INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS

SUPERIORES DE MONTERREY

CAMPUS CIUDAD DE MÉXICO

VALUACIÓN DE PRODUCTOS DERIVADOS CON FUNCIÓN DE UTILIDAD Y VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA

DOCTORADO EN ADMINISTRACIÓN

TESIS PRESENTADA POR

GERARDO PIOQUINTO AGUILAR SÁNCHEZ

ASESOR
DR. FRANCISCO VENEGAS MARTÍNEZ

ABRIL 2005

En este trabajo determinamos la ecuación diferencial que sigue el precio de un producto derivado a partir del comportamiento racional de un consumidor-inversionista maximizador de utilidad, cuando los activos son nominales y la volatilidad es estocástica. Está la principal contibución en este trabajo.

En la primera parte se estudia el caso de volatilidad constante bajo el supuesto de agentes maximizadores de utilidad. En este marco se obtiene la ecuación dada en el modelo de Black y Scholes, independientemente del tipo de función de utilidad que se considere.

En la segunda parte se considera el caso de volatilidad estocástica bajo el supuesto de agentes maximizadores de utilidad. Se establece la ecuación diferencial que sigue el precio del producto derivado . En esta parte se hacen presentes las preferencias del consumidor-inversionista a través de una función de utilidad. En particular, desarrollamos los casos correspondientes a funciones de utilidad del tipo CPRA, CARA, HARA, logarítmica. Además, se considera el caso CPRA con neutralidad al riesgo.

En el tercer capítulo Se extiende el estudio al caso en que los activos no son reales, sino nominales. Se determina la ecuación diferencial que sigue el precio del producto derivado cuando se considera volatilidad estocástica y los agentes maximizan la utilidad.

En último capítulo se menciona cómo aproximar la solución de ecuaciones diferenciales parciales mediante métodos numéricos de diferencias finitas.

CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años, la valuación de productos derivados ha experimentado cambios y transformaciones profundas en el modelado del comportamiento de los agentes y de los mercados en que estos participan. Estos cambios han fomentando el uso de herramientas matemáticas para modelar la incertidumbre como el cálculo estocástico y el control óptimo estocástico. La mayor parte de la literatura financiera y económica moderna tienen un contenido importante de dichas herramientas en el modelado de fenómenos financieros y económicos.

La administración de riesgos con productos derivados, en particular opciones ha mostrado un crecimimiento vigorozo fomentado por al acelerado desarrollo de las tecnologías de información, lo cual ha facilitado su operación y diversificación. Así, las bolsas en las que se negocian y cotizan productos derivados listados y los mercados sobre mostrador proporcionan mayores alternativas de inversión y de cobertura con más y mejor información. Hoy, los productos derivados se negocian en los mercados en forma continua y con movilidad casi perfecta.

El tamaño considerable que han alcanzado los mercados de productos derivados se debe, en gran medida, a la flexibilidad que estos instrumentos proporcionan a sus usuarios para entrar o salir rápidamente del mercado debido a su liquidez, ya que siempre es posible encontrar compradores y vendedores, y al apalancamiento que éstos presentan, pues la inversión inicial es pequeña comparada con la de otros instrumentos. Además, cuando las transacciones se efectúan con derivados listados, el riesgo contraparte es mínimo debido a la asociación del mercado con una cámara de compensación y liquidación que garantiza el cumplimiento de las obligaciones adquiridas en los contratos a través de un esquema de márgenes o aportaciones iniciales. En los mercados sobre mostrador el cumplimiento de obligaciones se refuerzan en los términos de los contratos mediante garantías. En conclusión, los productos derivados permiten llevar a cabo una administración adecuada del riesgo a bajos costos de transacción.

Cuando se habla de matemáticas finacieras, el primer concepto que se nos viene a la mente es el precio de una opción. En particular, el precio de una opción de compra cuando los rendimientos del activo subyacente son conducidos por una distribución normal. En este caso existe una fórmula ampliamente conocida:

$$S_t\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2T\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right)-Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2T\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right),$$

donde

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x,$$

K es el precio de ejercicio, T es la fecha de vencimiento de la opción, r la tasa de interés libre de riesgo y σ es la volatilidad del activo. Sin duda alguna, esta fórmula constituye un parteaguas dentro de las matemáticas financieras. Desde que Bachelier hablara del tema por primera vez en 1900, hasta que Fisher Black y Myron Scholes en 1973 publicaran esta fórmula para opciones europeas de compra (Black,F y Scholes, M. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy.* Mayo/Junio, pgs. 673-654), no existía una fórmula cerrada para valuar estos instrumentos. Su fortaleza reside en su simpleza para calcular precios de opciones. Esta fórmula fue obtenida por Black y Scholes utilizando argumentos de no arbitraje. Esta fórmula ha sido ampliamente utilizada directa e indirectamente en el mundo financiero, directamente para valuar opciones e indirectamente para estimar la volatilidad implícita dentro del precio de las mismas.

Esta forma de valuación se extiende a otros productos derivados, dando lugar a fórmulas igualmente compactas y elegantes. Entonces ¿por qué se sigue escribiendo sobre valuación de opciones? ¿por qué se sigue investigando en el tema? La respuesta es simple: porque se requieren supuestos más realistas. Ya el mismo Black, en 1976, dudaba de uno de los supuestos necesarios para obtener la ecuación diferencial parcial de su modelo con Scholes, a saber, que la volatilidad del activo es constante y conocida de antemano, o al menos determinista. Existe literatura que habla del tema y se menciona que la volatilidad es todo menos constante o determinista. Si la volatilidad no es constante, ¿qué hacer? Un camino ha sido suponer volatilidad estocástica. Esta es la idea rectora en el presente trabajo junto con el comportamiento racional de los consumidores inversionistas maximizadores de utilidad.

La deventaja de considerar volatilidad estocástica es que los modelos se complican, no basta considerar argumentos de no arbitraje para obtener fórmulas simples de valuación. Esto último, no obstante, ha sido también una ventaja. Resulta que en el modelo de Black y Scholes no aparecen, o al menos no en forma explícita, las preferencias de los inversionistas. No parece natural que si los inversionistas prefieren más una acción que otra, por la razón que sea, estas preferencias no se hagan presentes en la forma de valuar opciones. Este ha sido un problema importante dentro de la investigación en finanzas. Por esto se dice que la fórmula de Black y Scholes proporciona una valuación en un mundo neutral al riesgo.

Sin duda, esta ventaja compensa la dificultad que estos modelos representan. Es necesario mencionar que esta complicación en los modelos hacen que se obtengan ecuaciones diferenciales parciales que sólo en pocos casos tienen una solución en forma cerrada. En la mayoría de las ocasiones, hay que utilizar métodos numéricos para aproximar las soluciones, es lo único que puede hacerse para resolver dichas ecuaciones diferenciales. En el presente trabajo utilizamos modelos con volatilidad estocástica y agentes maximizadore de utilidad y derivamos ecuaciones diferenciales parciales para la valuación de productos derivados.

Si se tienen dos productos derivados cuyos precios comparten la misma fuente de incertidumbre, digamos,

$$\frac{\mathrm{d}f_1}{f_1} = \mu_1 \mathrm{d}t + \sigma_1 \mathrm{d}W_t$$

y

$$\frac{\mathrm{d}f_2}{f_2} = \mu_2 \mathrm{d}t + \sigma_2 \mathrm{d}W_t,$$

entonces necesariamente se tiene

$$\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2}.$$

Esta cantidad es conocida como el *premio al riesgo*. Los premios al riesgo desempeñan un papel fundamental también aquí. Aparecen de manera natural al considerar las condiciones de primer orden o condiciones necesarias para la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman. Mediante el premio al riesgo del producto derivado y del precio del activo subyacente, es como se obtienen las ecuaciones diferenciales parciales que siguen el precio del producto derivado, desde luego, junto con el lema de Itô.

Nuestro modelo supone que tenemos un consumidor-inversionista racional. Por ejemplo, podemos pensar en un agente-representativo cuyo proceder refleje el comportamiento de la totalidad de los consumidores-inversionistas. Esta suposición es ciertamente una simplificación, pero es una forma que se utiliza frecuentemente para considerar cómo las creencias y preferencias agregadas de los inversionistas inciden en el precio de los activos financieros, algo que no aparece de forma explícita en el modelo de Black y Scholes.

Una manera de hacer presentes las preferencias de los inversionistas es considerar modelos de equilibrio. En el presente trabajo esto es justamente lo que hacemos, obtenemos las ecuaciones diferenciales a través de modelos de equilibrio para un consumidor-inversionista racional. Una hipótesis importante para los modelos que utilizamos, consiste en que las variables de estado son solamente el precio del activo y la volatilidad en cada instante. Sin duda, una hipótesis importante, pero que nos permite obtener resultados. Lewis en [10] menciona que esta hipótesis es consistente con modelos de esquilibrio de agentes representativos cuando el activo es un índice del mercado.

El presente trabajo está dividido como sigue. En el primer capítulo, tratamos casos correpondientes a volatilidad constante. Esto no sólo nos da luz sobre el tema y el camino a seguir en los siguientes capítulos. También, nos permite comprobar que sin importar el tipo de función de utilidad que consideremos, siempre llegamos a la ecuación diferencial del modelo de Black y Scholes. En este sentido, este capítulo nos permite considerar los siguientes capítulos como una extensión de dicho modelo. Concretamente, desarrollamos los casos correspondientes a utilidad del tipo, logarítmica, CPRA, HARA, CARA, y el caso general, siempre teniendo aversión al riesgo.

En el segundo capítulo, extendemos el estudio a volatilidad estocástica. En esta parte se desarrollan los casos correspondientes a funciones de utilidad del tipo CPRA, HARA, logarítmica y CARA. También, consideramos el caso CPRA con neutralidad al riesgo.

En el tercer capítulo consideramos los casos en los cuales el consumidor-inversionista tiene activos en valor nominales. Primero se estudia el caso de volatilidad constante, para extenderlo en la última parte a volatilidad estocástica. Esta parte es la principal contribución en esta tesis.

En el último capítulo presentamos brevemente cómo se pueden aproximar las soluciones a las ecuaciones diferenciales de los capítulos anteriores.

En el apéndice se presentan los detalles necesarios para determinar la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman que utilizamos en los capítulos I y II.

CAPÍTULO 1
EL CASO DE VOLATILIDAD CONSTANTE

En este capítulo, bajo el marco de agentes maximizadores de utilidad, suponemos que la volatilidad del activo es constante y determinamos las ecuaciones diferenciales para valuar un producto derivado, utilizando diversas funciones de utilidad. Para este fin, examinamos modelos de equilibrio parcial para un consumidor-inversionista.

A continuación mencionamos los supuestos que utilizamos:
Suponemos que el consumidor inversionista se encuentra en un universo financiero que consta exactamente de tres activos financieros sin costos de transacción.

1. Existe un título de capital con precio S_t. Como es usual, suponemos que el proceso de este precio sigue un movimiento geométrico Browniano. Específicamente suponemos que

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t, \tag{1.1}$$

donde μ es el rendimiento promedio esperado o parámetro de tendencia, σ representa el parámetro de volatilidad, definida como la variación esperada en el rendimiento del activo, y $\mathrm{d}W_t$ es un movimeinto Browniano estandarizado, lo que significa que W_t tiene incrementos normales e independientes con $\mathrm{E}[\mathrm{d}W_t] = 0$ y $\mathrm{Var}\big[\mathrm{d}W_t\big] = \mathrm{d}t$.

2. Existe un producto derivado cuyo subyacente es el título de capital anterior cuyo precio denotaremos por $F = F(S_t, t)$.

3. Existe un bono que paga un rendimiento constante r a todos los plazos. Esto es, un peso invertido pagará, en el instante t, e^{rt} pesos.

Si aplicamos el lema de Itô a la función del valor del producto derivado obtenemos,

$$\mathrm{d}F_t = \mu_F F_t \mathrm{d}t + \sigma_F F_t \mathrm{d}W_t,$$

en donde

$$\mu_t F_t = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial {S_t}^2}\sigma^2 {S_t}^2 \tag{1.2}$$

y

$$\sigma_F F_t = \frac{\partial F}{\partial S_t}\sigma S_t. \tag{1.3}$$

El consumidor-inversionista obtiene ingresos solamente de las inversiones y decide en cada instante y de manera simultánea, cómo invertir su riqueza, que denotaremos por a_t, y a qué tasa consume su riqueza. La variable c_t denotará esta tasa de consumo en cada instante t.

Sean x_t la proporción de la riqueza que es invertida en el título de capital, y_t a la proporción invertida en el producto derivado, y $1 - x_t - y_t$ la proporción invertida en el bono libre de riesgo. La evolución de la riqueza está dada por

$$\mathrm{d}a_t = x_t a_t \mathrm{d}R_S + y_t a_t \mathrm{d}R_F + (1 - x_t - y_t)a_t r \mathrm{d}t - c_t \mathrm{d}t,$$

con

$$\mathrm{d}R_S = \frac{\mathrm{d}S_t}{S_t}$$

y

$$\mathrm{d}R_F = \frac{\mathrm{d}F}{F}.$$

Por lo tanto, la ecuación consolidada de la evolución de la riqueza es,

$$\mathrm{d}a_t = a_t \left(r + (\mu - r)x_t + (\mu_F - r)y_t - \frac{c_t}{a_t} \right) \mathrm{d}t + a_t \left(x_t\sigma - y_t\sigma_F \right) \mathrm{d}W_t. \tag{1.4}$$

Suponemos que la función de utilidad esperada, $u(c_t, t)$ tiene las propiedades de que $\partial u/\partial c_t > 0$, lo que significa que u es creciente en la variable c_t o que el consumidor-inversionista prefiere más a menos, y que $\partial^2 u/\partial {c_t}^2 < 0$, lo que quiere decir que conforme el consumo aumente la utilidad marginal disminuye.

Sean δ la tasa subjetiva de descuento ó parámetro de impaciencia, T al tiempo final de la inversión y también al plazo de vencimiento de la opción, y $\mathcal{F}_t$ la información relevante hasta el instante t.

El consumidor-inversionista busca cuánto invertir y cuánto consumir en cada instante con la finalidad maximizar su utilidad total esperada, esto es, busca,

$$f(a_t, t) = \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \mathrm{E}\left[\int_t^T u(c_s, s)\mathrm{d}s + b(a_T, T) \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right]. \tag{1.5}$$

Sujeto a las condiciones dadas en las ecuaciones (1.3) y (1.4). Resolvemos este problema para algunos casos particulares de la función de utilidad.

1.1 Función de utilidad logarítmica

Comenzamos considerando la función de utilidad que, sin duda, es la más utilizada, nos referimos a la función de utilidad logarítmica. Es decir,

$$u(c_t, t) = \ln(c_t)e^{-\delta t}$$

y

$$b(a_T, T) = \ln(a_T)e^{-\delta T}.$$

Para este caso, la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (véase el apéndice), está dada por:

$$\begin{aligned} 0 = \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \Bigg\{ & \ln(c_t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial a_t} a_t \left[r + (\mu - r)x_t] + (\mu_F - r)y_t - \frac{c_t}{a_t} \right] + \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}{a_t}^2 (x_t\sigma + y_t\sigma_F) \Bigg\}. \end{aligned}$$

Proponemos como candidato de solución de la ecuación anterior a la función,

$$f(a_t, t) = (\beta_0 + \beta_1 \ln(a_t))e^{-\delta t},$$

donde los coeficientes β_0 y β_1 se determinan posteriormente. La forma que elegimos para nuestra solución, nos lleva a:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\delta(\beta_0 + \beta_1 \ln(a_t))e^{-\delta t},$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_t} = \frac{\beta_1}{a_t}e^{-\delta t}$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2} = -\frac{\beta_1}{{a_t}^2}e^{-\delta t}.$$

Al sustituir las expresiones anteriores en la ecuación (5) y dividir entre $e^{-\delta t}$, tenemos la ecuación:

$$\begin{aligned} 0 = \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \Bigg\{ & \ln(c_t) - \delta(\beta_0 + \beta_1 \ln(a_t)) + \\ & + \beta_1 a_t \left[r + (\mu - r)x_t](\mu_F - r)y_t - \frac{c_t}{a_t} \right] + \frac{1}{2}\beta_1(x_t\sigma + y_t\sigma_F) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Derivamos parcialmente con respecto a c_t, x_t y y_t e igualamos con cero para obtener las condiciones de primer orden,

$$c_t = \frac{a_t}{\beta_1}, \tag{1.7}$$

$$\mu - r = \sigma(x_t\sigma + y_t\sigma_F) \tag{1.8}$$

y

$$\mu_F - r = \sigma_F(x_t\sigma + y_t\sigma_F). \tag{1.9}$$

Vemos así, que los premios al riesgo para el activo y para el producto derivado son, respectivamente,

$$\lambda_S = \frac{\mu - r}{\sigma} = (x_t\sigma + y_t\sigma_F) \tag{1.10}$$

y

$$\lambda_F = \frac{\mu_F - r}{\sigma_F} = (x_t\sigma + y_t\sigma_F). \tag{1.11}$$

Este resultado es natural, debido a que el activo y el producto derivado comparten la misma fuente de incertidumbre.

Observe que este sistema no tiene una solución interior debido a que el discriminante en las ecuaciones (1.8) y (1.9) es cero. El punto de equilibrio está dado por $x_t = 1$ y $y_t = 0$, ó también por $x_t = 0$ y $y_t = 1$. Consideraremos el primer caso y lo sustituimos en las ecuaciones de primer orden (el segundo caso es similar). Así tenemos las ecuaciones:

$$\mu - r = \sigma^2 \tag{1.12}$$

y

$$\mu_F - r = \sigma\sigma_F. \tag{1.13}$$

Esto nos indica que los premios al riesgo no son otra cosa que la volatilidad del activo, $\lambda_S = \lambda_F = \sigma$.

La ecuación diferencial parcial para valuar el producto derivado, se obtiene al sustituir las ecuaciones (1.2) y (1.3) en la ecuación (1.13), obtenemos

$$\frac{1}{F}\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial {S_t}^2}\sigma^2 {S_t}^2\right) - r = \sigma^2 \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial S_t}S_t,$$

y al reordenar los términos, se tiene que

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial S_t}S_t(\mu - \sigma^2) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial {S_t}^2}\sigma^2 {S_t}^2 = rF.$$

Ahora bien, de la ecuación (12) tenemos que, $\mu - \sigma^2 = r$, por lo que la ecuación diferencial parcial que determina el precio del producto derivado no es otra que la ecuación diferencial del modelo de Black y Scholes:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial S_t}rS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial {S_t}^2}\sigma^2 {S_t}^2 = rF. \tag{1.14}$$

La condición de frontera depende del producto derivado, por ejemplo para una opción europea de compra, $F(S_T, T) = \max(S_T - K, 0)$, con K el precio de ejercicio de la opción.

Determinamos los coeficientes β_0 y β_1 de la solución del problema (1.5) al sustituir las ecuaciones (1.7), (1.8) y (1.9) en la ecuación (1.6) tomando valores óptimos para c_t, x_t y y_t, obtenemos

$$0 = \ln\left(\frac{a_t}{\beta_1}\right) - \delta(\beta_0 + \beta_1 \ln(a_t))\beta_1\mu - 1 - \frac{1}{2}\sigma^2\beta_1,$$

lo que al simplificar nos lleva a:

$$0 = \ln(a_t)(1 - \delta\beta_1) - \ln(\beta_1) - \delta\beta_0 + \frac{1}{2}\beta_1\mu - 1 + \frac{1}{2}r\beta_1.$$

Por lo tanto, se concluye que

$$\beta_1 = \frac{1}{\delta} \tag{1.15}$$

y

$$\beta_0 = \frac{1}{\delta}\left(\ln(\beta_1) + \frac{1}{2}\beta_1\mu - 1 + \frac{1}{2}r\beta_1\right). \tag{1.16}$$

1.2 Función de utilidad del tipo CPRA

Ahora consideremos otro tipo de función de utilidad, la cual es también muy frecuente en modelos de decisión de agentes maximizadores de satisfacción:

$$u(c_t, t) = \frac{{c_t}^{\gamma}}{\gamma}e^{-\delta t}$$

y la función de legado es

$$b(a_T, T) = \frac{{a_T}^{\gamma}}{\gamma}e^{-\delta T},$$

esto es, suponemos que la función de utilidad es del tipo CPRA (Constant Proportional Risk Adversion). Aquí γ representa el parámetro de CPRA con $\gamma \leq 1$. Si

$\gamma = 1$, el consumidor- inversionista es neutral al riesgo y es adverso al riesgo cuando $\gamma < 1$. Note también que el caso $\gamma = 0$, que no se considera aquí, corresponde a la función de utilidad logarítmica que vimos en el caso anterior. De hecho, el caso de utilidad del tipo CPRA se puede considerar como una generalización de utilidad logarítmica.

En este caso, la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman para el problema (1.5), nos conduce a la ecuación:

$$0 = \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \left\{ \frac{{c_t}^{\gamma}}{\gamma} e^{-\delta t} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial a_t} a_t \left[r + (\mu - r) x_t](\mu_F - r) y_t - \frac{c_t}{a_t} \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2} {a_t}^2 (x_t \sigma + y_t \sigma_F)^2 \right\}. \tag{1.17}$$

Se propone un candidato de solución del problema anterior acorde con nuestra función de utilidad . En este caso nuestra función candidato de solución es:

$$f(a_t, t) = \left(\beta_0 + \beta_1 \frac{{a_t}^{\gamma}}{\gamma} \right) e^{-\delta t}.$$

Los coeficientes β_0 y β_1 los obtenemos al final de la sección. De nuestra propuesta se siguen las ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\delta \left(\beta_0 + \beta_1 \frac{{c_t}^{\gamma}}{\gamma} \right) e^{-\delta t},$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_t} = \beta_1 {a_t}^{\gamma - 1} e^{-\delta t}$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2} = \beta_1 (\gamma - 1) {a_t}^{\gamma - 2} e^{-\delta t}.$$

Al sustituir lo anterior en la ecuación (1.17) y simplificar tenemos

$$0 = \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \left\{ \frac{{c_t}^{\gamma}}{\gamma} - \delta(\beta_0 + \beta_1 \frac{{c_t}^{\gamma}}{\gamma}) + \beta_1 {a_t}^{\gamma} \left[r + (\mu - r) x_t](\mu_F - r) y_t - \frac{c_t}{a_t} \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \beta_1 (\gamma - 1) {a_t}^{\gamma} (x_t \sigma + y_t \sigma_F)^2 \right\}. \tag{1.18}$$

Así, las condiciones de necesarias son:

$$c_t{}^{\gamma-1} = \beta_1 a_t{}^{\gamma-1}, \tag{1.19}$$

$$\mu - r = (1-\gamma)(x_t\sigma + y_t\sigma_F)\sigma \tag{1.20}$$

y

$$\mu_F - r = (1-\gamma)(x_t\sigma + y_t\sigma_F)\sigma_F. \tag{1.21}$$

Tal como en la sección anterior, los premios al riesgo son iguales (recuerde que comparten el mismo tipo de incertidumbre):

$$\lambda_S = \lambda_F = (1-\gamma)(x_t\sigma + y_t\sigma_F).$$

Si tomamos el punto de equilibrio $x_t = 1$, $y_t = 0$, se producen las siguientes ecuaciones:

$$\mu - r = (1-\gamma)\sigma^2 \tag{1.22}$$

y

$$\mu_F - r = (1-\gamma)\sigma\sigma_F. \tag{1.23}$$

La ecuación diferencial parcial para valuar el producto derivado se obtiene al sustituir las ecuaciones (1.2) y (1.3) en la ecuación (1.23),

$$\frac{1}{F}\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S_t{}^2}\sigma^2 S_t{}^2\right) - r = (1-\gamma)\sigma^2\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial S_t},$$

por lo que

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial S_t}S_t\left(\mu - (1-\gamma)\sigma^2\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S_t{}^2}\sigma^2 S_t{}^2 - rF = 0.$$

Finalmente, de la ecuación (1.22), $\mu - (1-\gamma)\sigma^2 = r$. Encontramos así, de nueva cuenta que la ecuación diferencial que sigue el precio del producto derivado, es la ecuación del modelo de Black y Scholes:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial S_t}rS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S_t{}^2}\sigma^2 S_t{}^2 = rF.$$

La condición de frontera depende, desde luego, del tipo de producto derivado que se considera.

Observe que para el caso en que el consumidor-inversionista sea neutral al riesgo, es decir, cuando $\gamma = 1$, de la ecuación (1.22) obtenemos que $\mu = r$, lo que nos indica que el parámetro de tendencia para el caso neutral al riesgo es la tasa de interés fija.

Los coeficientes β_0 y β_1 de la solución del problema (1.5), se obtienen al sustituir las condiciones de primer orden (1.19), (1.20) y (1.21) en la ecuación (1.18), tomando los valores equilibrios y utilizando el hecho de que ${c_t}^\gamma = {a_t}^\gamma {\beta_1}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ (de la primera de las condiciones de primer orden), obtenemos la ecuación:

$$0 = \frac{{\beta_1}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\gamma} - \delta\beta_0 - \frac{\delta}{\gamma}\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_1\mu - \beta_1\frac{c_t}{a_t} + \frac{1}{2}\beta_1 r$$

ó

$$0 = \frac{\beta_1}{\gamma}\left({\beta_1}^{\frac{1}{\gamma-1}} - \delta\right) - \delta\beta_0 - \frac{\delta}{\gamma}\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_1\mu - \beta_1\frac{c_t}{a_t} + \frac{1}{2}\beta_1 r.$$

De lo anterior se tiene

$$\beta_1 = \delta^{\gamma-1}$$

y

$$\beta_0 = \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{2}\beta_1\mu - \beta_1\frac{c_t}{a_t} + \frac{1}{2}\beta_1 r\right).$$

Lo anterior nos proporciona la solución del problema (1.5). Lo relevante aquí, es que obtuvimos la ecuación diferencial que sigue el precio del producto derivado.

1.3 Función de utilidad de tipo HARA

Examinaremos en esta sección el caso correspondiente a una función de utilidad del tipo HARA (Hyperbolic Absolute Risk Averse). Suponemos, por tanto, que la función de utilidad es,

$$u(c_t, t) = \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{Bc_t}{1-\gamma} + \eta\right)^{\gamma} e^{-\delta t}$$

y la función de herencia es

$$b(a_T, T) = \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{Ba_T}{1-\gamma} + \eta\right)^{\gamma} e^{-\delta T}.$$

Para este caso, la función de Hamilton-Jacobi-Bellman nos proporciona la ecuación:

$$\begin{aligned} 0 = \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \Bigg\{ & \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{Bc_t}{1-\gamma} + \eta\right)^{\gamma} e^{-\delta t} + \frac{\partial f}{\partial t} + \\ & + \frac{\partial f}{\partial a_t} a_t \left[r + (\mu - r)x_t](\mu_F - r)y_t - \frac{c_t}{a_t} \right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2} {a_t}^2 (x_t\sigma + y_t\sigma_F)^2 \Bigg\}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Proponemos como candidato de solución para esta ecuación a la función

$$f(a_t, t) = \left[\beta_0 + \beta_1 \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{Ba_t}{1-\gamma} + \eta\right)^{\gamma}\right] e^{-\delta t}.$$

Igual que en las secciones anteriores, los coeficientes de esta solución serán obtenidos al final de la sección. Lo anterior nos conduce a las ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\delta\left[\beta_0 + \beta_1 \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{Ba_t}{1-\gamma} + \eta\right)^{\gamma}\right] e^{-\delta t},$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_t} = \beta_1 B \left(\frac{Ba_t}{1-\gamma} + \eta\right)^{\gamma - 1} e^{-\delta t}$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2} = -\beta_1 B^2 \left(\frac{Ba_t}{1-\gamma} + \eta\right)^{\gamma - 2} e^{-\delta t}.$$

Al sustituir las expresiones anteriores en la ecuación (1.24) y simplificar dividiendo entre $e^{-\delta t}$ se llega a la ecuación:

$$
\begin{aligned}
0 = \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \Bigg\{ & \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{Bc_t}{1-\gamma}+\eta\right)^{\gamma} - \delta\left[\beta_0 + \beta_1 \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{Ba_t}{1-\gamma}+\eta\right)^{\gamma}\right] + \\
& + \beta_1 B \left(\frac{Ba_t}{1-\gamma}+\eta\right)^{\gamma-1} a_t\left[r + (\mu - r)x_t](\mu_F - r)y_t - \frac{c_t}{a_t}\right] + \\
& - \frac{1}{2}\beta_1 B^2 {a_t}^2 \left(\frac{Ba_t}{1-\gamma}+\eta\right)^{\gamma-2} (x_t\sigma + y_t\sigma_F)^2.
\end{aligned} \tag{1.25}
$$

Las condiciones de primer orden son, para este caso:

$$
\left(\frac{Bc_t}{1-\gamma}+\eta\right)^{\gamma-1} = \beta_1\left(\frac{Ba_t}{1-\gamma}+\eta\right)^{\gamma-1}, \tag{1.26}
$$

$$
\mu - r = Ba_t\left(\frac{Ba_t}{1-\gamma}+\eta\right)(x_t\sigma + y_t\sigma_F)\sigma \tag{1.27}
$$

y

$$
\mu_F - r = Ba_t\left(\frac{Ba_t}{1-\gamma}+\eta\right)(x_t\sigma + y_t\sigma_F)\sigma_F. \tag{1.28}
$$

Esto muestra, tal como es de esperar, que los premios al riesgo son iguales,

$$
\lambda_S = \lambda_F = Ba_t\left(\frac{Ba_t}{1-\gamma}+\eta\right)(x_t\sigma + y_t\sigma_F).
$$

La ecuación diferencial para valuar el producto derivado se sigue de sustituir (1.2) y (1.3) en (1.28) y luego simplificar con la ecuación (1.27), con lo que se llega a la ecuación diferencial parcial del modelo de Black y Scholes.

Finalmente, para determinar los coeficientes β_0 y β_1, sustituimos las condiciones de primer orden (1.26), (1.27) y (1.28) junto con el punto de equilibrio $x_t = 1$ y $y_t = 0$ en la ecuación (1.25), obtenemos

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{Bc_t}{1-\gamma}+\eta\right)^{\gamma} - \delta\beta_0 - \delta\beta_1\frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{Ba_t}{1-\gamma}+\eta\right)^{\gamma} \\
& + \beta_1 B\frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{Bc_t}{1-\gamma}+\eta\right)^{\gamma-1} - \beta_1 Bc_t\left(\frac{Bc_t}{1-\gamma}+\eta\right)^{\gamma-1} \\
& - \frac{1}{2}\beta_1 B^2 {a_t}^2\left(\frac{Ba_t}{1-\gamma}+\eta\right)^{\gamma-2}\sigma^2,
\end{aligned}
$$

lo que nos lleva a

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \frac{1-\gamma}{\gamma}\left[\left(\frac{Bc_t}{1-\gamma}+\eta\right)^{\gamma} - \delta\beta_1\left(\frac{Ba_t}{1-\gamma}+\eta\right)^{\gamma}\right] - \delta\beta_0 \\
& + \beta_1 B\frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{Bc_t}{1-\gamma}+\eta\right)^{\gamma-1} - \beta_1 Bc_t\left(\frac{Bc_t}{1-\gamma}+\eta\right)^{\gamma-1} \\
& - \frac{1}{2}\beta_1 B^2 {a_t}^2\left(\frac{Ba_t}{1-\gamma}+\eta\right)^{\gamma-2}\sigma^2,
\end{aligned}
$$

tenemos así las ecuaciones:

$$
\beta_1 = \frac{1}{\delta}\frac{\left(\frac{Bc_t}{1-\gamma}+\eta\right)^{\gamma}}{\left(\frac{Ba_t}{1-\gamma}+\eta\right)^{\gamma}}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\beta_0 = \frac{1}{\delta}\Bigg[& +\beta_1 B\frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{Bc_t}{1-\gamma}+\eta\right)^{\gamma-1} - \beta_1 Bc_t\left(\frac{Bc_t}{1-\gamma}+\eta\right)^{\gamma-1} \\
& - \frac{1}{2}\beta_1 B^2 {a_t}^2\left(\frac{Ba_t}{1-\gamma}+\eta\right)^{\gamma-2}\sigma^2\Bigg].
\end{aligned}
$$

Esto nos completa la solución del problema (1.5) para este caso HARA.

1.4 Utilidad del tipo CARA

Desarrollamos en esta sección el caso correspondiente a la función de utilidad del tipo CARA (Constant Absolute Risk Adverse). Específicamente suponemos que la función de utilidad es

$$u(c_t,t) = -\frac{e^{-\eta c_t}}{\eta}e^{-\delta t}$$

y la función de legado es

$$b(a_T,T) = -\frac{e^{-\eta a_T}}{\eta}e^{-\delta T},$$

con $\eta > 0$. En este caso, de la ecuación de H-J-B obtenemos la ecuación:

$$\begin{aligned} 0 = \max_{\{x_t,y_t,c_t\}} \Bigg\{ & -\frac{e^{\eta c_t}}{\eta}e^{-\delta t} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial a_t}a_t\left[r + (\mu - r)x_t](\mu_F - r)y_t - \frac{c_t}{a_t}\right] + \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}{a_t}^2(x_t\sigma + y_t\sigma_F)^2\Bigg\}. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Proponemos como candidato de solución a la función

$$f(a_t,t) = \left(\beta_0 - \beta_1\frac{e^{-\eta a_t}}{\eta}\right)e^{-\delta t}.$$

En consecuencia tenemos las ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\delta\left(\beta_0 - \beta_1\frac{e^{-\eta a_t}}{\eta}\right)e^{-\delta t},$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_t} = \beta_1 e^{-\eta a_t}e^{-\delta t}$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2} = -\eta\beta_1 e^{-\eta a_t}e^{-\delta t}.$$

Sustituimos estas ecuaciones en la ecuación (1.29), obtenemos la ecuación:

$$\begin{aligned} 0 = \max_{\{x_t,y_t,c_t\}} \Bigg\{ & -\frac{e^{\eta c_t}}{\eta}e^{-\delta t} - \delta\big[\beta_0 - \beta_1\frac{e^{-\eta a_t}}{\eta}\big]e^{-\delta t} \\ & + \beta_1 e^{-\eta a_t}e^{-\delta t}a_t\left[r + (\mu - r)x_t + (\mu_F - r)y_t - \frac{c_t}{a_t}\right] \\ & + \frac{1}{2}\eta\beta_1 e^{-\eta a_t}e^{-\delta t}{a_t}^2(x_t\sigma + y_t\sigma_F)^2\Bigg\}. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Al dividir por $e^{-\delta t}$ y simplificar, llegamos a

$$0 = \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \left\{ -\frac{e^{\eta c_t}}{\eta} - \delta\left[\beta_0 - \beta_1 \frac{e^{-\eta c_t}}{\eta}\right] + \right.$$
$$+ \beta_1 e^{-\eta c_t} a_t \left[r + (\mu - r)x_t(\mu_F - r)y_t - \frac{c_t}{a_t}\right] \tag{1.31}$$
$$\left. + \frac{1}{2}\eta\beta_1 e^{-\eta c_t} {a_t}^2 (x_t\sigma + y_t\sigma_F)^2 \right\}$$

Así, las condiciones de primer orden son:

$$e^{-\eta c_t} = \beta_1 e^{-\eta a_t}, \tag{1.32}$$

$$\mu - r = \eta a_t(x_t\sigma + y_t\sigma_F)\sigma \tag{1.33}$$

y

$$\mu_F - r = \eta a_t(x_t\sigma + y_t\sigma_F)\sigma_F. \tag{1.34}$$

Como es de esperar, los premios al riesgo son iguales,

$$\lambda_S = \lambda_F = \eta a_t(x_t\sigma + y_t\sigma_F)$$

y en el punto equilibrio, $x_t = 1$ y $y_t = 0$,

$$\lambda_S = \lambda_F = \eta a_t\sigma.$$

La ecuación diferencial para valuar el producto derivado, se obtiene al sustituir (1.2),(1.3)y (1.33) en (1.34). Igual que antes se llega a la ecuación diferencial de Black y Scholes y la condición de frontera depende del derivado.

Obtenemos los valores de β_1 y β_2 al sustituir las ecuaciones (1.32), (1.33) y (1.34) en la ecuación (1.31) junto con el punto de equilibrio, $x_t = 1$ y $y_t = 0$:

$$0 = -e^{-\eta c_t} - \delta\beta_0 + \frac{\delta\beta_1}{\eta}e^{-\eta a_t} + \beta_1 e^{\eta a_t} a_t\mu - \beta_1 e^{-\eta a_t} c_t - \frac{\beta_1\eta}{2}e^{-\eta a_t} {a_t}^2\sigma^2.$$

A partir de la ecuación (1.32), $e^{-\eta c_t} = \beta_1 e^{-\eta a_t}$, y $c_t = a_t - \frac{\ln \beta_1}{\eta}$. Al sustituir estas expresiones en la ecuación anterior y dividir entre $e^{-\eta a_t}$ nos queda,

$$0 = -\frac{\beta_1}{\eta} - \delta\beta_0 e^{\eta a_t} + \frac{\delta\beta_1}{\eta} + \beta_1 a_t \mu - \beta_1 a_t + \beta_1 \frac{\ln \beta_1}{\eta} - \frac{\beta_1 \eta}{2} {a_t}^2 \sigma^2.$$

Así,

$$\beta_1 = e^{1-\delta}$$

y

$$\beta_0 = \frac{1}{\delta} e^{-\eta a_t} \left[\beta_1 a_t \mu - \beta_1 a_t - \frac{\beta_1 \eta}{2} {a_t}^2 \sigma^2 \right].$$

Con lo que encontramos la solución al problema (1.5) para este caso.

1.5 Función de utilidad General

En esta sección desarrollamos para el caso general de tener una función de utilidad de la forma,

$$u(c_t, t) = h(c_t, t) e^{-\delta t}$$

y función de legado de la forma,

$$b(c_t, T) = h(c_T,) e^{-\delta T}.$$

Desde luego, estas funciones deben cumplir $\partial A / \partial c_t > 0$ y $\partial^2 u / \partial {c_t}^2 < 0$, es decir, la función es creciente y el consumidor-inversionista tiene aversión al riesgo. En este caso, de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 = \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \Bigg\{ & h(c_t, t) e^{-\delta t} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial a_t} a_t \left[r + (\mu - r) x_t](\mu_F - r) y_t - \frac{c_t}{a_t} \right] \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2} {a_t}^2 (x_t \sigma + y_t \sigma_F)^2 \Bigg\}. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Con la función de utilidad, proponemos como solución a la función, $f(a_t, t) = (\beta_0 + \beta_1 h(a_t, t)) \, e^{-\delta t}$, por lo que,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\delta \left(\beta_0 + \beta_1 h(a_t, t) \right) e^{-\delta t},$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_t} = \beta_1 \frac{\partial h}{\partial a_t} e^{-\delta t}$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2} = \beta_1 \frac{\partial^2 h}{\partial {a_t}^2} e^{-\delta t}.$$

Al sustituir en la ecuación (24) y dividir entre $e^{-\delta t}$, tenemos

$$\begin{aligned} 0 = \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \Bigg\{ & h(c_t, t) e^{-\delta t} - \delta\big[\beta_0 + \beta_1 h(a_t, t)\big] \\ & + \beta_1 \frac{\partial h}{\partial a_t} a_t \left[r + (\mu - r) x_t + (\mu_F - r) y_t - \frac{c_t}{a_t} \right] \\ & + \frac{1}{2} \beta_1 \frac{\partial^2 h}{\partial {a_t}^2} {a_t}^2 (x_t \sigma + y_t \sigma_F)^2 \Bigg\}. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Las condiciones necesarias nos llevan a las ecuaciones:

$$\frac{\partial h(c_t, t)}{\partial c_t} = \beta_1 \frac{\partial h}{\partial a_t}, \tag{1.37}$$

$$\mu - r = -\frac{u_{AA}}{u_A} a_t (x_t \sigma + y_t \sigma_F) \sigma \tag{1.38}$$

y

$$\mu_F - r = -\frac{u_{AA}}{u_A} a_t (x_t \sigma + y_t \sigma_F) \sigma_F. \tag{1.39}$$

Observe que en las últimas dos ecuaciones, aparece el término $-a_t \partial^2 u / \partial a_t$, la medida relativa de aversión al riesgo de Pratt (véase [12]). Como debe ocurrir, los premios al riesgo son iguales:

$$\lambda_S = \lambda_F = -a_t \frac{u_{AA}}{u_A} (x_t \sigma + y_t \sigma_F)$$

y cuando sustituimos el punto de equilibrio tenemos,

$$\lambda_S = \lambda_F = -a_t \frac{u_{AA}}{u_A} \sigma.$$

Como en nuestros casos previos, la ecuación diferencial parcial que sigue el valor del producto derivado se obtiene de (1.28) y (1.27). Primero sustituimos (1.2) y (1.3) en (1.28), obtenemos

$$\frac{1}{F}\left(\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial S_t}\mu S_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial {S_t}^2}\sigma^2 {S_t}^2\right)-r=-\frac{u_{AA}}{a_t u_A}(x_t\sigma+y_t\sigma_F)\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial S_t}\sigma^2 S_t.$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial S_t}S_t\Big[\mu+a_t\frac{u_{AA}}{u_A}(x_t\sigma+y_t\sigma_F)\Big]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial {S_t}^2}\sigma^2 {S_t}^2-rF=0.$$

Pero de la ecuación (1.38), sabemos que $r=\mu+a_t\frac{u_{AA}}{u_A}(x_t\sigma+y_t\sigma_F)$, por lo que al sustituir esto, nuevamente llegamos a la ecuación del modelo de Black y Scholes:

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial S_t}rS_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial {S_t}^2}\sigma^2 {S_t}^2-rF=0.$$

Finalmente, los coeficientes β_0 y β_1 se obtienen al sutituir las ecuaciones de primer orden y el punto equilibrio $x_t=1$ y $y_t=0$ en la ecuación (1.36), En este caso se tiene que,

$$0=h(c_t,t)-\delta\big[\beta_0+\beta_1 h(a_t,t)\big]+\beta_1 a_t\mu\frac{\partial h}{\partial a_t}+\frac{1}{2}\beta_1\frac{\partial^2}{\partial {a_t}^2}{a_t}^2\sigma^2,$$

ó lo que es equivalente,

$$0=h(c_t,t)\Bigg[1-\delta\beta_1 h(c_t,t)\Bigg]+\beta_1 a_t\mu\frac{\partial h}{\partial a_t}+\frac{1}{2}\beta_1\frac{\partial^2}{\partial {a_t}^2}{a_t}^2\sigma^2.$$

Por lo tanto, los coeficientes son:

$$\beta_1=\frac{1}{\delta h(c_t,t)}$$

y

$$\beta_0=\frac{1}{\delta}\left(\beta_1 a_t\mu\frac{\partial h}{\partial a_t}+\frac{1}{2}\beta_1\frac{\partial^2}{\partial {a_t}^2}{a_t}^2\sigma^2\right). \tag{1.40}$$

Lo cual resuleve el problema (1.5).

CAPÍTULO 2
EL CASO DE VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA

En esta sección desarrollamos la ecuación diferencial para valuar opciones cuando la volatilidad es estocástica y los agentes que participan en el mercado son racionales, es decir, maximizan su utilidad sujeto a su restricción presupuestal. Esta parte generaliza el capítulo anterior.

Suponemos que solamente existen tres activos financieros, un activo, como puede ser una acción, un producto derivado sobre el activo, por ejemplo, una opción europea de compra, y un bono libre de riesgo con tasa fija. Suponemos también que el mercado es libre de fricciones, esto es, no existen costos de transacciones y los participantes pueden comprar o vender libremente.

Una hipótesis importante aquí, consiste en que las variables de estado sean solamente la volatilidad y el precio del activo en cada instante. Específicamente hacemos las siguiente suposiciones para el modelo en donde incluimos la notación necesaria.

El activo tiene un precio representado por S_t, que suponemos sigue un movimiento geométrico Browniano, y cuya volatilidad, V_t, también sigue un movimiento geométrico Browniano, es decir, la volatilidad es estocástica. De esta forma, el precio del activo subyacente satisface

$$P : \begin{cases} \mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma_t S_t \mathrm{d}W_t \\ \\ \mathrm{d}V_t = m(V_t)\mathrm{d}t + \xi_\sigma(V_t)\mathrm{d}Z_t \end{cases} \tag{2.1}$$

donde $V_t = {\sigma_t}^2$ representa a la volatilidad del precio del activo, $\mathrm{d}W_t$ y $\mathrm{d}Z_t$ son movimientos geométricos Brownianos cuya correlación es $\rho_t(V_t)dt$. ξ_σ es la volatilidad de la volatilidad. Note que no consideramos dividendos.

La opción que, como siempre por facilidad, consideramos del tipo europea de compra, tiene un precio dado por F_t que depende únicamente de las variables de estado, esto es, $F_t = F(S_t, V_t, t)$. Para el bono, que puede ser por ejemplo inversiones bancarias a una tasa libre de riesgo, suponemos que paga una tasa r fija sobre todo el periodo considerado, de tal modo que con una unidad monetaria invertida en el instante t, se obtienen e^{t-T} unidades monetarias al final del periodo considerado. Aquí, T denotará el tiempo final de la inversión, así como el tiempo de maduración del producto derivado.

Con c_t indicaremos el consumo que realiza el inversionista en el instante t. Con a_t denotamos la riqueza en el instante t y con x_t, y_t y $1 - x_t - y_t$ representaremos la proporción de la riqueza invertida, respectivamente, en el activo, el producto derivado y el bono libre de riesgo.

La evolución de la riqueza sigue la ecuación

$$\mathrm{d}a_t = x_t a_t \mathrm{d}R_S + y_t a_t \mathrm{d}R_F + (1 - x_t - y_t) a_t r \mathrm{d}t - c_t \mathrm{d}t,$$

con $\mathrm{d}R_S = \mathrm{d}S_t/S_t$ y $\mathrm{d}R_F = \mathrm{d}F/F$. En consecuencia, la evolución de la riqueza queda como sigue:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}a_t = a_t \left(r + (\mu - r)x_t + (\mu_F - r)y_t - \frac{c_t}{a_t} \right) \mathrm{d}t \\ + x_t \sigma_t a_t \mathrm{d}W_t + y_t \sigma_F a_t \mathrm{d}W_t + y_t \xi_F a_t \mathrm{d}Z_t. \end{aligned} \tag{2.2}$$

De acuerdo con el lema de Itô, la variación del precio del producto derivado sigue la ecuación

$$\mathrm{d}F_t = \mu_F F_t \mathrm{d}t + \sigma_F F_t \mathrm{d}W_t + \xi_F F_t \mathrm{d}Z_t. \tag{2.3}$$

Aquí, los coeficientes están dados por:

$$\begin{aligned} \mu_F = \frac{1}{F_t} \bigg(\frac{\partial F_t}{\partial t} + \mu_t S_t \frac{\partial F_t}{\partial S_t} + m \frac{\partial F_t}{\partial V_t} + \frac{1}{2} {\sigma_t}^2 {S_t}^2 \frac{\partial^2 F_t}{\partial {S_t}^2} + \frac{1}{2} {\xi_\sigma}^2 \frac{\partial^2 F_t}{\partial {V_t}^2} \\ + \rho_t \xi_\sigma \sigma_t S_t \frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t \partial V_t} \bigg), \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\sigma_F = \frac{1}{F_t}\sigma_t S_t \frac{\partial F_t}{\partial S_t} \tag{2.5}$$

y

$$\xi_F = \frac{1}{F_t}\xi_\sigma \frac{\partial F_t}{\partial V_t}. \tag{2.6}$$

Observe que en esta notación, por facilidad, eliminamos el subíndice t de los coeficientes μ_F, σ_F, ξ_σ, m y ξ_F, pero estos valores siguen dependiendo también del instante t considerado.

Denotaremos con $u(c_t, t)$ a la tasa de utilidad del consumo, y suponemos que el inversionista decide en cada instante cómo invertir y cómo consumir. Esto lo hace de forma simultánea, y busca en cada instante maximizar su función de utilidad derivada de la riqueza, esto es,

$$f(a_t, V_t, t) = \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \mathrm{E}\left[\int_t^T u(c_s, s)\mathrm{d}s + b(a_T, T) \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right], \tag{2.7}$$

sujeto a las condiciones de las ecuaciones (2.1) y (2.2).

Recordamos que $\mathcal{F}_t$ es la información disponible hasta el instante t y $b(a_T, T)$ representa la función de herencia o utilidad del consumo después del instante T, es decir, la cantidad que el consumidor-inversionista está dispuesto a heredar al final de su inversión, T es el horizonte de tiempo planeado y puede ser infinito. Si este es el caso, el problema es conocido como el problema de consumo-inversión con horizonte infinito. También T representa la fecha de ejercicio de la opción.

Finalmente, para resolver este problema y obtener los premios al riesgo y la ecuación diferencial parcial para determinar el precio del producto derivado, necesitamos dos supuestos más.

El primero consiste en que el equilibrio del mercado (market clearing) se obtiene cuando se invierte únicamente en el activo, esto es, no hay inversión en opciones ni en el bono libre de riesgo. En otras palabras, para el quilibrio requerimos que $x_t = 1$,

$y_t = 0$ y que la inversión en el bono sea cero. Este supuesto se debe a que el problema general es muy difícil de resolver. Esta suposición es cisrtamente restrictiva. No podemos resolver el problema (2.7) completo, pero damos una solución para este caso particular. En Cox, Ingersoll y Ross [véase 3], también se tiene este supuesto y sólo se menciona que es Pareto óptimo.

El último supuesto es de tipo técnico, se trata del tipo de función de utilidad y de función de legado que se considera. Suponemos que la función de utilidad satisface $u(c_t, t)$ con $\partial u/\partial c_t > 0$ y $\partial^2 u/\partial {c_t}^2 < 0$. Gráficamente estas condiciones significan que la función de utilidad es creciente y cóncava hacia abajo respecto a la variable c_t.

De manera semejante al capítulo anterior, desarrollamos varios casos de función de utilidad y obtendremos la ecuación diferencial parcial para valuar el producto derivado. Adelantamos que esta ecuación es diferente para cada caso, no como en el capítulo 1, que siempre resultó la misma ecuación. La razón es que cuando dejamos de considerar volatilidad constante y la tomamos estocástica, las preferencias de los consumidores se hacen presentes, La condición de frontera dependerá del producto derivado que se trate.

2.1 Función de utilidad tipo CPRA

Comenzamos desarrollando el caso en que la función de utilidad es del tipo CPRA (Constant Proportional Risk Aversion). En esta sección suponemos que,

$$u(c_t, t) = e^{-\delta t} \frac{{c_t}^{\gamma}}{\gamma}, \tag{2.8}$$

y que la función de legado es

$$b(a_T, T) = e^{-\delta T} \frac{{a_T}^{\gamma}}{\gamma}. \tag{2.9}$$

donde $\delta > 0$ representa el parámetro de impaciencia y γ es el parámetro de aversión al riesgo de proporcionalidad constante. Recuerde que si $\gamma = 1$ el inversionista es neutral al riesgo, mientras que si $\gamma < 1$, el inversionista es adverso al riesgo, por lo que suponemos que $\gamma \leq 1$. También consideraremos $\gamma \neq 0$, ya que este caso corresponde al caso en que la función de utilidad es del tipo logarítmica que desarrollamos más adelante.

Para resolver el problema (2.7), para este caso CPRA, utilizamos la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman. De esta manera, una solución de (2.7) debe satisfacer la ecuación (véase el apéndice):

$$
\begin{aligned}
0 = \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \Bigg\{ & u(c_t, t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial a_t} a_t \left[r + (\mu - r)x_t + (\sigma_F - r)y_t - \frac{c_t}{a_t} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2} {a_t}^2 \Bigg({x_t}^2 {\sigma_t}^2 + {y_t}^2 {\sigma_F}^2 + {y_t}^2 {\xi_F}^2 + 2 x_t y_t \sigma_t \sigma_F \\
& + 2 x_t y_t \sigma_t \xi_F \rho_t + 2 {y_t}^2 \sigma_F \xi_F \rho_t \Bigg) + \frac{\partial f}{\partial V_t} m + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial {V_t}^2} {\xi_\sigma}^2 \\
& + \frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t} a_t \big(x_t \sigma_t \xi_\sigma \rho_t + y_t \sigma_F \xi_\sigma \rho_t + \xi_\sigma y_t \xi_F \big) \Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Derivamos parcialmente respecto a c_t, x_t y y_t respectivamente. Dado que nuestro interés está en calcular los premios al riesgo, escribimos estas condiciones necesarias de la forma siguiente:

$$
\frac{\partial u}{\partial c_t} = e^{-\delta t} {c_t}^{\gamma - 1} = \frac{\partial f}{\partial a_t}, \tag{2.11}
$$

$$
\mu_t - r = -\big[x_t V_t + y_t \sigma_t \sigma_F + y_t \sigma_t \xi_F \rho_t \big] a_t \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}} - \sigma_t \xi_\sigma \rho_t \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}} \tag{2.12}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\mu_F - r = &- \left(y_t{\sigma_F}^2 + y_t{\xi_F}^2 + x_t\sigma_t\sigma_F + x_t\sigma_t\xi_F\rho_t + 2y_t\sigma_F\xi_F\rho_F\right) a_t \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}} \\
&- \xi_\sigma\left(\sigma_F\rho_t + \xi_F\right) \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}}.
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

Esta ecuación tiene solución debido a nuestra elección del tipo de función de utilidad CPRA. En [3] se menciona que siempre que la función de utilidad no dependa de la volatilidad del precio del activo, la ecuación anterior tiene una solución.

Al igual que en el capítulo anterior, hacemos una propuesta de solución que contiene la forma de función de utilidad considerada. Para volatilidad constante, bastaba separar la riqueza del tiempo y agregar constantes adecuadamente. Para volatilidad estocástica, sin embargo, esto no es suficiente. Debemos separar volatilidad y tiempo, pero tenemos que poner una parte que dependa de la volatilidad. La formulación que haremos aquí es semejante a la que utilizaremos en las secciones siguientes. Específicamente proponemos como candidato de solución a la función,

$$
f(a_t, V_t, t) = e^{-\delta t} g(V_t, t) \frac{{a_t}^\gamma}{\gamma}. \tag{2.14}
$$

Esta función $g(V_t, t)$ es conocida como el *coeficiente del premio al riesgo*, debido a que de esta función dependen los premios al riesgo como veremos adelante. Observe que de (2.14) tenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial a_t} &= e^{-\delta t} g(V_t, t) {a_t}^{\gamma - 1}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2} &= (\gamma - 1) e^{-\delta t} g(V_t, t) {a_t}^{\gamma - 2}
\end{aligned}
$$

y

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t} = e^{-\delta t} \frac{\partial g}{\partial V_t} \frac{{a_t}^\gamma}{\gamma}.
$$

En consecuencia, el parámetro de aversión absoluta al riesgo de Pratt, que formará parte de la ecuación diferencial que sigue el precio del derivado (ec. 2.22), es,

$$-a_t \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}} = 1 - \gamma$$

y además

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t, t)}.$$

Si sustituimos las condiciones de equilibrio $x_t = 1$ y $y_t = 0$, podemos rescribir las ecuaciones (2.11), (2.12) y (2.13), respectivamente, como:

$${c_t}^{\gamma-1} = g(V_t, t){a_t}^{\gamma-1}, \tag{2.15}$$

$$\mu_t - r = (1-\gamma)V_t - \rho_t \sigma_t \xi_\sigma \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t, t)} \tag{2.16}$$

y

$$\mu_F - r = (\sigma_F + \xi_F \rho_t)\sigma_t(1-\gamma) - (\sigma_F\ \rho_t + \xi_F)\xi_\sigma \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t, t)}. \tag{2.17}$$

En particular, los premios al riesgo para el activo subyacente y el producto derivado están dados por las ecuaciones:

$$\lambda_S = \frac{\mu_t - r}{\sigma_t} = (1-\gamma)\sigma_t - \rho_t \xi_\sigma \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t, t)} \tag{2.18}$$

y

$$\lambda_F = \frac{\mu_F - r}{\sigma_F} = \frac{1}{\sigma_F}\left[(\sigma_F + \xi_F \rho_t)\sigma_t(1-\gamma) - (\sigma_F\ \rho_t + \xi_F)\xi_\sigma \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t, t)}\right]. \tag{2.19}$$

La ecuación (2.10) se simplifica si sustituimos los valores óptimos de $\hat{c}_t$ y $\hat{\mu}_t$ de las condiciones de primer oden:

$$0 = \frac{\hat{c}_t^{\gamma}}{\gamma} + \frac{\partial f}{\partial t} + (ra_t - \hat{c}_t)\frac{\partial f}{\partial a_t} - \frac{1}{2}{a_t}^2 V_t \frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2} + m\frac{\partial f}{\partial V_t} + \frac{1}{2}{\xi_\sigma}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial {V_t}^2}. \tag{2.20}$$

Note que de la ecuación (2.15) tenemos $\hat{c}_t = \left[g(V_t,t)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}\hat{a}_t$. Al sustituir lo anterior en (2.10), obtenemos la ecuación diferencial parcial para obtener el coeficiente del premio al riesgo

$$0 = -\frac{\partial g}{\partial t} + (\gamma-1)g(V_t,t)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + \left[(\delta - r\gamma) - \frac{1}{2}\gamma(1-\gamma)V_t\right]g(V_t,t) - m\frac{\partial g}{\partial V_t} + \frac{1}{2}{\xi_\sigma}^2\frac{\partial^2 g}{\partial {V_t}^2}. \tag{2.21}$$

La condición de frontera es en este caso, $g(V_T,T)=1$.

De forma parecida al caso de volatilidad constante, utilizamos las ecuaciones necesarias (2.15), (2.16) y (2.17) para determinar una ecuación diferencial parcial para la valuación del producto derivado. Primero, sustituimos las ecuaciones (2.4), (2.5) y (2.6) en la ecuación (2.17), obtenemos la ecuación:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F_t}{\partial t} + \mu_t S_t \frac{\partial F_t}{\partial S_t} + m\frac{\partial F_t}{\partial V_t} + \frac{1}{2}{\sigma_t}^2{S_t}^2\frac{\partial^2 F_t}{\partial {S_t}^2} + \frac{1}{2}{\xi_\sigma}^2\frac{\partial^2 F_t}{\partial {V_t}^2} + \rho_t\xi_\sigma\sigma_t S_t\frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t \partial V_t} - rF_t \\ &= \left(\sigma_t S_t\frac{\partial F_t}{\partial S_t} + \xi_\sigma\rho_t\frac{\partial F_t}{\partial V_t}\right)\sigma_t(1-\gamma) - \left(\xi_\sigma\sigma_t S_t\rho_t\frac{\partial F_t}{\partial S_t}\frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t,t)}\right) - {\xi_\sigma}^2\frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t,t)}\frac{\partial F_t}{\partial V_t}.\end{aligned}$$

Al simplificar, nos queda la ecuación:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F_t}{\partial t} + S_t\left[\mu_t - V_t(1-\gamma) - \xi_\sigma\rho_t\frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t,t)}\right]\frac{\partial F_t}{\partial S_t} + \left[m - \xi_\sigma\rho_t\sigma_t(1-\gamma)\right. \\ &\left. + {\xi_\sigma}^2\frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t,t)}\right]\frac{\partial F_t}{\partial V_t} + \frac{1}{2}V_t{S_t}^2\frac{\partial^2 F_t}{\partial {S_t}^2} + \frac{1}{2}{\xi_\sigma}^2\frac{\partial^2 F_t}{\partial {V_t}^2} + \rho_t\xi_\sigma\sigma_t S_t\frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t\partial V_t} - rF_t = 0.\end{aligned} \tag{2.22}$$

Segundo, de acuerdo con la ecuación (2.16), $\left[\mu_t - V_t(1-\gamma) - \xi_\sigma\rho_t\frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t,t)}\right] = r$, por lo que llegamos finalmente a la ecuación diferencial para valuar el producto derivado para el caso CPRA:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F_t}{\partial t} + rS_t\frac{\partial F_t}{\partial S_t} + \left[m - \xi_\sigma\rho_t\sigma_t(1-\gamma) + {\xi_\sigma}^2\frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t,t)}\right]\frac{\partial F_t}{\partial V_t} \\
&+ \frac{1}{2}V_t{S_t}^2\frac{\partial^2 F_t}{\partial {S_t}^2} + \frac{1}{2}{\xi_\sigma}^2\frac{\partial^2 F_t}{\partial {V_t}^2} + \rho_t\xi_\sigma\sigma_t S_t\frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t\partial V_t} - rF_t = 0.
\end{aligned} \tag{2.23}
$$

La condición de frontera depende del producto derivado.

En particular, la ecuación anterior nos indica cómo ajustar el proceso estocástico que sigue el precio del activo dado en la ecuación (2.1):

$$
P: \begin{cases} dS_t = rS_tdt + \sigma_tS_tdW_t \\ dV_t = \left[m - \xi_\sigma\rho_t\sigma_t(1-\gamma) + {\xi_\sigma}^2\frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t,t)}\right]dt + \xi_\sigma dZ_t \end{cases}.
$$

2.2 Función de utilidad tipo HARA

Consideremos ahora el caso en que la función de utilidad es del tipo HARA (Hyperbolic Absolute Risk Aversion). Esto es, suponemos en esta sección que

$$
u(c_t,t) = \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{Bc_t}{1-\gamma}+\eta\right)^\gamma e^{-\delta t}
$$

y

$$
b(a_T,T) = \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{Ba_T}{1-\gamma}+\eta\right)^\gamma e^{-\delta T},
$$

con B, γ, δ y η constantes.

El procedimiento que seguimos es completamente análogo al del la sección anterior. En este caso, de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman dada en el apéndice, obtenemos las mismas condiciones de primer orden del caso anterior, dadas por las ecuaciones (2.11), (2.12) y (2.13), sólo que en este caso, la derivada parcial de la función de utilidad respecto a c_t es

$$
\frac{\partial u}{\partial c_t} = B\left(\frac{Bc_t}{1-\gamma}+\eta\right)^{\gamma-1} e^{-\delta t}.
$$

Proponemos un candidato de solución de la ecuación (2.10) similar al del caso anterior. Específicamente proponemos a la función

$$f(a_t, V_t, t) = \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{Ba_t}{1-\gamma} + \eta\right)^{\gamma} g(V_t, t)e^{-\delta t},$$

esto implica que

$$\frac{\partial f}{\partial a_t} = B\left(\frac{Ba_t}{1-\gamma} + \eta\right)^{\gamma-1} g(V_t, t)e^{-\delta t}, \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2} = -B^2\left(\frac{Ba_t}{1-\gamma} + \eta\right)^{\gamma-2} g(V_t, t)e^{-\delta t}, \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial f}{\partial V_t} = \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{Ba_t}{1-\gamma} + \eta\right)^{\gamma} \frac{\partial g}{\partial V_t}e^{-\delta t} \tag{2.26}$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t} = B\left(\frac{Ba_t}{1-\gamma} + \eta\right)^{\gamma-1} \frac{\partial g}{\partial V_t}e^{-\delta t}. \tag{2.27}$$

Al sustituir estas ecuaciones en las ecuación de primer orden simultáneamente con las condiciones de equilibrio, obtenemos las ecuaciones:

$$\left(\frac{Bc_t}{1-\gamma} + \eta\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{Ba_t}{1-\gamma} + \eta\right)^{\gamma-1} g(V_t, t), \tag{2.28}$$

$$\mu_t - r = -V_t a_t B\left(\frac{Ba_t}{1-\gamma} + \eta\right)^{-1} - \sigma_t \xi_\sigma \rho_t a_t \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t, t)} \tag{2.29}$$

y

$$\mu_F - r = (\sigma_F + \xi_F \rho_t)\sigma_t\left(\frac{Ba_t}{1-\gamma} + \eta\right)^{-1} - (\sigma_F\ \rho_t + \xi_F)\xi_\sigma \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t, t)}. \tag{2.30}$$

Note que se simplifica la ecuación (10) al sustituir los valores óptimos de $\hat{c}_t$ y de $\hat{\mu}_t$ obtenidos de las condicioneas de primer orden, junto con la sustitución de las condiciones de equilibrio. La ecuación se obtiene es similar a la ecuación (2.20).

A continuación presentamos cómo se obtiene en general, independientemente de la función de utilidad de que se trate, la ecuación diferencial parcial que conduce el precio del producto derivado.

Primero, al sustituir en (2.10) óptimos y equilibrio, tenemos la ecuación,

$$
\begin{aligned}
0 = u(c_t, t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \left[\mu_t - \frac{c_t}{a_t}\right] c_t \frac{\partial f}{\partial a_t} + \frac{1}{2} V_t {a_t}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2} \\
+ m \frac{\partial f}{\partial V_t} + \frac{1}{2} {\xi_\sigma}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial {V_t}^2} + \sigma_t \xi_\sigma \rho_t a_t \frac{\partial^2 f}{\partial V_t \partial a_t}.
\end{aligned}
$$

Ahora bien, la segunda de las condiciones de primer orden puede expresarse como:

$$
(\mu_t - r) a_t \frac{\partial f}{\partial a_t} = -V_t {a_t}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2} - \sigma_t \xi_\sigma \rho_t a_t \frac{\partial^2 f}{\partial V_t \partial a_t}.
$$

Por lo que al sustituir esta expresión en la ecuación anterior obtenemos

$$
\begin{aligned}
0 = u(c_t, t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \left(-r a_t \frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2} - \sigma_t \xi_\sigma \rho_t a_t \frac{\partial^2 f}{\partial V_t \partial a_t} + r a_t \frac{\partial f}{\partial a_t}\right) c_t \frac{\partial f}{\partial a_t} \\
+ \frac{1}{2} V_t {a_t}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2} + m \frac{\partial f}{\partial V_t} + \frac{1}{2} {\xi_\sigma}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial {V_t}^2} + \sigma_t \xi_\sigma \rho_t a_t \frac{\partial^2 f}{\partial V_t \partial a_t}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, al simplificar tenemos la ecuación:

$$
0 = u(c_t, t) + \frac{\partial f}{\partial t} + (r a_t - c) \frac{\partial f}{\partial a_t} - \frac{1}{2} {a_t}^2 V_t \frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2} + m \frac{\partial f}{\partial V_t} + \frac{1}{2} {\xi_\sigma}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial {V_t}^2}. \tag{2.31}
$$

Esta ecuación es la utilizaremos en todas las secciones.

Regresamos al caso función de utilidad tipo HARA. De la ecuación (2.28) tenemos que $c_t = \left(a_t + \frac{1-\gamma}{B}\eta\right) g(V_t, t)^{\frac{1}{\gamma - 1}} - \frac{1-\gamma}{B}\eta$. Si sustituimos en la ecuación (2.28) tenemos la ecuación diferencial parcial para obtener el coeficiente del premio al riesgo, $g(V_t, t)$:

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{1-\gamma}{\gamma} K - \delta \frac{1-\gamma}{\gamma} K + (r a_t - C) B K^{-1} g(V_t, t) \\
+ \frac{1}{2} {a_t}^2 V_t B^2 K^{-2} g(V_t, t) + m \frac{1-\gamma}{\gamma} K \frac{\partial g}{\partial V_t} + \frac{1}{2} \xi_\sigma B K^{-1} \frac{\partial^2 g}{\partial {V_t}^2}.
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

con $K = \left(\frac{Bc_t}{1-\gamma} + \eta\right)^{\gamma}$. La condición inicial es la misma que para el caso anterior, $g(V_T, T) = 1$.

Para determinar la ecuación diferencial parcial para valuar la opción, sustituimos las ecuaciones (2.3), (2.4) y (2.5) en la ecuación (2.30), obtenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_t}{\partial t} + \mu_t S_t \frac{\partial F_t}{\partial S_t} + m\frac{\partial F_t}{\partial V_t} + \frac{1}{2}{\sigma_t}^2 {S_t}^2 \frac{\partial^2 F_t}{\partial {S_t}^2} + \frac{1}{2}{\xi_\sigma}^2 \frac{\partial^2 F_t}{\partial {V_t}^2} + \rho_t \xi_\sigma \sigma_t S_t \frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t \partial V_t} - rF_t \\
&= \left(\sigma_t S_t \frac{\partial F_t}{S_t} + \xi_\sigma \rho_t \frac{\partial F_t}{\partial V_t}\right)\sigma_t \left(\frac{Bc_t}{1-\gamma} + \eta\right)^{-1} - \left(\xi_\sigma \sigma_t S_t \rho_t \frac{\partial F_t}{\partial S_t} \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t, t)}\right) \\
&- {\xi_\sigma}^2 \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t, t)} \frac{\partial F_t}{\partial V_t}.
\end{aligned}$$

Al simplificar se sigue que

$$\begin{aligned}
0 = &\frac{\partial F_t}{\partial t} + S_t\left[\mu_t - \sigma_t\left(\frac{Bc_t}{1-\gamma} + \eta\right)^{-1} - \xi_\sigma \sigma_t \rho_t \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t, t)}\right]\frac{\partial F_t}{\partial S_t} \\
&+ \left[m - \xi_\sigma \rho_t \sigma_t \left(\frac{Bc_t}{1-\gamma} + \eta\right)^{-1} + {\xi_\sigma}^2 \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t, t)}\right]\frac{\partial F_t}{\partial V_t} + \frac{1}{2} V_t {S_t}^2 \frac{\partial^2 F_t}{\partial {S_t}^2} \\
&+ \frac{1}{2}{\xi_\sigma}^2 \frac{\partial^2 F_t}{\partial {V_t}^2} + \rho_t \xi_\sigma \sigma_t S_t \frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t \partial V_t} - rF_t.
\end{aligned}$$

Pero, de la ecuación (2.29), tenemos que $\mu_t - \sigma_t\left(\frac{Bc_t}{1-\gamma} + \eta\right)^{-1} - \xi_\sigma \sigma_t \rho_t \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t, t)} = r$, por lo que la ecuación queda como:

$$\begin{aligned}
0 = &\frac{\partial F_t}{\partial t} + rS_t \frac{\partial F_t}{\partial S_t} + \left[m - \xi_\sigma \rho_t \sigma_t \left(\frac{Bc_t}{1-\gamma} + \eta\right)^{-1} + {\xi_\sigma}^2 \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t, t)}\right]\frac{\partial F_t}{\partial V_t} \\
&+ \frac{1}{2} V_t {S_t}^2 \frac{\partial^2 F_t}{\partial {S_t}^2} + \frac{1}{2}{\xi_\sigma}^2 \frac{\partial^2 F_t}{\partial {V_t}^2} + \rho_t \xi_\sigma \sigma_t S_t \frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t \partial V_t} - rF_t.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

La condición inicial depende del produto derivado.

Observe que para resolver el problema (2.10) es necesario resolver primero la ecuación (2.32) para tener el coeficiente del premio al riesgo. Esta ecuación no es inmediata de resolver. En sus coeficientes se encuentra la variable independiente, la volatilidad.

2.3 Función de utilidad tipo logarítmica

Ahora examinaremos el caso más utilizado en la literatura de valuación de opciones, se trata de la función de utilidad del tipo logarítmica. Es necesario considerar este caso por separado de la sección anterior, puesto que si solamente se sustituye $\gamma = 0$ en la ecuación que se obtuvo antes, existen pasos intermedios que se indeterminan. Específicamente suponemos que

$$u(c_t, t) = e^{-\delta t} \ln c_t$$

y

$$b(c_T, T) = e^{-\delta T} \ln c_T.$$

En este caso, a partir de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman tenemos (véase el apéndice), obtenemos la ecuación:

$$\begin{aligned}
0 = \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \Bigg\{ & e^{-\delta t} \ln c_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial a_t} a_t \left[r + (\mu - r) x_t + (\mu_F - r) y_t - \frac{c_t}{a_t} \right] \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2} {a_t}^2 \Big({x_t}^2 {\sigma_t}^2 + {y_t}^2 {\sigma_F}^2 + {y_t}^2 {\xi_F}^2 + 2 x_t y_t \sigma_t \sigma_F \\
& + 2 x_t y_t \sigma_t \xi_F \rho_t + 2 {y_t}^2 \sigma_F \xi_F \rho_t \Big) + \frac{\partial f}{\partial V_t} m + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial {V_t}^2} {\xi_\sigma}^2 \\
& + \frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t} a_t \left(x_t \sigma_t \xi_\sigma \rho_t + y_t \sigma_F \xi_\sigma \rho_t + y_t \xi_\sigma \xi_F \right) \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{e^{-\delta t}}{c_t} = \frac{\partial f}{\partial a_t},$$

$$\mu_t - r = -\left[x_t V_t + y_t \sigma_t \sigma_F + y_t \sigma_t \xi_F \rho_t\right] a_t \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}} - \sigma_t \xi_\sigma \rho_t \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}}$$

y

$$\mu_F - r = -\left[y_t {\sigma_F}^2 + y_t {\xi_F}^2 + x_t \sigma_t \sigma_F + x_t \sigma_t \xi_F \rho_t + 2 y_t \sigma_F \xi_F \rho_F\right] a_t \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}}$$
$$- \xi_\sigma \left(\sigma_F \rho_t + \xi_F\right) \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}}.$$

En particular, cuando sustituimos las condiciones de equilibrio, las ecuaciones anteriores se simplifican de tal manera que:

$$\frac{e^{-\delta t}}{c_t} = \frac{\partial f}{\partial a_t}, \tag{2.34}$$

$$\mu_t - r = -V_t a_t \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}} - \sigma_t \xi_\sigma \rho_t \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}} \tag{2.35}$$

y

$$\mu_F - r = \left(\sigma_t \sigma_F + \sigma_t \xi_F \rho_t\right) a_t \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}} - \left(\sigma_F \xi_F \rho_t + \xi_\sigma \xi_F\right) \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}}. \tag{2.36}$$

Con base en la experiencia de la sección anterior, proponemos como candidato de solución de la ecuación (2.33) a la función

$$f(a_t, V_t, t) = (\ln a_t) g(V_t, t) e^{-\delta t}.$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial f}{\partial a_t} = \frac{1}{a_t} g(V_t,t)e^{-\delta t},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2} = -\frac{1}{{a_t}^2} g(V_t,t)e^{-\delta t},$$

$$\frac{\partial f}{\partial V_t} = \ln a_t \frac{\partial g}{\partial V_t} e^{-\delta t},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial {V_t}^2} = \ln a_t \frac{\partial^2 g}{\partial {V_t}^2} e^{-\delta t},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t} = \frac{1}{a_t}\frac{\partial g}{\partial V_t} e^{-\delta t}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial a_t} = -\delta(\ln a_t) g(V_t,t)e^{-\delta t}.$$

Sustituimos las ecuaciones anteriores en la ecuación (2.31) y obtenemos la ecuación diferencial parcial para calcular el premio al riesgo $g(V_t,t)$:

$$0 = \ln c_t - \delta(\ln a_t)g + (ra_t - c_t)\frac{1}{a_t} g + \frac{1}{2}V_t g + m(\ln a_t)\frac{\partial g}{\partial a_t} + \frac{1}{2}{\xi_\sigma}^2(\ln a_t)\frac{\partial^2 g}{\partial {V_t}^2}. \quad (2.37)$$

Observe que de la ecuación (2.34) y nuestra propuesta para $f(a_t,V_t,t)$, obtenemos que $1/c_t = 1/a_t g(V_t,t)$, es decir, que $c_t = a_t g(V_t,t)$, por lo que $\ln c_t = \ln a_t - \ln g$. En consecuencia, al sustituir esto en la ecuación (2.37) nos queda lo siguiente:

$$\ln a_t - 1 - \ln g + \big(r + \frac{1}{2}V_t - \delta \ln a_t\big)g + m(\ln a_t)\frac{\partial g}{\partial a_t} + \frac{1}{2}{\xi_\sigma}^2(\ln a_t)\frac{\partial^2 g}{\partial {V_t}^2}. \quad (2.38)$$

La condición de frontera es $g(V_T,T) = 1$.

De la misma forma que en los casos anteriores, la ecuación diferencial parcial para valuar el producto derivado se obtiene de sustituir primero las ecuaciones (2.4), (2.5) y (2.6) en la ecuación (2.36) y después de simplificar la correspondiente ecuación al sustituir la ecuación (2.35) en el coeficiente de la derivada parcial del precio con respecto al activo. En este caso obtenemos la ecuación:

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{\partial F_t}{\partial t} + rS_t\frac{\partial F_t}{\partial S_t} + \left[m - \xi_\sigma \rho_t \sigma_t \frac{1}{a_t} g(V_t,t) + {\xi_\sigma}^2 \frac{1}{a_t} \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t,t)}\right]\frac{\partial F_t}{\partial V_t} \\
+ \frac{1}{2}V_t{S_t}^2\frac{\partial^2 F_t}{\partial {S_t}^2} + \frac{1}{2}{\xi_\sigma}^2\frac{\partial^2 F_t}{\partial {V_t}^2} + \rho_t \xi_\sigma \sigma_t S_t \frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t \partial V_t} - rF_t.
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

El problema (2.10) se resuelve al encontrar el coeficiente del premio al riesgo de la ecuación (2.38) y sustituir en nuestra propuesta de solución.

2.4 El caso de función de utilidad tipo CARA

Examinamos en esta sección el caso de función de utilidad del tipo CARA (Constant Absolute Risk Adverse). Es decir, suponemos, para $\eta > 0$, que

$$
u(c_t,t) = -\frac{1}{\eta}e^{-\eta c_t}e^{-\delta t}
$$

y

$$
b(a_T,T) = -\frac{1}{\eta}e^{-\eta a_T}e^{-\delta T}.
$$

Para este caso, de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, tenemos la ecuación:

$$
\begin{aligned}
0 = \max_{\{x_t,y_t,c_t\}} \Bigg\{ & -\frac{1}{\eta}e^{-\eta c_t}e^{-\delta t} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial a_t} a_t \left[r + (\mu - r)x_t + (\mu_F - r)y_t - \frac{c_t}{a_t}\right] \\
& + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}{a_t}^2 \Big({x_t}^2{\sigma_t}^2 + {y_t}^2{\sigma_F}^2 + {y_t}^2{\xi_F}^2 + 2x_t y_t \sigma_t \sigma_F \\
& + 2x_t y_t \sigma_t \xi_F \rho_t + 2{y_t}^2 \sigma_F \xi_F \rho_t \Big) + \frac{\partial f}{\partial V_t} m + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {V_t}^2}{\xi_\sigma}^2 \\
& + \frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t} a_t \big(x_t \sigma_t \xi_\sigma \rho_t + y_t \sigma_F \xi_\sigma \rho_t + y_t \xi_\sigma \xi_F \big) \Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

Derivamos parcialmente con respecto a c_t, x_t y y_t respectivamente para obtener las condiciones de primer orden:

$$e^{-\eta c_t} = \frac{\partial f}{\partial a_t},$$

$$\mu_t - r = -\big[x_t V_t + y_t \sigma_t \sigma_F + y_t \sigma_t \xi_F \rho_t\big] a_t \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}} - \sigma_t \xi_\sigma \rho_t \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}}$$

y

$$\mu_F - r = -\left(y_t {\sigma_F}^2 + y_t {\xi_F}^2 + x_t \sigma_t \sigma_F + x_t \sigma_t \xi_F \rho_t + 2 y_t \sigma_F \xi_F \rho_F\right) a_t \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}}$$
$$- \xi_\sigma \left(\sigma_F \rho_t + \xi_F\right) \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}}.$$

Simplificamos las ecuaciones anteriores al sustituir las condiciones de equilibrio $x_t = 1$ y $y_t = 0$ y llegamos a las ecuaciones:

$$e^{-\eta c_t} = \frac{\partial f}{\partial a_t} \tag{2.41}$$

$$\mu_t - r = -V_t a_t \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}} - \sigma_t \xi_\sigma \rho_t \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}} \tag{2.42}$$

y

$$\mu_F - r = -\left(\sigma_t \sigma_F + \sigma_t \xi_F \rho_t\right) a_t \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}} - \xi_\sigma \left(\sigma_F \rho_t + \xi_F\right) \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}}. \tag{2.43}$$

De manera semejante a los casos anteriores, la ecuación (40) tiene solución debido a nuestra elección de función de utilidad independiente de la volatilidad (véase Cox, Ingerson y Rose [3]). De acuerdo con nuestra función de utilidad y de legado, proponemos como candidato de solución de la ecuación (39) a la función

$$f(a_t, v_t, t) = -\frac{1}{\eta} e^{-\eta a_t} g(V_t, t) e^{-\delta t}.$$

En consecuencia, tenemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial a_t} &= e^{-\eta a_t} g(V_t, t) e^{-\delta t}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2} &= -\eta e^{-\eta a_t} g(V_t, t) e^{-\delta t}, \\
\frac{\partial f}{\partial V_t} &= -\frac{1}{\eta} e^{-\eta a_t} \frac{\partial g}{\partial V_t} e^{-\delta t}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial {V_t}^2} &= -\frac{1}{\eta} e^{-\eta a_t} \frac{\partial^2 g}{\partial {V_t}^2} e^{-\delta t}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t} &= e^{-\eta a_t} \frac{\partial g}{\partial V_t} e^{-\delta t}
\end{aligned}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \delta \frac{1}{\eta} e^{-\eta a_t} g(V_t, t) e^{-\delta t}.$$

Observe que los premios al riesgo con la notación anterior son:

$$\lambda_S = \frac{\mu_t - r}{\sigma_t} = -\sigma_t a_t - \eta e^{-\eta a_t} g(V_t, t) e^{-\delta t} - \xi_\sigma \rho_t e^{-\eta a_t} \frac{\partial g}{\partial V_t} e^{-\delta t} \tag{2.44}$$

y

$$\begin{aligned}
\lambda_F = \frac{\mu_F - r}{\sigma_F} &= \Big(\sigma_t \sigma_F + \sigma_t \xi_F \rho_t\Big) \frac{a_t}{\sigma_F} - \eta e^{-\eta a_t} g(V_t, t) e^{-\delta t} \\
&\quad - \Big(\sigma_F \xi_F \rho_t + \xi_\sigma \xi_F\Big) \frac{1}{\sigma_F} e^{-\eta a_t} \frac{\partial g}{\partial V_t} e^{-\delta t}.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Sustituimos las ecuaciones de las derivadas parciales de f en términos de g y sus derivadas parciales en la ecuación (2.40), conjuntamente con las condiciones de equilibrio para obtener la ecuación diferencial parcial para calcular el premio al riesgo $g(V_t,t)$:

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{\eta}e^{-\eta c_t} + \delta\frac{1}{\eta}e^{-\eta a_t}g(V_t,t) + (ra_t - \hat{c}_t)e^{-\eta a_t}g(V_t,t) \\
&+ \frac{1}{2}{a_t}^2 V_t \eta e^{-\eta a_t}g(V_t,t) - m\frac{1}{\eta}e^{-\eta a_t}\frac{\partial g}{\partial V_t} - \frac{1}{2}{\xi_\sigma}^2\frac{1}{\eta}e^{-\eta a_t}\frac{\partial^2 g}{\partial {V_t}^2}.
\end{aligned}$$

Pero, de la ecuación (2.41) tenemos $e^{-\eta c_t} = e^{-\eta a_t}g(V_t,t)$ por lo que podemos cancelar el término $e^{-\eta a_t}$, obtenemos la ecuación:

$$0 = \left(-\frac{1}{\eta} + \frac{\delta}{\eta} + ra_t - c_t + \frac{1}{2}{a_t}^2 V_t \eta\right)g - \frac{m}{\eta}\frac{\partial g}{\partial V_t} - \frac{1}{2}{\xi_\sigma}^2\frac{1}{\eta}\frac{\partial^2 g}{\partial {V_t}^2}. \tag{2.46}$$

La condición de frontera es $g(V_T,T) = 1$.

Finalmente, sustituimos primero las ecuaciones (2.4), (2.5) y (2.6) en la condición inicial dada en la ecuación (2.43), tenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_t}{\partial t} + \mu_t S_t\frac{\partial F_t}{\partial S_t} + m\frac{\partial F_t}{\partial V_t} + \frac{1}{2}{\sigma_t}^2{S_t}^2\frac{\partial^2 F_t}{\partial {S_t}^2} + \frac{1}{2}{\xi_\sigma}^2\frac{\partial^2 F_t}{\partial {V_t}^2} + \rho_t\xi_\sigma\sigma_t S_t\frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t\partial V_t} - rF_t \\
&= \left(\sigma_t S_t\frac{\partial F_t}{S_t} + \xi_\sigma\rho_t\frac{\partial F_t}{\partial V_t}\right)\sigma_t(-\eta a_t) - \left(\xi_\sigma\sigma_t S_t\rho_t\frac{\partial F_t}{\partial S_t}\frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t,t)}\right) - {\xi_\sigma}^2\frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t,t)}\frac{\partial F_t}{\partial V_t}.
\end{aligned}$$

A continuación rescribimos la ecuación como

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_t}{\partial t} + \left(\mu_t + V_t\eta a_t + \xi_\sigma\sigma_t\rho_t\frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t,t)}\right)S_t\frac{\partial F_t}{\partial S_t} + \left(m - \xi_\sigma\rho_t - {\xi_\sigma}^2\frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t,t)}\right)\frac{\partial F_t}{\partial V_t} \\
&+ \frac{1}{2}{\sigma_t}^2{S_t}^2\frac{\partial^2 F_t}{\partial {S_t}^2} + \frac{1}{2}{\xi_\sigma}^2\frac{\partial^2 F_t}{\partial {V_t}^2} + \rho_t\xi_\sigma\sigma_t S_t\frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t\partial V_t} - rF_t = 0.
\end{aligned}$$

Ahora sustituimos la ecuación (2.42), y obtenemos la ecuación diferencial parcial que sigue el precio del derivado para este caso:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F_t}{\partial t} + rS_t\frac{\partial F_t}{\partial S_t} + \left(m - \xi_\sigma\rho_t - {\xi_\sigma}^2\frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t,t)}\right)\frac{\partial F_t}{\partial V_t} \\
&+ \frac{1}{2}V_t{S_t}^2\frac{\partial^2 F_t}{\partial {S_t}^2} + \frac{1}{2}{\xi_\sigma}^2\frac{\partial^2 F_t}{\partial {V_t}^2} + \rho_t\xi_\sigma\sqrt{V_t}S_t\frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t \partial V_t} - rF_t = 0.
\end{aligned}
\tag{2.47}
$$

La condición de frontera depende del producto derivado que consideremos. Observe que esta ecuación nos indica cómo se debe ajustar el proceso estocástico que sigue el precio del activo. Para resolver el problema (2.10), primero resolvemos la ecuación (2.46) para determinar el coeficiente del premio al riesgo y después sustituimos en nuestra propuesta de solución.

2.5 Función de utilidad tipo CPRA con neutralidad al riesgo

Finalmente, estudiaremos en esta sección el caso en que la función de utilidad es del tipo CPRA, pero se tiene neutralidad al riesgo. Esto es, suponemos que la función de utilidad está dada por:

$$u(c_t, t) = e^{-\delta t}c_t$$

y la función de legado es

$$b(a_T, T) = e^{-\delta T}a_T.$$

Es decir, $\gamma = 1$ para el caso CPRA de la sección 2.3. Es importante señalar que no basta con sustituir $\gamma = 1$ en el proceso que realizamos en esa sección, debemos desarrollarlo todo porque hay pasos que quedarían indefinidos con sólo sustituir.

En este caso, de la ecuación de H-J-B del apéndice, tenemos la ecuación:

$$
\begin{aligned}
0 = \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \Bigg\{ & e^{-\delta t} c_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial a_t} a_t \left[r + (\mu - r) x_t + (\mu_F - r) y_t - \frac{c_t}{a_t} \right] \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2} {a_t}^2 \Bigg({x_t}^2 {\sigma_t}^2 + {y_t}^2 {\sigma_F}^2 + {y_t}^2 {\xi_F}^2 + 2 x_t y_t \sigma_t \sigma_F \\
& + 2 x_t y_t \sigma_t \xi_F \rho_t + 2 {y_t}^2 \sigma_F \xi_F \rho_t \Bigg) + \frac{\partial f}{\partial V_t} m + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial {V_t}^2} {\xi_\sigma}^2 \\
& + \frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t} a_t \big(x_t \sigma_t \xi_\sigma \rho_t + y_t \sigma_F \xi_\sigma \rho_t + y_t \xi_\sigma \xi_F \big) \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Por tanto, las condiciones de primer orden son:

$$
e^{-\delta t} = \frac{\partial f}{\partial a_t},
$$

$$
\mu_t - r = -\big[x_t V_t + y_t \sigma_t \sigma_F + y_t \sigma_t \xi_F \rho_t \big] a_t \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}} - \sigma_t \xi_\sigma \rho_t \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\mu_F - r = & - \left(y_t {\sigma_F}^2 + y_t {\xi_F}^2 + x_t \sigma_t \sigma_F + x_t \sigma_t \xi_F \rho_t + 2 y_t \sigma_F \xi_F \rho_F \right) a_t \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}} \\
& - \xi_\sigma \Big(\sigma_F \rho_t + \xi_F \Big) \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}}.
\end{aligned}
$$

Como siempre, sustituimos las condiciones de equilibrio para simplicar estas ecuaciones, obtenemos las ecuaciones:

$$
e^{-\delta t} = \frac{\partial f}{\partial a_t}, \tag{2.48}
$$

$$\mu_t - r = -V_t a_t \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}} - \sigma_t \xi_\sigma \rho_t \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}} \tag{2.49}$$

y

$$\mu_F - r = \left(\sigma_t \sigma_F + \sigma_t \xi_F \rho_t\right) a_t \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}} - \left(\sigma_F \xi_F \rho_t + \xi_\sigma \xi_F\right) \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}}. \tag{2.50}$$

Para este caso proponemos como candidato de solución a la función,

$$f(a_t, V_t, t) = g(V_t, t) a_t e^{-\delta t},$$

De esta función, tenemos las expresiones:

$$\frac{\partial f}{\partial a_t} = g(V_t, t) e^{-\delta t},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial V_t} = a_t \frac{\partial g}{\partial V_t} e^{-\delta t},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial {V_t}^2} = a_t \frac{\partial^2 g}{\partial {V_t}^2} e^{-\delta t},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t} = \frac{\partial g}{\partial V_t} e^{-\delta t}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\delta a_t g(V_t, t) e^{-\delta t}.$$

En consecuencia, las condiciones de primer orden son las ecuaciones:

$$e^{-\delta t} = g(V_t, t) e^{-\delta t}, \tag{2.51}$$

$$\mu_t - r = -\sigma_t \xi_\sigma \rho_t \frac{\partial g}{\partial V_t} e^{-\delta t}, \tag{2.52}$$

y

$$\mu_F - r = -\left(\sigma_F \xi_F \rho_t + \xi_\sigma \xi_F\right) \frac{\partial g}{\partial V_t} e^{-\delta t}. \tag{2.53}$$

Observe que de la ecuación (2.51), el coeficiente del premio al riesgo es $g(V_t, t) = 1$, por lo que los premios al riesgo, como es de esperar por la neutralidad al riesgo, son cero:

$$\lambda_S = \frac{\mu_t - r}{\sigma_t} = 0, \tag{2.54}$$

y

$$\lambda_F = \frac{\mu_F - r}{\sigma_F} = 0. \tag{2.55}$$

En particular, obtenemos que la tendencia debe ser igual a la tasa de interés, es decir, $\mu_t = r = \mu_F$, por lo que la ecuación diferencial parcial que sigue el precio del producto derivado queda simplemente como:

$$\frac{\partial F_t}{\partial t} + \mu_t S_t \frac{\partial F_t}{\partial S_t} + m \frac{\partial F_t}{\partial V_t} + \frac{1}{2} V_t {S_t}^2 \frac{\partial^2 F_t}{\partial {S_t}^2} + \frac{1}{2} {\xi_\sigma}^2 \frac{\partial^2 F_t}{\partial {V_t}^2} + \rho_t \xi_\sigma \sqrt{V_t} S_t \frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t \partial V_t} - r F_t = 0. \tag{2.56}$$

La condición de frontera depende del producto derivado y la solución del problema (2.10) es simplemente,

$$f(a_t, V_t, t) = a_t e^{-\delta t}.$$

CAPÍTULO 3

VALUACIÓN DE PRODUCTOS DERIVADOS PARA EL CASO DE ACTIVOS NOMINALES

En los capítulos anteriores, los activos eran reales. En este capítulo determinamos, mediante programación dinámica, la ecuación diferencial que determina el precio del producto derivado cuando el inversionista tiene activos nominales. Esto constituye una ampliación del capítulo anterior.

Primero establecemos el caso en que la volatilidad es constante para luego extender al caso de volatilidad estocástica.

3.1 Activos nominales con volatilidad constante.

Utilizaremos en esta sección una notación similar a la del capítulo I. Igual que en ese capítulo, suponemos que existen sólo tres activos. El activo subyacente con precio S_t, sigue un movimiento geométrico Browniano dado por

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t. \tag{3.1}$$

El bono tiene una tasa fija r para todos los plazos. El producto derivado sobre el activo subyacente que tiene precio denotado por $F_t = F(S_t, t)$, y de acuerdo con el lema de Itô, sigue la ecuación

$$\mathrm{d}F_t = \mu_F F_t \mathrm{d}t + \sigma_F F_t \mathrm{d}W_t, \tag{3.2}$$

con

$$\mu_t F_t = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial {S_t}^2}\sigma^2 {S_t}^2 \tag{3.3}$$

y

$$\sigma_F F_t = \frac{\partial F}{\partial S_t}\sigma S_t. \tag{3.4}$$

También suponemos que los inversionistas perciben que el precio del activo, que denotamos por P_t, sigue el movimiento geométrico Browniano:

$$\mathrm{d}P_t = \pi P_t \mathrm{d}t + \sigma_P P_t \mathrm{d}Z_t. \tag{3.5}$$

Aquí, π es la tasa de inflación promedio, y σ_P es la variación esperada de la tasa de inflación. La relación entre (3.1) y (3.5) es que $\mathrm{E}(\mathrm{d}W_t, \mathrm{d}Z_t) = \rho \mathrm{d}t$.

Con a_t denotamos a la riqueza en el instante t, y con x_t, y_t y $1 - x_t - y_t$ representamos, respectivamente, a las fracciones de la riqueza que se invierten en el activo subyacente, en el producto derivadao y en el bono libre de riesgo. De esta forma la restricción presupuestal está dada por la ecuación:

$$\mathrm{d}a_t = x_t a_t \mathrm{d}R_s + y_t a_t \mathrm{d}R_F + (1 - x_t - y_t) a_t \mathrm{d}t - P_t a_t \mathrm{d}t.$$

Al sustituir (3.1) y (3.2) obtenemos la ecuación consolidada de la evolución de la riqueza:

$$\mathrm{d}a_t = a_t \left(r + (\mu - r) x_t + (\mu_F - r) y_t - \frac{P_t c_t}{a_t} \right) \mathrm{d}t + a_t \left(x_t \sigma + y_t \sigma_F \right) \mathrm{d}W_t. \tag{3.6}$$

Un consumidor-inversionista busca, de forma simultánea, cuánto invertir y cuánto consumir de tal forma que maximice su utilidad total esperada, esto es, busca

$$f(a_t, t) = \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \mathrm{E} \left\{ \int_t^T u(c_s, s) \mathrm{d}s + b(a_T, T) \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\}, \tag{3.7}$$

sujeto a las ecuaciones (3.5) y (3.6).

En el problema (3.5), $b(a_T, T)$ denota a la función de legado, $\mathcal{F}_t$ es la información relevante disponible hasta el instante t, y $u(c_t, t)$ representa a la función de utilidad, que suponemos es del tipo logarítmica, esto es, suponemos

$$u(c_t, t) = \ln(c_T) e^{-\delta t}$$

y la función de herencia es,

$$b(a_T, T) = \ln(a_T)e^{-\delta t}.$$

Podemos rescribir el problema (3.5) como sigue:

$$\begin{aligned}
&f(a_t, t)\\
&= \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \mathrm{E}\left\{ \int_t^{t+\mathrm{d}t} \ln c_s e^{-\delta x}\mathrm{d}x + \int_{t+\mathrm{d}t}^{T} \ln c_s e^{-\delta x}\mathrm{d}x + \ln a_T e^{-\delta t} \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\}\\
&= \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \mathrm{E}\left\{ \ln c_t e^{-\delta t} + f(a_t + \mathrm{d}t, t + \mathrm{d}t) \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\}\\
&= \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \mathrm{E}\left\{ \ln c_t e^{-\delta t} + o(\mathrm{d}t) + f(a_t, t) + \mathrm{d}f(a_t, t) \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\}.
\end{aligned}$$

Cancelamos $f(a_t, t)$ y desarrollamos $\mathrm{d}f(a_t, t)$, obtenemos

$$0 = \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \mathrm{E}\left[\ln c_t e^{-\delta t}\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial a_t}\mathrm{d}a_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}(\mathrm{d}a_t)^2 \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right].$$

Ahora sustituimos la ecuación (3.6) en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}
0 = \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \mathrm{E}\Bigg[&\ln c_t e^{-\delta t}\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial a_t}\Bigg(a_t\big[r + (\mu - r)x_t + (\mu_F - r)y_t\\
&- \frac{P_t c_t}{a_t}\big]\mathrm{d}t + a_t\big[x_t\sigma + y_t\sigma_F\big]\mathrm{d}W_t\Bigg) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}(a_t)^2\big(x_t\sigma + y_t\sigma_F\big)^2\mathrm{d}t \;\Bigg|\; \mathcal{F}_t \Bigg].
\end{aligned}$$

Tomamos esperanzas, después dividimos por $\mathrm{d}t$ y tomamos el límite cuando $\mathrm{d}t \to 0$ y obtenemos la ecuación:

$$\begin{aligned}
0 = \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \Bigg[&\ln c_t e^{-\delta t} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial a_t}a_t\left[r + (\mu - r)x_t + (\mu_F - r)y_t - \frac{P_t c_t}{a_t} \right]\\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}(a_t)^2\big(x_t\sigma + y_t\sigma_F\big)^2 \Bigg].
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Derivamos parcialmente con respecto a c_t, x_t y y_t para obtener, respectivamente,

$$\frac{1}{c_t}e^{-\delta t} = P_t\frac{\partial f}{\partial a_t}, \tag{3.9}$$

$$\mu - r = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}}a_t\big(x_t\sigma + y_t\sigma_F\big)\sigma \tag{3.10}$$

y

$$\mu_F - r = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}}a_t\big(x_t\sigma + y_t\sigma_F\big)\sigma_F. \tag{3.11}$$

Observe que las ecuaciones (3.10) y (3.11) nos indican que los premios al riesgo, para el activo subyacente y para el producto derivado, son iguales. También de estas mismas ecuaciones, se verifica fácilmente que no tienen solución interior, por lo que suponemos que el equilibrio se obtiene cuando $x_t = 1$ y $y_t = 0$.

En este caso proponemos como candidato de solución del problema (3.7) a la función

$$f(a_t, t) = (\beta_0 + \beta_1 \ln a_t)e^{-\delta t}.$$

Por lo que, tenemos las expresiones:

$$\frac{\partial f}{\partial a_t} = \beta_1\frac{1}{a_t}e^{-\delta t},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2} = -\beta_1\frac{1}{{a_t}^2}e^{-\delta t}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial a_t} = -(\beta_0 + \beta_1 \ln a_t)e^{-\delta t}.$$

Observe que en particular estas expresiones nos llevan a que

$$-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}}a_t = 1.$$

Ahora obtenemos la ecuación diferencial para valuar el producto derivado. Primero sustituimos las ecuaciones (3.3) y (3.4) en la tercera de las condiciones iniciales, junto con las condiciones de equilibrio, obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial {S_t}^2}\sigma^2 {S_t}^2 - rF = \sigma^2 S_t \frac{\partial F}{\partial S_t}.$$

Como consecuencia, al simplificar tenemos la ecuación

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (\mu - \sigma^2) S_t \frac{\partial F}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial {S_t}^2}\sigma^2 {S_t}^2 - rF = 0.$$

Pero de la segunda de las condiciones de primer orden, $\mu - \sigma^2 = r$, por lo que la ecuación anterior nos queda como:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + r S_t \frac{\partial F}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial {S_t}^2}\sigma^2 {S_t}^2 - rF = 0.$$

Note que esta ecuación no es otra que la ecaución diferencial parcial del modelo de Black y Scholes. La condición de frontera depende, como siempre, del tipo de producto derivado que se trate.

3.2 El caso de volatilidad estocástica

En esta sección extendemos el resultado de la anterior cuando suponemos que la volatilidad es estocástica. La notación utilizada aquí es la misma que la del capítulo anterior, pero añadimos que el consumidor-inversionista percibe que el activo cambia con el tiempo de acuerdo con la ecuación (3.45) que explicitamos más adelante.

El problema que buscamos resolver es

$$\max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \mathrm{E}\left\{ \int_t^T u(s_s, s)\mathrm{d}s + b(A_T, T) \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\}, \tag{3.12}$$

sujeto a las condiciones:

$$\mathrm{d}a_t = a_t\left[r+(\mu-r)x_t+(\mu_F-r)y_t-\frac{c_tP_t}{a_t}\right]\mathrm{d}t + x_t\sigma_t a_t\mathrm{d}W_t+y_t\sigma_F a_t\mathrm{d}W_t+y_t\xi_F a_t\mathrm{d}Z_t, \tag{3.13}$$

$$\mathrm{d}V_t = m(V_t)\mathrm{d}t + \xi_\sigma(V_t)\mathrm{d}Z_t \tag{3.14}$$

y

$$\mathrm{d}P_t = \pi P_t\mathrm{d}t + \sigma_P P_t\mathrm{d}X_t, \tag{3.15}$$

donde suponemos que W_t, Z_t y X_t son movimentos brownianos estandarizados con $\mathrm{Cov}(\mathrm{d}W_t, \mathrm{d}Z_t) = \rho_t\mathrm{d}t$, $\mathrm{Cov}(\mathrm{d}W_t, \mathrm{d}X_t) = q_t\mathrm{d}t$ y $\mathrm{Cov}(\mathrm{d}Z_t, \mathrm{d}X_t) = \theta_t\mathrm{d}t$. En este caso, tenemos las ecuaciones:

$$\mathrm{d}a_t{}^2 = \left[x_t{}^2\sigma_t{}^2 + y_t{}^2\sigma_F{}^2 + y_t{}^2\xi_F{}^2 + 2x_ty_t\sigma_t\sigma_F + 2x_ty_t\sigma_t\xi_F\rho_t + 2y_t{}^2\sigma_F\xi_F\rho_t\right]a_t{}^2\mathrm{d}t, \tag{3.16}$$

$$\mathrm{d}V_t{}^2 = \xi_\sigma{}^2\mathrm{d}t, \tag{3.17}$$

$$\mathrm{d}P_t{}^2 = \sigma_P{}^2P_t{}^2\mathrm{d}t, \tag{3.18}$$

$$(\mathrm{d}a_t)(\mathrm{d}V_t) = \left[x_t\sigma_t\xi_\sigma\rho_t + y_t\sigma_F\xi_\sigma\rho_t + y_t\xi_\sigma\xi_F\right]a_t\mathrm{d}t, \tag{3.19}$$

$$(\mathrm{d}a_t)(\mathrm{d}P_t) = \left[x_t\sigma_t\sigma_P q_t + y_t\sigma_F\sigma_P q_t + y_t\xi_F\sigma_P\theta_t\right]a_tP_t\mathrm{d}t \tag{3.20}$$

y

$$(\mathrm{d}V_t)(\mathrm{d}P_t) = \xi_\sigma\sigma_P\theta_tP_t\mathrm{d}t. \tag{3.21}$$

Suponemos que la función de utilidad derivada de la riqueza, f, depende sólo de la riqueza, la volatilidad y el precio en cada instante t, es decir, suponemos que $f = f(a_t, V_t, P_t, t)$. Derivamos a continuación la ecuación diferencial para resolver el problema (3.12).

$$f(a_t, V_t, P_t, t) = \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \mathrm{E}\left\{\int_t^T u(c_s, s)\mathrm{d}s + b(A_T, T) \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right\}$$

$$= \max_{\{x_t,y_t,c_t\}} \mathrm{E}\left\{ \int_t^{t+\mathrm{d}t} u(c_s,s)\mathrm{d}s + \int_{t+\mathrm{d}t}^{T} u(c_s,s)\mathrm{d}s + b(A_T,T) \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\}$$

$$= \max_{\{x_t,y_t,c_t\}} \mathrm{E}\left\{ u(c_t,t)\mathrm{d}t + f(a_t+\mathrm{d}t, V_t+\mathrm{d}t, P_t+\mathrm{d}t, t+\mathrm{d}t) \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\}$$

$$= \max_{\{x_t,y_t,c_t\}} \mathrm{E}\left\{ u(c_t,t)\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) + f(a_t,V_t,P_t,t) + \mathrm{d}f(a_t,V_t,P_t,t) \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\}$$

Cancelamos $f(a_t,V_t,P_t,t)$ y desarrollamos el diferencial hasta términos de segundo orden. Tenemos así

$$\begin{aligned}
0 = \max_{\{x_t,y_t,c_t\}} \mathrm{E}\Bigg\{ & u(c_t,t)\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial a_t}\mathrm{d}a_t + \frac{\partial f}{\partial V_t}\mathrm{d}V_t + \frac{\partial f}{\partial P_t}\mathrm{d}P_t \\
& + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}(\mathrm{d}a_t)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial V_t^2}(\mathrm{d}V_t)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial P_t^2}(\mathrm{d}P_t)^2 \\
& + \frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t}(\mathrm{d}a_t)(\mathrm{d}V_t) + \frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial P_t}(\mathrm{d}a_t)(\mathrm{d}P_t) + \frac{\partial^2 f}{\partial V_t \partial P_t}(\mathrm{d}V_t)(\mathrm{d}P_t) \;\Bigg|\; \mathcal{F}_t \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Sustituimos las ecuaciones de la (3.13) a la (3.21) en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}
0 = \max_{\{x_t,y_t,c_t\}} \mathrm{E}\Bigg\{ & u(c_t,t)\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial a_t}a_t\Bigg[r + (\mu - r)x_t + (\mu_F - r)y_t \\
& - \frac{c_t P_t}{a_t}\Bigg]\mathrm{d}t \; + \frac{\partial f}{\partial a_t}a_t\Big[\; x_t\sigma_t a_t \mathrm{d}W_t + y_t\sigma_F a_t \mathrm{d}W_t + y_t\xi_F a_t \mathrm{d}Z_t\Big] \\
& + \frac{\partial f}{\partial V_t}\left[m\mathrm{d}t + \xi_\sigma \mathrm{d}Z_t\right] + \frac{\partial f}{\partial P_t}\left[\pi P_t \mathrm{d}t + \sigma_P P_t \mathrm{d}X_t\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}\Big[{x_t}^2{\sigma_t}^2 + {y_t}^2{\sigma_F}^2 \\
& + {y_t}^2{\xi_F}^2 + 2x_t y_t \sigma_t \sigma_F + 2x_t y_t \sigma_t \xi_F \rho_t + 2{y_t}^2\sigma_F\xi_F\rho_t\Big]{a_t}^2\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {V_t}^2}{\xi_\sigma}^2\mathrm{d}t \\
& + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {P_t}^2}{\sigma_P}^2{P_t}^2\mathrm{d}t + \frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t}\left[x_t\sigma_t\xi_\sigma\rho_t + y_t\sigma_F\xi_\sigma\rho_t + y_t\xi_\sigma\xi_F\right]a_t\mathrm{d}t \\
& + \frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial P_t}\left[x_t\sigma_t\sigma_P q_t + y_t\sigma_F\sigma_P q_t + y_t\xi_F\sigma_P\theta_t\right]a_t P_t\mathrm{d}t + \frac{\partial^2 f}{\partial V_t \partial P_t}\xi_\sigma\sigma_P\theta_t P_t\mathrm{d}t \;\Bigg|\; \mathcal{F}_t \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Si tomamos esperanzas, los términos no deterministas se eliminan, obtenemos

$$
\begin{aligned}
0 = \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \Bigg\{ & u(c_t,t)\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial a_t} a_t \Bigg[r + (\mu - r)x_t + (\mu_F - r)y_t \\
& - \frac{c_t P_t}{a_t} \Bigg] \mathrm{d}t + m\frac{\partial f}{\partial V_t}\mathrm{d}t + \pi P_t \frac{\partial f}{\partial P_t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}\big[{x_t}^2 {\sigma_t}^2 + {y_t}^2 {\sigma_F}^2 \\
& + {y_t}^2 {\xi_F}^2 + 2x_t y_t \sigma_t \sigma_F + 2x_t y_t \sigma_t \xi_F \rho_t + 2{y_t}^2 \sigma_F \xi_F \rho_t \big] {a_t}^2 \mathrm{d}t \\
& + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {V_t}^2} {\xi_\sigma}^2 \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {P_t}^2} {\sigma_P}^2 {P_t}^2 \mathrm{d}t + \frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t}\big[x_t \sigma_t \xi_\sigma \rho_t + y_t \sigma_F \xi_\sigma \rho_t + y_t \xi_\sigma \xi_F \big] a_t \mathrm{d}t \\
& + \frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial P_t}\big[x_t \sigma_t \sigma_P q_t + y_t \sigma_F \sigma_P q_t + y_t \xi_F \sigma_P \theta_t \big] a_t P_t \mathrm{d}t + \frac{\partial^2 f}{\partial V_t \partial P_t} \xi_\sigma \sigma_P \theta_t P_t \mathrm{d}t \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Ahora dividimos entre dt y tomamos el límite cuando d$t \to 0$, obtenemos la ecuación

$$
\begin{aligned}
0 = \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \Bigg\{ & u(c_t,t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial a_t} a_t \Bigg[r + (\mu - r)x_t + (\mu_F - r)y_t - \frac{c_t P_t}{a_t} \Bigg] \\
& + m\frac{\partial f}{\partial V_t} + \pi P_t \frac{\partial f}{\partial P_t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}\big[{x_t}^2 {\sigma_t}^2 + {y_t}^2 {\sigma_F}^2 \\
& + {y_t}^2 {\xi_F}^2 + 2x_t y_t \sigma_t \sigma_F + 2x_t y_t \sigma_t \xi_F \rho_t + 2{y_t}^2 \sigma_F \xi_F \rho_t \big] {a_t}^2 \\
& + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {V_t}^2} {\xi_\sigma}^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {P_t}^2} {\sigma_P}^2 {P_t}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t}\big[x_t \sigma_t \xi_\sigma \rho_t + y_t \sigma_F \xi_\sigma \rho_t + y_t \xi_\sigma \xi_F \big] a_t \\
& + \frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial P_t}\big[x_t \sigma_t \sigma_P q_t + y_t \sigma_F \sigma_P q_t + y_t \xi_F \sigma_P \theta_t \big] a_t P_t + \frac{\partial^2 f}{\partial V_t \partial P_t} \xi_\sigma \sigma_P \theta_t P_t \Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Derivamos parcialmente con respecto a c_t, x_t y y_t para obtener las condiciones necesarias:

$$
\frac{\partial u}{\partial c_t} - P_t \frac{\partial f}{\partial a_t} = 0,
$$

$$
\begin{aligned}
& (\mu_t - r)\frac{\partial f}{\partial a_t} a_t + \big[x_t {\sigma_t}^2 + y_t \sigma_t \sigma_F + y_t \sigma_t \xi_F \rho_t \big] {a_t}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2} + \sigma_t \xi_\sigma \rho_t a_t \frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t} \\
& + \big[\sigma_t \sigma_P q_t \big] a_t P_t \frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial P_t} = 0
\end{aligned}
$$

y

$$(\mu_F - r)\frac{\partial f}{\partial a_t}a_t + \left[y_t{\sigma_F}^2 + y_t{\xi_F}^2 + x_t\sigma_t\sigma_F + x_t\sigma_t\xi_F\rho_t + 2y_t\sigma_F\xi_F\rho_t\right]{a_t}^2\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}$$
$$+ \left[\sigma_F\xi_\sigma\rho_t + \xi_\sigma\xi_F\right]a_t\frac{\partial^2 f}{\partial a_t\partial V_t} + \left[\sigma_F\sigma_P q_t + \xi_F\sigma_P\theta_t\right]a_t P_t\frac{\partial^2 f}{\partial a_t\partial P_t} = 0.$$

Sustituimos las condiciones de equilibrio para simplificar estas ecuaciones, tenemos las ecuaciones:

$$\frac{\partial u}{\partial c_t} = P_t\frac{\partial f}{\partial a_t}, \tag{3.23}$$

$$(\mu_t - r) = -{\sigma_t}^2 a_t\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}} - \sigma_t\xi_\sigma\rho_t\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial a_t\partial V_t}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}} - \sigma_t\sigma_P q_t P_t\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial a_t\partial P_t}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}} \tag{3.24}$$

y

$$\begin{aligned}(\mu_F - r) = &-\left[\sigma_t\sigma_F + \sigma_t\xi_F\rho_t\right]a_t\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}} - \left[\sigma_F\xi_\sigma\rho_t + \xi_\sigma\xi_F\right]\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial a_t\partial V_t}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}}\\ &- \left[\sigma_F\sigma_P q_t + \xi_F\sigma_P\theta_t\right]P_t\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial a_t\partial P_t}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}}.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Suponemos en esta parte que la función de utilidad es del tipo CPRA, es decir, suponemos que

$$u(c_t, t) = \frac{{c_t}^\gamma}{\gamma}e^{-\delta t}$$

y

$$b(a_T, T) = \frac{{a_T}^\gamma}{\gamma}e^{-\delta T}.$$

Debido a esta elección, la ecuación (3.11) tiene solución. Proponemos como candidato de solución a la función

$$f(a_t, V_t, P_t, t) = \frac{{a_t}^\gamma}{\gamma}\frac{{P_t}^\gamma}{\gamma}g(V_t, t)e^{-\delta t},$$

en consecuencia, obtenemos las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial a_t} &= {a_t}^{\gamma-1}\frac{{P_t}^{\gamma}}{\gamma}g(V_t,t)e^{-\delta t},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2} &= (\gamma-1){a_t}^{\gamma-2}\frac{{P_t}^{\gamma}}{\gamma}g(V_t,t)e^{-\delta t},\\
\frac{\partial f}{\partial V_t} &= \frac{{a_t}^{\gamma}}{\gamma}\frac{{P_t}^{\gamma}}{\gamma}\frac{\partial g}{\partial V_t}e^{-\delta t},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial {V_t}^2} &= \frac{{a_t}^{\gamma}}{\gamma}\frac{{P_t}^{\gamma}}{\gamma}\frac{\partial^2 g}{\partial {V_t}^2} = e^{-\delta t},\\
\frac{\partial f}{\partial P_t} &= \frac{{a_t}^{\gamma}}{\gamma}{P_t}^{\gamma-1}g(V_t,t)e^{-\delta t},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial {P_t}^2} &= (\gamma-1)\frac{{a_t}^{\gamma}}{\gamma}{P_t}^{\gamma-2}g(V_t,t)e^{-\delta t},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t} &= {a_t}^{\gamma-1}\frac{{P_t}^{\gamma}}{\gamma}\frac{\partial g}{\partial V_t}e^{-\delta t},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial P_t} &= {a_t}^{\gamma-1}{P_t}^{\gamma-1}g(V_t,t)e^{-\delta t},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial V_t \partial P_t} &= \frac{{a_t}^{\gamma}}{\gamma}{P_t}^{\gamma-1}\frac{\partial g}{\partial V_t}e^{-\delta t}
\end{aligned}
$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\delta\frac{{a_t}^{\gamma}}{\gamma}\frac{{P_t}^{\gamma}}{\gamma}g(V_t,t)e^{-\delta t}.$$

Por tanto, tenemos las expresiones:

$$-a_t\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}} = 1-\gamma,$$

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t,t)}$$

y

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial P_t}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}} = \gamma.$$

Como consecuencia, las condiciones de primer orden quedan como:

$${c_t}^{\gamma-1} = P_t {a_t}^{\gamma-1}\frac{{P_t}^{\gamma}}{\gamma}g(V_t,t), \tag{3.26}$$

$$(\mu_t - r) = {\sigma_t}^2(1-\gamma) - \sigma_t \xi_\sigma \rho_t \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t, t)} - \sigma_t \sigma_P q_t P_t \gamma \tag{3.27}$$

y

$$(\mu_F - r) = \left[\sigma_t \sigma_F + \sigma_t \xi_F \rho_t\right](1-\gamma) - \left[\sigma_F \xi_\sigma \rho_t + \xi_\sigma \xi_F\right] \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t, t)} - \left[\sigma_F \sigma_P q_t + \xi_F \sigma_P \theta_t\right] P_t \gamma. \tag{3.28}$$

Sustituimos lo anterior en la ecuación (3.22) junto con las condiciones de equilibrio, $x_t = 1$ y $y_t = 0$, junto con los valores óptimos de c_t. Obtenemos de esta manera la ecuación diferencial para determinar el premio al riesgo, $g(V_t, P_t, t)$ (ecuación (3.29)):

$$\begin{aligned}
0 = {} & \frac{{c_t}^\gamma}{\gamma} - \delta \frac{{a_t}^\gamma}{\gamma} \frac{{P_t}^\gamma}{\gamma} g + \mu_t {a_t}^\gamma \frac{{P_t}^\gamma}{\gamma} g + \left[\frac{c_t P_t}{a_t}\right] {a_t}^\gamma \frac{{P_t}^\gamma}{\gamma} g + m \frac{{a_t}^\gamma}{\gamma} \frac{{P_t}^\gamma}{\gamma} \frac{\partial g}{\partial V_t} \\
& + \pi \frac{{a_t}^\gamma}{\gamma} {P_t}^\gamma g + \frac{1}{2} \sigma^2 (\gamma - 1) {a_t}^\gamma \frac{{P_t}^\gamma}{\gamma} g + \frac{1}{2} {\xi_\sigma}^2 \frac{{a_t}^\gamma}{\gamma} \frac{{P_t}^\gamma}{\gamma} \frac{\partial^2 g}{\partial {V_t}^2} + \frac{1}{2} {\sigma_P}^2 (\gamma - 1) \frac{{a_t}^\gamma}{\gamma} {P_t}^\gamma g \\
& + \sigma_t \xi_\sigma \rho_t {a_t}^\gamma \frac{{P_t}^\gamma}{\gamma} \frac{\partial g}{\partial V_t} + \sigma_t \sigma_P q_t {a_t}^\gamma {P_t}^\gamma g + \xi_\sigma \sigma_P \theta_t \frac{{a_t}^\gamma}{\gamma} {P_t}^\gamma \frac{\partial g}{\partial P_t}.
\end{aligned}$$

De la ecuación (3.26), tenemos que ${c_t}^{\gamma-1} = P_t {a_t}^{\gamma-1} \frac{{P_t}^\gamma}{\gamma} g(V_t, t)$, por lo que ${c_t}^\gamma = \gamma^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} {P_t}^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\gamma} g^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} {a_t}^\gamma$, y así podemos cancelar ${a_t}^\gamma$ y ${P_t}^\gamma$ en la ecuación anterior, obtenemos la ecuación,

$$0 = A g^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + B g + C g_V + D g_{VV}, \tag{3.29}$$

en donde, por facilidad, utilizamos subíndices para indicar las derivadas parciales con respecto a la volatilidad, V_t. Los coeficientes son $A = \gamma^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} {P_t}^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\gamma}$, $B = \frac{-\delta}{\gamma^2} + \left(\mu_t - \frac{c_t P_t}{a_t}\right)\frac{1}{\gamma} + \frac{\pi}{\gamma} + \frac{V_t}{2}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) + \frac{1}{2}{\sigma_P}^2\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) + \sqrt{V_t}\sigma_P q_t$, $C = \frac{m}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma}\sqrt{V_t}\xi_\sigma \rho_t + \frac{1}{\gamma}\xi_\sigma \sigma_P \theta_t$, $D = \frac{1}{2\gamma^2}\xi_\sigma$, el parámetro $\gamma \leq 1$,con $\gamma \neq 0$ y la condición de frontera es $g(V_T, P_T, T) = 1$.

Observe que la ecuación (3.29) es difícil de resolver debido al término no lineal $g^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ que aparece y a que los coeficientes B, C y D contienen a la variable independiente, la volatilidad. Note, sin embargo, que para el problema de horizonte infinito, es decir, cuando consideramos un tiempo muy largo de inversión, $T \to \infty$, se tiene que el coeficiente del premio al riesgo no depende del tiempo, sino sólo de la volatilidad, $g(V_t, t) \to g(V_t)$, por lo que la ecuación diferencial (3.29) se convierte en una ecuación diferencial ordinaria:

$$0 = Ag^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + Bg + C\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}V} + D\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}V^2}. \tag{3.30}$$

A continuación obtenemos la ecuación diferencial para valuar el producto derivado. Primero sustituimos los valores de μ_F, σ_F y ξ_F obtenidos del lema de Itô (ecuaciones (3.15),(3.16) y (3.17) de la sección anterior) en la ecuación (3.28):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_t}{\partial t} + \mu_t S_t \frac{\partial F_t}{\partial S_t} + m\frac{\partial F_t}{\partial V_t} + \frac{1}{2}{\sigma_t}^2 {S_t}^2 \frac{\partial^2 F_t}{\partial {S_t}^2} + \frac{1}{2}{\xi_\sigma}^2 \frac{\partial^2 F_t}{\partial {V_t}^2} + \rho_t \xi_\sigma \sigma_t S_t \frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t \partial V_t} - rF_t \\
&= \left[\sigma_t \sigma_t S_t \frac{\partial F_t}{\partial S_t} + \sigma_t \xi_\sigma \frac{\partial F_t}{\partial V_t}\rho_t\right](1-\gamma) - \left[\sigma_t S_t \frac{\partial F_t}{\partial S_t}\xi_\sigma \rho_t + \xi_\sigma \xi_\sigma \frac{\partial F_t}{\partial V_t}\right]\frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t,t)} \\
&- \left[\sigma_t S_t \frac{\partial F_t}{\partial S_t}\sigma_P q_t + \xi_\sigma \frac{\partial F_t}{\partial V_t}\sigma_P \theta_t\right] P_t \gamma.
\end{aligned}$$

Reacomodamos los términos como sigue:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_t}{\partial t} + \left[\mu_t - {\sigma_t}^2(1-\gamma) + \sigma_t \xi_\sigma \rho_t \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t,t)} + \sigma_t \sigma_P q_t P_t \gamma\right] S_t \frac{\partial F_t}{\partial S_t} \\
&+ \left[m - \sigma_t \xi_\sigma \rho_t (1-\gamma) + {\xi_\sigma}^2 \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t,t)} + \xi_\sigma \sigma_P \theta_t P_t \gamma\right] \frac{\partial F_t}{\partial V_t} \\
&+ \frac{1}{2}{\sigma_t}^2 {S_t}^2 \frac{\partial^2 F_t}{\partial {S_t}^2} + \frac{1}{2}{\xi_\sigma}^2 \frac{\partial^2 F_t}{\partial {V_t}^2} + \rho_t \xi_\sigma \sigma_t S_t \frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t \partial V_t} - rF_t = 0.
\end{aligned}$$

Ahora utilizamos la ecuación (3.27) para simplificar el coeficiente que acompaña a la derivada parcial con respecto al activo. Obtenemos así la ecuación diferencial parcial para valuar el producto derivado:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F_t}{\partial t} + rS_t\frac{\partial F_t}{\partial S_t} + \left[m - \sigma_t\xi_\sigma\rho_t(1-\gamma) + {\xi_\sigma}^2\frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t,t)} + \xi_\sigma\sigma_P\theta_t P_t\gamma\right]\frac{\partial F_t}{\partial V_t} \\
&+ \frac{1}{2}V_t{S_t}^2\frac{\partial^2 F_t}{\partial {S_t}^2} + \frac{1}{2}{\xi_\sigma}^2\frac{\partial^2 F_t}{\partial {V_t}^2} + \rho_t\xi_\sigma\sqrt{V_t}S_t\frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t \partial V_t} - rF_t = 0.
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

La condición de frontera depende del producto derivado de que se trate.

En particular, consideremos el caso límite en que $\gamma = 0$, es decir, el caso en que la función de utilidad es logarítmica, $u(c_t,t) = (\ln c_t)e^{-\delta t}$ y $b(A_T,T) = (\ln A_T)e^{-\delta T}$. Tenemos en esta ocasión que el candidato para la función de utilidad derivada de la riqueza es,

$$
f(a_t, V_t, P_t, t) = (\ln a_t + \ln P_t)g(V_t,t)e^{-\delta t},
$$

por lo que obtenemos las expresiones:

$$
-a_t\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}} = 1,
$$

$$
\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}} = \frac{\partial g}{\partial V_t}
$$

y

$$
\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial P_t}}{\frac{\partial f}{\partial a_t}} = 0
$$

. De esta forma, las condiciones de primer orden quedan en este caso como:

$$
\frac{1}{c_t} = \frac{1}{a_t}P_t g(V_t,t), \tag{3.32}
$$

$$
(\mu_t - r) = -{\sigma_t}^2 - \sigma_t\xi_\sigma\rho_t\frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t,t)} \tag{3.33}
$$

y

$$
(\mu_F - r) = -\left[\sigma_t\sigma_F + \sigma_t\xi_F\rho_t\right] - \left[\sigma_F\xi_\sigma\rho_t + \xi_\sigma\xi_F\right]\frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t,t)}. \tag{3.34}
$$

Cuando sustituimos las condiciones de equilibrio, junto con los valore óptimos y las derivadas parciales anteriores en la ecuación (3.22), obtenemos la ecuación diferencial parcial para calcular el premio al riesgo:

$$\ln c_t - \delta(\ln a_t + \ln P_t)g(V_t,t) + \left[\mu_t - \frac{c_t P_t}{a_t}\right]g(V_t,t) + m(\ln a_t + \ln P_t)\frac{\partial g}{\partial V_t}$$
$$+ \pi g(V_t,t) - \frac{1}{2}{\sigma_t}^2 g(V_t,t) + \frac{1}{2}{\xi_\sigma}^2(\ln a_t + \ln P_t)\frac{\partial^2 g}{\partial {V_t}^2}$$
$$- \frac{1}{2}{\sigma_P}^2 g(V_t,t) + \sigma_t \xi_\sigma \rho_t \frac{\partial g}{\partial V_t} + \xi_\sigma \sigma_P \theta_t \frac{\partial g}{\partial V_t} = 0.$$

De la primera de las condiciones iniciales, tenemos que $c_t = \frac{a_t}{P_t g(V_t,t)}$, por lo que $\ln c_t = \ln a_t - \ln P_t - \ln g$. Utilizando estas expresiones y simplificando obtenemos la ecuación:

$$\ln a_t - \ln P_t - 1 - \ln g + \left[-\delta(\ln a_t + \ln P_t) + \mu_t + \pi - \frac{1}{2}V_t - \frac{1}{2}{\sigma_P}^2\right]g$$
$$+ \left[m(\ln a_t + \ln P_t) + \sqrt{V_t}\xi_\sigma \rho_t + \xi_\sigma \sigma_P \theta_t\right]\frac{\partial g}{\partial V_t} + \frac{1}{2}{\xi_\sigma}^2(\ln a_t + \ln P_t)\frac{\partial^2 g}{\partial {V_t}^2} = 0. \tag{3.35}$$

La condición de frontera es $g(V_T, P_T, T) = 1$.
Para el caso de inversión con horizonte infinito, obtenemos la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden,

$$A - \ln g + Bg + Cg_V + Dg_{VV}, \tag{3.36}$$

en donde $A = \ln a_t - \ln P_t - 1$, $B = -\delta(\ln a_t + \ln P_t) + \mu_t + \pi - \frac{1}{2}V_t - \frac{1}{2}{\sigma_P}^2$, $C = m(\ln a_t + \ln P_t) + \sqrt{V_t}\xi_\sigma \rho_t + \xi_\sigma \sigma_P \theta_t$ y $D = \frac{1}{2}{\xi_\sigma}^2(\ln a_t + \ln P_t)$.

Observe que en esta ecuación, los coeficientes B, C y D dependen de la volatilidad, no son constantes.

Por otra parte, al sustituir los valores de μ_F, σ_F y de ξ_F obtenidos del lema de Itô en la ecuación (3.34) tenemos la ecuación

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F_t}{\partial t}+\mu_t S_t\frac{\partial F_t}{\partial S_t}+m\frac{\partial F_t}{\partial V_t}+\frac{1}{2}{\sigma_t}^2{S_t}^2\frac{\partial^2 F_t}{\partial {S_t}^2}+\frac{1}{2}{\xi_\sigma}^2\frac{\partial^2 F_t}{\partial {V_t}^2}+\rho_t\xi_\sigma\sigma_t S_t\frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t\partial V_t}-rF_t\\
&=-\left[\sigma_t\sigma_t S_t\frac{\partial F_t}{\partial S_t}+\sigma_t\xi_\sigma\frac{\partial F_t}{\partial V_t}\rho_t\right]-\left[\sigma_t S_t\frac{\partial F_t}{\partial S_t}\xi_\sigma\rho_t+\xi_\sigma\xi_\sigma\frac{\partial F_t}{\partial V_t}\right]\frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t,t)}\\
&-\left[\sigma_t S_t\frac{\partial F_t}{\partial S_t}\sigma_P q_t+\xi_\sigma\frac{\partial F_t}{\partial V_t}\sigma_P\theta_t\right]P_t\frac{1}{P_t(\ln P_t)}.
\end{aligned}
$$

Simplificando, obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F_t}{\partial t}+\left[\mu_t+{\sigma_t}^2+\sigma_t\xi_\sigma\rho_t\frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t,t)}+\frac{1}{\ln P_t}\sigma_t\sigma_P q_t\right]S_t\frac{\partial F_t}{\partial S_t}\\
&+\left[m-\sigma_t\xi_\sigma\rho_t-{\xi_\sigma}^2\frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t,t)}+\frac{1}{\ln P_t}\xi_\sigma\sigma_P\theta_t\right]\frac{\partial F_t}{\partial V_t}\\
&+\frac{1}{2}{\sigma_t}^2{S_t}^2\frac{\partial^2 F_t}{\partial {S_t}^2}+\frac{1}{2}{\xi_\sigma}^2\frac{\partial^2 F_t}{\partial {V_t}^2}+\rho_t\xi_\sigma\sigma_t S_t\frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t\partial V_t}-rF_t=0
\end{aligned}
$$

El coeficiente de la derivada parcial con respecto al precio del activo , de acuerdo con la ecuación (3.33), es igual a r, por lo que al sustituir esto en la ecuación anterior, obtenemos la ecuación diferencial parcial que sigue el precio del producto derivado:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F_t}{\partial t}+rS_t\frac{\partial F_t}{\partial S_t}+\left[m-\sigma_t\xi_\sigma\rho_t-{\xi_\sigma}^2\frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t,t)}+\frac{1}{\ln P_t}\xi_\sigma\sigma_P\theta_t\right]\frac{\partial F_t}{\partial V_t}\\
&+\frac{1}{2}V_t{S_t}^2\frac{\partial^2 F_t}{\partial {S_t}^2}+\frac{1}{2}{\xi_\sigma}^2\frac{\partial^2 F_t}{\partial {V_t}^2}+\rho_t\xi_\sigma\sigma_t S_t\frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t\partial V_t}-rF_t=0.
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

La condición de frontera depende del producto derivado.

Nuevamente es preciso observar que la ecuación diferencial para obtener el coeficiente del premio al riesgo, no es inmediata de resolver. Recuerde que en los coeficientes aparecen los términos m y ξ_σ que dependen de la voatilidad V_t de acuerdo con el modelo que se elija para la volatilidad. Por ejemplo, en el modelo de difusión GARCH, se tiene que $m=\omega-kV_t$ y que $\xi_\sigma=\xi V_t$, con ω, k y ξ constantes.

CAPÍTULO 4
MÉTODOS NUMÉRICOS

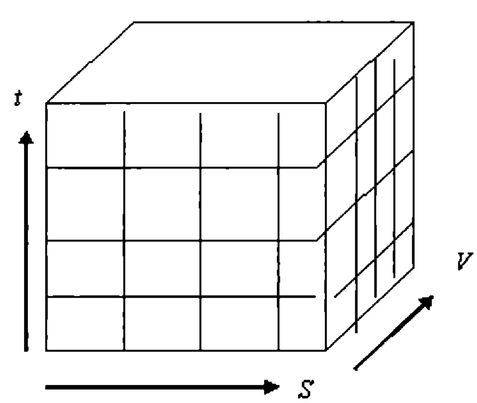
En el capítulo anterior desarrollamos la ecuación diferencial (3.31) que sigue el precio de un derivado. Para resolver esta ecuación es necesario calcular el coeficiente del premio al riesgo $g(V_t, t)$ cuyo valor también está dado por la ecuación diferencial parcial (3.29). Ambas ecuaciones diferenciales no son inmediatas de resolver y debemos recurrir,en consecuencia, a métodos numéricos de aproximación de las soluciones. Esta situación es frecuente en la valución de derivados, las ecuaciones diferenciales no presentan una forma cerrada, por lo que en general las ecuaciones diferenciales parciales se resuelven mediante métodos numéricos.

La solución de ecuaciones diferenciales parciales mediante diferencias finitas es la generalización del método binomial. Para encontrar soluciones aproximadas a una ecuación diferencial parcial, es más fácil utilizar la malla de diferencias finitas que un árbol binomial, simplemente porque la transformación de una ecuación diferencial a una ecuación en diferencias es mucho más fácil cuando la malla o árbol es regular. Además, existen muchos métodos de diferencias finitas que pueden mejorar los resultados, haciendo el cálculo más rápido y preciso. La principal diferencia entre el método binomial y los métodos de diferencias finitas es que el último contiene en la estructura del árbol la difusión (volatilidad). En los métodos de diferencias finitas el "árbol" está fijo pero los parámetros cambian para que reflejen un cambio en la difusión.

Presentamos en este capítulo una breve descripción de los métodods numéricos para resolver ecuaciones diferenciales parciales como las que mencionamos al principio. La idea general es aproximar cada derivada parcial por diferencias finitas utilizando mallas para los valores del activo y el tiempo así como mallas de la volatilidad y el tiempo. En particular desarrollamos el método para la ecuación (3.29) y mencionamos cómo sería el caso de la ecuación (3.31).

4.1 Métodos de diferencias finitas para modelos de un solo factor

En el estudio del método de las diferencias finitas se utiliza *mallas*. Una malla es una arreglo rectangular de valores como las que se muestran en la gráfica 1. Los nodos están espaciados en intervalos de tiempo iguales y en intervalos iguales de S_t. La malla de diferencias finitas tiene por lo regular los mismos espacios de tiempo, que es el tiempo entre los nodos, y tamaños iguales de S_t. También es necesario tener una malla equivalente para valores de la volatilidad V_t y el tiempo t. De hecho, la malla necesaria para la ecuación (3.31)debe ser tridimensional con valores simultáneamente para S_t, V_t y t. Consideramos intervalos de tiempo y brincos de los activos constantes y consideramos las ecuaciones hacia atrás (backward). La mayoría de los libros de análisis numérico explican los métodos con referencia a la ecuación hacia adelante (forward). La diferencia entre el forward y backward es un cambio en el signo (

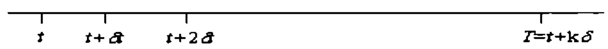


Malla para S_t, V_t y t

Consideremos una partición del intervalo $[t, T]$ en k subintervalos de tamaño δt. Esto es, $T - t = k\delta t$ ó lo que es equivalente

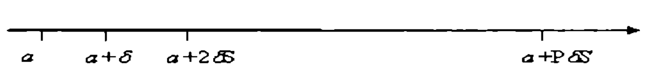
$$t = T - k\delta t, \tag{4.1}$$

como podemos verlo en la Gráfica 2.



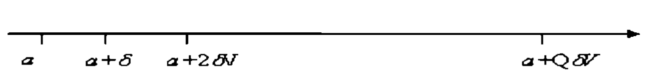
Gráfica 2

Sea S_t el valor del activo y δS_t el incremento constante en su valor. Esto es $S_t = a + i\delta S_t$, como se ve en la Gráfica 3. Análogamente para el valor de la volatilidad.



Gráfica 3

De la misma forma, consideramos incrementos de tamaño δ para la volatilidad, $V_t = j\delta V_t$.



Gráfica 4

Si $a = 0$, entonces el valor del activo está dado por

$$S_t = i\delta S_t. \tag{4.2}$$

Por lo que cada punto de la malla está dado por el valor de los activos y del tiempo, esto es

$$(S_t, V_t, t) = (i\delta S_t, j\delta V_t, T - k\delta t),$$

donde $0 \leq i \leq P$, $0 \leq j \leq Q$ y $0 \leq k \leq K$. Es decir, el valor del activo va desde cero hasta el valor del activo $P\delta S_t$ y el valor de la volatilidad va desde cero hasta $Q\delta V_t$,. En la práctica, esta cota no tiene que ser muy grande, puesto que normalmente es tres o cuatro veces el valor del activo. Para las opciones con barrera, es más fácil resolverlo de manera numérica debido a que no se necesita determinar todos los valores de S_t; para una opción up-and-out no es necesario extender la malla más allá de la barrera.

Denotamos el valor de la opción con $F(S_t, V_t, t) = F(i\delta S, j\delta V, T - k\delta t)$ en cada uno de los puntos de la malla como

$$F_{i,j,k} = F(i\delta S, j\delta V, T - k\delta t), \tag{4.3}$$

de esta manera los subíndices cooresponden al orden de las varibles: activo, volatilidad y tiempo respectivamente. Cabe señalar, que al incrementar el valor de k, el tiempo real disminuye.

Ahora, calculamos las variaciones a través de una aproximación. Para esto, consideramos la definición de la primera derivada del valor de la opción, F_t, con respecto al tiempo t, esto es

$$\frac{\partial F(S_t, V_t, t)}{\partial t} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{F(S_t, V_t, t + h) - F(S_t, V_t, t)}{h}. \tag{4.4}$$

Por lo que de manera natural se aproxima la derivada con respecto al tiempo con base a los valores de la malla, específicamente tenemos

$$\frac{\partial F(S_t, V_t, t)}{\partial t} \approx \frac{F_{i,j,k} - F_{i,j,k+1}}{\delta t}. \tag{4.5}$$

A continuación, justificamos la ecuación (4.5) utilizando una expansión en serie de Taylor para una función de dos variables S_t y t en este caso.

Se puede expander el valor de la opción en el valor del activo S_t y en el tiempo $t - \delta t$ en la serie de Taylor[1]

alrededor del punto $\bar{x}_* = (S_t, V_t, t - \delta t)$, esto es

$$\begin{aligned} F(S_t, V_t, t) &= F(S_t, V_t, t - \delta t) + \delta t \frac{\partial F(S_t, V_t, t)}{\partial t}\bigg|_{\bar{x}_*} + \frac{(\delta t)^2}{2!}\frac{\partial^2 F(S_t, V_t, t)}{\partial t^2}\bigg|_{\bar{x}_*} + \cdots \\ &= F(S_t, V_t, t - \delta t) + \delta t \frac{\partial F(S_t, V_t, t)}{\partial t}\bigg|_{\bar{x}_*} + O(\delta t). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Despejando $F(S_t, V_t, t - \delta t)$ de la ecuación (4.6) y considerando que $O(\delta t)^2$ es pequeño, obtenemos

$$F(S_t, V_t, t - \delta t) = F(S_t, V_t, t) - \delta t \frac{\partial F_t}{\partial t}(S_t, V_t, t) + O(\delta t^2). \tag{4.7}$$

Ahora expresamos lo anterior en términos de valores en los puntos de la malla. Para esto, tenemos que $t - \delta t = T - k\delta t - \delta t = T - (k+1)\delta t$, es decir

$$\begin{aligned} F_{i,j,k+1} &= F(i\delta t S_t, j\delta t V_t, t - \delta t) \\ &= F(i\delta t, T - (k+1)\delta t). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Si sustituimos las ecuaciones (4.3) y (4.6) en la ecuación (4.5), obtenemos

$$F_{i,j,k} = F_{i,j,k+1} + \delta t \frac{\partial F}{\partial t}(S_t, V_t, t) + O(\delta t^2). \tag{4.9}$$

[1] Sea $u(x,y,z)$ una función continua en Ω con derivadas cruzadas continuas de orden N en Ω, es decir $u(x,y,z) \in C^{N+1}$. Dado un punto $\bar{x}_* \equiv (x_*, y_*, y_*) \in \Omega$, el valor de u en algún punto $\bar{x} \equiv (x,y,z) \in \Omega$ puede ser escrito como

$$\begin{aligned} u(x,y,z) =& u(x_*,y_*,z_*) + (x - x_*)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\bar{x}_*} + (y - y_*)\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{\bar{x}_*} + (z - z_*)\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{\bar{x}_*} \\ &+ \frac{(x - x_*)^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{\bar{x}_*} + \frac{(y - y_*)^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{\bar{x}_*} + \frac{(z - z_*)^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big|_{\bar{x}_*} \\ &+ (x - x_*)(y - y_*)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big|_{\bar{x}_*} + (x - x_*)(z - z_*)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\Big|_{\bar{x}_*} + (y - y_*)(z - yz_*)\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\Big|_{\bar{x}_*} + \cdots \end{aligned}$$

donde R^{N+1} es la $N+1$ derivada parcial evaluada en $\bar{x}_*$

Por lo tanto , el cambio en el valor de la opción ante un cambio en el tiempo está dado por

$$\frac{\partial F}{\partial t}(S_t, V_t, t) = \frac{F_{i,j,k} - F_{i,j,k+1}}{\delta t} + O(\delta t), \tag{4.10}$$

así, se obtiene que el error es del orden de $O(\delta t)$. Note que para $O(\delta t)$ pequeño conduce a la ecuación (4.2). Es posible tener una mejor aproximación que ésta, el error depende de la magnitud de la derivada de segundo orden de t, existen otros métodos para aproximar la derivada del valor de la opción, como veremos más adelante.

Aproximamos ahora la derivada de la opción con respecto a S_t, $\partial F/\partial S_t$.Un camino semejante al que seguiremos nos permite calcular $\partial F/\partial V_t$. Existen al menos tres formas distintas de calcularla. Para mostrar esto, examinamos una sección transversal de la malla para un tiempo t. Tenemos tres casos: la función que estamos aproximando (la curva), los valores de la función en los puntos de la malla (los puntos grandes) y tres aproximaciones posibles para la primer derivada (que son las tres líneas rectas, estas tres aproximaciones son: La diferencia forward dada por

$$\frac{\partial F}{\partial S_t} \approx \frac{F_{i+1,j,k} - F_{i,j,k}}{\delta S_t}, \tag{4.11}$$

donde $F_{i+1,j,k} = F((i+1)\delta S_t, j\delta V_t, t) = F(S_t+\delta S_t, V_t, t)$ y $F_{i,j,k} = F(i\delta S_t, \delta V_t, t) = F(S_t, V_t, t)$,la diferencia backward se calcula como

$$\frac{\partial F}{\partial S_t} \approx \frac{F_{i,j,k} - F_{i-1,j,k}}{\delta S_t}, \tag{4.12}$$

donde $F_{i-1,j,k} = F((i-1)\delta S_t,\ \delta V_t, t) = F(S_t - \delta S_t, V_t, t)$ y la diferencia central está dada por

$$\frac{\partial F}{\partial S_t} \approx \frac{F_{i+1,j,k} - F_{i-1,j,k}}{2\delta S_t} \tag{4.13}$$

A continuación justificamos las ecuaciones (4.9), (4.10) y (4.11). También, observamos que una de estas aproximaciones es mejor que las otras dos, esto se puede ver si se utiliza la expansión en serie de Taylor del valor de la opción $F(S_t, V_t, t)$ alrededor del punto $(S_t + \delta S_t, V_t, t)$, esto es

$$\begin{aligned} F(S_t, V_t, t) &= F(S_t + \delta S_t, V_t, t) - \delta S_t \frac{\partial F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t}\bigg|_{\bar{x}_*} \\ &+ \frac{(\delta S_t)^2}{2!} \frac{\partial^2 F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t^2}\bigg|_{\bar{x}_*} + \cdots \\ &= F(S_t + \delta S_t, V_t, t) - \delta S_t \frac{\partial F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t}\bigg|_{\bar{x}_*} + O(\delta S_t)^2. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Despejando $F(S_t + \delta S_t, V_t, t)$ de la ecuación (4.14) y considerando que $O(\delta S_t)^2$ es pequeño, obtenemos

$$F(S_t + \delta S_t, V_t, t) = F(S_t, V_t, t) + \delta S_t \frac{\partial F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t}\bigg|_{\bar{x}_*} + O(\delta S_t)^2. \tag{4.15}$$

Expresamos lo anterior en términos de valores en los puntos de la malla. Para esto, dado que $S_t + \delta S_t = i\delta S_t + \delta S_t = (i+1)\delta S_t$, tenemos

$$F_{i+1,j,k} = F(S_t + \delta S_t, V_t, t). \tag{4.16}$$

Por lo tanto, podemos rescribir la ecuación (4.15) como

$$\frac{\partial F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t} = \frac{F_{i+1,j,k} - F_{i,j,k}}{\delta S_t} + O(\delta S_t), \tag{4.17}$$

que para $O(\delta S_t)$ pequeño se llega a la ecuación (4.9). Si utilizamos la expansión en serie de Taylor del valor de la opción $F(S_t, V_t, t)$ alrededor del punto $(S_t - \delta S_t, V_t, t)$, tenemos

$$\begin{aligned} F(S_t, V_t, t) &= F(S_t - \delta S_t, V_t, t) + \delta S_t \frac{\partial F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t}\bigg|_{\bar{x}_*} \\ &+ \frac{(\delta S_t)^2}{2!} \frac{\partial^2 F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t^2}\bigg|_{\bar{x}_*} + \cdots \\ &= F(S_t - \delta S_t, V_t, t) + \delta S_t \frac{\partial F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t}\bigg|_{\bar{x}_*} + O(\delta S_t)^2. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Despejando $F(S_t - \delta S_t, V_t, t)$ de la ecuación (4.16) y considerando que $O(\delta S_t)^2$ es pequeño, se tiene

$$F(S_t - \delta S_t, V_t, t) = F(S_t, V_t, t) - \delta S_t \left.\frac{\partial F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t}\right|_{\bar{x}_*} + O(\delta S_t)^2. \tag{4.19}$$

Ahora, expresamos lo anterior en términos de valores en los puntos de la malla. Tenemos que $S_t - \delta S_t = i\delta S_t - \delta S_t = (i-1)\delta S_t$, es decir

$$F_{i-1}^k = F(S_t - \delta S_t, V_t, t). \tag{4.20}$$

Por lo tanto, la ecuación (4.18) queda expresada como

$$\frac{\partial F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t} = \frac{F_{i,j,k} - F_{i-1,j,k}}{\delta S_t} + O(\delta S_t). \tag{4.21}$$

Note que para $O(\delta S_t)$ pequeño, la ecuación (4.19) conduce a la ecuación (4.10). Al considerar términos a segundo orden en la expansión en serie de Taylor del valor de la opción $F(S_t, V_t, t)$ alrededor del punto $(S_t + \delta S_t, V_t, t)$, ecuación (4.12), tenemos

$$\begin{aligned} F(S_t, V_t, t) &= F(S_t + \delta S_t, V_t, t) - \delta S_t \left.\frac{\partial F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t}\right|_{\bar{x}_*} \\ &+ \frac{(\delta S_t)^2}{2!} \left.\frac{\partial^2 F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t^2}\right|_{\bar{x}_*} + \cdots \\ &= F(S_t + \delta S_t, V_t, t) - \delta S_t \left.\frac{\partial F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t}\right|_{\bar{x}_*} \\ &+ \frac{(\delta S_t)^2}{2!} \left.\frac{\partial^2 F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t^2}\right|_{\bar{x}_*} + O(\delta S_t)^3. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Despejamos $F(S_t + \delta S_t, V_t, t)$ de la ecuación (4.20) y consideramos que $O(\delta S_t)^3$ es pequeño, entonces

$$\begin{aligned} &F(S_t + \delta S_t, V_t, t) \\ &\qquad = F(S_t, V_t, t) + \delta S_t \left.\frac{\partial F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t}\right|_{\bar{x}_*} \\ &\qquad - \frac{(\delta S_t)^2}{2!} \left.\frac{\partial^2 F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t^2}\right|_{\bar{x}_*} + O(\delta S_t)^3. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Por otro lado, al tomar términos a segundo orden en la expansión en serie de Taylor del valor de la opción $F(S_t, V_t, t)$ alrededor del punto $(S_t - \delta S_t, V_t, t)$, ecuación (4.16), obtenemos

$$\begin{aligned} F(S_t, V_t, t) &= F(S_t - \delta S_t, V_t, t) + \delta S_t \left.\frac{\partial F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t}\right|_{\bar{x}_*} \\ &+ \frac{(\delta S_t)^2}{2!} \left.\frac{\partial^2 F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t^2}\right|_{\bar{x}_*} + \cdots \\ &= F(S_t - \delta S_t, V_t, t) + \delta S_t \left.\frac{\partial F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t}\right|_{\bar{x}_*} \\ &+ \frac{(\delta S_t)^2}{2!} \left.\frac{\partial^2 F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t^2}\right|_{\bar{x}_*} + O(\delta S_t)^3. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Si despejamos $F(S_t - \delta S_t, V_t, t)$ de la ecuación (4.22) y consideramos que $O(\delta S_t)^2$ es pequeño, se tiene

$$\begin{aligned} F(S_t - \delta S_t, V_t, t) &= F(S_t, V_t, t) - \delta S_t \left.\frac{\partial F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t}\right|_{\bar{x}_*} \\ &+ \frac{(\delta S_t)^2}{2!} \left.\frac{\partial^2 F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t^2}\right|_{\bar{x}_*} + O(\delta S_t)^3. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Ahora tomamos la diferencia de las ecuaciones (4.21) y (4.23), y simplificamos, en consecuencia

$$\frac{\partial F}{\partial S}(S_t, V_t, t) = \frac{F_{i+1,j,k} - F_{i-1,j,k}}{2\delta S} + O(\delta S_t)^2, \tag{4.26}$$

si $O(\delta S_t)^2$ es pequeño, conduce a la ecuación (4.11). Note que el cálculo de la derivada parcial de $F(S_t, V_t, t)$ con respecto a S_t a través de la diferencia central tiene un error de $O(\delta S_t)^2$ menor que el cálculo a través de la diferencia forward o backward. La diferencia central es mucho mejor en su ajuste debido a que se cancelan distintos términos debido a la simetría alrededor de S_t en la definición de la diferencia. La diferencia central calculada en S_t requiere conocimiento del valor de la opción en $S_t + \delta S_t$ y $S_t - \delta S_t$. Sin embargo, existen ocasiones que no se conocen estos valores, como por ejemplo, si se está en los extremos de la región, es decir, en $i = 0$ o $i = P$. Por lo que si hay ocasiones cuando es útil utilizar las derivadas de un solo lado por razones de estabilidad.

De forma análoga obtenemos que

$$\frac{\partial F(S_t, V_t, t)}{\partial V_t} = \frac{F_{i,j+1,k} - F_{i,j,k}}{\delta V_t} + O(\delta V_t), \tag{4.27}$$

$$\frac{\partial F(S_t, V_t, t)}{\partial V_t} = \frac{F_{i,j,k} - F_{i,j-1,k}}{\delta S_t} + O(\delta S_t) \tag{4.28}$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial S}(S_t, V_t, t) = \frac{F_{i,j+1,k} - F_{i,j-1,k}}{2\delta S} + O(\delta S_t)^2, \tag{4.29}$$

Las diferencias backward y forward utilizan solamente dos puntos para el cálculo de las derivadas, si se utilizan tres puntos se puede tener un ajuste mejor, por lo que para encontrar mejores aproximaciones utilizando tres puntos se necesita una vez más una serie de Taylor.

Supongamos que se desean utilizar los puntos S_t, $S_t + \delta S_t$ y $S_t + 2\delta S_t$ para calcular la delta de la opción. Para obtener la mejor aproximación primero se expande el valor de la opción en el punto $S_t + \delta S_t$ en la serie de Taylor el cual ya fue calculado en la ecuación (4.21), y que se sabe que las derivadas son evaluadas en el punto de interés, esto es

$$F(S_t + \delta S_t, V_t, t) = F(S_t, V_t, t) + \delta S_t \frac{\partial F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t} + \frac{(\delta S_t)^2}{2!} \frac{\partial^2 F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t^2} + O(\delta S_t)^3.$$

Ahora, se expande el valor de la opción en el punto $S_t + 2\delta S_t$ en la serie de Taylor, es decir

$$\begin{aligned} &F(S_t, V_t, t) \\ &= F(S_t + 2\delta S_t, V_t, t) - 2\delta S_t \frac{\partial F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t}\bigg|_{\bar{x}_*} + \frac{(2\delta S_t)^2}{2!} \frac{\partial^2 F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t^2}\bigg|_{\bar{x}_*} + \cdots \\ &= F(S_t + 2\delta S_t, V_t, t) - 2\delta S_t \frac{\partial F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t}\bigg|_{\bar{x}_*} + 2(\delta S_t)^2 \frac{\partial^2 F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t^2}\bigg|_{\bar{x}_*} + O(\delta S_t)^3. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Al despejar $F(S_t + \delta S_t, V_t, t)$ de la ecuación (4.30) y considerar que $O(\delta S_t)^2$ es pequeño, tenemos

$$\begin{aligned} F(S_t + 2\delta S_t, V_t, t) = F(S_t, V_t, t) + 2\delta S_t \left.\frac{\partial F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t}\right|_{\bar{x}_*} \\ - 2(\delta S_t)^2 \left.\frac{\partial^2 F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t^2}\right|_{\bar{x}_*} + O(\delta S_t)^3. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Podemos expresar la ecuación anterior como

$$\begin{aligned} & F(S_t + 2\delta S_t, V_t, t) \\ & = F(S_t, V_t, t) + 2\delta S_t \frac{\partial F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t} - 2(\delta S_t)^2 \frac{\partial^2 F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t^2} + O(\delta S_t)^3. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Si consideramos una combinación de las ecuaciones (4.21) y (4.30), obtenemos

$$\begin{aligned} & F(S_t + 2\delta S_t, t) - 4F(S_t + \delta S_t, t) \\ & = F(S_t, V_t, t) + 2\delta S_t \frac{\partial F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t} - 2(\delta S_t)^2 \frac{\partial^2 F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t^2} + O(\delta S_t)^3 \\ & - 4\left(F(S_t, V_t, t) + \delta S_t \frac{\partial F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t} - \frac{(\delta S_t)^2}{2!} \frac{\partial^2 F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t^2} + O(\delta S_t)^3\right) \\ & - 3F(S_t, V_t, t) - 2\delta S_t \frac{\partial F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t} + O(\delta S_t)^3 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Al despejar $\partial F(S_t, V_t, t)/\partial S_t$ de la ecuación (4.31), obtenemos

$$\frac{\partial F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t} = \frac{4F(S_t + \delta S_t, V_t, t) - 3F(S_t, V_t, t) - F(S_t + 2\delta S_t, V_t, t)}{2\delta S_t} + O(\delta S_t)^3. \tag{4.34}$$

La ecuación (4.35) se puede expresar como

$$\frac{\partial F(S_t, V_t, t)}{\partial S_t} \approx \frac{4F_{i+1,j,k} - 3F_{i,j,k} - F_{i+2,j,k}}{2\delta S_t}. \tag{4.35}$$

Esta aproximación es del mismo orden de ajuste que la diferencia central, ecuación (4.26), pero cuyo ajuste es mejor que la diferencia forward simple. Asimismo, si lo que se desea es calcular la delta utilizando la diferencia backward, es decir en el punto $F(S_t - 2\delta S_t, V_t, t)$ entonces al igual que para el punto $F(S_t + 2\delta S_t, V_t, t)$, conduce a

$$\frac{\partial F(S_t,V_t,t)}{\partial S_t}=\frac{-4F(S_t-\delta S_t,V_t,t)+3F(S_t,V_t,t)+F(S_t-2\delta S_t,V_t,t)}{2\delta S_t}+O(\delta S_t)^3. \tag{4.36}$$

La ecuación (4.35) se puede expresar como

$$\frac{\partial F(S_t,V_t,t)}{\partial S_t}\approx\frac{-4F_{i-1}^k+3F_i^k+F_{i-2}^k}{2\delta S_t}. \tag{4.37}$$

Por lo que con mayor frecuencia se utiliza la diferencia central para aproximar la derivada respecto a S_t, y en algunas ocasiones se usa alguna de las aproximaciones forward o backward.

Para aproximar la segunda derivada parcial con respecto a S_t, desarrollamos nuevamente en seri de Taylor alrededor del punto $(S_t+\delta S_t,V_t,t)$ (véase la ec. 4.14), pero ahora despejamos la derivada en cuestión:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2}=\frac{2}{\delta S_t}\left(F(S_t+\delta S_t,V_t,t)-F(S_t,V_t,t)-\delta S_t\frac{\partial F}{\partial S_t}\right) \tag{4.38}$$

Podemos llevarla a una expresión en diferencias finitas al utilizar alguna de las mismas para la derivada parcial respecto a S_t. Por ejemplo para aproximación backward tenemos

$$\frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2}\approx\frac{F_{i+1,j,k}-2F_{i,j,k}+F_{i-1,j,k}}{(\delta S_t)^2}. \tag{4.39}$$

Para la segunda derivada parcial respecto a la volatilidad obtenemos

$$\frac{\partial^2 F}{\partial V_t^2}\approx\frac{F_{i,j+1,k}-2F_{i,j,k}+F_{i,j-1,k}}{(\delta V_t)^2}. \tag{4.40}$$

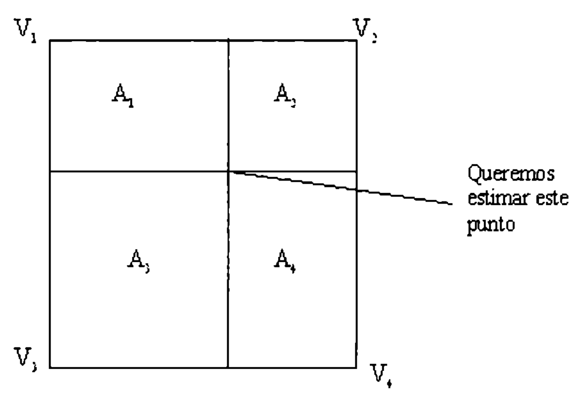
Si desarrollamos en serie de Taylor alrededor del punto $(S_t+\delta S_t,V_t+\delta V_t,t)$, podemos despejar la derivada parcial mixta $\partial^2 F/\partial S_t\partial V_t$ y obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial S_t\partial V_t}=&\frac{1}{(\delta S_t)(\delta V_t)}\left(F(S_t+\delta S_t,V_t+\delta V_t,t)-F(S_t,V_t,t)\right)\\&+\frac{1}{\delta V_t}\frac{\partial F}{\partial S_t}+\frac{1}{\delta S_t}\frac{\partial F}{\partial S_t}-\frac{\delta S_t}{2\delta V_t}\frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2}-\frac{\delta V_t}{2\delta S_t}\frac{\partial^2 F}{\partial V_t^2}\end{aligned} \tag{4.41}$$

Si sutituimos las diferencias finitas que hemos obtenido para los términos del lado dercho, obtenemos la aproximación para $\partial^2 F/\partial S_t \partial V_t$. Observe que esta aproximación es del orden $O(\delta S_t, \delta V_t)$ y depende de cómo se elijan las aproximaciones para las derivadas parciales del lado derecho.

4.2 Interpolación bilineal

Supongamos que tenemos un estimado del precio de la opción o de sus derivadas o de la volatilidad, sobre los puntos en la malla y necesitamos estimar el valor correspondiente en un punto entre los nodos. Es posible utilizar un método de interpolación de dos dimensiones llamado *interpolación bilineal.* Véase la Gráfica 6.



Gráfica 5

Queremos estimar el valor de la opción en el punto interior de la Grafica. Los valores de la opción en los cuatro nodos más cercanos son F_1, F_2, F_3 y F_4. Las áreas de los rectángulos que se forman por las cuatro esquinas y el punto interior están etiquetados como A_1, A_2, A_3 y A_4, notando que los subíndices de las áreas corresponden a los subíndices del valor de las opciones de las esquinas *opuestas.* La aproximación al valor de la opción en el punto interior es:

$$\frac{\sum_{i=1}^{4} A_i F_i}{\sum_{i=1}^{4} A_i}. \tag{4.42}$$

4.3 Condiciones Finales y Pagos, condiciones de frontera

El valor de la opción en la fecha de término es la función de pagos. Esto significa que no se tiene que resolver nada en el tiempo T, ya que en este tiempo se tiene:

$$F(S_T, V_T, T) = \text{Pago}(S_T),$$

o bien, si se utiliza la notación de diferencias finitas se tiene:

$$F_{i,j,0} = \text{Pago}(i\delta S_t) \tag{4.43}$$

Para el caso de la ec. (3.29) , la función del coeficiente del premio al riesgo cumple la condición $g(V_T, T) = 1$.
Cabe destacar, que el lado derecho es una función conocida, por ejemplo, si se está valuando el precio de una opción de compra se puede escribir como

$$F_{i,j,0} = \max\{i\delta S_t - E, 0\}. \tag{4.44}$$

Se iniciará el esquema de diferencias finitas precisamente con esta condición final, es decir de manera equivalente a como se trabaja hacia abajo en el árbol binomial.

Al valuar la fórmula en forma numérica, se debe de especificar el valor de la opción en los extremos de la región, es decir, se tiene que fijar el valor de la opción en $S = 0$ y en $S = i\delta S$. Estas especificaciones dependerán del tipo de opciones que se este valuando. A continuación, se describen algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Supongamos que se desea conocer el precio de una opción call. En $S = 0$ su valor es cero, por lo que se tiene

$$F_{i,j,k} = 0.$$

Ejemplo 2 Para valores muy grandes de S el valor del call es asintótico a $S - Ee^{-r(T-t)}$ (más algunos pequeños términos exponenciales). Entonces la condición de frontera superior se puede escribir como:

$$F_{i,j,k} = i\delta S - Ee^{-rk\delta t}.$$

Note que, esta cantidad será un poco diferente si se tiene el pago de dividendos.

Ejemplo 3. Para una opción put se tiene la condición de que en $S = 0$, el valor de F es $F = Ee^{-r(T-t)}$. Esto conduce a

$$F_{0,j,k} = Ee^{-rk\delta t}.$$

Ejemplo 4 La opción de venta put carece de valor para valores grandes de S y por lo tanto

$$F_{i,j,k} = 0.$$

Ejemplo 5. Una condición de frontera muy útil de utilizar en $S = 0$ para la mayoría de los contratos (tanto para calls y puts) es que se cancelan los términos de difusión y del drift. Esto significa que en $S = 0$ el pago está garantizado, resultando en la condición

$$\frac{\partial F}{\partial t}(0, V_t, t) - rF(0, V_t, t) = 0.$$

Numéricamente esto es

$$F_{0,j,k} = (1 - r\delta t)F_{i,j,k-1}.$$

Ejemplo 6. Cuando la opción tiene un pago que es casi lineal con el subyacente para valores grandes de S, entonces se puede utilizar la condición de frontera superior

$$\tfrac{\partial^2 F}{\partial S^2}(S, V_t, t) \longrightarrow 0 \qquad \text{cuando} \qquad S \longrightarrow \infty.$$

Casi todos los contratos comunes tienen esta propiedad. La representación en diferencias finitas es:

$$F_{i,j,k} = 2F_{i-1,j,k} - F_{i-2,j,k}.$$

Esto es particularmente útil porque es independiente del contrato que se esté valuando, lo que implica que el programa de diferencias finitas no tiene que ser muy listo.

A menudo existen fronteras naturales con valores no cero o con valor finito del subyacente, lo que implica que el dominio en el cual se esta resolviendo la ecuación no se extiende abajo del cero ni se va al infinito. Las opciones con barreras tienen estas características. Por ejemplo, supongamos que se esta valuando una opción call up-and-out. Esta opción carecerá de valor si el subyacente alcanza el valor S_u, es decir

$$F(S_u, V_t, t) = 0.$$

Para incorporar la condición de frontera lo primero que hacemos es elegir los tamaños de los periodos del activo de tal forma que la barrera $S = S_u$ sea un punto en la malla, es decir, tal que $\frac{S_u}{\delta S}$ sea un entero. Esto es para asegurar que la condición de frontera

$$F_{i,j,k} = 0,$$

es una buena representación de la condición correcta de frontera. Nóte que no se esta resolviendo sobre un rango en el precio del activo que se extienda a grandes valores de S. La frontera superior en $S = S_u$ puede estar incluso cercana al nivel presente del activo. En este sentido, las opciones con barreras son más fáciles de valuar, puesto que la región de la solución es más pequeña que la región sobre la cual se valuaría otro tipo de opción. A veces no es posible hacer el que la malla coincida con la barrera, como por ejemplo, en el caso de la barrera móvil. Si este es el caso, entonces se tiene que encontrar una aproximación para la condición de frontera. Sin embargo, hay cosas que no se tienen que hacer, y eso es establecer a F con el valor de cero con el nodo más cercano a la barrera. Dicha aproximación es muy mala y arruinará las soluciones numéricas. El truco que se utiliza para evitar esto es introducir *puntos ficticios.*

Ejemplo 7. Supongamos que se tiene la siguiente condición

$$F(S_u, V_t, t) = f(t).$$

Si se tiene una opción "out" entonces f será cero o el valor del descuento. Si se tiene una opción "in" entonces f es el valor de la opción en el cual la opción con barrera se convierte.

Esta condición puede aproximarse para asegurar que la línea recta que une los valores de la opción en los dos puntos de la malla a cada lado de la barrera tienen el valor de f en la barrera. Entonces una excelente versión discreta de esta condición de frontera es:

$$F_{i,j,k} = \frac{1}{\alpha}(f - (1-\alpha)F^k_{i-1}),$$

donde

$$\alpha = \frac{S_u - (i-1)\delta S}{\delta S},$$

cuyo ajuste es $O(\delta S^2)$, que es el mismo ajuste para la aproximación de la derivada de S.

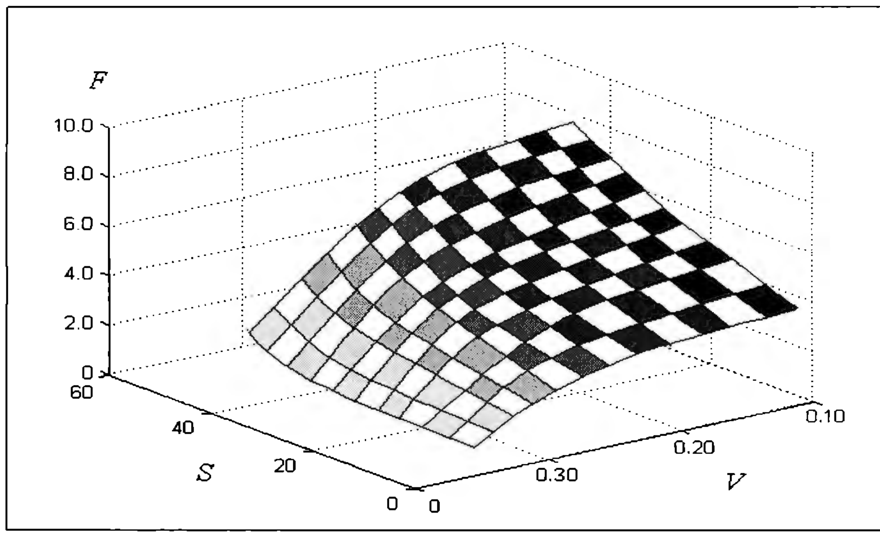
4.3 El método explícito de diferencias finitas

La ecuación del premio al riesgo (ec 3.29) es

$$0 = Ag^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + Bg + C\frac{\partial g}{\partial V} + D\frac{\partial^2 g}{\partial V^2},$$

en donde, los coeficientes son $A = \gamma^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} P_t^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\gamma}$, $B = \frac{-\delta}{\gamma^2} + \left(\mu_t - \frac{c_t P_t}{a_t}\right)\frac{1}{\gamma} + \frac{\pi}{\gamma} + \frac{V_t}{2}(\frac{\gamma-1}{\gamma}) + \frac{1}{2}\sigma_P{}^2(\frac{\gamma-1}{\gamma}) + \sqrt{V_t}\sigma_P q_t$, $C = \frac{m}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma}\sqrt{V_t}\xi_\sigma \rho_t + \frac{1}{\gamma}\xi_\sigma \sigma_P \theta_t$, $D = \frac{1}{2\gamma^2}\xi_\sigma$, el parámetro $\gamma \leq 1$,con $\gamma \neq 0$ y la condición de frontera es $g(V_T, P_T, T) = 1$.

Cuando consideramos las aproximaciones de las derivadas y las sustituimos en la ecuacón anterior, obtenemos



Malla para S_t, V_t y t

$$0 = A_i^k g_i^{k\,\frac{\gamma}{\gamma-1}} + B_i^k g_i^k + C_i^k \frac{g_i^k - g_i^{k+1}}{\delta t} + D_i^k \frac{g_{i+1}^k - 2g_i^k + g_{i-1}^k}{\delta V^2}. \tag{4.37}$$

En este caso es necesario tener mallas para cada uno de los términos que aparecen en los coeficientes, por ejemplo, $A_i^k = \gamma_i^{k\,\frac{\gamma_i^k}{1-\gamma_i^k}} P_i^{k\,\frac{\gamma_i^k+1}{\gamma_i^k-1}\gamma_i^k}$, etc.

Se han utilizado diferentes líneas para cada término de la ecuación original.

Es importante señalar algunos puntos, debido a que permitirán una mejor comprensión de la sección tratada, estos son

i) La aproximación de la derivada parcial del valor del coeficiente del premio al riesgo con respecto al tiempo, utiliza el valor de la volatilidad al tiempo k y $k+1$, mientras que los otros términos utilizan los valores en k.

ii) El término para la segunda derivada parcial respecto a la volatilidad, utiliza la diferencia central, en la práctica no se utilizan los otros.

iii) El término para la derivada parcial respecto a la volatilidad utiliza la diferencia central. Existen ocasiones cuando las derivadas de un lado son mejores.

iv) Los coeficientes A, B, C y D que dependen de la volatilidad y del tiempo, han sido valuados en $V_i = i\delta V$ y en $t = T - k\delta t$ con la notación usual.

v) El error en la ecuación es del orden de $O(\delta t, \delta S^2)$.

Si se reordena esta *ecuación diferencial* para poner todos los términos $k+1$ del lado izquierdo, se tiene que

$$g_i^{k+1} = \frac{\delta t}{C_i^k}\left(A_i^k g_i^{k\frac{\gamma}{\gamma-1}} + B_i^k g_i^k + C_i^k \frac{g_i^k}{\delta t} + D_i^k \frac{g_{i+1}^k - 2g_i^k + g_{i-1}^k}{\delta V^2}\right). \tag{4.38}$$

El error de esto es del orden de $O(\delta t, \delta S^2)$; este error de la aproximación de la ecuación diferencial es llamado *error local truncado.*

La ecuación anterior es válida para $i = 1, 2, ..., I-1$, es decir, para puntos interiores, puesto que g_{-1}^k y g_{I+1}^k no están definidos. Así, existen $I-1$ ecuaciones para las $I+1$ V_i^k desconocidas. Las dos ecuaciones restantes vienen de las condiciones de frontera para $i = 0$ e $i = I$. Los dos puntos finales son tratados de manera distinta. Es necesario calcular estos valores para tener la malla que se utiliza al aproximar la ecuación (3.31)

Si se conoce el valor de g_i^k para toda i, entonces de la ecuación (4.38) se tiene g_i^{k+1}. Dado que se conoce la función de pago g_i^0, se puede calcular fácilmente g_i^1, que es el valor de la opción un periodo de tiempo antes de la fecha de término. Utilizando estos valores, se pude trabajar regresándose paso a paso sobre la malla hasta el punto deseado. Debido a que la relación entre los valores de la opción en el periodo de tiempo $k+1$ es una simple función de los valores de la opción en el periodo de tiempo k, a este método se le llama el *método de la diferencia finita explícita* .

Es decir, se busca una solución oscilatoria con un ancho de onda de λ. Si encuentra que $|\alpha| > 1$ entonces no hay estabilidad. Notar que no importa cómo empieza la oscilación, ya que se puede interpretar esta solución especial como una parte del análisis de las series de Fourier. Sustituyendo la ecuación (4.41) en la (4.40) se obtiene

$$\alpha = \left(1 + c_i^k \delta t + 2a_i^k v_1 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) - 1\right)\right) + \sqrt{-1} b_i^k v_2 \text{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \qquad (4.47).$$

Es obvio que para tener $|\alpha| < 1$ (para estabilidad), se requiere que

$$c_i^k \leq 0,$$

$$2v_1 a_i^k - \delta t c_i^k \leq 1,$$

y

$$\frac{1}{2v_2|b_i^k|} \leq v_1 a_i^k.$$

Para tener este resultado, se ha supuesto que todos los coeficientes varían muy poco sobre el ancho de escala δS.

Como ya se mencionó, la ecuación (4.46) es válida para calcular valores de opciones para $1 \leq i \leq I - 1$ puesto que la ecuación requiere el conocer los valores de las opciones en $i - 1$ y en $i + 1$. Es aqu donde entran las condiciones de frontera. Normalmente, no se cuenta con los valores V_i^k en $i = 0$ e $i = 1$, o como se menciona lneas arriba, se podra fijar una relación entre el valor de la opción en un punto final y algunos valores interiores.

Esta idea se ilustra en el siguiente fragmento de código en *Visual Basic*, cuyas declaraciones de variables no aparecen ni la salida del mismo, con la idea de que se concentren en cómo se establecieron las condiciones finales y el loop del tiempo en las diferencias finitas.

El arreglo $V(i, k)$ guarda los valores de la opción. A menos que se desee tener todos los valores de la opción para todos los espacios de tiempo, este método sera muy ineficiente, lo cual se mejorara más adelante.

Primero se considera la condición final, es decir el pago

For $i = 0$ to $NoAssetSteps$

$S(i) = i * AssetStep$

$V(i, 0) = CallPayoff(S(i))$ 'Set up final condition

Next i

Ahora se trabaja el tiempo hacia atrás utilizando el siguiente loop para el tiempo:

' Time loop

For $k = 1$ to $NoTimeSteps$

$RealTime = Expiry - k * Timestep$

For $i = 1$ to $NoAssetSteps - 1$

$V(i, k+1) = A(S(i), RealTime) * V(i-1, k)-$

$+B(S(i), RealTime)-$

$*V(i, k) + C(S(i), RealTime)-$

$*V(i+1, k)$

Next i

BC at $S = 0$ $V(0, k+1) = 0.$

BC at "infinity"

$V(NoAssetSteps, k+1) = 2 * V(NoAssetSteps - 1.-$

$k+1) - V(NoAssetSteps - 2, k+1)$

Next k

Se observa que el algoritmo para las diferencias finitas es muy sencillo, las funciones $A(S(i), RealTime)$, $B(S(i), RealTime)$ y $C(S(i), RealTime)$ están definidas para cualesquiera y están en términos del precio del activo $S(i)$ y del tiempo $RealTime$. Dado que este programa está valuando una opción call la condición de frontera en $S = 0$ es simplemente $V(o, k+1) = 0$ pero la condición de frontera que se ha escrito en la frontera superior $i = NoAssetSteps$ es de que la gama es cero.

4.4 Convergencia del método explcito

Se puede escribir el valor de la opción en cualquier punto i al final del periodo de tiempo K como

$$V_i^k = V_i^0 + \sum_{k=0}^{k-1} (V_i^{k+1} - V_i^k).$$

Cada uno de los términos de esta suma tienen un error de $O(\delta t^2, \delta t \delta S^2)$. Esto significa que el error total del precio final de la opción es

$$O(k\delta t^2, k\delta t \delta S^2),$$

porque hay K términos en la suma. Si se valua la opción con un valor finito de T entonces $K = O(\delta t^{-1})$ de tal forma que el error total del precio final de la opción es $O(\delta t, \delta S^2)$.

Aunque el método explcito es fácil de implementar, no converge siempre. La convergencia de este método depende del tamao de los periodos de tiempo, del tamao de los periodos del activo y del tamao de los coeficientes a, b y c.

Si existe un error, debido por ejemplo al redondeo de las cifras, y este se magnifica, entonces el método carece de utilidad. La forma tradicional para analizar dicha estabilidad es observar la solución de la ecuación (71.48) de la forma siguiente

$$V_i^k = \alpha^k e^{\frac{2\pi i \sqrt{-1}}{\lambda}}. \qquad (4.47)$$

Es decir, se busca una solución oscilatoria con un ancho de onda de λ. Si encuentra que $|\alpha| > 1$ entonces no hay estabilidad. Notar que no importa cómo empieza la oscilación, ya que se puede interpretar esta solución especial como una parte del análisis de las series de Fourier. Sustituyendo la ecuación (4.42) en la (4.47) se obtiene

$$\alpha = \left(1 + c_i^k \delta t + 2a_i^k v_1 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) - 1\right)\right) + \sqrt{-1} b_i^k v_2 \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \qquad (4.48).$$

Es obvio que para tener $|\alpha| < 1$ (para estabilidad), se requiere que

$$c_i^k \leq 0,$$

$$2v_1 a_i^k - \delta t c_i^k \le 1,$$

y

$$\frac{1}{2v_2|b_i^k|} \le v_1 a_i^k.$$

Para tener este resultado, se ha supuesto que todos los coeficientes varan muy poco sobre el ancho de escala δS.

Para problemas financieros, siempre se tiene una c negativa, usualmente denotada $-r$ donde r es la tasa de interés libre de riesgo. Las otras dos restricciones son las que realmente limitan la aplicación del método de diferencias explcitas.

Usualmente se elege v_1 como $O(1)$ en cuyo caso la segunda restricción es aproximadamente

$$v_1 \le \frac{1}{2a},$$

(ignorando los subndices y los suprandices en a). Esta es una limitante muy seria en el tamao del periodo del tiempo:

$$\delta t \le \frac{\delta S^2}{2a}.$$

Si se quiere mejorar la exactitud reajustando el tamao del paso del activo, entonces se tiene que reducir el periodo de tiempo en, digamos, un factor de cuatro. El tiempo computacional entonces se aumentara por un factor de *ocho*. La mejora que se obtendra en el ajuste al realiza

5. CONCLUSIONES

En este trabajo utilizamos agentes maximizadores de utilidad y volatilidad estocástica y determinamos las ecuaciones que sigue el precio de un producto derivado para diversos tipos de funciones de utilidad.

En la primera parte encontramos, que independientemente del tipo de función de utilidad elegida, la ecuación que sigue el precio del producto derivado es exactamente la misma del modelo de Black y Scholes. Esto nos permite señalar los resultados de los otros capítulos como extensiones de ese modelo.

En el segundo capítulo determinamos ecuaciones diferenciales para valuar un producto derivado, cuando consideramos volatilidad estocástica y algunos casos de funciones de utilidad. Se puede resolver el problema del consumidor-inversionista, pero se requiere que resolver la ecaución diferencial parcial que sigue el coeficiente del premio al riesgo. En las ecuaciones obtenidas no aparece explícitamente el parámetro de tendencia μ_t del activo, pero sí se hacen presentes las preferencias de los agentes.

La contribución más importante de este trabajo, se encuentra en el tercer capítulo, en donde se encuentra la ecuación diferencial parcial que sigue el precio del producto derivado, cuando la volatilidad es estocástica y el inversionista tiene activos nominales. Nuevamente, para resolver el problema del consumidor-inversionista, es necesario resolver primero la ecuación diferencial parcial del premio al riesgo. Si se considera el problema con horizonte de inversión infinita, esta ecuación diferencial (ec. 3.36) se convierte en una ecuación diferencial ordinaria pero en general, en los coeficientes interviene la variable independiente, la volatilidad, porque los términos m y ξ_σ son funciones que dependen de esta variable.

Por ejemplo, para el modelo de difusión de volatilidad tipo GARCH, la ecuación (3.14) es:

$$\mathrm{d}V_t = (\omega - kV_t)\mathrm{d}t + \xi V_t \mathrm{d}Z_t,$$

con ω, k y ξ constantes. De esto se sigue que la ecuación (3.36) queda como:

$$A - \ln g + \left(B - \tfrac{1}{2}V\right) g + \left(C + DV + EV^{3/2}\right) \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}V} + EV^2 \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}V^2},$$

con $A = \ln a_t - \ln P_t - 1$, $B = -\delta(\ln a_t + \ln P_t) + \mu_t + \pi - \frac{1}{2}{\sigma_P}^2$ $C = \omega \ln(aP)$, $D = \sigma_P \xi \theta - k \ln(aP)$, $E = \sigma \xi \rho$ y $F = \frac{1}{2}\xi^2 ln(aP)$. Este modelo de difusión GARCH tiene la ventaja de que los parámetro se pueden determinar con cierta facilidad mediante series de tiempo.

Otro modelo utilizado para la difusión de la volatilidad, es el modelo raíz cuadrada, es decir,

$$\mathrm{d}V_t = (\omega - kV_t)\mathrm{d}t + \xi\sqrt{V_t}\mathrm{d}Z_t,$$

con ω, k y ξ constantes. En consecuencia, la ecuación (3.36) es:

$$A - \ln g + \left(B - \tfrac{1}{2}V\right) g + \left(C + DV + E\sqrt{V}\right) \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}V} + EV \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}V^2},$$

con $A = \ln a_t - \ln P_t - 1$, $B = -\delta(\ln a_t + \ln P_t) + \mu_t + \pi - \frac{1}{2}{\sigma_P}^2$ $C = \omega \ln(aP)$, $D = \sigma \xi \rho - k \ln(aP)$, $E = \sigma_P \xi \theta$ y $F = \frac{1}{2}\xi^2 \ln(aP)$.

Existen dos casos particulares inmediatos del presente trabajo. Uno es el caso de horizonte de inversión infinito, del cual se habló anteriormente, que consiste en considerar el tiempo de inversión infinito y por tanto la función de herencia es cero:

$$f(A_t, V_t, t) = \max_{\{a_t, c_t\}} \mathrm{E}\left\{ \int_t^\infty u(c_s, s)\mathrm{d}s \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\}.$$

El otro caso consiste en considerar inversión pura, esto es, cuando el consumo ocurre justo al final del tiempo de inversión, por lo que

$$f(A_t, V_t, t) = \max_{\{a_t, c_t\}} \mathrm{E}\left\{ b(A_T, T) \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\}.$$

Las ecuaciones obtenidas no son fáciles de resolver y requieren más trabajo, por lo que se incluyen métodos numéricos para aproximar la solución en el último capítulo. Ahí, presentamos el método de diferencias finitas para aproximar la solución de la ecuación diferencial parcial del premio al riesgo y de la ecuación diferencial parcial para valuar el derivado, obtenidas en el capítulo 3.

Finalmente, debemos observar que las ecuaciones diferenciales parciales que sigue el precio del producto derivado, nos permiten establecer el proceso ajustado que sigue el precio del activo como martingalas, esto para cada caso de función de utilidad.

APÉNDICE. LA ECUACIÓN DE JACOBI-HAMILTON-BELLMAN

En este apéndice obtenemos, mediante programación dinámica, la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman que utilizamos en los primeros dos capítulos. Primero desarrollamos el caso de volatilidad constante para después extender al caso de volatilidad estocástica.

Volatilidad Constante.

Iniciamos con el caso de volatilidad constante. Específicamente buscamos resolver

$$\max_{\{a_t,c_t\}} \mathrm{E}\left\{ \int_t^T u(C_x,x)\mathrm{d}x + b(A_T,T) \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\}. \tag{A.1}$$

Sujeto a la condición:

$$\mathrm{d}a_t = a_t\mu_A\mathrm{d}t + a_t\sigma_A\mathrm{d}W_t. \tag{A.2}$$

Podemos pensar los componentes del problema como sigue. El conjunto $\mathcal{F}_t$ representa la información conocida hasta el instante t, la función $u(c_t,t)$ representa la tasa de utilidad del consumo en el tiempo t, y $b(a_T,T)$ es la función de legado o herencia, es decir, la cantidad de riqueza que el agente está dispuesto a dejar al final del tiempo de inversión. a_t es la riqueza del agente en el instante t y sigue un movimiento geométrico browniano dado por la ecuación (A.2).

Definimos a la función de utilidad derivada de la riqueza, $f(a_t,t)$, como:

$$f(a_t,t) = \max_{\{a_t,c_t\}} \mathrm{E}\left\{ \int_t^T u(c_s,s)\mathrm{d}s + b(a_T,T) \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\}.$$

Rexpresamos lo anterior como sigue,

$$f(a_t,t) = \max_{\{a_t,c_t\}} \mathrm{E}\left\{ \int_t^T u(c_s,s)\mathrm{d}s + b(A_T,T) \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\}$$

$$= \max_{\{a_t,c_t\}} \mathrm{E}\left[\int_t^{t+\mathrm{d}t} u(c_s,s)\mathrm{d}s + \int_{t+\mathrm{d}t}^T u(c_s,s)\mathrm{d}s + b(A_T,T) \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\}$$

$$= \max_{\{a_t, c_t\}} \mathrm{E}\left\{ u(c_t, t)\mathrm{d}t + f(a_t + \mathrm{d}t, t + \mathrm{d}t) \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\}.$$

Por lo tanto,

$$f(a_t, t) = \max_{\{a_t, c_t\}} \mathrm{E}\left\{ u(c_t, t)\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) + f(a_t, t) + \mathrm{d}f(a_t, t) \middle| \mathcal{F}_t \right\}.$$

Cancelamos $f(a_t, t)$ y desarrollamos $\mathrm{d}f(a_t, V_t, t)$ hascta términos de segundo orden

$$0 = \max_{\{a_t, c_t\}} \mathrm{E}\left\{ u(c_t, t)\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial a_t}\mathrm{d}a_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}(\mathrm{d}a_t)^2 \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\}.$$

Si simplificamos y tomamos esperanzas obtenemos:

$$0 = \max_{\{a_t, c_t\}} \left\{ u(c_t, t)\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial a_t}\mu_A a_t \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}{\sigma_A}^2 {a_t}^2 \mathrm{d}t \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\}.$$

Dividimos ahora por $\mathrm{d}t$ y tomamos el límite cuando $\mathrm{d}t \to 0$:

$$0 = \max_{\{a_t, c_t\}} \left\{ u(c_t, t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial a_t}\mu_A a_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}{\sigma_A}^2 {a_t}^2 \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\}.$$

En particular, cuando a_t representa la riqueza, tenemos que $\mu_A = r + (\mu - r)x_t + (\mu_F - r)y_t - c_t/a_t$ y que $\sigma_A = a_t\big[x_t\sigma_t - y_t\sigma_F\big]$, por lo que de la ecuación anterior llegamos a la ecuación que utilizamos en el capítulo I:

$$\begin{aligned} 0 = \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} &\left\{ u(c_t, t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial a_t} a_t \Big[r + (\mu - r)x_t + (\mu_F - r)y_t - \frac{c_t}{a_t}\Big] \right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2} {a_t}^2 \big[x_t\sigma_t - y_t\sigma_F\big]^2 \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\} \end{aligned} \qquad (*)$$

Volatilidad Estocástica.

Ahora desarrollaremos la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman para el caso de volatilidad estocástica. Específicamente buscamos resolver el problema:

$$\max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \mathrm{E}\left\{ \int_t^T u(c_s, s)\mathrm{d}s + b(A_T, T) \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\}, \tag{A.4}$$

sujeto a las condiciones:

$$\mathrm{d}a_t = a_t\left[r + (\mu - r)x_t + (\mu_F - r)y_t - \frac{c_t}{a_t}\right]\mathrm{d}t \;+\; x_t\sigma_t a_t \mathrm{d}W_t + y_t\sigma_F a_t \mathrm{d}W_t + y_t\xi_F a_t \mathrm{d}Z_t, \tag{A.5}$$

y

$$\mathrm{d}V_t = m(V_t)\mathrm{d}t + \xi_\sigma(V_t)\mathrm{d}Z_t, \tag{A.6}$$

donde suponemos que $\mathrm{E}(\mathrm{d}W_t, \mathrm{d}Z_t) = \rho_t \mathrm{d}t$.

En este caso, la función de utilidad derivada de la riqueza, depende tanto de la riqueza, a_t, como de la volatilidad estocástica, V_t,

$$f(a_t, V_t, t) = \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \mathrm{E}\left\{ \int_t^T u(c_s, s)\mathrm{d}s + b(A_T, T) \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\}.$$

Observe que estamos suponiendo que las únicas variables de estado son la riqueza y la volatilidad en cada instante t.

La ecuación diferencial de Hamilton-Jacobi-Bellman se obtiene como sigue.

$$
\begin{aligned}
&f(a_t, V_t, t) = \\
&= \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \mathrm{E}\left\{ \int_t^{t+\mathrm{d}t} u(c_s, s)\mathrm{d}s + \int_{t+\mathrm{d}t}^{T} u(c_s, s)\mathrm{d}s + b(A_T, T) \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\} \\
&= \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \mathrm{E}\left\{ \int_t^{t+\mathrm{d}t} u(c_s, s)\mathrm{d}s + f(a_t + \mathrm{d}a_t, V_t + \mathrm{d}V_t, t + \mathrm{d}t) \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\} \\
&= \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \mathrm{E}\left\{ \int_t^{t+\mathrm{d}t} u(c_s, s)\mathrm{d}s + o(\mathrm{d}t) + f(a_t, V_t, t) + \mathrm{d}f(a_t, V_t, t) \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\}.
\end{aligned}
$$

Observe que podemos cancelar $f(a_t, V_t, t)$. Desarrollamos $\mathrm{d}f(a_t, V_t, t)$ hasta términos de segundo orden,

$$
\begin{aligned}
0 = \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \mathrm{E}\Bigg\{ & u(c_t, t)\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial a_t}\mathrm{d}a_t + \frac{\partial f}{\partial V_t}\mathrm{d}V_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}(\mathrm{d}a_t)^2 \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {V_t}^2}(\mathrm{d}V_t)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t}(\mathrm{d}a_t)(\mathrm{d}V_t) \;\Bigg|\; \mathcal{F}_t \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Sustituimos las ecuaciones (A.5) y (A.6):

$$
\begin{aligned}
0 = \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \mathrm{E}\Bigg\{ & u(c_t, t)\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial a_t}a_t\Big[r + (\mu - r)x_t + (\mu_F - r)y_t \\
&- \frac{c_t}{a_t}\Big]\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial a_t}\Big[x_t a_t \sigma_t \mathrm{d}W_t + y_t a_t(\sigma_F \mathrm{d}W_t + \xi_F \mathrm{d}Z_t)\Big] + \frac{\partial f}{\partial V_t}m\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial V_t}\xi_\sigma \mathrm{d}Z_t \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}{a_t}^2\Big({x_t}^2{\sigma_t}^2 + {y_t}^2{\sigma_F}^2 + {y_t}^2{\xi_F}^2 + 2x_t y_t \sigma_t \sigma_F + 2x_t y_t \sigma_t \xi_F \rho_t \\
&+ 2{y_t}^2\sigma_F \xi_F \rho_t\Big)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {V_t}^2}{\xi_\sigma}^2\mathrm{d}t \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial V_t}a_t\big(x_t \sigma_t \xi_\sigma \rho_t + y_t \sigma_F \xi_\sigma \rho_t + y_t \xi_\sigma \xi_F\big)\mathrm{d}t \;\Bigg|\; \mathcal{F}_t \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Simplificamos al tomar esperanzas,

$$0=\max_{\{x_t,y_t,c_t\}}\Bigg\{u(c_t,t)\mathrm{d}t+o(\mathrm{d}t)+\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial f}{\partial a_t}a_t\Bigg[r+(\mu-r)x_t+(\mu_F-r)y_t$$

$$-\frac{c_t}{a_t}\Bigg]\mathrm{d}t+\frac{\partial f}{\partial V_t}m\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}{a_t}^2\Bigg({x_t}^2{\sigma_t}^2+{y_t}^2{\sigma_F}^2+{y_t}^2{\xi_F}^2$$

$$+2x_ty_t\sigma_t\sigma_F+2x_ty_t\sigma_t\xi_F\rho_t+2{y_t}^2\sigma_F\xi_F\rho_t\Bigg)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {V_t}^2}{\xi_\sigma}^2\mathrm{d}t$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial a_t\partial V_t}a_t\big(x_t\sigma_t\xi_\sigma\rho_t+y_t\sigma_F\xi_\sigma\rho_t+y_t\xi_\sigma\xi_F\big)\mathrm{d}t\Bigg\}.$$

Finalmente, al dividir pot dt y tomar el límite cuando d$t\to 0$, obtenemos la ecuación diferencial parcial que utilizamos en el capítulo II,

$$0=\max_{\{x_t,y_t,c_t\}}\Bigg\{u(c_t,t)+\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial a_t}a_t\Bigg[r+(\mu-r)x_t+(\sigma_F-r)y_t-\frac{c_t}{a_t}\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {a_t}^2}{a_t}^2\Bigg({x_t}^2{\sigma_t}^2+{y_t}^2{\sigma_F}^2+{y_t}^2{\xi_F}^2+2x_ty_t\sigma_t\sigma_F$$

$$+2x_ty_t\sigma_t\xi_F\rho_t+2{y_t}^2\sigma_F\xi_F\rho_t\Bigg)+\frac{\partial f}{\partial V_t}m+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {V_t}^2}{\xi_\sigma}^2 \qquad (**)$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial a_t\partial V_t}a_t\big(x_t\sigma_t\xi_\sigma\rho_t+y_t\sigma_F\xi_\sigma\rho_t+\xi_\sigma y_t\xi_F\big)\Bigg\}.$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Clifford A. Ball and Antonio Roma (1994), "Stochastic Volatility Option Pricing" Journal of Financial and Quantitative Analysis. Vol 29, No 4.

[2] Avi Bick (1997), "On the Consistency of the Black-Scholes Model with a General Equilibrium Framework". Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 22, No.3.

[3] John C. Cox (1985), Jonathan E. Ingersoll, Jr., Stephen A. Ross. "An intertemporal General Equilibrium Model of Assets Prices". Econometrica, Vol. 53, No. 2.

[4] Steven L. Heston, Saikat Nandi (2000), "A Closed-Form GARCH Option Valuation Model". The Review of Financial Studies. Vol. 13 No. 3.

[5] Steven L. Heston (1993), "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options". The Review of Financial Studies, Vol. 6, No 2.

[6] Steven L. Heston (1993), "Invisible Parameters in Option Prices". The Journal of Finance, Vol. XLVIII 1993.

[7] John Hull, Alan White (1987), "The pricing of Options and Assets with Stochastic Volatilities". The Journal of Finance, Vol XLII, No 2.

[8] Kris Jacobs (1999), "Incomplete Markets and Security Prices: Do Asset-Pricing Puzzles Result from Aggregation Problems?". The Journal of Finance, Vol LIV, No 1.

[9] Christopher S. Jones (2003), "The dynamics of stochastic volatility: evidence from underlying and options markets". Journal of Econometrics 116 , 181-224.

[10] Alan L. Lewis (2000), "Option Valuation Under Stochastic Volatility with Mathematica Code" Finance Press.

[11] Huyn Pham, Nizar Touzi (1996), "Equilibrium State Prices in a Stochastic Volatility Model". Mathematical Finance, Vol 6, No 2 , 215-236.

[12] John W. Pratt (1964), "Risk Aversion in the Small and in the Large". Econometrica, Vol. 32, No. 1-2.

[13] James B. Wiggins (1987), "Option Values Under Stochastic Volatility. Theory and Empirical Estimates". Journal of Financial Economics 19, 351-372.

[14] Francisco Venegas Martínez (2005), "Bayesian Inference, Prior Information on Volatility, and Option Pricing: a Maximum Entropy Approach". International Journal of Theoretical and Applied Finance Vol. 8 No. 11 pp 1-12.

[15] Paul Willmott (2000), "On Quantitative Finance". John Wiley & Sons, LTD.