



**TECNOLOGICO
DE MONTERREY®**

**El Empoderamiento Docente: una opción para la
apropiación de la práctica educativa del profesor
de matemáticas**

Tesis que para obtener el grado de:

**Maestría en Educación con Acentuación en Educación
Media Superior**

presenta:

Juan Pablo Gómez Estrada
Registro CVU: 564159

Asesor tutor:

Mtra. Elvira G. Rincón Flores

Asesor titular:

Dr. Leopoldo Zúñiga Silva

Santiago de Querétaro, Querétaro, México

Noviembre 2015

Dedicatorias

A Dios, por ser fiel a sus promesas y darme el ciento por uno infinidad de veces.

A Francisco y Ma. Rosario, mis padres, por darme la vida, ejemplo de amor y sustento tanto material como espiritual en todo momento.

A Francisco, Dulce María y Gabriel, mis hermanos, por el cariño y los buenos ratos que hemos compartido.

A Fernanda, Dulce María Goretti, Fernando Alexander, Santiago Eduardo y Ángel Francisco, mis sobrinos, por las risas, abrazos y alegrías que han traído a mi vida.

Por último, ni las más sublimes palabras podrían expresar el cariño, admiración y respeto que siento por ti Querido Amigo. Sin ti, este trabajo hubiera quedado en algún lugar del primer párrafo en la primera hoja.... juntos, Carnalito, juntos....

Agradecimientos

Al Tecnológico de Monterrey, por la oportunidad de superarme humana y profesionalmente; una maravillosa experiencia.

Al C.P. Juan Francisco Arriaga Hernández, director del Plantel 24 Villa Progreso del Colegio de Bachilleres del Estado de Querétaro, por su profesionalismo y compromiso para con la educación de nuestros jóvenes; un ejemplo de pasión y entrega que me motiva a seguir adelante.

Al Dr. Leopoldo Zúñiga Silva, por permitirme participar en el proyecto de tesis que tiene a bien dirigir y por el apoyo brindado en el trayecto.

A la Mtra. Elvira G. Rincón Flores mi admiración y respeto por su asesoría y consejos durante la elaboración de esta tesis.

El Empoderamiento Docente: una opción para la apropiación de la práctica educativa del profesor de matemáticas

Resumen

Esta investigación contribuye a la problemática de la formación docente en el nivel medio superior toda vez que la mayoría de los profesores no tienen una carrera relacionada con la pedagogía. Se propuso el fenómeno del empoderamiento, un proceso que pretende transformar el desempeño del profesor. El estudio permitió responder a la pregunta ¿de qué manera el empoderamiento docente permite al profesor apropiarse de su práctica educativa? El objetivo general fue analizar el proceso de empoderamiento de un profesor de matemáticas para quien se diseñó una unidad socioepistémica que permitió valorar el fenómeno en cuestión mediante el análisis de sus acciones antes, durante y después del experimento. Los objetivos específicos hacen referencia al diseño de un ambiente de aprendizaje que permitió la interacción entre el docente y el alumno, la construcción del conocimiento y la creación de un material de trabajo que favorezca la transposición didáctica. Adoptando un enfoque de investigación de tipo cualitativo de estudio de caso, la metodología consistió en 5 fases, en ellas se aplicaron entrevistas, se observaron algunas clases del docente y se implementó una secuencia didáctica diseñada para el experimento. Los resultados obtenidos dan cuenta del desarrollo de ciertos procesos por parte del sujeto de investigación, mismos que nos permiten concluir que el profesor se vio inmerso en un proceso de empoderamiento, lo que se traduce en cambios significativos en su práctica docente.

Índice

1. Marco Teórico	1
1.1 Didáctica y Matemática Educativa, una perspectiva histórica.....	1
1.1.1. Teoría de la Socioepistemología.	3
1.2. El docente de matemáticas en educación media superior	5
1.2.1. La práctica educativa del profesor de matemáticas.....	5
1.2.2. La formación docente del profesor.....	6
1.2.3. El empoderamiento y la problematización	7
1.3. Investigaciones sobre la formación docente del profesor de matemáticas en el nivel medio superior.....	8
1.3.1. Trabajos e investigaciones sobre formación docente	8
1.3.2. Trabajos sobre la enseñanza del cálculo.....	10
2. Planteamiento del problema	13
2.1 Antecedentes del problema	13
2.2 Planteamiento del problema.....	13
2.3 Objetivos	15
2.3.1. Objetivo general.	15
2.3.2. Objetivos específicos.....	15
2.4 Justificación de la investigación.....	15
2.5 Delimitantes y limitaciones del estudio	15
2.5.1. Delimitantes.....	16
2.5.2. Limitaciones.	16
3. Método.....	17
3.1 Enfoque metodológico	17
3.2 Participantes	17
3.3 Instrumentos	18
3.3.1 Entrevista.....	18
3.3.2 Observación.....	18
3.3.3 La unidad socioepistémica de aprendizaje	19
3.4 Categorías e indicadores	19
3.5 Procedimientos	20
3.6 Estrategia de análisis de datos.....	21
4. Análisis y discusión de resultados.....	23
4.1 Presentación de los datos y discusión de los resultados.....	23
4.1.1. Resultados obtenidos en Saber Matemático	24
4.1.1.1 Análisis de resultados obtenidos en SM	25
4.1.2. Resultados obtenidos en Liderazgo Grupal	25
4.1.2.1 Análisis de resultados obtenidos en LG.....	27
4.1.3. Resultados obtenidos en Reflexión sobre Práctica Docente.....	28
4.1.3.1 Análisis de resultados obtenidos en RSPD	30

5. Conclusiones	33
5.1 Principales hallazgos	33
5.2 Discusión de resultados.....	34
5.3 Recomendaciones e investigaciones futuras	36
Referencias.....	38
Apéndices	45
Apéndice A. Carta consentimiento de la Institución.....	45
Apéndice B. Carta consentimiento del profesor sujeto de investigación.....	46
Apéndice C. Entrevista inicial al docente de cálculo integral.....	47
Apéndice D. Entrevista final al docente de cálculo integral	49
Apéndice E. Bitácora de observación	50
Apéndice F. Unidad socioepistémica.....	53
Apéndice G. Actividades de Aprendizaje	56
Apéndice H. Evidencias del trabajo de campo.....	68
Currículum Vitae	69

1. Marco Teórico

La educación es un referente cultural, político e ideológico de un país. Por esta razón, desde hace mucho tiempo se ha puesto atención en la manera en que los procesos educativos se llevan a cabo, así como en el estudio de diferentes problemáticas relacionadas con la enseñanza. Particularmente, la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias están asociados con un nivel de desarrollo tecnológico y social; sin embargo hoy en día la educación matemática enfrenta diversos problemas que requieren de un estudio profundo y sistemático. La Matemática Educativa (ME) se encarga de estudiar estos aspectos.

En este capítulo se presenta el desarrollo histórico de la ME y la evolución tanto de sus perspectivas teóricas como de sus problemáticas. Se presentan también la Teoría de la Socioepistemología y literatura existente sobre la formación docente, sustento y objeto de estudio de la presente investigación.

1.1 Didáctica y Matemática Educativa, una perspectiva histórica

La ME es una ciencia relativamente nueva y es definida por Cantoral y Farfán (2003, p. 29) como “una disciplina del conocimiento... que, en términos generales, podríamos decir que se ocupa del estudio de los fenómenos didácticos ligados al saber matemático”; por su parte Rico, Sierra y Castro (2000) se refieren a ella como una disciplina que aborda los fenómenos y problemas referentes a la educación matemática y cuyas soluciones y resultados contribuyen a la evolución de la misma; Godino (1991) por su parte, le confiere el carácter de disciplina científica. Por ello, es posible enmarcar a la ME en una serie de problemas y supuestos teóricos propios cuyo estudio se ha desarrollado y diversificado a lo largo de los años.

La ME surge a finales de los años sesenta, cuando en Francia se presentaba una ruptura del modelo de enseñanza tradicional de las matemáticas, lo que evidenció la necesidad de una capacitación para los profesores con respecto a nuevas maneras para trabajar y evaluar (Douady, 1995). Con el fin de atender estas necesidades se crean los

Institutos de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM) en los que se aborda dicha problemática para luego centrarse en el estudio de los problemas que implican la enseñanza de la matemática. Esta nueva forma de abordar la enseñanza de dicha ciencia, deja de lado una visión pragmática de que la enseñanza no puede ser objeto de estudio y abre la posibilidad para analizarla, buscar explicaciones y formular teorías que la expliquen.

En sus inicios la ME caracterizaba al aprendizaje matemático como un proceso psico-cognitivo influido por factores motivacionales, afectivos y sociales centrados en el aprendizaje del alumno y el pensamiento del profesor (Gascón, 1998), para brindar herramientas que garantizaran un aprendizaje por parte del alumno a partir de una buena enseñanza del maestro. No obstante, ésta visión se ve limitada a aspectos psicológicos dejando de lado las nociones de aprendizaje y de enseñanza. Debido a esto surge la necesidad de que la ME formalice sus objetos de estudio mediante la incorporación de un modelo teórico que sustente la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, por lo que se consolida la llamada didáctica fundamental (Gascón, 1998).

De esta manera, se incorporan a la ME objetos de estudio propios que van más allá de cuestiones filosóficas y que permiten hablar de investigación en educación matemática. Esta disciplina cuenta también con paradigmas que se han modificado con el paso del tiempo y cuyos aportes han contribuido al diseño curricular, la práctica docente, la evaluación y el uso de las tecnologías (Kilpatrick, 1998).

Entre las perspectivas teóricas más influyentes en ME destacan: la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (Pannizza, 2004), la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (Moreira, 2002) y la Teoría de la Socioepistemología (Cantoral, 2013). Precisamente ésta última sirve como marco teórico a la presente investigación, por lo que a continuación se exponen los fundamentos y constructos teóricos de la misma.

1.1.1. Teoría de la Socioepistemología. Una de las áreas de investigación en desarrollo dentro de la ME es la relacionada a los aspectos sociales. Al respecto se pueden consultar diversos estudios sobre la influencia de nuestro aprendizaje sobre los demás (Hoyles, 1982; Webb, 1982; Bishop, 1985), aquellos que estudian prácticas que trascienden culturalmente y que posibilitan una construcción social de conocimiento matemático (Covián, 2005; De Lima y Monteiro, 2009) y algunos que abordan el empoderamiento docente (Howe, Sttubbs, 1998, 2003; Stolk, Dejong, Bulte, Pilot, 2011). Con estos estudios queda en evidencia la necesidad de abordar la problemática de la enseñanza de las matemáticas desde una perspectiva diferente, considerando, además de lo algorítmico y conceptual, las prácticas sociales en que se ve inmersa.

En este sentido surge la Teoría de la Socioepistemología (TS) la cual “busca construir una explicación sistemática de los fenómenos didácticos en el campo de las matemáticas” (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez-Sierra, 2006, p.85). Por su parte Buendía (2006, p. 233) señala que la TS “pretende desarrollar estrategias de investigación con naturaleza epistemológica, donde éstas sean entendida como el estudio de las circunstancias que favorecen la construcción del conocimiento, las cuales darán cuenta de la relación entre prácticas sociales y conocimiento matemático”. Con ello se deja de lado el enfoque clásico de la ME centrada en los objetos de aprendizaje y técnicas didácticas para centrarse en el problema de la construcción social del conocimiento.

La TS puede describirse como una perspectiva sistémica que considera cuatro dimensiones fundamentales del problema en cuestión: la epistemológica, la sociocultural, la cognitiva y la institucionalización mediante la enseñanza (Cantoral, 2001). Para ello se establecen *unidades de análisis* que caracterizan las propiedades fundamentales del sistema, de entre las que destacan: *la actividad humana* (permite explicar el conocimiento matemático en función de la necesidad humana), *la práctica social* (actividades realizadas a conciencia con las que el ser humano pretende cambiar su entorno social y material) y *la resignificación* (permite situar al conocimiento en un contexto histórico e intencional) (Martínez, 2005).

Se aprecia entonces la importancia de introducir a los profesores y/o alumnos en un entorno que asemeje ciertas realidades en que se desarrollaron los conceptos matemáticos para que también ellos valoren el proceso de construcción y reconstrucción de los conocimientos. Es por ello que Cordero (2005), señala que la aportación de la TS a la investigación de ME radica en el reconocimiento de lo complejo del conocimiento matemático junto con su naturaleza social, poniendo énfasis en la forma cómo se fueron construyendo dichos conocimientos.

El rol que desempeña el docente se transforma para verse inmerso en un proceso de acompañamiento, donde hace las veces de guía y moderador. Para lograrlo, también es necesario brindar un nuevo enfoque a la práctica docente del profesor, a su formación y profesionalización de manera que se apropie de su práctica educativa, propiciando la reflexión y la investigación al respecto, logrando así un empoderamiento docente que repercute en su formación y profesionalización (Cantoral y Reyes, 2012, 2013, 2014).

Una manera de dar cuenta de ello es a través del diseño de una *unidad socioepistémica* (Cantoral y Reyes, 2013) que permita valorar el empoderamiento docente mediante el análisis del contenido matemático y lo que Chevallard (1997) denomina trasposición didáctica. Esta forma de trabajo contribuye al aspecto formativo de los docentes.

Se optó por esta teoría debido a la concreción y conjunción con que aborda las dimensiones sociales del conocimiento. Además favorece la formación y el aprendizaje colaborativo entre los docentes toda vez que contribuye al análisis y la mejora de su práctica educativa para adueñarse de ésta, trabajando en conjunto con sus alumnos u otros docentes.

A continuación se analiza el aspecto de la formación docente a fin de dar pertinencia a esta problemática y a la propuesta del empoderamiento para que el profesor se apropie de su práctica educativa a la luz de la TS.

1.2. El docente de matemáticas en educación media superior

1.2.1. La práctica educativa del profesor de matemáticas. Los contenidos de los distintos programas de las asignaturas del área de matemáticas en el nivel medio superior han sido producto de modificaciones y adaptaciones por parte de autoridades educativas y gubernamentales quienes realizan lo que Chevallard (1997) denomina transposición didáctica. Así, el saber sabio de la matemática se va transformando, adaptando y estructurando para dar forma a los bloques en los programas de estudios, conformando con ello el discurso matemático escolar (dME) (Cantoral y Reyes, 2014).

Es mediante la práctica educativa, que el docente crea las condiciones para diseñar e implementar estrategias y actividades que permitan al alumno incorporar el dME a sus conocimientos. Este proceso educativo está fuertemente basado en la propia experiencia y creencias que el profesor ha adquirido con los años y norman su praxis educativa, sin embargo estos “saberes” se van transformando a medida que son analizados o confrontados con la práctica (Eslava y Valdez, 2004). Una vez organizada una situación o problema entorno a un contenido matemático, el docente y el alumno se ven inmersos en un proceso de interacción donde cada uno cumple una función específica y con desempeños esperados, mismos que se van modificando a medida que transcurre la actividad y que conforman el contrato didáctico. Podemos encontrar múltiples ejemplos de ello en el libro de Chevallard, Bosch y Gascón (1997).

Este contrato didáctico rige la construcción social del conocimiento matemático, pues en él se desarrollan los procesos y prácticas educativas que norman las funciones del alumno y, de manera particular, del profesor. Por esta razón la unidad socioepistémica a diseñar en esta investigación se vio regulada por dicho contrato tomando, como principal elemento de análisis la actividad del docente en aras de contribuir a su formación profesional.

La actividad de profesor en el proceso de enseñanza queda lejos de la simple transmisión o exposición de conocimientos, requiere de un profesional de la educación capacitado y con habilidades que garanticen una buena práctica educativa. Para tal fin,

debemos recurrir a la formación docente pues es el medio para que los profesores analicen y desarrollen sus habilidades y práctica educativa, enriqueciendo sus concepciones didácticas y pedagógicas (López, Rodríguez y Bonilla, 2004).

1.2.2. La formación docente del profesor. Se entenderá por formación docente al conjunto de métodos, teorías y didácticas que un profesor posee y hace uso durante su práctica escolar. Este aspecto es de suma importancia, pues mantiene una estrecha relación con los resultados del proceso de enseñanza-aprendizaje (Ingvarson, Meiers y Beavis, 2005). De manera particular, en el bachillerato la formación docente está caracterizada por la experiencia propia de los años y los diversos cursos y talleres a los que se ha asistido, pues el perfil del profesor es el de un profesionalista propio del área a enseñar, dejando en segundo término el conocimiento sobre didáctica que pudiera tener.

Según Messina (1999), históricamente se pueden distinguir dos vertientes en lo que se refiere a la formación del profesorado en América Latina: la primera basada en modelos tradicionales de enseñanza y la segunda que asocia la investigación con la práctica misma. Aunque la primera categoría tiene fuerte dominancia, en los últimos años ha cobrado fuerza la necesidad de un docente más preparado y crítico al respecto de su desempeño, como parte de una transformación de los modelos educativos y su impacto en la sociedad.

Como se mencionó anteriormente, el enfoque clásico de ME no abordaba la figura docente pues se centraba en el aspecto didáctico del alumno. Según señala Artigue (2004), los objetos de estudio propios de estas investigaciones han evolucionado en la medida en que consideran las percepciones del profesor, las decisiones que toma y las habilidades que requiere en su práctica educativa. Por ello existen numerosas investigaciones al respecto de la didáctica del profesor, sus conocimientos, su formación, su manera de actuar y la forma de enseñar.

Al respecto, Cantoral y Reyes (2014) mencionan que las diversas investigaciones sobre formación docente se enfocan en procesos didáctico-pedagógicos dejando de lado la problematización del saber matemático, de ahí la importancia de incorporar el análisis

de los contenidos matemáticos de un curso a dichas investigaciones buscando darles un sentido y pertinencia. Con ello, se busca que el docente reflexione y analice en qué medida su propia práctica educativa contribuye a la construcción social de los conocimientos, alejándose del paradigma centrado en los objetos de aprendizaje.

No obstante, el tema de la formación docente es bastante complejo pues implica indagar en la vida misma del profesor atendiendo a sus dimensiones humana, profesional, ética y formativa, pues se comparte la idea de Cantoral y Reyes (2014, p.361) quienes conciben al docente como un “intelectual profesional que se ocupa de la formación académica, ética y ciudadana de la juventud”. Así, la función del docente de matemáticas adquiere un sentido de particular importancia, pues la formación que ofrece debe trascender el conocimiento matemático buscando educar para la vida.

En aras de atender esta complejidad, se situó al docente en un “doble enfoque” (Robert, 2001) que busca, por un lado estudiar procesos cognitivos en su ámbito laboral y por el otro, analizar la didáctica con la que los enseña. Con este fin, se planteó la necesidad de examinar las clases del profesor desde la perspectiva de los contenidos, de la metodología y de la interacción de alumnos con el docente, es decir, el contrato didáctico. Esta forma de trabajo aborda las componentes epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural, de manera tal que se alinea con las dimensiones de la TS que mencionaba Cantoral, lo que brinda pertinencia al problema de la formación docente.

De esta manera, la investigación asumió al proceso formativo del docente como toda una estructura que guarda estrecha concordancia con el contenido a enseñar, sus alumnos y su entorno, así como las relaciones que se dan entre ellos, por lo que podemos hablar de una “perspectiva sistémica” (Ruíz,2001).

1.2.3. El empoderamiento y la problematización. Un medio para apropiarse de la práctica educativa. La profesionalización docente ya no se ve limitada al desarrollo de técnicas didácticas sino que busca que los profesionales de la educación se vuelvan críticos y reflexivos. Ante esta nueva perspectiva la TS establece que, mediante el saber matemático escolar y la problematización de éste (psme), el profesor puede

transformar su realidad y decidir sobre su práctica didáctica, logrando que se adueñe de la misma mediante un proceso de “empoderamiento”, contribuyendo así a un rediseño del discurso matemático escolar (rdME) (Cantoral y Reyes, 2014).

Analizando al empoderamiento desde distintos enfoques, Cantoral y Reyes (2013) resaltan su carácter individual desde lo colectivo, reflexivo y transformador de la realidad de la persona. En este sentido, el fenómeno del empoderamiento docente pretende que el profesor reflexione y sea crítico con su práctica educativa, que se apropie de su desempeño y contribuya a su formación profesional, lo que incidirá también en la relación con sus alumnos y con el conocimiento matemático del dME.

Siguiendo el trabajo de Cantoral y Reyes (2014) se propone la psme como recurso viable para lograr el empoderamiento docente, pues dicha acción supone el estudio de las prácticas sociales en las que se enmarcan las interacciones profesor-estudiante y valora la construcción de los razonamientos que estructuran los contenidos matemáticos así como la funcionalidad de los mismos. Para lograrlo, se debe realizar una *problematización del saber matemático (psm)*, es decir se debe centrar la atención en el problema del saber, analizando su naturaleza (dimensión epistemológica), su utilidad (dimensión social), su apropiación (dimensión cognitiva) y la manera en que se enseña (dimensión didáctica) (Cantoral y Reyes, 2013). Estas dimensiones dieron forma y sentido a la *unidad socioepistémica* de la investigación, la cual permitió evidenciar el cambio y apropiación del docente con respecto al saber matemático.

1.3. Investigaciones sobre la formación docente del profesor de matemáticas en el nivel medio superior

1.3.1. Trabajos e investigaciones sobre formación docente. Derivado de las necesidades expuestas al respecto de la formación docente y cómo es que ésta repercute en la educación de los estudiantes, no resulta extraño que haya sido un tema de investigación recurrente en los últimos años. En esta sección se presentan algunos resultados de diversas investigaciones al respecto.

Por las muchas similitudes en cuanto a contextos y estructura del sistema formativo de los docentes, Vaillant (2007) hace un comparativo entre el desempeño teórico y el real del sistema de formación docente en los países de América Latina. Dicha situación presenta marcados contrastes y ha originado la apertura o reestructuración de diversos Departamentos o Institutos que atiendan la problemática. Como resultado de su investigación, la autora apuesta por una formación docente continua que contemple un panorama integral del profesor al vincularlo con su institución y contexto laboral y social, lo que originará un programa formativo para la inserción, acompañamiento y desarrollo del docente.

Cantoral y Reyes (2014) proponen el empoderamiento como parte de la profesionalización del docente, realizando el análisis de la práctica de un profesor de secundaria y los cambios que sufre ésta mediante la *psme*. Para ello, el docente se ve inmerso en una *unidad de análisis socioepistémica*, diseñada por el investigador al respecto de la proporcionalidad en matemáticas. Con los resultados, se formulan tres hipótesis: que la formación del docente debe sustentarse en la *psme* más que en la producción de herramientas didácticas para el aula; que la *unidad socioepistemológica* como la que se diseñó en el estudio servirá como indicador para evaluar el empoderamiento docente y que éste último atiende el problema de exclusión de la construcción del conocimiento matemático provocado por el *dME* (Soto, 2010). Los resultados de la investigación dan cuenta de los avances del profesor al incorporar las dimensiones de la TS en su praxis educativa.

En esta misma línea de investigación, Cabrera y Cantoral (2011) desarrollaron una investigación al respecto del medio y herramientas para que el profesor se apropie de su práctica educativa y favorezca al desarrollo docente. Mediante grupos de discusión y análisis, los resultados muestran la importancia de que el profesor incorpore las prácticas sociales en el *dME* partiendo de sus propias concepciones y el contexto social y cultural. Con ello se brinda importancia de atender el proceso de formación y la problemática de que el docente se adueñe de su práctica educativa.

Por su parte, Serres (2007) llevó a cabo una investigación al respecto de un programa de formación docente en el que se analizan la cognición, la metacognición, las técnicas de resolución de problemas y las actitudes en matemáticas. Si bien es cierto que los docentes sujetos de estudio presentaron una mejora y una reflexión en la actitud hacia su práctica educativa, tanto el aspecto didáctico como el desempeño de los estudiantes no sufrieron cambios significativos, por lo que la autora sugiere el incorporar profesores de la misma área y dar un seguimiento a los grupos. En este sentido, la presente investigación incorpora a un docente del área de Cálculo Integral.

1.3.2. Trabajos sobre la enseñanza del cálculo. Se cierra este capítulo con los resultados de algunas investigaciones en el área del cálculo diferencial e integral desde la TS cuyos resultados o metodologías resultan relevantes para la presente investigación.

La propuesta de Cabañas y Cantoral (2007) consiste en abordar el planteamiento de la enseñanza de la integral definida en el marco de la Socioepistemología en matemática educativa. Para ello se proponen actividades dentro del aula que incorporen la noción de área en la vida diaria, particularmente las ideas de: *repartir, comparar y reproducir; medir, cuantificar y conservar*. Se busca que dichas actividades favorezcan la comprensión analizando las prácticas sociales relacionadas a las ideas antes mencionadas y que tienen su razón de ser en las sofisticadas estructuras de los objetos de estudio, los problemas algebraicos y algorítmicos, así como la falta de comprensión entre lo algebraico y lo geométrico.

En el trabajo de Montiel (2005) se resumen los resultados de una investigación sobre el análisis de una situación de aprendizaje para la construcción del concepto de derivada, fundamentada en la socioepistemología. Analizando el *foro de discusión* de un escenario virtual se da cuenta de la *resignificación* del concepto de derivada vista como una *organización de las variaciones sucesivas* y se evidencia el aprendizaje del concepto de derivada como el resultado de una negociación. Esto redefine, no sólo la estructura

del concepto matemático, sino también la relación del docente y los alumnos y sobre todo la manera en que éstos van construyendo el conocimiento.

En el trabajo de Cordero (2005) se presenta un análisis desde la socioepistemología del concepto “integral” así como la necesidad del rdME mediante la discusión y debate del discurso matemático escolar en cuestión. Para realizar la investigación se diseñó una experiencia de aprendizaje controlada a profesores y alumnos de nivel medio superior, la cual consistía en la incorporación de resignificaciones de los temas clásicos de cálculo. Se diseñan situaciones de comparación (diferenciación) y fenómenos de cambio (suma acumulada). En las conclusiones se destaca el noción de “acumulación” en la resignificación de la variación continua representada por funciones con integrales y se da importancia a las argumentaciones de los participantes. Con ello se plantea la necesidad de dar un giro al enfoque del cálculo como mero aprendizaje de algoritmos y técnicas algebraicas para centrarse en incorporar situaciones de variación continua y cambio (situación de cambio).

En el marco de la enseñanza del cálculo diferencial, y a fin de cambiar el aspecto rígido de ésta, Camacho (2011) sustenta una propuesta en la TS, mediante las *prácticas de referencia* (matematización de la realidad) y la *construcción social de los conocimientos*. Las actividades se desarrollaron en tres etapas: *el espacio real, un micro-espacio y un meso-espacio* y se dan las secuencias didácticas para elaborar el círculo unitario, poniendo énfasis en la interacción de los alumnos con el docente (aquí se manifiesta la construcción social del conocimiento) quien asume un papel de orientador y guía. Se concluye haciendo la observación del carácter innovador de la propuesta, pues rediseña las actividades y se centran en el alumno, se menciona la necesidad de reafirmar el conocimiento desarrollado y se hace hincapié en que la forma de trabajo lleva consigo un compromiso por parte de los docentes a incorporar cambios en su práctica educativa.

La necesidad de formación docente resulta de suma importancia, pues es mediante dicho proceso que el profesor de matemáticas va adquiriendo herramientas teóricas y metodológicas para su práctica educativa. A la luz de las investigaciones realizadas, es necesario enfocar la formación docente en la reflexión al interior de lo que ocurre en el proceso de enseñanza-aprendizaje más que en el desarrollo de técnicas didácticas. La TS contribuye a dicho fin en la medida en que incorpora el aspecto social al desarrollo del conocimiento matemático, lo que permite la discusión y análisis de los contenidos matemáticos mediante la interacción entre docentes y alumnos.

Es en este contexto que surge la idea del empoderamiento docente, la cual propicia el desarrollo profesional del profesor al brindarle la oportunidad de reflexionar y decidir sobre su práctica educativa.

2. Planteamiento del problema

En este capítulo se plantea el problema, objeto de investigación de la tesis. Para ello se exponen los antecedentes del mismo, se enuncian los objetivos a alcanzar, se justifica su estudio y se describen las delimitantes y limitaciones a considerar.

2.1 Antecedentes del problema

En términos generales las problemáticas de la enseñanza de las matemáticas hacen referencia a fenómenos relacionados con el estudiante, con el docente y con los saberes que se quieren enseñar. De manera particular, el aspecto de la práctica docente ha tomado relevancia entre los investigadores de ME, pues es el profesor quien debe crear el vínculo entre el conocimiento y el alumno.

Este proceso de transposición didáctica requiere por parte del profesor, de una actitud reflexiva que le permita desarrollar la capacidad de alinear el proceso de enseñanza-aprendizaje con el entorno histórico, cultural y social en que se ve inmerso (Olmos, 2009). Así, se ha cambiado la visión del docente como transmisor de conceptos, definiciones y algoritmos para dar paso a un profesional de la educación capaz de reflexionar al respecto de los fenómenos que se le presentan en su labor diaria.

Si bien es cierto que los docentes de matemáticas del nivel medio superior poseen una sólida formación matemática debido a sus profesiones (Ingenieros, Contadores, Arquitectos, Matemáticos, etc.) muchas de ellas no contemplan aspectos didácticos o lo hacen de manera superficial. En consecuencia, los maestros se ven en la necesidad de adquirir aspectos de didáctica mediante cursos, seminarios, talleres o la experiencia en el aula. La formación docente se perfila como el medio para desarrollar las habilidades y competencias de los profesores para la enseñanza. A través de ella, se busca brindar a los maestros las herramientas y métodos que les permitan mejorar su práctica educativa contribuyendo así a su desarrollo profesional.

2.2 Planteamiento del problema

No obstante la gran cantidad de cursos, talleres, seminarios y demás, hoy en día se siguen presentando múltiples problemáticas en los diversos cursos de matemáticas como la falta de comprensión y de interés, el rechazo de las diversas asignaturas o el uso de algoritmos largos y tediosos a los que los estudiantes no encuentran sentido. Además, la enseñanza está centrada en los objetos matemáticos que conforman el dME, dejando de lado la construcción del conocimiento matemático en sí (Cantoral, 2003) lo que fomenta la falta de relevancia de los saberes en el alumno al no encontrarles sentido.

Resulta evidente la necesidad de replantear la labor y acciones del profesor a fin de que éste pueda asumir los nuevos desempeños que implica su profesión. Al respecto, ¿cuál debe ser la orientación que se le debe dar a la formación docente para hacer frente a estas problemáticas? Para dar respuesta a esta interrogante se planteó el fenómeno del empoderamiento como una opción viable que favorece el desarrollo personal de los docentes y contribuye a la mejora de su práctica educativa, aspecto que sin duda repercute en el aprendizaje por parte de los alumnos.

Pero, ¿cómo introducir a los docentes en este nuevo enfoque de formación de manera que se evidencie el desarrollo profesional del docente, la mejora de su práctica educativa y el aprendizaje del alumno? Cantoral y Reyes (2013) señalan la importancia de considerar al conocimiento matemático como un producto de construcción social, es decir que los procesos de enseñanza-aprendizaje favorezcan la resignificación y recontextualización de aquello que se pretende enseñar. Por ello, el diseño de una unidad socioepistémica, a partir de un saber matemático, permitirá analizar y valorar la interacción entre el docente, el alumno y el saber en cuestión.

La problemática del empoderamiento docente ha sido abordada por Cantoral y Reyes (2012 y 2013) mediante el registro de las acciones de un profesor recabadas en videograbaciones y entrevistas a fin de analizar la intervención reflexiva y su relación con el saber matemático, todo ello bajo la perspectiva de la TS, pues de acuerdo con Montiel (2011) las acciones que contribuyan a la formación docente deben incorporar la problematización del saber matemático. Los resultados de la presente investigación

responden a la siguiente pregunta ¿de qué manera el empoderamiento docente permite al profesor apropiarse de su práctica educativa?

2.3 Objetivos

2.3.1. Objetivo general. Analizar el grado de apropiación de la práctica docente de un profesor, a través del proceso de empoderamiento, para contribuir a su desarrollo y formación profesional.

2.3.2. Objetivos específicos.

- Diseñar un ambiente de aprendizaje que considere las cuatro dimensiones de la TS y que permita la interacción entre docente y alumnos para facilitar la construcción social del conocimiento.
- Favorecer la transposición didáctica de los saberes matemáticos relacionados con el cálculo integral (integral definida) mediante la creación de un material de trabajo.

2.4 Justificación de la investigación

Resulta necesario reorientar el aspecto formativo a fin de incorporar los nuevos enfoques didácticos de la matemática. Esta investigación buscó contribuir al desarrollo profesional docente, pues Nemiña, García y Montero (2009) lo señalan como la nueva cultura a adoptar en la formación docente contribuyendo con ello a un verdadero cambio educativo. Para lograrlo, la metodología se enmarca en la TS y los procesos que propone sobre la construcción social del conocimiento.

Los resultados se vieron reflejados en un cambio de la práctica educativa que propició la reflexión y el análisis por parte del docente al respecto de lo que sucede a su alrededor en su pretensión por enseñar. Así mismo, permitieron enriquecer el enfoque de la formación del profesorado como el medio para desarrollar competencias docentes y evidenciaron el proceso de empoderamiento docente como una opción viable para una praxis educativa exitosa.

2.5 Delimitantes y limitaciones del estudio

2.5.1. Delimitantes. Para llevar a cabo la presente investigación se escogió a un profesor de una institución de nivel medio superior mexicano, Ingeniero de profesión. Dicho profesor imparte las asignaturas de matemáticas en el primer año y cálculo en el tercer año.

Para el estudio se creó una unidad socioepistémica de aprendizaje al respecto del tema: la integral definida. Las sesiones desarrolladas al interior del aula, fueron grabadas en audio a fin de constatar los procesos sociales de construcción del conocimiento. Al docente se le aplicó una encuesta antes y después de la experiencia para medir las variables que evidenciaron el grado de apropiación de su práctica educativa.

2.5.2. Limitaciones. Una de las limitaciones de la investigación fue la cantidad de alumnos, en promedio 35 por grupo, por ello se consideró pertinente el trabajo en equipo. Debido a que el estudio se interesó principalmente en las acciones del docente sólo se consideró como objeto de análisis el material de aquellos equipos que sí mostraron la interacción y el desarrollo de las actividades programadas pero sin realizar la evaluación de la comprensión y construcción del conocimiento.

Otra limitante fue el tiempo y el número de horas clase semanales, siendo de 1 hora sólo 3 veces por semana. Al respecto, y para no interrumpir abruptamente con el desarrollo de la clase ni interferir con la planeación del docente, se optó por dar un cierre a las actividades cuando el tiempo así lo requería. Esto no incide directamente con el objetivo principal de la investigación, no así con la asimilación del conocimiento por parte del alumno, aspecto a considerar para futuras investigaciones.

3. Método

En este capítulo se presenta la metodología utilizada en la investigación. Para ello se justifica el enfoque metodológico, se describen las características de los participantes, se exponen los instrumentos diseñados para la recolección de los datos, se enuncian las fases y actividades a realizar en cada una de ellas y se presenta la estrategia usada para la interpretación de los datos.

3.1 Enfoque metodológico

Uno de los paradigmas de investigación más comunes es el enfoque cualitativo el cual que busca, mediante la producción e interpretación de datos descriptivos (Taylor y Bogdan, 1990), entender e interpretar el significado que los seres vivos le dan a fenómenos de su entorno (Hernández, Fernández y Baptista, 2004). Dentro de este paradigma, Creswell (2007) distingue el estudio de caso cualitativo como aquel en el que se analiza un sistema delimitado a fin de comprender y dar significado a un determinado fenómeno. Se escogió este enfoque, toda vez que el fenómeno del empoderamiento se concibe como un proceso social que el propio docente va construyendo.

En este sentido, y dado que el objetivo de la investigación fue analizar el grado de apropiación de la práctica docente de un profesor a través del proceso de empoderamiento, la presente investigación se enmarcó en un enfoque cualitativo de estudio de caso toda vez que se pretendió analizar datos descriptivos derivados de la observación e implementación de una unidad socioepistémica. Los datos dieron respuesta a la pregunta de investigación planteada, ¿de qué manera el empoderamiento docente permite al profesor de cálculo integral apropiarse de su práctica educativa?

3.2 Participantes

Para efectos de la investigación se ha seleccionado a un profesor de la asignatura de cálculo integral en el sexto semestre del bachillerato. Dicho profesor es Ingeniero de profesión y cuenta con una Maestría en Gestión Administrativa, tiene 55 años de edad, cuenta con 20 años de experiencia docente de los cuales ha trabajado 5 en el Colegio en que se llevó a cabo esta investigación y ha impartido las asignaturas de matemáticas I y II (álgebra y trigonometría) y cálculo diferencial e integral. Cabe señalar que debido a la estructura escolar de la institución, dicho docente es el único que imparte la asignatura a los tres grupos del sexto semestre.

3.3 Instrumentos

Debido al enfoque cualitativo de estudio de caso, se usaron los siguientes instrumentos para recolectar los datos: dos entrevistas semiestructuradas al profesor (apéndices C y D), una al inicio y otra al final del proceso; bitácoras de observación (apéndice F) y la unidad socioepistémica de aprendizaje diseñada (apéndice G).

3.3.1 Entrevista. Flores y Valenzuela (2009, p. 138) la definen como “la interacción verbal entre el investigador y la persona”, su propósito es recabar información del participante pero de una manera más directa y personal. En la entrevista semiestructurada el entrevistador, a partir de una serie de preguntas definidas, va introduciendo nuevas interrogantes para aclarar ideas, conceptos o simplemente obtener información más precisa (Hernández et al., 2004). El uso de estos instrumentos brindó un panorama del estado de las variables que dan cuenta del empoderamiento por parte del profesor, antes y después de verse inmerso en el proceso experimental. Las entrevistas aplicadas se presentan en los apéndices C y D.

3.3.2 Observación. Esta técnica “implica adentrarnos en profundidad a situaciones sociales y mantener un papel activo, así como una reflexión permanente” (Hernández et al., p. 411, 2004). La información recabada brindó una perspectiva más profunda del entorno, del comportamiento y de las acciones del docente participante. Se realizó una observación estructurada (Flores y Valenzuela, 2009) a las horas clase del profesor, pues se han definido con anterioridad los aspectos a estudiar. No existe un

formato definido para la observación sino que se deberá anotar cualquier información que se considere pertinente (Hernández et al., 2004). La información fue recolectada mediante la bitácora de observación del apéndice E.

3.3.3 La unidad socioepistémica de aprendizaje. Es una estructura sistémica basada en las dimensiones de la TS que analiza la relación del docente con un saber matemático a fin de identificar elementos que permitan constatar el fenómeno del empoderamiento docente (Cantoral y Reyes, 2004). Este recurso de análisis permitió valorar el desarrollo de las fortalezas y necesidades del docente. Se anexa la unidad socioepistémica y las actividades en los apéndices F y G respectivamente.

3.4 Categorías e indicadores

Los indicadores utilizados en los instrumentos permitieron evidenciar elementos que caracterizaran al fenómeno del empoderamiento docente. La tabla 1 muestra las categorías creadas para tal fin y los procesos definidos para cada una.

Tabla 1
Indicadores a observar en la investigación

<i>Categoría</i>	<i>Dimensión</i>	<i>Procesos</i>
Saber matemático	Dimensión cognitiva y epistemológica	<ul style="list-style-type: none"> Evidencia una comprensión clara y profunda del saber matemático.
Liderazgo grupal	Dimensión sociocultural	<ul style="list-style-type: none"> Favorece el pensamiento reflexivo entre los estudiantes, motivándolos a expresar sus opiniones o posturas ante determinadas situaciones. Se dirige a los estudiantes con respeto y les atiende cuando éstos le externan sus comentarios.
Reflexión sobre práctica docente	Institucionalización	<ul style="list-style-type: none"> Participa en ambientes de aprendizaje que faciliten la comprensión y construcción social del conocimiento. Utiliza diferentes recursos didácticos durante la clase. Reflexiona sobre los procesos de construcción del conocimiento tanto propios como de sus alumnos.

3.5 Procedimientos

La investigación se llevó a cabo por fases, las cuales se presentan en la tabla 2. En la primera fase se elaboraron los oficios necesarios para adquirir los permisos de los participantes, en la segunda se realizó una entrevista inicial al sujeto de investigación, la tercera se centró en la observación de clases del profesor registrándose los datos en la bitácora (apéndice E), en la cuarta se diseñó una unidad socioepistémica de apoyo para el docente, cuyos resultados se valoran con la entrevista al profesor en la última fase.

Tabla 2
Fases de la Investigación

<i>Fase</i>	<i>Fecha (año 2015)</i>	<i>Instrumento a aplicar</i>	<i>Acciones</i>
1	16 al 18 de febrero		Obtener los permisos de la Institución para realizar la investigación. Platicar con el docente sobre el propósito de la investigación y obtener su consentimiento para participar en la misma.
2	23 de febrero	Entrevista inicial	Realizar entrevista inicial al docente de cálculo integral.
3	2 al 6 de marzo	Bitácora de observación	Observación estructurada en aula de las clases del profesor durante una semana.
4	9 al 13 de marzo	Unidad socioepistémica	Diseño e implementación de la unidad socioepistémica de aprendizaje en uno de los grupos del docente.
5	17 de marzo	Entrevista final	Realizar entrevista al docente.
6	18 al 22 de marzo	Entrevista inicial y entrevista final Bitácora de observación	Análisis de los datos obtenidos.
7	23 al 29 de marzo		Generar las conclusiones del análisis de los datos y elaborar el reporte de la investigación.

La tabla 3 muestra la relación de los instrumentos aplicados en las fases descritas con respecto a las acciones del profesor, las categorías a observar, los recursos materiales y el tiempo aproximado.

Tabla 3
Aplicación de instrumentos

<i>Fase 2</i>				
<i>Instrumento a aplicar</i>	<i>Acciones del profesor</i>	<i>Categorías a observar</i>	<i>Recursos materiales</i>	<i>Tiempo aproximado</i>
Entrevista inicial	Responder a las preguntas planteadas	<ul style="list-style-type: none"> • Saber matemático • Reflexión sobre práctica docente 	Entrevista	30 minutos
<i>Fase 3</i>				
<i>Instrumento a aplicar</i>	<i>Acciones del profesor</i>	<i>Categorías a observar</i>	<i>Recursos materiales</i>	<i>Tiempo aproximado</i>
Bitácora de observación	Impartir clase	<ul style="list-style-type: none"> • Saber matemático • Liderazgo grupal • Reflexión sobre práctica docente 	Bitácora (Apéndice E)	3 horas
<i>Fase 4</i>				
<i>Instrumento a aplicar</i>	<i>Acciones del profesor</i>	<i>Categorías a observar</i>	<i>Recursos materiales</i>	<i>Tiempo aproximado</i>
Unidad socioepistémica	Promover el aprendizaje de los alumnos Interactuar con los alumnos	<ul style="list-style-type: none"> • Saber matemático • Liderazgo grupal 	Actividades (Apéndice G)	3 horas
<i>Fase 5</i>				
<i>Instrumento a aplicar</i>	<i>Acciones del profesor</i>	<i>Categorías a observar</i>	<i>Recursos materiales</i>	<i>Tiempo aproximado</i>
Entrevista final	Responder a las preguntas planteadas en la entrevista	<ul style="list-style-type: none"> • Saber matemático • Liderazgo grupal • Reflexión sobre práctica docente 	Entrevista	30 minutos

3.6 Estrategia de análisis de datos

Como parte de la naturaleza cualitativa de la investigación, el análisis de datos nos permite comprender el fenómeno de estudio. Mejía (2011) distingue en este proceso tres etapas, mismas que usamos en la presente investigación: la reducción de datos, el análisis descriptivo y la interpretación. La etapa de reducción de datos consiste en la categorización, clasificación y codificación de los datos. La segunda etapa permite redactar enunciados empíricos y descriptivos para que, en la última etapa, puedan ser comparados con la teoría a fin de establecer conclusiones teóricas y explicativas.

Para la reducción de los datos se tomó en consideración las variables que dan cuenta del fenómeno del empoderamiento docente, mismas que fueron consideradas en la elaboración de los instrumentos: saber matemático, liderazgo grupal y reflexión sobre la práctica docente.

Para el análisis descriptivo se realizó una triangulación de los datos arrojados por las dos entrevistas y las bitácoras de observación aplicadas al sujeto de investigación. Lo anterior con el propósito de comparar, establecer semejanzas y detectar cambios en los datos correspondientes a cada una de las variables para luego redactar enunciados que caracterizaron el estado de las mismas.

Para la última etapa, los enunciados redactados se compararon con la Teoría de la Socioepistemología para poder establecer conclusiones que den fundamento a la naturaleza de los datos observados. Lo anterior, nos permitió argumentar la evidencia de los procesos, correspondientes a cada una de las variables que caracterizaron el fenómeno del empoderamiento.

4. Análisis y discusión de resultados

Después de implementar la metodología y recolectar la información con los instrumentos descritos en la sección anterior, en este capítulo se presentan y discuten los resultados obtenidos. Para ello se describieron los datos con base en las categorías que fueron definidas para el estudio, se constataron mediante los extractos de las entrevistas realizadas y las anotaciones en las bitácoras de observación.

Se realizó también un análisis comparativo de los procesos definidos para cada una de las categorías. Utilizando los datos de las entrevistas y las bitácoras se valoró el desarrollo de los procesos para encontrar similitudes y diferencias. Los resultados obtenidos fueron contrastados con la teoría existente dotando así de confiabilidad y validez a la investigación mediante la triangulación de la información.

Dicho análisis nos permitió abordar la pregunta de investigación ¿de qué manera el empoderamiento docente permite al profesor apropiarse de su práctica educativa? y contribuir a los objetivos de este trabajo: analizar el grado de apropiación de la práctica docente de un profesor mediante el proceso de empoderamiento, diseñar un ambiente de aprendizaje desde la perspectiva de la TS y favorecer la transposición didáctica de los saberes matemáticos relacionados con el cálculo integral (integral definida).

4.1 Presentación de los datos y discusión de los resultados

Los datos presentados a continuación corresponden a los instrumentos aplicados a un profesor del área de matemáticas de una institución de nivel medio superior mexicano. De entre las diferentes asignaturas que imparte, se observaron las horas clase de uno de sus grupos de cálculo integral formado por 32 estudiantes de entre los 17 y 18 años de edad.

Para fines del presente estudio se crearon categorías con el propósito de constatar la apropiación del empoderamiento del profesor durante su práctica docente. Además para cada una de ellas se estableció un proceso, una acción concreta que permite valorar la presencia de la categoría durante el trabajo de campo.

Las siguientes tablas muestran algunos fragmentos de las entrevistas inicial y final del docente (E1 y E2 respectivamente), así como las anotaciones obtenidas de las bitácoras de observación de las clases antes y después de la fase experimental (B1, B2 y B3, B4, respectivamente).

Para facilitar la comparación y análisis de los datos, se presenta una tabla para cada una de las categorías. En dichas tablas, los datos se agrupan en tres columnas: antes, durante y después, mismas que corresponden a los diferentes momentos de la fase experimental y cuya referencia es la implementación de las actividades que conforman la secuencia didáctica, diseñada en la unidad socioepistémica (Apéndice G).

4.1.1. Resultados obtenidos en Saber Matemático. La siguiente tabla compara los datos obtenidos en la fase experimental relativos a la categoría del Saber Matemático (SM) que corresponde a la dimensión cognitiva y epistemológica de la unidad socioepistémica.

Tabla 4
Resultados sobre SM (Dimensión cognitiva y epistemológica)

<i>Proceso: Evidencia una comprensión clara y profunda del saber matemático y sus aplicaciones</i>		
<i>Antes</i>	<i>Durante</i>	<i>Después</i>
34 ¿Qué es lo que un alumno debe saber hacer después de la clase de cálculo? 35 <i>En este caso, primero lo que es en sí la generación del modelo matemático. Para ellos, generar un modelo de... pues en este caso, vendría siendo una ecuación de segundo o de tercer grado.</i> E1	El docente inicia con un breve comentario al respecto del problema de la cuadratura y la forma en que Newton lo aborda. Hace notar que el trabajo que se va a realizar, está relacionado con uno de los textos de Newton. B3	34 <i>Como se les manejó pues les impactó mucho más porque..., principalmente cuando decía "es que Newton no derivaba, él veía de qué manera lo podía resolver, no tenía tan desarrollado las derivadas y lo tenía que hacer así"- Eso a ellos les impactó mucho. Ya no fue la mención histórica nada más, por supuesto que si da más, mayor aprendizaje. Nunca me había puesto a buscar alguno de los trabajos de Newton, aquí los conocí más a profundidad.</i> E2
100 <i>Les traigo el ejercicio del uso del celular, donde comparan el costo por minuto o tiempo contra saldo.</i> E1	El docente pasa por los equipos verificando que se realicen correctamente los cálculos y se vaya realizando la actividad. B3	
147 <i>Tanto el proceso como el planteamiento son importantísimos vamos, porque el planteamiento por un lado los hace reflexionar... el planteamiento es muy importante</i>	En las actividades propuestas se presenta un análisis del trabajo de Newton al respecto de la cuadratura. B3	

4.1.1.1 Análisis de resultados obtenidos en SM. El docente ya incorporaba aplicaciones de los contenidos matemáticos basados en el contexto de los alumnos, lo que crea pertinencia al saber matemático. Las respuestas a la entrevista inicial sugirieron que el aprendizaje estaba basado en los procesos matemáticos, lo que conlleva una enseñanza del cálculo centrada en los objetos matemáticos. Este paradigma coincide con las observaciones del trabajo de Cantoral (2003).

Los cambios que implicó la metodología radican en la incorporación de un sustento histórico que brinda relevancia al saber. Para tal fin, fue necesario que el docente profundizara en la comprensión de los saberes involucrados en las actividades para que pudiera guiar y orientar a los alumnos en la resolución de la actividad. Como bien lo señala el docente en la entrevista final al término de la actividad, el proceso le permitió indagar más y acrecentar su acervo matemático con los trabajos revisados.

La práctica docente se vio enriquecida al incorporar el enfoque histórico a los problemas y aplicaciones que se manejan normalmente en el curso, pues requiere que el docente estudie y comprenda en mayor profundidad el saber a enseñar. Lo anterior contribuye a un estado de formación continua en cuanto a la naturaleza del saber matemático, postura que se ve alineada con la TS como lo señalan Cantoral y Reyes (2014) al permitirle al docente regular sus acciones y decisiones didácticas.

4.1.2. Resultados obtenidos en Liderazgo Grupal. En la tabla 5 se presentan los datos observados al respecto de la categoría definida para la dimensión sociocultural de la unidad socioepistémica, el Liderazgo Grupal (LG).

Tabla 5
Resultados sobre LG (Dimensión sociocultural)

<i>Proceso: Favorece el pensamiento reflexivo entre los estudiantes, motivándolos a expresar sus opiniones o posturas ante determinadas situaciones.</i>		
<i>Antes</i>	<i>Durante</i>	<i>Después</i>
Los alumnos responden al azar las preguntas hechas por el docente al respecto de las diferentes etapas del problema. B1	Preguntas de reflexión en la unidad socioepistémica:	Debido a que la actividad se realizó en hora extra clase, los alumnos que acudieron tenían mayor interés por lo que el trabajo fue más eficaz. BIV
El grupo es participativo, responde a las preguntas del docente y externa sus dudas. B1	Comenten en equipo y anoten sus conclusiones al respecto del valor o de las dificultades para encontrarla (el área bajo una curva).	80 <i>Este tipo de trabajo sí los involucra, de pronto un alumno estaba por allá, como que no... pareciera que no quería, como ellos mismo lo dicen de pronto tiene pereza de estar pensando pero cuando ven que ya está la actividad ahí ... ya están razonando a pesar de que nosotros los vemos que no se integran, que están por allá distraídos, o que están allá en otra... apartados de lo que viene siendo el equipo, sin embargo si están razonando y eso es lo que nosotros como docentes debemos ver. E2</i>
Muchas dudas tienen que ver con conocimientos previos de matemáticas, eso hace que se pierda mucho tiempo pues ante el surgimiento de una duda el docente detiene la actividad para ayudar individualmente a cada alumno. B1	¿Cómo es el valor obtenido en $SUMA_5$ con respecto al área bajo la curva (curvatura), mayor, menor o igual? ¿Por qué?	
Algunos alumnos se limitan a copiar la información y cuando es el momento de trabajar no lo hacen pues el docente está ocupado con los alumnos que acuden a su escritorio. B2	¿Qué le harían a este método para obtener una aproximación mejor del área bajo la curva?	
	¿Qué deberían hacer para seguir aproximando el área?	
	¿Qué tanto podrían refinar la partición? Es decir, ¿cuál es el máximo número de rectángulos que se pueden construir?	
<i>Proceso: Se dirige a los estudiantes con respeto y les atiende cuando estos le externan sus comentarios.</i>		
<i>Antes</i>	<i>Durante</i>	<i>Después</i>
135 <i>Cuando se resuelve el ejercicio trato de plasmarlo en el pizarrón dejarlo planteado... doy un tiempo para que lo resuelvan ellos, ya que lo resolvieron...pongo alguno de ellos que ya prácticamente lo ha terminado para que ellos pasen al pizarrón y lo resuelvan. E1</i>	Se hace evidente el esfuerzo del docente por involucrar a todos los alumnos en la actividad. BII	¿Cómo ves la forma de resolver estas dudas? P1: <i>Si, totalmente, esta forma de trabajo si los involucra, de pronto un alumno estaba por allá, como que no... pareciera que no quería, como ellos mismo lo dicen de pronto tiene pereza de estar pensando pero cuando ven que ya está la actividad ahí...este... finalmente si ya están razonando y comienza la discusión primero entre ellos y luego te involucran a ti. E2</i>
172 <i>Quizá tenga deficiencias en el resultado pero tú puedes retroalimentar fácilmente. Para el resultado tú puedes decir: "Mira aquí tienes este error". E1</i>	En general todos los alumnos seguían el trabajo, aunque hubo algunos que se limitaban a observar, se invitó al docente a acercarse con los equipos que tenían a dichos alumnos y hacerles preguntas sobre lo que iban haciendo. Algunos de los jóvenes se interesaron y contribuyeron a la actividad. BII	
Si alguno expresa que no entiende de donde salió algún dato, el docente	Se percibe un cambio en la manera en que el docente	

<p>evalúa la función en un valor en específico. El docente detiene la actividad para ayudar individualmente a cada alumno. B1</p> <p>El docente va resolviendo dudas específicas para algún alumno y otros más se reúnen alrededor para mirar cómo se resuelve. Mientras tanto los demás platican de otros temas y unos cuantos siguen trabajando en el problema. B2</p>	<p>responde las dudas pasando de utilizar el lápiz a hacer cuestionamientos para que el alumno pueda responderse a sí mismo. BIII</p>	<p><i>Incluso algunos que nunca hablan, te hacen preguntas pues el trabajar en equipo les ayuda a convivir y se animan a platicar más. E2</i></p>
--	---	---

4.1.2.1 Análisis de resultados obtenidos en LG. El ambiente de trabajo dentro del aula se desarrolló en un clima de cordialidad y respeto mismo que se mantuvo en todo momento. La diferencia significativa radicó en la manera en que el docente interactuó con los alumnos pues ésta evolucionó de una interrogación directa al estudiante y la atención de dudas conceptuales hacia preguntas orientadas a la reflexión y discusión con su grupo de trabajo.

De manera particular, resaltamos la forma en que se respondieron las dudas de los alumnos. En un principio, el docente se limitaba a responderlas directamente o a tomar el lápiz y escribir la respuesta a los ejercicios, pero al final sólo se fue guiando al estudiante mediante nuevas interrogantes o comentarios de manera que fuera él mismo quien se respondiera. El docente reconoció que la metodología propuesta incide en una mayor participación de los alumnos, lo cual supone una mayor interacción entre el docente y los alumnos.

Estas observaciones posibilitan la autonomía entre los estudiantes contribuyendo a la mejoría de su aprendizaje pues les permiten desarrollar habilidades de pensamiento y reflexión como parte de las actividades a realizar. Existe además una interacción constante con el docente lo que sienta las bases para la psme que, como señalan Cantoral y Reyes (2014), caracterizan el fenómeno del empoderamiento.

4.1.3. Resultados obtenidos en Reflexión sobre Práctica Docente. En la tabla 6

se muestran los datos observados en cuanto a la Reflexión sobre Práctica Docente (RSPD), categoría definida para la etapa de Institucionalización en la unidad socioepistémica.

Tabla 6
Resultados sobre RSPD (Institucionalización)

<i>Proceso: Participa en ambientes de aprendizaje que faciliten la comprensión y construcción social del conocimiento.</i>		
<i>Antes</i>	<i>Durante</i>	<i>Después</i>
42 <i>Se toman muchos ejemplos de los textos.</i> E1		63 <i>Deben irse compaginando las actividades de tal manera que el tiempo que se está frente al grupo dándole explicación, se reduzca al indispensable, las clases tienen que ir incrementando en esta forma para que trabajen ellos de esta manera...son mucho más enriquecedoras ...E2</i>
54 <i>Yo hago un tema de inducción con ellos.</i> E1		80 <i>Este tipo de trabajo si los involucra.</i> E2
128 <i>Tareas, obviamente, es su práctica, practiquita habla...y el ejercicio en clase yo lo reviso.</i> E1		(sobre el material utilizado)
135 (Sobre los ejercicios) <i>Trato de plasmarlo en el pizarrón dejarlo planteado en el pizarrón y doy un tiempo para que lo resuelvan ellos, ya que lo resolvieron por ejemplo pongo alguno de ellos.</i> E1	Secuencia didáctica de la unidad socioepistémica	103 <i>Al paso del tiempo, vas a tener material y ya sólo los vas adaptando, ... por supuesto que si vale la pena, hay que ir reduciendo el tiempo de horas frente a grupo e incrementar este tipo de actividades.</i> E2
El docente preparó un problema similar a los de tarea debido a una duda grupal. B1		
La clase gira entorno a la explicación que da el maestro sobre los conceptos y la información que dicta, luego los alumnos resuelven ejercicios. B2		
<i>Proceso: Utiliza diferentes recursos didácticos durante la clase.</i>		
<i>Antes</i>	<i>Durante</i>	<i>Después</i>
109 <i>Se resuelven ejemplos que vienen en el texto</i> E1	Secuencia didáctica de la unidad socioepistémica	23 <i>Claro, les impacta, les ayuda muchísimo y les hace diferente la clase, como más amena, más atractiva .E2</i>
179 <i>Pizarrón, pero aquí es que el alumno mismo elabore algún objeto....y por otro lado hay una página de internet donde ellos ven problemas.</i> E1	Marcadores Pizarrón blanco Proyector	
197 <i>Sí, les doy una... una hoja de trabajo, una práctica.</i> E1	Applet de Geogebra	

El docente usa diferentes colores para hacer énfasis en conceptos importantes o para remarcar información. B2

Proceso: Reflexiona sobre los procesos de construcción del conocimiento tanto propios como de sus alumnos.

<i>Antes</i>	<i>Durante</i>	<i>Después</i>
<p>33 ¿Cuáles son los desafíos que has visto? P1: <i>En este caso, primero lo que es en sí la generación del modelo matemático. Para ellos, generar un modelo de... pues en este caso, vendría siendo una ecuación de segundo o de tercer grado, sí es un poquito difícil para ellos, porque pues es algo que ellos no traen de una manera dominada y mucho menos que el sistema educativo no les tiene considerado dar ese argumento de cómo generar lo que viene siendo su modelo su ecuación.</i> E1</p> <p>61 ¿Qué es lo que tú consideras que el alumno debe saber hacer? P1: <i>Pues precisamente generar su... generar una función referente a los que es su contexto y precisamente eso es con lo que yo voy cerrando el tema. Lo que yo busco como objetivo en el tema. Que el alumno genere una función relativa a su contexto.</i> E1</p> <p>121 ¿Cómo crees tú que favoreces el logro de esos saberes, me hablabas de trabajo colaborativo, me hablabas de ejercicios del libro de texto... alguna otra cosa que recuerdes? P1: <i>Pues viene siendo, este... colaborativo, eh, actividades en clase, ejercicios en clase, también tomados del libro de texto y solución de problemas son los que yo les planteo, se solucionan problemas en clase.</i> E1</p> <p>133 ¿Tienes alguna forma de verificar el resultado en grupo? P1: <i>Bueno, sí. Cuando se resuelve el ejercicio trato de plasmarlo en el pizarrón dejarlo planteado en el pizarrón y doy un tiempo para que lo</i></p>	<p>El docente pasa por los equipos verificando que se realicen correctamente los cálculos y se vaya realizando la actividad. BIII</p> <p>El docente, suponemos que por inercia, a veces toma el lápiz de un alumno y escribe la respuesta a sus dudas en el cuaderno. BIII</p>	<p>10 ¿Tú cómo crees que contribuyas a desarrollar los saberes de la integral en este caso? P1: <i>Sí, porque contribuye principalmente a reforzar sus conocimientos y comprender principalmente que es lo que está pasado al momento de estar... este... gráficamente en este caso, que es lo que está pasando con las funciones, en este caso la función de integración.</i> E2</p> <p>42 ¿Qué es lo que a tú parecer, debería saber el alumno como parte de la verificación del conocimiento? P1: <i>(Reflexionando) Pues ya de este caso de la integral definida, viene siendo lo que es el área bajo la curva, él tiene que aprender a hacer el cálculo de área bajo la curva, inclusive no solamente de una función, yo lo llevo a dos funciones, el área que existe entre esas dos funciones.</i> E2</p> <p>60 ¿Cómo ves favorecida tu práctica docente con la metodología de esta experiencia? P1: <i>Bastante, ayuda mucho para lograr el aprendizaje del estudiante, yo como lo veo es... deben irse compaginando las actividades de tal manera que el tiempo que se está frente al grupo dándole explicación se reduzca al indispensable, al tiempo indispensable que tengas que estar en el frente dándole, explicándole en sí el tema, que en gran mayoría se vayan incrementando este tipo de actividades, las clases tienen que ir incrementando en esta forma para que trabajen ellos de esta manera.</i> E2</p> <p>113 ¿Qué características debe reunir un docente que se anime a tener al grupo? P1: <i>Pues... primero que sea un docente que le guste preparar todo el material,</i></p>

resuelvan ellos, ya que lo resolvieron por ejemplo pongo alguno de ellos que ya prácticamente lo han terminado para que ellos pasen al pizarrón y lo resuelvan ya ellos E1

146 Para ti ¿qué es más importante, el proceso, el concepto o ambos?

P1: Los dos, tanto el proceso como el planteamiento son importantísimos vamos porque el planteamiento por un lado los hace reflexionar. E1

167... ¿Qué es más importante, qué es lo que le rescatarías, el proceso que le ayudó a construir todo ese planteamiento o el resultado en sí?

P1: No, pues en este caso es el proceso, toda la disposición todo el desempeño que él tuvo en el proceso. En este caso como evaluación del estudiante yo me voy más por lo que es el proceso, cómo se desempeñó con qué actitud, con qué disposición hizo todo el proceso y aunque quizá el resultado no sea tan exacto tan preciso. E1

que se comprometa a prepararlos, que tenga el docente la habilidad de agrupar los contenidos temáticos para desarrollar este tipo de proyecto, de tal manera que su contenido temático lo lleve al cumplimiento del mismo programa y que esto a la vez le sirva de herramienta, le vaya dando herramientas, saberes, para desarrollar el proyecto. E2

121 Y en cuanto a su práctica una vez que ya está en clase, ¿qué recomendarías?

P1: Asumir el rol de...tanto de observador, por un lado, de facilitador y de guía, o sea de guía para que su proyecto no se le venga abajo. E2

134 El docente de nuestra institución ¿estará preparado para hacer esto? ¿Qué le falta?

P1: No pues mucha capacitación, ¿qué sería? Capacitación y convencimiento, principalmente lo último. E2

159 *Yo creo que es así como los docentes debemos ir trabajando y viendo que podemos mejorar. Aunque es una labor titánica. Pero es importante, si no nos sentamos un ratito a platicar a intercambiar ideas a ver esto precisamente, ¿cómo tú me vas a conocer a mí y cómo te voy a conocer a ti si no es precisamente hablando de estos temas? E2*

4.1.3.1 Análisis de resultados obtenidos en RSPD. El diseño de las actividades en la secuencia didáctica permitieron crear un ambiente de aprendizaje diferente al que usualmente utilizaba el docente. La clase de matemáticas dejó de centrarse en la resolución de ejercicios y la atención de dudas, para brindarle al alumno un papel más activo y que lo involucrara más. No obstante que el docente reconoció dicha característica, siguió pensando en la evaluación centrada en los objetos, cuestión que considera un tema a tratar en investigaciones futuras debido a que la evaluación representa una de las limitantes del presente estudio.

El docente valoró la importancia del material desarrollado dejando ver la posibilidad de adaptarlo para trabajos futuros, lo que contribuye a uno de los objetivos de esta investigación: crear material para cursos posteriores.

La fase experimental permitió al profesor reflexionar al respecto de su propia práctica docente. Sus respuestas dejan ver un reconocimiento del enriquecimiento que le brindó la actividad: incorpora el trabajo colaborativo en el aula, algo que sólo se consideraba para las tareas y trabajos extraclase, le permitió visualizar y por ende, valorar el proceso en la construcción del conocimiento, surgió la necesidad de desarrollar habilidades docentes y se planteó la opción de trabajar en colaboración con otros profesores.

Estas observaciones coinciden con lo que Fullan (1997) caracteriza como cambio educativo significativo: cambios en convicciones, estilo de enseñanza y materiales, aspectos que, a decir del autor, sólo se producen mediante un proceso de evolución personal en un contexto social. Lo anterior dio pauta para hablar de un empoderamiento por parte del sujeto de estudio si consideramos al fenómeno en cuestión como un “proceso en colectivo, que parte de la reflexión para consolidarse en la acción, que se produce desde el individuo sin la posibilidad de ser otorgado y, por sobre todas las cosas, que transforma su realidad” (Cantoral y Reyes, 2014, p.365).

Como resultado de lo antes expuesto, resaltamos aquellas características que nos permiten afirmar que el profesor se adueñó de su práctica educativa: adoptó una nueva forma de trabajo que propició la movilización de sus conocimientos matemáticos, asumió una postura de liderazgo como orientador y guía que le permitió tomar decisiones reflexivas y críticas al respecto de la mejor manera de desarrollar su clase y planteó la opción de discutir con otros docentes al respecto de experiencias, métodos y técnicas a fin de enriquecer su praxis educativa. Estas observaciones enriquecen la práctica educativa del profesor y establecen una forma de trabajo que puede ser vista como un proceso de formación continua. Dicho proceso parte de un análisis reflexivo y

crítico que permite al docente tomar decisiones al respecto de su quehacer educativo a fin de transformar la realidad que le rodea.

Lo anterior nos lleva a afirmar que el docente sujeto de la investigación experimentó el fenómeno del empoderamiento caracterizado por el desarrollo de ciertas habilidades que le permiten decidir sobre su práctica educativa (Artigue, 2004) e incorporar las dimensiones de la TS favoreciendo la psm y la construcción social del conocimiento (Cantoral y Reyes, 2014) y enriqueciendo sus concepciones didácticas y pedagógicas (López et al, 2004). Este resultado contribuye también al problema de la formación docente pues establece una metodología a incorporar en los programas de formación continua del profesorado, siendo objeto de futuras investigaciones.

No obstante el cambio significativo en la didáctica del profesor, es importante recalcar un área de oportunidad que se observó en el estudio: el aspecto de la evaluación. Hoy en día diversas investigaciones al respecto apuestan a una evaluación centrada en los procesos más que en los objetos de aprendizaje.

Como se señaló en su momento, una de las limitaciones del estudio consistía en que no se abordaba el aspecto de la comprensión del conocimiento por parte de los alumnos, no así la percepción del docente en cuanto a la verificación del conocimiento pues esto marca las directrices para las acciones y actividades que pretenda desarrollar. El pensamiento del docente al respecto no reflejó una diferencia significativa, como puede leerse en las respuestas que se presentan en la última parte de la tabla 6 y que responden a la pregunta: ¿Qué es lo que un alumno debe saber hacer?

Con base en dichas respuestas, podemos concluir que la verificación del conocimiento sigue centrada en los objetos de aprendizaje por lo que es necesario sensibilizar al docente al respecto de modificar este paradigma que se contrapone a los procesos desarrollados por el alumno durante las actividades realizadas. Así, el aspecto de la asimilación del conocimiento por parte del alumno se plantea como objeto de estudio para futuras investigaciones.

5. Conclusiones

5.1 Principales hallazgos

Las problemáticas relacionadas con la educación matemática han evolucionado históricamente hasta consolidar una disciplina para su estudio, la Matemática Educativa. De manera particular, la formación del profesorado de matemáticas en educación media superior es un tema pertinente de estudio, toda vez que en dicho nivel educativo laboran muchos profesionistas cuya formación pedagógica se da a través de la práctica, la experiencia y los cursos de profesionalización. Así, surge la necesidad de brindar herramientas, métodos y procesos que permitan mejorar la práctica docente.

En este sentido se propuso el fenómeno del empoderamiento docente desde la perspectiva de la Teoría de la Socioepistemología y se estudió el caso de un profesor de matemáticas a fin de responder a la pregunta ¿de qué manera el empoderamiento docente permite al profesor apropiarse de su práctica educativa? Los principales hallazgos se enuncian a continuación.

La estructura e implementación de las actividades de la secuencia didáctica favorecieron la construcción social del conocimiento y el aprendizaje por parte del alumno, mientras el profesor supervisaba su desempeño atendiendo dudas puntuales. Con ello la práctica del docente se alejó de la técnica expositiva y el énfasis en los objetos de aprendizaje, como se observaba antes del experimento. Lo anterior contribuye al objetivo de la investigación referente a la participación en un ambiente de aprendizaje que favorezca la transposición didáctica.

El pensamiento crítico y reflexivo sobre sus acciones, permitió al docente incorporar nuevos elementos en su práctica educativa como recursos materiales y tecnológicos y también valorar los procesos de construcción del conocimiento. De igual manera, la interacción con los alumnos se volvió más recurrente y efectiva pues no se limitó a resolver dudas conceptuales y algorítmicas, sino que sus respuestas incitaban al

estudiante al razonamiento, profundización y argumentación. Esta forma de trabajo contrastó significativamente con la conducta de la primera clase observada en la que, si bien se respondían dudas particulares, esos momentos detenían la dinámica de la clase y se limitaban a procedimientos algebraicos o aritméticos.

De esta manera el docente se vio inmerso en un proceso de mejora personal y académica que se puede corroborar al comparar las horas clases antes, durante y después de las actividades diseñadas. Como resultado, el profesor experimentó una apropiación de su práctica docente, que se ve reflejada en la transformación de su realidad a través de decisiones y acciones pedagógicas.

5.2 Discusión de resultados

Las acciones antes descritas contribuyen al proceso formativo del profesor de cálculo integral sujeto de esta investigación, pues le permitieron enriquecer su práctica docente con acciones y procesos específicos. Por ello se considera pertinente la inclusión del empoderamiento docente en el sistema formativo de los profesores, ejemplificando los trabajos de Cantoral y Reyes (2012,2013 y 2014).

Al respecto de la pregunta de investigación ¿de qué manera el empoderamiento docente permite al profesor apropiarse de su práctica educativa?, podemos argumentar que dicho proceso contribuyó significativamente en tres principales aspectos: el saber matemático, el liderazgo grupal y la reflexión sobre la práctica docente.

En cuanto al saber matemático, la incorporación de los trabajos de Newton en la construcción de la unidad socioepistémica dio cuenta del enriquecimiento del contenido disciplinar del profesor, pues si bien es cierto que es Ingeniero de profesión, la unidad socioepistémica diseñada le brindó la oportunidad de profundizar sobre los contenidos del dME, conocer el desarrollo histórico de los mismos e incorporarlos a una de sus clases. No obstante, se debe poner atención en la asimilación de dicho conocimiento por

parte del profesor y del alumno, aspecto que no se abordó en esta investigación.

En cuanto a las acciones que señalan una evolución del liderazgo grupal, la interacción docente-alumno y el rol del docente son las más significativas pues la investigación permitió al profesor centrar al alumno como participante activo y reflexivo del aprendizaje. Las acciones del docente dejaron de centrarse en la explicación de conceptos y algoritmos para dar paso a una clase más dinámica favorecida por la constante interacción del docente con sus alumnos. Esta forma de trabajo supone tiempo y puede llegar a extender la clase, por lo que se debe poner atención en la planeación de la misma.

En cuanto a la reflexión sobre la práctica docente, se logró que el sujeto de investigación hiciera las observaciones y comentarios pertinentes con base en las observaciones registradas. Además, derivado del trabajo conjunto con uno de sus pares y de la experiencia vivida, el docente realizó un análisis reflexivo en el que se mencionaron las bondades de trabajar con las actividades de aprendizaje diseñadas, valoró el proceso de aprendizaje de los estudiantes y le permitió tener un mejor desempeño en las horas clase.

Los resultados dan cuenta de un cambio significativo en el desempeño, actitudes e incorporación de recursos didácticos por parte del docente. Con ello se puede afirmar que el fenómeno del empoderamiento contribuye significativamente a la apropiación de la práctica del profesor al brindarle un panorama más amplio de los contenidos a enseñar, permitirle reflexionar y tomar decisiones al respecto de su práctica educativa así como mejorar la interacción con sus estudiantes; respondiendo así a la pregunta de investigación.

Las observaciones anteriores se alinean con las conclusiones de Cantoral y Reyes (2012), pues el trabajo realizado favoreció al aprendizaje centrado en la práctica más que en los objetos matemáticos y permitió al profesor una forma de trabajo diferente

orientada a la rdME.

5.3 Recomendaciones e investigaciones futuras

Luego de analizar los resultados y exponer las conclusiones de la presente investigación y buscando que el fenómeno del empoderamiento sea parte del proceso formativo del docente de matemáticas, se recomienda analizar la posibilidad de incorporar ésta forma de trabajo a los cursos de actualización y formación docente en el área de matemáticas. De igual manera, es necesario dar un seguimiento al fenómeno observado a fin de evitar que el docente retome las acciones anteriores al estudio. Para ello es recomendable mantener una comunicación constante con sus pares a fin de continuar con la reflexión y análisis de su práctica educativa.

En este sentido, derivado de la presente investigación se pueden desprender otras más relacionadas con el empoderamiento docente en profesores de otras asignaturas, con el estudio de diversos factores que lo posibilitan o con la manera más eficiente de dar un seguimiento al profesor que está experimentando este fenómeno. Además se debe procurar la investigación al respecto de la inclusión de este fenómeno en los cursos de formación y actualización docente.

Por otro lado, si bien la investigación se centró en la figura y acciones del docente, el estudio no involucró a sus alumnos, pero no debemos olvidar que ellos son copartícipes del proceso de enseñanza-aprendizaje. Se recomienda que futuras investigaciones estén centradas en preguntas de investigación al respecto de la construcción del conocimiento, el desarrollo de competencias y la concepción hacia las matemáticas por parte de los alumnos cuando el docente se ve inmerso en un proceso de empoderamiento.

En conclusión, el fenómeno del empoderamiento docente favorece el crecimiento personal y profesional del profesor. Su incorporación como una opción para la

capacitación del profesorado brinda la posibilidad de enriquecer la práctica educativa y de desarrollar habilidades y competencias para transformar el desempeño y función del profesor, en este caso, de matemáticas.

Referencias

- Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos? *Educación Matemática*, 16(3), 5-28, Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516302>
- Bishop, A.J. (1985). La Psicología social de la educación matemática. En L. Streefland (Ed.), *Actas de la Novena Conferencia Internacional para la Psicología de la Educación Matemática*. Noordwijkerhout, Holanda.
- Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Revista Latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 9(2), 227-251. Recuperado de <http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v9n2/v9n2a4.pdf>
- Cabañas, G. y Cantoral R. (2007). Una aproximación socioepistemológica al estudio de la integral definida. En C. Dolores, G. Martínez, R. M. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (Eds.), *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula* (p.9-32). España: Ediciones Díaz de Santos. Recuperado de <http://cimate.uagro.mx/cantoral/Archivos%20PDF/CCF.pdf>
- Cabañas, G. y Cantoral, R. (2012). El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. En R. Flores (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25(I)* (p. 1031-1040). México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Recuperado de <http://www.clame.org.mx/documentos/alme25.pdf>
- Cabrera, L. M. y Cantoral, R. (2011). La formación socioepistemológica del profesorado del nivel medio superior mexicano. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 14(I) (p. 767-776). México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. Recuperado de <http://www.clame.org.mx/documentos/alme24.pdf>
- Camacho, M., Depool, R. y Garbín, S. (2008). Integral definida en diversos contextos. Un estudio de casos. *Educación Matemática*, 20(3), 33-57. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/405/40512064003.pdf>
- Camacho, A. (2011). Socioepistemología y prácticas sociales. Hacia una enseñanza dinámica del cálculo diferencial. *Revista Iberoamericana de Educación Superior*. 2(3), 152-171. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/2991/299124244008.pdf>

- Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento. Barcelona, España: Gedisa.
- Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(1), 27-40. Recuperado de http://cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/universitario/conocimiento/Matem%C3%A1tica%20Educativa:%20una%20visi%C3%B3n%20de%20su%20evoluci%C3%B3n*Cantoral,%20Ricardo%20y%20A0Farf%C3%A1n,%20Rosa%20*33560102.pdf
- Cantoral, F., Farfán, R.M., Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Edición Especial, 83-102. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33509905>
- Cantoral, R. (2001) Sobre la articulación del Discurso matemático escolar y sus efectos didácticos. En G. Beitía (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cantoral, R. (1993). Hacia una didáctica del cálculo basada en la cognición. *Publicaciones Centroamericanas*, 7, 391-410. Recuperado de <http://cimate.uagro.mx/cantoral/Archivos%20PDF/Hacia%20una%20didactica%20del%20c%C3%A1lculo%20basada%20en%20la%20cognici%C3%B3n.pdf>
- Cantoral, R. (2003). La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: una mirada emergente. XI Conferencia Interamericana de Educación Matemática (tema Educación Matemática & Desafíos y Perspectivas). Brazil, Blumenau: universidad Regional de Blumenau.
- Cantoral, R. y Reyes, D. (2012). Profesionalización y empoderamiento docente en Matemáticas: una mirada desde la teoría Socioepistemológica. En R. Flores (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25(I)* (p. 1005–1014). México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Recuperado de <http://www.clame.org.mx/documentos/alme25.pdf>
- Cantoral, R. y Reyes, D. (2013). El empoderamiento docente desde la teoría Socioepistemológica: caminos alternativos para un cambio educativo. En R. Flores (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26 (I)* (p. 1783–1793). México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Recuperado de <http://www.clame.org.mx/documentos/alme26v.2.pdf>

- Cantoral, R. y Reyes, D. (2014). Socioepistemología y empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático. *Bolema*, 28(48), 360-382. Recuperado de <http://www.scielo.br/pdf/bolema/v28n48/18.pdf>
- Chevallard, Y. (1997). *La Transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: Aique.
- Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997) *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Madrid, España: ICE-Horsori
- Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de investigación educativa*. 8(3), 265-286. Recuperado de <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2096621>
- Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: el caso de la cultura Maya*. (Tesis de Maestría). De la base de datos del Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional.
- Creswell, J. W. (2007). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five traditions*. Thousand Oaks, CA, EE.UU.: Sage.
- De Lima, M. y Monteiro, A. (2009). Prácticas Sociales Localización y Mapeo: Una discusión curricular del concepto de escala. *Bolema*, 22(32), 1-28. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/2912/291221889002.pdf>
- Dolores, C., Martínez G., Farfán, R.M., Navarro, C., Carrillo, C. y López, I. (2007). *Matemática Educativa*. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula. Ed. Díaz de Santos: México.
- Douady, R. (1995). Nacimiento y desarrollo de la didáctica de las matemáticas en Francia: rol de los IREM. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en Educación matemática* (pp. 1-5). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Eslava, M. y Valdez, E. (2004). Detección de los modos de razonamiento propiciados por el docente de álgebra. En L. Díaz (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17(I) (p. 256-264). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Recuperado de <http://www.clame.org.mx/documentos/alme%2017.pdf>
- Flores, M. y Valenzuela, J. R. (2009). *Fundamentos de Investigación Educativa. Volumen 2*. Monterrey, México: Editorial Digital Tecnológico de Monterrey.

- Fullan, M. y Stiegelbauer, S. (1997). El cambio Educativo. Guía de planeación para maestros. México D.F., México. Trillas
- Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(52), 7-33. Recuperado de http://servidor-opsu.tach.ula.ve/profeso/guerr_o/didmat_web/referencias/1.%20perspectiva/gason_evoluciondidac.pdf
- Godino, J.D. (1991). Hacia una teoría de la Didáctica de las Matemáticas. En A. Gutiérrez (Ed.), *Área de Conocimiento: Didáctica de la Matemática*. (pp. 105-148) Madrid: Síntesis.
- Hernández, S., Fernández, C. y Baptista, L. (2004). *Metodología de la Investigación*. México: Mc.Graw-Hill.
- Howe, A. C. y Stubbs, H. S. (1998). Empoderamiento del maestro de ciencias: un modelo de desarrollo profesional. *Educación del maestro de ciencias*, 8(3), 167-182. Recuperado de <http://link.springer.com/article/10.1023%2FA%3A1009487417488?LI=true>
- Howe, A.C y Stubbs, H.S., (2003). De maestro de ciencias a maestro líder: desarrollo del liderazgo como significado en una comunidad de práctica. *Educación del maestro de ciencias*, 87(2), 281-297. doi: 10.1002/sce.10022
- Hoyles, C. (1982). La perspectiva del alumno del aprendizaje en matemáticas. *Estudios de educación en matemáticas*, 13 (4), 349-372. Recuperado de <http://link.springer.com/article/10.1007/BF00366617>
- Ingvarson, L., Meiers, M. y Beavis, A. (2005). Factores que influyen en el impacto de los programas de desarrollo profesional en el conocimiento, la práctica, resultados de los estudiantes y la eficacia de los docentes. *Archivos de análisis de políticas educativas*, 13 (10), 1-28. Recuperado de <http://epaa.asu.edu/ojs/article/view/115/241>
- Kilpatrick, J. (1998). La investigación en educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad. En J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (eds.), *Educación Matemática* (p. 1-18). Bogotá, Colombia: una empresa docente.
- López, A., Rodríguez, D. y Bonilla, M. (2004). ¿Cambian los cursos de actualización las representaciones de la ciencia y la práctica docente? *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 9(22). 699-719. Recuperado de http://oei.es/docentes/articulos/cambian_cursos_actualizacion_representaciones_practica_docente.pdf

- Lorens, J. L. y Santoja, F. J. (1997). Una Interpretación de las Dificultades en el Aprendizaje del Concepto de Integral. *Divulgaciones Matemáticas*, 5(1/2), 61-76. Recuperado de <http://www.emis.ams.org/journals/DM/v5/art7.pdf>
- Martínez, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento *Relime*, 8 (2), 195-218. Recuperado de <http://www.clame.org.mx/relime/200505b.pdf>
- Mejía, J. (2011). Problemas centrales del análisis de datos cualitativos. *Revista Latinoamericana de Metodología de la Investigación Social*, 1(1), 47-60. Recuperado de <http://www.relmis.com.ar/ojs/index.php/relmis/article/view/11/13>
- Messina, G. (1999). Investigación en o acerca de la Formación Docente: un estado del arte en los noventa. *Revista Iberoamericana de Educación*, 19, 146-207. Recuperado de <http://www.rieoei.org/oeivirt/rie19a04.PDF>
- Montiel, G. (2005). Interacciones en un escenario en línea. El papel de la socioepistemología en la resignificación del concepto de derivada. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(2), 219-235. Recuperado de dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2096335.pdf
- Montiel, G. (2011). Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico. Tesis de maestría. D.F.: Díaz de Santos.
- Moreira, M. A. (2002). La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área. *Investigaciones en Enseñanza de las ciencias*, 7 (1), 7-29. Recuperado de <http://www.if.ufrgs.br/~moreira/vergnaudespanhol.pdf>
- Muñoz, G. (2010). Hacia un campo de prácticas sociales como fundamento para rediseñar el discurso escolar del cálculo integral. *Relime*, 13 (4-II), 283-302. Recuperado de <http://www.clame.org.mx/relime/201016d.pdf>
- Nemiña, E., García, H. y Montero, L. (2009). Desarrollo profesional y profesionalización docente. Perspectivas y problemas. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado* 13 (2), 1 – 13. Recuperado de <http://hdl.handle.net/10481/7378>
- Olave, M. (2005). *Un estudio sobre las estrategias de los estudiantes de bachillerato al enfrentarse al cálculo del área bajo una curva.* (Tesis de Maestría). De la base de datos del Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional.
- Olmos, O. (2009). Algunas ideas para la reconceptualización de la pedagogía como fundamento de la formación docente. *Paradigma* 30(1), 7-29. Recuperado de

http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512009000100002&lng=es&nrm=iso&tlng=es

- Panizza, M. (2004). Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas. En Mabel Panizza (Ed.), *Enseñar matemática en el nivel inicial y el primer ciclo de la E.G.B: análisis y propuestas* (p.59-71). Buenos Aires: Paidós.
- Rico, L., Sierra, M. y Castro, E. (2000). La Didáctica de la Matemática. En L. Rico & D. Madrid (Eds.), *Fundamentos didácticos de las áreas curriculares* (pp. 351-406). Madrid: Editorial Síntesis.
- Robert, A. (2001). La investigación sobre las prácticas y las limitaciones del ejercicio de la profesión de la enseñanza de los maestros. *Revista de didáctica de las matemáticas*, 21 (1-2), 57-80. Recuperado de <http://rdm.penseesauvage.com/Les-recherches-sur-les-pratiques.html>
- Ruíz, L. (2001). Ingeniería didáctica. Construcción y análisis de situaciones de enseñanza-aprendizaje. En G.L. Beitia (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 14(I) (p. 132-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica. Recuperado de <http://www.clame.org.mx/documentos/alme%2014.pdf>
- Serres, Y. (2007). Un estudio de la formación profesional de docentes de matemática a través de investigación-acción. *Revista de Pedagogía*, 28(82), 287-310. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=65908206>
- Soto, D. (2010) *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una Visión Socioepistemológica*. Tesis de maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Stolk, M. J., De Jong, O., Bulte, A. M. W. y Pilot, A (2011). Explorando el Marco de Desarrollo Profesional en Innovación Curricular: el empoderamiento docente para el diseño de Educación Química basada en contextos. *Investigación en ciencias de la educación*, 42(3), 369-388. Recuperado de <http://link.springer.com/article/10.1007/s11165-010-9170-9>
- Taylor, S. J. y Bogdan, R. (1990). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Buenos Aires, Argentina: Paidós.
- Vaillant, D. (2007). Mejorando la formación y el desarrollo profesional docente en América Latina. *Revista Pensamiento Educativo*, 41(2), 207-222. Recuperado de <http://www.pensamientoeducativo.uc.cl/files/journals/2/articles/424/public/424-941-1-PB.pdf>

- Villalba, M. C. (2002). El nacimiento del cálculo. *Apuntes de historia de las matemáticas*. 1(1), 46-53. Recuperado de <http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/1-1-5-calculo.pdf>
- Webb, N. (1982). La composición del grupo, la interacción grupal y el logro cooperativo en pequeños grupos. *Revista de Psicología de la Educación*, 74(4), 475-484. Disponible en <http://psycnet.apa.org/journals/edu/74/4/475/>

Apéndices

Apéndice A. Carta consentimiento de la Institución



Carta de Consentimiento

Ezequiel Montes, Querétaro a 17 de febrero de 2015.

Por medio del presente escrito y como parte de la asignatura del proyecto de tesis que el Lic. Juan Pablo Gómez Estrada realiza en el: Tec de Monterrey, se solicita la autorización para ingresar al centro educativo y aplicar una serie de entrevistas y observar las clases de cálculo integral del grupo 6.2. Lo anterior con el fin de realizar un estudio sobre **“El empoderamiento docente como una opción para la apropiación de la práctica educativa del profesor de matemáticas”**.

De antemano le agradecemos su apoyo ante esta iniciativa educativa.



Lic. Juan Pablo Gómez Estrada

Docente del Plantel



Apéndice B. Carta consentimiento del profesor sujeto de investigación



Carta de Consentimiento

Ezequiel Montes, Querétaro a 17 de febrero de 2015.

Ing. José Miguel Méndez García

Docente COBAQ 24 Villa Progreso

Por medio del presente escrito y como parte de la asignatura del proyecto de tesis que el Lic. Juan Pablo Gómez Estrada realiza en el Tec de Monterrey, se invita a usted a participar en la investigación sobre **"El empoderamiento docente como una opción para la apropiación de la práctica educativa del profesor de matemáticas"**. De aceptar dicha invitación, se le aplicará a usted una serie de entrevistas y observaciones de horas clase con el propósito de desarrollar una secuencia didáctica para fines del estudio. En caso de aceptar participar, toda la información recabada será utilizada únicamente con propósitos educativos.

De antemano le agradecemos su apoyo ante esta iniciativa educativa

Lic. Juan Pablo Gómez Estrada

Docente del Plantel

Firma de aceptación

Nombre y firma

Apéndice C. Entrevista inicial al docente de cálculo integral

Nombre _____ Edad _____

Años de servicio _____ Tiempo laborando en la Institución _____

Nivel de estudios _____

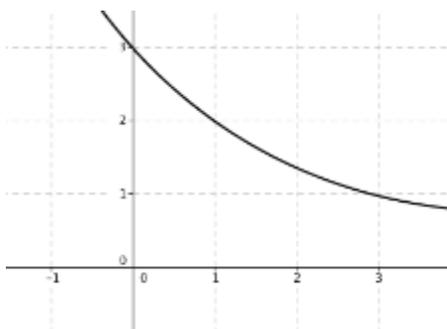
Preguntas

1. ¿Cuáles considera que son los desafíos a los que se enfrenta al enseñar el tema de diferenciales? [**Saber matemático, reflexión sobre práctica docente**]
2. ¿Qué es lo que un alumno debe saber hacer después de haber visto el tema de diferenciales? [**Saber matemático**]
3. ¿Cómo cree usted que favorece al logro de los saberes descritos anteriormente? [**Liderazgo grupal, reflexión sobre práctica docente**]
4. ¿Por qué es importante que el alumno aprenda los procesos y conceptos relacionados con la diferencial? [**Saber matemático**]
5. ¿Es más importante el proceso o el resultado correcto de un ejercicio o problema? [**Liderazgo grupal, reflexión sobre práctica docente**]
6. ¿Qué recursos didácticos ha utilizado en las clases de cálculo? [**Liderazgo grupal, reflexión sobre práctica docente**]
7. ¿Existe una diferencia entre las variables Δy y dy ? [**Saber matemático**]

8. ¿En qué sentido la diferencial es la mejor aproximación lineal de una función $f(x)$?

[Saber matemático]

9. Suponga que cierta función $f(x)$ satisface que $f(1) = 3$ y que la gráfica de su derivada $f'(x)$ es como se muestra en la figura. Estime el valor de $f(0.9)$ usando diferenciales. ¿Qué tan confiable este valor? **[Saber matemático]**



Apéndice D. Entrevista final al docente de cálculo integral

Nombre _____ Edad _____

Años de servicio _____ Tiempo laborando en la Institución _____

Nivel de estudios _____

Preguntas

1. ¿Qué cambios percibió en su clase durante la semana con respecto a la forma de trabajo? [**Saber matemático, liderazgo grupal, reflexión sobre práctica docente**]
2. ¿Qué es lo que un alumno debe saber hacer después de haber visto el tema de diferenciales? [**Saber matemático**]
3. ¿En qué medida, la forma de trabajo de la semana pasada contribuyó a que los alumnos desarrollaran dichos saberes? [**Saber matemático, liderazgo grupal, reflexión sobre práctica docente**]
4. ¿Qué recursos didácticos nuevos incorporó a su práctica educativa durante la semana pasada? [**Liderazgo grupal, reflexión sobre práctica docente**]
5. ¿Cuál cree usted que fue el factor que más influyó para que los alumnos aprendieran o no los saberes relacionados a la diferencial? [**Liderazgo grupal, reflexión sobre práctica docente**]
6. ¿Qué fue lo que usted aprendió de esta experiencia? [**Saber matemático**]

Apéndice E. Bitácora de observación

Lugar:		Grupo:	
Fecha:		Horario:	
Categorías y procesos	Notas Descriptivas	Notas Reflexivas	
Saber matemático			
Introducción y comprensión del concepto de la diferencial a los alumnos			
Aplicaciones de la diferencial			

Liderazgo grupal		
Participación de los alumnos		
Interacción del docente con el grupo		

Reflexión sobre la Práctica Docente		
Ambiente de aprendizaje o secuencia didáctica		
Recursos didácticos		

Apéndice F. Unidad socioepistémica

Con el fin de crear un elemento en nuestra investigación que nos permitiera identificar el grado de empoderamiento del docente sujeto de investigación, se elaboró una unidad socioepistémica, siguiendo el trabajo de Cantoral y Reyes (2014). Esta unidad socioepistémica retomó algunos aspectos históricos del cálculo y estuvo basada en las cuatro dimensiones que contempla la TS, a saber: social, epistemológica, cognitiva y didáctica.

Dimensión social

Los saberes matemáticos que componen el dME están centrados fuertemente en definiciones, conceptos y algoritmos, los cuales muchas veces son presentados al margen del contexto histórico, funcional y situacional en que fueron desarrollados. Lo anterior, conlleva a perder de vista su carácter histórico y cultural pues se deja de lado la consideración de que la matemática es resultado de una actividad humana (Cantoral y Reyes, 2014).

Es por ello que surge la necesidad de que, al interior de aula, se generen las condiciones que permitan una interacción social de los participantes considerando el contexto cultural, social e histórico del saber matemático. En este sentido la dimensión social contribuye, por un lado a la resignificación del conocimiento por parte del alumno al matematizar la realidad (Camacho, 2011) y por otro al fenómeno del empoderamiento docente al generar un espacio para la interacción con los alumnos que le permita poner en práctica diversos recursos didácticos.

Dimensión epistemológica

Una breve reseña del desarrollo histórico del cálculo es mencionada por Cantoral (1993), mientras que en el trabajo de Villalba (2002) el lector puede encontrar más información sobre el nacimiento y evolución del cálculo. Para darnos una idea general, sólo mencionaremos algunos acontecimientos relevantes.

Los primeros problemas de cálculo se remontan hasta la antigüedad y hacen referencia en su mayoría a nociones geométricas y discusiones de índole filosófica sobre el infinito; problemas tratados por Aristóteles, Platón, Pitágoras y Arquímedes, por mencionar algunos. Pero no fue sino hasta el siglo XVII que se sientan las bases del cálculo. Newton y Leibniz desarrollan, cada uno por separado, la teoría matemática centrada en procesos de variación y cambio siguiendo los trabajos de Barrow y Fermat. Los trabajos de estos dos matemáticos se vieron refinados durante el siglo XIX de manera tal que a principios del siglo pasado su reestructuración se basa en ciertas transformaciones aritméticas que inciden en la didáctica del cálculo (Cantoral, 1993).

De esta manera el análisis de la dimensión epistemológica nos permite visualizar el saber matemático del docente o en su caso la profundización del mismo pues muchas veces queda relegado a una nota cultural sin conocer a detalle los hechos que dieron pie a la formalización del cálculo.

Dimensión cognitiva

La dimensión cognitiva hace alusión a la forma en que los estudiantes construyen y comprenden los contenidos matemáticos relacionados con el saber matemático, en este caso la integral definida. Si bien éste no es el objeto de nuestra investigación, los resultados y conclusiones al respecto si deben permear en la práctica docente del profesor pues establecen las directrices para la elaboración de las actividades a realizar al interior del aula.

En la literatura se pueden encontrar diversas investigaciones que abordan la dimensión cognitiva no sólo de la integral, sino del cálculo mismo (Lorens y Santoja, 1997; Cordero, 2005; Olave 2005; Camacho, Depool y Garbín 2008; Muñoz, 2010; Cabañas y Cantoral, 2012). Resaltamos el trabajo de Dolores, Martínez, Farfán, Carrillo, López y Navarro (2007), quienes hacen referencia a las nociones de los estudiantes sobre la conservación de áreas de diversas figuras bajo ciertas

modificaciones lo que permite establecer la conclusión de que la conservación de áreas debe anteceder a la medición de éstas.

Dimensión didáctica

Considerando las dimensiones anteriores y los resultados de la entrevista inicial del estudio, se diseñaron una serie de actividades (ANEXO E) para ser implementadas con algunos de los estudiantes de uno de los grupos del profesor sujeto de investigación. Dichas actividades fueron desarrolladas a fin de evidenciar el fenómeno del empoderamiento mediante las acciones del profesor al interior del aula.

En la primera actividad se trabajó con un acercamiento a los trabajos de Newton sobre el cálculo. En la segunda actividad se trabajó una breve introducción a las sumas inferiores de Riemann como una primera aproximación para el área bajo la curva $y = \frac{1}{x^2}$. Cada una de estas actividades estuvo pensada en privilegiar la construcción del conocimiento mediante las prácticas sociales donde el docente se convierte en mediador entre el conocimiento y el alumno.

Así, la unidad socioepistémica se vuelve el espacio donde se puede apreciar la apropiación del docente, pues contempla actividades relativas al cálculo recuperando aspectos históricos, brinda al docente un panorama cognitivo al respecto de la construcción de los saberes matemáticos, contempla las prácticas sociales para la construcción de los mismos y presenta una propuesta didáctica con actividades para la clase.

Apéndice G. Actividades de Aprendizaje

Actividad 1: Pensando como Newton

Fecha: _____

Nombre de los integrantes:

I.-Un poco de historia

¿Se han preguntado quién o para qué se inventaron todas esas fórmulas raras que se ven en cálculo? Muchas de ellas parecen estar escritas en un lenguaje extraño o sin sentido.

En esta actividad nos adentraremos en el pensamiento de uno de los más grandes personajes de la historia del que, seguramente ya han escuchado en muchas otras asignaturas además de matemáticas: **Isaac Newton**.

Isaac Newton (1642-1727), al igual que G. W. Leibniz (1646-1716), descubrió el cálculo (por decirlo de alguna manera), aunque ambos lo hicieron de manera independiente. No obstante, este gran descubrimiento tiene como base el trabajo de grandes matemáticos predecesores como Kepler, Cavalieri, Torricelli, Pascal, Fermat, Wallis o Barrow.

Pero, ¿qué fue lo que orilló a Newton a estudiar lo que a futuro se enseña en nuestras escuelas y que muchas veces parecen símbolos complicados o raros? Para responder esta pregunta debemos remontarnos hasta la antigua Grecia (¡¡muchos años antes de Newton!!). Ente los muchos problemas que se planteaban los griegos estaba el problema de la cuadratura, es decir cómo construir un cuadrado de igual área que la de una figura dada. Durante mucho tiempo el problema de la cuadratura fue objeto de estudio y hoy en día se pueden encontrar muchas demostraciones para ciertas figuras. De esta manera los métodos para hallar cuadraturas, eran como una especie de matemática

artesanal donde cada ejemplo resolvía un problema concreto.

El gran mérito de lo que llamamos Cálculo radica en que nos brinda un algoritmo válido para todas las expresiones analíticas a la vez y que se basa en que los procesos de cálculo de tangentes (derivación) y cuadraturas (integración) son procesos inversos el uno del otro.

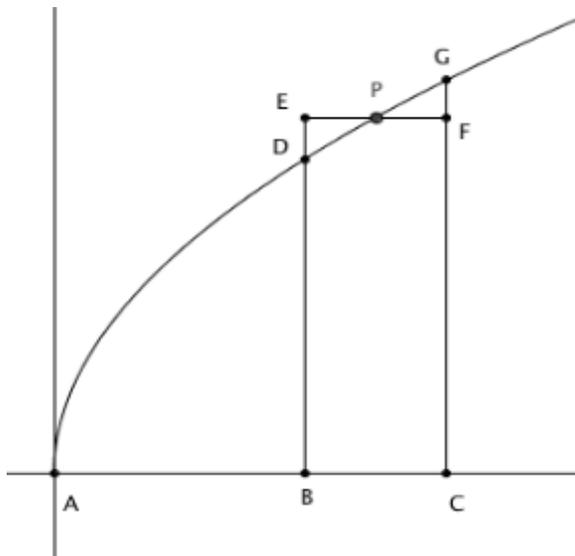
Pero si en los tiempos de Newton no había derivadas o integrales, ¿cómo le hizo para resolver el problema de cuadraturas? Bueno pues en esta actividad analizaremos uno de sus trabajos donde trata de hallar la ordenada (lo que nosotros conocemos como función) de una curva cuya cuadratura se conoce. Cabe señalar que esta actividad aparece en *De Analysis*, una monografía que Newton manda a sus amigos... ¡¡¡en 1669!!! y que contiene las ideas esenciales del cálculo.

II.-Entrando en la mente de Newton

Procedemos a analizar el trabajo y los cálculos de unos de los problemas que motivó el estudio de Newton. El problema decía más o menos así

Hallar la ordenada "y" de una curva cuya cuadratura es $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

Rehagamos el análisis de Newton: La siguiente figura está construida de tal manera que el $\text{Área}_{DEP} = \text{Área}_{GFP}$



a) Observen la figura y localicen en ella las siguientes variables

$\ominus : \overline{BC}$

$x : \overline{AB}$

$v : \overline{BE}$

$z : \text{Área}_{ADB}$

$y : \overline{DB}$

b) Con la información anterior, Newton calculó los siguientes valores, háganlo ustedes también:

$$\overline{AC} = \quad \text{Área}_{BCFE} = \quad \text{Área}_{AGC} =$$

c) No pierdan de vista a dónde queremos llegar: **¿Cómo encontrar "y" a partir de la relación de x y z?**

Para lograr eso Newton realiza algunos cálculos algebraicos. Completen los cálculos que hacen falta, para ello rellenen los espacios en blanco apoyándose en la descripción en cada renglón.

$z^2 = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) \left(\quad \right)$ $zz =$ $(z + \ominus v)(z + \ominus v) =$ $z^2 + \quad + \ominus^2 v^2 = \frac{4}{9}[x^3 + 3x^2 \ominus + 3x \ominus^2 + \ominus^3]$ $2z \ominus v + \ominus^2 v^2 = \frac{4}{9}[3x^2 \ominus + 3x \ominus^2 + \ominus^3]$ $2zv + \ominus v^2 = \frac{4}{9}[3x^2 + 3x \ominus + \ominus^2] \dots\dots (1)$	<p>Multiplicando ambos términos</p> <p>Sustituyendo: x por $x + \ominus v$ y z por $z + \ominus v$</p> <p>Desarrollando los binomios</p> <p>¿Por qué? _____</p> <p>¿Por qué? _____</p>
---	--

d) A continuación viene el ingenio y la creatividad de Newton; si se fijan hasta ahora sólo han usado cálculos algebraicos para el problema. Newton toma a $\ominus = \overline{BC}$ infinitamente pequeño, y ¿qué obtiene? usen su imaginación para desplazar el punto C hacia el punto B.

¿Qué pasa con \ominus ? _____

¿Cómo es v respecto de y? _____

Verifiquen sus respuestas usando el applet proyectado en el pizarrón.

e) Con estas observaciones ¿cómo queda la ecuación (1)?

$2zy = \frac{4}{9} [\quad]$ $y =$	Sustituyan sus observaciones Despejen "y"
-------------------------------------	--

f) ¿Qué es lo que concluye Newton?: *Que la curva cuya cuadratura es $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ tiene ordenada $y = x^{\frac{1}{2}}$*

De esta manera, el problema de las cuadraturas queda inmerso en nuevo contexto: el de obtener áreas por debajo de las curvas. Esto revolucionó la forma de ver las matemáticas y abrió dos nuevos campos de estudio el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral, cuya teoría se fue “perfeccionando” hasta convertirse en lo que tenemos hoy en día.

Pero lo realmente importante es maravillarnos de cómo nace esta gran área: de un simple problema, y de cómo su estudio permite el desarrollo de nuevas ideas y conceptos, pues hoy al igual que hace 3000 (los griegos) o 500 (Newton) años, las matemáticas las construimos, las inventamos nosotros al hacer desde un simple problema hasta una teoría compleja.

g) Para terminar de maravillarnos con el genio de Newton, te invito a reflexionar un pensamiento del propio Newton sobre sí mismo casi al terminar su paso por este mundo.

“No sé cómo puedo ser visto por el mundo, pero a mí me parece haber sido solamente como un niño que juega al borde del mar, y que se divierte al encontrar de vez en cuando una piedra más pulida o una concha más bonita de lo normal, mientras que el gran océano de la verdad yace ante mí completamente desconocido”.

Actividad 2: Aproximando áreas

Fecha: _____

Nombre de los integrantes:

I.-Recordando

La clase pasada estudiamos unos de los trabajos de Newton al respecto de la cuadratura. Lo que demostramos fue que:

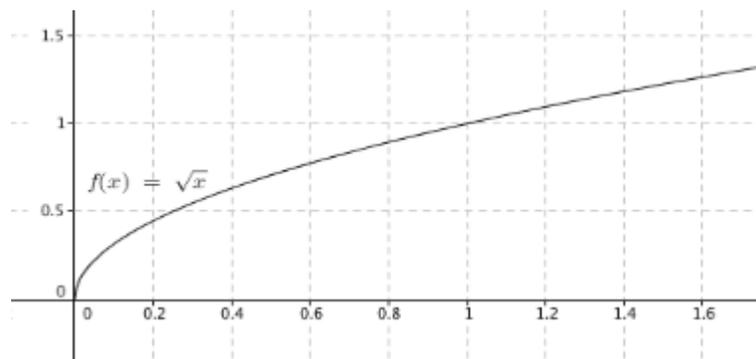
Dada la cuadratura $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, la curva que tiene dicha cuadratura es $y = x^{\frac{1}{2}}$

II.- Otra forma de abordar el problema

Pensemos a la inversa, es decir:

Dada la curva $y = x^{\frac{1}{2}}$, queremos verificar que su cuadratura es $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$.

a) Para ayudarnos un poco tomaremos a $x \in [0,1]$. A continuación se muestra la gráfica de esa curva. Sombreen la región que corresponde a la cuadratura que se quiere encontrar.



b) Obtener el área de una figura es un problema que nos enseñan a resolver desde la primaria. Usualmente nos dan una fórmula, la aplicamos con los datos de la figura y hacemos algunos cálculos sencillos. Entonces, ¿cuánto vale el área que sombrearon? Comenten en equipo y anoten sus conclusiones al respecto del valor o de las dificultades para encontrarla.

¿Cómo hacerle entonces para calcular el área de la esta sección (la cuadratura)? Para eso, vamos a apoyarnos de otra figura de la que si podamos obtener el área.

III.-Aproximando el área.

Las siguientes figuras muestran una parte de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.

Analiza y realiza lo que se pide en cada inciso.

a) Si dividimos el segmento $[0,1]$ del *eje x* en cinco segmentos, todos de igual longitud, ¿Cuál es la longitud de cada uno de ellos?

b) Localicen cada uno de los segmentos anteriores en la gráfica e identifiquen las coordenadas de los puntos que lo forman. Cada uno de ellos será la base de un rectángulo (Ayúdense con el ejemplo de la segunda columna de la tabla 1).

c) Evalúen las abscisas de los puntos finales de la base de cada rectángulo (redondeen a dos decimales distintos de cero) y localicen los puntos resultantes en la gráfica. Ayúdense con la tabla. (Fíjense con el ejemplo de la tercera columna de la tabla 1).

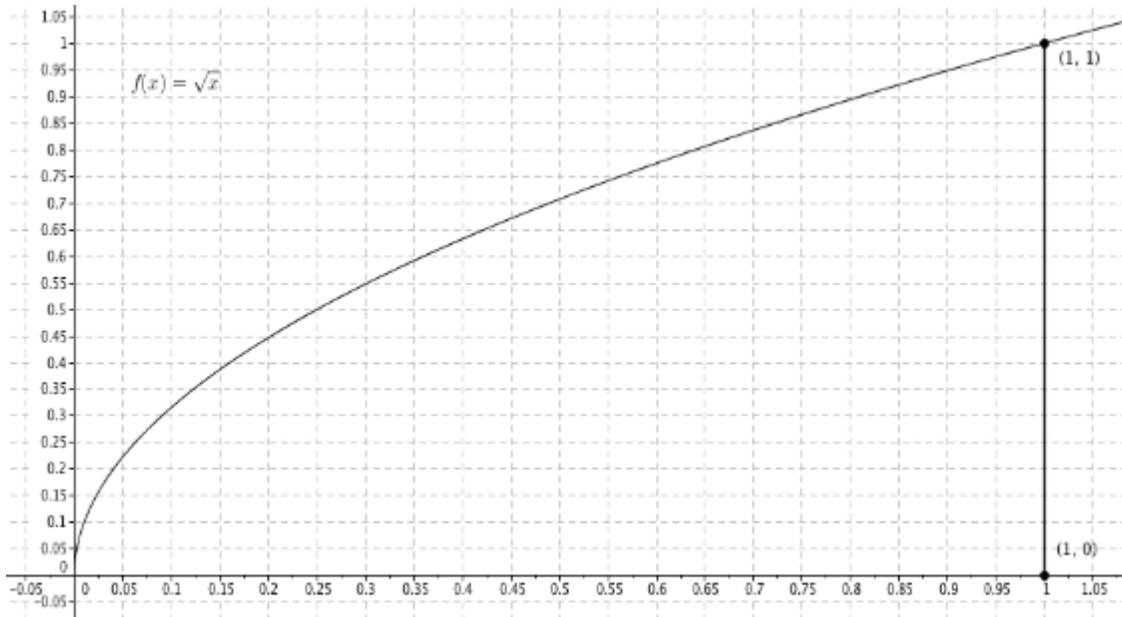
d) Para cada renglón, dibujen el rectángulo que tenga como vértices los tres puntos que encontraste. Para ello deberán agregar un vértice, pero no es muy difícil de localizar. Recuerden, deben formar un rectángulo.

e) Encuentren el área de cada rectángulo (redondeen a dos decimales distintos de cero y regístrenla en la tabla. (Ayúdense con el ejemplo de la cuarta columna de la tabla 1).

f) Finalmente, calculen la suma de las áreas de cada rectángulo y anótenlo en la tabla en el espacio **SUMA₅** (llamada así por el número de rectángulos).

TABLA 1

Número de rectángulo	Coordenadas de su base	Evaluación de las abscisas del segundo punto	Punto resultante de la columna anterior	Área del rectángulo
1	(0,0) y (0.2,0)	$f(0.2) = 0.45$	(0.2,0.45)	0.09
2				
3				
4				
5				
SUMA₅:				



IV.- Análisis de resultados

a) ¿Cómo es el valor obtenido en **SUMA₅** con respecto al área bajo la curva (curvatura) mayor, menor o igual? ¿Por qué?

b) ¿Qué le harían a este método para obtener una aproximación mejor del área bajo la curva?

Comuniquen sus conclusiones al profesor, quien les dará la siguiente parte de la actividad.

III.-Aproximando (aún más) el área

Como seguramente se dieron cuenta, podemos “acercarnos más” al área si construimos más rectángulos o, lo que es lo mismo, debemos dividir el intervalo $[0,1]$ en más de 5 intervalos iguales (matemáticamente hablando, debemos refinar nuestra partición). Los demás cálculos serían los mismos.

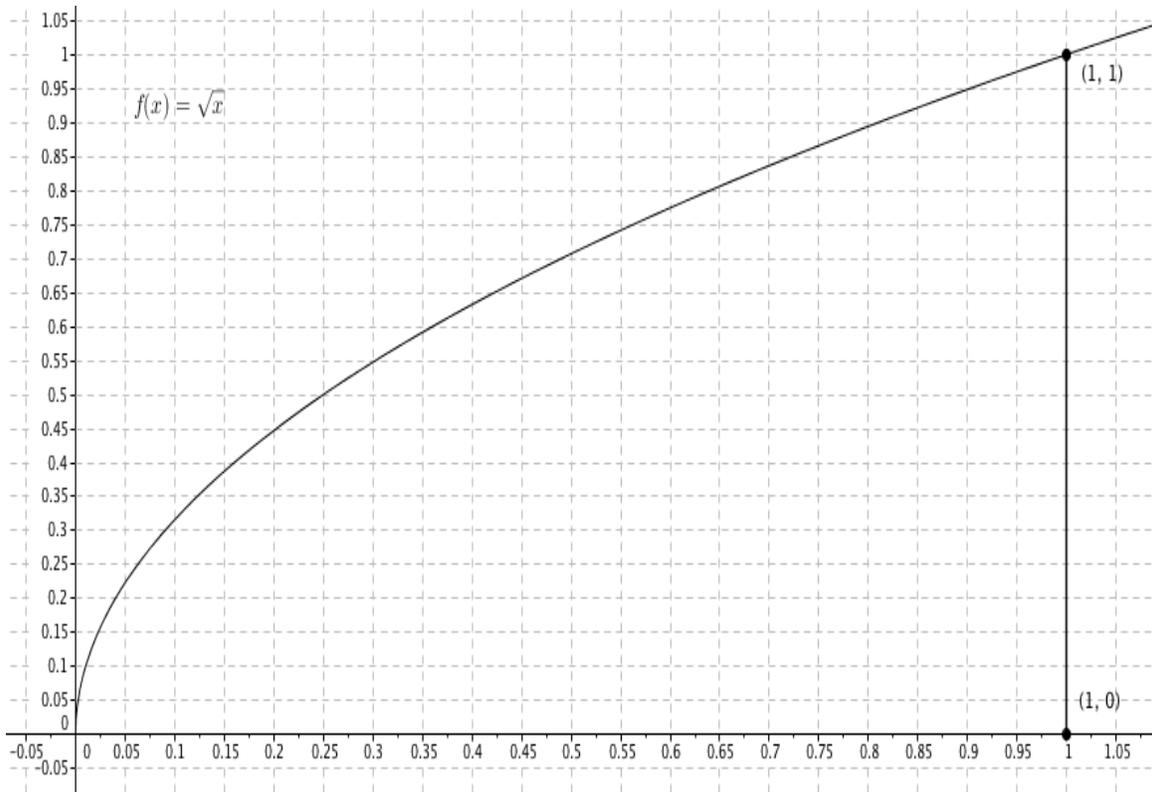
a) Completen la tabla 2 y hagan las anotaciones correspondientes si tomamos 10 intervalos iguales.

TABLA 2

Número de rectángulo	Coordenadas de su base	Evaluación de las abscisas del segundo punto	Punto resultante de la columna anterior	Área del rectángulo
1	(0,0) y (0.1,0)	$f(0.1) = 0.31$	(0.1,0.31)	0.03
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
SUMA₁₀:				

b) ¿Cómo es ahora el valor obtenido en **SUMA₁₀** con respecto al área bajo la curva (curvatura) mayor, menor o igual? ¿Por qué?

c) ¿Qué deberían hacer para seguir aproximando el área?



IV.- Pidamos ayuda a una computadora

a) Utilicen el applet de geogebra y varíen la cantidad de rectángulos para refinar su partición y obtengan las **SUMAS** que a continuación se indican.

SUMA₅₀ =

SUMA₁₀₀ =

SUMA₅₀₀

SUMA₁₀₀₀ =

e) De acuerdo a los resultados anteriores, qué pueden inferir sobre el valor del área buscada?

f) Si calculan **SUMA₁₀₀**, ¿ya no hay pedacitos por encima de la curva? Verifiquen su respuesta haciendo “zoom” en la computadora.

g) ¿Qué tanto podrían refinar la partición? Es decir, ¿cuál es el máximo número de rectángulos que se pueden construir?

IV.- Retomando el método Newton

Si retomamos la conclusión de Newton: La cuadratura $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ es la de la curva $y = \sqrt{x}$

¿Cuál es el valor, según Newton la curvatura de la función $y = \sqrt{x}$ en el intervalo $[0,1]$? (Basta con evaluar el resultado de Newton en $x = 1$). Comparen este resultado con las diversas **SUMAS** que obtuvieron y anoten sus observaciones

V.- A manera de conclusión

Pareciera ser que, no importa que cantidad de rectángulos construyamos, siempre sobraré un poco de área por encima de la curva, sin embargo a medida que aumentamos el número de rectángulos ese sobrante se va haciendo pequeño. Estas ideas se pueden explicar hoy en día con las nociones de límite (¿Por qué?). Luego, el área que buscan sería la suma de las áreas de todos rectángulos.

Hacer esto a mano, resulta demasiado engorroso para un matemático, y la computadora tiene una memoria limitada (recuerda que utilizamos sólo dos décimas de aproximación). Es por ello que a este fenómeno, la acumulación (en este caso de áreas), los matemáticos le llamaron “integral” y le asignaron el símbolo \int en alusión a la “suma” (acumulación).

Esta actividad sólo muestra una pequeña introducción a la noción de la integral, pero les da un buena idea de cómo se desarrollaron tales conceptos. Hoy en día se pueden encontrar múltiples aplicaciones de la integral y que se relacionan con la idea de “acumulación”. Estudiarán estas aplicaciones más adelante.

Apéndice H. Evidencias del trabajo de campo



Figura 1. Estudiantes trabajando con la actividad de aprendizaje (Marzo 2015).



Figura 2. Estudiantes trabajando con la actividad de aprendizaje (Marzo 2015).



Figura 3. Docente interactuando con alumnos durante las actividades de aprendizaje (Marzo 2015).

Currículum Vitae

Juan Pablo Gómez Estrada

Registro CVU: 564159

Originario de Santiago de Querétaro, México, Juan Pablo Gómez Estrada realizó estudios profesionales en Licenciatura en Matemáticas Aplicadas (2008) en la Universidad Autónoma de Querétaro. La investigación titulada “El Empoderamiento Docente: una opción para la apropiación de la práctica educativa del profesor de matemáticas”, es la que presenta en este documento para aspirar al grado de Maestría en Educación con acentuación en Enseñanza Media Superior.

Su experiencia de trabajo ha girado principalmente alrededor del campo de la Educación, específicamente en el área del Bachillerato desde hace 6 años.

Actualmente, Juan Pablo Gómez Estrada funge como profesor de matemáticas en el Colegio de Bachilleres del Estado de Querétaro donde imparte las asignaturas de Matemáticas, Física y Cálculo Diferencial e Integral. Tiene especial interés en desempeñarse como tutor en el plantel, implementar estrategias y acciones que fomenten la participación de los padres de familia así como realizar investigaciones y eventos que favorezcan la formación y reflexión de los docentes al respecto de la educación matemática en el bachillerato.