

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE  
MONTERREY

---

---

CAMPUS CIUDAD DE MÉXICO



DETERMINACIÓN DE UNA ESTRUCTURA DE PLAZOS MEDIANTE UN  
MODELO DE TRES FACTORES PARA LA DINÁMICA  
DE LA TASA CORTA

DOCTORADO EN CIENCIAS FINANCIERAS

TESIS PRESENTADA POR

RENÉ BENJAMÍN PÉREZ SICAIROS

ASESOR

DR. ANTONIO RUIZ PORRAS

NOVIEMBRE 2007



**TECNOLÓGICO  
DE MONTERREY**

Hacemos constar que en la Ciudad de México, el día 8 de noviembre de 2007, el alumno:

**RENÉ BENJAMÍN PÉREZ SICAIROS**

sustentó el Examen de Grado en defensa de la Tesis titulada:

**Determinación de una estructura de plazos mediante un modelo de tres factores para la dinámica de la tasa corta**

Presentada como requisito final para la obtención del Grado de:

**DOCTOR EN CIENCIAS FINANCIERAS**

Ante la evidencia presentada en el trabajo de tesis y en este examen, el *Comité Examinador*, presidido por el **DR. FERNANDO CRUZ ARANDA**, ha tomado la siguiente resolución:

*- APROBADO -*

  
\_\_\_\_\_  
**Dr. Antonio Ruiz Porras**  
*Director de Tesis*

  
\_\_\_\_\_  
**Dr. José Antonio Núñez Mora**  
*Lector*

  
\_\_\_\_\_  
**Dr. Fernando Cruz Aranda**  
*Lector*

  
\_\_\_\_\_  
**Dr. José Antonio Núñez Mora**  
*Director del Programa Doctoral*

## ***Dedicatorias:***

### *A mi familia:*

Por darme de manera incondicional el tiempo requerido para poder sacar adelante este proyecto de vida. A mi hija Mónica, por todos esos momentos de felicidad que compartimos juntos y por ser mi fuente de esperanza y lucha. Espero que este esfuerzo que he realizado le sirva de ejemplo para encontrar y seguir el camino correcto y ser mejor persona cada día de su vida.

A mi esposa Nely, por toda su paciencia y cariño que ha demostrado hacia a mí y mi hija y porque siempre estuvo al pendiente en las buenas y las malas, espero poder recompensar todas sus atenciones y esfuerzo...

### *A mis padres:*

A mi padre, José Faustino, por el ejemplo de lucha y trabajo para sacar adelante a una familia y sobre todo por todos los consejos y palabras de aliento que me impulsaron a seguir adelante en los momentos más difíciles de esta odisea.

A mi madre, Dolores, por sus bendiciones y por fomentar en mí el espíritu de superación. Muchas gracias padres por haberme dado un hogar e inculcado buenos valores...

### *A mis hermanos:*

Por haber compartido su tiempo, buenos consejos y por apoyarme en momentos difíciles, les deseo lo mejor a ustedes y sus familias, que DIOS los bendiga.

## ***Agradecimientos:***

Agradezco de manera muy especial al Dr. Francisco Venegas-Martínez por haberme brindado la oportunidad y confianza de poder ser parte del programa doctoral en ciencias financieras y que gracias a sus buenos consejos como maestro y amigo logre concluir satisfactoriamente. Le estaré eternamente agradecido.

Agradezco también al Dr. Antonio Ruiz Porras por aceptarme como su tesista y haber creído en mí. Por sus comentarios, observaciones y paciencia para lograr mejores resultados. Muchas gracias.

Expreso mi agradecimiento a mis lectores de tesis Dr. Fernando Cruz y Dr. José Antonio Núñez por su esmero y paciencia en la revisión meticulosa del presente escrito.

A los asistentes del programa doctoral, Estrella, Roberto Ballinez, Igor Rivera y Martha Carrillo por su amistad, apoyo y atenciones. Muchas Gracias.

A la Universidad de Occidente por el apoyo brindado durante estos últimos siete años de mi preparación. En particular a la M.C Elvia Damkem y al M.I Guillermo Ortega por haberme brindado también su apoyo y consideración. Muchas gracias.

A mis amigos, Alejandra Cabello y Edgar Ortiz, por brindarme su amistad, su hogar, su apoyo. Toda mi vida les estaré muy agradecido.

A mis compañeros y amigos Irma Cortes, Juan Francisco Islas, Jesús Bravo, Francisco Castillo, Javier Hinojosa, Francisco Arango, Mario Lagunes, Edgar Castillo, Luís Antelmo Pérez, porque siempre estuvieron a mi lado en las buenas y en las malas. Muchas gracias.

A mis compañeros y amigos de trabajo, Luís Antonio Achoy, Agustín Oramas, Raúl Soto, Julio C. Ceniceros, Mariano Lizarraga, Erasmo Beltrán, por motivarme a seguir adelante.

## ***Resumen:***

En este trabajo se obtiene una estructura de plazos para valorar activos de renta fija en sus diferentes plazos. En esta estructura se modela la dinámica de la tasa corta de interés,  $r_t$ , con base en el modelo de tres factores de Lin-Chen (1995). En este caso, utilizaremos la tasa de fondeo gubernamental mexicana a un día como tasa corta. La estructura se modela mediante parámetros obtenidos por mínimos cuadrados en tres etapas, 3SLS. Estos parámetros se usan para la simulación de Monte Carlo. Este enfoque difiere al de Lin-Chen, quien propone una solución analítica. Para efectos de probar el modelo en condiciones de mercado diferentes se obtiene también una estructura de plazos para la tasa de treasury de un mes del mercado de EUA. También se compara una estructura de plazo obtenida con el modelo propuesto con una estructura obtenida con el modelo de Cox-Ingersoll-Ross (CIR, 1985), utilizando tasas cortas del mercado de México y de E.U.A.

## ***Abstract:***

In this paper we obtain an interest rate term structure to price fixed-rate assets. In such structure we model the dynamic of the short interest rate,  $r_t$ , based on the three factor model proposed Lin-Chen (1995) . Here we used the Mexican daily funding government rate as the short interest rate. The term structure is modeled with parameters obtained by three-stage least squares, 3SLS. Such parameters are used as input for Monte Carlo simulation. This approach differs from the one of Lin-Chen, who proposes an analytical solution. For testing intention of the model under different market conditions also it's obtains a structure of term for the monthly treasury rate at the USA market. Also we compared a term structure obtained with the model proposed for us against a structure obtained with the Cox-Ingersoll-Ross Model (CIR, 1985), by using short term rates from Mexico and USA markets.

# Índice

<b>Introducción</b> .....	<b>1</b>
<b>CAPÍTULO 1. Marco teórico</b> .....	<b>4</b>
1.1 Introducción .....	4
1.2 Modelos de un factor .....	4
1.3 Modelos de dos factores .....	5
1.4 Modelo de tres factores .....	7
1.5 Modelo propuesto .....	11
<b>CAPÍTULO 2. Metodología</b> .....	<b>12</b>
2.1 Introducción .....	12
2.2 Información: series temporales .....	12
2.3 Linealización de las ecuaciones diferenciales .....	13
2.3 Estructura de plazo y tasa corta .....	16
<b>CAPÍTULO 3. Estimación de parámetros</b> .....	<b>18</b>
3.1 Introducción .....	18
3.2 Método de mínimos cuadrados en tres etapas (3SLS) .....	18
3.3 Método de máxima verosimilitud con información completa (FIML) .....	23
3.4 Parámetros estimados .....	23
<b>CAPÍTULO 4. Método Monte Carlo</b> .....	<b>25</b>
4.1 Introducción .....	25
4.2 El método Monte Carlo como herramienta de solución .....	25
4.3 Método Monte Carlo y la estructura de plazo .....	26
4.3.1 Simulación de la dinámica del short-term mean .....	29
4.3.2 Simulación de la dinámica de la volatilidad .....	30

4.3.3 Simulación de la dinámica de la tasa corta .....	30
<b>CAPÍTULO 5. Resultados de las simulaciones y análisis.....</b>	<b>32</b>
5.1 Introducción .....	32
5.2 Comportamientos del short-term mean y volatilidad .....	32
5.3 Estructura de plazos resultante (modelo propuesto) .....	34
5.4 Comparación entre modelo propuesto y CIR .....	36
5.5 Estructura de plazos de CETES 28 y USD1MT .....	37
5.6 Efectos del parámetro $\gamma$ en el modelo propuesto.....	42
<b>CAPÍTULO 6. Conclusiones y propuestas de recomendaciones futuras .....</b>	<b>44</b>
<b>Anexo.....</b>	<b>46</b>

## Introducción

A medida que los mercados se van desarrollando, nacen con ello nuevos activos o productos financieros, por lo que su valuación se vuelve una tarea indispensable. Es por ello que día a día gran número de personas se dedican a la ardua labor de investigar nuevos métodos y técnicas de valuación. Es indiscutible el hecho de que tanto las matemáticas como el avance tecnológico han contribuido enormemente a que los mercados se desarrollen de manera más rápida. Un ejemplo muy claro es la aplicación del Internet, pues permite llevar a cabo transacciones de compra-venta de activos en tiempo real. Por otro lado, parte de las investigaciones están enfocadas a obtener modelos que incorporen un mayor realismo a la dinámica o comportamiento de algún activo financiero y a la vez poder controlar y cuantificar de manera fácil y sencilla las variables y parámetros que en dicho modelo se contemplan.

El objetivo del presente trabajo es obtener una estructura de plazos que permita valorar activos de renta fija, basada ésta en el modelado de la dinámica de la tasa corta de interés del mercado de renta fija en México, considerando para ello tres factores o variables de estado, esto es, la tasa corta (tasa de interés de corto plazo) futura,  $r_{t+1}$ , dependerá de: i) el valor actual de la tasa corta,  $r_t$ , ii) la media de la tasa corta de corto plazo (short-term mean),  $\theta_t$ , y iii) la volatilidad actual de la tasa corta,  $\sigma_t$ . Asumiendo además que tanto el short-term mean y la volatilidad de la tasa corta son estocásticos, es decir, se comportan particularmente como brownianos correlacionados. En este trabajo, la tasa de fondeo gubernamental (al cierre) a un día representará a la tasa corta bajo estudio; pues es la de menor tiempo disponible en el mercado y la de menor plazo (un día). El interés de modelar dicha tasa surge como ya se mencionó anteriormente de la importancia que tiene ésta en la determinación de estructura de plazos de tasas de interés, la cual es fundamental para la valuación de diferentes instrumentos de renta fija, por ejemplo, CETES, en sus diferentes plazos, 7, 14, 28, 91, 182, 364 días o bonos de largo plazo, M3 (3 años), M5 (5 años), M10 (10 años), así como también en el análisis de estrategias y administración de riesgos de

portafolios conformados por títulos de renta fija. El modelo aquí propuesto cae dentro de la categoría de los modelos de estructura de plazos de equilibrio.

El modelo que se propone en este trabajo para obtener una estructura de plazos,  $R(t, T)$ , a partir de la dinámica de la tasa corta,  $r_t$ , está basado en el modelo propuesto por Lin-Chen (1995), la diferencia radica en los siguientes dos puntos:

- La ecuación de la tasa corta (1.11) se ve afectada por una constante ( $\gamma$ ), la cual puede interpretarse como un indicador de sensibilidad del mercado, es decir es un factor de ajuste del impacto que tiene la volatilidad,  $\sigma_t$ , sobre la tasa corta,  $r_t$  de este modo se tiene que:

$$dr_t = k(\theta_t - r_t)dt + \gamma \sqrt{\sigma_t} \sqrt{r_t} dW_t, \quad t \geq 0, k > 0, \gamma > 0, dW_t \sim N(0, dt). \quad (1.14)$$

- A diferencia de Lin-Chen, la solución será vía numérica, utilizando para ello el paquete econométrico *e-views 4.1* para la obtención de los parámetros y la técnica de simulación Monte Carlo para la obtención de la estructura de plazos,  $R(t, T)$ .

Este trabajo consta de una introducción, seis capítulos y un anexo. El trabajo se desarrolla de la siguiente manera: en el primer capítulo se presenta el marco teórico o lo que se conoce como estado del arte, el cual trata del origen y evolución que han tenido los modelos de tasas a través del tiempo, sus características, ventajas y desventajas. También se plantea el modelo propuesto. En el capítulo dos, se desarrolla la metodología en que se incurre para llevar a cabo la obtención de las series del short term mean y volatilidad de la tasa corta, también se llevan a cabo las linealizaciones de las ecuaciones que conforman el modelo, así como la forma en que se relaciona la estructura de plazos con la tasa corta. En el capítulo tres se describe el método econométrico 3SLS (Mínimos Cuadrados en Tres Etapas) y FIML (Información Completa de Máxima de Verosimilitud) y se presentan el valor de los parámetros estimados. El capítulo cuatro trata de la técnica de Monte Carlo para la obtención de la estructura de plazos. En el quinto capítulo se muestra los resultados obtenidos de las simulaciones y su respectivo análisis. También se compara la bondad del modelo propuesto respecto al modelo de Cox-Ingersoll-Ross (CIR, 1985), así como la

obtención de una estructura de plazos utilizando la tasa de fondeo gubernamental como tasa corta y una estructura de plazo para el mercado de renta fija de EUA utilizando la tasa de treasury de un mes, USD1MT. En el sexto capítulo se presentan las conclusiones de los resultados obtenidos, así como algunas recomendaciones. Por último, en el anexo se presentan gráficos y tablas que sustentan los resultados obtenidos, así como el algoritmo que se empleo para llevar a cabo las simulaciones.

# CAPÍTULO 1. Marco teórico

## 1.1 Introducción

Hoy en día existe una gran diversidad de modelos de tasas de interés. Algunos pueden ser más simples que otros, sin embargo eso no implica que no sean útiles para algún propósito. Es claro que el principal objetivo es tratar de ajustar algún modelo que pronostique de la forma más precisa su comportamiento futuro, esto está asociado con el nivel de realismo que se desee obtener, lo cual los hace cada vez más complejos. La desventaja de obtener modelos complejos estriba en el hecho del tratamiento matemático para su solución. A continuación se describe una breve evolución de los modelos de tasas de interés a través del tiempo.

## 1.2 Modelos de un factor

Desde décadas anteriores la literatura ha reportado una gran diversidad de trabajos que permiten modelar la dinámica de la tasa corta,  $r_t$ . En un inicio, los modelos llamados de “equilibrio”, propuestos por Merton (1973) y Vasicek (1977), fueron modelos basados en un solo factor, es decir, modelos en los que la única variable de estado es la tasa corta,  $r_t$ . Matemáticamente se tiene:

$$\text{Merton:} \quad dr_t = \theta dt + \sigma dW_t, \quad \theta, \sigma, \text{ son constantes.} \quad (1.1)$$

$$\text{Vasicek:} \quad dr_t = k(\bar{\theta} - r_t)dt + \sigma dW_t, \quad k, \bar{\theta}, \sigma, \text{ son constantes.} \quad (1.2)$$

El término  $dW_t$  representa a un browniano, es decir, una variable aleatoria que se distribuye normalmente con media cero y varianza  $dt$ , esto es,  $dW_t \sim N(0, dt)$

Empíricamente hablando, ambos modelos no valían correctamente el valor actual del bono. Una razón principal es que en dichos modelos existen pocos parámetros para ser ajustados y además no incorporan suficiente realismo empírico. Una desventaja que presentan estos

modelos es que *se pueden obtener tasas de interés negativas y suponen además que la volatilidad,  $\sigma$ , de la tasa de interés es constante*. El modelo de Vasiceck incorpora reversión a la media de largo plazo de la tasa corta,  $\bar{\theta}$  con una tasa de convergencia,  $k$ . Un modelo más avanzado fue el propuesto por Cox-Ingersoll-Ross (CIR), en 1985 (también de un factor), en el que la volatilidad ( $\sigma$ , constante) mantenía una correlación perfecta con la tasa corta. La ventaja de este modelo es que siempre proporciona tasas positivas, gracias al factor  $\sqrt{r_t}$ , y además incorpora al igual que Vasiceck reversión a la media de largo plazo de la tasa corta,  $\bar{\theta}$ , como se muestra a continuación:

$$\text{CIR:} \quad dr_t = k(\bar{\theta} - r_t)dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t, \quad k, \bar{\theta}, \sigma, \text{ son constantes.} \quad (1.3)$$

Aunque estos modelos son de fácil manejo matemático, existe una razón importante para creer que la única variable de estado (la tasa corta,  $r_t$ ) no es suficiente para capturar razonablemente el comportamiento de los cambios futuros de la estructura de plazos.

### 1.3 Modelos de dos factores

Modelos que incorporan más realismo empírico, son los denominados modelos de dos factores, los cuales fueron propuestos por Brennan-Schwartz (B-S, 1979) y Schaefer-Schwartz (S-S, 1984) (también de “equilibrio”). En estos modelos las variables de estado son la tasa corta,  $r_t$ , (de corto plazo) y la tasa de largo plazo,  $l_t$ . Estos modelos quedan especificados mediante:

$$\text{B-S:} \quad \begin{aligned} dr_t &= \theta_r + \sigma_{r1} dW_{1t} + \sigma_{r2} dW_{2t}, \\ dl_t &= \theta_l + \sigma_{l1} dW_{1t} + \sigma_{l2} dW_{2t}, \end{aligned} \quad \theta_r, \theta_l, \sigma_{r1}, \sigma_{r2}, \sigma_{l1}, \sigma_{l2}, \text{ constantes.} \quad (1.4)$$

y

$$\text{S-S:} \quad \begin{aligned} dr_t &= m(\mu - r_t) + \eta dW_{1t}, \\ dl_t &= (\sigma^2 - l_t r_t) + \sigma \sqrt{l_t} dW_{2t}, \end{aligned} \quad \theta_r, \theta_l, \sigma_{r1}, \sigma_{r2}, \sigma_{l1}, \sigma_{l2}, \text{ constantes.} \quad (1.5)$$

Un modelo aún más reciente de dos factores, fue el propuesto por Longstaff - Schwartz (L-S, 1992). Ellos eligieron como factores a la tasa corta,  $r_t$ , y a la volatilidad,  $\sigma_t$ , de la tasa de interés. Esto permite obtener el nivel actual tanto de la tasa corta como de la volatilidad. Este modelo está representado mediante la expresión:

$$\begin{aligned} \text{L-S:} \quad & dr_t = (\gamma - \delta r_t)dt + \sqrt{r_t} dW_{1t}, \\ & d\sigma_t = (\eta - \nu \sigma_t)dt + \sqrt{\sigma_t} dW_{2t}, \end{aligned} \quad \gamma, \delta, \eta, \nu, \text{ constantes.} \quad (1.6)$$

Durante la década de los 80's y 90's aparecieron los modelos denominados de "no-arbitraje". Estos modelos se basan principalmente en que para estimar la estructura de plazos se debe fijar de principio un valor inicial de la tasa corta. Estos modelos fueron propuestos por primera vez por Ho-Lee (H-L, 1986), seguido por Black-Derman-Toy (B-D-T, 1990), Heath-Jarrow-Morton (H-J-M, 1990), Hull-White (H-W, 1990-1993). Una de las desventajas que presenta el modelo de Ho-Lee es que la volatilidad de la tasa corta es constante y además que el modelo no incorpora reversión a la media. La expresión matemática de este modelo es:

$$\text{H-L:} \quad dr_t = \theta_t dt + \sigma dW_t, \quad \sigma, \text{ constante.} \quad (1.7)$$

Black-Derman-Toy propuso un modelo con reversión a la media, dado por:

$$\text{B-D-T:} \quad dr_t = \left( \theta_t - \frac{\sigma'_t}{\sigma_t} \right) \ln r_t dt + \sigma_t dW_t, \quad \theta_t \text{ y } \sigma_t \text{ son funciones del tiempo.} \quad (1.8)$$

La desventaja de este modelo es que para alguna especificación de la función de la volatilidad, la tasa corta puede ser *mean-fleeting* más que una reversión a la media.

En 1992 Heath-Jarrow-Morton (H-J-M), estimaron la estructura de plazos a partir de la dinámica de la tasa forward,  $f_t$ , considerando para ello que:

$$\text{H-J-M:} \quad df_t = \alpha(t)dt + \sigma(t)dW_t, \quad \alpha(t) \text{ y } \sigma(t) \text{ son funciones del tiempo.} \quad (1.9)$$

Por último Hull-White en 1990 y 1993 propusieron que en el modelo de CIR tanto,  $\theta$  como  $\sigma$ , fueran variantes en el tiempo, esto es:

$$\text{H-W: } dr_t = k(\theta_t - r_t)dt + \sigma_t \sqrt{r_t} dW_t, \quad k, \text{ cte.}; \theta_t \text{ y } \sigma_t \text{ dependen del tiempo. (1.10)}$$

La solución de esta ecuación diferencial estocástica no es cerrada, por lo que se tiene que recurrir a una solución numérica, por ejemplo, por diferencias finitas.

En general, la mayoría de los modelos de dos factores tiene como ventajas que presentan un término de tendencia con reversión a la media de largo plazo, además son modelos fáciles de implementar y sus parámetros fáciles de estimar. Como desventajas se tiene que en algunos de los casos se pueden obtener tasas negativas.

## 1.4 Modelo de tres factores

Un modelo mucho más complejo al de los anteriores es el que considera tres factores, propuesto por Lin-Chen (1995). En este modelo la tasa corta (tasa de interés de corto plazo) futura dependerá de: i) el valor actual de la tasa corta,  $r_t$ , ii) la media de la tasa corta de corto plazo (short-term mean),  $\theta_t$ , y iii) la volatilidad actual de la tasa corta,  $\sigma_t$ . De manera más detallada y formal se considera lo siguiente:

Sean  $\{W_t\}_{t \geq 0}$ ,  $\{V_t\}_{t \geq 0}$  y  $\{U_t\}_{t \geq 0}$ , movimientos brownianos definidos sobre un espacio de probabilidad fijo con filtración aumentada  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ . Se supone que la dinámica de la tasa corta,  $r_t$ , es conducida por el proceso:

$$dr_t = k(\theta_t - r_t) dt + \sqrt{\sigma_t} \sqrt{r_t} dW_t, \quad t \geq 0, k > 0, dW_t \sim N(0, dt), \quad (1.11)$$

donde,  $\sqrt{\sigma_t}$  es la varianza de  $r_t$  y  $k$  es una constante conocida como factor de aceleración.

Lin-Chen incorpora el factor  $\sqrt{\sigma_t}$  en el término estocástico para conforma el sistema

(1.11), (1.12) y (1.13), sin embargo nada garantiza que el impacto sea unitario. El desarrollo del short-term mean,  $\theta_t$ , es conducido mediante:

$$d\theta_t = v(\bar{\theta} - \theta_t) dt + \zeta \sqrt{\theta_t} dV_t, \quad t \geq 0, \bar{\theta} > 0, v > 0, \zeta > 0, dV_t \sim N(0, dt), \quad (1.12)$$

donde,  $\zeta$  es la volatilidad de  $\theta_t$  y  $\bar{\theta}$  es la media de largo plazo. Por último la volatilidad  $\sigma_t$  de  $r_t$  sigue el proceso:

$$d\sigma_t = \mu(\bar{\sigma} - \sigma_t) dt + \eta \sqrt{\sigma_t} dU_t, \quad t \geq 0, \bar{\sigma} > 0, \mu > 0, \eta > 0, dU_t \sim N(0, dt), \quad (1.13)$$

donde,  $\eta$  es la volatilidad de  $\sigma_t$  y  $\bar{\sigma}$  es la volatilidad en el largo plazo.

Además se supone que los brownianos están correlacionados, esto es:  $COV(dW_t, dV_t) = \rho_{wv} dt$ ,  $COV(dW_t, dU_t) = \rho_{wu} dt$  y  $COV(dV_t, dU_t) = \rho_{vu} dt$ .

Lin Chen, en 1995 resolvió este sistema de manera analítica. Para ello calculó el precio de un bono al tiempo  $t$  y plazo  $T$ ,  $P(r, \theta, \sigma, t; T)$ , mediante la expresión:

$$P(r, \theta, \sigma; \tau) = A(\tau) e^{-B(\tau)r - C(\tau)\theta - D(\tau)\sigma},$$

Donde:

$$\tau = T - t$$

$$A(\tau) = \left[ \frac{X^{\frac{v'}{2k}} (\Gamma J_G(Z) + Y_G(Z))}{\Gamma J_G\left(\frac{\sqrt{2}\zeta}{k}\right) + Y_G\left(\frac{\sqrt{2}\zeta}{k}\right)} \right]^{\frac{2\sigma\bar{\theta}}{\zeta^2}} * \left[ \frac{X^\rho e^{-\phi(X-1)} (\Lambda U(Q, S, 2\phi X) + M(Q, S, 2\phi X))}{\Lambda U(Q, S, 2\phi) + M(Q, S, 2\phi)} \right]^{\frac{2\mu\sigma}{\eta^2}},$$

$$B(\tau) = \frac{1 - e^{-k\tau}}{k},$$

$$C(\tau) = -\frac{v'}{\zeta^2} - \frac{kZ[\Gamma(J_{G-1}(Z) - J_{G+1}(Z)) + Y_{G-1}(Z) - y_{G+1}(Z)]}{2\zeta^2(\Gamma J_G(Z) + Y_G(Z))},$$

$$D(\tau) = \frac{2k}{\eta^2} \left[ -\rho + \phi X + \frac{2X\Lambda Q \phi U(Q+1, S+1, 2\phi X)}{\Lambda U(Q, S, 2\phi X) + M(Q, S, 2\phi X)} - \frac{2X\phi \frac{Q}{2} M(Q+1, S+1, 2\phi X)}{\Lambda U(Q, S, 2\phi X) + M(Q, S, 2\phi X)} \right],$$

Con:

$$X = e^{-k\tau},$$

$$Z = \frac{\sqrt{2} e^{-\frac{k\tau}{2}} \zeta}{k},$$

$$\Gamma = -\frac{\zeta \sqrt{2} Y_{G-1} \left( \frac{\sqrt{2}\zeta}{k} \right) + 2v' Y_G \left( \frac{\sqrt{2}\zeta}{k} \right) - \zeta \sqrt{2} Y_{G+1} \left( \frac{\sqrt{2}\zeta}{k} \right)}{\zeta \sqrt{2} J_{G-1} \left( \frac{\sqrt{2}\zeta}{k} \right) + 2v' J_G \left( \frac{\sqrt{2}\zeta}{k} \right) - \zeta \sqrt{2} J_{G+1} \left( \frac{\sqrt{2}\zeta}{k} \right)},$$

$$\Lambda = -\frac{(\rho - \phi)M(Q, S; 2\phi) - 2\phi \frac{Q}{2} M(Q+1, S+1; 2\phi)}{(\rho - \phi)U(Q, S; 2\phi) + 2\phi QU(Q+1, S+1; 2\phi)},$$

$$G = \frac{\sqrt{2\zeta^2 + v'^2}}{k},$$

$$Q = -\frac{\beta}{2\phi} + \frac{S}{2},$$

$$S = \frac{k + \sqrt{\mu'^2 - 4\alpha k^2}}{k},$$

$$\rho = \frac{\mu' + \sqrt{\mu'^2 - 4\alpha k^2}}{2k},$$

$$\alpha = (1 - 2k\lambda_r) \frac{\eta^2}{4k^4},$$

$$\beta = (k\lambda_r - 1) \frac{\eta^2}{4k^4},$$

$$\phi = i \frac{\eta}{2k^2}.$$

$$v' = v - \lambda_\theta \zeta,$$

$$\mu' = \mu - \lambda_\sigma \eta$$

Aquí  $\lambda_r$ ,  $\lambda_\theta$  y  $\lambda_\sigma$  son las primas de los factores de riesgo:  $r_t$ ,  $\theta_t$  y  $\sigma_t$ , respectivamente. Además,  $J_G(\cdot)$  es la función de Bessel de primera clase y  $Y_G(\cdot)$  es la función de Bessel de segunda clase,  $M(a, b; z)$  es la función de Kummer, y  $U(a, b, z)$  es una función de confluencia hipergeométrica. La expresión matemática de cada función viene dada por:

$$J_\nu(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}z^2\right)^n}{n! \Gamma(\nu + n + 1)},$$

$$Y_\nu(z) = \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\text{sen}(\nu\pi)},$$

$$M(a, b; z) = 1 + \frac{(a)_1 z}{(b)_1} + \frac{(a)_2 z^2}{(b)_2 2!} + \dots + \frac{(a)_n z^n}{(b)_n n!} + \dots$$

Donde,  $(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)$  y  $(a)_0 = 1$

y

$$U(q, b, z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{b-a-1} dt$$

Podemos decir que entre las principales ventajas del modelo de tres factores propuesto por Lin-Chen, destacan las siguientes:

- Se tiene una solución cerrada,
- Incorpora a la varianza de la tasa corta, además de la tasa promedio de corto plazo como factores de riesgo de mercado, lo cual le da más realismo.

Como principales desventajas tenemos:

- Se pueden obtener soluciones complejas y múltiples,
- Indeterminación en la estructura de plazo,

## 1.5 Modelo propuesto

Una manera de medir la intensidad del efecto que tiene la varianza sobre la tasa corta es agregar un factor de ajuste en la ecuación (1.11), el cual denotaremos con  $\gamma$ . Por lo que el modelo de Lin-Chen se convierte en un caso particular de nuestro modelo propuesto, esto es,  $\gamma = 1$ . En si el parámetro  $\gamma$  es una indicador de sensibilidad de mercado. De este modo se propone como modelo de tres factores para la dinámica de la tasa corta el siguiente:

$$dr_t = k(\theta_t - r_t)dt + \gamma \sqrt{\sigma_t} \sqrt{r_t} dW_t, \quad t \geq 0, k > 0, \gamma > 0, dW_t \sim N(0, dt). \quad (1.14)$$

$$d\theta_t = v(\bar{\theta} - \theta_t)dt + \zeta \sqrt{\theta_t} dV_t, \quad t \geq 0, \bar{\theta} > 0, v > 0, \zeta > 0, dV_t \sim N(0, dt), \quad (1.15)$$

$$d\sigma_t = \mu(\bar{\sigma} - \sigma_t)dt + \eta \sqrt{\sigma_t} dU_t, \quad t \geq 0, \bar{\sigma} > 0, \mu > 0, \eta > 0, dU_t \sim N(0, dt). \quad (1.16)$$

Donde los brownianos están correlacionados, es decir,  $COV(dW_t, dV_t) = \rho_{wv} dt$ ,  $COV(dW_t, dU_t) = \rho_{wu} dt$  y  $COV(dV_t, dU_t) = \rho_{vu} dt$ .

Una ventaja que tiene este modelo sobre el de Lin-Chen es que se resuelve vía numérica y no analítica, garantizando con ello encontrar siempre una solución para cada condición de mercado.

## CAPÍTULO 2. Metodología

### 2.1 Introducción

Tratar de resolver de manera analítica el sistema de ecuaciones (1.14), (1.15) y (1.16) requiere, no sólo de una gran labor y esfuerzo, sino también de un conocimiento avanzado en matemáticas. Un camino alternativo para resolver dicho sistema es recurrir a algún método numérico confiable. Uno de estos métodos es el conocido como Monte Carlo, el cual es de gran éxito y ha sido muy utilizado recientemente en la valuación de derivados. Para poder aplicar este método es necesario estimar primeramente los parámetros  $k$ ,  $\gamma$ ,  $v$ ,  $\zeta$ ,  $\mu$ ,  $\eta$  que aparecen en las ecuaciones (1.14), (1.15) y (1.16). Estos parámetros se pueden estimar de manera estadística utilizando para ello el paquete econométrico *e-views 4.1* por medio de la técnica de Mínimos Cuadrados en Tres Etapas (Three-Stage Least Squares, 3SLS), o por el método de Información Completa de Máxima de Verosimilitud (Full Information Maximum Likelihood, FIML), pues estas técnicas son adecuadas para resolver el tipo de sistema de ecuaciones que tenemos siempre y cuando éstas se hayan linealizado y cumplan algunos supuestos que más adelante se especifican

### 2.2 Información: series temporales

Para poder llevar a cabo esta investigación es necesario primeramente contar con la información necesaria y pertinente. La fuente principal para la obtención de la serie de tasa corta,  $r_t$ , fué el Banco de México (Banxico), la cual se obtuvo bajo el nombre de “Tasa de Fondeo Gubernamental” (al cierre), por ser la tasa representativa de las operaciones de mayoreo realizadas por las Casas de Bolsa sobre operaciones en reporto a plazo a un día hábil bancario con Títulos de Deuda emitidos por TESOFE (Tesorería de la Federación), IPAB (Instituto para la Protección y al Ahorro Bancario) y BANXICO (Banco de México) que hayan sido liquidados en el sistema de entrega contra pago del INDEVAL. La serie consta de  $N = 286$  datos comprendidos entre el 11 de agosto de 2005 y el 11 de agosto de

2006 (no se incluyen días festivos). Puesto que el mercado no provee información acerca del short-term mean ( $\theta_t$ ) y tampoco de la volatilidad ( $\sigma_t$ ) de  $r_t$ , se llevó a cabo la construcción de éstas de la siguiente manera: la serie del short-term mean se obtuvo como un promedio simple, la expresión para calcularla es:

$$\theta_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i \quad \text{para } t = 1, 2, \dots, N.$$

La serie de volatilidad, se obtuvo mediante la fórmula:

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (r_i - \bar{r})^2}{N}}, \quad \text{donde, } \bar{r} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i.$$

La serie de la tasa de CETE 28, también se obtuvo de BANXICO, el período que se consideró para esta tasa fue del 31 de agosto de 2005 al 31 de agosto de 2006. Y la serie de tasas de treasury de un mes, USD1MT se obtuvo del sistema REUTERS, para el período comprendido entre el 25 de noviembre de 2005 y el 18 de enero de 2006.

## 2.3 Linealización de las ecuaciones diferenciales

Como se mencionó anteriormente, para poder estimar los parámetros de las ecuaciones (1.14), (1.15) y (1.16) a través de 3SLS y FIML, es necesario primeramente linealizar estas ecuaciones, dicha linealización consiste en dejar de forma aislada el término de incertidumbre o browniano, es decir, que no se vea afectado por ninguna variable. A continuación se lleva a cabo la linealización de cada una de las ecuaciones que conforman el modelo.

### a. Linealización de la ecuación diferencial de la tasa corta.

La primera ecuación a linealizar es la que corresponde a la dinámica de la tasa corta,  $r_t$ , dada por la ecuación diferencial (1.14) esto es:

$$dr_t = k(\theta_t - r_t)dt + \gamma\sqrt{\sigma_t}\sqrt{r_t}dW_t, \quad t \geq 0, k > 0, \gamma > 0, \quad (1.14)$$

El primer inconveniente que presenta esta ecuación es que las variables aparecen en forma diferencial o continua, sin embargo el problema se resuelve de manera simple si discretizamos en el tiempo (a un día), quedando de la forma siguiente:

$$r_t - r_{t-1} = k(\theta_{t-1} - r_{t-1})(t - (t-1)) + \sqrt{\sigma_{t-1}}\sqrt{r_{t-1}}\sqrt{(t - (t-1))}\varepsilon_{(t-1)}, \quad t \geq 1, k > 0,$$

$$r_t - r_{t-1} = k(\theta_{t-1} - r_{t-1}) + \sqrt{\sigma_{t-1}}\sqrt{r_{t-1}}\varepsilon_{(t-1)}$$

Donde,  $\varepsilon_{(t-1)} \sim N(0, \gamma^2)$ , conocido también como término de error.

Despejando  $r_t$ , se tiene:

$$r_t = k\theta_{t-1} + (1-k)r_{t-1} + \sqrt{\sigma_{t-1}}\sqrt{r_{t-1}}\varepsilon_{(t-1)}, \quad t \geq 1, k > 0, \quad (2.1)$$

Para poder obtener de manera aislada el término de error dividimos entre  $\sqrt{\sigma_{t-1}}\sqrt{r_{t-1}}$ , con lo cual se obtiene que:

$$\frac{r_t}{\sqrt{\sigma_{t-1}}\sqrt{r_{t-1}}} = k\frac{\theta_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}}\sqrt{r_{t-1}}} + (1-k)\frac{r_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}}\sqrt{r_{t-1}}} + \varepsilon_{(t-1)}, \quad t \geq 1, k > 0, \quad (2.2)$$

Esta ecuación ya es de fácil manejo para incorporarla al paquete econométrico y aplicar alguna técnica de regresión lineal de las antes mencionadas. En el capítulo 3 se hace un análisis más detallado.

### **b. Linealización de la ecuación diferencial del short-term.**

La siguiente ecuación diferencial a linealizar es la que contiene el término del short-term, es decir, de la media de la tasa corta,  $\theta_t$ . De forma similar como en el inciso anterior dicha linealización se lleva a cabo como sigue:

Retomemos la ecuación (1.15),

$$d\theta_t = v(\bar{\theta} - \theta_t)dt + \zeta\sqrt{\theta_t}dV_t, \quad t \geq 0, \bar{\theta} > 0, v > 0, \zeta > 0, \quad (1.15)$$

Donde,  $\varepsilon_{(t-1)_2} \sim N(0, \varsigma^2)$ . De este modo si discretizamos en el tiempo con período de un día queda:

$$\begin{aligned}\theta_t - \theta_{t-1} &= v(\bar{\theta} - \theta_{t-1})(t - (t-1)) + \sqrt{\theta_{t-1}} \sqrt{(t - (t-1))} \varepsilon_{(t-1)_2} & t \geq 1, \bar{\theta} > 0, v > 0, \\ \theta_t - \theta_{t-1} &= v(\bar{\theta} - \theta_{t-1}) + \sqrt{\theta_{t-1}} \varepsilon_{(t-1)_2} & \varepsilon_{(t-1)_2} \sim N(0, \varsigma^2).\end{aligned}$$

Haciendo un poco de álgebra para despejar  $\theta_t$  :

$$\theta_t = v\bar{\theta} + (1-v)\theta_{t-1} + \sqrt{\theta_{t-1}} \varepsilon_{(t-1)_2}, \quad t \geq 1, \bar{\theta} > 0, v > 0, \quad (2.3)$$

Así, si dividimos entre  $\sqrt{\theta_{t-1}}$ , se obtiene:

$$\frac{\theta_t}{\sqrt{\theta_{t-1}}} = \frac{v\bar{\theta}}{\sqrt{\theta_{t-1}}} + (1-v) \frac{\theta_{t-1}}{\sqrt{\theta_{t-1}}} + \varepsilon_{(t-1)_2}, \quad t \geq 1, \bar{\theta} > 0, v > 0, \quad (2.4)$$

Como puede apreciarse esta ecuación ya contiene el término de error,  $\varepsilon_{(t-1)_2}$ , por separado.

### c. Linealización de la ecuación diferencial de la volatilidad.

La última ecuación diferencial por linealizar es la que contiene el término de la volatilidad dada por (1.16):

$$d\sigma_t = \mu(\sigma - \sigma_t)dt + \eta \sqrt{\sigma_t} dU_t, \quad t \geq 0, \bar{\sigma} > 0, \mu > 0, \eta > 0, dU_t \sim N(0, dt). \quad (1.16)$$

Discretizando en el tiempo nos queda:

$$\sigma_t = \mu\sigma + (1-\mu)\sigma_{t-1} + \sqrt{\sigma_{t-1}} \varepsilon_{(t-1)_3}, \quad t \geq 1, \sigma > 0, \mu > 0, \varepsilon_{(t-1)_3} \sim N(0, \eta^2). \quad (2.5)$$

Donde,  $\varepsilon_{(t-1)_3} \sim N(0, \eta^2)$ . Ahora dividamos entre  $\sqrt{\sigma_{t-1}}$  para obtener:

$$\frac{\sigma_t}{\sqrt{\sigma_{t-1}}} = \frac{\mu\sigma}{\sqrt{\sigma_{t-1}}} + (1-\mu) \frac{\sigma_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}}} + \varepsilon_{(t-1)_3}, \quad t \geq 1, \sigma > 0, \mu > 0, \quad (2.6)$$

#### d. Sistema de ecuaciones linealizado

El sistema de ecuaciones linealizado y sobre el cual se va a trabajar para adecuarlo a un modelo que se pueda tratar de manera empírica es el conformado por las ecuaciones (2.2), (2.4) y (2.6), esto es:

$$\frac{r_t}{\sqrt{\sigma_{t-1}} \sqrt{r_{t-1}}} = k \frac{\theta_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}} \sqrt{r_{t-1}}} + (1-k) \frac{r_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}} \sqrt{r_{t-1}}} + \varepsilon_{(t-1)_1}, \quad t \geq 1, k > 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\theta_t}{\sqrt{\theta_{t-1}}} = \frac{v \bar{\theta}}{\sqrt{\theta_{t-1}}} + (1-v) \frac{\theta_{t-1}}{\sqrt{\theta_{t-1}}} + \varepsilon_{(t-1)_2}, \quad t \geq 1, \bar{\theta} > 0, v > 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\sigma_t}{\sqrt{\sigma_{t-1}}} = \frac{\mu \bar{\sigma}}{\sqrt{\sigma_{t-1}}} + (1-\mu) \frac{\sigma_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}}} + \varepsilon_{(t-1)_3}, \quad t \geq 1, \bar{\sigma} > 0, \mu > 0, \quad (2.6)$$

Donde,  $\varepsilon_{(t-1)_1} \sim N(0, \gamma^2)$ ,  $\varepsilon_{(t-1)_2} \sim N(0, \varsigma^2)$  y  $\varepsilon_{(t-1)_3} \sim N(0, \eta^2)$ .

### 2.3 Estructura de plazo y tasa corta

La obtención de la estructura de plazos se lleva a cabo de forma directa mediante la utilización de la tasa de interés de corto plazo (tasa corta),  $r_s$ . Ya que en la práctica, la fórmula de valuación al tiempo  $t$  de un bono cupón cero,  $B(t, T)$ , con vencimiento en  $T$ ,

$$\text{viene dada por: } B(t, T) = \frac{VN}{\left(1 + \left(\frac{T}{360}\right) * r_t\right)},$$

donde:  $B(t, T)$ , es el valor del bono en el tiempo  $t$  y maduración  $T$ ,

$VN$ , es el valor nominal del bono (\$10 pesos para el caso de México),

$T$ , es el plazo o maduración del bono,

$r_t$ , es el precio (tasa de interés) del bono en el tiempo  $t$ .

Sin embargo, en el ámbito académico la expresión que se utiliza para valorar este tipo de bonos es la siguiente:

$$B(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}, \quad (*)$$

donde,  $R(t, T)$ : es la estructura de plazos de la tasa de interés.

Cuando la tasa corta,  $r_s$ , se considera estocástica, la fórmula de valuación del bono se expresa mediante:

$$B(t, T) = e^{\left[ -\frac{1}{T-t} \int_{s=t}^T r_s ds \right] (T-t)} \quad (**)$$

De esta forma, si igualamos (\*) y (\*\*) podemos obtener que la estructura de plazos en términos de la tasa corta queda expresada mediante:

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_{s=t}^T r_s ds,$$

Esta expresión es útil para obtener la estructura de plazos deseada cuando la dinámica de la tasa corta,  $r_s$ , se comporta de manera continua, tal como se plantea en el sistema de ecuaciones (1.14), (1.15) y (1.16). Sin embargo, nuestro interés es simular el comportamiento de la tasa corta mediante la técnica de Monte Carlo y para ello vamos a considerar la expresión matemática obtenida para la tasa corta en la ecuación (2.1). Sin pérdida de generalidad y en respuesta a la existencia de la información de datos, los cuales se presentan en forma discreta, podemos utilizar como una aproximación de la estructura de plazos anterior la siguiente expresión:

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \sum_{s=t}^T r_s.$$

## CAPÍTULO 3. Estimación de parámetros

### 3.1 Introducción

Resolver un sistema de ecuaciones por 3SLS (Zellner y Theil en 1962) o por FIML resulta apropiado cuando las variables explicativas que conforman el sistema están correlacionadas con los términos de error y existe a la vez, tanto heteroscedasticidad como correlación en los residuales. Esta situación suele presentarse en series de tiempo económico-financieras. Se presentará el sistema de ecuaciones (2.2), (2.4) y (2.6) en forma matricial. Esto nos facilitará el manejo empírico del modelo propuesto.

### 3.2 Método de mínimos cuadrados en tres etapas (3SLS)

Este método se caracteriza por su sencillez y eficiencia asintótica. Para poder aplicar 3SLS es necesario trabajar con el sistema de ecuaciones (2.2), (2.4) y (2.6) y expresarlo en forma adecuada para su manejo en *e-views 4.1*. El planteamiento es el siguiente: Hagamos los siguientes cambios de variable en las ecuaciones (2.2), (2.4) y (2.6).

Para la ecuación (2.2) se tiene:

$$y_{t1} = \frac{r_t}{\sqrt{\sigma_{t-1}} \sqrt{r_{t-1}}}, \quad z_{t1} = \frac{\theta_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}} \sqrt{r_{t-1}}}, \quad z_{t2} = \frac{r_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}} \sqrt{r_{t-1}}},$$

$$\varepsilon_{t1} = \varepsilon_{(t-1)1}, \quad \delta_{11} = k \quad \text{y} \quad \delta_{21} = (1-k).$$

Así, la ecuación (2.2) se transforma en la siguiente:

$$y_{t1} = \delta_{11}z_{t1} + \delta_{21}z_{t2} + \varepsilon_{t1}, \quad t \geq 1, \quad k > 0, \quad \varepsilon_{t1} \sim N(0, \gamma_{t1}^2). \quad (3.1)$$

Pero como  $t = 1, 2, \dots, N$ , en cada ecuación, entonces, se tendrá el sistema siguiente:

$$\begin{aligned}
y_{11} &= \delta_{11}z_{11} + \delta_{21}z_{12} + \varepsilon_{11} \\
y_{21} &= \delta_{11}z_{21} + \delta_{21}z_{22} + \varepsilon_{21} \\
&\vdots \\
y_{N1} &= \delta_{11}z_{N1} + \delta_{21}z_{N2} + \varepsilon_{N1}
\end{aligned}
\quad
\begin{aligned}
&t \geq 1, k > 0, \varepsilon_{t1} \sim N(0, \gamma_{t1}^2), \\
&\text{para toda } t = 1, 2, \dots, N.
\end{aligned}
\tag{3.2}$$

En forma matricial, el sistema queda representado mediante:

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{N1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \\ \vdots & \vdots \\ z_{N1} & z_{N2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{11} \\ \delta_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \vdots \\ \varepsilon_{N1} \end{bmatrix}
\quad
\begin{aligned}
&t \geq 1, k > 0, \varepsilon_{t1} \sim N(0, \gamma_{t1}^2), \\
&\text{para toda } t = 1, 2, \dots, N.
\end{aligned}
\tag{3.3}$$

Definamos ahora los siguientes vectores y matrices:

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{N1} \end{bmatrix}_{NX1}, \quad \mathbf{Z}_1 = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \\ \vdots & \vdots \\ z_{N1} & z_{N2} \end{bmatrix}_{NX2}, \quad \boldsymbol{\delta}_1 = \begin{bmatrix} \delta_{11} \\ \delta_{21} \end{bmatrix}_{2X1}$$

y

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \vdots \\ \varepsilon_{N1} \end{bmatrix}_{NX1} \sim \begin{bmatrix} N(0, \gamma_{11}^2) \\ N(0, \gamma_{21}^2) \\ \vdots \\ N(0, \gamma_{N1}^2) \end{bmatrix}$$

De este modo el sistema (3.2), queda expresada como:

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{Z}_1 \boldsymbol{\delta}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1
\tag{3.4}$$

De manera análoga, para la ecuación (2.4) se tiene:

$$y_{t2} = \frac{\theta_t}{\sqrt{\theta_{t-1}}}, \quad z_{t3} = \frac{1}{\sqrt{\theta_{t-1}}}, \quad z_{t4} = \frac{\theta_{t-1}}{\sqrt{\theta_{t-1}}}, \quad \varepsilon_{t2} = \varepsilon_{(t-1)2}, \quad \delta_{31} = v\bar{\theta} \quad \text{y} \quad \delta_{41} = (1-v)$$

De este modo la ecuación (2.4) se transforma en:

$$y_{t2} = \delta_{31}z_{t3} + \delta_{41}z_{t4} + \varepsilon_{t2}, \quad t \geq 1, \quad \bar{\theta} > 0, v > 0, \quad \varepsilon_{t2} \sim N(0, \varsigma_{t2}^2). \quad (3.5)$$

Considerando que  $t = 1, 2, \dots, N$ , obtenemos de manera análoga a la anterior que en forma matricial, el sistema queda representado mediante:

$$\begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{N2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{13} & z_{14} \\ z_{23} & z_{24} \\ \vdots & \vdots \\ z_{N3} & z_{N4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{31} \\ \delta_{41} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{22} \\ \vdots \\ \varepsilon_{N2} \end{bmatrix} \quad t \geq 1, \quad \bar{\theta} > 0, v > 0, \quad \varepsilon_{t2} \sim N(0, \gamma_{t2}^2), \quad (3.6)$$

para toda  $t = 1, 2, \dots, N$ .

Definamos ahora los siguientes vectores y matrices:

$$\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{N2} \end{bmatrix}_{NX1}, \quad \mathbf{Z}_2 = \begin{bmatrix} z_{13} & z_{14} \\ z_{23} & z_{24} \\ \vdots & \vdots \\ z_{N3} & z_{N4} \end{bmatrix}_{NX2}, \quad \boldsymbol{\delta}_2 = \begin{bmatrix} \delta_{31} \\ \delta_{41} \end{bmatrix}_{2X1}$$

y

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{22} \\ \vdots \\ \varepsilon_{N2} \end{bmatrix}_{NX1} \sim \begin{bmatrix} N(0, \varsigma_{12}^2) \\ N(0, \varsigma_{22}^2) \\ \vdots \\ N(0, \varsigma_{N2}^2) \end{bmatrix}$$

De este modo el sistema (3.6), queda expresada como:

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{Z}_2 \boldsymbol{\delta}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \quad (3.7)$$

Por último trabajando con la ecuación (2.6), tenemos que:

$$y_{t3} = \frac{\sigma_t}{\sqrt{\sigma_{t-1}}}, \quad z_{t5} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{t-1}}}, \quad z_{t6} = \frac{\sigma_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}}},$$

$$\varepsilon_{t3} = \varepsilon_{(t-1)3}, \quad \delta_{51} = \mu\sigma \quad \text{y} \quad \delta_{61} = (1 - \mu).$$

De este modo la ecuación (2.6) se transforma en:

$$y_{t3} = \delta_{51} z_{t5} + \delta_{61} z_{t6} + \varepsilon_{t3}, \quad t \geq 1, \quad \sigma > 0, \quad \mu > 0, \quad \varepsilon_{t3} \sim N(0, \eta_{t3}^2). \quad (3.8)$$

Nuevamente considerando que  $t = 1, 2, \dots, N$ , obtenemos de manera análoga a la anterior que en forma matricial, el sistema queda representado mediante:

$$\begin{bmatrix} y_{13} \\ y_{23} \\ \vdots \\ y_{N3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{15} & z_{16} \\ z_{25} & z_{26} \\ \vdots & \vdots \\ z_{N5} & z_{N6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{51} \\ \delta_{61} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \\ \vdots \\ \varepsilon_{N3} \end{bmatrix} \quad t \geq 1, \quad \sigma > 0, \quad \mu > 0, \quad \varepsilon_{t3} \sim N(0, \eta_{t3}^2), \quad (3.9)$$

para toda  $t = 1, 2, \dots, N$ .

Definamos ahora los siguientes vectores y matrices:

$$\mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} y_{13} \\ y_{23} \\ \vdots \\ y_{N3} \end{bmatrix}_{NX1}, \quad \mathbf{Z}_3 = \begin{bmatrix} z_{15} & z_{16} \\ z_{25} & z_{26} \\ \vdots & \vdots \\ z_{N5} & z_{N6} \end{bmatrix}_{NX2}, \quad \boldsymbol{\delta}_3 = \begin{bmatrix} \delta_{51} \\ \delta_{61} \end{bmatrix}_{2X1}$$

y

$$\boldsymbol{\varepsilon}_3 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \\ \vdots \\ \varepsilon_{N3} \end{bmatrix}_{NX1} \sim \begin{bmatrix} N(0, \zeta_{13}^2) \\ N(0, \zeta_{23}^2) \\ \vdots \\ N(0, \zeta_{N3}^2) \end{bmatrix}$$

De este modo el sistema (3.9), queda expresada como:

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{Z}_3 \boldsymbol{\delta}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_3 \quad (3.10)$$

Por lo tanto, podemos formular el sistema completo de ecuaciones (ver Greene, William H. “Análisis Econométrico”. 3<sup>ra</sup> Edición. Ed. Prentice Hall Inc. 1998) como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_1 \\ \boldsymbol{\delta}_2 \\ \boldsymbol{\delta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_3 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

O bien,

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \text{con } E[\boldsymbol{\varepsilon}] = \mathbf{0} \text{ y } E[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'] = \mathbf{0} \quad (3.12)$$

Esta es la representación matricial que se considera para llevar cabo la estimación de los parámetros, ya sea por 3SLS o bien por FIML. Los supuestos bajo los cuales se lleva a cabo la estimación de los parámetros son:

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}] = \mathbf{0}$$

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'] = \mathbf{0},$$

es decir, el vector de los valores esperados y la matriz de varianzas-covarianzas de los residuales respectivamente, deben ambos, ser igual cero.

### 3.3 Método de máxima verosimilitud con información completa (FIML)

Este método se basa en el sistema de ecuaciones completo (2.18); pues el estimador FIML trata conjuntamente todas las ecuaciones y todos los parámetros. FIML estima la función de máxima verosimilitud bajo el supuesto de que las perturbaciones tienen una distribución normal conjunta. Una característica importante es que este estimador es eficiente entre todos los estimadores.

### 3.4 Parámetros estimados

Los primeros resultados en obtener fueron los parámetros estimados econométricamente tanto por 3SLS y FIML considerando a la tasa de fondeo gubernamental como la tasa corta para el período comprendido entre el 11 de agosto de 2005 y el 11 de agosto de 2006. Estos resultados se muestran en la Tabla A.1.1 y Tabla A.1.2 del Anexo, respectivamente. De acuerdo con estos resultados podemos resumir la siguiente información:

**Tabla 3.1**

Método	Coeficientes Estimados					
	$k$	$1-k$	$v\bar{\theta}$	$1-v$	$\mu\sigma$	$1-\mu$
3SLS	0.151545	0.828704	0.000087	0.998256	0.000085	0.990442
FIML	0.151299	0.828930	0.000090	0.998226	0.000086	0.990325

Haciendo un poco de aritmética podemos obtener el valor estimado de los parámetros requeridos:

**Tabla 3.2**

Método	Parámetros							
	$k$	$\gamma$	$v$	$\bar{\theta}$	$\zeta$	$\mu$	$\sigma$	$\eta$
3SLS	0.151545	0.0522760	0.0017440	0.0500000	0.0001100	0.0095580	0.0088721	0.0002370
FIML	0.151299	0.0522620	0.0017740	0.0506764	0.0001100	0.0096750	0.0089096	0.0002370

Los resultados de los parámetros  $\gamma$ ,  $\zeta$  y  $\eta$ , se obtuvieron de los residuales correspondientes a cada ecuación y el método aplicado (ver tablas del anexo A.2). Como

puede observarse de la Tabla 3.2, la mayoría de los parámetros estimados por ambos métodos son muy semejantes, sin embargo, los parámetros más importantes son  $k$  y  $\zeta$ , pues son los determinan la dinámica de la tasa corta y con ello la obtención de la estructura de plazos. Cada método tiene sus ventajas y desventajas, por ejemplo para muestra pequeñas 3SLS supera en todo a FIML. Para muestras grandes el método de FIML es mucho más riguroso y eficiente. Nótese que la suma de  $k + (1-k) \cong 0.980249$  (3SLS), cuando ésta debería ser exactamente igual a uno, sin embargo, la aproximación es buena, por lo que podemos omitir esta pequeña discrepancia.

Es importante mencionar que dos de los supuestos en que se basan las técnicas de regresión antes mencionadas son:  $E[\boldsymbol{\varepsilon}] = \mathbf{0}$  y  $E[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'] = \mathbf{0}$ , es decir, tanto el valor esperado de los residuales como la matriz de varianza – covarianza son igual a cero. Los resultados fueron los siguientes,

$$\bullet \quad E[\boldsymbol{\varepsilon}] = E \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0017480 \\ 0.0000033 \\ 0.0000046 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad E[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'] = \begin{bmatrix} 0.00272323 & 0.00000224 & 0.00000123 \\ 0.00000224 & 0.00000001 & 0.00000002 \\ 0.00000123 & 0.00000002 & 0.00000006 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Puede apreciarse de estos resultados que básicamente los supuestos de la regresión se cumplen. Por otro lado se tiene que la frecuencia de las observaciones es alta (diaria), por lo que es de esperarse que para este tipo de series de que el supuesto de normalidad se viola, una prueba sencilla de normalidad (Quantile & Quantile) lo demuestra (ver gráficos en Anexo, sección A.3). No obstante, los resultados de los parámetros aquí obtenidos son válidos, pues son una buena aproximación para efectos de simulación, en la cual el supuesto de normalidad se hace efectivo ya que la parte medular de la simulación se basa en generar distribuciones normales con media cero y varianza uno ( brownianos).

# CAPÍTULO 4. Método Monte Carlo

## 4.1 Introducción

Monte Carlo es una denominación genérica aplicable a métodos que buscan resolver un problema generando series de números aleatorios y observando aquella fracción de números que obedezcan a ciertas propiedades. Esta familia metodológica es aplicable para obtener soluciones numéricas a problemas muy complicados o faltos de información y que no pueden ser resueltos de manera analítica. En este capítulo usamos los parámetros obtenidos anteriormente como insumos para las simulaciones de Monte Carlo y con ello obtener las trayectorias necesarias para estimar el modelo propuesto.

## 4.2 El método Monte Carlo como herramienta de solución

El método Monte Carlo es un método numérico que permite resolver problemas matemáticos mediante la simulación de variables aleatorias. El método es muy poderoso porque puede simular cualquier proceso cuya dinámica depende de factores aleatorios, además de resolver otros problemas matemáticos que no tienen relación con cuestiones aleatorias a los cuales se le puede inventar un modelo probabilística artificial que permita resolver estos problemas.

El método Monte Carlo tiene dos características importantes:

- La primera consiste en que su algoritmo tiene una estructura muy sencilla. Como regla, se elabora primero un algoritmo para la realización de la prueba aleatoria, después se repite esta prueba  $n$  veces de modo que cada experimento sea independiente de los restantes y se toma la media de los resultados de los experimentos.
- La segunda peculiaridad consiste en que el error, es proporcional a la magnitud  $\sqrt{D/n}$  donde,  $D$  se trata como una constante y  $n$  es el número de pruebas. Es

decir, el error se disminuye en  $\frac{1}{10}$  por cada 100 simulaciones realizadas. El problema se soluciona buscando diferentes formas de ajustar la  $D$ .

Además de las características anteriores el método Monte Carlo tiene ciertas ventajas sobre otras técnicas, a saber:

- La distribución de las variables del modelo no tiene que ser muy aproximadas,
- Las correlaciones pueden ser modeladas,
- El nivel de matemáticas requerido para simular en Monte Carlo es básico, aunque es fácil incluir funciones complejas,
- Cambios en el modelo pueden ser hechos rápidamente y ser comparados con los resultados previos.

Como los resultados de la simulación dependen fuertemente de los muestreos aleatorios, resulta muy importante considerar diferentes formas de generar número aleatorios y practicarles pruebas sobre su nivel de aleatoriedad. Por la manera de generarse se puede pensar que existen dos clasificaciones de este tipo de números; los *aleatorios* y los *seudoaleatorios*.

### 4.3 Método Monte Carlo y la estructura de plazo.

En este trabajo la simulación Monte Carlo (tradicional) consiste en generar una muestra aleatoria de posibles valores de  $r_t$ . Una vez obtenidos suficientes valores muestrales de  $r_t$ , se prosigue a calcular su media. La media aritmética de los ensayos de simulación en su respectivo plazo nos sirve para construir la estructura de plazos. Dicho de otra forma, dado que,

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \sum_{s=t}^T r_s,$$

y  $r_s$  sigue el geométrico browniano definido por (2.1) que se obtuvo de (1.14), tal que:

$$r_t = k \theta_{t-1} + (1-k)r_{t-1} + \sqrt{\sigma_{t-1}} \sqrt{r_{t-1}} \varepsilon_{(t-1)1}, \quad t \geq 1, k > 0, \varepsilon_{(t-1)1} \sim N(0, \gamma^2). \quad (2.1)$$

Entonces, el algoritmo propuesto para determinar la estructura de plazo,  $R(t, T)$ , utilizando Monte Carlo, sigue los pasos siguientes:

- Simular el comportamiento del short-term mean ,  $\theta_s$ , definido por (1.15).
- Simular el comportamiento de la volatilidad,  $\sigma_s$ , definido por (1.16).
- Simular el comportamiento de la tasa corta,  $r_s$ , utilizando (1.14), proponiendo como valor inicial el valor actual de la tasa corta,  $r_0$ , continuando hasta la fecha del plazo deseado,  $T$ , en nuestro caso,  $T = 1825$  días. Esto nos da una realización de una trayectoria de la tasa corta.
- Repetir  $n = 100,000$  veces las realizaciones del paso anterior.
- Calcular el promedio sobre todas las realizaciones de la tasa corta de un mismo plazo y obtener de este modo la estructura de plazos, que en este caso será para 1825 días (cinco años).

Este algoritmo se complementa con la Inversión Moro y se implementó en la plataforma de Visual Basic for Excel (Ver apéndice A.4) y se aplica para todos los casos de simulaciones contempladas en este trabajo.

Una vez estimados los parámetros, podemos obtener las trayectorias futuras de  $r_t$ ,  $\theta_t$  y  $\sigma_t$ . Para poder obtener dichas trayectorias es necesario reemplazar en las ecuaciones (2.1), (2.3) y (2.5), los términos de error:  $\varepsilon_{(t-1)1} \sim N(0, \gamma^2)$ ,  $\varepsilon_{(t-1)2} \sim N(0, \zeta^2)$  y  $\varepsilon_{(t-1)3} \sim N(0, \eta^2)$ , por los brownianos:  $W_{t-1} \sim N(0,1)$ ,  $V_{t-1} \sim N(0,1)$  y  $U_{t-1} \sim N(0,1)$ , respectivamente. Los brownianos se utilizan para llevar a cabo las simulaciones pues estos se generan de forma aleatoria mediante la técnica de Monte Carlo. Retomando el sistema conformado por (2.1), (2.3) y (2.5),

$$r_t = k \theta_{t-1} + (1-k)r_{t-1} + \sqrt{\sigma_{t-1}} \sqrt{r_{t-1}} \varepsilon_{(t-1)1}, \quad t \geq 1, k > 0, \varepsilon_{(t-1)1} \sim N(0, \gamma^2). \quad (2.1)$$

$$\theta_t = v \bar{\theta} + (1-v)\theta_{t-1} + \sqrt{\theta_{t-1}} \varepsilon_{(t-1)2}, \quad t \geq 1, \bar{\theta} > 0, v > 0, \varepsilon_{(t-1)2} \sim N(0, \zeta^2). \quad (2.3)$$

$$\sigma_t = \mu \sigma + (1-\mu)\sigma_{t-1} + \sqrt{\sigma_{t-1}} \varepsilon_{(t-1)3}, \quad t \geq 1, \mu > 0, \sigma > 0, \varepsilon_{(t-1)3} \sim N(0, \eta^2). \quad (2.5)$$

Ahora bien, expresemos estas tres ecuaciones en términos de brownianos: La ecuación (2.1) queda,

$$r_t = k \theta_{t-1} + (1-k)r_{t-1} + \gamma \sqrt{\sigma_{t-1}} \sqrt{r_{t-1}} W_{t-1}, \quad t \geq 1, k > 0, \gamma > 0, W_{t-1} \sim N(0, 1), \quad (4.1)$$

O bien,

$$r_t = r_{t-1} + (\theta_{t-1} - r_{t-1})k + \gamma \sqrt{\sigma_{t-1}} \sqrt{r_{t-1}} W_{t-1}, \quad t \geq 1, k > 0, \gamma > 0, \quad (4.2)$$

La ecuación (2.3) queda,

$$\theta_t = v \bar{\theta} + (1-v)\theta_{t-1} + \zeta \sqrt{\theta_{t-1}} V_{t-1}, \quad t \geq 1, \bar{\theta} > 0, v > 0, \zeta > 0, V_{t-1} \sim N(0, 1), \quad (4.3)$$

o bien,

$$\theta_t = \theta_{t-1} + (\bar{\theta} - \theta_{t-1})v + \zeta \sqrt{\theta_{t-1}} V_{t-1}, \quad t \geq 1, \bar{\theta} > 0, v > 0, \zeta > 0, \quad (4.4)$$

Y por último la ecuación (2.5) queda,

$$\sigma_t = \mu \sigma + (1-\mu)\sigma_{t-1} + \eta \sqrt{\sigma_{t-1}} U_{t-1}, \quad t \geq 1, \mu > 0, \sigma > 0, \eta > 0, U_{t-1} \sim N(0, 1) \quad (4.5)$$

o bien,

$$\sigma_t = \sigma_{t-1} + (\sigma - \sigma_{t-1})\mu + \eta \sqrt{\sigma_{t-1}} U_{t-1}, \quad t \geq 1, \mu > 0, \sigma > 0, \eta > 0, \quad (4.6)$$

De esta forma tenemos que el sistema de ecuaciones corregido sobre el cual se van a realizar las simulaciones es:

$$r_t = r_{t-1} + (\theta_{t-1} - r_{t-1})k + \gamma \sqrt{\sigma_{t-1}} \sqrt{r_{t-1}} W_{t-1}, \quad t \geq 1, k > 0, \gamma > 0, \quad (4.2)$$

$$\theta_t = \theta_{t-1} + (\bar{\theta} - \theta_{t-1})\nu + \zeta \sqrt{\theta_{t-1}} V_{t-1}, \quad t \geq 1, \bar{\theta} > 0, \nu > 0, \zeta > 0, \quad (4.4)$$

$$\sigma_t = \sigma_{t-1} + (\bar{\sigma} - \sigma_{t-1})\mu + \eta \sqrt{\sigma_{t-1}} U_{t-1}, \quad t \geq 1, \mu > 0, \bar{\sigma} > 0, \eta > 0, \quad (4.6)$$

Los brownianos  $W_{t-1} \sim N(0,1)$ ,  $V_{t-1} \sim N(0,1)$  y  $U_{t-1} \sim N(0,1)$ , se generan a partir de números aleatorios que se distribuyen normalmente con media cero y varianza uno. Esto se lleva a cabo utilizando el algoritmo de la Inversión Moro.

Hay que recordar que entre mayor sea el numero de simulaciones o de realizaciones, mejor será la precisión de nuestro resultado, ya que si aumentamos en cien veces las simulaciones aumenta una décima de corrección.

### 4.3.1 Simulación de la dinámica del short-term mean

Empezaremos en simular la dinámica del short-term mean para la tasa de fondeo gubernamental para el período comprendido entre el 11 de agosto de 2005 y el 11 de agosto de 2006, para ello se tomará en cuenta la ecuación (4.4), esto es:

$$\theta_t = \theta_{t-1} + (\bar{\theta} - \theta_{t-1})\nu + \zeta \sqrt{\theta_{t-1}} V_{t-1}, \quad t \geq 1, \bar{\theta} > 0, \nu > 0, \zeta > 0, V_{t-1} \sim N(0,1). \quad (4.4)$$

De manera más específica, si sustituimos los parámetros estimados por 3SLS que se reportan en las Tablas 3.1 y 3.2, se obtiene que:

$$\theta_t = \theta_{t-1} + (0.0500000 - \theta_{t-1}) * 0.0017440 + 0.0001100 \sqrt{\theta_{t-1}} V_{t-1}, \quad t \geq 1, \quad (4.7)$$

Se propone como valor inicial al valor actual del short-term mean que corresponde al día 11 de agosto de 2006, esto es,  $\theta_0 = 0.07912$ . Se llevarán a cabo un total de 100,000 realizaciones. Como puede observarse de (4.6), el proceso para la obtención del nuevo valor de  $\theta_t$  es recursivo, es decir, se requiere del valor anterior. Los resultados obtenidos se presentan en el siguiente capítulo.

### 4.3.2 Simulación de la dinámica de la volatilidad

Ahora simularemos la dinámica de la volatilidad para la tasa de fondeo gubernamental también para el período comprendido entre el 11 de agosto de 2005 y el 11 de agosto de 2006, para ello se tomará en cuenta la ecuación (4.6), esto es:

$$\sigma_t = \sigma_{t-1} + (\sigma - \sigma_{t-1})\mu + \eta\sqrt{\sigma_{t-1}}U_{t-1}, \quad t \geq 1, \quad \mu > 0, \quad \sigma > 0, \quad \eta > 0, \quad U_{t-1} \sim N(0,1). \quad (4.6)$$

De manera más específica, si sustituimos los parámetros estimados por 3SLS que se reportan en las Tablas 3.1 y 3.2, se obtiene que:

$$\sigma_t = \sigma_{t-1} + (0.0088721 - \sigma_{t-1}) * 0.0095580 + 0.0002370 \sqrt{\sigma_{t-1}} U_{t-1}, \quad t \geq 1, \quad (4.8)$$

Se propone como valor inicial al valor actual de la volatilidad, esto es,  $\sigma_0 = 0.01658$ . Se llevarán a cabo también un total de 100,000 realizaciones. Como puede observarse de (4.8), el proceso para la obtención del nuevo valor de  $\sigma_t$  es también recursivo.

### 4.3.3 Simulación de la dinámica de la tasa corta

Para poder llevar a cabo la simulación de la tasa corta correspondiente a la tasa de fondeo gubernamental para el período comprendido entre el 11 de agosto de 2005 y el 11 de agosto de 2006, se requiere, primeramente haber llevado a cabo las simulaciones tanto de la

volatilidad como del short-term mean, pues éstos son insumos importantes que determinan en gran parte el comportamiento de dicha tasa. Esto se puede apreciar en la ecuación (4.2), dada por,

$$r_t = r_{t-1} + (\theta_{t-1} - r_{t-1})k + \gamma \sqrt{\sigma_{t-1}} \sqrt{r_{t-1}} W_{t-1}, \quad t \geq 1, \quad k > 0, \quad \gamma > 0, \quad W_{t-1} \sim N(0,1), \quad (4.2)$$

Nuevamente, de acuerdo con los parámetros estimados por 3SLS, tendremos que,

$$r_t = r_{t-1} + (\theta_{t-1} - r_{t-1}) * 0.151545 + 0.0522760 \sqrt{\sigma_{t-1}} \sqrt{r_{t-1}} W_{t-1}, \quad t \geq 1, \quad (4.9)$$

Para llevar a cabo la simulación se requieren de antemano, los valores iniciales o semillas de la tasa corta, el short-term mean y de la volatilidad. Los valores iniciales tanto de la volatilidad como del short-term mean son los mismos que se consideraron anteriormente, es decir,  $\sigma_0 = 0.01658$  y  $\theta_0 = 0.07912$ , respectivamente. Para el valor inicial de la tasa corta se considerará al valor actual,  $r_0 = 0.07020$ , este valor corresponde al valor de la tasa corta del día 11 de agosto de 2006.

En resumen, el sistema de ecuaciones a simular con el cual se obtendrá la estructura de plazos para la tasa de fondeo gubernamental par el período comprendido entre el 11 de agosto de 2005 y el 11 de agosto de 2006, viene dado por las ecuaciones (4.7), (4.8) y (4.9):

$$\theta_t = \theta_{t-1} + (0.0500000 - \theta_{t-1}) * 0.0017440 + 0.0001100 \sqrt{\theta_{t-1}} V_{t-1}, \quad t \geq 1, \quad (4.7)$$

$$\sigma_t = \sigma_{t-1} + (0.0088721 - \sigma_{t-1}) * 0.0095580 + 0.0002370 \sqrt{\sigma_{t-1}} U_{t-1}, \quad t \geq 1, \quad (4.8)$$

$$r_t = r_{t-1} + (\theta_{t-1} - r_{t-1}) * 0.151545 + 0.0522760 \sqrt{\sigma_{t-1}} \sqrt{r_{t-1}} W_{t-1}, \quad t \geq 1, \quad (4.9)$$

Donde,  $V_{t-1} \sim N(0,1)$ ,  $U_{t-1} \sim N(0,1)$  y  $W_{t-1} \sim N(0,1)$ , se generan de forma aleatoria con Inversión Moro.

# **CAPÍTULO 5. Resultados de las simulaciones y análisis**

## **5.1 Introducción**

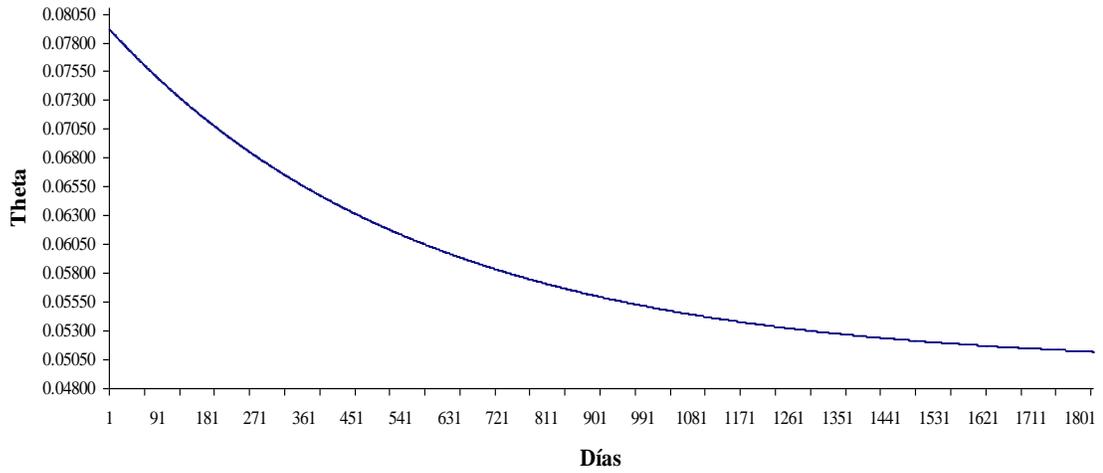
En este capítulo se presentan los resultados de todas las simulaciones realizadas en este trabajo. Las primeras simulaciones que se realizaron corresponden a la dinámica del short-term mean, la volatilidad y la tasa corta de la tasa de fondeo gubernamental para el período comprendido entre el 11 de agosto de 2005 y el 11 de agosto de 2006 (no se incluyen días festivos), con la cual se obtuvo la estructura de plazo deseada por nuestro modelo. Asimismo se muestra otra estructura de plazo para la tasa de fondeo gubernamental para el período comprendido entre el 25 de noviembre de 2004 al 18 de enero de 2006. También se comparan las estructuras de plazos para la tasa de fondeo gubernamental obtenida mediante el modelo propuesto y el modelo de CIR. Se obtienen además estructuras de plazo para CETES 28 y treasury a un mes, USD1MT con el modelo propuesto, para éste último se utiliza también el modelo de CIR. Por último se comparan las estructuras de plazo para  $\gamma = 1$  (modelo de Lin-Chen) y  $\gamma = 0.0522760$  (modelo propuesto). Esto se hace para mostrar que el modelo es flexible ante diversas situaciones del mercado.

## **5.2 Comportamientos del short-term mean y volatilidad**

A continuación se muestran los resultados obtenidos de las simulaciones realizadas del comportamiento tanto del short-term mean como de la volatilidad de la tasa de fondeo gubernamental para el período comprendido entre el 11 de agosto de 2005 y el 11 de agosto de 2006 (no se incluyen días festivos).

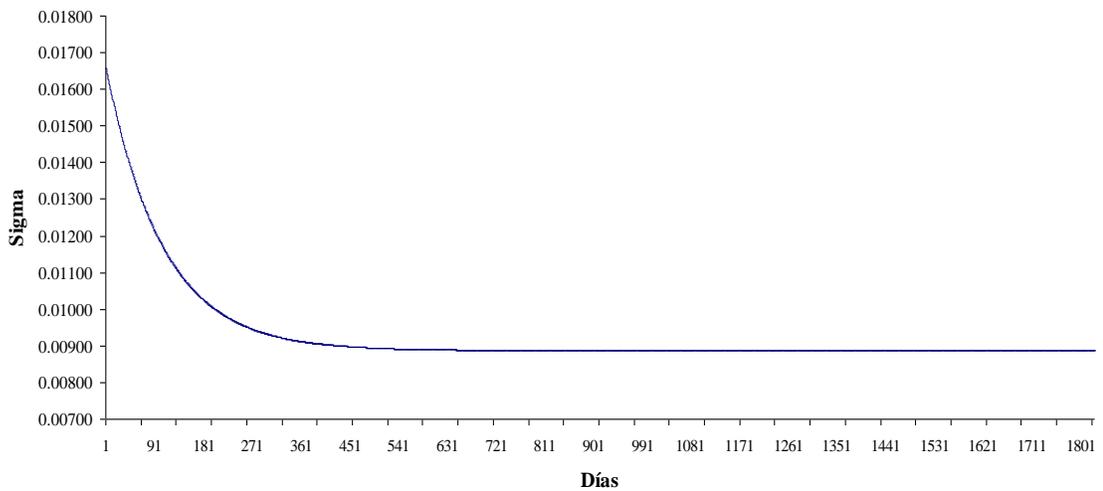
El siguiente gráfico corresponde al promedio de las realizaciones de la dinámica del short-term mean. Puede observarse que la condición de reversión a la media de la ecuación (1.15) se cumple, es decir, a medida que pasa el tiempo,  $\theta_t$  converge a su valor medio,  $\bar{\theta} = 0.050000$  (ver Tabla 3.2).

### Dinámica del Short\_Term



Por otra parte el siguiente gráfico corresponde al promedio de las realizaciones de la dinámica de la volatilidad. Puede observarse, que la condición de reversión a la media de la ecuación (1.16) también se cumple, es decir, a medida que pasa el tiempo,  $\sigma_t$  converge a su valor medio,  $\sigma = 0.0088721$  (ver Tabla 3.2).

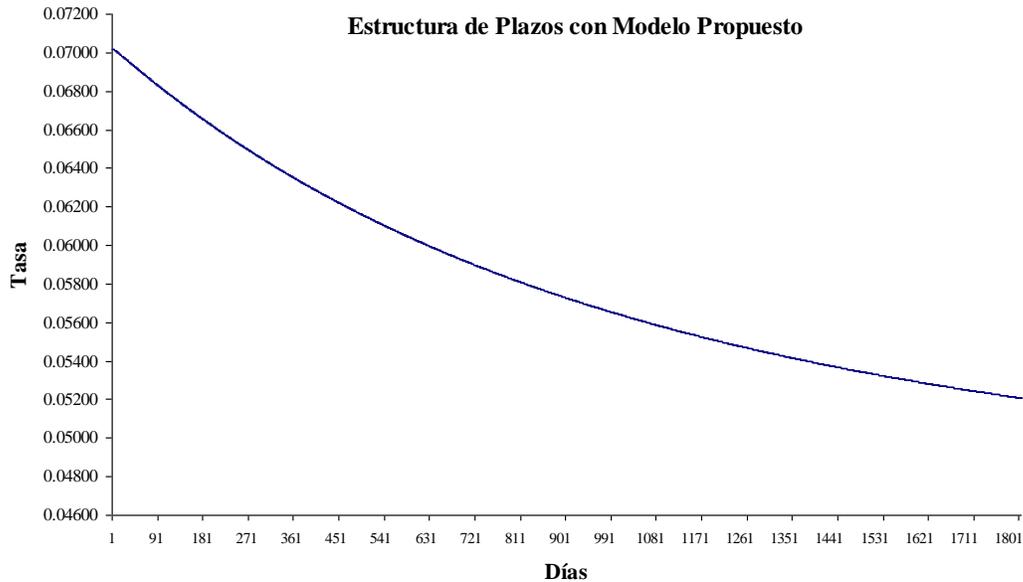
### Dinámica de la Volatilidad



### 5.3 Estructura de plazos resultante (modelo propuesto)

Sin lugar a duda el resultado más importante y por el cual se llevó a cabo este trabajo, es la obtención de una estructura de plazos con el modelo y método de solución propuestos.

El resultado de este proyecto se presenta a continuación.

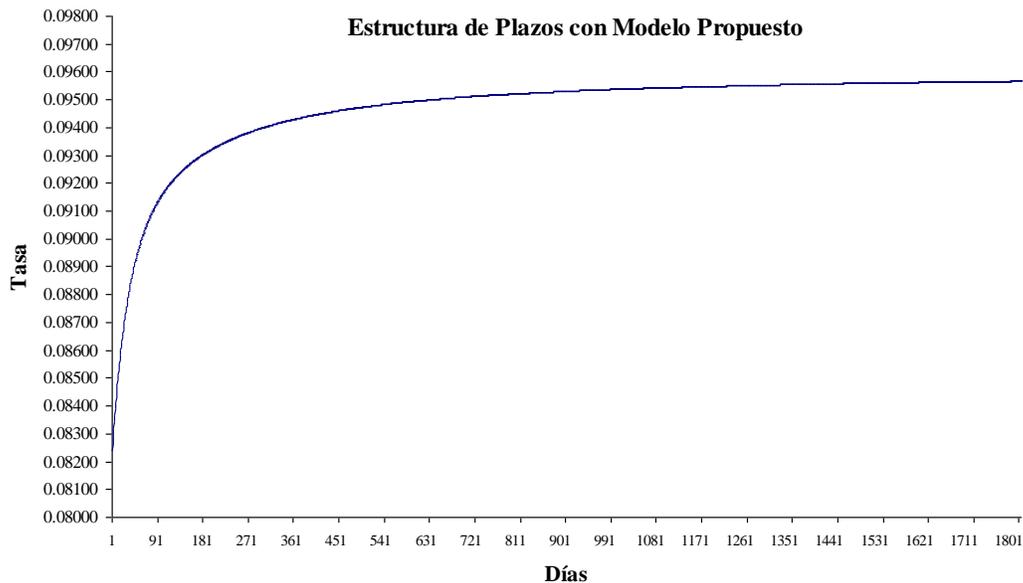


La forma de la estructura de plazos es típica y similar a los obtenidos por otros métodos y modelos y consistente con el comportamiento del mercado (comúnmente se obtienen estructuras de plazos crecientes). Para poder apreciar hacia que tasa de equilibrio converge es necesario añadir más plazo. Sin embargo el comportamiento de la estructura cumple con la característica de equilibrio. Es importante mencionar que los brownianos están correlacionados de manera implícita a través de la ecuación de la dinámica de la tasa corta. También cabe señalar que el drift de la ecuación (1.14), implica una condición de “equilibrio” más no de “reversión”. Esto se puede apreciar en el gráfico anterior. Por otra parte para darnos una idea del margen de error entre lo que pronostica el modelo y lo que reporta el mercado durante los primeros nueve días subsecuentes al 11 de agosto de 2006 observemos la siguiente tabla:

Días	$r_t$ real%	$r_t$ estimada%	Error%
1	7.05000	7.02000	-0.427350
2	7.07000	7.01866	-0.731437
3	6.95000	7.01706	0.955602
4	7.00000	7.01531	0.218291
5	7.01000	7.01319	0.045509
6	7.03000	7.01099	-0.271198
7	7.03000	7.00889	-0.301140
8	7.00000	7.00670	0.095686
9	7.02000	7.00462	-0.219627

El signo negativo puede interpretarse como una subestimación al valor real, es decir, que el valor pronosticado está por debajo del valor de mercado. Lo contrario ocurre cuando el signo es positivo.

Las formas de las estructuras de tasas tienden a cambiar dependiendo de la información disponible. Esto lo podemos mostrar en nuestro modelo con otro conjunto de datos. La gráfica siguiente muestra la estructura de plazos para la tasa de fondeo gubernamental para el período comprendido entre el 25 de noviembre de 2004 al 18 de enero de 2006, con valores iniciales:  $r_0 = 0.082400$ ,  $\theta_0 = 0.0918607$ ,  $\sigma_0 = 0.0050556$ ,  $\bar{\theta} = 0.09481404$  y  $\sigma = 0.0044715$ .



## 5.4 Comparación entre modelo propuesto y CIR

En esta sección se presenta una comparación entre el modelo propuesto y el modelo de CIR (ecuación (1.3)) considerando la tasa de fondeo gubernamental en el período que va del 11 de agosto de 2005 al 11 de agosto de 2006 (286 observaciones.). Siguiendo la misma metodología de estimación de parámetros, pero ahora aplicado al modelo de CIR, en este caso se utilizó OLS (Mínimos cuadrados Ordinarios). Se obtuvieron los siguientes resultados:

**Tabla 5.1**

		Coeficientes Estimados, CIR				
Método	$k\bar{\theta}$	$1-k$	$k$	$\bar{\theta}$	$\sigma$	
OLS	0.00136	0.98161	0.01839	0.073953	0.005338	

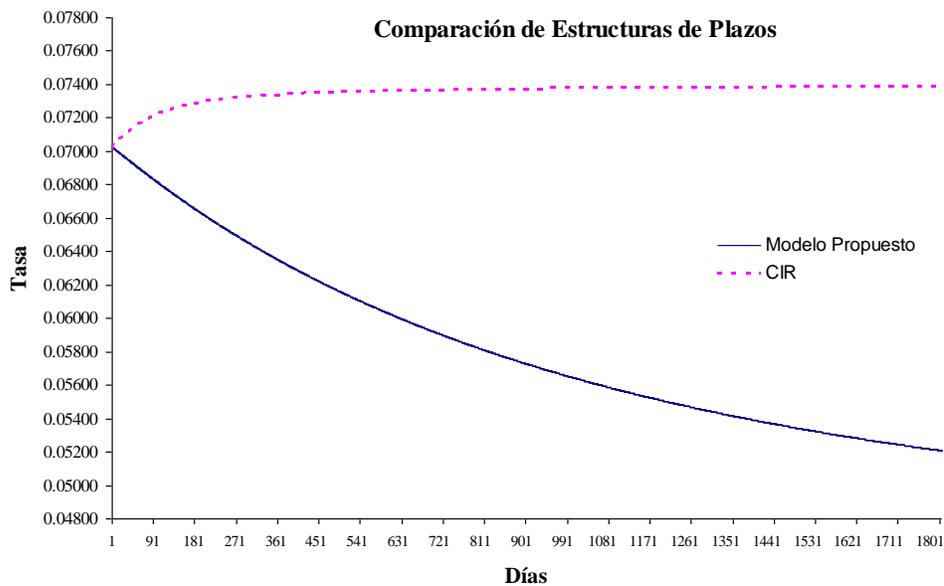
De este modo la especificación del modelo CIR es:

$$dr_t = k(\bar{\theta} - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, \quad k, \bar{\theta}, \sigma, \text{ son constantes. CIR} \quad (1.3)$$

$$r_t = k\bar{\theta} + (1-k)r_{t-1} + \sigma\sqrt{r_{t-1}}W_{t-1}, \quad (5.1)$$

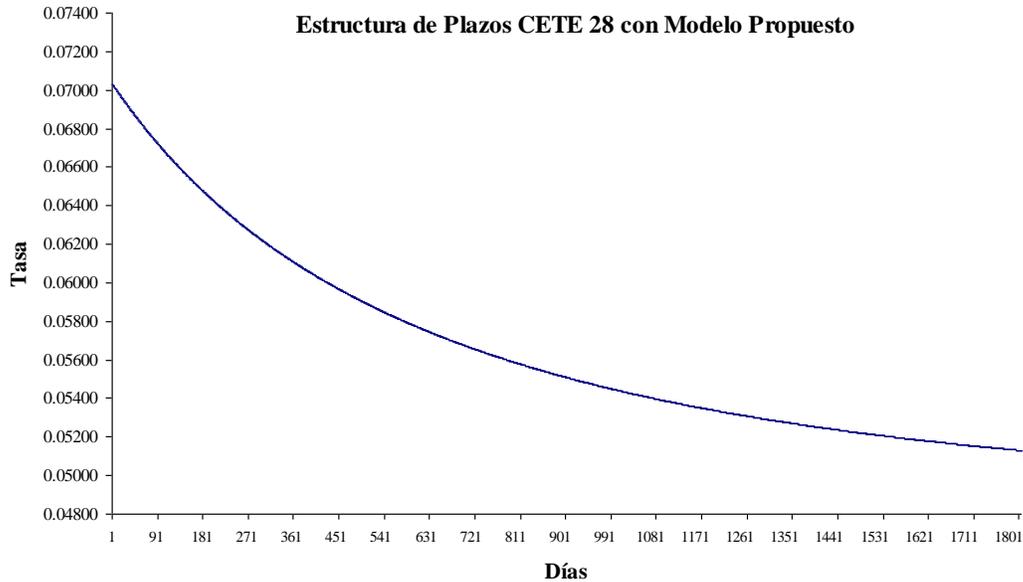
$$r_t = 0.00136 + 0.98161*r_{t-1} + 0.005338*\sqrt{r_{t-1}}W_{t-1}, \quad (5.2)$$

El siguiente gráfico muestra tanto la estructura de plazos obtenida por el modelo aquí propuesto como por el modelo de CIR. En el puede observarse que en este caso definitivamente el modelo CIR no es nada realista al movimiento del mercado, pues la tasa de fondeo gubernamental presenta una tendencia a la baja muy marcada durante el período de análisis. A diferencia del modelo propuesto, este si va a la par del movimiento del mercado. También puede apreciarse del gráfico, con el modelo de CIR (modelo de un solo factor), se reproduce una estructura de plazos, la cual converge al equilibrio de largo plazo de forma más rápida que la obtenida por el modelo de tres factores aquí propuesto, la convergencia de éste último hacia el equilibrio lo hace de una manera más paulatina, incluso el valor al que converge cada estructura es diferente, siendo mucho menor para la estructura obtenida por el modelo de tres factores.



## 5.5 Estructura de plazos de CETES 28 y USD1MT

Tomando en cuenta que en el mercado de renta fija cotizan activos con diferentes vencimientos o plazos, es factible obtener estructuras de plazos a partir de las series de precios correspondientes a cada plazo. Por ejemplo, podemos obtener una estructura de plazos a partir de la tasa diaria de CETES 28 (tasa corta,  $r_t$ ). Para llevar a cabo este ejercicio se consideró el período comprendido entre el 31 de agosto de 2005 y el 31 de agosto de 2006, dando un total de 255 observaciones (no se incluyen días festivos). La estimación de los parámetros se llevó a cabo mediante 3SLS. La estructura de plazos resultante mediante el modelo propuesto es la siguiente:



El comportamiento de esta nueva estructura de plazo es decreciente y convergente a un tasa de equilibrio de largo plazo de aproximadamente 5.00%, lo cual se traduce como una disminución en las tasas de interés. La tasa corta inicial  $r_0 = 7.02825\%$  corresponde al día 31 de agosto de 2006. Para darnos una idea del margen de error entre lo que pronostica el modelo y lo que reporta el mercado durante los primeros diez días subsecuentes al 31 de agosto de 2006 observemos la siguiente tabla:

<b>Días</b>	$r_t$ real	$r_t$ estimada	<b>Error%</b>
1	7.02684	7.02437	- 0.03515
2	7.02273	7.02051	- 0.03155
3	7.03141	7.01668	- 0.20999
4	7.04018	7.01285	- 0.38968
5	7.04840	7.00903	- 0.56167
6	7.04705	7.00525	- 0.59675
7	7.05301	7.00147	- 0.73613
8	7.07184	6.99770	- 1.05951
9	7.06031	6.99395	- 0.94894
10	7.07882	6.99020	- 1.26778

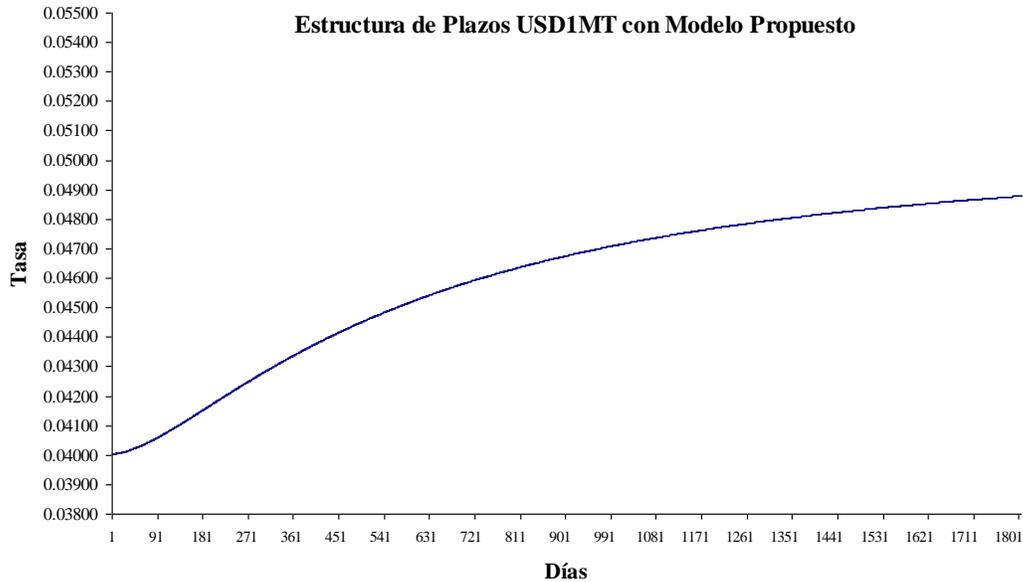
Nuevamente aquí el signo negativo puede interpretarse como una subestimación al valor real, es decir, que el valor pronosticado está por debajo del valor de mercado. Lo contrario ocurre cuando el signo es positivo.

Hay que tener muy presente que las estructuras de plazos se calculan día con día, y a medida que el mercado cambia, dichas estructuras se ajustaran de tal modo que se alejen lo menos posible del mercado propio.

Otro ejercicio que se realizó fue el de obtener una estructura de plazos para el mercado de renta fija de EUA, utilizando para ello la tasa de treasurys a un mes, USD1MT como la tasa corta,  $r_t$ . El período de tiempo considerado abarca desde el 25 de noviembre de 2004 al 18 de enero de 2006. La estimación de los parámetros se llevo a cabo mediante FIML. Los resultados se muestran a continuación:

Método	Coeficientes Estimados					
	$k$	$1-k$	$v\bar{\theta}$	$1-v$	$\mu\sigma$	$1-\mu$
FIML	0.066908	0.946290	0.000132	0.996058	0.0000534	0.988769

Tomando como valores iniciales  $r_0 = 4.0039\%$ ,  $\theta_0 = 2.934\%$  y  $\sigma_0 = 0.006359$  para la simulación de la tasa corta, la estructura resultante fue la siguiente:



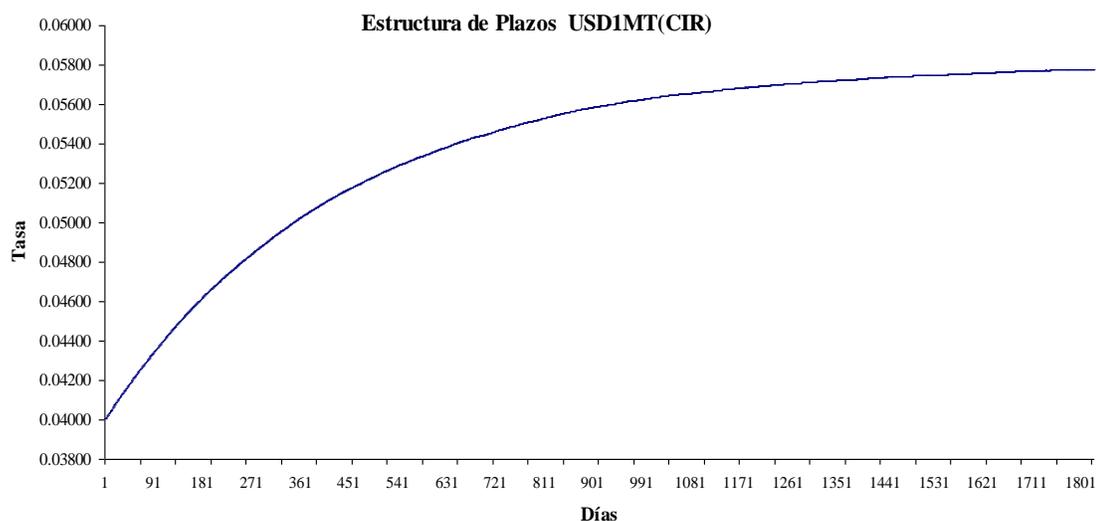
De acuerdo al resultado puede decirse que las tasas en EUA van en aumento, convergiendo en el largo plazo a niveles del 5.1% aproximadamente. Esto podría apreciarse si se añadiera más plazo a la estructura.

En la sección 5.3 se compararon las estructuras obtenidas por el modelo propuesto y por el modelo de CIR, utilizando como tasa corta la tasa de fondeo gubernamental. Como pudo apreciarse el modelo de CIR no capturó de manera correcta la dinámica de la tasa corta.

Ahora obtendremos la estructura de plazos utilizando como tasa corta la tasa de treasury a un mes, USD1MT, mediante el modelo de CIR para el período 25 de noviembre de 2004 al 18 de enero de 2006 y poderla comparar con la estructura obtenida por el modelo propuesto. A partir de la ecuación (5.1) y empleando la técnica de mínimos cuadrados ordinarios (OLS) se obtuvieron los siguiente resultados

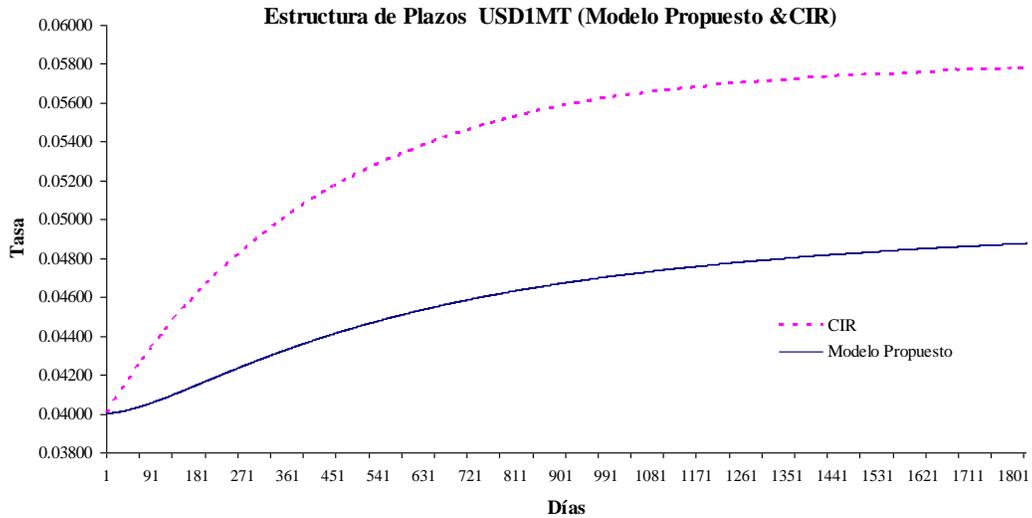
Método	Coeficientes Estimados, CIR				
	$k\bar{\theta}$	$1-k$	$k$	$\bar{\theta}$	$\sigma$
OLS	0.000136	0.997654	0.002346	0.057971	0.003316

Para llevar a cabo la simulación se consideró el valor de la tasa corta inicial,  $r_0 = 4.0039\%$ . La estructura de plazo resultante se muestra a continuación:



En contraste con la estructura obtenida a partir de la tasa de fondeo gubernamental cuya tendencia real era a la baja mediante CIR (sección 5.3), la estructura de CIR aquí obtenida sí reproduce la dinámica de la tasa USD1MT, pues éstas reflejan una tendencia al alza en su valor de mercado. A partir de estos dos resultados podemos inferir el siguiente resultado: CIR no captura la disminución en el valor de las tasas en comparación con el modelo propuesto que sí lo hace.

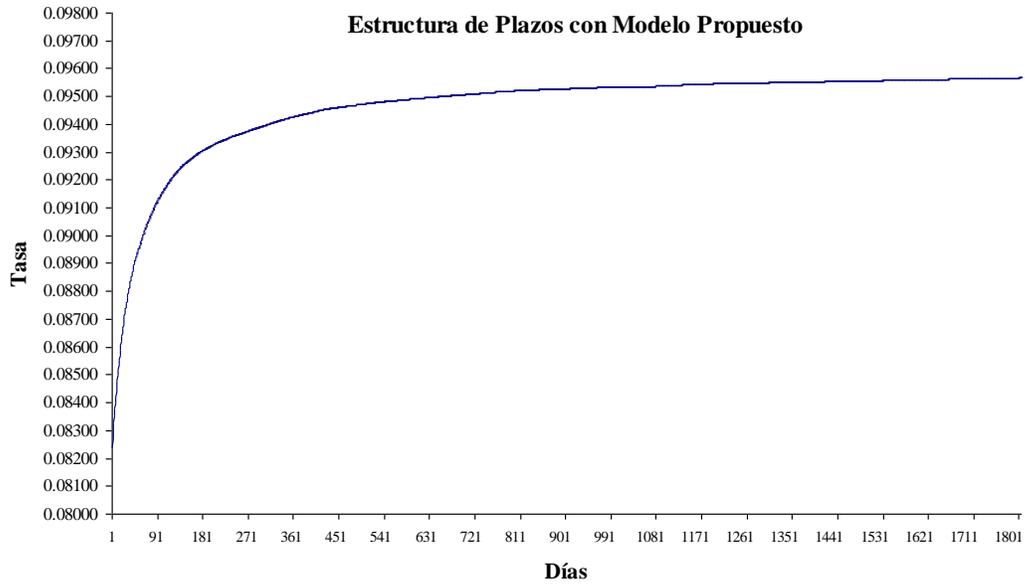
Por otra parte para poder llevar a cabo una mejor comparación de las estructuras obtenidas tanto por CIR como por el modelo propuesto para la dinámica de la tasa corta USD1MT, es conveniente colocarlas en un solo gráfico como a continuación se muestra.



Puede apreciarse muy claramente que ambos modelos reproducen el comportamiento de las tasas USD1MT a través del tiempo. Sin embargo existe una diferencia muy marcada en la velocidad de convergencia al equilibrio de largo plazo, siendo ésta mayor en el modelo CIR respecto al modelo propuesto. También se puede apreciar que ambas estructura convergen a diferentes tasas de equilibrio de largo plazo, siendo aproximadamente de 5.8 % para CIR y de 5.1 % para el modelo propuesto.

## 5.6 Efectos del parámetro $\gamma$ en el modelo propuesto

El parámetro  $\gamma$ , como ya se mencionó al inicio del presente trabajo se incorporó en el término de incertidumbre de la ecuación diferencial estocástica para la dinámica de la tasa corta en el modelo original de Lin-chen. Este parámetro puede interpretarse como un indicador de sensibilidad del mercado, es decir es un factor de ajuste del impacto que tiene la volatilidad,  $\sigma_t$ , sobre la tasa corta,  $r_t$ . Para verificar que efectos tiene este parámetro en la estructura de plazos para la tasa de fondeo gubernamental para el período comprendido entre el 24 de noviembre de 2004 y el 18 de enero de 2006 considerando un valor de  $\gamma = 1$ . El resultado se presenta a continuación en la siguiente gráfica.



Como puede apreciarse esta grafica es idéntica a la obtenida en la sección 5.3, donde  $\gamma = 0.0522760$ . Esto sugiere que el efecto del parámetro  $\gamma$  no es significativo, haciendo que el término determinista en la ecuación (1.14) domine al término de la fuente de riesgo.

## **CAPÍTULO 6. Conclusiones y propuestas de recomendaciones futuras**

De acuerdo a los resultados obtenidos en el presente trabajo, tanto el modelo propuesto, como el método de solución resultaron ser satisfactorios. A continuación describiremos por separado las aportaciones, las limitaciones y las propuestas de investigación futura que nuestro modelo ofrece.

### *Aportaciones:*

- La incorporación del parámetro  $\gamma$  en el modelo propuesto nos permite conocer que tan estable se encuentra el mercado, pues este parámetro es muy sensible a variaciones considerables en las tasas, dicho de otra manera, el modelo captura momentos de muy alta volatilidad en el mercado de renta fija, convirtiéndolo así en un modelo flexible ante diferentes condiciones de mercado. Por otra parte podemos decir que el modelo de Lin-Chen ( $\gamma = 1$ ) es un caso particular de nuestro modelo.
- Por ser un modelo de tres factores, podemos pronosticar de mejor manera el comportamiento o tendencia de largo plazo de la tasa de interés. En comparación con el modelo de CIR, el cual es de dos factores, podemos decir que de acuerdo a los resultados obtenidos en este trabajo nuestro modelo propuesto supera a éste, pues CIR no captura el comportamiento de las tasas de interés cuando éstas tienden a la baja.
- Propone una metodología empírica para su solución: Para poder obtener la estructura de plazo se incurre a las técnicas econométricas 3SLS y FIML para estimar los parámetros que se presentan en el sistema de ecuaciones (1.14), (1.15) y (1.16). Los parámetros estimados, así como sus correspondientes pruebas de hipótesis resultaron ser estadísticamente altamente significativos, lo cual garantiza que los parámetros estimados son de buena calidad. Los parámetros estimados se utilizan para llevar a cabo la simulación de la dinámica de tasa corta, del short-term mean y de la volatilidad, para lo cual es necesario generar brownianos, es decir,

variables aleatorias que se comportan como normales con media cero y varianza uno. Esto se puede llevar a cabo mediante la técnica de Monte Carlo en complemento con el algoritmo de Inversión Moro. Para esta investigación se elaboró un programa basado éste en la plataforma de *Visual Basic for Excel*.

*Limitaciones:*

- Los resultados dependen de la metodología de Monte Carlo y la tecnología asociada.
- Dada la naturaleza de los datos (período de un día) nos restringimos a dar una solución que corresponde al caso discreto y no al continuo, como lo propone el modelo original.

*Propuestas para investigaciones futuras:*

- Considerar la aplicación del Método de Momentos Generalizados (GMM), para la estimación de parámetros, pues hay que recordar que el sistema de ecuaciones (1.14), (1.15) y (1.16) es no lineal, y este método resulta ser buena opción para su solución.
- Como pudo apreciarse, en la mayoría de las curvas la convergencia al equilibrio de largo plazo no es muy clara. Para ello se recomienda ampliar la estructura a plazos mayores a los 1825 días (5 años), por ejemplo de 10, 20 e incluso a 30 años
- Generar números aleatorios más robustos con un buen programa, ya sea con alguno de los que se encuentran disponibles en el mercado o bien hacer uno a la medida de las necesidades. Por otra parte, para efectos de simulación se recomienda contar con un buen equipo de cómputo que permita obtener los resultados de forma rápida

## Anexo.

### A.1 Parámetros estimados

**Tabla A.1.1:** Estimación de Parámetros mediante 3SLS

Método de Estimación: Iterative Three-Stage Least Squares

Muestra: 09/11/2005 a 08/11/2006

Observaciones Incluidas: 285

Observaciones en el sistema: 855

Simultaneous weighting matrix & coefficient iteration

Convergence achieved after: 11 weight matrices, 12 total coef iterations

	Coficiente	Error Estd.	z-Estadístico	Prob.
C(1) (= $k$ )	0.151545	0.017249	8.785665	0.0000
C(2) (= $1 - k$ )	0.828704	0.019378	42.76556	0.0000
C(3) (= $v\bar{\theta}$ )	8.72E-05	2.12E-05	4.124387	0.0000
C(4) (= $1 - v$ )	0.998256	0.000242	4123.732	0.0000
C(5) (= $\mu\sigma$ )	8.48E-05	5.95E-06	14.26790	0.0000
C(6) (= $1 - \mu$ )	0.990442	0.000499	1985.740	0.0000
Determinante de la covarianza de residuales		2.78E-19		
Ecuación: $R/((\text{SIGMA}(-1)^{(0.5)} * R(-1)^{(0.5)})) = C(1) * \text{THETA}(-1) / ((\text{SIGMA}(-1)^{(0.5)} * R(-1)^{(0.5)})) + C(2) * R(-1) / ((\text{SIGMA}(-1)^{(0.5)} * R(-1)^{(0.5)}))$				
Instrumentos: C R(-1) THETA(-1) SIGMA(-1)				
Observaciones: 285				
R-cuadrado	0.825483	Media var. depend.	0.312213	
R-cuadrado Ajustado	0.824866	Desv. est. var . Dep.	0.005850	
Suma Errores de regresión	0.052398	Suma resid. cuadrados	3.45E-06	
Estadístico Durbin-Watson	2.547560			
Ecuación: $\text{THETA} / (R(-1)^{(0.5)}) = C(3) / (R(-1)^{(0.5)}) + C(4) * \text{THETA}(-1) / (R(-1)^{(0.5)})$				
Instrumentos: C R(-1) THETA(-1) SIGMA(-1)				
Observaciones: 285				
R-cuadrado	0.999645	Media var. depend.	0.312213	
R-cuadrado Ajustado	0.999644	Desv. est. var . Dep.	0.005850	
Suma Errores de regresión	0.000110	Suma resid. cuadrados	3.45E-06	
Estadístico Durbin-Watson	1.210321			
Ecuación: $\text{SIGMA} / (\text{SIGMA}(-1)^{(0.5)}) = C(5) / (\text{SIGMA}(-1)^{(0.5)}) + C(6) * \text{SIGMA}(-1) / (\text{SIGMA}(-1)^{(0.5)})$				
Instrumentos: C R(-1) THETA(-1) SIGMA(-1)				
Observaciones: 285				
R-cuadrado	0.999593	Media var. depend.	0.109184	
R-cuadrado Ajustado	0.999591	Desv. est. var . Dep.	0.011750	
Suma Errores de regresión	0.000238	Suma resid. cuadrados	1.60E-05	
Estadístico Durbin-Watson	1.212196			

**Tabla A.1.2:** Estimación de Parámetros mediante FIML

Método de Estimación: Full Information Maximum Likelihood (Marquardt)

Muestra : 09/11/2005 a 08/11/2006

Observaciones Incluidas: 285

Observaciones en el sistema: 855

Convergencia alcanzada después de 4 iteraciones

	Coficiente	Error Estd.	z-Estadístico	Prob.
C(1) (= $k$ )	0.151299	0.026545	5.699694	0.0000
C(2) (= $1 - k$ )	0.828930	0.030151	27.49289	0.0000
C(3) (= $\nu\bar{\theta}$ )	8.99E-05	3.67E-05	2.448551	0.0143
C(4) (= $1 - \nu$ )	0.998226	0.000409	2438.981	0.0000
C(5) (= $\mu\bar{\sigma}$ )	8.62E-05	1.33E-05	6.504997	0.0000
C(6) (= $1 - \mu$ )	0.990325	0.001046	946.4948	0.0000
Log Likelihood		6864.638		
Determinante de la covarianza de residuales		2.78E-19		
Ecuación: $R/((\text{SIGMA}(-1)^{0.5}) * (R(-1)^{0.5})) = C(1) * \text{THETA}(-1) / ((\text{SIGMA}(-1)^{0.5}) * (R(-1)^{0.5})) + C(2) * R(-1) / ((\text{SIGMA}(-1)^{0.5}) * (R(-1)^{0.5}))$				
Observaciones: 285				
R-cuadrado	0.825550	Media var. depend.	2.575884	
R-cuadrado Ajustado	0.824933	Desv. est. var. Dep.	0.125207	
Suma Errores de regresión	0.052388	Suma resid. cuadrados	0.776694	
Estadístico Durbin-Watson	2.549230			
Ecuación: $\text{THETA} / (R(-1)^{0.5}) = C(3) / (R(-1)^{0.5}) + C(4) * \text{THETA}(-1) / (R(-1)^{0.5})$				
Observaciones: 285				
R-cuadrado	0.999645	Media var. depend.	0.312213	
R-cuadrado Ajustado	0.999644	Desv. est. var. Dep.	0.005850	
Suma Errores de regresión	0.000110	Suma resid. cuadrados	3.45E-06	
Estadístico Durbin-Watson	1.209238			
Ecuación: $\text{SIGMA} / (\text{SIGMA}(-1)^{0.5}) = C(5) / (\text{SIGMA}(-1)^{0.5}) + C(6) * \text{SIGMA}(-1) / (\text{SIGMA}(-1)^{0.5})$				
Observaciones: 299				
R-cuadrado	0.999592	Media var. depend.	0.109184	
R-cuadrado Ajustado	0.999590	Desv. est. var. Dep.	0.011750	
Suma Errores de regresión	0.000238	Suma resid. cuadrados	1.60E-05	
Estadístico Durbin-Watson	1.209236			

## A.2 Estadísticos de Residuales

**Tabla A.2.1 Método 3SLS**

Estadístico	Residuales		
	$\varepsilon_{(t-1)1}$	$\varepsilon_{(t-1)2}$	$\varepsilon_{(t-1)3}$
Media	0.001748	0.000003	0.000005
Mediana	0.004029	0.000001	0.000044
Máximo	0.345434	0.000521	0.001260
Mínimo	-0.323649	-0.000856	-0.001890
Desv. Estd.	0.052276	0.000110	0.000237
Sesgo	-0.263199	-0.533471	-0.155731
Kurtosis	16.200820	18.506610	22.149140

**Tabla A.2.2 Método FIML**

Estadístico	Residuales		
	$\varepsilon_{(t-1)1}$	$\varepsilon_{(t-1)2}$	$\varepsilon_{(t-1)3}$
Media	0.001876	0.000003	0.000004
Mediana	0.004184	0.000001	0.000043
Máximo	0.345676	0.000522	0.001265
Mínimo	-0.323492	-0.000855	-0.001884
Desv. Estd.	0.052262	0.000110	0.000237
Sesgo	-0.262490	-0.514602	-0.103138
Kurtosis	16.225190	18.456850	22.030450

**A.3 Pruebas de Normalidad Q-Q.** Las siguientes pruebas de normalidad corresponden a los residuales de la tasa corta, el short term y la volatilidad para el período comprendido del 11 de agosto de 2005 y el 11 de agosto de 2006.

Grafico A.3.1 Prueba de Normalidad para el residual de la tasa corta,  $\varepsilon_{t1}$ .

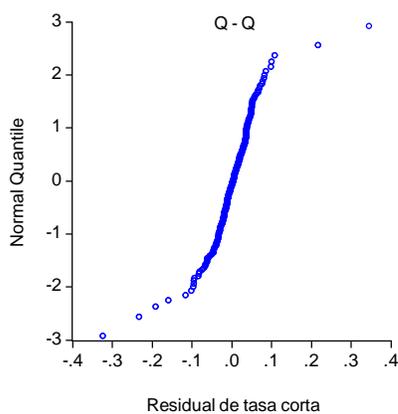


Grafico A.3.2 Prueba de Normalidad para el residual del short term mean,  $\varepsilon_{t2}$ .

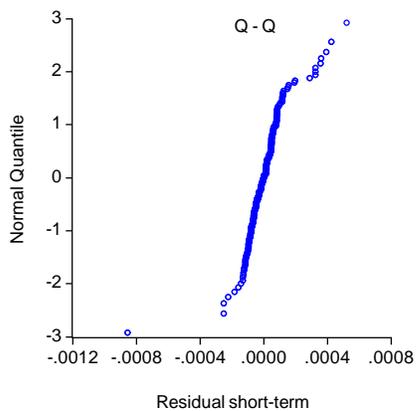
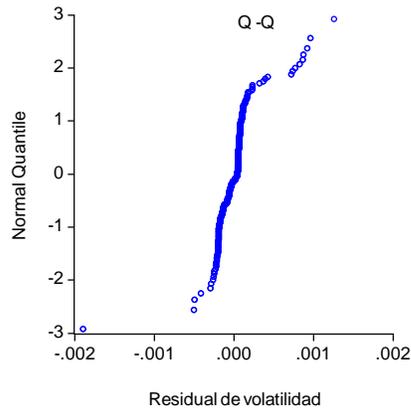


Grafico A.3.3 Prueba de Normalidad para el residual de la volatilidad,  $\varepsilon_{t3}$ .



#### A.4 Código VBA-Excel : Algoritmo de Inversión Moro para generar números aleatorios que se distribuyen como una normal estándar

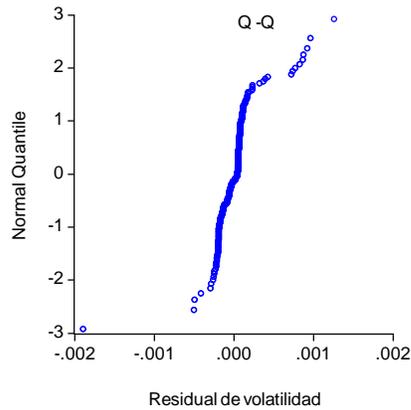
Function MCSigma(x As Double) As Double

```
Dim MUS As Double
Dim MU As Double
Dim n As Double
Dim nsim As Long
Dim i As Long
Dim N01() As Double
Dim SIGMAMC() As Double
Dim SIGMAsum As Double
```

Randomize

```
MUS = Range("MUS")
MU = Range("MU")
n = Range("n")
```

Grafico A.3.3 Prueba de Normalidad para el residual de la volatilidad,  $\varepsilon_{t3}$ .



#### A.4 Código VBA-Excel : Algoritmo de Inversión Moro para generar números aleatorios que se distribuyen como una normal estándar

Function MCSigma(x As Double) As Double

```

Dim MUS As Double
Dim MU As Double
Dim n As Double
Dim nsim As Long
Dim i As Long
Dim N01() As Double
Dim SIGMAMC() As Double
Dim SIGMAsum As Double

```

Randomize

```

MUS = Range("MUS")
MU = Range("MU")
n = Range("n")

```

```

nsim = Range("Nsimu")

SIGMAsum = 0

' Generando el vector Quasi-Random

ReDim Preserve N01(1 To nsim)
ReDim Preserve SIGMAMC(1 To nsim)

For i = 1 To nsim

    N01(i) = Moro_NormSInv(Rnd)
    SIGMAMC(i) = x + (MUS - x) * MU + n * Sqr(x) * N01(i)
    SIGMAsum = SIGMAsum + SIGMAMC(i)

Next i
MCSigma = SIGMAsum / nsim

End Function

```

```

Function MCShort(x As Double) As Double

```

```

    Dim VSM As Double
    Dim V As Double
    Dim VST As Double
    Dim nsim As Long
    Dim i As Long
    Dim N01() As Double
    Dim SHORTMC() As Double
    Dim SHORTsum As Double

```

```

    Randomize

```

```

    VSM = Range("VSM")
    V = Range("V")
    VST = Range("VST")
    nsim = Range("Nsimul")

```

```

    SHORTsum = 0

```

```

' Generando el vector Quasi-Random
ReDim Preserve N01(1 To nsim)
ReDim Preserve SHORTMC(1 To nsim)

```

```

For i = 1 To nsim

    N01(i) = Moro_NormSInv(Rnd)
    SHORTMC(i) = x + V * (VSM - x) + VST * Sqr(x) * N01(i)
    SHORTsum = SHORTsum + SHORTMC(i)

Next i
MCSshort = SHORTsum / nsim

```

End Function

Function MCTasa(x As Double, y As Double, z As Double) As Double

```

Dim K As Double
Dim KMEN As Double
Dim GAMA As Double
Dim nsim As Long
Dim i As Long
Dim N01() As Double
Dim TASAMC() As Double
Dim TASAsum As Double

```

Randomize

```

K = Range("k")
KMEN = Range("kmen")
GAMA = Range("gama")
nsim = Range("Nsim")

```

TASAsum = 0

' Generando el vector Quasi-Random

```

ReDim Preserve N01(1 To nsim)
ReDim Preserve TASAMC(1 To nsim)

```

For i = 1 To nsim

```

    N01(i) = Moro_NormSInv(Rnd)
    TASAMC(i) = y + (x - y) * K + GAMA * Sqr(z) * Sqr(y) * N01(i)

```

TASAsum = TASAsum + TASAMC(i)

Next i

MCTasa = TASAsum / nsim

End Function

Function Moro\_NormSInv(u As Double) As Double

' Calcula los números Normal Standard dado u, el número asociado a la distribución uniforme (0, 1)

' Versión VBA del código de Moro (1995) en C

Dim c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8, c9

Dim x As Double

Dim r As Double

Dim a As Variant

Dim b As Variant

a = Array(2.50662823884, -18.61500062529, 41.39119773534, -25.44106049637)

b = Array(-8.4735109309, 23.08336743743, -21.06224101826, 3.13082909833)

c1 = 0.337475482272615

c2 = 0.976169019091719

c3 = 0.160797971491821

c4 = 2.76438810333863E-02

c5 = 3.8405729373609E-03

c6 = 3.951896511919E-04

c7 = 3.21767881768E-05

c8 = 2.888167364E-07

c9 = 3.960315187E-07

x = u - 0.5

If Abs(x) < 0.42 Then

    r = x ^ 2

    r = x \* (((a(4) \* r + a(3)) \* r + a(2)) \* r + a(1)) / (((b(4) \* r + b(3)) \* r + b(2)) \* r + b(1)) \* r + 1)

Else

    If x > 0 Then r = Log(-Log(1 - u))

    If x <= 0 Then r = Log(-Log(u))

    r = c1 + r \* (c2 + r \* (c3 + r \* (c4 + r \* (c5 + r \* (c6 + r \* (c7 + r \* (c8 + r \* c9))))))

    If x <= 0 Then r = -r

End If

Moro\_NormSInv = r

End Function

## **Bibliografía.**

1. Enders, Walter. "Applied Econometric Time Series". 2<sup>da</sup> Edition. Ed. Wiley. 2004.
2. Fuente de Datos: Banco de México.
3. Frances, Philip Hans. "Time Series for Business and Economics Forecasting". Ed. Cambridge University Press. 1998.
4. Greene, William H. "Análisis Económico". 3<sup>ra</sup> Edición. Ed. Prentice Hall Inc. 1998.
5. Hull, John C. "Options Futures and Other Derivatives". 5<sup>ta</sup> Edición. Ed. Prentice Hall. 2003.
6. Manual de *e-views*, versión 4.1.
7. Mary Jackson and Mike Staunton. "Advanced Modelling in Finance using Excel and VBA". John Wiley & Sons, LTD. 2001
8. Niederreiter, Harald, "Construction of Low-Discrepancy Sequences", et. al., Institute of Discrete Mathematics, Viena, Austria, 1999.
9. Sobolev, Sergei L'vovich, en "The Production of Points Uniformly Distributed in a Multidimensional Cube" (en ruso), Preprint Ipm Akad. Nauk Ssr, No. 40, Moscow 1976.