1$ y $\phi^j(x) \neq x,\ 0 < j < k$. Es decir, x es periódico en ϕ con periodo k, si es un punto fijo para ϕ^k. Si las trayectorias de un atractor son sensibles al estado inicial, se dice que el atractor es caótico.

Para ilustrar lo anterior, consideremos una generalización del mapa logístico en (1.3) a un sistema de dos dimensiones conocido como el mapa de Hénon. La dinámica del sistema es:

$$x_{t+1} = 1 - ax_t^2 + y_t$$
$$y_{t+1} = bx_t$$

Este es un sistema disipativo (que existe una contracción del espacio fase) cuando $|b|<1$, ya que el jacobiano del sistema es $-b$. Para mostrar un atractor se simuló el sistema con los parámetros a=1.4 y b=0.3 se generaron cinco mil datos a partir de la condición inicial $(x_0, y_0) = (0,0)$. Se observa en la Figura 1.1 el conjunto de puntos en que se estabiliza el sistema, es decir, si la condición inicial del sistema comienza en algún punto del atractor entonces permanece en ese conjunto.

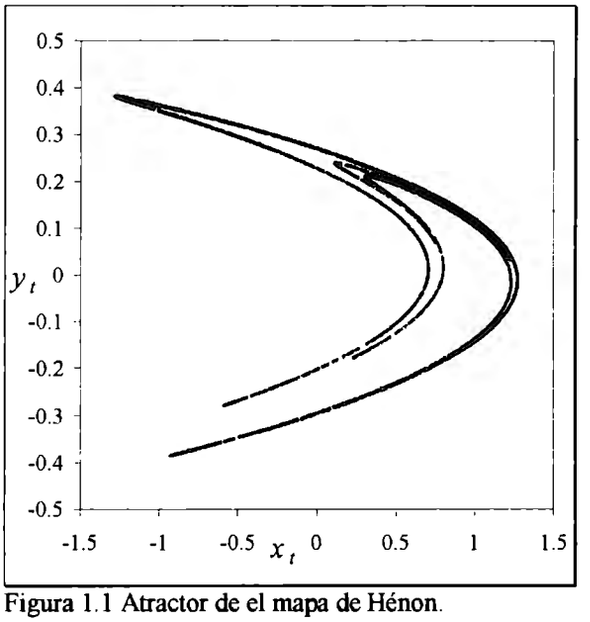


Figura 1.1 Atractor de el mapa de Hénon.

1.2 Sistemas caóticos

El caos es un comportamiento impredecible en el largo plazo de un sistema dinámico determinístico causado por la sensibilidad a las condiciones iniciales. Debe enfatizarse que un sistema dinámico determinístico es perfectamente predecible dado el conocimiento exacto de las condiciones iniciales y es en la práctica siempre predecible en el corto plazo. Para que un sistema dinámico sea caótico debe tener un conjunto de condiciones iniciales que sean altamente inestables. No importa qué tan precisas sean las mediciones de las condiciones iniciales en el sistema caótico, las predicciones de los movimientos siguientes serán equivocadas después de un tiempo.

Para definir formalmente un sistema caótico, es necesario introducir algunos conceptos matemáticos.

Definición 1.2.- Un conjunto A es denso en S si para cada $\varepsilon > 0$ y cada x en S, existe una a en A tal que $\|x - a\| < \varepsilon$.

Un ejemplo de lo anterior son los números racionales que son densos en los reales, ya que siempre se puede encontrar un número racional en cualquier intervalo de los reales.

Definición 1.3.- Sea ϕ un mapa definido en S. Entonces ϕ es transitivo si para cualquier par de conjuntos abiertos no vacíos U y V, existe un entero positivo k tal que $\phi^k(U) \cap V \neq \varnothing$.

Lo anterior significa que toda trayectoria es densa en S, es decir bajo un mapa transitivo un punto deambulará sobre todo el espacio S donde la trayectoria estará tan cerca de cada punto de S.

Las definiciones anteriores nos llevan a definir formalmente un mapa caótico.

Definición 1.4.- Un mapa ϕ es caótico en un conjunto compacto invariante S si:

- ϕ es transitivo en S
- El conjunto de puntos periódicos es denso en S
- ϕ exhibe dependencia sensible a las condicioes iniciales

Hay que aclarar que las dos primeras condiciones implican la tercera, por lo que para que un sistema sea caótico es necesario que sea sensible a las condiciones iniciales.

Definición 1.5.- Un mapa ϕ sobre el conjunto S exhibe dependencia sensible a condiciones iniciales si existe un r tal que para toda $\varepsilon>0$ y cada x_0 en S, existe una y_0 tal que si $\|x_0 - y_0\| < \varepsilon$, $\|\phi^n(x_0) - \phi^n(y_0)\| > r$ para alguna $n>0$.

Hay que aclarar que la existencia de dependencia sensible no requiere de un crecimiento exponencial de las perturbaciones, pero es algo que se presenta comúnmente en los sistemas caóticos. Nótese que tampoco es necesario que todos los puntos cercanos iniciales diverjan, algunos puntos cercanos pueden converger.

La frase "condiciones iniciales" puede no ser adecuada. Una pequeña perturbación introducida al sistema en cualquier periodo hace que el comportamiento sea similar. Puede pensarse en inicial como el tiempo cuando una perturbación o error es introducido y no necesariamente el tiempo cero.

Como consecuencia de la impredecibilidad en el largo plazo, series de tiempo de sistemas caóticos pueden aparecer como irregulares y desordenadas (que no tienen una regla de comportamiento). Sin embargo el caos no significa desorden total, es desorden en un sistema determinístico que es siempre predecible en el corto plazo.

Si consideramos la ecuación logística en (1.3), tenemos que para un valor de a=2, no importa cuales son las condiciones iniciales ya que el sistema siempre converge a x=0.5 Pero para un valor de a=4, las trayectorias son muy sensibles al valor inicial como podemos ver en la Figura 1.2 donde se muestra que una pequeña variación en la condición inicial (de 0.001) lleva a variaciones grandes en los últimos periodos.

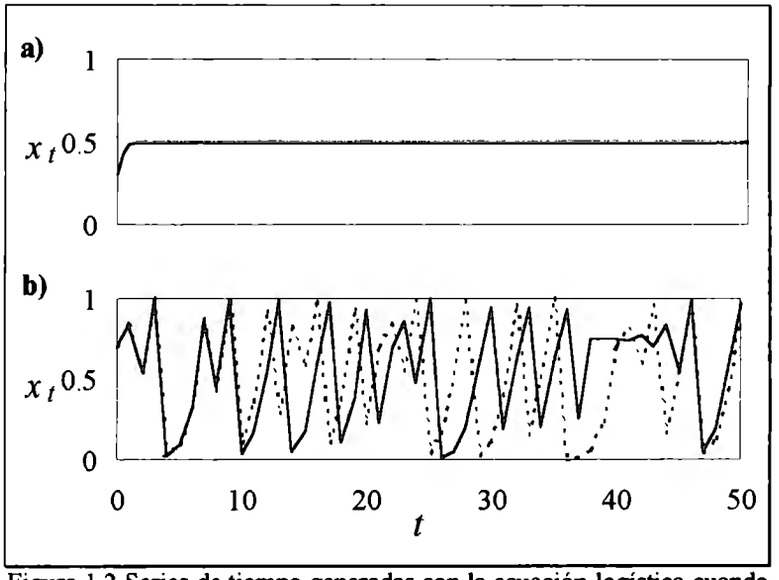


Figura 1.2 Series de tiempo generadas con la ecuación logística cuando a) a=2, b) a=4 con valores iniciales x_0=0.7 (línea sólida) y x_0=0.7001 (línea punteada).

1.3 Exponentes de Lyapunov

Una forma de medir la sensibilidad a las condiciones iniciales, tema en el que se centra este trabajo, son los exponentes de Lyapunov.

Los exponentes de Lyapunov miden la tasa a la que órbitas cercanas convergen o divergen y dan información sobre las propiedades de estabilidad de un sistema dinámico. Hay tantos exponentes de Lyapunov como la dimensión en el espacio estado del sistema, por lo que podríamos tener una serie, conocida como espectro de exponentes de Lyapunov, que caracterizan la deformación del espacio fase multidimensional. El exponente de Lyapunov que nos interesa es el más grande debido a que mide la tasa de producción de información o mejor dicho, la mayor tasa de crecimiento a la que se expande el espacio fase y con la que se separan las trayectorias. A dicho exponente lo denotaremos por λ.

Si $\lambda<0$, las órbitas convergen en tiempo y el sistema dinámico no es sensible a las condiciones iniciales. Si λ es positivo, las distancias entre órbitas cercanas crecerán exponencialmente en el tiempo y el sistema exhibirá dependencia sensible a condiciones iniciales.

Supongamos que tenemos el siguiente sistema dinámico

$$X_t = F(X_{t-1}) \tag{1.4}$$

donde $X_t = (x_t, x_{t-d}, \cdots, x_{t-(m-1)d})$ con m la dimensión de inserción y d el retraso.

Definición 1.6.- Sea el sistema dinámico no lineal (1.4). Se define el exponente de Lyapunov dominante como:

$$\lambda = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log \left\| \prod_{t=1}^{T} J_{T-t} \right\| \tag{1.5}$$

con J_t el jacobiano

$$J_t = \begin{bmatrix} F_{1t} & F_{2t} & \cdots & F_{(m-1)t} & F_{mt} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

para $t=0,1,\ldots,T-1$ donde $F_{it} = \dfrac{\partial F(\cdot)}{\partial x_{t-i}}$, utilizando alguna norma $\|\cdot\|$ para determinantes.

La ecuación logística en (1.3) con a=4 es un sistema caótico de una dimensión por lo que el exponente de Lyapunov tiene un valor positivo

$$\lambda = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln \left| \frac{d\phi(x_t)}{dx_t} \right| = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln|4 - 8x_t| =$$

$$= \ln(4) + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln|1 - 2x_t| = \ln(2)$$

Una forma numérica de calcular el exponente de Lyapunov cuando la función es conocida es generar números de acuerdo al mapa, obtener la derivada del mapa y calcular el logaritmo en cada punto. Esto se ilustra en la función logística con x_0=0.7, dando como resultado

$$\lambda = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln \left| \frac{d\phi(x_t)}{dx_t} \right| \approx \frac{1}{1000} \sum_{t=1}^{1000} \ln|4 - 8x_t| = 0.69199 \approx \ln(2)$$

1.4 Análisis de series de tiempo no lineales

Los sistemas dinámicos son determinísticos si existe sólo una consecuencia para cada estado, y estocásticos o aleatorios si hay más de una consecuencia. Los primeros describen la evolución en el tiempo de un sistema en algún espacio fase, los estocásticos hacen esta descripción con una perturbación.

Para poder analizar series de tiempo estocásticas basadas en los métodos de los sistemas dinámicos podemos seguir un proceso de tres fases (Urbach, 2000).

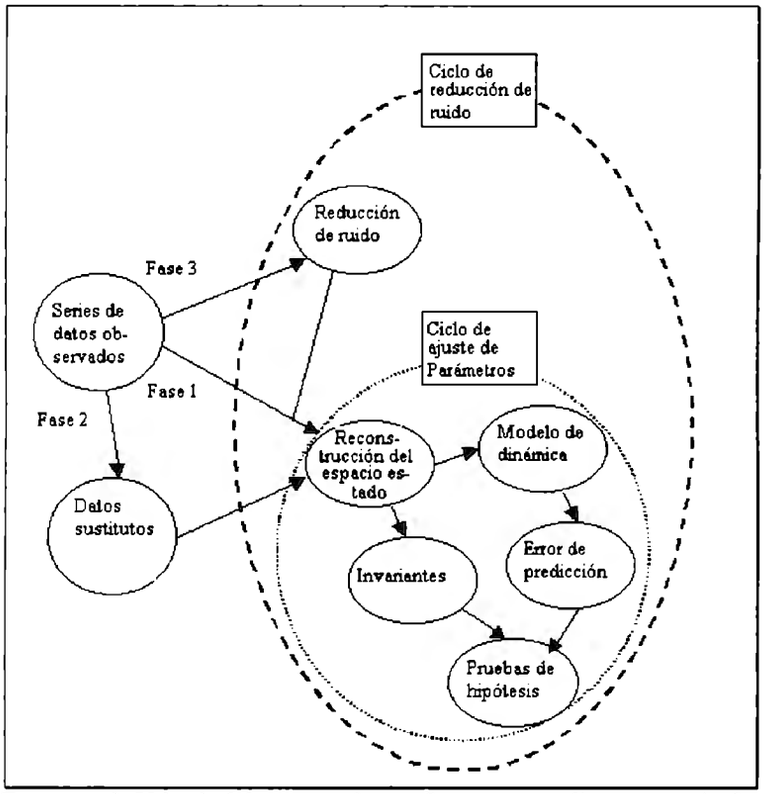
Fase 1.- Reconstruir una trayectoria para el sistema usando estimaciones de los parámetros de reconstrucción. Aquí se estiman los invariantes del sistema, se propone un modelo para la dinámica así como el cálculo del error de predicción.

Los invariantes del sistema son características dinámicas y geométricas que no son alteradas por el proceso de reconstrucción del espacio fase. Uno de esos invariantes son los exponentes de Lyapunov.

Fase 2.- Probar la hipótesis de existencia de componentes caóticos en los datos observados y con datos sustitutos. Es decir, repetir varias veces la fase uno, pero con la generación de datos sustitutos que tengan las mismas características que los datos originales.

Fase 3.- Reducción de ruido. Reemplazar los datos originales usados en el fase uno con el conjunto de datos con ruido reducido y repetir las fases anteriores. En este caso, se pretende reducir el efecto de la perturbación en la dinámica del sistema, para lo cual se

utiliza algún filtro, se ajusta un modelo específico a la serie o se emplean técnicas de suavizamiento .



Esquema de Urbach del proceso de tres fases para analizar una serie de tiempo no lineal.

Como puede observarse, el trabajo es arduo para analizar una serie de tiempo no lineal. La fase uno es la más importante de este proceso y se explica a continuación.

1.5 Reconstrucción del espacio fase

La reconstruccion del espacio fase permite reconstruir la dinámica asintótica de un sistema dinámico a partir de datos observados de la misma, es decir de una serie de tiempo.

El teorema de representación de Takens (Takens, 1981) establece que una trayectoria de reconstrucción (o experimental) puede ser definida en términos de m observaciones independientes para reconstruir el comportamiento asintótico (atractor) de un sistema dinámico de dimensión m, es decir, una serie $\{x_t\}$consta de medidas escalares del estado de un sistema dinámico, entonces bajo ciertas condiciones, la dimensión de inserción nos da una imagen uno a uno del conjunto original.

Sea el sistema en (1.6) con espacio estado Ω

$$\frac{dx}{dt} = \phi(x) \qquad x \in \Omega \tag{1.6}$$

Suponiendo que la evolución del sistema (1.6) se sigue en un subespacio de dimensión finita del espacio fase, podemos representar el sistema como

$$X_t = F(X_{t-1}) + \varepsilon_t$$

donde $X_t = (x_t, x_{t-d}, \cdots, x_{t-(m-1)d})'$ con m la dimensión de inserción y d el retraso.

En este caso se considera un sistema estocástico ya que se le incluye un término de perturbación ε_t y que consideramos como ruido.

Esto significa que para reconstruir el espacio fase sólo se necesitan la dimensión de inserción y el retraso, que se puede estimar utilizando la función de autocorrelación.

Un método eficiente para determinar una dimensión mínima de inserción m y por lo tanto poder reconstruir un espacio estado, es el algoritmo de los vecinos falsos más cercanos (Kennel, Brown, Abarnel, 1992). La idea de este método es suponer que si m_o es la dimensión de inserción mínima para que con una serie de tiempo se reconstruya el comportamiento asintótico del sistema, esto significa que el atractor en el espacio fase

reconstruido forma una imagen uno a uno con el atractor en el espacio fase original como lo establece el teorema de reconstrucción de Takens.

Al ser la dimensión correcta, las propiedades de los invariantes se preservan, por lo que los vecinos de un punto dado son mapeados a los vecinos del espacio iterado un paso en el futuro y así sucesivamente. De ahí que vecindades en el futuro son mapeadas nuevamente a mismas vecindades tomando en cuenta que la forma y el diámetro de los vecinos cambia debido a los exponentes de Lyapunov.

Suponiendo ahora que se utiliza una dimensión $m < m_o$, la estructura no se preserva ya que los puntos son proyectados a vecinos de otros puntos los cuales no deberían pertenecer a dimensiones altas. Esos puntos son llamados vecinos falsos.

Si se aplica ahora la dinámica, estos vecinos falsos no son mapeados a la imagen de los vecinos, por lo que el diámetro llega a ser mayor. Si la razón entre las distancias de la iteración y de los vecinos más cercanos excede un umbral determinado, el punto se marca *como vecino* falso. Se calcula la fracción de los vecinos falsos para cada dimensión especificada y cuando se llega a cero, esa es la dimensión de inserción mínima.

La idea detrás del procedimiento descrito es que cuando la dimensión de reconstrucción se incrementa, los vecinos cercanos se separan pero los vecinos verdaderos no.

Para una serie generada de acuerdo al sistema de Hénon, se aplica el algoritmo y tenemos que es suficiente representar el sistema con una dimensión de inserción m=2, es decir $X_t = (x_t, x_{t-1})'$, que es la correcta (Figura 1.3).

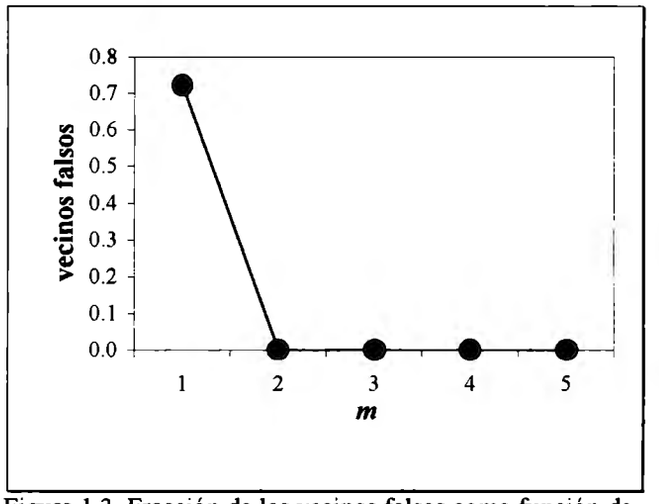


Figura 1.3. Fracción de los vecinos falsos como función de la dimensión de inserción para el mapa de Hénon.

1.6 Datos sustitutos de series de tiempo

Para realizar pruebas de hipótesis necesitamos conocer la función de distribución del estadístico a ser utilizada. Sin embargo cuando se analizan series de tiempo no lineales, por lo general, esto no es posible ya que la obtención de esta función de distribución es complicada.

En estos casos se considera la utilización del método de datos sustitutos que se basa en los siguientes puntos (Harrison, et. al. 1999)

- Establecer la hipótesis nula a ser probada con los datos originales.
- Generación de conjuntos de datos sustitutos.
- Cálculo del estadístico para los datos originales y los sustitutos.
- Cálculo de la media y varianza de los datos sustitutos obtenidos para determinar si la diferencia con el original es significativa (formación de la distribución empírica de los datos).

Se podrá rechazar la hipótesis nula comparando el valor del parámetro no lineal utilizando la función de distribución, como no se conoce ésta se tiene que estimar por el método de Monte Carlo.

Para conseguir el conjunto de datos independientes se emplea un generador de números aleatorios y se toma una muestra de los datos originales con reemplazo de tal manera que se preserve la función de autocorrelación o espectro. Esto se realiza n veces, por lo que se tendrían n conjuntos de datos de T_n elementos cada uno. Para cada conjunto de datos sustitutos se calcula el estimador λ_i bajo la hipótesis nula.

Para un nivel de significancia de α, $P(\lambda \geq \lambda^*) = 1-\alpha$ con λ el estimador de los datos originales y λ^* el cuantil correspondiente como se muestra en la Figura 1.4. La distribución se puede aproximar con datos sustitutos como

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(\lambda_i - \lambda^*) \approx 1-\alpha$$

con $I(.)$ la función indicadora y encontrando λ^* para realizar la prueba, si $\lambda > \lambda^*$ se rechaza la hipótesis nula donde se establece que el parámetro es menor o igual al valor deseado.

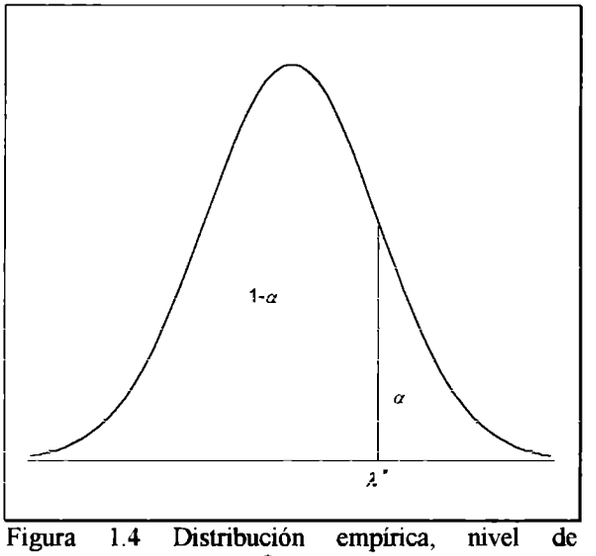


Figura 1.4 Distribución empírica, nivel de significancia y cuantil λ^*correspondiente.

Lo anterior corresponde al desarrollo de la fase 2 de acuerdo al esquema de Urbach. Para realizar la fase tres de reducción de ruido se puede ajustar un modelo, o en nuestro caso utilizar técnicas de suavizamiento con regresión no paramétrica que se explican en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 2

ESTIMACIÓN DE EXPONENTES DE LYAPUNOV

Los distintos métodos para estimar exponentes de Lyapunov a partir de datos observados se clasifican en dos grupos (McCffrey, Ellner, Gallant y Nychka 1992).

Los primeros son métodos directos basados en los supuestos de que la serie crecerá exponencialmente a una tasa λ. La tasa de crecimiento de la perturbación se estima siguiendo la evolución de las diferencias entre puntos observados cercanos.

Por otro lado, están los métodos Jacobianos donde los datos son usados para estimar el jacobiano de la función y λ, el exponente de Lyapunov dominante, es calculado a partir de la estimación de los jacobianos.

En esta parte se diseñará un estadístico para probar la sensibilidad a las condiciones iniciales. El procedimiento que se usará cae dentro de los métodos Jacobianos para estimar exponentes de Lyapunov. La idea es utilizar regresión local lineal para estimar el exponente de Lyapunov dominante. Este método se genera a partir de la utilización de kernels que son ponderadores de suavizamiento con los que se trata de eliminar el ruido en las series con perturbaciones, es decir, trata de encontrar la dinámica del sistema.

2.1 Regresión local lineal

Los métodos no paramétricos para estimar funciones a partir de datos observados, se basan en la creencia de que los modelos de regresión parámetrica dan como resultado especificaciones e inferencias incorrectas cuando no se conoce la forma funcional.

Estos enfoques son útiles y efectivos para detectar no linealidad y para explorar las relaciones funcionales. En este trabajo probaremos su utilidad en el diagnóstico de caos. Se emplearán métodos de suavizamiento basados en regresión local.

Supongamos el siguiente modelo:

$$y_t = m(x_t) + \varepsilon_t \tag{2.1}$$

con $m(x)$ una función diferenciable desconocida y ε_t una serie de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (IID) con media cero y varianza σ^2.

En una vecindad del punto x tenemos, por series de Taylor, que la mejor aproximación lineal de la función en el punto y que pertenece a la vecindad de x es $m(y) \approx m(x) + m'(x)(y-x) \equiv a + b(y-x)$. Por lo que el problema de estimar $m(x)$ y $m'(x)$ es equivalente al problema de regresión local lineal (2.2) para cada x de encontrar los estimadores para a y b

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \underset{(a,b)}{\arg\min} \left\{ \sum_{t=1}^{T} \left(y_t - a - b(x_t - x) \right)^2 K\left(\frac{x - x_t}{h_T} \right) \right\} \tag{2.2}$$

La función $K\left(\frac{x - x_t}{h_T} \right)$ en (2.2) es el kernel que debe ser positivo en su dominio y h_T el ancho de banda o parámetro de suavizamiento. Las funciones utilizadas como kernel, deben cumplir que

$$\int K(u)du = 1$$

Con frecuencia se utiliza como kernel una función de densidad de probabilidad simétrica alrededor del cero, aunque su utilidad es como ponderador no como densidad de probabilidad. Uno muy utilizado es el kernel Gaussiano

$$K(t) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1} \exp(-t^2/2).$$

El parámetro h_T es un parámetro de suavizamiento y se conoce como ancho de banda. Si es muy pequeño, la ponderación se hará con respecto a vecindades igual de pequeñas alrededor del punto x estudiado. Si es muy grande, la ponderación será sobre vecindades grandes de x. Es por eso que es muy importante elegir un ancho de banda adecuado.

Si expresamos (2.2) en forma matricial, definimos

$$X = \begin{pmatrix} 1 & (x_1 - x) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & (x_T - x) \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} K\left(\frac{x - x_1}{h}\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K\left(\frac{x - x_2}{h}\right) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K\left(\frac{x - x_T}{h}\right) \end{pmatrix}$$

Por lo que el problema se reduce a:

$$\min_{\beta} (Y - X\beta)' W (Y - X\beta) \tag{2.3}$$

Una ventaja de expresarlo de manera matricial es que se puede extender al caso multidimensional en el que la mejor aproximación lineal se puede obtener a partir de series de Taylor pero tomando en este caso, las derivadas parciales. Si consideramos la función $m(x)$ con $x = (x_1, x_2, \ldots, x_v)$, la aproximación lineal sería

$$m(y) \approx m(x) + \frac{\partial m(x)}{\partial y_1}(y_1 - x_1) + \cdots + \frac{\partial m(x)}{\partial y_v}(y_v - x_v)$$

En este caso el kernel a ser utilizado sería multidimesional.

La solución de (2.3) es el vector de estimadores:

$$\hat{\beta} = (X'WX)^{-1} X'WY$$

Sustituyendo el valor de $Y = m(X) + \varepsilon$ con $m(X) = (m(x_1), m(x_2), \cdots, m(x_T))'$ tenemos

$$\hat{\beta} = (X'WX)^{-1} X'W(m(X) + \varepsilon)$$

pero podemos escribir $m(X) = X\beta + (m(X) - X\beta))$ por lo que

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= (X'WX)^{-1} X'W(X\beta + (m(X) - X\beta) + \varepsilon) = \\ &= (X'WX)^{-1}(X'WX)\beta + (X'WX)^{-1} X'W(m(X) - X\beta + \varepsilon) = \\ &= \beta + (X'WX)^{-1} X'W(m(X) - X\beta) + (X'WX)^{-1} X'W\varepsilon\end{aligned}$$

y la esperanza condicional

$$E(\hat{\beta}|X) = \beta + (X'WX)^{-1} X'W(m(X) - X\beta)$$

De la misma forma se obtiene la varianza condicional

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}|X) = \sigma^2 (X'WX)^{-1}(X'WWX)(X'WX)^{-1}.$$

Podemos notar que si la función $m(x)$ en (2.1) es lineal, entonces los estimadores serían insesgados (ya que en ese caso $m(X)=X\beta$) más aún, de la teoría de los estimadores por mínimos cuadrados, $\hat{\beta}$ son estimadores consistentes de β, y al ser $m(X)=X\beta$ son estimadores consistentes de $m(x)$ y sus parciales respectivamente. Esto último nos será útil para realizar nuestra prueba en el siguiente capítulo.

Se ha demostrado que los estimadores por regresión local lineal, son estimadores eficientes (Fan 1992).

Como ejemplo se generon doscientos datos del sistema $y_t = \sin(x_t) + \varepsilon_t$, con $\varepsilon_t \sim N(0,0.1)$ con tres valores distintos para el ancho de banda h. En la Figura 2.1 se

pueden observar las estimaciones para $m(x)$ y su derivada respectivamente y la forma como varían de acuerdo a h. En este caso el mejor resultado fue para h=0.3. Como se puede notar los resultados son muy sensibles al parámetro de suavizamiento confirmando la importancia de elegir correctamente dicho valor.

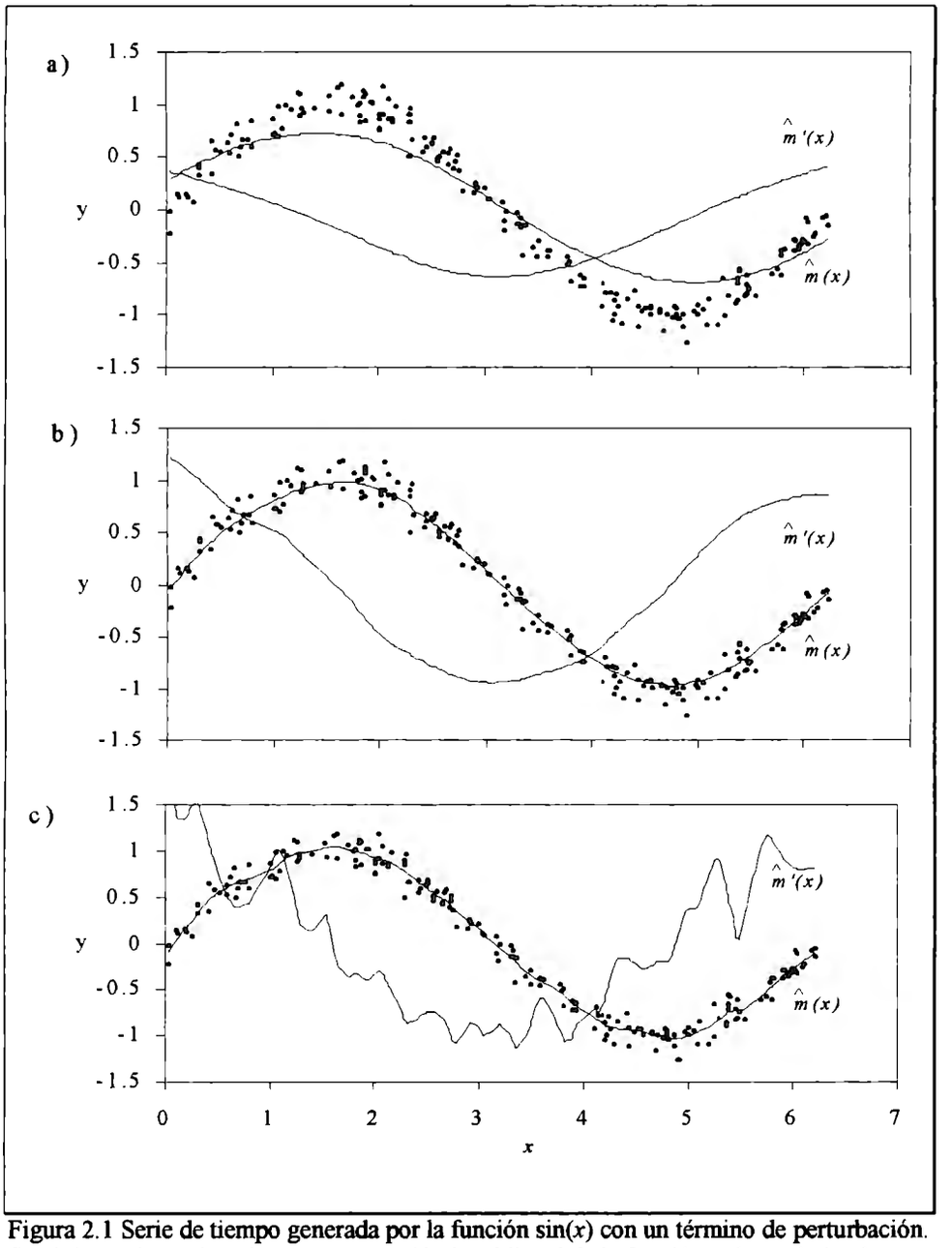


Figura 2.1 Serie de tiempo generada por la función sin(x) con un término de perturbación. Se obtienen las estimaciones por regresión local lineal de la función y de su derivada para h=1 (a), h=0.3 (b) y h=0.1 (c).

En la Figura 2.2 se representan como ejemplo, los estimadores para la función logística $x_{t+1} = 4x_t(1-x_t)+\varepsilon_t$ con $\varepsilon_t \sim N(0,0.001)$ en el que la estimación de la derivada es muy cercana a la real de $\phi(x_t) = 4-8x_t$.

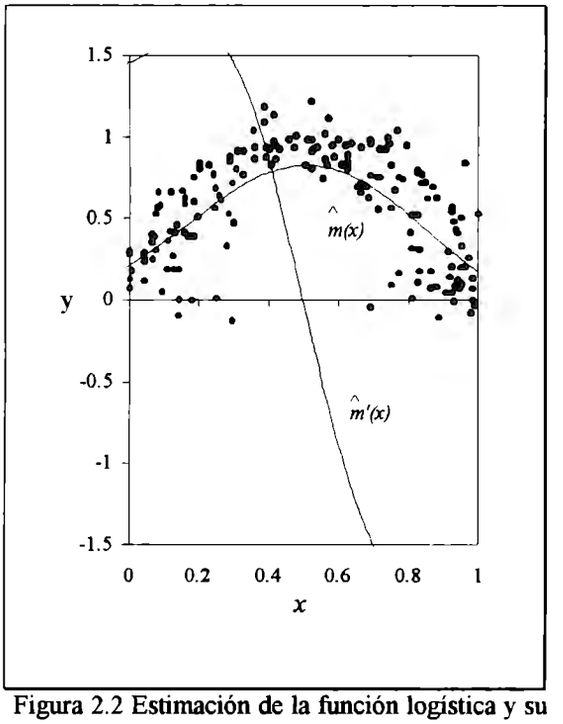


Figura 2.2 Estimación de la función logística y su derivada con un ancho de banda h=0.15, a partir de datos simulados con perturbaciones.

2.2 Estimación de los exponentes de Lyapunov

Para estimar los exponentes de Lyapunov (Whang, Linton 1999) tenemos

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{T}\ln\left\|\prod_{t=1}^{T}\hat{J}_{T-t}\right\|$$

donde

$$\hat{J}_t = \begin{bmatrix} \hat{m}_{1t} & \hat{m}_{2t} & \cdots & \hat{m}_{(v-1)t} & \hat{m}_{vt} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

con $\hat{m}_{jt} = \dfrac{\partial \hat{m}(x_t)}{\partial x_{jt}}$ estimaciones de las derivadas.

Al estimar el exponente de Lyapunov dominante, se necesitan buenos estimadores de las parciales de $m(x)$, Park y Whang (1999) lo hacen estimando $m(x)$ por el estimador de Nadaraya Watson y obteniendo la derivada en cada punto. Cabe mencionar que el estimador de Nadaraya Watson es un caso particular de regresión polinomial local en el que la función $m(x)$ se aproxima por una constante.

En este trabajo se obtienen estimaciones directamente por regresión local lineal que es un caso particular de regresión polinomial local en el que la función $m(x)$ se aproxima por funciones lineales, esto significa que la derivada o las parciales en su caso se estiman directamente como se describió en la sección anterior.

Para cada observación x_t de la serie de tiempo con $t=1,\ldots T$, tenemos que resolver el problema de mínimos cuadrados definido en (2.2) obteniendo como resultado valores $\hat{a}_t$ y $\hat{b}_t$. En nuestro caso, sólo necesitamos los estimadores de b_t para $t=1,\ldots T$.

Podemos entonces estimar el exponente de Lyapunov para una función univariada como

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \ln(|\hat{b}_t|) \qquad (2.4)$$

Continuando con el ejemplo de la función logística, se toma un ancho de banda h=0.15 con quinientos datos generados obteniendo un valor $\hat{\lambda} = 0.5821$ cercano al valor real. Con un mayor número de datos nos estaremos aproximando al valor original de ln(2), recordando que se tiene un sesgo ya que la función no es lineal.

2.3 Consistencia del estimador

Bajo el supuesto de linealidad para una serie de tiempo univariada, el estimador del exponente de Lyapunov es consistente. Esta afirmación se debe a que los estimadores $\hat{a}_t$ y $\hat{b}_t$ en (2.2) son estimadores consistentes de $m(x_t)$ y $m'(x_t)$. En este caso se demostrará que el exponente expresado en (2.4) es consistente, para esto se hará uso del siguiente teorema.

Teorema 2.1.- Sea X_T una serie de variables aleatorias con un número finito de elementos. Sea f una función real continua en un punto x. Entonces si $\text{plim} X_T = x \Rightarrow \text{plim}\, f(X_T) = f(x)$.

Demostración.- Si f es continua en x, tenemos que para toda ε>0 existe una δ>0 tal que si $\|X_T - x\| < \delta \Rightarrow |f(X_T) - f(x)| < \varepsilon$, por lo que $P(\|X_T - x\| < \delta) \leq P(|f(X_T) - f(x)| < \varepsilon)$, pero $\text{plim} X_T = x$, que es lo mismo que $\lim_{T\to\infty} P(\|X_T - x\| < \delta) = 1$ que implica que $\lim_{T\to\infty} P(|f(X_T) - f(x)| < \varepsilon) = 1$, por lo tanto $\text{plim}\, f(X_T) = f(x)$ ∎

El teorema anterior nos lleva a realizar las siguientes proposiciones, suponiendo siempre la linealidad de la función $m(x)$, es decir $m(x)=a+bx$:

Proposición 2.1.- Sea $\hat{b}_t$ el estimador por regresión local lineal de $m'(x_t)$, entonces $\left|\hat{b}_t\right|$ es un estimador consistente de $\left|m'(x_t)\right|$.

Demostración.- Al ser $\hat{b}_t$ el estimador por regresión local lineal, es un estimador consistente de $m'(x_t)$. Como $f(x)=|x|$ es una función continua en todo su dominio, al utilizar el *Teorema 2.1* se obtiene el resultado∎

Proposición 2.2.- Sea $\hat{b}_t$ el estimador por regresión local lineal de $m'(x_t)$, entonces si $\hat{b}_t \neq 0$, $\ln\left(\left|\hat{b}_t\right|\right)$es un estimador consistente de $\ln\left(\left|m'(x_t)\right|\right)$.

Demostración.- Al ser $\hat{b}_t$ el estimador por regresión local lineal, es un estimador consistente de $m'(x_t)$. Por la *Proposción 2.1* $\left|\hat{b}_t\right|$ es un estimador consistente de $\left|m'(x_t)\right|$. Como $f(x)=\ln(x)$ es una función continua para $x>0$, aplicando el *Teorema 2.1*, $\ln\left(\left|\hat{b}_t\right|\right)$es un estimador consistente de $\ln\left(\left|m'(x_t)\right|\right)$∎

Con lo anterior se puede demostrar que el estimador propuesto del exponente de Lyapunov es un estimador consistente, además se empleará la siguiente propiedad de límites en probabilidad:

Si X_T y Y_T son variables aleatorias con $\operatorname{plim} X_T = x$ y $\operatorname{plim} Y_T = y$, entonces $\operatorname{plim}(X_T + Y_T) = x + y$.

Teorema 2.2.- Sean $\hat{b}_t$ los estimadores por regresión local lineal de $m'(x_t)$ para $t=1,\ldots T$.

El estimador $\hat{\lambda} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \ln(|\hat{b}_t|)$, es un estimador consistente de λ.

Demostración.- De las dos proposiciones anteriores, si $\hat{b}_t$ es el estimador por regresión local lineal de $m'(x_t)$ para cada $t=1,\ldots T$, entonces $\ln\left(\left|\hat{b}_t\right|\right)$ son estimadores consistentes de $\ln\left(\left|m'(x_t)\right|\right)$, es decir $\operatorname{plim} \ln\left(\left|\hat{b}_t\right|\right) = \ln\left(\left|m'(x_t)\right|\right)$ para $t=1,\ldots T$. De lo anterior, al sumar sobre todas las T usando la propiedad enunciada anteriormente y al hacer tender a infinito tenemos

$$\operatorname{plim} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \ln(|\hat{b}_t|) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \ln(|m'(x_t)|)$$

por lo que $\operatorname{plim} \hat{\lambda} = \lambda$ ∎

Para ilustrar el desempeño del estimador, se generaron mil números de la serie $y_t = 0.7y_{t-1} + \varepsilon_t$, con $\varepsilon_t \sim N(0,0.1)$, en la que el exponente de Lyapunov toma un valor de ln(0.7)= -0.35667.

En la Figura 2.3, se muestra la gráfica de los exponentes calculados con respecto al número de observaciones y la convergencia al exponente verdadero con lo que se puede observar la consistencia.

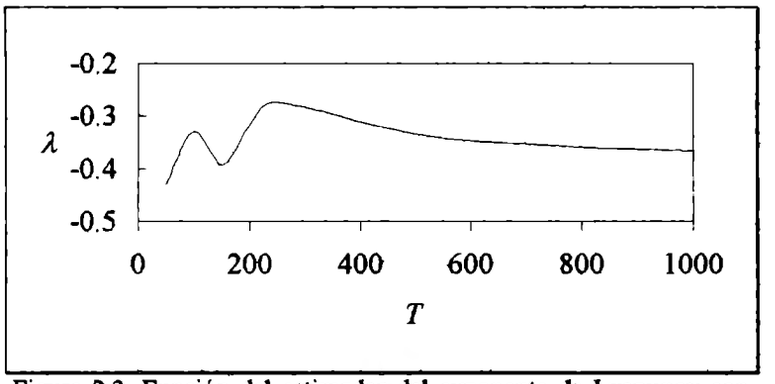


Figura 2.3. Función del estimador del exponente de Lyapunov con respecto al número de observaciones de la serie $y_t = 0.7y_{t-1} + \varepsilon_t$.

Se ha construido un estimador del exponente de Lyapunov dominante que bajo el supuesto de linealidad es consistente. En el siguiente capítulo se empleará el estimador anterior para probar la hipótesis de caminata aleatoria contra caos.

CAPÍTULO 3

EFICIENCIA DEL MERCADO ACCIONARIO MEXICANO

El propósito de este capítulo es probar que existe caos determinista en los rendimientos del índice accionario mexicano para lo cual se utilizará la prueba diseñada en el capítulo anterior donde se estiman los exponentes de Lyapunov.

La hipótesis de "mercado eficiente" en los mercados financieros alrededor del mundo de alguna forma no se cumple, por más fuerte que estos sean y el caos se presenta como una mejor alternativa para explicarlos. Podríamos decir entonces, que el mercado de capitales en México, al ser más reciente y con ello menos sólido, no es la excepción.

Aunque es improbable que los rendimientos puedan explicarse por un proceso determinista, parece ser que los rendimientos siguen tal comportamiento sensible a las condiciones iniciales.

Ello nos lleva a suponer que los activos financieros en nuestro país no siguen una caminata aleatoria.

Para poder utilizar la metodología vista en el primer capítulo necesitamos que la dinámica del sistema a estudiar sea no lineal. Para probar que el IPC cumple con esta condición se emplearán las pruebas de tercer momento de Hsieh (Hsieh 1989) junto con la BDS (Brock, W., et. al. 1996).

Posteriormente se aplicará la prueba basada en los exponentes de Lyapunov para probar la hipótesis nula de caminata aleatoria con respecto a caos, con lo que si se rechaza esta última podremos afirmar que el mercado no es eficiente.

3.1 Mercados eficientes

Un mercado en el que los precios reflejan toda la información disponible es eficiente y se dice que es eficiente con respecto a un conjunto de información. Esto implica que no existen oportunidades de obtener beneficios extraordinarios.

Entonces podemos definir la eficiencia dependiendo del grado de información disponible: *existe eficiencia* débil si el conjunto de información sólo incluye la historia de precios; *eficiencia semi-fuerte* si el conjunto de información incluye toda la información conocida por los participantes del mercado, y *eficiencia fuerte* si el conjunto de información incluye toda la información conocida por cualquier participante del mercado.

El problema de predecir precios futuros está muy relacionado con la eficiencia del mercado. Es claro que si se pudieran predecir los precios futuros de tal manera de tener ganancias a causa de ello, el mercado sería ineficiente ya que se podrían generar ganancias extraordinarias.

Los modelos de precios de activos por lo general implican un modelo martingala. Simbólicamente, un proceso estocástico x_t es martingala (Barnett y Serletis 2000) si $E(x_{t+1}|\Omega_t) = x_t$ con Ω_t el conjunto de información en t. Si x_t representa el precio de algún activo, el conjunto de información refleja completamente dicho precio, por lo que sería un mercado eficiente.

El modelo anterior puede escribirse como $x_{t+1} = x_t + \varepsilon_t$ con ε_t una diferencia martingala.

Al escribirlo de esa manera se parece a una caminata aleatoria, sin embargo, esta última es más restrictiva que la anterior, ya que una diferencia martingala requiere sólo independencia en la esperanza condicional mientras que la caminata aleatoria requiere ruido blanco.

El supuesto entonces es que si la serie del IPC sigue una caminata aleatoria, el precio refleja toda la información del mercado y por lo tanto es eficiente.

Existen pocos estudios para América Latina en general y México en particular para probar la eficiencia de mercado. Feliz (1990) por ejemplo, hace una evaluación de la capacidad predictiva de la hipótesis fundamentalista en el caso del mercado accionario mexicano. La hipótesis fundamentalista explica el comportamiento del precio de las acciones con base en el valor presente esperado de los dividendos futuros. En este trabajo se realiza una prueba de eficiencia semi-fuerte y los resultados muestran que no se rechaza la hipótesis fundamentalista y por lo tanto tampoco la hipótesis de eficiencia de mercado.

Mejía, Grados y Meunier (1991) aplican tres pruebas estadísticas para probar eficiencia en su forma débil en el mercado mexicano. Generan una prueba de corridas donde concluyen que el mercado es parcialmente ineficiente en su forma débil y este es el mismo resultado que obtienen en la prueba de correlación serial. La tercera prueba se basa en el modelo de activos de capital en el que estiman las ganancias extraordinarias y concluyen que el mercado no es eficiente en su forma débil.

Urrutia (1995) realiza una prueba de caminata aleatoria sobre los principales índices de precios de activos con frecuencia mensual de Argentina, Brasil, Chile y México usando una prueba de razón de varianzas y encuentra evidencias para rechazar la hipótesis de caminata aleatoria en favor de aversion a la media en los cuatro países.

Grieb y Reyes (1999) realizan una prueba de caminata aleatoria en precios de activos en Brasil y México utilizando una prueba de razón de varianza sobre rendimientos semanales de los principales índices accionarios de cada país. Concluyen que para

México se rechaza la hipótesis de caminata aleatoria en favor de aversión a la media, pero en Brasil hay una tendencia a caminata aleatoria.

Ojah y Karemera (1999) utilizan pruebas de razón de varianza múltiple y de modelos integrados fraccionales sobre datos de los índices en dólares de Argentina, Brasil, Chile y México. En este estudio no se rechaza la hipótesis de caminata aleatoria, por lo que se acepta la eficiencia débil.

Todos los estudios anteriores se basan en modelos lineales de series de tiempo. Como se puede observar a partir de estos estudios, permanece la necesidad de desarrollar métodos alternativos que generen una descripción más cercana a la realidad de lo que sucede en los mercados financieros. Una alternativa son los modelos no lineales.

3.2 No linealidad en el IPC

En los análisis de series de tiempo no lineales se supone que los errores ε_t son independientes e idénticamente distribuidos (IID), pero se busca una posible relación no lineal en dichos errores.

La relación puede representarse como $x_t = f(\varepsilon_{t-1},\ldots,\varepsilon_{t-k}) + \varepsilon_t g(\varepsilon_{t-1},\ldots,\varepsilon_{t-k})$, con $f(.)$ la media de x_t y $g(.)$ la varianza.

Los modelos que son no lineales en la media permiten que momentos de grado mayor que dos sean distintos de cero.

Hsieh (1989) construye un estadístico basado en el tercer momento. Define el valor

$$\varphi(i,j) \equiv \frac{E[x_t x_{t-i} x_{t-j}]}{E[x_t^3]^{3/2}}$$

y observa que $\varphi(i,j)=0 \quad \forall\ i,j>0$ para datos IID o datos generados por un modelo martingala que es no lineal sólo en varianza y sugiere estimarlo por

$$\hat{\varphi}(i,j) \equiv \frac{\frac{1}{T}\sum_t x_t x_{t-i} x_{t-j}}{\left[\frac{1}{T}\sum_t x_t^2\right]^{3/2}}$$

Bajo la hipótesis nula de $\varphi(i,j)=0$, $\sqrt{T}\hat{\varphi}(i,j)$ se distribuye asintóticamente como una normal con media cero y con una varianza que se puede estimar consistentemente como

$$\hat{V} \equiv \frac{\frac{1}{T}\sum_t x_t^2 x_{t-i}^2 x_{t-j}^2}{\left[\frac{1}{T}\sum_t x_t^2\right]^3}$$

Esta prueba está diseñada para rechazar solamente la presencia de no linealidad aditiva (no linealidad en la media), es decir, $x_t = \varepsilon_t + f(\varepsilon_{t-1},\ldots,\varepsilon_{t-k})$ y se puede combinar con el estadístico BDS desarrollado por Brock, W., Dechert, W., Sheinkman, J., LeBaron, B., (1996).

El estadístico BDS prueba la dependencia no lineal usando el concepto de dimensión de correlación. La idea es centrar una esfera en un punto del espacio fase y hacer crecer el radio k de la esfera hasta que todos los puntos queden dentro de ella. Se define la función de correlación entre dos puntos como:

$$C_n(k) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^2}\sum_{i<j} \theta\left(k - \left\|x_i - x_j\right\|\right)$$

con θ la función de Heavyside (indicadora) y utilizando la norma suprema.

Grassberger y Procaccia consideran que para un valor de k pequeño la dimensión de correlación es $\nu_n = \frac{\ln C_n(k)}{\ln k}$. Si ésta crece con n, el proceso será estocástico, si es independiente de n, será determinístico. Los autores muestran que aún cuando k es finito,

si los datos son IID, entonces para cualquier n, $C_n(k) = C_1(k)^n$, y desarrollan un estadístico que se distribuye asintóticamente normal estándar:

$$J_{n,T}(k) = \sqrt{T}\,\frac{C_{n,T}(k) - C_{1,T}(k)^n}{\hat{\sigma}_{n,T}(k)}.$$

Bajo la hipótesis nula $C_n(k) \to \prod_{i=0}^{n-1} prob\{x_{t+i} - x_{s+i}| < k\}$, cuando $T \to \infty$.

El estadístico BDS prueba la hipótesis nula de independencia aleatoria y sistemas idénticamente distribuidos. Rechazar la hipótesis nula es consistente con algún tipo de dependencia en los datos que podría resultar de un sistema lineal estocástico o de un sistema no lineal determinístico.

No se prueba directamente la no linealidad o el caos, pero se puede utilizar de forma indirecta. Por ejemplo si todas las posibilidades lineales han sido removidas al utilizar un modelo ARIMA, el estadístico BDS puede ser utilizado para probar dependencia no lineal en los residuos.

El conjunto de datos iniciales consiste en 3824 valores de cierre diarios del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) correspondientes al periodo que comprende desde el 12 de junio de 1985 al 6 de octubre de 2000. A partir de estos datos iniciales se construye una serie de rendimientos diarios y se propone el mejor ajuste lineal con lo que se obtienen series de residuos.

La Tabla 3.1 muestra los estadísticos de Hsieh para distintos rezagos. Se observa que no se rechaza la hipótesis nula de $\hat{\varphi}(i, j) = 0$, por lo que podemos rechazar la presencia de no linealidad positiva.

Retraso					
i	j	φ(i,j)	V	std	estadístico
1	1	-0.3835	177.5533	13.3249	-1.7780
2	1	0.0404	70.8653	8.4182	0.2968
2	2	-0.4784	389.5054	19.7359	-1.4974
3	1	0.3455	114.6345	10.7067	1.9931
3	2	-0.0694	85.0964	9.2248	-0.4646
3	3	-0.2493	248.1861	15.7539	-0.9773
4	1	0.0180	70.4902	8.3958	0.1327
4	2	0.2999	94.2931	9.7105	1.9070
4	3	0.0019	74.4109	8.6262	0.0136
4	4	-0.1810	139.4207	11.8077	-0.9468
5	1	-0.0613	72.2488	8.4999	-0.4450
5	2	0.0192	72.2125	8.4978	0.1393
5	3	0.0005	44.1676	6.6459	0.0043
5	4	0.0186	37.7387	6.1432	0.1865
5	5	-0.2851	122.4486	11.0656	-1.5909

Tabla 3.1 Estadístico de Hsieh de los residuales del ajuste lineal de los rendimientos del IPC.

La tabla 3.2 muestra el estadístico BDS para distintas dimensiones de inserción y distintos radios que muestran ser demasiado grandes, rechazando la hipótesis nula de independencia.

	k					
n	**1.5**	**1.25**	**1**	**0.75**	**0.5**	**0.25**
2	15.2579	15.2723	15.1839	14.6343	13.6889	12.5767
3	17.7821	18.0508	18.0891	17.5641	16.7612	15.3188
4	19.0333	19.5039	19.7375	19.4866	19.0147	17.8689
5	19.8974	20.6898	21.3621	21.6349	21.5481	20.1735
6	20.5977	21.8075	23.0502	24.0369	24.6559	22.9588
7	21.2048	22.8673	24.8080	26.7903	28.6055	26.2985
8	21.7228	23.8549	26.6166	29.7324	33.4197	37.5586
9	22.3338	25.0339	28.7629	33.4099	38.9901	43.2937
10	23.1069	26.5286	31.5369	38.3043	46.9633	8.7776

Tabla 3.2. Estadístico BDS de los residuales del ajuste lineal de los rendimientos del IPC, con *n* la dimensión de inserción y *k* el radio.

Los estadísticos de tercer momento prueban que no hay dependencia no lineal aditiva, de tal manera que si existe no linealidad tendría que ser por medio de la varianza más que por la media.

El estadístico BDS, por otro lado, muestra que hay dependencia no lineal en los datos (ya que se eliminó la posibilidad de independencia lineal al filtrar dicho efecto por los modelos ARIMA). Por lo que es consistente con la presencia de heterocedasticidad condicional, ya sea con modelos ARCH, GARCH, EGARCH u otro tipo de forma funcional no lineal, permitiendo la utilización de los métodos no lineales presentados.

3.3 Prueba de caminata aleatoria contra caos

Una vez presentada la justificación para el uso del análisis de series de tiempo no lineales, se retoma la serie del IPC en logaritmos para reconstruir el sistema con el algoritmo de vecinos falsos más cercanos.

La Figura 3.1 muestra el resultado del algoritmo aplicado a la serie en el que la dimensión de inserción mínima es cinco.

La representación del sistema es entonces $X_t = (x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, x_{t-3}, x_{t-4})'$, que nos da una idea de que el índice en principio, puede no ser caminata aleatoria ya que para esto se necesitaría una dimensión de inserción de uno. Por el momento se puede decir que se necesitan cinco condiciones para poder definir el estado del sistema en un tiempo particular.

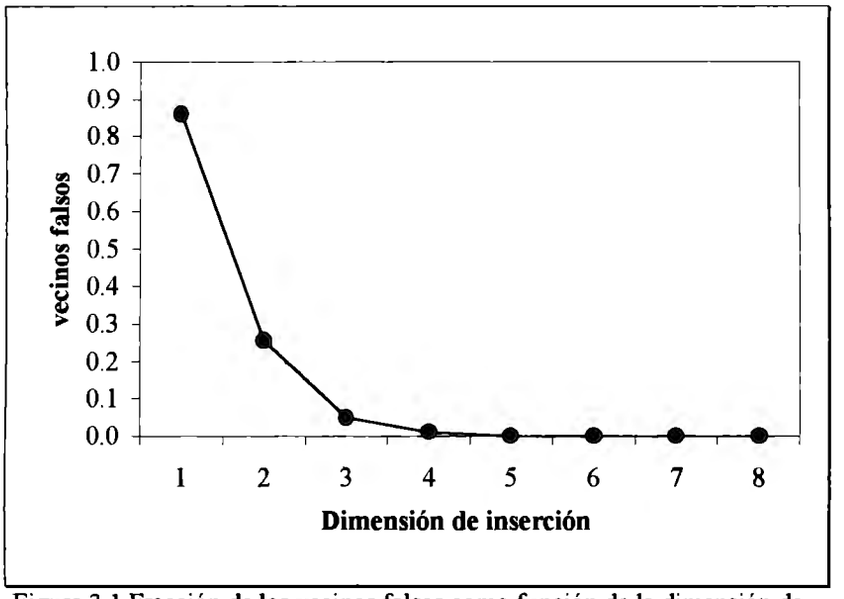


Figura 3.1 Fracción de los vecinos falsos como función de la dimensión de inserción para la serie de los logaritmos del IPC.

Estimamos el exponente de Lyapunov dominante bajo la hipótesis nula de caminata aleatoria, es decir, $x_{t+1} = x_t + \varepsilon_t$. Del problema (2.2) tenemos que estimar b que bajo la hipótesis nula es uno. Hay que recordar que bajo el supuesto de linealidad las estimaciones de b por regresión local lineal son consistentes y por lo tanto la estimación del exponente de Lyapunov también es consistente por el *Teorema 2.2* del capítulo anterior. La estimación del estadístico se presenta en la Figura 3.2.

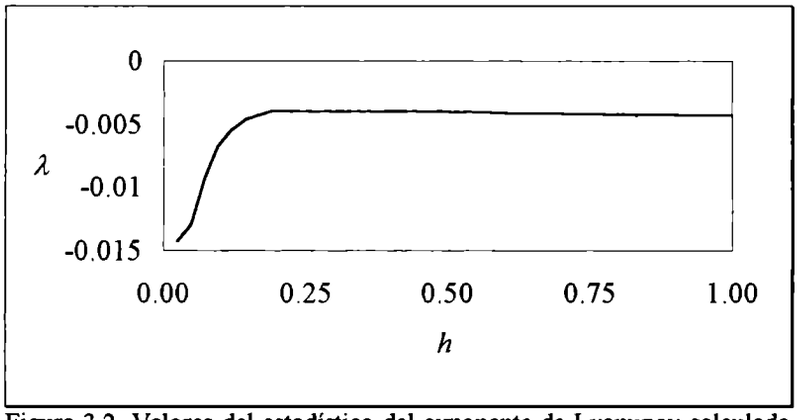


Figura 3.2. Valores del estadístico del exponente de Lyapunov calculado para la serie del logaritmo del IPC.

Se tomaron mil datos del logaritmo del índice y se calculó el exponente para distintos valores del ancho de banda. En todos los casos, el estadístico es muy cercano a cero, lo que parece indicar que efectivamente es una caminata aleatoria. La Figura 3.3 presenta la estimación de la función y su derivada para un de ancho de banda de 0.5 veces la desviación estándar de la serie.

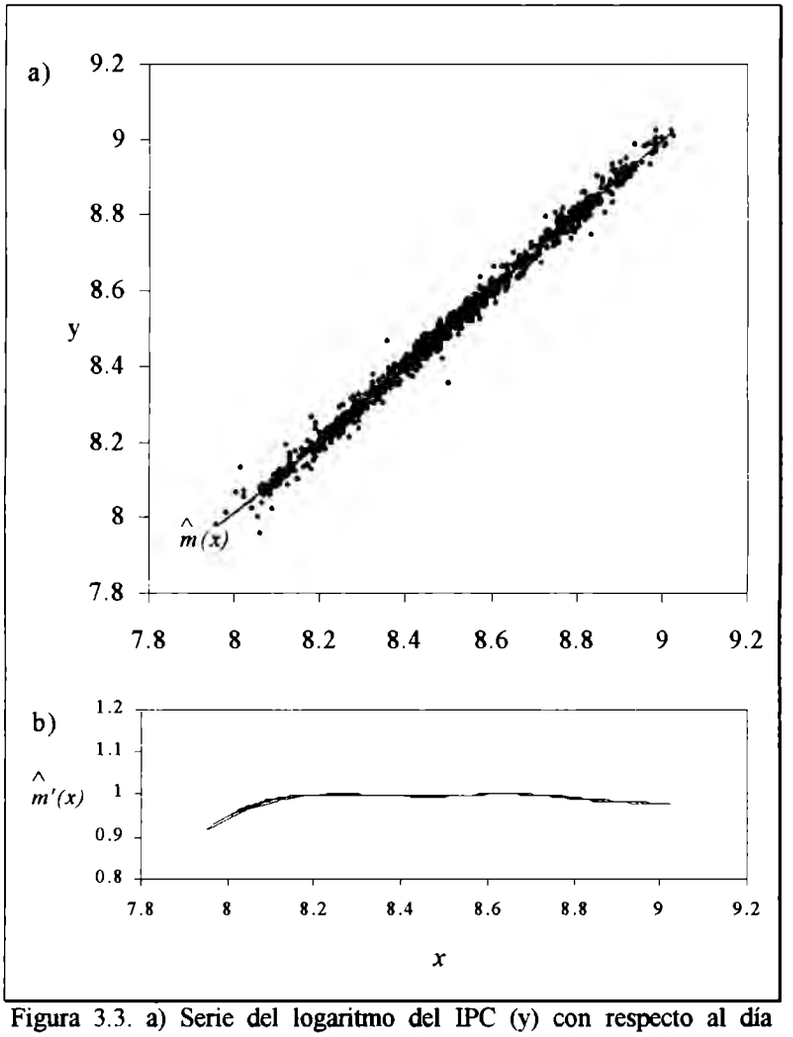


Figura 3.3. a) Serie del logaritmo del IPC (y) con respecto al día anterior (x) y estimación de la función por regresión local lineal con h=0.5 std(y). b) Estimación por regresión local lineal de la derivada de la función.

Para poder realizar la prueba de caminata aleatoria contra caos, necesitamos conocer la función de distribución del estadístico bajo la hipótesis nula. Al ser esto muy complicado, se emplea la técnica de datos sustitutos explicada en el primer capítulo.

Se siguieron los siguientes pasos.

1. Se elige utilizar como ancho de banda h=0.5*std(IPC) con std(IPC) la desviación estándar del logaritmo del IPC.
2. Se calcula el estimador del exponente de Lyapunov.
3. Se generaron mil series de datos sustitutos de doscientas observaciones cada uno a partir de los datos originales.
4. Se calculó el estadístico para los datos sustitutos así como su media y su varianza.
5. Se obtuvo la distribución empírica (Figura 3.4) y los cuantiles correspondientes.

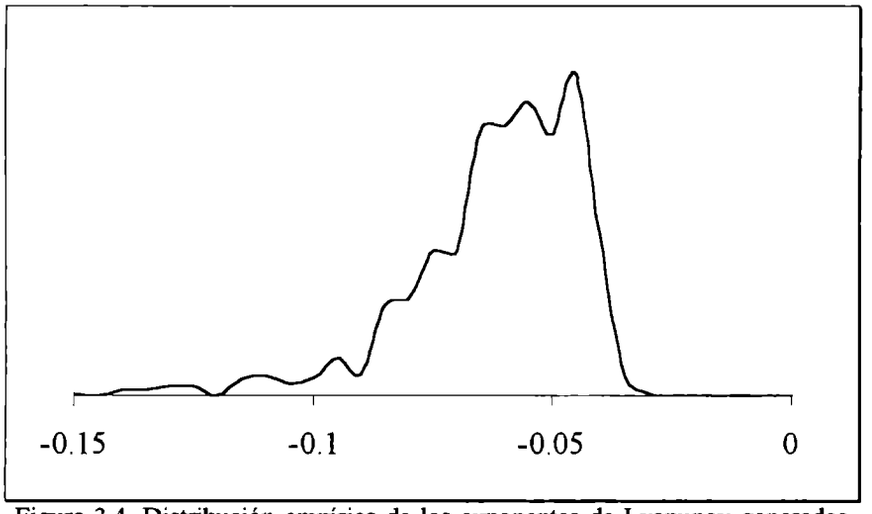


Figura 3.4. Distribución empírica de los exponentes de Lyapunov generados con la técnica de datos sustitutos.

Los resultados obtenidos se presentan en la siguiente tabla

$1-\alpha$	0.99	0.975	0.95	0.925	0.9
λ	-0.04	-0.04183	-0.0433	-0.04457	-0.04555

Tabla 3.3. Cuantiles de la distribución empírica de los exponentes de Lyapunov.

El estadístico de Lyapunov calculado con los datos originales, que en este caso es $\hat{\lambda} = -0.1034$, es muy pequeño en relación a los cuantiles calculados a partir de la distribución empírica. De acuerdo a lo anterior, la hipótesis nula de caminata aleatoria contra caos no se rechaza es decir, el caos no resultó ser mejor alternativa que caminata aleatoria.

El principal índice accionario mexicano no presenta indicios de caos por lo que se puede seguir aceptando el supuesto de eficiencia en este mercado.

CONCLUSIONES

Los resultados en este trabajo nos llevan a distinguir entre dos tipos de conclusiones. Las primeras tienen que ver con los métodos para analizar series de tiempo.

Los métodos lineales para analizar series de tiempo han quedado atrás. En estos momentos los sistemas sean físicos o sociales, presentan por lo general, un comportamiento no lineal.

La utilización de métodos no lineales, y entre estos los métodos no paramétricos, ha sido la más efectiva ya que están dando mejores resultados para el análisis de series de tiempo. En el caso del presente trabajo, al utilizar regresión local lineal hemos obtenido un buen estimador del exponente de Lyapunov dominante. Sin embargo, un problema que acarrean estos métodos es el costo computacional ya que para la estimación de cada punto se tiene que llevar a cabo una regresión.

El segundo tipo de conclusiones es con respecto a la prueba estadística que es la base del trabajo. El caso del mercado accionario en el que se aplicó el método propuesto, para poder tener ganancias extraordinarias el precio de determinado activo se debe predecir, pero si es una caminata aleatoria la mejor predición es el precio actual. Si el sistema es caótico, se puede hacer una predicción solamente en el corto plazo, debido a las perturbaciones que tiene todo sistema estocástico, ya que al ser caótico, es muy sensible a esas perturbaciones por lo que una predicción en el largo plazo no es factible.

El estadístico desarrollado, basado en los exponentes de Lyapunov, resulta una buena herramienta para para realizar la prueba de caminata aleatoria contra caos, ya que bajo la hipótesis nula de caminata aleatoria el estadístico es consistente.

Al realizar la prueba sobre el índice accionario no se puede rechazar la hipótesis nula de caminata aleatoria. A diferencia de otros mercados más grandes como el estadounidense, podemos decir que no hay evidencia para rechazar la eficiencia del mercado mexicano.

Para realizar la prueba estadística es necesario conocer la distribución del estadístico, lo cual representa un problema bastante complejo que se resuelve en este caso al encontrar una distribución empírica. Queda como tema de futuras investigaciones entonces, encontrar la distribución asintótica del estimador.

BIBLIOGRAFÍA

Amemiya, T. (1985), *Advanced Econometrics*, Cambridge: Harvard University Press.

Abhyankar, A., Copeland, L. S., Wong, W. (1997), "Uncovering Nonlinear Structure In Real-Time Stock-Market Indexes: The S&P 500, the DAX, the Nikkei 225, and the FTSE-100", *Journal of Business & Economic Statistics*, 15, 1-14.

Barnett, W., Gallant, A., Hinich, M., Jungeilges, J., Kaplan, D., Jensen, M., (1998), "A Single-Blind Controlled Competition Among Tests fon Nonlinearity and Chaos", *Journal of Econometrics*, 82, 157-192.

Barnett, W., Serletis, A. (2000), "Martingales, nonlinearity, and chaos", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 24, 703-724.

Brock, W., Dechert, W., Sheinkman, J., LeBaron, B., (1996), "A Test for Independence Based on the Correlation Dimension", *Econometric Reviews*, 15, 197-235.

Campbell, J. Y., Lo, A. W., MacKinlay, A. C. (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton: Princeton University Press.

Diks, C., (1999), *Nonlinear Time Series Analysis: Methods and applications*, World Scientific Publishing.

ITESM C.C.M. BIBLIOTECA

Elaydi, S., (2000), *Discrete Chaos*, Florida: Chapman & Hall/CRC.

Fan, J. (1992), "Design-adaptive Nonparametric Regression", *Journal of de American Statistical Association*, 87, 998-1004.

Feliz, R. A., (1990), "¿Responde la Bolsa Mexicana a los Fundamentos?", *Estudios Económicos*, 5, 335-358.

Gozalo, P., Linton, O., (2000), "Local nonlinear least squares: Using parametric information in nonparametric regression", *Journal of Econometrics*, 99, 63-103.

Grieb, T. y Reyes M., (1999), "Random walk tests for Latin American equity indexes and individual firms", *Journal of Financial Research*, 22, 371-383.

Harrison, R., Yu, D., Oxley, L., Lu, W., George, D., (1999), "Non-linear noise reduction and detecting chaos: some evidence from the S&P Composite Price Index", *Mathematics and Computers in Simulation*, 48, 497-502.

Hsieh, D. (1989), "Testing for Nonlinear Dependence in Daily Foreign Exchange Rates", *Journal of Business*, 62, 339-368.

Kantz, H., Schreiber, T., (1997), *Nonlinear Time Series Analysis*, Cambridge: Cambridge University Press.

Kaplan, D. (1994), "Exceptional Events as Evidence for Determinism", *Physica D*, 73, 38-48.

Kennel, M., Brown, R., Abarbanel, H., (1992), "Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction", *Physical Review* A, 45, 3403-3411.

Loader, C. (1999), *Local Regression and Likelihood*, New York: Springer-Verlag.

McCaffrey, D., Ellner, S., Gallant, A. R., Nychka, D. (1992), "Estimating the Lyapunov Exponent of a Chaotic System With Nonparametric Regression", *Journal of de American Statistical Association*, 87, 682-695.

Mejía, J., Grados, M., Meunier, N. (1991), "La eficiencia del mercado accionario en México", *Documento de trabajo*, Universidad de las Américas, Puebla.

Ojah, K. y Karemera, D., (1999), "Random walks and market efficiency tests for Latin American emerging equity markets: A revisit", *The Financial Review*, 34, 57-72.

Park, J. Y., Whang, Y., (1999), "Random Walk or Chaos: A Formal Test on the Lyapunov Exponent", *Documento de trabajo*

Peters, E., (1996), *Chaos and order in the captal markets: A new view of cycles, prices, and market volatility*, New York: John Wiley.

Polderman, J. W., Willems, J. C., (1998), *Introduction to mathematical systems theory: a behavioral approach*, New York: Springer Verlag.

Sheinkman, J., LeBaron, B., (1989), "Nonlinear Dynamics and Stock Returns", *Journal of Business*, 62, 311-338.

Schreiber, T., Schmitz, A., (2000), "Surrogate time series", *Physica D*, 142, 346-382.

Takens, F., (1981), "Detecting strange attractors in turbulence", *Dynamical systems and turbulence. Warwick 1980, Lecture Notes in Mathematics*, 898, 366-381.

Urbach, R. M. A. (2000), *Footprints of Chaos in the Markets. Analizing non-linear time series in financial markets and other real systems.* London: Prentice-Hall.

Urrutia, J. L., (1995), "Tests of random walk and market efficiency for Latin American emerging equity markets", *Journal of Financial Research*, 18, 299-309.

Whang, Y. y Linton, O. (1999), "The asymptotic distribution of nonparametric estimates of the Lyapunov exponent for stochastic time series", *Journal of Econometrics*, 91, 1-42.

Yu, D., Lu, W., Harrison, R., (1998), "Phase-space prediction of chaotic time series", *Dynamics and Stability of Systems*, 13, 219-236.