

AVRAM: Ambientes Virtuales Remotos para el Aprendizaje de las Matemáticas

Linda Margarita Medina Herrera, Benjamín Hernández Arreguín
Tecnológico de Monterrey. Campus Ciudad de México.
linda.medina@itesm.mx

Resumen

Este artículo trata sobre el desarrollo y la implementación de la plataforma AVRAM: Ambientes Virtuales Remotos para el Aprendizaje de las Matemáticas. AVRAM permite visualizar y manipular superficies en un espacio tridimensional virtual. Se presenta las características de AVRAM y las primeras pruebas que se realizaron con estudiantes y maestros de diferentes grupos de Matemáticas II y Matemáticas III. Se encuentra que AVRAM es un instrumento importante en el desarrollo de las habilidades espaciales de los estudiantes y la comprensión de conceptos relacionados con el espacio tridimensional.

Palabras clave: Superficies, tridimensional, virtual.

Introducción

Las representaciones gráficas de superficies tridimensionales son un aliado significativo para la comprensión y el manejo de importantes conceptos del cálculo multivariable. En los últimos años y debido al desarrollo de la tecnología, contamos con calculadoras programables, graficadoras, software especializado como Mathematica y Matlab, e incluso páginas en la red y aplicaciones muy completas como Wolfram Alpha, que han permitido que los profesores tengan recursos para mejorar la enseñanza que tradicionalmente se realizaba por medio de dibujos en el pizarrón.

La tecnología juega un papel primordial al permitir recrear imágenes tridimensionales y admitir su visualización y manipulación en ambientes virtuales remotos controlados por el profesor o los alumnos. El uso de la tecnología no sólo ayuda a adquirir habilidades de abstracción espacial sino que también puede ser aprovechada como un elemento motivador para los estudiantes de la generación milenio.

Este artículo tiene dos propósitos principales: 1) presentar la plataforma tecnológica "AVRAM: Ambientes Virtuales Remotos para el Aprendizaje de las Matemáticas" que permite la autoría, manipulación y visualización de modelos geométricos de superficies en un ambiente 3D remoto 2) mostrar algunas actividades diseñadas para usarse en los cursos de Matemáticas II y Matemáticas III con AVRAM. Esta plataforma surge de la necesidad de incentivar y mejorar la capacidad de abstracción espacial en los estudiantes, para lograr la comprensión y el dominio de conceptos matemáticos relacionados con espacios n -dimensionales. En particular, está diseñado para mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje del cálculo de varias variables mediante el uso de tecnologías móviles, de visualización remota y una serie de actividades diseñadas para este fin.

Antecedentes

El razonamiento espacial es una de las principales componentes de la inteligencia humana y es necesario no solamente en algunos trabajos y programas de educación, sino para prácticamente cualquier actividad que realizamos.

La habilidad de razonamiento espacial se refiere a ser capaz de representar y manipular mentalmente información visual y espacial. Un estudio más profundo de habilidades espaciales corresponde al término "Visualización" que tiene que ver no solamente con relaciones espaciales sino también con orientación, manipulación, interpretación y reflexión sobre objetos, cuadros o diagramas. La Visualización es un concepto que ha sido ampliamente estudiado por muchos autores, por ejemplo, Arcavi [1], Gutiérrez [2], Presmeg [3] y Battista [4], entre otros. Sin embargo no hay mucha evidencia empírica que muestre investigación en el desarrollo de habilidades espaciales en el espacio tridimensional y menos en el entorno de software.

No obstante, el razonamiento espacial es uno de los aspectos de la cognición humana que ha sido estudiado utilizando la tecnología de realidad aumentada y ambientes virtuales. Dünseret [5] afirma que la capacidad espacial puede ser mejorada mediante el uso de estas nuevas tecnologías. Christou et al [6] muestran el desarrollo y aplicación de micromundos dinámicos, que permiten que los estudiantes construyan, observen y manipulen figuras el espacio. La visualización dinámica en el entorno de software, facilita observar cambios y relaciones antes y después de la variación de figuras [6]. Por lo tanto, el entorno del software tiene el potencial de mejorar la comprensión. De acuerdo con Tall [7], el software puede ser utilizado para construcciones laboriosas, mientras que el estudiante puede centrarse en relaciones más específicas.

La plataforma AVRAM

AVRAM es una plataforma que permite la autoría, manipulación y visualización de modelos geométricos de superficies en un ambiente 3D remoto.

La plataforma AVRAM está compuesta de dos elementos: Un servidor con una aplicación que se encarga de sincronizar clientes y generar las gráficas tridimensionales y una aplicación Android que varios clientes móviles (teléfonos y tabletas) pueden utilizar para conectarse a una sesión virtual donde uno de los clientes, desde un dispositivo móvil, funge como profesor coordinando y guiando lo que se despliega.

El servidor es una computadora de alto desempeño gráfico controlada por el profesor, donde - previo a la clase- realiza la autoría, y -durante la clase- manipulación y despliegue de un ambiente virtual de modelos geométricos, superficies cuadráticas, planos y funciones. El ambiente virtual es enviado a varios clientes móviles mediante la red (Wi-Fi local o remotamente) para que los modelos sean visualizados y manipulados por los alumnos de forma individual de tal manera que puedan resolver las preguntas planteadas por el profesor. Además el estudiante puede navegar libremente alrededor del modelo para tener diferentes perspectivas de los resultados. La Figura 1 muestra los componentes de AVRAM.



Figura 1: Componentes de AVRAM

AVRAM tiene dos versiones, una donde el profesor trabaja desde un dispositivo móvil (tableta o teléfono) y envía la información a los dispositivos móviles de los estudiantes, la llamaremos “AVRAM MÓVIL” y otra donde el profesor trabaja en una computadora personal y envía la información a los dispositivos móviles de los estudiantes: “AVRAM PC”.

La Figura 2 muestra las tres pantallas de la versión AVRAM MÓVIL, la primera para conectarse al servidor, la segunda donde se dibujan las superficies en el espacio 3D con una pestaña adicional de opciones y la tercera donde se escriben las

ecuaciones, se definen los rangos de las variables y se seleccionan los colores.

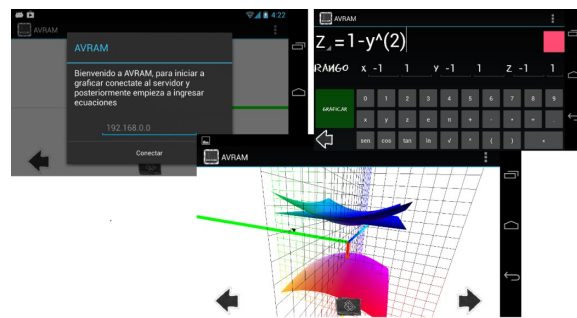


Figura2: Las tres pantallas de AVRAM MÓVIL

La Figura 3 muestra la pestaña de opciones aparecen las ecuaciones de todas las superficies generadas por el profesor con opción a borrado y transparencias, unos cuadros para seleccionar si se desea etiquetas para los ejes, visualizar las figuras y movimientos del profesor y la opción de desconectarse del profesor para trabajar por cuenta propia. No está limitado el número de superficies a graficar en la misma pantalla y jugando con las transparencias se visualiza bastante bien las intersecciones, uniones y otras operaciones entre las superficies. En el momento en que el alumno lo desee puede comenzar a manipular la superficie enviada por el profesor aumentándole o disminuyéndole el tamaño con sus los dedos, viendo las trazas y proyecciones sobre planos y ejes, rotándola, etc.

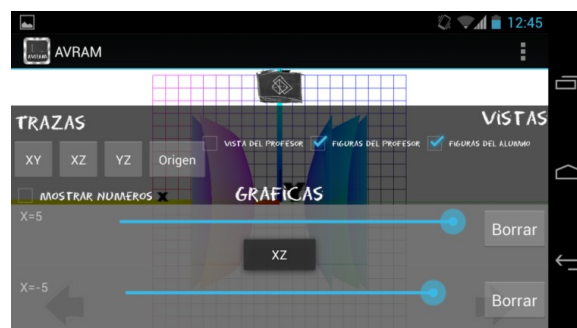


Figura 3: Pestaña de opciones de AVRAM MÓVIL

La versión AVRAM PC permite dibujar cuatro superficies en la misma pantalla y tiene dos pestañas para cada superficie. La Figura 4 muestra la primera pestaña, donde se encuentra el rango de las variables,

las operaciones a realizar entre las superficies (unión, intersección, diferencia), una lista donde aparecen las principales superficies del espacio tridimensional para seleccionar la deseada, el volumen y el área de la superficie elegida y los colores.

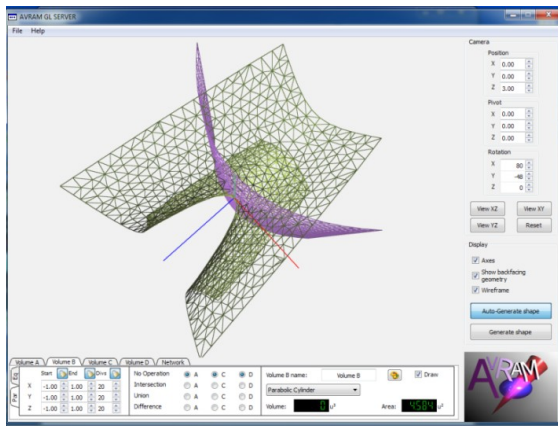


Figura 4: Pestaña externa de AVRAM PC

La Figura 5 muestra la segunda pestaña donde se encuentra la ecuación de la superficie seleccionada, con opción a cambiar los coeficientes. En todo momento se puede ajustar la posición de la cámara desde donde se observa la figura, las proyecciones sobre los planos coordenados, la vista de los ejes y el color o malla.

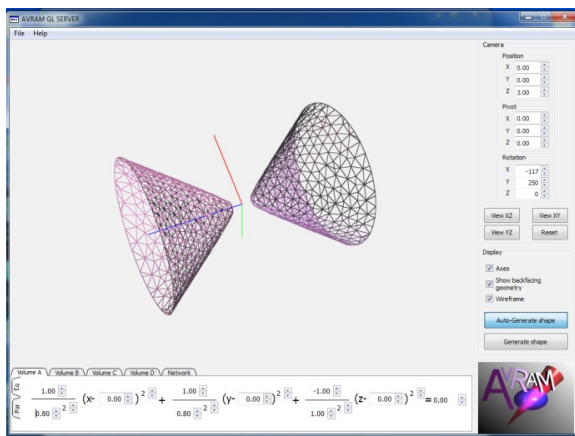


Figura 5: Pestaña interna de AVRAM PC

El profesor puede generar las figuras y enviarlas a los dispositivos móviles de los estudiantes para que ellos las manipulen y resuelvan las actividades planeadas para la clase. Cuando el alumno lo desee, puede dejar de ver las figuras del profesor y comenzar a crear las propias. La Figura 6 muestra la pestaña para conectarse vía wi-fi a los dispositivos móviles o computadoras, para enviar la figura.

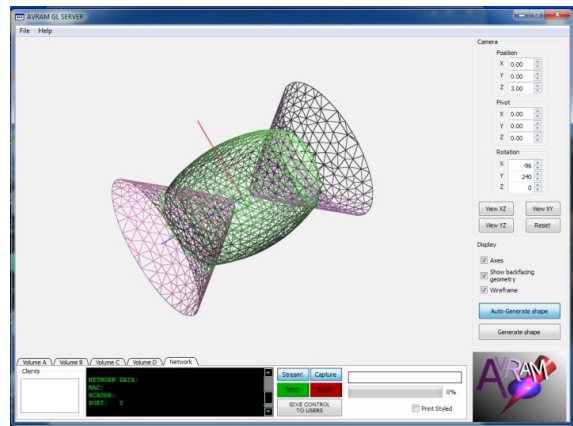


Figura 6: Pestaña de conexión

Actividades de visualización en 3D con AVRAM

En esta sección sugerimos algunas actividades de visualización en el espacio tridimensional. Las actividades completas, junto con sus rúbricas, están disponibles en la página del laboratorio virtual de física y matemáticas del Campus Ciudad de México.

Actividad 1: “Planos”. Contrario a lo que podría parecer, muchos estudiantes no tienen muy clara la noción de plano, al pedirles un ejemplo de plano quizás digan que “el piso es un plano”, pero si el plano está inclinado ya no lo perciben como tal. Algunos tienen problemas para imaginar el plano cuando lo representamos como el triángulo que pasa por tres puntos, incluso cuando se dibuja un plano usando un paralelogramo, puede haber confusión: en una ocasión un alumno preguntó cuáles son las ecuaciones de las rectas que limitan al plano, para evitar esto, un profesor ocurrente tal vez pinte “un charco” como en la Figura 7.

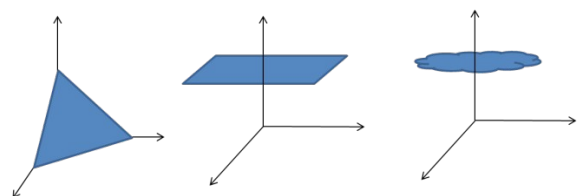


Figura 7: Figuras de planos que pueden generar confusión

Con la ayuda de AVRAM podemos pintar planos y jugar con los rangos de las variables x,y y z, podemos ver las características de los planos paralelos y perpendiculares, las intersecciones con los ejes y distancias entre planos entre otras cosas.

Actividad 2: “Superficies cuadráticas”. El objetivo de esta actividad es analizar y clasificar las ecuaciones y gráficas de las superficies cuadráticas de la forma $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$

Aquí presentamos sólo el caso de la elipse, de manera similar se puede ver las demás cónicas.

Considera la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

a) Dibuja la gráfica de la ecuación para $a=2, b=3, c=4$
 ¿Qué forma tiene? Cambia los valores de a, b y c
 ¿Cuál es el efecto de los valores a, b y c en la gráfica?
 ¿se puede convertir en una esfera de radio r ? de ser así, ¿qué valores tendrían a, b y c ?

b) Sección transversal. Vamos a observar los cortes de esta superficie con diferentes planos. Dibuja en la misma pantalla:

- i) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ y el plano $z=k$ para $k=1,-1,2,-2,0,3,-3,5,-5$. ¿Qué figura forma la curva de intersección, si la hay? ¿Cuál es la ecuación de cada curva? ¿Es esta la ecuación de una curva en el espacio?
- ii) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ y el plano $x=k$ para $k=1,-1,2,-2,0,3,-3$. ¿Qué figura forma la curva de intersección, si la hay? ¿Cuál es la ecuación de cada curva?
- iii) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ y el plano $y=k$ para $k=1,-1,2,-2,0,3,-3,4,-4$. ¿Qué figura forma la curva de intersección? ¿Cuál es la ecuación de cada curva?

c) Simetrías. En el plano, una curva es simétrica al eje y y si al sustituir x por $(-x)$ en la ecuación, la ecuación no se modifica. ¿Qué tipos de simetría tiene esta gráfica? ¿Cómo se puede detectar estas simetrías en la ecuación?

d) Traslaciones. Considera la ecuación $\frac{(x-h)^2}{4} + \frac{(y-k)^2}{9} + \frac{(z-l)^2}{16} = 1$
 Pruebe diferentes valores para h, k y l . ¿Qué efecto tienen h, k y l sobre la gráfica?

e) Despeja z de la ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ y dibuja las dos ecuaciones resultantes. ¿Son funciones? Despeja x y dibuja las dos ecuaciones resultantes. ¿Son funciones?

f) Encuentra una superficie que no sea un elipsoide que tenga la misma proyección en el plano yz que el elipsoide.

La Figura 8 es una foto tomada a varios dispositivos móviles y computadora, desarrollando la actividad 2 con AVRAM



Figura 8: El elipsoide con AVRAM

Actividad 3: Cálculo de un volumen mediante una integral doble. Uno de los problemas para encontrar el volumen de una superficie mediante integrales dobles consiste en imaginar la proyección de la superficie sobre alguno de los planos coordenados y describir este conjunto por medio de desigualdades. El uso de AVRAM permite que la interacción estudiante-profesor y la manipulación de las superficies ayuden al estudiante a identificar la región deseada y con un trabajo posterior, describirla por medio de desigualdades.

“Utilice una integral doble para calcular el volumen del sólido limitado por el cilindro $z^2 + y^2 = 1$ y los paraboloides $x = 1 - z^2 - y^2$ y $x = z^2 + y^2$. Le ayudará seguir los siguientes pasos: Dibuje el sólido, encuentre la proyección del sólido en el plano coordenado más conveniente (el plano xy, yz o xz) y describa la región en el plano”.

En este tipo de actividad es muy útil la interacción del profesor para ayudar al estudiante a notar que la superficie puede tener diferentes proyecciones sobre cada uno de los planos coordenados y que intervienen diferentes variables en cada proyección.

La Figura 9 muestra las proyecciones del sólido en los diferentes planos coordenados, vistos en AVRAM MÓVIL.

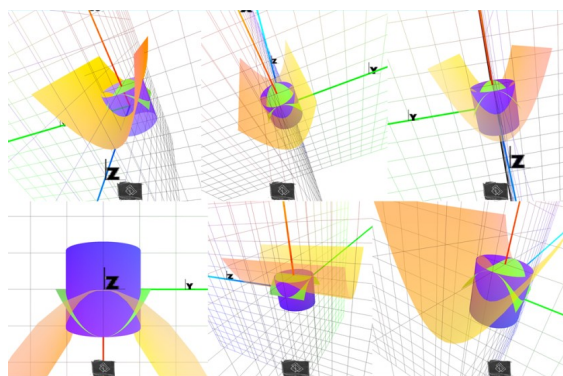


Figura 9: Superficies de la actividad 3

Actividad 4: Cambio de orden de Integración en Integrales triples. Esta actividad permite generar una imagen a partir de cierta información; inspeccionar la

imagen para observar su posición o la presencia de partes de elementos; transformar la imagen con rotaciones, traslaciones, escalamiento o descomposición; usar la imagen para responder preguntas.

“Considere la siguiente región en el espacio tridimensional

$$E = \{(x, y, z) / 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y, 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2}\}$$

La Figura 10 muestra la región E vista desde diferentes puntos del espacio y algunas de sus proyecciones en los planos coordenados.

- Dibuje la región E.
- Dibuje las proyecciones de E sobre los planos coordenados.
- Use las proyecciones sobre los planos coordenados para describir el sólido usando desigualdades. Cada proyección debe servirle para describir el sólido de dos formas diferentes.

Presente las seis integrales triples equivalentes a

$$\iiint_E f(x, y, z) dV$$

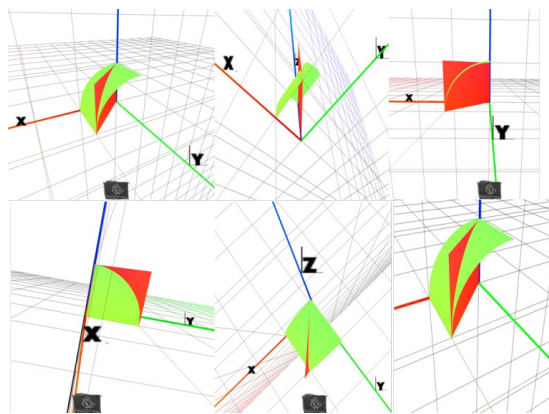


Figura 10: Región E de la actividad 4

Conclusiones

Las actividades de visualización en el espacio tridimensional que hemos estado realizando sugieren que las habilidades de percepción y abstracción espacial de los estudiantes mejoran de manera significativa con el uso de ambientes virtuales remotos.

De una manera más clara y rápida, los estudiantes pueden manejar los conceptos de planos, la recta intersección de dos planos y el plano tangente y aplicarlos en la solución de problemas. De igual manera AVRAM permite que las proyecciones de las superficies sobre los planos coordenados se visualicen claramente y la manipulación de la superficie hecha por el maestro y el alumno facilita la solución de problemas que requieren descripciones de regiones en el espacio mediante desigualdades.

El uso de la herramienta computacional dentro y fuera del salón de clase, así como la interacción del profesor con el estudiante en un ambiente remoto, ha simplificado las explicaciones y ha permitido concentrarse en aspectos importantes del problema a resolver, llegando más allá de las gráficas y representaciones.

Agadecimientos

Deseamos agradecer al equipo de desarrolladores de AVRAM Móvil y AVRAM PC: los estudiantes de ITC Alvaro Herrasti y Daniel Dovalí y al estudiante doctoral Sergio Ruiz, sin ellos este proyecto definitivamente no hubiera sido posible. Al Fondo Novus por los recursos y apoyo proporcionados. A los profesores Jaime Castro, Gerardo Aguilar y Marlen Aguilar, por las pruebas y recomendaciones que nos dieron como producto del uso de AVRAM y sus actividades en los cursos de Matemáticas III. Finalmente a todos los estudiantes que usan AVRAM.

Referencias

- [1] A. Arcavi, “The role of visual representations in the learning of mathematics”. *Educational Studies in Mathematics*, 52. (2003).
- [2] A. Gutiérrez, “Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework”. *Proceedings of the 20th PME Conference 1*. (1996).
- [3] N. Presmeg, “Visualisation and mathematical giftedness”. *Educational Studies in Mathematics*, 17. (1986).
- [4] M.T. Battista, “The development of geometric and spatial thinking”. *Second Handbook of Research on Mathematics. Teaching and Learning. Information Age Publishing, Charlotte, NC*. (2007).
- [5] A. Dünser, *et al.* “Virtual and augmented reality as spatial ability training tools”. *In Proceedings of the 7th ACM SIGCHI New Zealand*. (2006).
- [6] C. Christou, K. Jones, D. Pitta-Pantazi, M. Pittalis, N. Mousoulides, J.F. Matos, E. Sendova, T. Zachariades, P. Boytchev, “Developing student spatial ability with 3D software applications”. *5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME), Larnaca, Cyprus, 22-26*. (2007).
- [7] D. Tall, “Interrelationships between mind and computer: processes, images, symbols”. *In David L. Ferguson ed. Advanced Technologies in the Teaching of Mathematics and Science*. New York: Springer-Verlag. (1993).