

Prototipo didáctico de mesa vibratoria para el análisis y caracterización de señales de aceleración

Donato Reyes Ramírez
Tecnológico de Monterrey, Campus León
donato.reyes.r@itesm.mx

Héctor Arellano Sotelo
Tecnológico de Monterrey, Campus León
hector.arellano@itesm.mx

Resumen

En el presente trabajo se presenta el diseño de un prototipo de mesa vibratoria. El objetivo del prototipo es mostrar los conceptos de desbalanceo, series de Fourier y transformada rápida de Fourier (del inglés *Fast Fourier Transform*, FFT), el prototipo es formado por cuatro motores con desbalanceo, los cuales generan señales armónicas simples de aceleración de diferente amplitud y frecuencia, al montar los motores sobre la misma plataforma las señales de aceleración se suman dando como resultado una señal armónica periódica compuesta, a esta señal se le aplica la FFT para obtener las frecuencias y amplitudes de las señales armónicas simples que la componen. Para la adquisición de la señal de aceleración se utilizaron acelerómetros, acondicionadores de señal y una tarjeta de adquisición de datos, para el análisis de señal se utilizó el programa LabVIEW. Al final del trabajo se muestra la aplicación de la FFT en la prueba de impacto donde es analizada la respuesta de aceleración de una viga al ser aplicado un impacto y son determinadas las frecuencias naturales.

Palabras clave: vibración, FFT (*Fast Fourier Transform*), series Fourier

1. Introducción

Los modelos matemáticos de sistemas dinámicos son comúnmente estudiados en varias de las materias que se imparten en las carreras de Ingeniería. Existen modelos como el del sistema masa resorte y el de sistemas desbalanceados, analizado en materias de tronco común como física y ecuaciones diferenciales, en materias de especialidad como dinámica, CAD avanzado y metrología, tópicos de vibraciones mecánicas y simulación.

Una de las dificultades que se presentan en la impartición de estos cursos es la visualización del fenómeno que se modela matemáticamente, de aquí la necesidad de diseñar y manufacturar prototipos que reproduzcan los fenómenos antes mencionados.

En la industria, el análisis de señales de vibración y en específico la FFT es un herramienta muy útil, ejemplo de esto es el análisis modal y en análisis de señales para el mantenimiento preventivo de sistemas mecánicos, de aquí la importancia de mostrar los conceptos matemáticos que se relacionan con estas herramientas y desarrollar un sistema que los muestre físicamente y de forma clara.

En el presente trabajo se muestra el diseño de un sistema mecatrónico para la generación y suma de señales de aceleración de tipo armónico, además permite visualizar y analizar la señal de aceleración.

2.1 Marco teórico

A continuación se muestran algunos conceptos relacionados a las series de Fourier y el análisis de vibración.

El concepto de las series de Fourier indica que una señal periódica puede descomponerse en la suma infinita de senos y cosenos, la expresión para las series de Fourier es:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2n\pi}{\tau} t + b_n \sin \frac{2n\pi}{\tau} t \right] \quad (1)$$

En el análisis de vibraciones mecánicas el concepto más básico es el del sistema masa-resorte de un grado de libertad, mostrado en la *Figura 1*.

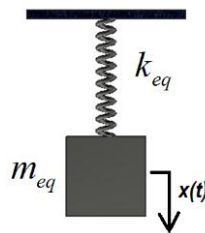


Figura 1. Sistema masa-resorte de un grado de libertad.

Este sistema es modelado mediante una ecuación diferencial homogénea de segundo orden, dada por:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2)$$

La solución de la ecuación anterior es:

$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \phi) \quad (3)$$

Donde $x(t)$ es el desplazamiento del resorte, A la amplitud de vibración, ω_n la frecuencia natural del sistema, t el tiempo y ϕ el ángulo de desfase.

Un modelo más completo es el sistema masa-resorte-amortiguador sujeto a vibración forzada, mostrado

en la *Figura 2*.

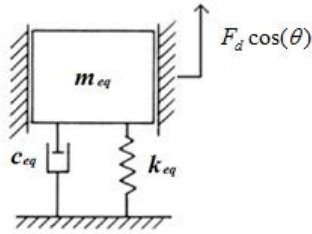


Figura 2. Sistema masa-resorte-amortiguador.

Este sistema es modelado mediante una ecuación diferencial no homogénea de segundo orden, dada por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (4)$$

La solución general $x(t)$ para la ecuación 4 consta de dos soluciones, la complementaria $X_c(t)$ y la particular $X_p(t)$,

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) \quad (5)$$

La solución complementaria $X_c(t)$ es la solución de la parte homogénea de (4) y es dada por:

$$x_c(t) = X_0 e^{-\zeta \omega_n t} \text{sen}(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \phi_0) \quad (6)$$

Donde X_0 es la amplitud de vibración, ζ la razón de amortiguamiento, ω_n la frecuencia natural del sistema, t el tiempo y ϕ_0 el ángulo de desfase.

La solución particular $X_p(t)$ depende del término que se adiciona a la homogénea que en este caso es la fuerza armónica y es de la forma:

$$x_p(t) = X \cos(\omega t + \phi) \quad (7)$$

Donde X es la amplitud de vibración, ω la frecuencia angular de la fuerza de excitación, t el tiempo y ϕ el ángulo de desfase.

Es importante remarcar que la forma de X_p es dependiente del término adicionado a la homogénea, en caso de existir dos fuerzas armónicas de frecuencias diferentes entre sí y diferentes a la frecuencia natural la solución particular es:

$$x_p(t) = X_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + X_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (8)$$

En el caso de existir n fuerzas armónicas aplicadas, la ecuación particular es:

$$x_p(t) = X_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + X_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) + \dots + X_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \quad (9)$$

Para el caso de un sistema sujeto a n diferentes fuerzas de excitación armónicas la solución general del sistema es:

$$x(t) = X_0 e^{-\zeta \omega_n t} \text{sen} \left(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \phi_0 \right) + X_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + X_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) + \dots + X_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \quad (10)$$

De donde se observa que es una ecuación formada por una serie finita de funciones armónicas, algo análogo a las series de Fourier.

Es aquí donde entra un tercer concepto, el de la FFT, herramienta que permite pasar una señal del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia. Si se tiene una señal periódica en el dominio del tiempo, al pasarla al dominio de la frecuencia, se obtienen las frecuencias y amplitudes de las señales armónicas que componen la señal.

En la *Figura 3* se muestra la gráfica de seis señales sinusoidales en función del tiempo, de diferente frecuencia (ω) y amplitud. Adicional se muestra la señal compuesta, correspondiente a la suma de estas.

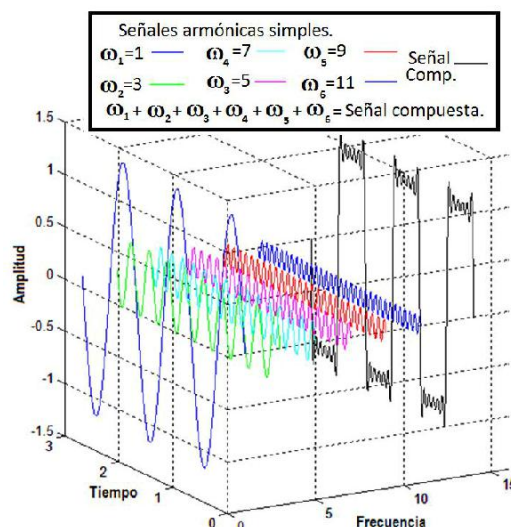


Figura 3. Gráfica 3D de señales armónicas simples a diferentes frecuencias.

Cuando la señal compuesta está en el dominio del tiempo únicamente se verían los ejes de tiempo y amplitud, gráfica mostrada en la *Figura 4*.

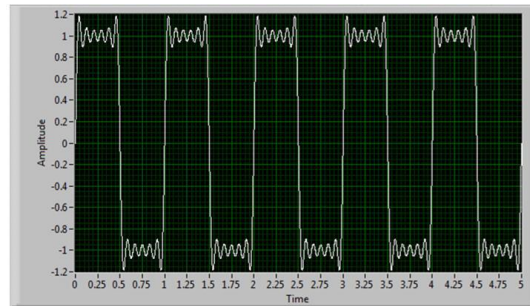


Figura 4. Señal compuesta en función del tiempo.

Cuando cambiamos al dominio de la frecuencia veríamos los ejes de frecuencia y amplitud, gráfica mostrada en la *Figura 5*.

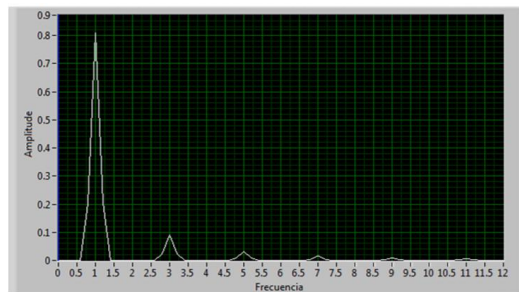


Figura 5. Señal compuesta en función de la frecuencia.

En la *Figura 6* se muestra la señal de vibración de un sistema mecánico obtenida con acelerómetros, cuyo comportamiento es similar al de la suma de señales armónicas simples, a esta señal se le aplica la FFT para obtener las frecuencias de los armónicos que la forman, *Figura 7*.

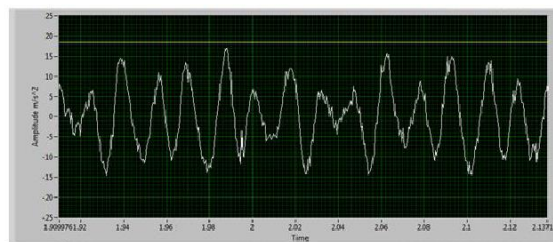


Figura 6. Señal de vibración en función del tiempo.

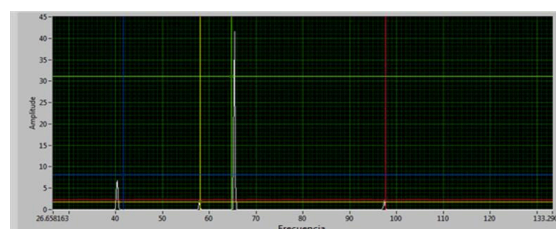


Figura 7. Señal de vibración en función de la frecuencia.

Partiendo de un sistema mecánico rotatorio compuesto de una flecha, un disco y una masa desbalanceada, comúnmente llamado rotor y mostrado en la *Figura 8*, se revisará el concepto de desbalanceo.

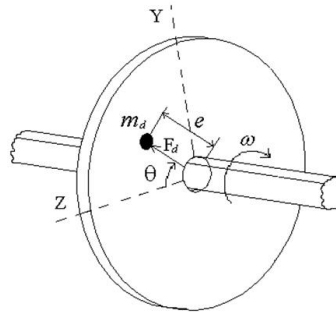


Figura 8. Rotor con desbalanceo.

Si el rotor gira, la masa de desbalanceo generará una fuerza por la acción de la aceleración centrífuga, a esta fuerza se le llama fuerza de desbalanceo F_d , cuya magnitud depende de la masa desbalanceada m_d , la excentricidad e , la velocidad angular del rotor ω y está dada por:

$$F_d = m_d \omega^2 e \quad (11)$$

De la *Figura 8* se observa que la dirección de F_d va del centro de la flecha a la masa de desbalanceo, por lo que la fuerza va a estar en dirección normal al eje del rotor y girando en la misma dirección, de tal forma que F_d se descompone en F_{dy} y F_{dz} componentes paralelas a los ejes y y z respectivamente, quedando de la forma:

$$\vec{F}_d = F_d \hat{j} \sin \theta + F_d \hat{k} \cos \theta \quad (12)$$

$$F_d = F_d \sin \theta \hat{j} + F_d \cos \theta \hat{k}$$

Donde la posición angular q depende del tiempo t y de la velocidad angular w . Sustituyendo q por w y t obtenemos dos fuerzas armónicas en función de frecuencia y tiempo.

$$\begin{aligned} F_{dz} &= F_d \cos \theta = F_d \cos(\omega t) \\ F_{dy} &= F_d \sin \theta = F_d \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (13)$$

De estas ecuaciones se muestra que una fuerza de desbalanceo se modela en un plano como dos fuerzas armónicas perpendiculares entre sí.

2.2 Planteamiento del problema

Para el presente proyecto se diseñó y fabricó un prototipo de mesa vibratoria para materializar los conceptos matemáticos de: series de Fourier, modelos dinámicos de sistemas mecánicos y desbalanceo. Esto con la intención de facilitar a los estudiantes la interpretación física y matemática de los conceptos antes mencionados.

El prototipo didáctico de mesa de vibración consta de un sistema con desbalances que giran a diferentes velocidades, generando señales a diferente magnitud y frecuencia, un sistema que aísla estas señales y permite su correcta medición. En la *Figura 9* se muestra el diseño del prototipo.

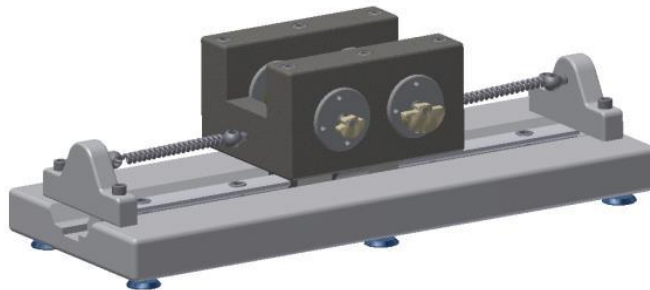


Figura 9. Diseño de mesa vibratoria en CAD.

2.3 Diseño del prototipo

El prototipo didáctico de mesa vibratoria tiene como objetivo: generar, adquirir y analizar señales de aceleración de tipo periódica, para aplicar y visualizar los conceptos de series de Fourier y FFT. A continuación se da una descripción de cómo se logran cubrir estos objetivos.

El prototipo didáctico de mesa de vibración consiste en cuatro motores con desbalance y control independiente, lo que permite que operen a diferentes velocidades, de esta forma cada uno genera una señal de diferente magnitud y frecuencia, que al unirse generan una señal de aceleración armónica compuesta.

Los motores están montados en una placa unida a una corredera con guías de precisión, que disminuyen significativamente la fricción de la placa, aislando la vibración inducida por los desbalances, la base es sujeta lateralmente con resortes pretensados, que le permiten mantener la posición, los resortes son de baja rigidez de tal forma que el sistema completo tiene una frecuencia natural muy baja, lo que permite que no interfiera con las frecuencias de los desbalances. En la *Figura 10* se muestra la fotografía del sistema.

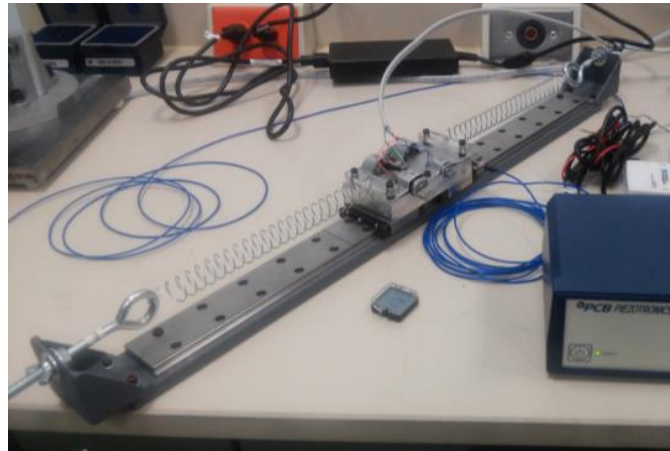


Figura 10. Diseño de mesa vibratoria en CAD.

Como se mencionó los motores con desbalance tienen un sistema de control que varía el voltaje con que son alimentados, este sistema está integrado por dos fuentes de poder GW INSTEK, las fuentes son mostradas en la *Figura 11*.

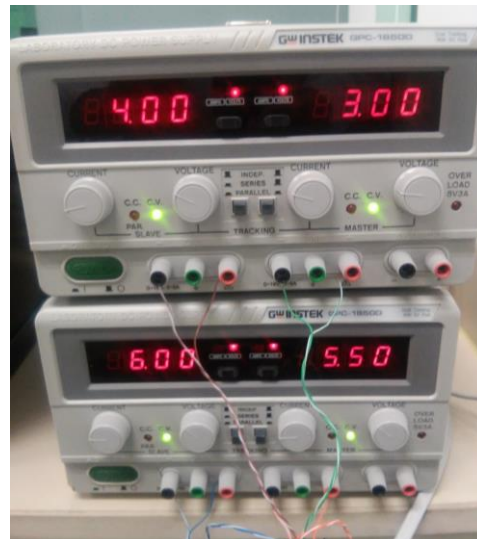


Figura 11. Fuentes de poder GW INSTEK.

El último sistema a mostrar es el de adquisición de datos, este consta de una interface gráfica diseñada en LabVIEW que adquieren y analizan la señal de aceleración medida por el hardware. El hardware seleccionado para la instrumentación del sistema consta de una tarjeta de adquisición de datos DAQ USB-6009 de *National Instrument*, acelerómetros de propósito general de baja y alta sensibilidad marca: PCB modelo: 352C03, acondicionador de señal para acelerómetros PCB modelo: 482C05 y cables

blindados PCB modelo: 003C10. El sistema completo es mostrado en la *Figura 12*.



Figura 12. Sistema de adquisición de datos.

2.4 Resultados

Como se mencionó en secciones anteriores el prototipo cuenta con cuatro motores para generar señales de aceleración armónica de diferente magnitud y frecuencia, en la *Figura 13* se muestra la fotografía de prototipo.

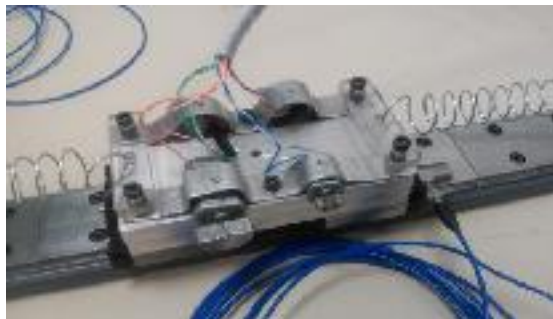


Figura 13. Mesa de prototipo con motores y desbalance.

La primera prueba que se realizó fue identificar que las señales de aceleración generadas fueran del tipo armónico simple, así como determinar su magnitud y frecuencia. En la *Figura 14* se muestra la gráfica obtenida de la prueba para el motor uno, donde se observa que la señal es del tipo armónica.

Una vez revisadas las señales se procede a tomar el valor de amplitud y frecuencia para cada uno de los motores a un voltaje específico, cuidando que los motores generen señales de diferentes magnitudes. Para tomar los valores de frecuencia y amplitud, se realizó un programa en LabVIEW que adquiere la señal del acelerómetro y la analiza aplicando la FFT, la carátula del programa es mostrado en la *Figura 14*.

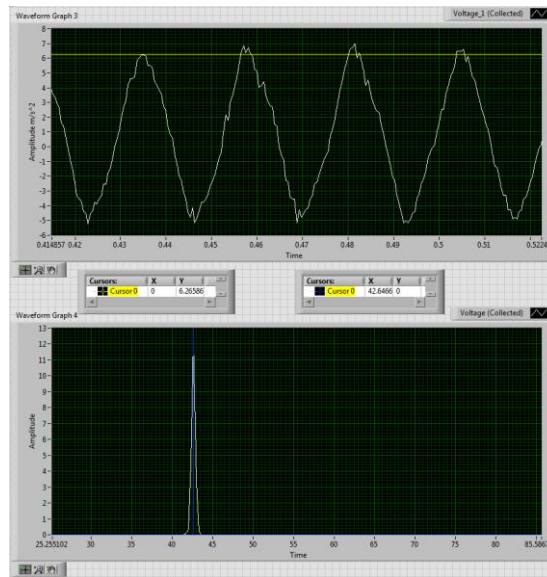


Figura 14. Gráfica de resultados obtenidos del primer motor.

En la *Tabla 1* se muestran los resultados para los cuatro motores, es importante mencionar que se realizaron cinco pruebas con cada motor, para revisar que la velocidad de giro repitiera con el voltaje asignado, encontrando que la variación en la velocidad al hacer las repeticiones no variaba en más de 2 Hz.

Tabla 1. Valores de Voltaje, Amplitud y frecuencia de operación para los motores.

Motor	Voltaje	Amplitud vibración (m/s ²)	Frecuencia (Hz)
1	4	6.26	42.33
2	3	3.28	58.02
3	6	3.85	95.68
4	5.5	10.5	63.33

La segunda prueba se realizó con los cuatro motores operando a los voltajes establecidos en la primera prueba, obteniendo la señal compuesta de aceleración, señal a la que se aplica la FFT para obtener las frecuencias y amplitudes de las armónicas que la forman.

En la *Figura 15* se muestra la señal de aceleración y su FFT. De la señal de aceleración se observa

que es una señal compuesta, de la FFT se observa que la señal es formada por cuatro señales armónicas simples.

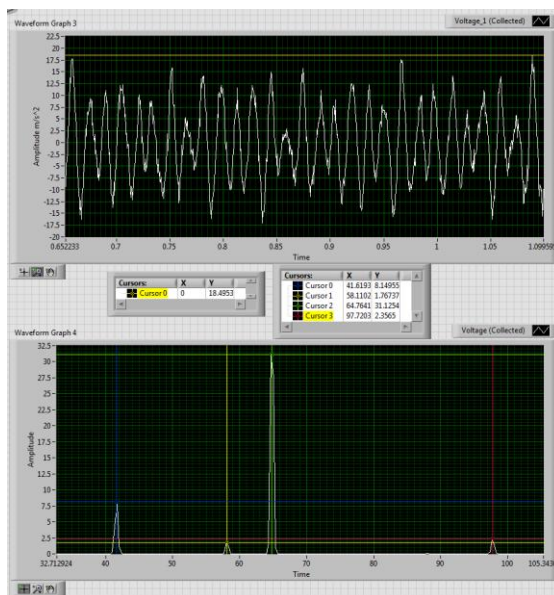


Figura 15. Gráficas de resultados obtenidos de la prueba con los cuatro motores en operación.

Una vez obtenidas las gráficas de aceleración y FFT, se procede a obtener los resultados de amplitud y frecuencia de las señales armónicas que componen la señal, los resultados son mostrados en la *Tabla 2*.

Tabla 2. Valores de amplitud y frecuencia obtenidas de la FFT de la señal compuesta.

Pico	Frecuencia (Hz)	Amplitud
1	41.61	8.15
2	58.11	1.76
3	64.76	31.12
4	97.72	2.35

2.5 Discusión

Como se mencionó en secciones anteriores, el objetivo del prototipo es generar señales armónicas de aceleración. En la *Figura 14* se muestra la señal armónica generada por el motor uno, de donde se observa que la señal aparece limpia (con poco ruido) esto también se observa al aplicar la FFT ya que se presenta un sólo pico de magnitud considerable, lo que indica que las señales de ruido tienen una magnitud de menor amplitud, por lo que se consideran como despreciables.

Por otro lado la señal compuesta mostrada en la *Figura 15*, es la señal formada por las cuatro señales armónicas generadas por los motores, esto se observa al comparar los valores de amplitud y frecuencia obtenidos de la FFT de la señal compuesta reportados en la *Tabla 2*, con los valores reportados en la *Tabla 1*. La comparación de los resultados obtenidos son reportados en la *Tabla 3* y *Tabla 4*.

En la *Tabla 3* se ordenan los motores en función de la amplitud de aceleración obtenida en la prueba uno y de la amplitud del pico de la FFT obtenida de la prueba dos, es importante mencionar que la amplitud de aceleración no tiene el mismo valor de magnitud del pico en la FFT, pero sí se debe guardar su proporción, por lo que la posición de los motores debe ser la misma si se ordenan por magnitud.

Tabla 3. Acomodo de motores por magnitud de amplitud en aceleración y FFT

Prueba 1 (Aceleración)		Prueba 2 (FFT)	
Mayor	Motor 4	Mayor	Motor 4
	Motor 1		Motor 1
	Motor 3		Motor 3
	Motor 2		Motor 2
	Menor		Menor

En la *Tabla 4* se realizó la comparación para los valores de frecuencia obtenidos para las dos pruebas, de donde se observa que los valores son muy parecidos teniendo una variación menor al 3%.

Tabla 4. Frecuencia de operación de los motores en las dos pruebas.

Motor	Prueba 1	Prueba 2	% Error
1	42.33	41.61	1.7
2	58.02	58.11	-0.16
3	95.68	97.72	-2.13
4	63.33	64.76	-2.26

Por último se desfasó y sobrepuso parte de la señal compuesta, esto con la intención de mostrar que la señal obtenida es periódica, esto se muestra en la *Figura 16*.

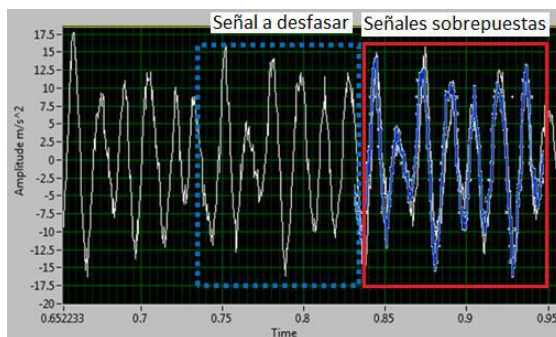


Figura 16. Desfase y sobreposición de la señal compuesta.

3. Aplicación

Una de las aplicaciones que tiene la FFT y las series de Fourier, es para la prueba de impacto, usada para determinar frecuencias naturales.

El principio de esta prueba es el mismo que el del prototipo de mesa vibratoria. La prueba inicia al impactar el espécimen con un martillo, al mismo tiempo se adquiere y analiza la respuesta de aceleración del espécimen, obteniendo una señal de aceleración compuesta que se analiza, aplica la FFT, para determinar las frecuencias de las componentes.

Para este ejemplo se aplicó el impacto a una viga de aluminio empotrada sobre una estructura, la viga y la estructura son mostrados en la *Figura 17*.

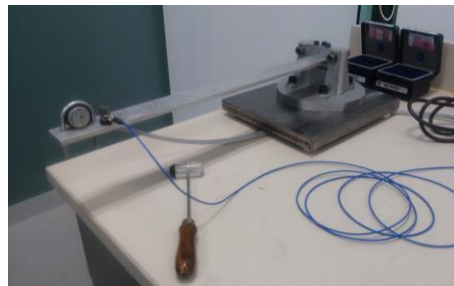


Figura 17. Prototipo para la condición de viga empotrada.

En la *Figura 18* se muestra la señal de aceleración obtenida de la respuesta de la viga al impacto, en este caso no es tan obvia la descomposición de la señal, pero sí es fácil observar que es una señal compuesta a la que se le aplica la FFT para obtener las frecuencias que la componen. Estas frecuencias son conocidas como frecuencias naturales y corresponden a las frecuencias a las que la viga oscila de forma natural al aplicarse un impacto. En la *Figura 18* se muestra la FFT de donde se obtienen las frecuencias naturales.

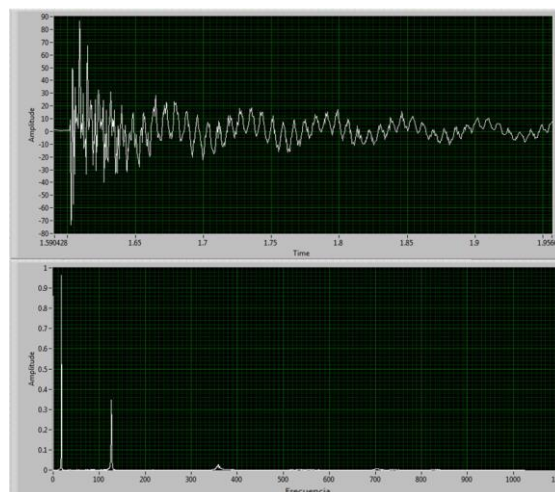


Figura 18. Gráficas de resultados obtenidos de la prueba de impacto en la viga.

En la *Figura 18* se muestra una fotografía de la viga al ser aplicada una carga armónica generada por un motor con desbalanceo, cuando está fuera de resonancia y dentro de resonancia. Es importante

mencionar que la frecuencia del motor a la que el sistema está en resonancia es menos a la frecuencia del motor donde se muestra fuera de resonancia.



Figura 19. Sistema en resonancia (izquierda), sistema en vibración fuera de resonancia (derecha).

4. Conclusiones

De los resultados obtenidos se observa que el desbalanceo de un motor al estar sobre una estructura, genera como respuesta una señal de aceleración del tipo armónico, como se muestra en la *Figura 14*.

De la *Figura 15* se observa que al aplicar diferentes excitaciones por desbalanceo, se genera una señal compuesta y periódica, que al aplicársele la FFT a esta, se obtienen las frecuencias de operación de los motores, determinando cuál de los motores es el que induce a una mayor amplitud de aceleración.

De las dos pruebas es fácil mostrar cómo generar señales de vibración simples, que sumadas, generan señales compuestas, que si se les aplica la FFT se determinarán sus frecuencias. Todo esto haciendo alusión a los conceptos de: series de Fourier, FFT, desbalanceo y sistemas dinámicos.

Otro ejemplo de la aplicación del prototipo es el apoyo en modelado matemático de un sistema dinámico de segundo orden, donde se analizarán los parámetros de diseño y respuesta en estado transitorio al aplicar una entrada de tipo impulso. Lo anterior ayudará a que los alumnos propongan y desarrollen prototipos de sistemas físicos para su análisis y modelado en el dominio del tiempo y de la frecuencia.

5. Referencias

- Balakumar Balachandran, E. B. (2009). *VIBRATIONS*. Toronto : Cengage Learning.
- Girdhar, C. S. (2004). *Practical Machinery Vibration Analysis and Predictive Maintenance*. Jordan Hill, Oxford: IDC Technologies.
- Rao, S. S. (2010). *Mechanical Vibrations*. Upper Saddle River, NJ: Pearson.

- Shabana, A. (1996). *Theory of Vibration: An Introduction* . New York: Springer Verlag.
- Silva, C. W. (2006). *Vibration: Fundamentals and Practice*. Boca Raton, Florida: CRC Press.
- Zill, D. G. (1997). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. México, D.F. : International Thomson Editores.

6. Reconocimientos

Los autores agradecen el apoyo del Tecnológico de Monterrey por el apoyo recibido del fondo de innovación educativa NOVUS 2014, para el financiamiento del presente proyecto. También agradecen el apoyo de los alumnos: Alan Gerardo Medina Jasso y Víctor Flores Ruenes por el apoyo brindado en la manufactura del prototipo.