INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY

CAMPUS CIUDAD DE MÉXICO

"MODELO DE AJUSTE DE TASAS DE INTERÉS *FORWARD INSTANTÁNEAS* CON TENDENCIA VARIABLE Y QUE SIGUE UNA RELACIÓN DE SUSTITUCIÓN ENTRE MERCADOS ADYACENTES"

DOCTORADO EN CIENCIAS FINANCIERAS

TESIS PRESENTADA POR

JESÚS BRAVO PLIEGO

ASESOR

DR. JOSÉ ANTONIO NÚÑEZ MORA

ENERO DE 2008

TECNOLÓGICO
DE MONTERREY

Hacemos constar que en la Ciudad de México, el día 11 de enero de 2008, el alumno:

JESÚS BRAVO PLIEGO

sustentó el Examen de Grado en defensa de la Tesis titulada:

Modelo de ajuste de tasas de interés forward instantáneas con tendencia variable y que sigue una relación de sustitución entre mercados adyacentes.

Presentada como requisito final para la obtención del Grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS FINANCIERAS

Ante la evidencia presentada en el trabajo de tesis y en este examen, el *Comité Examinador*, presidido por la **Dra. Bárbara Ruth Trejo Becerril,** ha tomado la siguiente resolución:

—APROBADO CON MENCIÓN HONORÍFICA—

Dr. José Antonio Núñez Mora
Director de Tesis

Dra. Bárbara Ruth Trejo Becerril
Lectora

Dr. José Carlos Ramírez Sánchez
Lector

Dr. José Antonio Núñez Mora
Director del Programa Doctoral

Campus Ciudad de México
Calle del Puente 222, Col. Ejidos de Huipulco
14380 Tlalpan, México D.F. México
Tel: (52/55) 5483 2020 Fax: (52/55) 5673 2500

Dedicada para mi querida esposa **Erika** *y mis hijos:* **Erika**, **Jesús** *y* **Emanuel**. *Porque ellos son sin duda lo mejor que me ha pasado en esta vida y quienes me han inspirado para seguir siendo mejor cada día*

AGRADECIMIENTOS

Definitivamente es un orgullo ser parte de la comunidad del Tec de Monterrey y no puedo dejar de agradecer la oportunidad que me brindo al cobijarme en el Campus Ciudad de México. Mis más sinceras gracias al cuerpo de profesores de la División de Negocios y a mis compañeros de generación. Todos ellos merecen un lugar especial.

Tesis

"MODELO DE AJUSTE DE TASAS DE INTERÉS *FORWARD INSTANTÁNEAS* CON TENDENCIA VARIABLE Y QUE SIGUE UNA RELACIÓN DE SUSTITUCIÓN ENTRE MERCADOS ADYACENTES"

Jesús Bravo Pliego

Resumen

En este trabajo de tesis se desarrolla un modelo nuevo de ajuste de las tasas de interés forward instantáneas que incorpora la idea de sustitución de mercados adyacentes de cotización a plazo de Modigliani y Sutch (1966). El modelo es construido suponiendo una relación de sustitución en la tendencia de las tasas de interés forward entre mercados de cotización a plazos adyacentes y condiciones de equilibrio de mercado. Se analiza y concluye que este modelo tiene mejores propiedades que un modelo de ajuste de tasas de interés forward instantáneas de tendencia fija (derivado también en esta tesis) y el modelo de ajuste de tasas de interés forward constantes (de uso común), pues se muestra que éstos dos últimos son casos particulares de él.

La aplicación del modelo, realizada sobre los *swaps* de TIIE-28 días, permite observar empíricamente que la curva de tasas de interés forward derivada es relativamente más "suave" que la de otros modelos de ajuste puntual. Además, a diferencia de los modelos comunes de bootstrapping donde la derivación de la estructura de plazos de las tasas de interés se hace de manera "telescópica" desde el plazo más corto al plazo más largo, en el modelo desarrollado en este tesis, las tasas de interés se interrelacionan entre sí a través de sus razones de cambio (pendientes), resolviéndose el equilibrio de mercado de manera conjunta en todos los plazos.

Thesis

"FITTING MODEL OF INSTANTANEOUS FORWARD INTEREST RATES THAT ASSUMES THEY HAVE A VARIABLE DRIFT FOLLOWING A SUBSTITUTION RELATIONSHIP BETWEEN ADJACENT MARKETS"

Jesús Bravo Pliego

Summary

In this thesis work, a new fitting model of the instantaneous forward interest rate structure which is based on the idea of substitution between adjacent markets (Modigliani and Sutch, 1966) is developed. The model is built assuming that there is a substitution relationship in the drift of the forward interest rates and considering market equilibrium conditions. After analyzing the model, it is concluded that it has better features than those of a model where the forward interest rates have a linear drift (model also developed in this thesis) or than those of a model where the forward interest rates are constant (model of widen use) as it is showed that these last two models may be seen as particular cases of the proposed model.

An application of the model to the 28-day TIIE swaps allows to see that the underlying forward interest rate curve is smoother than that derived using other models of calibration. Furthermore, compared to the common bootstrapping models which telescopically derivate the term structure of interest rates performing the calibration from the shortest term to the longest term, the model developed in this thesis consider that the interest rates are interrelated each other through their slopes so that the market equilibrium of the model is obtained jointly for all the term structure.

CONTENIDO

ÍNDICE DE CUADROS

Página

ÍNDICE DE FIGURAS

Página

MOTIVACIÓN

La pregunta fundamental que inspira el presente trabajo es:

Es posible encontrar un buen modelo empírico de ajuste de tasas de interés (modelo de bootstrapping) fundamentado sólidamente en la teoría que tenga mejores propiedades que los comúnmente usados en la práctica?

Al tratar de responder esta pregunta inevitablemente se tiene que revisar el fundamento de los modelos empíricos utilizados en la industria, pero contrario a lo que se pensaría, no existe mucho material escrito que describa el marco conceptual de dichos modelos, y si se encuentra alguna documentación, en ella se describen tales métodos como simples resultados de ingeniería financiera. Por otro lado, los modelos teóricos se encuentran en vasta literatura y principalmente en una serie de libros que los abordan en planos incluso extremadamente matemáticos donde ya no se puede distinguir su verdadera aplicación práctica.

Lo anterior, me llevó a revisar los preceptos fundamentales de la Economía (Economía Financiera) para encontrar las ideas base sobre las que descansa la teoría de tasas de interés y las derivaciones de los diferentes modelos. Asombrosamente, el marco conceptual teórico para el análisis de la estructura intertemporal de las tasas de interés es tan viejo como los escritos de Fisher (1896) acerca de las expectativas puras y prácticamente tiene su último desarrollo con el trabajo de Modigliani (1966) donde se pule la teoría de mercados segmentados sustitutos que engloba ya la idea de oferta y demanda.

El presente trabajo de tesis pretende ser un "pequeño" ladrillo en la construcción del puente para moverse entre el Mundo Teórico donde toma lugar el desarrollo de modelos matemáticos y solución de problemas fundamentales abstractos y el Mundo Práctico donde inevitablemente hay que resolver los problemas reales de valuación de instrumentos financieros y desarrollar herramientas cuantitativas con base en la información de los mercados financieros. La redacción de los capítulos está diseñada tanto para gente académica (capítulos de desarrollo del modelo), como para practicantes (capítulos que abordan los swaps de TIIE-28 días y la aplicación del modelo) e incluso para programadores (quienes pueden estar interesados en el código presentado en los anexos).

El desarrollo de esta tesis inicia revisando los modelos de la estructura intertemporal de las tasas de interés basados en la "tasa corta" y posteriormente los de calibración, enfatizando que la estructura de plazos de las tasas de interés para un momento dado (independientemente de qué modelo la determine) es finalmente el punto de partida para calibrar cualquier modelo, reflejando los niveles de cotización del mercado. No obstante, la derivación de tal estructura de plazos de las tasas de interés a partir de los niveles de cotización de mercado, tiene por fuerza que obtenerse a través de modelos empíricos conocidos como bootstrapping.

Como el "efecto mariposa" que determina cualquier resultado final, la estructura de plazos de las tasas de interés es el estado inicial para cualquier modelo de calibración y valuación de instrumentos financieros, y esto tal vez explica el porqué el enfoque de la industria, para el ajuste de tasas de interés, contempla más a los modelos de ajuste de tasas de interés empíricos que a los teóricos. Sin embargo, dejar a cualquier modelo sin fundamentos teóricos sólidos es como condenarlo a ser un simple conjunto de fórmulas técnicas que no tienen más valor que la practicidad de su uso particular; por ello es que se plantea y desarrolla un modelo de ajuste de la curva de rendimientos bajo fundamentos de la teoría de sustitución de mercados adyacentes (Modigliani y Sutch (1966)) y conceptos de equilibrio.

De acuerdo a lo anterior, esta tesis se escribe con la convicción de que es posible encontrar un mejor modelo empírico o de bootstrapping si se sustenta en los preceptos base contenidos en el marco conceptual desarrollado dentro de la Economía Financiera, tales como la incorporación de las expectativas de los formadores de mercado -conocidos como traders-, sus preferencias o la consideración de que las "inversiones" a distintos horizontes de tiempo están interrelacionadas.

El reto del presente trabajo de tesis es aportar un nuevo modelo, construyéndolo desde "cero", en lugar de utilizar alguno existente y plantearle variantes.

Obviamente, el lector de este trabajo de tesis juzgará la utilidad el modelo desarrollado para poder derivar la estructura de plazos de las tasas de interés contenida en cualquier familia de instrumentos financieros afines (bonos, futuros de tasa de interés, swaps de tasa de interés, etc.).

A los practicantes, administradores de riesgos, "quants" y "traders":

Con la finalidad de que el presente trabajo sea útil en la práctica, el autor se ha esforzado por presentar paso a paso (Capítulo VI) la obtención de la estructura de plazos de las tasas de interés a través del modelo (y sus variantes) desarrollado en esta tesis (Capítulo IV), incluyendo el código fuente de una librería de funciones (Anexo VI.1) que permitirán obtener la curva de tasas de interés de los Swaps de TIIE-28 días[1].

[1] El análisis y aplicación del modelo aquí presentado puede extenderse a cualquier mercado financiero donde tenga que derivarse una curva de tasas de interés.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN, HIPÓTESIS Y OBJETIVOS

1.1 Introducción

Mantener un equilibrio entre la teoría formal y la práctica es fundamental para cualquier análisis serio de los mercados financieros, pues de no ser así se caerá en un marco teórico lleno de modelos que se alejarán de la realidad o que serán demasiado complejos para ser prácticos.

Este trabajo de tesis presenta un esfuerzo para combinar la teoría y la práctica en cuanto a la determinación de los niveles de tasas de interés a partir de la información de los mercados financieros. La idea central utilizada es entrelazar los mercados específicos a través de la teoría de sustitución de mercados adyacentes (Modigliani (1966)) para encontrar una expresión, derivada de forma natural, que permita determinar las tasas de interés *forward* instantáneas en todos los plazos (todo el continuo de plazos) de la curva de tasas de interés. Para mostrar la idea de sustitución de mercados en el contexto de las teorías económicas de la estructura de plazos de las tasas de interés, en el Capítulo II se revisan dichas teorías. En el Capítulo II también se presenta el avance de las finanzas matemáticas en cuanto a los modelos teóricos o modelos estocásticos dinámicos y modelos de calibración o empíricos o de bootstrapping, enfatizándose su uso práctico.

El presente trabajo de tesis plantea un modelo bajo la idea de que la sustitución de mercados adyacentes de cotización a plazo que mejora la obtención de la estructura de plazos de las tasas de interés. El modelo desarrollado tiene mejores propiedades cuando se compara con los de las técnicas usuales donde se utiliza interpolación lineal sin argumentar su racionalidad o se supone que las tasas de interés *forward* subyacentes en ciertos tramos de la curva de tasas de interés spot son constantes. Todo este trabajo se presenta del Capítulo III y Capítulo IV donde paso a paso se deriva tal modelo asumiendo tasas de interés *forward instantáneas* con tendencia variable y que sigue una relación de sustitución entre mercados adyacentes.

En los capítulos III y IV también se desarrollan modelos alternativos más simples (casos particulares al anteriormente descrito). Se obtiene un modelo más simple de ajuste de tasas de interés forward instantáneas de tendencia constante o fija, y también se deriva como caso particular el modelo de tasas de interés forward instantáneas constantes (de amplio uso en la práctica).

En el Capítulo V, se presentan en detalle los *swaps* de TIIE-28 días[2] , pues sobre ellos es que se aplican, en el Capítulo VI, lo modelos desarrollado en los capítulos III y IV. La aplicación se

[2] El Capitulo V se destina a presentar las características, convenciones y detalles de operación del mercado mexicano de *swaps* de TIIE-28 días. Dicho capítulo puede ser utilizado como una guía de referencia para conocer los detalles del mercado de los *swaps* de TIIE-28 días.

hace sobre los *swaps* de TIIE-28 días por ser éste el instrumento financiero derivado (no listado) de mayor importancia y liquidez en los mercados financieros en México. Sin embargo, el enfoque presentado puede extenderse a prácticamente cualquier mercado de renta fija donde haya necesidad de determinar una curva de tasas de interés por medio de *Bootstrapping*[3].

Es importante mencionar que el Capítulo VI contiene todos los detalles de la determinación de la estructura de plazos de las tasas de interés por medio de todos y cada uno de los modelos planteados en el Capítulo IV, incluyendo su solución numérica (código de programación para resolver el modelo), incorporación de las convenciones de mercado (ajuste de fechas de pago por días inhábiles, determinación de flujos, etc.) y comparación de resultados. Por lo tanto dicho capítulo se convierte en un verdadero marco de referencia práctica para la derivación de la estructura de plazos de las tasas de interés.

Un resultado importante del modelo de ajuste de tasas de interés *forward instantáneas* con tendencia variable y que sigue una relación de sustitución entre mercados adyacentes es que sus tasas de interés *forward* derivadas se pueden utilizar para fijación de precios y cotizaciones incorporando "información" de mercados adyacentes, lo cual no se tiene con las convenciones usuales (*street conventions*).

Finalmente, el Capítulo VII está dedicado a las conclusiones del trabajo y a describir las ventajas y desventajas del modelo de ajuste de tasas de interés forward instantáneas con tendencia variable y que sigue una relación de sustitución entre mercados adyacentes. En este último capítulo también se revisan las posibles líneas de investigación que pueden seguirse y que el alcance del presente trabajo no cubrió.

1.2 Hipótesis

Es posible derivar la estructura de plazos de las tasas de interés de los swaps de TIIE-28 días a través de un modelo de ajuste de la curva de rendimientos (modelo de bootstrapping) que recupere, además del concepto de equilibrio de mercado, la idea de sustitución de mercados a diferentes plazos de cotización.

1.3 Objetivos

De acuerdo a la hipótesis planteada, se desprenden los siguientes objetivos a alcanzar para probar dicha hipótesis.

1.3.1 Objetivo General

Derivar la estructura de plazos de las tasas de interés de los swaps de TIIE-28 días entrelazando los mercados específicos a plazo a través de la idea de sustitución de mercados adyacentes.

De manera específica se tienen los siguientes objetivos:

[3] Es importante mencionar que contrario a lo que se pensaría prácticamente no existen "guías" escritas publicadas acerca de cómo puede tratarse los *swaps* de TIIE-28 días y que muestren la forma de obtener la curva de tasas de interés que le subyace a partir de sus cotizaciones de mercado.

1.3.2 Objetivos Particulares

- Obtener un modelo de ajuste de las tasas de interés *forward instantáneas* a través de condiciones de equilibrio de mercado y la idea de sustitución de mercados adyacentes.
- Determinar la curva de tasas de interés *forward* subyacentes al mercado mexicano de *Swaps* de TIIE.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO Y CONCEPTUAL SOBRE LA ESTRUCTURA DE PLAZOS DE LAS TASAS DE INTERÉS

En este capítulo se presentan las teorías económicas de la estructura intertemporal de las tasas de interés, las cuales son base conceptual para la derivación del modelo de ajuste de la estructura de plazos que se desarrollará en el siguiente capítulo (Capítulo III). Aquí también se presenta una visión general del avance de las finanzas matemáticas en cuanto a los modelos teóricos o modelos estocásticos dinámicos y modelos de calibración o empíricos o de bootstrapping. Por tanto, este capítulo tiene el objetivo de ser el contexto sobre el que se desarrolla el presente trabajo de tesis. Se discute acerca de los modelos teóricos (de ajuste intertemporal)[4] y modelos empíricos (de ajuste puntual en un momento específico del tiempo)[5], su relación y su utilización.

Se verá que contar con un buen modelo de ajuste de la curva de rendimientos es muy importante ya que para poder utilizar modelos tan avanzados como el de BGM o *Libor Market Model* (Brace, et al (1997)) se requiere primeramente derivar la estructura de plazos de las tasas de interés a través de un modelo empírico, siendo ésta es la base para su calibración. Por tanto, es innegable que el modelo empírico utilizado para derivar la estructura de plazos de las tasas de interés influirá en cualquier resultado de valuación que la utilice.

2.1 Teorías sobre la Estructura de Plazos de las Tasas de Interés

Cualquier incursión en la teoría de modelos de tasas de interés, sin duda debe tener como etapa inicial una mirada al desarrollo teórico-filosófico que existe sobre la estructura de plazos de las tasas de interés, donde las ideas base son las importantes; pues si esto no es claro, cualquier herramental matemático aplicado para modelar las tasas de interés carecerá de sentido.

Por lo tanto, en esta sección se revisarán en su marco general las principales teorías sobre la estructura de plazos de las tasas de interés (de las que emanan prácticamente todos los modelos matemáticos aplicados a las tasas de interés).

Para un análisis conceptual de mayor profundidad a lo discutido en esta sección, existen diversos textos al respecto que el lector puede consultar (ver por ejemplo Santomero y Babbel (2001), Capítulo 5; Fabozzi, et al (1998), Capítulo 12 ó Mishkin (2006), Capítulo 6) además de las fuentes

[4] Modelos utilizados para la valuación de opciones donde el pronóstico de sendas estocásticas de las tasas de interés se utiliza para derivar el valor justo de la prima.

[5] Modelos indispensables para expresar cualquier curva de rendimientos o cotizaciones de mercado en términos de una estructura de plazos de tasas de interés cupón cero, la cual es necesaria para la valuación a mercado de instrumentos financieros que la requieren y para el análisis de riesgos de mercado (e incluso riesgos de crédito).

originales que se irán citando a lo largo de esta sección; sin embargo, se ha tratado de presentar de manera comprensiva y simple el marco conceptual y teórico de las mencionadas teorías, cuidando no ensombrecer el esplendor de las ideas que las circundan.

Las teorías sobre la estructura de plazos de las tasas de interés que se han tomado como estándares en la Economía Financiera y que han dado lugar a los modelos de las Finanzas Matemáticas se pueden clasificar como:

- La teoría de expectativas puras,
- La teoría de preferencias de liquidez, y
- La teoría de mercados segmentados y del nicho preferido.

Estas teorías toman en cuenta: la eficiencia de mercados o que tan rápido los mercados reaccionan a la nueva información; los objetivos de los inversionistas y actitudes hacia el riesgo; y las preferencias de las empresas e inversionistas por los títulos de diferentes vencimientos. A continuación se presentan las características de cada una de ellas.

2.1.1 La Teoría de Expectativas Puras

La teoría de expectativas puras data de los primeros trabajos de Irving Fisher (1896) en su obra *"Apreciation and Interest"* y consecuentemente se han desarrollado varios enfoques sobre ella (ver Cox, et al (1981)). Esta teoría plantea que los niveles de tasa de interés del futuro dependen en general de la tasa de interés de corto plazo. Todas las variantes de la Teoría de Expectativas Puras aseguran que la curva de rendimientos se deriva directamente de las estimaciones del mercado de tasas de interés de corto plazo futuras. Es más, la curva de rendimientos está completamente determinada por estas tasas de interés de corto plazo esperadas.

Una de las implicaciones de amplio uso, bajo la teoría de expectativas puras de tasas de interés, es que si las tasas spot de una curva de rendimientos están dadas, las tasas de interés forward implícitas serán los estimadores insesgados del mercado de tasas de interés spot futuras. La forma como se calcularían estas tasas spot futuras que a la vez son iguales a las tasas de interés forward, es la siguiente:

$$F^{ef}(t,T_1,T_2) = \frac{1+L^{ef}(t,T_2)}{1+L^{ef}(t,T_1)} - 1 \tag{2.1}$$

Donde:

$F^{ef}(t,T_1,T_2) =$ Tasa de interés forward efectiva al tiempo $T_1 - t$ de plazo $T_2 - T_1$.

$L^{ef}(t,T_1) =$ Tasa de interés spot efectiva de plazo $T_1 - t$.

$L^{ef}(t,T_2) =$ Tasa de interés spot efectiva de plazo $T_2 - t$.

$T_1 - t, T_2 - t =$ Plazos en años.

Si $L(t,T_i)(i = 1,\ldots 2)$ es la tasa de interés spot anualizada (a un año financiero base de días), entonces:

$$L^{ef}(t,T_i) = L(t,T_i)\frac{(T_i - t)}{B} \tag{2.2}$$

Nota: Las tasas de interés efectivas representan el costo del dinero de un tiempo a otro, sin expresarse en términos anuales. Así, \$1 invertido hoy ($t = 0$) al plazo ($t = 1$), tendrá de valor al final $\$1(1 + L^{ef}(t, T_i))$.

La ecuación 2.1 es una ecuación muy conocida en la práctica y es utilizada para obtener las tasas de interés forward entre dos tasas de interés spot o tipo cupón cero.[6]

2.1.1.1 Supuestos de la Teoría de Expectativas Puras

El enfoque de esta teoría es para la curva de tasas de interés libre de riesgo (aunque esto no es limitativo para aplicarla a alguna otra curva de tasas) y tiene las siguientes bases o supuestos:

- Mercados eficientes (información incorporada en el precio de los instrumentos financieros).
- Instrumentos libres de riesgo de incumplimiento (Instrumentos gubernamentales).
- Agentes Neutrales al riego.
- Se prefieren los títulos con los más altos rendimientos.
- Los agentes no prefieren algún vencimiento sobre otro.
- Mediante el proceso de arbitraje las tasas de interés en los diferentes vencimientos de los títulos convergen a las expectativas de las tasas de interés de corto plazo futuras.

De acuerdo a lo anteriormente descrito, esta teoría no permite considerar que es importante diferenciar mercados por plazo. Además, se tiene la suposición de que toda la información disponible implicada en la valuación de cualquier bono esta ya incorporada en su precio con lo cual no se da pie a considerar que pueda existir una relación de sustitución de preferencias entre mercados diferenciados por plazo, puesto que no se preferirá alguno en particular al suponerse que todos tienen incorporadas las mismas expectativas.

Finalmente, es importante considerar el proceso de arbitraje en esta teoría, el cual se puede enunciar de acuerdo a lo planteado por Santomero (2001) [página 80]:

> "Conforme se va revelando más información, los precios se ajustan rápidamente para incorporarla. De otra forma, serían posibles ganancias extras, y los participantes las explotarían. Estas acciones, por sí mismas, alterarán los precios de mercado y restaurarán el equilibrio. Por ejemplo, si el precio de un título en particular fuera juzgado por los participantes del mercado muy bajo, comprarán el título en grandes cantidades, y su precio entonces subirá hasta que alcance un nivel admisible. Por otra parte, si los participantes del mercado juzgan un título como sobre preciado, lo venderán (en un intento por evitar la esperada baja del precio), cuya acción en sí tenderá a deprimir el precio. Esta actividad por los participantes en el mercado, conocida como arbitraje a través de vencimientos, fuerza a las tasas de interés sobre diferentes activos a ser las determinantes de las expectativas del mercado de la tasa apropiada para cada instrumento. De hecho al final de este proceso de arbitraje las tasas de interés en los diferentes vencimientos de los títulos convergen a las expectativas de las tasas de interés de corto plazo futuras".

[6] El problema con la ecuación 2.1 es que sólo se puede obtener la tasa de interés forward entre dos tasas spot o tipo cupón cero conocidas previamente y si estas tasas son a los plazos T_1 y T_2 ($T_2 > T_1$). No es posible encontrar la tasa de interés forward entre los plazos T_1 y T con $T \in [T_1, T_2]$ sin suponer consideraciones adicionales sobre el comportamiento de las tasas de interés forward.

Es por este proceso de ajuste al equilibrio (con el proceso de arbitraje) que esta teoría ha ganado mucho terreno en las Finanzas Matemáticas y hoy en día es muy utilizada para la obtención de tasas de interés forward que se asumen de no arbitraje[7].

2.1.1.2 Implicaciones de la Teoría de Expectativas Puras

Esta teoría conlleva a diversas implicaciones; algunas de las más importantes son:

- En el corto plazo, todos los títulos gubernamentales ("libres de riesgo") producen la misma tasa esperada de rendimiento sin importar su vencimiento.
- No existe sucesión alguna de inversiones que produzca mayores rendimientos esperados que otra.
- Las tasas de interés forward implícitas de la estructura de tasas spot o tipo cupón cero de hoy son las mejores estimaciones insesgadas del mercado de las tasas de interés que son esperadas en el futuro.
- Las tasas de interés de largo plazo están determinadas por las expectativas de tasas futuras de corto plazo (tasas forward).
- Las tasas de interés spot para títulos de diferentes vencimientos tienden a moverse juntas.

Al fijarse en la tasa de corto plazo actual y su expectativa futura, como determinante de la curva completa de tasas de interés, esta teoría es la madre de los modelos de tasas de interés de corto plazo que se presentan en el anexo II.1. Su derivación matemática puede consultarse en las referencias presentadas.

La Teoría de Expectativas Puras se ha hecho famosa debido a la facilidad de interpretar la forma de la curva de tasa de interés sea está de cotizaciones (YTMs, Tasas Swaps, etc.) o de tasas tipo cupón cero (con cierta composición).

En general, bajo sus supuestos se puede considerar que los cambios en la forma de la estructura de plazos reflejan cambios en las expectativas del mercado de las tasas futuras de corto plazo. Así, si la estructura de plazos tiene pendiente positiva, el mercado espera que las tasas de corto plazo sean mayores en el futuro de lo que son ahora. Si la estructura de plazos tiene pendiente negativa, el mercado espera que tasas de interés bajas prevalezcan en el futuro. Si la estructura de plazos es constante, indica que el mercado espera más o menos lo mismo para el futuro.

No obstante, esta teoría no explicará movimientos en diferentes direcciones en las cotizaciones o tasas de interés tipo cupón cero, ya que si una tasa de interés para un cierto plazo se espera que suba como resultado de grandes expectativas de inflación o restricciones de dinero para ese periodo, la teoría asume que tales expectativas permanecerán durante periodos posteriores, por ende es difícil explicar que tasas de interés a distintos plazos se muevan en diferentes direcciones.

2.1.2 Teoría de Preferencias por Liquidez

La teoría de preferencias por Liquidez tiene sus orígenes en el trabajo de Keynes (1936) donde presenta la idea de un "premio por liquidez", y en el trabajo de Hicks (1946) relativo al valor del

[7] Obviamente, la existencia de no arbitraje será válida bajo los supuestos de la Teoría de Expectativas Puras.

capital. Esta teoría platea que además de las expectativas, las tasas de interés forward contienen una sobretasa por liquidez. En otras palabras, esta teoría argumenta que los participantes del mercado prefieren liquidez y demandan compensación en términos de un mayor rendimiento para inversiones a vencimientos mayores. Esta teoría contiene como caso particular a la Teoría de Expectativas Puras en el caso en el que se supone que los premios por liquidez son nulos.

Una de las aplicaciones de la Teoría de Preferencias por Liquidez es la explicación de la forma persistente de la curva de tasas de interés con pendiente positiva[8]. La explicación es simple bajo los preceptos de esta teoría: activos con vencimientos largos tienden a contener rendimientos mayores que los de vencimientos cortos.

2.1.2.1 Supuestos de la Teoría de Preferencias por Liquidez

El enfoque Teoría de Preferencias por Liquidez es general y conlleva la impaciencia al consumo de los individuos quienes prefieren el corto plazo al largo plazo, por lo que demandan mayores premios en el rendimiento para mayores horizontes de inversión.

Esta teoría tiene las siguientes bases o supuestos:

- Mercados eficientes (información e impaciencia al consumo incorporada en los precios de los instrumentos financieros).
- Instrumentos libres de riesgo de incumplimiento (no se considera un premio por calidad crediticia o probabilidad de incumplimiento variable en el plazo del instrumento financiero).
- Los agentes tienen aversión al riego, prefieren un horizonte de inversión corto (son impacientes al consumo).
- Se prefieren inversiones de alta liquidez sobre las de menor liquidez.
- La volatilidad y "bid-ask spread" del precio de bonos de largo plazo es considerablemente mayor que la de bonos de corto plazo.

De acuerdo a los supuestos de la Teoría de Preferencias por Liquidez, da un tratamiento diferente a los instrumentos que son libres de riesgo, estableciendo que los títulos de largo plazo deben ofrecer un rendimiento mayor que el que habría sin la sobretasa o premio por la volatilidad, para atraer inversionistas y compensarlos por absorber este riesgo de mercado (la teoría no asume riesgo crédito en absoluto).

En esta teoría los participantes del mercado son aversos al riesgo y prefieren instrumentos financieros que rápidamente puedan ser convertidos en efectivo (o liquidados) con poco o ningún efecto en su precio. Esto sólo se logra con instrumentos de corto plazo. Los instrumentos de largo plazo perderán valor si se quieren liquidar (pues tiene menor liquidez), es decir, si se compra un bono de largo plazo e inmediatamente se vende, se perderá más dinero que si se intenta lo mismo con un bono de corto plazo[9]. Indudablemente entonces, la aversión al riesgo y preferencia por

---

[8] Históricamente, la estructura de plazos de tasas de interés (curva de tasas) ha tenido pendiente positiva más a menudo que una pendiente constante o negativa.

[9] Esto implica que el "bid-ask spread" aumente con el plazo de los instrumentos financieros.

liquidez de los agentes hará que la única forma de que adquieran instrumentos financieros de largo plazo sea que éstos ofrezcan premios mucho mayores que los de corto plazo.

2.1.2.2 Implicaciones de la Teoría de Preferencias por Liquidez

Esta teoría conlleva a diversas implicaciones; algunas de las más importantes son:

- Los instrumentos gubernamentales se espera produzcan diferentes tasas de rendimientos en periodos subsiguientes, dependiendo esto en total medida de la liquidez de los títulos.
- Algunas sucesiones de inversiones en instrumentos gubernamentales se espera produzcan mayores tasas de rendimiento que otras.
- Las tasas de interés forward implícitas de la estructura de plazos de tasas de hoy son las estimaciones del mercado sesgadas a la alza de las tasas de interés que realmente se esperan en el futuro.
- Las tasas de interés de largo plazo están determinadas por las expectativas del mercado de las tasas de corto plazo futuras, más el premio a la liquidez aplicable al vencimiento y liquidez de la inversión.
- Las tasas de interés futuras esperadas no observadas sólo pueden ser estimadas de las tasas spot reales observadas y de las tasas de interés forward implícitas si los premios de liquidez involucrados en estas tasas son conocidos.

Bajo la Teoría de Preferencias por Liquidez, las expectativas determinan solo parte de la forma de la estructura de plazos de interés, el premio de liquidez determina el resto. Como consecuencia de esto, cambios en la forma de la estructura de plazos puede reflejar cambios tanto en las expectativas del mercado de las tasas de corto plazo futuras o en el premio de liquidez. En el caso particular de que la curva de tasas de interés spot (curva de rendimientos; YTMs o tasas swaps, o bien curva de tasas tipo cupón cero con cierta composición) tenga pendiente positiva, el mercado puede o no esperar tasas de corto plazo más grandes en el futuro de lo que son ahora; lo que ocurra dependerá del tamaño del premio de liquidez involucrado en las tasas de interés spot.

Como las tasas de interés forward implícitas bajo esta teoría serán estimadores sesgados a la alza del mercado de tasas de interés spot futuras, la ecuación 2.1 de amplio uso ya no puede ser utilizada para la determinación de las tasas spot futuras a través de las tasas forward. La forma como se calcularían estas tasas spot es la siguiente:

Paso 1: Cálculo de las tasas de interés spot ajustadas por su premio de liquidez:

$$\widehat{L}(t,T_i) = L(t,T_i) - S^{liq}(t,T_i) \tag{2.3}$$

Donde:

$\widehat{L}(t,T_i)$ = Tasa de interés spot anualizada de plazo $T_i - t$ insesgada (ajustada por su premio de liquidez).

$L(t,T_i)$ = Tasa de interés spot anualizada de plazo $T_i - t$ sesgada a la alza.

$S^{liq}(t,T_i)$ = Premio, "spread" o sobretasa por liquidez aplicable a la tasa spot anualizada de plazo $T_i - t$.

Paso 2: Cálculo de la tasa de interés forward insesgadas y sesgadas a la alza utilizando $\widehat{L}(t,T_i)$ y $L(t,T_i)$ respectivamente. A través de la ecuación 2.1 (y 2.2).

$$\widehat{F}(t,T_{i-1},T_i) = \left[\frac{1+\widehat{L}(t,T_i)\cdot(T_i-t)/B}{1+\hat{L}(t,T_{i-1})\cdot(T_{i-1}-t)/B} - 1\right]\frac{B}{T_i-T_{i-1}} \tag{2.4}$$

$$F(t,T_{i-1},T_i) = \left[\frac{1+L(t,T_i)\cdot(T_i-t)/B}{1+L(t,T_{i-1})\cdot(T_{i-1}-t)/B} - 1\right]\frac{B}{T_i-T_{i-1}} \tag{2.5}$$

Paso 3: Cálculo del sesgo de las tasas forward:

$$s^{liq}(t,T_{i-1},T_i) = F(t,T_{i-1},T_i) - \widehat{F}(t,T_{i-1},T_i) \tag{2.6}$$

Donde:

$\widehat{F}(t,T_{i-1},T_i)$ = Tasa de interés spot futura (tasa forward) insesgada, al tiempo $T_{i-1}-t$ de plazo T_i-T_{i-1}.

$F(t,T_{i-1},T_i)$ = Tasa de interés spot futura (tasa forward) sesgada a la alza, al tiempo $T_{i-1}-t$ de plazo T_i-T_{i-1}.

$s^{liq}(t,T_{i-1},T_i)$ = Premio, "spread" o sobretasa por liquidez aplicable a la tasa forward en el tiempo $T_{i-1}-t$ de plazo T_i-T_{i-1}.

Para aplicar la ecuación 2.3 se debe conocer el premio por liquidez $S^{liq}(t,T_i)$ a cada plazo T_i-t , lo cual puede ser un problema que no puede ser resuelto de manera sencilla ni precisa (se deberán hacer supuestos adicionales sobre la información de mercado).

No obstante, para poder ejemplificar gráficamente la Teoría de Preferencias por Liquidez, a continuación se presenta, en el Cuadro 2.1, una serie de tasas spot de la curva de tasas de rendimiento tipo cupón cero y premios a la liquidez (supuestos) para periodos de 0 a 10 años.

Cuadro 2.1 Tasas de interés spot tipo cupón cero (con composición anual), premios por liquidez y estimación de tasas de interés forward y tasas spot futuras esperadas.

T_i-t (años)	$L(t,T_i)$ (%)	$S^{liq}(t,T_i)$ (Puntos Base)	$\widehat{L}(t,T_i)$ (%)	$\widehat{F}(t,T_1,T_2)$ (%)	$F(t,T_{i-1},T_i)$ (%)	$s^{liq}(t,T_{i-1},T_i)$ (Puntos Base)
0	7.35%	-	7.35%	7.35%	7.35%	-
1	7.92%	32	7.60%	7.60%	7.92%	32
2	8.49%	58	7.90%	7.63%	8.39%	76
3	9.10%	80	8.30%	7.86%	8.83%	98
4	9.65%	96	8.69%	7.88%	8.87%	98
5	10.23%	104	9.18%	8.28%	9.04%	77
6	10.92%	114	9.78%	8.74%	9.51%	77
7	11.61%	125	10.36%	8.75%	9.52%	77
8	12.32%	136	10.96%	8.77%	9.54%	77
9	13.06%	149	11.57%	8.77%	9.55%	77
10	13.83%	162	12.21%	8.79%	9.56%	77

FUENTE: Construido por el autor con base en los datos de PiP de cotizaciones de Swaps de TIIE para el 29 de Diciembre de 2006 y spreads de liquidez supuestos.

2.1.3 Teoría de Mercados Segmentados y Teoría del Nicho Preferido

La Teoría de Mercados Segmentados, presentada por J. M. Culbertson (1957) ha sido la fuente para desarrollar una variante que sugiere que los premios por liquidez pueden ser positivos o negativos: La Teoría del Nicho Preferido de Modigliani y Sutch (1966). Sin embargo, es claro que la idea fundamental de segmentación de mercados es lo importante, por lo tanto, en el entendido de que la Teoría del Nicho Preferido queda determinada por las condiciones de la Teoría de Mercados Segmentados aplicadas a la Teoría de Preferencias por Liquidez, se utiliza la connotación de "Mercados de Cotización a Plazo" o "Mercados Segmentados" para la presentación de los fundamentos de ambas teorías.

A la Teoría del Nicho Preferido subyace una teoría más general que la Teoría de Preferencias por Liquidez. Su principal consideración es que los inversionistas tienen preferencias en instrumentos financieros de cierto mercado por vencimientos que varían de un inversionista a otro. Esto puede interpretarse como diferenciación de mercados por plazo donde puede existir una relación de sustitución de preferencias entre dichos mercados diferenciados por plazo[10].

En general, la Teoría del Nicho Preferido explica los niveles de las tasas de interés en la curva de tasas a través de premios al plazo que varían a través de vencimientos basados en la oferta y demanda de los instrumentos de cada vencimiento en particular. Obviamente, parte de éste premio puede atribuirse a la liquidez del mercado segmentado, pero ahora esta característica es una de tantas de aquellas que actúan sobre la oferta y la demanda dadas a su vez por la profundidad del mercado y preferencias de sus participantes.

2.1.3.1 Supuestos de la Teoría del Nicho Preferido

El enfoque de la Teoría del Nicho Preferido es sumamente general y conlleva la existencia de mercados financieros a lo largo de la curva de tasas de interés con curvas de oferta y demanda específicas. Esta teoría descansa principalmente en las siguientes bases o supuestos:

- Mercados eficientes (información y preferencias incorporada en los precios de los instrumentos financieros, los cuales se diferencian por mercados de cotización a plazo).
- Las preferencias pueden darse naturalmente de la estructura de sus pasivos, de su aversión al riesgo, o de ambos[11].
- La interacción de prestatarios y prestamistas da lugar a las curvas de oferta y demanda de títulos de diferentes vencimientos. Estas curvas de oferta y demanda reflejan las expectativas de

[10] De hecho este es el precepto fundamental del que emana el presente trabajo de Tesis y que se argumentará teóricamente y prueba empíricamente en Bravo (2007).

[11] Por ejemplo, una compañía de seguros de vida comúnmente hace promesas de largo plazo a los tenedores de pólizas y por esto preferirá invertir en títulos que ofrezcan un rendimiento estable sobre un periodo de tiempo largo. Los bancos comerciales, por otra parte, generalmente tienen pasivos de corto plazo y pueden preferir invertir en créditos de corto plazo y títulos líquidos. Por otro lado, dependiendo de sus necesidades y habilidad para absorber el riesgo, inversionistas individuales pueden preferir ya sea inversiones de corto o largo plazo. De igual manera, los emisores de deuda pueden también tener necesidades de cerrar una tasa de interés dada sobre un periodo de años consistente con la magnitud de los proyectos que estén fondeando.

los participantes del mercado para la evolución de las tasas de interés futuras y sus preferencias por participar en un segmento del mercado sobre otro.

- Títulos de diferentes vencimientos son sustitutos imperfectos de otros cercanos en plazo.
- Agentes tomadores de precio (curva de oferta y demanda con un equilibrio).
- Preferencias fuertes respecto al vencimiento, dependiendo de la categoría a la que pertenezcan (tipo de mercado segmentado).
- No se supone que los participantes no deseen cambiar o arbitrar entre mercados; pues si bien las preferencias de los participantes pueden ser fuertes, ellos están dispuestos a participar en otros segmentos del mercado, que provean incentivos de tasa de interés suficientemente atractivos. Entonces, los títulos de diferentes vencimientos son sustitutos (imperfectos) de otros.

2.1.3.2 Implicaciones de la Teoría del Nicho Preferido

Las implicaciones importantes de la Teoría del Nicho Preferido son las siguientes:

- Las tasas de interés iniciales para los títulos de diferentes vencimientos reflejan un promedio de tasa de interés de corto plazo esperadas para mantener sobre la vida de los títulos de plazo largo más un premio de plazo que viene de las preferencias de los participantes del mercado en un segmento del mercado u otro. Entonces, las curvas de oferta y demanda para cada segmento reflejan tanto las expectativas como las preferencias de los vencimientos del mercado.
- Algunas sucesiones de inversiones en títulos se espera produzcan tasas de rendimiento mayores que otras sucesiones. Aquellas sucesiones que se espera produzcan tasas de rendimiento altas deberán estar vinculadas a mayores premios de plazo debido a las condiciones de oferta y demanda para los títulos de un plazo en particular.
- Las tasas de interés forward implícitas de las tasas de la estructura de plazos spot de hoy son estimaciones sesgadas de las tasa de interés que realmente se esperan en el futuro. Si el sesgo es hacia arriba o hacia abajo depende de las condiciones de oferta y demanda para los títulos de varios plazos.
- Debido a las preferencias fuertes del mercado para prestar o pedir prestado títulos de vencimientos en particular, arbitrar a través de vencimientos no elimina por completo el premio por plazo asociado con los títulos de diferentes plazos. Esto es, los inversionistas no pueden comprar y vender diferentes vencimientos para forzar cambios en el precio que igualen rendimientos en diferentes vencimientos.
- Cambios en la forma de la estructura de plazos pueden reflejar cambios en las expectativas del mercado de las tasas de corto plazo o cambios en los premios al plazo por cambiar las condiciones de oferta y demanda y las preferencias del mercado.

Como tal, esta teoría es la más difícil de las tres para aplicar con propósitos de predicción, pues estudiar los factores particulares que inciden sobre la oferta y demanda es por demás un problema complejo bajo la Teoría Económica. En algunos aspectos, argumenta que el mercado se preocupa por todo.

El equilibrio de cada mercado diferenciado por plazo o vencimiento, se da por la interacción de oferta y demanda, donde los factores de profundidad del mercado, expectativas y preferencias de los participantes son diversos (ya no sólo influye la liquidez como en el caso de la Teoría de Preferencias por Liquidez). Este hecho se trata de representar gráficamente a través de una serie de curvas de oferta y demanda tal y como se muestra en la Figura 2.1.

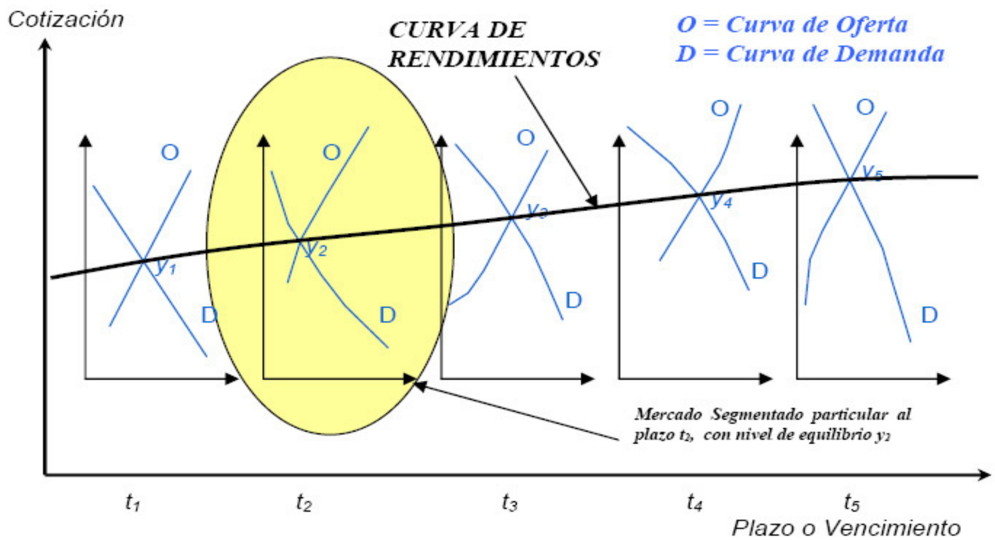

Figura 2.1 Esquematización de la Teoría del Nicho Preferido.

Nota: Es importante mencionar que en el presente trabajo de Tesis, se hará uso de esta teoría suponiendo que el mercado ya se ha ajustado, es decir, no se pretende desarrollar un modelo de pronóstico, sino más bien un modelo de ajuste (bootstrapping) para derivar la estructura de plazos de las tasas de interés a los datos de mercado.

Finalmente cabe señalar que bajo la Teoría del Nicho Preferido no se pueden obtener series únicas de tasas esperadas futuras, ni se puede definir un único sesgo en las tasas forward. Variaciones en los niveles de tasas de interés a través de la curva de rendimientos obedecen a las expectativas de tasas futuras y condiciones únicas de oferta-demanda en cada mercado. Como tal, esta teoría es la más difícil de las tres que se han enunciado en cuanto a definir con base en sus preceptos modelos matemáticos con propósitos de predicción; la explicación de éste hecho es simple, La Teoría del Nicho Preferido argumenta que el mercado toma en cuenta "todo".

2.2 Ajuste de Modelos de Tasas de Interés a Observaciones de Mercado

En la sección anterior, hemos visto los principios fundamentales de la teoría sobre la estructura de plazos de las tasas de interés, en esta sección se revisa ahora la forma en que se ha resuelto el problema de modelar los mercados financieros en lo que respecta al ajuste de las curvas de tasas de interés donde se tienen desde modelos simples de ajuste hasta modelos matemáticos muy complicados que deben resolverse numéricamente. Se hace principal diferencia entre los modelos teóricos que descansan sobre bases matemáticas estrictas y los modelos empíricos que descansan sobre la practicidad del cómo representar las curvas de tasa de interés -en ocasiones con un enfoque de ingeniería financiera. Sin embargo, se verá que para poder utilizar modelos avanzados y dinámicos (modelos teóricos) se requiere primeramente derivar la estructura de plazos de las tasas de interés a través de un modelo empírico, pues ésta es la base para su calibración.

En esta sección, se hace particular énfasis en las características deseables de los modelos de ajuste de la curva de tasas de interés y se llega a la conclusión de que lo que se busca en la práctica es tener un modelo que sea factible de aplicar a la vez de ser consistente con los preceptos fundamentales de representar realmente el mercado en un momento específico. La intención es sentar las bases para "discrimar" cualquier modelo de ajuste con base en el grado en que éste descansa sobre los preceptos teóricos fundamentales.

2.2.1 Necesidad de la Curva de Tasas de Interés

Todas las valuaciones (descuento de flujos de efectivo, fijación de precios de instrumentos financieros, fijación de precios de opciones, etc.) y varios cálculos financieros (como la determinación del costo implícito de fondeo a largo plazo o una tasa interna de retorno de un patrón de flujos) requieren de contar con la estructura de tasas de interés a través de los diferentes plazos (o *"tenors"*), sea esta curva de las tasas de interés spot o tasas de interés tipo *forward*, o en su defecto la curva de descuentos o precios de bonos cupón cero[12]. No obstante, la determinación de la curva de descuentos o tasas tipo cupón cero no es nada trivial en la práctica ya que requiere de conocer a detalle convenciones de mercado particulares y características específicas de los instrumentos financieros que en él cotizan (para el caso de los Swaps de TIIE-28 días, todos los detalles y características de este instrumento financiero derivado se encuentran en el Capítulo V del presente trabajo de tesis).

2.2.2 Propiedades Deseables de la Curva de Tasas de Interés

Antes de describir el modelo de ajuste de la estructura de plazos de las tasas de interés desarrollado en el presente trabajo de tesis y revisar distintos modelos clásicos en la literatura, es necesario entender las propiedades deseables de cualquier curva de tasas de interés, atendiendo a la utilidad práctica que tendrá dicha curva de tasas de interés (para la fijación de precios y re-valuación de instrumentos), a las propiedades financieras deseables (recuperación de cotizaciones de mercado y determinación de cotizaciones de plazos no negociables que hereden información de los plazos negociables) y a las propiedades matemáticas de la correspondiente curva de tasas de interés forward (suavidad relativa y parsimonia).

Brousseau (2002) y Bianchi and Liang (2002), describen de manera muy precisa las propiedades deseables que debe tener una curva de tasas de interés estimada. Dichas propiedades pueden extenderse a cualquier marco conceptual: empírico o teórico. Le llaman principios o lineamientos base, los cuales pueden resumirse en propiedades de información completa, propiedades de ajuste

[12] En principio, la curva de tasas de interés spot (tipo cupón cero), la curva de tasas de interés forward o la curva de descuentos contienen la misma información y a partir de cualquiera de ellas se pueden determinar las restantes.

y propiedades de conceptualización de las tasas forward. El Cuadro 2.2 presenta a detalle estos lineamientos, su razonamiento subyacente y sus implicaciones.

Cuadro 2.2 Propiedades deseables de una curva de tasas de interés.

Propiedad	Razonamiento Subyacente	Implicación
1. Las curvas de tasas de interés deben contener todas las cotizaciones de mercado.	Toda la información de mercado debe incorporarse a la curva de tasas.	Se recuperarán completamente las expectativas del mercado a los distintos plazos o "tenors", así como las interacciones de los mercados segmentados por madurez.
2. La curva de tasas de interés forward (subyacente a las spot) debe tener cierto grado de suavidad.	La suavidad de la curva de tasas forward es una propiedad que permite obtener estimaciones de tasas futuras consistentes y con cierta transición entre sí, sin picos abruptos.	Se tiene una transición entre las expectativas de las tasas forward a distintos plazos, lo cual es más razonable desde el punto de vista práctico si dichas estimaciones se utilizarán para fines de fijación de precios o pronóstico de flujos (como el caso de los flujos variables de los Swap de tasa de interés).
3. Las curvas de tasas de interés deben representarse en lo posible con parsimonía.	Un modelo de ajuste de tasas de interés debe ser sencillo y con el menor número de parámetros posibles, de manera que sea fácilmente comprendido y su utilización sea práctica[13].	En la práctica, siempre se busca utilizar la solución más simple posible que ofrezca resultados adecuados; de esta manera, cualquier modelo parsimonioso que explique razonablemente la curva de tasas de interés será preferible a cualquier modelo complicado que no sea fácilmente aplicable.
4. Los modelos utilizados para determinar la curva de tasas de interés deben ser viables y no proveer de niveles de tasas fuera de mercado.	Si con un modelo que determina la curva de tasas de interés se obtienen tasas fuera de mercado, entonces el modelo no es viable en el sentido de que no recupera la información de mercado tal y como es, pudiendo arrojar una mala idea de que existe alguna posibilidad de arbitraje.	Un modelo de determinación de la curva de tasas de interés que arroje niveles de tasas fuera de mercado será rechazado por los participantes de mercado ya que arrojará precios que no estarán en línea con los determinados en el mercado.

FUENTE: Elaboración propia del autor a partir de lo descrito por Brousseau (2002) y Bianchi & Liang (2002). [13]

[13] El ajuste de cierta curva siempre se puede hacer lo más preciso posible si se utilizan muchos parámetros; sin embargo, un modelo muy complicado no es significativo ni práctico y requiere de varias estimaciones (para los parámetros).

Las propiedades anteriores deben ser consideradas para poder evaluar lo robusto de cualquier modelo de ajuste de la curva de rendimientos y su preferencia sobre alguno alternativo.

2.2.3 Ajuste de Modelos de Tasas de Interés a Observaciones de Mercado

El ajuste de modelos de tasas de cualquier tipo (modelos teóricos con dinámica estocástica para la tasa forward instantánea o modelos empíricos o de bootstrapping de ajuste puntual) requiere forzosamente que la curva de rendimientos "pase" por todos los puntos de mercado (Punto 1 del Cuadro 2.2) para asegurar que la valuación de los instrumentos de mercado utilizados para el ajuste o calibración se replique de manera precisa a posteriori (a manera de comprobación) con la curva de rendimientos expresada como la estructura de plazos de las tasas de interés tipo cupón cero (o la curva de descuentos)[14]. Las propiedades de suavidad de la curva de tasas forward, parsimonia y viabilidad son intrínsecas al propio modelo y emanan de los propios fundamentos utilizados para su construcción.

Para el lector interesado en las bases matemáticas necesarias para entender el desarrollo de los modelos mencionados, se recomienda consultar a Brigo and Mercurio (2001), quienes presentan de manera muy precisa los principales fundamentos de las finanzas matemáticas y el desarrollo de los modelos teóricos más importantes, incluyendo el LIBOR Market Model o BGM Model (Brace, et al (1997)). Algo importante a comentar es que estos autores reconocen al igual que el autor de este trabajo de tesis (Brigo and Mercurio (2001), página 4) que la calibración de los modelos a una estructura de plazos inicial de las tasas de interés es imprescindible[15].

Por otro lado, un marco de referencia de los modelos empíricos más utilizados en la práctica es Hagan and West (2006), quien revisa los detalles de los mismos, a la vez de proponer un modelo que ajuste de manera continua a las tasas de interés forward instantáneas (aunque en su modelo la curva de interés de tasas forward instantáneas -continuo por construcción - no es diferenciable en los plazos de cotización de mercado).

A continuación revisamos los enfoques para realizar un ajuste a la estructura de plazos de las tasas de interés, los cuales de manera general se pueden agrupar en tres:

- (i) Ajuste de modelos dinámicos (teóricos) mediante una regresión o estimación de la función de densidad condicional subyacente a los procesos estocásticos.
- (ii) Calibración de modelos dinámicos (teóricos) con cierta curva inicial.
- (iii) Ajuste de una curva particular a través de métodos numéricos para obtener los parámetros del modelo subyacente (teórico o empírico) que mejor ajusten a los datos de mercado.

Para el enfoque (i) se requiere por lo general de series históricas de la tasa de más corto plazo del mercado (como representativa de la "tasa corta"). Bajo este enfoque, es común que se omita la

---

[14] De aquí en adelante la estructura de plazos de las tasas de interés se entenderá como la curva de tasas tipo cupón cero o la curva de descuentos o precios de los bonos cupón cero.

[15] En la introducción de este capítulo se ha discutido que para la calibración de cualquier modelo se requiere primeramente derivar la estructura de plazos de las tasas de interés a través de un modelo empírico, pues esta es la base para la calibración.

información de mercado a mayores horizontes de inversión para cada corte transversal de la serie de tiempo (lo cual no hace sentido en la práctica, aunque el cuerpo teórico de los modelos asuman que esto debe ser así).

Para el enfoque (*ii*) se requiere de cualquier manera tener disponible la curva inicial (la estructura de plazos), por lo que se hace necesario que previamente se haya derivado ésta.

El enfoque (*iii*) es el más utilizado para ajustar los modelos de manera puntual y con la mayor precisión posible a los datos de mercado. Esta alternativa proveerá la curva inicial requerida para la calibración de modelos dinámicos (teóricos) con cierta curva inicial y es la que asegura que la valuación de los instrumentos de mercado utilizados para el ajuste o calibración se replique de manera precisa con la estructura de plazos de las tasas de interés derivada.

Si bien el enfoque (*iii*) es el ampliamente utilizado para el ajuste de la curva de rendimientos, a continuación se describen brevemente todos los enfoques en combinación con el tipo de modelo (dinámico o empírico) sobre el que se utilizan.

2.2.3.1 Ajuste de Modelos Dinámicos (Teóricos) Mediante una Regresión o Estimación de la Función de Densidad Condicional Subyacente a los Procesos Estocásticos

El enfoque de ajuste de modelos dinámicos (teóricos) mediante una regresión o estimación de la función de densidad condicional subyacente a los procesos estocásticos es el más socorrido debido a que la forma funcional de los modelos de tasa corta de interés en su formulación inicial como ecuación diferencial permiten obtener (asumiendo tiempo discreto) formas de regresión que pueden "correrse" con varios métodos estadísticos (la mayoría de ellos desarrollados en el campo de la econometría avanzada). Sundaresan (2000) presenta de manera precisa los métodos de estimación del caso (*i*). Estos métodos de estimación se clasifican en:

- Métodos de Máxima verosimilitud.
- Métodos de Momentos Generalizados.
- Métodos de Momentos Simulados.
- Métodos de Momentos Eficientes.
- Enfoques no Paramétricos (densidades de Kernel).
- Métodos Basados en la Función Característica condicional.

La descripción detallada de los métodos de estimación anteriores está fuera del alcance de este trabajo de tesis, pero los lectores interesados pueden encontrar un ejemplo detallado de cómo puede aplicarse el método de máxima verosimilitud al modelo de Vasicek (1977) y CIR (1985) en el trabajo de Pearson & Sun (1994), donde los autores usan los estimadores de máxima verosimilitud con forma cerrada en la función condicional de densidad de máxima verosimilitud. Para el caso en el que no puede ser posible resolver en forma cerrada la función condicional de máxima verosimilitud, Lo (1988) y Aït-Sahalia (1999a y 1999b) muestran cómo usar métodos numéricos para estimarla. Para la aplicación del Método Generalizado de Momentos se puede consultar Chen, et al (1992).

Para el uso del método de momentos simulados se puede consultar a Gourieroux & Monfort (1996).

Para una aplicación del método de momentos eficientes (método indirecto de estimación) se puede consultar a Andersen & Lund (1997) y Benzoni (1999), quienes lo aplican para estimar modelos de tasa corta con volatilidad estocástica.

Para un ejemplo de los modelos de estimación no paramétrica puede verse Pritzker (1998), Jiang (1998) and Jiang and Knight (1997) quienes utilizan este enfoque en el contexto de la estimación de la estructura intertemporal de tasas de interés.

Finalmente, una descripción de métodos basados en la estimación de la función característica condicional aplicada a procesos de difusión con saltos afines se encuentra en Singleton (1999).

2.2.3.2 Calibración de Modelos Dinámicos (Teóricos) con Cierta Curva Inicial

El desarrollo de modelos dinámicos que se calibran con cierta curva inicial fue iniciado con la publicación del modelo de Ho & Lee (1986). Es importante notar, que este tipo de modelos tienen la premisa básica de que existe una probabilidad neutral al riesgo (que también implica no arbitraje), por lo que cualquier tipo de aversión al riesgo no es capturada o simplemente bajo su existencia el modelo está mal especificado (ver Back (1997)). Es importante mencionar que siempre es posible añadir variables (dependientes del tiempo) de manera que un modelo dinámico de difusión pueda ajustar una curva de tasas de interés (ver CIR (1985)). Debido a esto, al modelo de Ho & Lee (1986) le han seguido muchos modelos más que adicionan más variables. En el Anexo II.1 se presenta una lista de este tipo de modelos (los más comunes).

Lo importante a mencionar de éste tipo de ajuste de modelos es que se requiere de cualquier manera realizar la estimación de parámetros en muchos casos utilizando datos históricos, y además, se necesita contar con la curva de tasas en el momento de la calibración.

2.2.3.3 Ajuste de una Curva Particular a través de Métodos Numéricos para Obtener los Parámetros del Modelo Subyacente (Teórico o Empírico) que Mejor Ajusten a los Datos de Mercado

Este tipo de técnica lo que supone es que la curva de tasas de interés sigue cierto modelo “pre-establecido” en su dinámica, por lo que dada cierta curva particular en un momento dado, se obtienen los parámetros implícitos del modelo pre-establecido a través de seleccionar aquellos que mejor ajusten la curva con un mínimo de error (utilizando para ello un criterio de ajuste global como puede ser la suma de los valores absolutos o cuadrados de las desviaciones a lo largo de la curva para los puntos con datos de mercado). Un ejemplo típico de este enfoque de ajuste es el presentado por Brousseau (2002) quien estima, de forma estática para un momento en el tiempo y con una curva de tasas en particular, los parámetros del modelo DK1 (Duffie & Kan (1993)) que engloba tanto al modelo de Vasicek (1977) como al de CIR (1985).

Obviamente, el enfoque de ajuste de una curva particular a los datos de mercado a través de métodos numéricos, es un ajuste estático que tiene que repetirse cada vez que la curva cambia.

Aunque en principio, el modelo estimado puede servir para pronosticar la curva en tiempos futuros (lo que implicaría que los parámetros estimados sean robustos y se mantengan en sus niveles a lo largo del horizonte de pronóstico).

2.2.4 El Ajuste de la Estructura de Plazos de las Tasas de Interés: Modelos Teóricos vs Modelos Empíricos o de Bootstrapping

Es importante mencionar que el ajuste de tasas de interés o determinación de la estructura ínter temporal de tasas de interés es un problema que ha arrojado una vasta literatura, principalmente en su análisis teórico, como se ha visto en las secciones anteriores. Sin embargo, para poder realizar la valuación de instrumentos financieros, una de las decisiones más importantes (aunque a veces no se aprecie así) es elegir la manera en que se ajustará la estructura de plazos de las tasas de interés a los datos de mercado, esto intrínsecamente representa elegir el modelo (teórico o empírico) a utilizar.

El Cuadro 2.3 presenta los dos principales enfoques de ajuste de la curva de tasas de interés. Se puede apreciar que a pesar del vasto desarrollo teórico, el ajuste de tasas de interés se realiza en la práctica sin considerar un modelo dinámico (enfoque teórico) cuyos parámetros se estimen por técnicas de regresión o de minimización de errores.

Cuadro 2.3. Principales enfoques de ajuste de la curva de tasas de interés.

Enfoque de Ajuste de la Curva de Tasas de Interés	Principal Supuesto	Piedra Angular para su Aplicación Práctica	Uso en la Industria Mexicana para Fijación de Precios y Valuación
Enfoque Teórico[16] (modelos dinámicos)	La dinámica de la curva de tasas (y por tanto su estructura completa) está gobernada por la "tasa corta" y sus valores estimados o pronosticados para el futuro en cada punto del tiempo será la tasa de interés *forward*.	La estimación de los diferentes parámetros del modelo elegido (describiendo principalmente la reversión a la media y la volatilidad de la "tasa corta") a través de distintas técnicas de regresión o minimización de errores.	Prácticamente sin uso.[17]
Enfoque Práctico o Empírico (modelos puntuales o estáticos)	La curva de tasas de interés debe replicar o estar muy cerca de las cotizaciones de mercado de un momento dado (*Bootstrapping*) y debe ser parsimonioso.	La técnica para llenar los intervalos o "gaps" entre las cotizaciones de mercado, logrando una curva de tasas de interés *forward* "suave": metodología de interpolación o de ajuste de las tasas forward instantáneas.	Uso común (modelos simples o de "street convention")

16 17

FUENTE: Elaboración propia del autor.

Como puede observarse, los practicantes de la industria han optado por utilizar modelos de estimación puntual de la curva de tasas de interés (para un momento o día específico) a través de enfoques empíricos.

Lo que es curioso, es que para instrumentos lineales (instrumentos sin opcionalidad) dicha estimación estática (a través de un modelo determinístico) es utilizada para determinar las tasas forwards o niveles de tasas de interés en tiempos futuros. Este hecho implica que la estructura de plazos de tasas de interés estimada se asume que incluye las expectativas del mercado[18].

[16] En el Anexo II.1 se presenta un compendio de los principales modelos de tasa corta.

[17] Algunas referencias del modelo de Vasicek (1977) se encuentran en el Manual de Valuación del Proveedor de Precios PiP que puede ser consultado o solicitado en la dirección electrónica `http://www.precios.com.mx`.

[18] Lo anterior se ha abordado en la Sección 2.1 donde se presenta el marco conceptual de las principales teorías que explican la curva de tasas de interés (también conocida como estructura de plazos de tasas de interés ó curva de tasas tipo cupón cero).

Es claro que los participantes del mercado consideran que en la práctica las tasas futuras están capturadas (en el momento de la estimación de la curva de tasas de interés) en la estructura puntual de plazos de las tasas de interés (ya que la determinan) y que por ende, se puede usar ésta para estimarlas. Obviamente, dichas expectativas cambian de un momento a otro, por lo que se hace necesario volver a estimar la curva actual de tasas de interés. Tal vez por esta misma razón se considera que para fines de fijación de precios de instrumentos lineales (como FRAs, Swaps de Tasa de Interés o Bonos simples) no es necesario un modelo dinámico explícito para las tasas de interés y se prefiere un modelo empírico que ajuste las cotizaciones de mercado. En otras palabras, se prefiere capturar las expectativas contenidas en la curva puntual de tasas de interés, reconociendo que cambian cada momento, en lugar de pronosticar los valores esperados de las tasas de interés con un modelo teórico o de expectativas.

Para la valuación de instrumentos no lineales (instrumentos con opcionalidad), los cuales requieren que se pronostique la senda probable de la evolución de las tasas de interés, se echa mano de modelos de valuación teóricos como el modelo de Black (1976) o el Libor Market Model (Brace, et al (1997)). En este caso, sin embargo, es de cualquier manera requerida la estructura de plazos de las tasas de interés, por lo que prevalece la necesidad del ajuste de la curva de rendimientos a través de un modelo empírico o de bootstrapping utilizando las cotizaciones de mercado.

De acuerdo a lo presentado en este capítulo y capítulos anteriores, el espíritu de esta tesis es encontrar un modelo de ajuste de la estructura de plazos de las tasas de interés que sea una buena alternativa a los modelos de ajuste empíricos de uso común en la actualidad, pero que conserve en la mayor medida posible las propiedades deseables presentadas en el cuadro 2.2. En el siguiente capítulo (Capítulo III) es donde se realiza el desarrollo de tal modelo y que el autor considera como parte central de este trabajo de tesis.

CAPÍTULO 3

DESARROLLO DEL MODELO DE AJUSTE DE TASAS DE INTERÉS FORWARD INSTANTÁNEAS CON TENDENCIA VARIABLE Y QUE SIGUE UNA RELACIÓN DE SUSTITUCIÓN ENTRE MERCADOS ADYACENTES

En este capítulo se presenta el desarrollo de un modelo de ajuste de la curva de rendimiento (modelo de *Bootstrapping*) que recupera la idea de sustitución de mercados a diferentes plazos de cotización. Las consideraciones y supuestos se hacen sobre las tasas de interés *forward instantáneas* en el contexto determinista ya que se trata de un modelo empírico de Bootstrapping. A tales tasas se les asume una cierta tendencia, la cual se modela como una combinación lineal (y convexa) de las tendencias definidas por los mercados adyacentes. Esta propiedad permite obtener de manera natural una expresión para las tasas de interés *forward instantáneas* (en plazos no cotizados) que refleja que el mercado más cercano tiene una mayor influencia sobre el nivel de la tasa de interés *Forward Instantánea* al plazo deseado.

Para poder definir el modelo con toda la claridad posible, a la vez de dejar explícitos todos los elementos para su posterior aplicación práctica a los *Swaps* de TIIE-28 días (en el Capítulo VI), a lo largo de este capítulo se desarrollan los conceptos básicos de valuación de una serie de flujos, revisando desde la tasa de interés de composición simple hasta la forma de obtener la tasa de interés *Forward Instantánea.*

3.1 El Bono Cupón Cero como Factor de Descuento de Flujos, la Tasa de Interés Simple Efectiva y la Tasa de Interés Simple Anualizada

La tasa de interés o rendimiento simple de una inversión a cierto horizonte de tiempo o plazo proviene de la consideración del monto de interés generado por dicha inversión. En particular, la tasa de interés simple efectiva no es más que la ganancia por unidad invertida (interés de cada unidad monetaria invertida)[19].

Sea M_t cierto monto de dinero invertido en el tiempo $s = t$, que se obtendrá de regreso, junto con los intereses, en el tiempo $s = T(t \leq T)$ en una cuantía definida por M_T.

Nota: Las unidades de tiempo serán entendidas como el número de años financieros (número entero o fraccionario) que corresponda con las convenciones de los mercados analizados.

[19] Se asume que siempre se recibe de regreso el dinero invertido más alguna cantidad positiva por realizar la inversión, aunque de manera general cabe la posibilidad de que esto no sea así y se incurra en una pérdida.

Se puede expresar:

$$M_T = M_t + (M_T - M_t) = M_t + \Delta M_t \tag{3.1}$$

Donde $\Delta M_t = M_T - M_t$ representa la ganancia que se tendrá por dicha inversión[20] .

Económicamente, ΔM_t es el monto de interés generado, pero por ser un número absoluto, dependerá del monto de inversión inicial M_t. La forma de evitar esta dependencia es expresar una medida de dicho interés que no dependa del monto de inversión inicial; esto se logra fácilmente expresando ΔM_t en términos relativos a la inversión inicial para obtener:

$$L^{ef}(t,T) = \frac{\Delta M_t}{M_t} \tag{3.2}$$

La expresión anterior representa el interés efectivo que se gana por cada unidad (cada peso) de inversión realizada en el horizonte de tiempo $T-t$. En este sentido $L^{ef}(t,T)$ es la tasa de interés simple efectiva que en términos económicos se recibe en la inversión[21].

Debido a que $L^{ef}(t,T)$ puede ser un número muy pequeño para horizontes de inversión cortos, es práctica aceptada en todos los mercados derivar una tasa de interés simple anualizada. Para hacer esto, se debe considerar una convención para el número de días efectivos de interés que se pagarán en "un año financiero" (número de días que por lo general varía en cada mercado local). Un año financiero no necesariamente tiene los mismos días que un año calendario al ser una convención[22]. De esta manera, se tiene que si $L^{ef}(t,T)$ es la tasa de interés simple efectiva para $T-t$ años financieros, la tasa de interés simple anualizada (anualizada linealmente, lo cual se puede hacer por "regla de tres") es:

$$L(t,T) = \frac{1}{T-t} L^{ef}(t,T) \tag{3.3}$$

$L(t,T)$ es la tasa de interés de composición simple representativa de cada unidad de inversión realizada por $T-t$ años (o fracción de años).

Lo anteriormente presentado es la base para entender una tasa de interés como representativa del monto de interés recibido en una inversión a cierto plazo. No obstante, en la práctica, dada $L(t,T)$, se quisiera saber qué monto se tendría que invertir al plazo $T-t$ para recibir en $s=T$ una unidad monetaria. Este monto se conoce como factor de descuento, el cual es muy útil (y de amplio uso en la práctica) para saber por cuanto hay que multiplicar cualquier cantidad que se recibirá (o se desea recibir al realizar una inversión) en un flujo futuro (en $s = T$), y de esta manera obtener

[20] Nótese que ΔM_t es una simple resta de montos (de dinero) en distintos tiempos; sin embargo financieramente es la base para la valuación de inversiones, pues representa el dinero que se gana o pierde por invertir al horizonte de tiempo $T-t$. En la práctica común, ΔM_t es conocido como $P\&L$ por las siglas en inglés de *"Profit and/or Loss"*.

[21] Este es el único número que realmente puede compararse con otros indicadores económicos como la tasa de inflación en el periodo de tiempo $T-t$.

[22] Comúnmente se toman los siguientes días para un "año financiero": 360 días, 365 días o Actual días (donde *Actual* significa el año financiero tendrá los mismos días que el año calendario); sin embargo, existen convenciones de 252 días (que aproxima los días hábiles -sin sábados ni domingos), 364 días u otros que se consideren pertinentes para ciertos instrumentos financieros. El número de días en un año financiero se suele denotar con la palabra *Basis*.

el monto a invertir (en $s = t$ a la tasa $L(t, T)$. El factor de descuento no es más que el precio "hoy", en $s = t$, de un "bono cupón cero" que madura en $s = T$ pagando una unidad monetaria.

Sea $B(t, T)$ el precio en $s = t$ del bono cupón cero que paga una unidad en su madurez $s = T$ (también conocido como el factor de descuento). Entonces, se satisface que:

$$M_t = B(t, T) M_T \tag{3.4}$$

De las ecuaciones 3.2 y 3.3 se tiene que:

$$L(t, T) = \frac{1}{T - t} L^{ef}(t, T) = \frac{1}{T - t} \frac{\Delta M_t}{M_t}$$

O bien

$$L(t, T) = \frac{1}{T - t} \frac{M_T - M_t}{M_t} = \frac{1}{T - t} \left(\frac{M_T}{M_t} - 1 \right)$$

Con lo que:

$$\frac{M_T}{M_t} = 1 + L(t, T)(T - t) = \frac{1}{B(t, T)} \tag{3.5}$$

La ecuación 3.5 permite obtener el valor de $B(t, T)$ en función de la tasa de interés de composición simple anualizada o conocida en el medio solamente como *tasa de interés simple* (la connotación "anualizada" se asume implícita pues todas las tasas se expresan anualizadas). Re-expresando la ecuación 3.5, se tiene:

$$B(t, T) = \frac{1}{1 + L(t, T)(T - t)}, \quad t \leq T \tag{3.6}$$

Obsérvese también que:

$$L(t, T) = \left(\frac{1}{B(t, T)} - 1 \right) \frac{1}{T - t} \tag{3.7}$$

La ecuación 3.7 muestra que la tasa de interés simple aumentará si el precio del bono cupón cero disminuye y viceversa. Esta ecuación es útil en la práctica para determinar los niveles de tasa de interés simple si se conocen los precios de bonos cupón cero.

3.2 El Precio del Bono Cupón Cero Expresado a Través de una Tasa de Interés Compuesta a Cierto Plazo y a Través de la Tasa de Interés Continuamente Capitalizable

La ecuación 3.6 permite obtener el precio del bono cupón cero a través de la tasa de interés simple, que se ha definido como aquella tasa de interés que se alcanza al final del periodo de inversión $T - t$; es decir, no existe ningún pago de interés intermedio más que un pago de interés total al final. En la práctica, este tipo de tasas de interés son propias del mercado de dinero de corto plazo (horizontes de inversión hasta de 1 año); sin embargo, para horizontes de inversión muy grandes (de varios años), el nivel de $L(t, T)$ se vuelve muy grande (ver patrón monótono creciente de las Figuras 6.6b y 6.9b5 del Capítulo VI), además de que la magnitud de su nivel no suele ser comparable con los niveles de tasas internas de retornos comúnmente utilizadas como cotizaciones de bonos o algunos derivados como el caso de los *Swaps* de Tasa de Interés. Por ello, se define otra tasa de interés

$Y_m(t,T)$ de composición a cierto plazo m, la cual representa la tasa de interés (fija) que se firmaría en un contrato de inversión para recibir intereses cada m años y reinvertirlos a esta misma tasa hasta llegar al final del horizonte de inversión $T-t$.

Matemáticamente, se tiene que:

$$M_T = M_t \left[1 + Y_m(t,T) \cdot m\right]^{\frac{T-t}{m}} \tag{3.8}$$

Pero, de la ecuación 3.5 se tiene que:

$$\frac{M_T}{M_t} = 1 + L(t,T)\,(T-t) = \frac{1}{B(t,T)} = \left[1 + Y_m(t,T) \cdot m\right]^{\frac{T-t}{m}} \tag{3.9}$$

La ecuación 3.9 anterior permite obtener $Y_m(t,T)$ a partir de $L(t,T)$ o bien $B(t,T)$.

Expresando $B(t,T)$ en función de $Y_m(t,T)$ se obtiene:

$$B(t,T) = \frac{1}{\left[1 + Y_m(t,T) \cdot m\right]^{\frac{T-t}{m}}} \tag{3.10}$$

La expresión anterior da el precio del bono cupón cero en función de una tasa de interés compuesta al plazo m . Sin embargo, para el análisis de tasas de interés en tiempo continuo se requiere conocer el precio del bono cupón cero en función de una tasa de interés continuamente capitalizable.

Sea $R(t,T) \equiv \lim_{m\to 0} Y_m(t,T)$. Ahora nótese que:

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to 0} \left[1 + Y_m(t,T) \cdot m\right]^{\frac{T-t}{m}} &= \left\{\lim_{m\to 0} \left[1 + Y_m(t,T) \cdot m\right]^{1/m}\right\}^{T-t} \\
&= \left\{e^{R(t,T)}\right\}^{T-t} \\
&= e^{R(t,T)(T-t)}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Sustituyendo el resultado anterior en la ecuación 3.10 se obtiene:

$$B(t,T) = \frac{1}{e^{R(t,T)(T-t)}} = e^{-R(t,T)(T-t)}, \quad t \leq T \tag{3.12}$$

La ecuación 3.12 permite obtener el precio del bono cupón cero a través de la tasa de interés continuamente capitalizable.

3.3 La Tasa de Interés Forward Instantánea

Finalmente se tienen todos los elementos para poder derivar la tasa de interés forward instantánea, la cual será la pieza base para el modelo de ajuste de la curva de rendimientos que se desarrollará. El concepto de la tasa de interés forward instantánea ha sido clave para el desarrollo de la teoría de comportamiento de la curva de rendimientos en tiempo continuo y sin ella no podrían existir los modelos de tasa corta, ni modelos empíricos que la utilizan para ajustar la curva de rendimientos.

Para derivar la tasa de interés forward instantánea se considera el precio del bono cupón cero tal como se derivó en la ecuación 3.12. Si el bono tiene fecha de madurez en $s = T + \Delta T$, su precio será:

$$B(t, T+\Delta T) = e^{-R(t,T+\Delta T)(T+\Delta T-t)} \tag{3.13}$$

El precio del bono en $s = T$ (precio adelantado o forward) puede escribirse como sigue si se supone que existe una tasa de interés forward $f(t, T, T+\Delta T)$ que puede aplicarse para conocer dicho precio adelantado[23]. En este caso se tiene:

$$B(t, T, T + \Delta T) = e^{-f(t,T,T+\Delta T)(T+\Delta T-T)} = e^{-f(t,T,T+\Delta T)\Delta T} \tag{3.14}$$

Ahora bien, si no existen oportunidades de arbitraje (el mercado de inversiones está en equilibrio) para generar ganancias extraordinarias y sin riesgo, entonces se puede utilizar a $B(t, T)$ como factor de descuento para encontrar el valor de $B(t, T, T + \Delta T)$ en $s = t$. De esta manera se tiene que:

$$B(t, T + \Delta T) = B(t, T) \cdot B(t, T, T + \Delta T) \tag{3.15}$$

O bien:

$$B(t, T + \Delta T) = e^{-R(t,T)(T-t)} \cdot e^{-f(t,T,T+\Delta T)\Delta T} \tag{3.16}$$

Igualando los resultados equivalentes de las ecuaciones 3.13, y 3.16 se obtiene:

$$e^{-R(t,T)(T-t)} \cdot e^{-f(t,T,T+\Delta T)\Delta T} = e^{-R(t,T+\Delta T)(T+\Delta T-t)}$$

Equivalentemente:

$$R(t, T)(T - t) + f(t, T, T + \Delta T)\Delta T = R(t, T + \Delta T)(T + \Delta T - t) \tag{3.17}$$

Como $R(t, T)(T - t) = -\ln B(t, T)$ y $R(t, T + \Delta T)(T + \Delta T - t) = -\ln B(t, T + \Delta T)$, la ecuación 3.17 se puede expresar como:

$$-\ln B(t, T) + f(t, T, T + \Delta T)\Delta T = -\ln B(t, T + \Delta T)$$

Y de aquí se desprende que:

$$f(t, T, T + \Delta T) = -\left(\frac{\ln B(t, T + \Delta T) - \ln B(t, T)}{\Delta T}\right) \tag{3.18}$$

La ecuación 3.18 permite obtener la tasa de interés forward con horizonte de inversión ΔT a partir de precios de bonos cupón cero.

La tasa de interés forward instantánea se define como:

$$\begin{aligned} f(t, T) &\equiv \lim_{\Delta T \to 0} f(t, T, T + \Delta T) \\ &= \lim_{\Delta T \to 0} -\left(\frac{\ln B(t, T + \Delta T) - \ln B(t, T)}{\Delta T}\right) \\ &= -\frac{\partial \ln B(t, T)}{\partial T} \end{aligned} \tag{3.19}$$

[23] Se ha incluido la variable t en las expresiones $f(t, T, T + \Delta T)$ y $B(t, T, T + \Delta T)$ para denotar que se obtienen con la información en $s = t$ y por ello se consideran, respectivamente, expresiones de una tasa de interés *forward* (no instantánea, sino al horizonte de inversión ΔT) y un precio (del bono cupón cero) *forward*.

De la expresión $f(t,T) = -\frac{\partial \ln B(t,T)}{\partial T}$, se puede obtener por integración la expresión:

$$\int_t^T f(t,s)\mathrm{d}s = \int_t^T -\mathrm{d}\ln B(t,s) = -\ln B(t,T) + \ln B(t,t) \tag{3.20}$$

Pero como $B(t,t) = e^{-R(t,t)(t-t)} = 1$ entonces $\ln B(t,t) = 0$, por lo que la ecuación 3.20 se reduce a:

$$\int_t^T f(t,s)\mathrm{d}s = -\ln B(t,T) \tag{3.21}$$

Finalmente, despejando $B(t,T)$, se obtiene:

$$B(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s)\mathrm{d}s} \tag{3.22}$$

La ecuación 3.22 es la ecuación fundamental para la valuación de un bono cupón cero en un marco determinista o de calibración. Esta expresión se puede ver como:

$$B(t,T) = e^{-\left(\frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,s)\mathrm{d}s\right)(T-t)}$$

Pero como $B(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)}$, entonces:

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,s)\mathrm{d}s \tag{3.23}$$

Las ecuaciones 3.22 y 3.23 son las ecuaciones fundamentales que se utilizarán para determinar, a través de ajustar un modelo empírico de Bootstrapping, la curva de tasas de interés o equivalentemente la curva de factores de descuento o precios de bonos cupón cero. Lo importante de estas dos ecuaciones es que se basan en la existencia de una especificación dada de la curva de tasas de interés forward instantáneas. De acuerdo a lo anterior, lo que importa es la especificación de $f(t,s)$. La forma de especificar $f(t,s)$ atendiendo a los principios de sustitución de mercado es lo que se desarrolla en adelante.

3.4 El Modelo

Se ha visto que la ecuación fundamental del bono cupón cero en un marco determinista que expresa su precio en función de la tasa de interés *forward instantánea* es:

$$B(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s)\mathrm{d}s}$$

O bien:

$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln B(t,T)}{\partial T}$$

Las expresiones equivalentes anteriores, junto con otras consideraciones, definen los modelos de equilibrio (no arbitraje). El modelo de ajuste de tasas de interés que se planteará utilizará estas expresiones, por lo que incorporará las condiciones de equilibrio; no obstante, también se incorporará una condición de sustitución de mercados en la razón de cambio de las tasas tasa de interés *forward instantáneas*, con lo que se obtendrá un modelo que combina condiciones de sustitución de mercados (adyacentes) y de equilibrio.

3.4.1 Especificación del Modelo

Para la construcción del modelo se utilizarán los siguientes supuestos que servirán de base para derivar un modelo de ajuste de la curva de rendimientos a través de tasas de interés *forward instantáneas* con tendencia variable y que sigue una relación de sustitución entre mercados adyacentes:

(i) Se considera que el mercado está en equilibrio (no hay arbitraje) y que la curva de rendimientos a estimarse por medio de *Bootstrapping* con los datos de mercado es una realización puntual (no estocástica) de la dinámica subyacente de las tasas de interés (sea esta cual fuere).

(ii) A partir de los datos de mercado de cierto instrumento financiero (como los *Swaps* de TIIE-28 días) se pueden obtener o definir un conjunto de nodos base que entre ellos determinan mercados de cotización a plazo. Todo instrumento financiero tiene su último flujo correspondiendo con un nodo base. (Figura 3.1).

(iii) Las tasas de interés *forward instantáneas* en cada mercado de cotización a plazo (intervalo definido por los nodos base) se pueden expresar como una función diferenciable que solo depende del horizonte de inversión (madurez o plazo).

(iv) La razón de cambio ("pendiente") de las tasas de interés *forward instantáneas* en cada mercado de cotización varían siguiendo las razones de cambio global definidas por el promedio de las tasas de interés *forward instantáneas* en los mercados de cotización adyacentes y el mercado considerado.

(v) Debido a que los mercados adyacentes al mercado de cotización a plazo considerado son sustitutos (imperfectos) de este último, la relación de sustitución puede reflejarse en la razón de cambio de las tasas de interés *forward instantáneas* y consecuentemente en su nivel.

Los supuestos (i), (ii) y (iii) son supuestos comunes a prácticamente todo modelo empírico de ajuste de curva de rendimientos por medio de *Bootstrapping*. El supuesto (iv) hace que las tasas de interés *forward instantáneas* sean coherentes globalmente en cuanto a su razón de cambio a lo largo de la curva, aunque no necesariamente asegura continuidad de ellas, pues no se han puesto restricciones en los nodos base como se hace en el modelo de *Splines* Cúbicos (ver Adam & Van Deventer (1994)). El supuesto (v) no es más que la incorporación del fundamento base de la Teoría de Mercados Segmentados de Modigilani (1966).

De acuerdo a lo anteriormente planteado, se cumple para todo horizonte de inversión que el precio del bono cupón cero (supuesto (i)) está dado por:

$$B(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s)\mathrm{d}s}$$

Además (supuesto (ii)) se tiene o se puede definir a priori un conjunto de nodos base, que sin pérdida de generalidad se pueden representar con el precio del bono cupón cero. Es decir, al tiempo $s = t$ se conoce:

$$B(t,T_0) = B_0, B(t,T_1) = B_1, \ldots, B(t,T_N) = B_N; \text{ para los plazos } T_0 - t < T_1 - t < \ldots < T_N - t.$$

Obsérvese que en la Figura 3.1 se muestran las cotizaciones (Q) para los plazos $T_0 - t < T_1 - t < \ldots < T_N - t$ en lugar de los precios de los bonos cupón cero $(B(t,T))$. Esto es debido a que en un mercado financiero, las cotizaciones pueden ser cualquier cosa: Tasas Internas de Retorno, *"Spreads"* sobre alguna tasa o índice de referencia, o incluso precios del instrumento que representa el mercado financiero el cual recupera el valor presente de todos sus flujos (incluyendo el último flujo que se da en T).

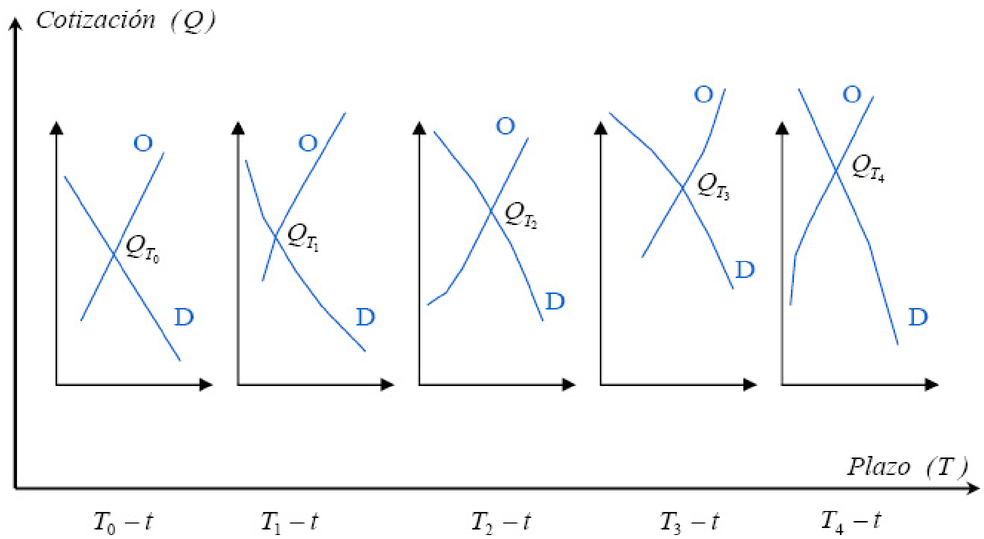

Figura 3.1 Mercados de cotización a plazo.

Debido a que $f(t,T)$ puede verse como una función diferenciable sólo de T (supuesto (iii)), los niveles de las tasas de interés *forward instantáneas* están definidos para todo s y se cumple que existe $f'(t,s)$.

Si cada intervalo considerado se define por $[T_{i-1} - t, T_i - t]$ y la tasa de interés *forward instantáneas* para dicho intervalo es $f_i(t,T)$, la condición de que $f_i(t,T)$ puede verse como una función diferenciable sólo de $T \in [T_{i-1}, T_i]$ lleva a poder considerar que:

$$f_i(t,T) = f_i(T-t), \quad T \in [T_{i-1}, T_i] \tag{3.24}$$

La ecuación 3.24 muestra que los niveles de las tasas de interés *forward instantáneas* son sólo dependientes de $T \in [T_{i-1}, T_i], i = 1, 2, \ldots, N (T_0 = t)$.

La razón de cambio de las tasas de interés *forward instantáneas* en el intervalo $(T_{i-1} - t, T_i - t)$ es[24] :

$$f_i'(t,T) = f_i'(T-t) = \frac{\partial f_i(T-t)}{\partial T}, \quad T \in [T_{i-1}, T_i] \tag{3.25}$$

[24] No se consideran los puntos extremos debido a que son puntos comunes a los mercados adyacentes y no se ha impuesto ninguna condición de que los niveles de las tasas de interés *forward instantáneas* sean iguales en dichos puntos indistintamente del mercado que se tome. Esto implica que no se ha forzado continuidad global a priori, sólo se ha considerado continuidad local en cada mercado (supuesto (iii)).

Por otro lado, la razón de cambio global de las tasas de interés *forward instantáneas* definida por los mercados adyacentes puede verse como sigue:

A) Si se toma el promedio de las tasas de interés *forward instantáneas* en el mercado de cotización a plazo o intervalo adyacente a la izquierda: $[T_{i-2}-t, T_{i-1}-t]$ y el intervalo considerado: $[T_{i-1}-t, T_i-t]$, se obtiene:

$$\begin{aligned} F(t,T_{i-2},T_{i-1}) &= \frac{1}{(T_{i-1}-t)-(T_{i-2}-t)}\int_{T_{i-2}}^{T_{i-1}} f_{i-1}(s-t)\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{T_{i-1}-T_{i-2}}\int_{T_{i-2}}^{T_{i-1}} f_{i-1}(s-t)\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{3.26}$$

Donde $F(t,T_{i-2},T_{i-1})$ es la tasa de interés *forward* discreta para el intervalo $[T_{i-2}-t, T_{i-1}-t]$. El plazo promedio es $\frac{(T_{i-2}-t)+(T_{i-1}-t)}{2}$ en este caso[25].

Y

$$\begin{aligned} F(t,T_{i-1},T_i) &= \frac{1}{(T_i-t)-(T_{i-1}-t)}\int_{T_{i-1}}^{T_i} f_i(s-t)\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{T_i-T_{i-1}}\int_{T_{i-1}}^{T_i} f_i(s-t)\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{3.27}$$

Donde $F(t,T_{i-1},T_{i-1})$ es la tasa de interés *forward* discreta para el intervalo $[T_{i-1}-t, T_i-t]$. El plazo promedio es $\frac{(T_{i-1}-t)+(T_i-t)}{2}$

A partir de los resultados expresados en las ecuaciones 3.26 y 3.27, se puede obtener la razón de cambio o pendiente global de las tasas de interés forward instantáneas definida por el promedio de las tasas de interés forward instantáneas entre los mercados de cotización adyacente a la izquierda y el mercado considerado, que se denotará como θ_i^-:

$$\theta_i^- = \frac{F(t,T_{i-1},T_i)-F(t,T_{i-2},T_{i-1})}{\frac{(T_{i-1}-t)+(T_i-t)}{2}-\frac{(T_{i-2}-t)+(T_{i-1}-t)}{2}} = 2\frac{F(t,T_{i-1},T_i)-F(t,T_{i-2},T_{i-1})}{T_i-T_{i-2}} \tag{3.28}$$

B) Si se toma el promedio de las tasas de interés *forward instantáneas* en el mercado de cotización a plazo o intervalo adyacente a la derecha: $[T_i-t, T_{i+1}-t]$ y el intervalo considerado: $[T_{i-1}-t, T_i-t]$, se obtiene:

$$\begin{aligned} F(t,T_i,T_{i+1}) &= \frac{1}{(T_{i+1}-t)-(T_i-t)}\int_{T_i}^{T_{i+1}} f_{i+1}(s-t)\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{T_{i+1}-T_i}\int_{T_i}^{T_{i+1}} f_{i+1}(s-t)\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{3.29}$$

[25] Obsérvese aquí que debido a que $i=1,2,...,N(T_0=t)$, cuando $i=1$, el intervalo considerado $[T_0-t, T_1-t]$ es el primer mercado de cotización a plazo, por lo que no existe mercado adyacente a la izquierda. En este caso se supondrá que el intervalo $[T_{-1}-t, T_0-t]$ es de medida cero y que . En este caso, el plazo promedio es $\frac{(T_{-1}-t)+(T_0-t)}{2}=T_0-t$.

Donde $F(t, T_i, T_{i+1})$ es la tasa de interés *forward* discreta para el intervalo $[T_i - t, T_{i+1} - t]$. El plazo promedio es $\frac{(T_i-t)+(T_{i+1}-t)}{2}$ en este caso [26].

Utilizando la ecuación 3.27 previamente obtenida y la ecuación 3.29, se puede ahora obtener la razón de cambio o pendiente global de las tasas de interés *forward instantáneas* definida por el promedio de las tasas de interés *forward instantáneas* entre los mercados de cotización adyacente a la derecha y el mercado considerado, que se denotará como θ_i^+:

$$\theta_i^+ = \frac{F(t,T_i,T_{i+1}) - F(t,T_{i-1},T_i)}{\frac{(T_i-t)+(T_{i+1}-t)}{2} - \frac{(T_{i-1}-t)+(T_i-t)}{2}} = 2\frac{F(t,T_i,T_{i+1}) - F(t,T_{i-1},T_i)}{T_{i+1} - T_{i-1}} \tag{3.30}$$

Ahora bien, para que la razón de cambio de las interés *forward instantáneas* en cada mercado de cotización varíen siguiendo las razones de cambio global θ_i^- y θ_i^+ (supuesto (iii)), se debe definir una relación entre $f_i'(T-t)$ y θ_i^- y θ_i^+. En particular, si se considera una combinación lineal (y convexa) de θ_i^- y θ_i^+ se puede expresar esta relación como sigue:

$$f_i'(T-t) = \frac{\partial f_i(T-t)}{\partial T} = \alpha_i\theta_i^- + (1-\alpha_i)\theta_i^+, \quad T \in [T_{i-1}, T_i]$$

Con

$$\alpha_i = \frac{(T_i - t) - (T - t)}{(T_i - t) - (T_{i-1} - t)} = \frac{T_i - T}{T_i - T_{i-1}}. \tag{3.31}$$

Obsérvese que en la ecuación 3.31 $f_i'(T-t) = \theta_i^-$ cuando $T = T_{i-1}$ (aquí $\alpha_i = 1$), y $f_i'(T-t) = \theta_i^+$ cuando $T = T_i$ (aquí $\alpha_i = 0$). Esto muestra que no sólo $f_i'(T-t)$ está relacionada con θ_i^- y θ_i^+, sino que se tiene una relación de sustitución entre la razón de cambio de las tasas *forward instantáneas* del mercado considerado (definido en el intervalo $[T_{i-1} - t, T_i - t]$) con los mercados adyacentes. En general se tiene que en la medida en que $T \to T_{i-1}$, $f_i'(T-t)$ incorporará más a θ_i^- y menos a θ_i^+, mientras que en la medida en que $T \to T_i$, $f_i'(T-t)$ incorporará más a θ_i^+ y menos a θ_i^-. Obviamente, esto hará que los niveles de las tasas de interés *forward instantáneas* del mercado considerado incorporen (vía su razón de cambio) más la información del mercado adyacente más próximo, con lo cual se tiene una relación de sustitución entre ambos mercados (supuesto (iii)).

3.4.2 Desarrollo del Modelo

Se ha logrado construir conceptualmente un modelo de ajuste de la curva de rendimientos a través de tasas de interés *forward instantáneas* con tendencia variable y que sigue una relación de sustitución entre mercados adyacentes de cotización a plazo. Sin embargo, para que el modelo sea aplicable en la práctica, se quisiera saber alguna forma funcional de $f_i(T-t)$ compatible con el desarrollo conceptual. Por lo tanto, a continuación se deriva una forma funcional cerrada de $f_i(T-t)$ definida por las condiciones planteadas en la sección 3.4.1 y se verá que es única.

[26] Obsérvese aquí que debido a que $i = 1, 2, ..., N\,(T_0 = t)$, cuando $i = N$, el intervalo considerado $[T_{N-1} - t, T_N - t]$ es el último mercado de cotización a plazo, por lo que no existe mercado adyacente a la derecha. En este caso se supondrá que el intervalo $[T_N - t, T_{N+1} - t]$ es de medida cero y que $F(t, T_N, T_{N+1}) = F(t, T_{N-1}, T_N)$. En este caso, el plazo promedio es $\frac{(T_N-t)+(T_{N+1}-t)}{2} = T_N - t$.

Retomando la ecuación 3.31, se tiene que:

$$\frac{\partial f_i(T-t)}{\partial T} = \alpha_i\theta_i^- + (1-\alpha_i)\theta_i^+, \qquad \alpha_i = \frac{T_i - T}{T_i - T_{i-1}} \text{ y } T \in [T_{i-1}, T_i]$$

De donde, obteniendo la integral indefinida se tiene:

$$\int \mathrm{d}f_i(s-t) = \int \big(\alpha_i\theta_i^- + (1-\alpha_i)\theta_i^+\big)\mathrm{d}s, \qquad \alpha_i = \frac{T_i - s}{T_i - T_{i-1}} \text{ y } s \in [T_{i-1}, T_i]$$

O bien:

$$f_i(s-t) = \int \alpha_i\theta_i^- ds + \int (1-\alpha_i)\theta_i^+\mathrm{d}s, \qquad \alpha_i = \frac{T_i - s}{T_i - T_{i-1}} \text{ y } s \in [T_{i-1}, T_i] \tag{3.32}$$

Se observa que α_i depende de s en primer grado (es lineal en s); sin embargo, para poder resolver la integral indefinida del lado derecho en la ecuación 3.32, se requiere inspeccionar θ_i^- y θ_i^+ para saber si al final son una función de s o no. Para hacer esto debe recordarse que (ecuación 3.28 y ecuación 3.30):

$$\theta_i^- = 2\frac{F(t,T_{i-1},T_i) - F(t,T_{i-2},T_{i-1})}{T_i - T_{i-2}} \qquad \text{y} \qquad \theta_i^+ = 2\frac{F(t,T_i,T_{i+1}) - F(t,T_{i-1},T_i)}{T_{i+1} - T_{i-1}}$$

Con:

$$F(t,T_{j-1},T_j) = \frac{1}{T_j - T_{j-1}}\int_{T_{j-1}}^{T_j} f_j(s-t)\mathrm{d}s, \quad j = i-1, i, i+1, i = 1,2,...,N\,(T_0 = t)$$
$$F(t,T_{-1},T_0) = F(t,T_0,T_1) \text{ y } F(t,T_N,T_{N+1}) = F(t,T_{N-1},T_N), \text{ lo que implica } \theta_1^- = \theta_N^+ = 0 \tag{3.33}$$

Se observa que θ_i^- y θ_i^+ no dependen de s si las tasas forward discretas no dependen de s. Esto es cierto no sólo por su forma funcional implícita (que no contiene a s), sino porque al tiempo $s = t$ se conoce: $B(t,T_0) = B_0, B(t,T_1) = B_1, \ldots, B(t,T_N) = B_N$; para los plazos $T_0 - t < T_1 - t < \ldots < T_N - t$. Por lo tanto, la ecuación 3.22 dice que:

$$B(t,T_j) = e^{-\int_t^{T_j} f(t,s)\mathrm{d}s} \tag{3.34}$$

Pero como $f(t,s)$ depende de cada mercado de cotización a plazo en particular, tomando la forma $f_j(s-t)$ para $s \in [T_{j-1},T_j], j = 1,\ldots,N\,(T_0 = t)$, se tiene que:

$$B(t,T_j) = e^{-\int_{T_0}^{T_1} f_0(s-t)\mathrm{d}s} \cdot e^{-\int_{T_1}^{T_2} f_1(s-t)\mathrm{d}s} \cdots e^{-\int_{T_{j-2}}^{T_{j-1}} f_{j-1}(s-t)\mathrm{d}s} \cdot e^{-\int_{T_{j-1}}^{T_j} f_j(s-t)\mathrm{d}s} \tag{3.35}$$

Y

$$B(t,T_{j-1}) = e^{-\int_{T_0}^{T_1} f_0(s-t)\mathrm{d}s} \cdot e^{-\int_{T_1}^{T_2} f_1(s-t)\mathrm{d}s} \cdots e^{-\int_{T_{j-2}}^{T_{j-1}} f_{j-1}(s-t)\mathrm{d}s} \tag{3.35bis}$$

Dividiendo la ecuación 3.35 entre la ecuación 3.35bis, se tiene:

$$\frac{B(t,T_j)}{B(t,T_{j-1})} = e^{-\int_{T_{j-1}}^{T_j} f_j(s-t)\mathrm{d}s}, \quad s \in [T_{j-1},T_j], \text{ con } j = 1,2,...,N\,(T_0 = t) \tag{3.36}$$

La ecuación 3.36 también se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{B(t,T_j)}{B(t,T_{j-1})} = e^{-\left(\frac{1}{T_j-T_{j-1}}\int_{T_{j-1}}^{T_j} f_j(s-t)\mathrm{d}s\right)(T_j-T_{j-1})} = e^{-F(t,T_{j-1},T_j)(T_j-T_{j-1})} \tag{3.37}$$

En la ecuación 3.37 sólo se ha sustituido el resultado expresado en la ecuación 3.33 para mostrar que inmediatamente se desprende que:

$$F(t,T_{j-1},T_j) = -\frac{1}{T_j-T_{j-1}}\ln\frac{B(t,T_j)}{B(t,T_{j-1})}, \quad j=1,2,...,N(T_0=t) \tag{3.38}$$

Obsérvese que la expresión para $F(t,T_{j-1},T_j)$dada por la ecuación 3.38 es un número "conocido" bajo la definición *a priori* de $B(t,T_0)=B_0, B(t,T_1)=B_1,\dots,B(t,T_N)=B_N$; para los plazos $T_0-t<T_1-t<\dots<T_N-t$. De hecho el valor específico de $F(t,T_{j-1},T_j)$ es:

$$F(t,T_{j-1},T_j) = -\frac{1}{T_j-T_{j-1}}\ln\frac{B_j}{B_{j-1}} \tag{3.39}$$

La ecuación 3.39 provee la forma de obtener $F(t,T_{j-1},T_j), j=1,\dots,N$ la cual no depende del plazo. Debido a esto se sabe ahora que θ_1^- y θ_1^+ de la ecuación 3.32 no son una función de s . Más aún, de acuerdo al resultado de la ecuación 3.39, se pueden obtener los valores específicos de θ_1^- y θ_1^+ en función de los precios de los bonos cupón cero definidos *a priori*. De esta manera las ecuaciones 3.28 y 3.30 se convierten en:

$$\theta_i^- = -2\frac{\ln B_{i-2}}{(T_{i-1}-T_{i-2})(T_i-T_{i-2})} + 2\frac{\ln B_{i-1}}{(T_{i-1}-T_{i-2})(T_i-T_{i-1})} - 2\frac{\ln B_i}{(T_i-T_{i-2})(T_i-T_{i-1})} \tag{3.40}$$

Y de manera correspondiente:

$$\theta_i^+ = -2\frac{\ln B_{i-1}}{(T_i-T_{i-1})(T_{i+1}-T_{i-1})} + 2\frac{\ln B_i}{(T_i-T_{i-1})(T_{i+1}-T_i)} - 2\frac{\ln B_{i+1}}{(T_{i+1}-T_{i-1})(T_{i+1}-T_i)} \tag{3.41}$$

Obsérvese que en la ecuación 3.40 se tiene que $i=2,...,N(T_0=t)$, y $\theta_1^-=0$, mientras que en la ecuación 3.41 $i=2,...,N-1(T_0=t)$, y $\theta_N^+=0$, de acuerdo a las condiciones dadas en la ecuación 3.33.

Así, queda claro que $\theta_1^-=0$ y $\theta_1^+=0$ sólo dependen de los precios de los bonos cupón cero y no de s, por lo que la ecuación 3.32 se puede expresar como:

$$\begin{aligned} f_i(s-t) &= \int \alpha_i\theta_i^-\mathrm{d}s + \int (1-\alpha_i)\theta_i^+\mathrm{d}s \\ &= \left(\theta_i^- - \theta_i^+\right)\int \alpha_i\mathrm{d}s + \theta_i^+\int \mathrm{d}s, \end{aligned}$$

$$\alpha_i = \frac{T_i-s}{T_i-T_{i-1}} \quad \text{y} \quad s\in[T_{i-1},T_i]$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} f_i(s-t) &= \left(\theta_i^- - \theta_i^+\right)\int \frac{T_i-s}{T_i-T_{i-1}}\mathrm{d}s + \theta_i^+\int \mathrm{d}s \\ &= \left(\theta_i^- - \theta_i^+\right)\frac{T_is-s^2/2}{T_i-T_{i-1}} + \theta_i^+s + c_i \end{aligned}$$

Reagrupando términos:

$$\begin{aligned} f_i(s-t) &= \theta_i^- \left(\frac{T_i s - s^2/2}{T_i - T_{i-1}} \right) - \theta_i^+ \left(\frac{T_i s - s^2/2}{T_i - T_{i-1}} - s \right) + c_i \\ &= \theta_i^- \left(\frac{T_i s - s^2/2}{T_i - T_{i-1}} \right) - \theta_i^+ \left(\frac{T_{i-1} s - s^2/2}{T_i - T_{i-1}} \right) + c_i \end{aligned}$$

O bien:

$$f_i(s-t) = \frac{1}{T_i - T_{i-1}} \left[\left(T_i \theta_i^- - T_{i-1} \theta_i^+ \right) s - \frac{\left(\theta_i^- - \theta_i^+ \right)}{2} s^2 \right] + c_i \tag{3.42}$$

Donde c_i es una constante de integración debido a que se obtuvo la integral indefinida.

Para poder tener una notación más compacta del modelo se definen:

$$a_i = -\frac{1}{T_i - T_{i-1}} \frac{\left(\theta_i^- - \theta_i^+ \right)}{2} \quad \text{y} \quad b_i = \frac{1}{T_i - T_{i-1}} \left(T_i \theta_i^- - T_{i-1} \theta_i^+ \right)$$

Entonces se tiene que:

$$f_i(s-t) = a_i s^2 + b_i s + c_i, \qquad s \in [T_{i-1}, T_i], \quad \text{con} \quad i = 1, 2, ..., N(T_0 = t) \tag{3.43}$$

Claramente se observa que se ha obtenido una expresión de $f_i(s-t), s \in [T_{i-1}, T_i]$, de segundo grado o cuadrática en s. Este resultado era de esperarse debido a que $f_i'(s-t)$ dada por la ecuación 3.31 es de primer grado o lineal en s bajo el hecho de que α_i depende de s en primer grado y θ_i^- y θ_i^+ no dependen en absoluto de s.

El único parámetro desconocido de la ecuación 3.41 es la constante c_i. Sin embargo, por condición de equilibrio de mercado, se tiene que cumplir (ecuación 3.36) que:

$$\begin{aligned} &\frac{B(t, T_i)}{B(t, T_{i-1})} = e^{-\int_{T_{i-1}}^{T_i} f_i(s-t) \mathrm{d}s} = e^{-F(t, T_{j-1}, T_j)(T_j - T_{j-1})}, \quad s \in [T_{i-1}, T_i] \\ &\quad \text{con} \quad i = 1, 2, ..., N(T_0 = t) \end{aligned} \tag{3.37bis}$$

Por lo tanto, sustituyendo la ecuación 3.43 en la integral de la ecuación 3.37bis se tiene:

$$\int_{T_{i-1}}^{T_i} f_i(s-t) \mathrm{d}s = \int_{T_{i-1}}^{T_i} \left(a_i s^2 + b_i s + c_i \right) \mathrm{d}s$$

Por lo que:

$$\int_{T_{i-1}}^{T_i} f_i(s-t) \mathrm{d}s = a_i \frac{T_i^3 - T_{i-1}^3}{3} + b_i \frac{T_i^2 - T_{i-1}^2}{2} + c_i \left(T_i - T_{i-1} \right)$$

O bien:

$$\frac{1}{T_i - T_{i-1}} \int_{T_{i-1}}^{T_i} f_i(s-t) \mathrm{d}s = \frac{1}{3} a_i \left(T_i^2 + T_i T_{i-1} + T_{i-1}^2 \right) + \frac{1}{2} b_i \left(T_i + T_{i-1} \right) + c_i$$

Pero como $F(t, T_{i-1}, T_i) = \frac{1}{T_i - T_{i-1}} \int_{T_{i-1}}^{T_i} f_i(s-t) \mathrm{d}s$, entonces:

$$c_i = F(t, T_{i-1}, T_i) - \frac{1}{3} a_i \left(T_i^2 + T_i T_{i-1} + T_{i-1}^2 \right) - \frac{1}{2} b_i \left(T_i + T_{i-1} \right) \tag{3.44}$$

La ecuación 3.44 permite obtener el valor de c_i requerido para la ecuación 3.43 (¡ y el modelo está completo!).

3.5 La Curva de Rendimientos

Si se reconsidera la expresión dada por la ecuación 3.36, se tiene que:

$$B(t,T_j) = B(t,T_{j-1})e^{-\int_{T_{j-1}}^{T_j} f_j(s-t)\mathrm{d}s}, \quad s \in [T_{j-1},T_j] \text{ con } j=1,2,\ldots,N(T_0=t)$$

Ahora bien, recordando que de manera general (ecuación 3.22):

$$B(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s)\mathrm{d}s}$$

Para el plazo $T \in [T_{j-1},T_j]$ se desprende inmediatamente que:

$$B(t,T) = B(t,T_{j-1})e^{-\int_{T_{j-1}}^{T} f_j(s-t)\mathrm{d}s}, \quad s,T \in [T_{j-1},T_j] \text{ con } j=1,2,\ldots,N(T_0=t) \tag{3.45}$$

La ecuación 3.45 permite obtener el precio del bono cupón cero a partir de las tasas de interés *forward instantáneas*. Esta ecuación es muy práctica pues se puede utilizar para cualquier plazo, sólo hay que determinar el mercado de cotización a plazo en el que se encuentra el plazo T considerado para obtener el correspondiente precio del bono cupón cero. Nótese que los insumos son el precio del bono cupón cero del extremo derecho del intervalo en el que se encuentra el mercado de cotización a plazo adyacente a la izquierda y la expresión de la tasas de interés *Forward Instantánea* del mercado de cotización a plazo donde se encuentre el plazo T.

Aplicando la forma funcional del modelo derivado en la sección 3.4 (ecuación 3.43) a la ecuación 3.45 se obtiene:

$$B(t,T) = B(t,T_{j-1})e^{-\int_{T_{j-1}}^{T} \left(a_j s^2 + b_j s + c_j\right)\mathrm{d}s}, \quad s,T \in [T_{j-1},T_j] \text{ con } j=1,2,\ldots,N(T_0=t)$$

O bien:

$$\begin{aligned} B(t,T) = B(t,T_{j-1})e^{-\frac{1}{3}a_j\left(T^3-T_{j-1}^3\right)-\frac{1}{2}b_j\left(T^2-T_{j-1}^2\right)-c_j(T-T_{j-1})}, \quad T \in [T_{j-1},T_j] \\ \text{con } j=1,2,...,N(T_0=t) \end{aligned} \tag{3.46}$$

3.5.1 Obtención de la Tasa de Interés (Cupón Cero) Continuamente Capitalizable

A partir de la obtención del bono cupón cero $B(t,T)$, se puede invertir la ecuación 3.12 para encontrar la tasa de interés continuamente capitalizable a cualquier plazo $t \leq T$ como sigue:

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln B(t,T), \quad t \leq T \tag{3.47}$$

La ecuación 3.47 permite obtener la curva de rendimientos a cualquier plazo, en términos de tasas de interés continuamente capitalizables, a partir del correspondiente precio del bono cupón cero o factor de descuento.

De manera particular para el modelo derivado en la sección 3.4, la ecuación 3.47 se convierte en:

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\left\{-\ln B(t,T_{j-1}) + \frac{1}{3}a_j\left(T^3 - T_{j-1}^3\right) + \frac{1}{2}b_j\left(T^2 - T_{j-1}^2\right) + c_j\left(T - T_{j-1}\right)\right\} \quad (3.48)$$

3.5.2 Obtención de la Tasa de Interés (Cupón Cero) con Composición a 28 Días

De igual manera que en la sección 3.5.1, para encontrar la tasa de interés con composición a 28 días (compatible con la TIIE a 28 días) a cualquier plazo $t \leq T$ a partir de la obtención del bono cupón cero $B(t,T)$, se puede invertir la ecuación 3.10 con $m = 28/Basis$ (se debe recordar que m tiene que estar en años financieros, los cuales contienen *Basis* días -ver nota al pie de página número 4 de este capítulo). De esta manera se tiene:

$$Y_{28}(t,T) = \left[B(t,T)^{-\frac{28/Basis}{T-t}} - 1\right]\frac{Basis}{28} \quad (3.49)$$

La ecuación 3.49 permite obtener la curva de rendimientos a cualquier plazo, en términos de tasas de interés con composición a 28 días, a partir del correspondiente precio del bono cupón cero o factor de descuento.

3.5.3 Obtención de la Tasa de Interés (Cupón Cero) de Composición Simple

La obtención de la tasa de interés simple, a partir de la obtención del bono cupón cero $B(t,T)$, se obtiene invirtiendo la ecuación 3.6 ó aplicando directamente la ecuación 3.7. Así se tiene que:

$$L(t,T) = \frac{1}{T-t}\left[\frac{1}{B(t,T)} - 1\right] \quad (3.50)$$

La ecuación 3.50 permite obtener da la curva de rendimientos a cualquier plazo, en términos de tasas de interés simple, a partir del correspondiente precio del bono cupón cero o factor de descuento. Esta es la forma en que localmente en México se provee dicha curva por parte de los Proveedores de Precios (ver sección V.1.1, principalmente sus notas al pie de página).

3.6 Modelos Alternativos más Simples

En esta sección se desarrollan dos modelos alternativos más simples al modelo desarrollado en la sección 3.4. El primero de ellos resulta de tomar constante la tendencia de las tasas de interés *forward instantáneas* (dada por la ecuación 3.31) y el segundo resulta de hacer cero dicha tendencia. Como podrá verse, el primer modelo arroja una expresión para $f_i(s-t), s \in [T_{i-1}, T_i]$, con $i = 1, 2, ..., N(T_0 = t)$, lineal en s, mientras que el segundo arroja el modelo comúnmente utilizado en la práctica (modelo de *Street Convention*) donde las tasas de interés *forward instantáneas* son constantes en cada mercado de cotización a plazo ($f_i(s-t) = \overline{f_i}$).

Obviamente estos modelos alternativos tienen en la consideración de que la tendencia de las tasas de interés *forward instantáneas* es constante o cero, respectivamente una simplificación y los supuestos planteados en la sección 3.4.1 no se cumplen del todo. De manera general, los dos modelos alternativos que se desarrollarán son más pobres que el desarrollado en la sección 3.4, siendo el más pobre de los dos el que considera que la tendencia de las tasas de interés *forward instantáneas* es cero.

En particular para el modelo que considera que la tendencia de las tasas de interés *forward instantáneas* es constante, no se cumple el supuesto (v) planteado en la sección 3.4.1 y por tanto no puede considerarse que exista una relación de sustitución explícita entre mercados adyacentes como la planteada en el modelo desarrollado en la sección 3.4.2.

Por otro lado, el modelo que considera que la tendencia de las tasas de interés forward instantáneas es nula, no cumple con los supuestos (iii) ni (v) planteados en la sección 3.4.1, por lo que adolece de los mismos problemas que el primer modelo alternativo descrito en cuanto a la relación de sustitución entre mercados, y además no considera en absoluto que las tasas de interés *forward instantáneas* en cada mercado de cotización a plazo tengan que ver con las razones de cambio global definidas por el promedio de las tasas de interés *forward instantáneas* en los mercados de cotización adyacentes y el mercado considerado.

3.6.1 Modelo de Ajuste de la Curva de Rendimientos a Través de Tasas de Interés Forward Instantáneas con Tendencia Constante

Para el desarrollo de este modelo se considera la expresión de la tendencia de las tasas de interés forward instantáneas dada por la ecuación 3.31:

$$\frac{\partial f_i(T-t)}{\partial T} = \alpha_i\theta_i^- + (1-\alpha_i)\theta_i^+, \qquad \alpha_i = \frac{T_i - T}{T_i - T_{i-1}} \;\text{ y }\; T \in [T_{i-1}, T_i]$$

Una forma de hacer constante la expresión anterior para todo $T \in [T_{i-1}, T_i]$ sin perder la información dada por θ_i^- y θ_i^+, ni sesgarse a considerar que θ_i^- tiene más influencia que θ_i^+ o viceversa, es tomar para T el punto medio del intervalo $T \in [T_{i-1}, T_i]$. De esta manera se tiene:

$$T = \frac{T_{i-1} + T_i}{2}, \;\text{ con lo que }\; \alpha_i = \frac{T_i - \frac{T_{i-1}+T_i}{2}}{T_i - T_{i-1}} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial f_i(T-t)}{\partial T} = \frac{1}{2}\left(\theta_i^- + \theta_i^+\right), \quad T \in [T_{i-1}, T_i] \tag{3.51}$$

Nótese que la ecuación 3.51 considera que f_i' es el promedio (simple) de θ_i^- y θ_i^+ .

La ecuación 3.51 muestra que la razón de cambio o tendencia de las tasas de interés *forward instantáneas* es constante (recordar que se ha mostrado –ecuaciones 3.40 y 3.41– que θ_i^- y θ_i^+ no dependen de s). De esta manera, sustituyendo la ecuación 3.51 en la 3.32 se tiene:

$$f_i(s-t) = \int \left(\alpha_i\theta_i^- + (1-\alpha_i)\theta_i^+\right) \mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left(\theta_i^- + \theta_i^+\right)\int \mathrm{d}s, \qquad s \in [T_{i-1}, T_i]$$

De donde, obteniendo la integral indefinida se tiene:

$$f_i(s-t) = \frac{1}{2}\left(\theta_i^- + \theta_i^+\right)s + \widetilde{c}_i, \quad s \in [T_{i-1}, T_i]$$

Definiendo ahora:

$$\widetilde{b}_i = \frac{1}{2}\left(\theta_i^- + \theta_i^+\right).$$

Entonces se tiene que:

$$f_i(s-t) = \widetilde{b}_i s + \widetilde{c}_i, \qquad s \in [T_{i-1}, T_i], \text{ con } i = 1, 2, ..., N(T_0 = t) \tag{3.52}$$

En este caso se ha obtenido una expresión de $f_i(s-t)$, $s \in [T_{i-1}, T_i]$, lineal en s debido a la consideración de $f_i'(s-t)$ constante.

Nótese que se ha colocado un tilde a los parámetros del modelo alternativo de las tasas de interés forward instantáneas dado por la ecuación 3.51 para evitar confusiones con los parámetros del modelo desarrollado en la sección 3.4 (los cuales son diferentes).

De igual manera que se hizo en la sección 3.2, la constante $\widetilde{c}_i$ proveniente de la integral indefinida se obtiene considerando la condición de equilibrio de mercado dada por la ecuación 3.36:

$$\frac{B(t,T_i)}{B(t,T_{i-1})} = e^{-\int_{T_{i-1}}^{T_i} f_i(s-t)\mathrm{d}s}, \quad s \in [T_{i-1}, T_i], \text{ con } i = 1, 2, ..., N(T_0 = t)$$

Donde:

$$\int_{T_{i-1}}^{T_i} f_i(s-t)\mathrm{d}s = \int_{T_{i-1}}^{T_i} \left(\widetilde{b}_i s + \widetilde{c}_i\right)\mathrm{d}s$$

Por lo que:

$$\int_{T_{i-1}}^{T_i} f_i(s-t)\mathrm{d}s = \widetilde{b}_i \frac{T_i^2 - T_{i-1}^2}{2} + \widetilde{c}_i\left(T_i - T_{i-1}\right)$$

O bien:

$$\frac{1}{T_i - T_{i-1}} \int_{T_{i-1}}^{T_i} f_i(s-t)\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\widetilde{b}_i\left(T_i + T_{i-1}\right) + \widetilde{c}_i$$

Pero como $F(t, T_{i-1}, T_i) = \frac{1}{T_i - T_{i-1}} \int_{T_{i-1}}^{T_i} f_i(s-t)\mathrm{d}s$, entonces:

$$\widetilde{c}_i = F(t, T_{i-1}, T_i) - \frac{1}{2}\widetilde{b}_i\left(T_i + T_{i-1}\right) \tag{3.53}$$

La ecuación 3.53 permite obtener el valor de c_i requerido para la ecuación 3.52 con lo que el modelo alternativo que considera tendencia constante en las tasas de interés forward instantáneas está completo.

Los precios de los bonos cupón cero son:

$$B(t,T) = B(t, T_{j-1})e^{-\int_{T_{j-1}}^{T}\left(\widetilde{b}_j s + \widetilde{c}_j\right)\mathrm{d}s}, \qquad s, T \in [T_{j-1}, T_j], \text{ con } j = 1, 2, ..., N(T_0 = t)$$

O bien:

$$B(t,T) = B(t, T_{j-1})e^{-\frac{1}{2}\widetilde{b}_j\left(T^2 - T_{j-1}^2\right) - \widetilde{c}_j\left(T - T_{j-1}\right)}, T \in [T_{j-1}, T_j], \quad j = 1, 2, ..., N(T_0 = t) \tag{3.54}$$

Las tasas de interés (cupón cero) continuamente capitalizables, las tasas de interés (cupón cero) con composición a 28 días y las tasas de interés (cupón cero) de composición simple están dadas, respectivamente, por las ecuaciones 3.47, 3.49 y 3.50.

3.6.2 Modelo de Ajuste de la Curva de Rendimientos a Través de Tasas de Interés Forward instantáneas Constantes o con Tendencia Nula

Para el desarrollo de este modelo se considera que la tendencia de las tasas de interés *forward instantáneas* dada por la ecuación 3.31 es nula:

$$\frac{\partial f_i(T-t)}{\partial T} = 0$$

De esta manera, la ecuación 3.32 implica directamente, a través de la obtención de la integral indefinida, que:

$$f_i(s-t) = \int 0 \mathrm{d}s = 0 + \overline{f_i}, \qquad s \in [T_{i-1}, T_i] \tag{3.55}$$

La variable $\overline{f_i}$ de la ecuación 3.55 tiene el propósito de expresar la constante de integración que resulta de la obtención de la integral indefinida a la vez de diferenciar del parámetro $\widetilde{c_i}$ del modelo alternativo desarrollado anteriormente y del parámetro $\widetilde{c_i}$ del modelo desarrollado en la sección 3.4. Se eligió $\overline{f_i}$ para representar el hecho de que la consideración de que la tendencia de las tasas de interés *forward instantáneas* es nula, implica que dichas tasas son constantes en cada mercado de cotización a plazo definido por el intervalo .

En este modelo, la condición de equilibrio (ecuación 3.36) permite mostrar directamente que:

$$\int_{T_{i-1}}^{T_i} f_i(s-t)\mathrm{d}s = \int_{T_{i-1}}^{T_i} \overline{f_i}\mathrm{d}s = \overline{f_i}\int_{T_{i-1}}^{T_i} \mathrm{d}s = \overline{f_i}(T_i - T_{i-1})$$

Pero como $F(t, T_{i-1}, T_i) = \frac{1}{T_i - T_{i-1}} \int_{T_{i-1}}^{T_i} f_i(s-t)\mathrm{d}s$, entonces:

$$\overline{f_i} = F(t, T_{i-1}, T_i) \tag{3.56}$$

Sustituyendo el hecho dado por la ecuación 3.56 en la ecuación 3.55 y considerando la ecuación 3.39 se tiene que:

$$f_i(s-t) = F(t, T_{i-1}, T_i) = -\frac{1}{T_i - T_{i-1}} \ln \frac{B_i}{B_{i-1}}, \qquad s \in [T_{i-1}, T_i] \tag{3.57}$$

La ecuación 3.56 indica que las tasas de interés *forward instantáneas* en cada mercado de cotización a plazo, definido por $s \in [T_{i-1}, T_i]$, son constantes.

Los precios de los bonos cupón cero son:

$$B(t,T) = B(t, T_{j-1})e^{-\int_{T_{j-1}}^{T} \overline{f_i}\mathrm{d}s}, \qquad s, T \in [T_{j-1}, T_j], \quad \text{con} \quad j = 1, 2, ..., N(T_0 = t)$$

O bien:

$$B(t,T) = B(t, T_{j-1})e^{-\overline{f_j}(T - T_{j-1})}, \qquad T \in [T_{j-1}, T_j], \quad \text{con} \quad j = 1, 2, ..., N(T_0 = t) \tag{3.58}$$

Igual que en el modelo simple anterior, las tasas de interés (cupón cero) continuamente capitalizables, las tasas de interés (cupón cero) con composición a 28 días y las tasas de interés (cupón cero) de composición simple están dadas, respectivamente, por las ecuaciones 3.47, 3.49 y 3.50.

Finalmente, en este modelo simple se puede obtener una expresión explícita para la ecuación 3.58 al utilizar el resultado de la ecuación 3.57 y el hecho que $B(t, T_{j-1}) = B_{j-1}$:

$$
\begin{aligned}
B(t,T) &= B_{j-1} e^{\frac{1}{T_j - T_{j-1}} \ln \frac{B_j}{B_{j-1}} (T - T_{j-1})} \\
&= B_{j-1} \left[e^{\ln \frac{B_j}{B_{j-1}}} \right]^{\frac{T-T_{j-1}}{T_j - T_{j-1}}} \\
&= B_{j-1} \left[\frac{B_j}{B_{j-1}} \right]^{\frac{T-T_{j-1}}{T_j - T_{j-1}}} \\
&= B_{j-1}^{\frac{T_j - T}{T_j - T_{j-1}}} B_j^{\frac{T-T_{j-1}}{T_j - T_{j-1}}}
\end{aligned}
$$

Lo cual se puede expresar como:

$$
B(t,T) = B_{j-1}^{\alpha_j} B_j^{1-\alpha_j}, \qquad T \in [T_{j-1}, T_j], j = 1, 2, ..., N(T_0 = t)
$$

Con

$$
\alpha_j = \frac{T_j - T}{T_j - T_{j-1}} \tag{3.59}
$$

La ecuación 3.59 define por si sola completamente el modelo de interés *forward instantáneas* con tendencia cero, comúnmente conocido como “modelo de tasas *forward* constantes[27]. Queda obvia la simplicidad de este modelo (definido en una sola ecuación) y quizás eso explique su uso tan común en la práctica aunque sus fundamentos conceptuales sean relativamente pobres comparados con los del modelo desarrollado en la sección 3.4.

[27] Otros nombres que se le dan a este modelo cuando se utiliza para interpolar precios de bonos cupón cero o factores de descuento (y consecuentemente las tasas de interés cupón cero de cualquier convención considerada) son: “método de interpolación *money market*”, “método de interpolación log-lineal”, “método de interpolación alambrada (interna)” y “método de interpolación exponencial (en los factores de descuento)”.

CAPÍTULO 4

EL MODELO EN UN CONJUNTO DE DATOS DE MERCADO: EL SISTEMA DE ECUACIONES DE MERCADO, EL MODELODE AJUSTE DE LAS TASAS DE INTERÉS FORWARD INSTANTÁNEAS Y ANÁLISIS DE SU EQUILIBRIO CONJUNTO

En este capítulo se muestra que el modelo de ajuste continuo de la estructura de plazos de las tasas de interés está compuesto de: (i) el sistema de ecuaciones de mercado (dado por los datos de mercado) y (ii) las ecuaciones para ajustar la tasas de interés forward instantáneas derivadas bajo cualquiera de los enfoques desarrollados en el capítulo III. Obviamente, el interés del presente trabajo de tesis es probar el modelo de la sección 3.4 del Capítulo III, pues los otros modelos (derivados en la sección 3.6 del Capítulo III) se presentaron como casos particulares (modelos más simples) de dicho modelo. Sin embargo, se desarrollan todos los casos de manera particular para preparar la aplicación al mercado de *Swaps* de TIIE que se realiza en el Capítulo VI.

Un aspecto importante de este Capítulo es el análisis de la existencia del equilibrio de los modelos de ajuste continuo de la estructura de plazos de las tasas de interés desarrollados en el capítulo III, cuando dichos modelos se aplican a cierto conjunto de datos de mercado. En la sección IV.3 se presenta el análisis del *sistema de ecuaciones de mercado determinado*[28] y en la sección IV.4 se presenta el caso del *sistema de ecuaciones de mercado subdeterminado*[29]. Para la revisión del equilibrio del modelo de ajuste de la curva de rendimientos, se utilizarán los resultados matemáticos de solución de modelos, sistemas de ecuaciones, equilibrio y convergencia ya demostrados en la teoría, recapitulando su demostración en el anexo IV.1.

Es importante mencionar que no se analiza el caso en el que se tengan más cotizaciones de mercado que factores de descuento a determinar (*sistema de ecuaciones de mercado sobredeterminado* donde se tienen N factores de descuento a determinar y $M > N$ ecuaciones de equilibrio de mercado), situación que sólo puede ocurrir cuando se conjuntan dos o más mercados para dar

[28] Se verá que en el caso en el que el sistema de ecuaciones de mercado está determinado, el equilibrio del modelo siempre existe y es único, pues se cumplen todos los supuestos del modelo y los precios de los bonos cupón cero necesarios para el ajuste del modelo no solo se pueden definir, sino se conocen *a priori* (ver supuesto (ii) de la especificación del modelo en la sección IV.4.1). Aquí diremos que el modelo es **exógeno** al *bootstrapping*.

[29] Se verá que, los precios de los bonos cupón cero necesarios para el ajuste del modelo solo se pueden definir, pero no se conocen *a priori*, lo cual hará que se requiriera de técnicas de análisis numérico para la solución del modelo completo, lo cual se facilita si se puede derivar un sistema de ecuaciones del tipo punto fijo donde $f(x) = x$.

origen a una sola curva de rendimientos (por ejemplo combinando el mercado de futuros de la TIIE a 28 días –mercado reconocido de MexDer– y el mercado de los *Swaps* de TIIE a 28 días –mercado no reconocido o *Over The Counter*: OTC–), pues cundo esto sucede es opinión del autor que siempre es posible: i) determinar por separado cada curva de rendimientos, o si no existe suficiente liquidez en cada mercado para hacer esto, optar por ii) determinar qué mercado es el "líder" y tomar sus cotizaciones para realizar el *bootstrapping*, cuando se tenga que cada mercado que se está combinando da una cotización a un plazo específico[30].

4.1 El Sistema de Ecuaciones de Mercado

En esta sección presentamos la forma de derivar el sistema de ecuaciones de mercado, el cual se base en las condiciones de equilibrio de mercado (como se representaron en la Gráfica 3.1 del capítulo III). Este sistema de ecuaciones de mercado representa un subconjunto de las ecuaciones del modelo completo de ajuste continuo de la estructura de plazos de las tasas de interés. Dichas ecuaciones más las ecuaciones de cualquiera de los modelos desarrollados en el Capítulo III para el ajuste de las tasas de interés forward instantáneas, hacen el modelo completo.

La derivación del sistema de ecuaciones de mercado se hace de manera general, mostrando que el enfoque presentado puede aplicarse a cualquier mercado financiero donde la variable importante sea la tasa de interés (como el mercado de bonos, mercado de dinero, mercado de futuros de tasa de interés, mercado de *swaps* de tasa de interés, etc.).

Se inspeccionan el caso en el que el conjunto de datos de mercado puede incluir cotizaciones en todos los plazos donde se requiera obtener el precio del bono cupón cero como insumo para el ajuste de las tasas de interés forward instantáneas. Aquí, se muestra que el sistema de ecuaciones de mercado es suficiente para la solución del conjunto discreto de factores de descuento en cada plazo de cotización (*sistema de ecuaciones de mercado determinado* donde se tienen factores de descuento a determinar y $M = N$ ecuaciones de equilibrio de mercado). De esta manera, el modelo de tasas *forward* instantáneas se aplica "exógenamente" para determinar la estructura continua de plazos de las tasas de interés.

También se analiza el caso en el que el conjunto de datos de mercado sólo proporciona condiciones para derivar el sistema de ecuaciones de mercado en plazos de cotización estándar, dejando

[30] Es verdad que en cierto periodo de tiempo por lo general se observan para un mismo plazo diversas cotizaciones para cierto instrumento financiero; no obstante, se entiende que la curva de rendimientos se quiere para un momento específico en el tiempo, intradía inclusive (aunque por lo general se utilizan los niveles de cotización de cierre de día), donde las cotizaciones de equilibrio son únicas, Si se quiere valuar "en línea" o intradía; obviamente se deben tener sistemas que provean la información de las cotizaciones en línea (¡y el modelo de ajuste debe estar implementado también en línea!). Si los sistemas de información no son tan avanzados para mostrar las cotizaciones o "hechos de mercado" en línea, o se quiere ajustar una curva de rendimientos representativa de las cotizaciones observadas en cierto intervalo de tiempo, como considerar todas las operaciones del día (no sólo del cierre), se puede aplicar alguna técnica estadística o ponderación por volumen para determinar los niveles de cotización de equilibrio como los mostrados en la Gráfica 3.1 del capítulo III. Para una revisión del análisis que debe hacerse si se quiere incorporar diversas cotizaciones para un mismo instrumento, observadas en cierto periodo de tiempo, ver Fabozzi (1998), capítulo 2.

varios factores de descuento sin cotización de mercado en su plazo. Se muestra que se requieren ecuaciones adicionales (ya que se tiene un *sistema de ecuaciones de mercado subdeterminado* donde se tienen N factores de descuento a determinar y $M < N$ ecuaciones de equilibrio de mercado) y que dichas ecuaciones adicionales se pueden obtener a través de considerar de manera "endógena" el propio modelo de ajuste de las tasas de interés forward instantáneas. Finalmente, bajo este caso se desarrolla una condición suficiente (que puede extenderse a cualquier modelo de *bootstrapping*) para asegurar la existencia del equilibrio del modelo, pero se menciona que no es sencillo asegurar unicidad de dicho equilibrio, aunque no se puede descartar (ver Burden y Faires (2002), página 57).

4.1.1 Las Cotizaciones de Mercado como Representativas del Valor Intrínseco de un Instrumento Financiero

Un instrumento financiero se cotiza a través de un nivel de cotización Q_{T_i} representativa de su valor intrínseco (para una explicación detallada de las convenciones de cotización del mercado de renta fija ver Fabozzi (2001))[31].

De manera general, si un mercado financiero de cierto tipo de instrumentos financieros con cotizaciones a los plazos $T_0 - t < T_1 - t < \ldots < T_N - t$ está completamente definido por sus cotizaciones, y cada cotización define el valor de cada instrumento financiero[32]; podemos denotar dicho valor (en unidades monetarias) como sigue:

$$V(t, T_n) = V_{T_n}(Q_{T_n}), \qquad 0 \leq n \leq N \tag{4.1}$$

La ecuación 4.1 es una expresión simplificada de la valuación de mercado de un instrumento financiero a partir de su cotización y comúnmente se le conoce como **modelo de valuación de mercado**. Desafortunadamente, esta ecuación sólo es válida para el propio instrumento del cual se conozca su cotización Q_{T_i}, donde Q_{T_i} casi nunca representa a los precios de los bonos cupón cero $B(t, T_0) = B_0, B(t, T_1) = B_1, \ldots, B(t, T_N) = B_{N_B}$, y por ende tampoco se puede inferir nada a partir de dicha ecuación que nos indique la forma o niveles de la estructura de plazos de las tasas de interés. No obstante, la ecuación 4.1 es útil para obtener la el valor (monetario) $V(t, T_n)$ de cualquier instrumento financiero, el cual será un dato indispensable para la derivación del sistema de ecuaciones de mercado.

[31] La variable Q_{T_i} puede ser el precio de mercado (bajo las convenciones estándares del mercado que se trate), una tasa interna de retorno (comúnmente conocidas como *Yield-to-Maturity*), una tasa de interés tipo cupón cero simple, una tasa de interés *forward* implícita en un índice, una sobretasa sobre cierto índice o tasa de referencia de mercado, etc. En el caso de que no se especifique nada al respecto, Q_{T_i} representará la tasa interna de retorno de los *Swaps* de TIIE a 28 días.

[32] Cualquier otra información adicional para la determinación del valor de cada instrumento financiero (como índices, niveles de tasas de cupón, u otras tasas o información de mercado referenciada) que se requiera, se omitirá, pues se considera que dicha información adicional representa variables exógenas o endógenas, sino valores "constantes". No obstante, el lector de este trabajo que quiera aplicar cualquier modelación aquí planteada, deberá estudiar y conocer a detalle las características, convenciones y forma de valuación de los instrumentos financieros que quiera analizar.

4.1.2 Valuación a través de los Precios de los Bonos Cupón Cero

La forma de obtener el sistema de ecuaciones de mercado que sirve de base para la obtención de la estructura de plazos de las tasas de interés es considerar los principios básicos de valor del dinero en el tiempo desarrollados en las primeras secciones del capítulo III.

En general, si tomamos $t = T_0$ la cotización Q_{T_0} no se requerirá (además comúnmente no existe en el mercado) ya que $B(t, T_0) = B(t, t) = 1$.

Ahora consideremos cualquier instrumento financiero con plazo de cotización $T_n - t$. Dicho instrumento financiero generará una serie de flujos de dinero $\{M_{n,T_i} > 0\}_{i=1}^{n}$ en el tiempo, hasta alcanzar su madurez en $s = T_n$; podemos escribir la siguiente ecuación:

$$V(t, T_n) = \sum_{i=1}^{n} B(t, T_i) M_{n,T_i} \tag{4.2}$$

La ecuación 4.2 tiene su parte izquierda conocida por la ecuación de mercado 4.1, mientras que su parte derecha no es más que el valor del dinero que se recibirá en el tiempo hasta alcanzar el plazo de madurez del instrumento. Esta ecuación es comúnmente conocida como **modelo de valuación teórico**. Esta connotación debe su nombre a que en realidad dicho modelo no puede aplicarse sino hasta que se conozcan los precios de los bonos cupón cero.

4.1.3 Derivación del Sistema de Ecuaciones de Mercado

La ecuación 4.2 es la base para la obtención de la estructura de plazos de las tasas de interés pues es una forma funcional cerrada a través de la cual se puede obtener el precio de los bonos cupón cero. Este hecho permite obtener el sistema de ecuaciones de mercado. En particular si se escribe la ecuación 4.2 en una forma matemática más estándar, tenemos:

$$F_{T_n}(B(t, T_1), ..., B(t, T_n)) = V(t, T_n) - \sum_{i=1}^{n} B(t, T_i) M_{n,T_i} = 0, \qquad 0 < n \leq N \tag{4.3}$$

La ecuación 4.3 representa a un solo instrumento de mercado con plazo de cotización $T_n - t$. Como las ecuaciones de mercado que queremos derivar deben ser generales y considerar el caso de un *sistema de ecuaciones de mercado determinado*, pero también el caso de un *sistema de ecuaciones de mercado subdeterminado*, no podemos suponer *a priori* que $n = 1, 2, ..., N$ (por eso se ha escrito $0 < n \leq N$). Supondremos que se tiene un conjunto de M cotizaciones con $\{Q_{T_n}\}_{0<n\leq N}$ $n = N_1, .., N_M (N_1 < N_2 < ... < N_M \leq N)$.

De acuerdo al supuesto (*ii*) de la especificación del modelo desarrollado en el Capítulo III (sección 3.1), se tiene que $\forall T_{N_k} - t$, $k = 1, 2, .., M$, $\exists\, T_i - t, i \in \{1, ..., N\}$, tal que $T_{N_k} - t = T_i - t$. Nótese además que si el ultimo plazo de cotización es $T_N - t$ (lo cual se asumirá de aquí en adelante), entonces $T_{N_M} - t = T_N - t$; es decir, el último precio del bono cupón cero $B(t, T_N) = B_N$ debe coincidir con el último plazo de cotización donde cae el último flujo del último instrumento financiero (de plazo más largo)[33].

[33] Esto no es más que la consideración de que la estructura de plazos de las tasas de interés se obtiene hasta el último plazo de cotización. En la práctica, esto siempre es así, aunque podría extrapolarse dicha estructura de plazos posteriormente a su obtención con algún supuesto (como dejar constante la última tasa de interés *forward* instantánea de composición continua).

Las ecuaciones de mercado se pueden escribir:

$$
\begin{aligned}
&F_{T_{N_1}}(B(t,T_1),...,B(t,T_{N_1})) = 0,\\
&F_{T_{N_2}}(B(t,T_1),...,B(t,T_{N_2})) = 0,\\
&\vdots\\
&F_{T_{N_M}}(B(t,T_1),...,B(t,T_{N_M})) = 0.
\end{aligned}
$$

Con:

$$F_{T_{N_k}}(B(t,T_1),...,B(t,T_{N_k})) = V(t,T_{N_k}) - \sum_{i=1}^{N_k} B(t,T_i)M_{N_k,T_i}, \quad k = 1,2,..,M \tag{4.4}$$

La ecuación 4.4 se puede escribir de manera más general como:

$$F_{T_{N_k}}(B(t,T_1),...,B(t,T_N)) = V(t,T_{N_k}) - \sum_{i=1}^{N} B(t,T_i)M_{N_k,T_i}, \quad k = 1,2,..,M \tag{4.4bis}$$

Donde: $M_{N_k,T_i} > 0$ para $i = 1,2,...,N_k$, y $M_{N_k,T_i} = 0$ para $i = N_k + 1, N_k + 2, ..., N$

Nótese que $N_M = N$ y además, debido a que $T_{N_M} - t = T_N - t$, cuando $k = M$, en la ecuación $F_{T_{N_M}}(\cdot) = F_{T_N}(\cdot)$ se requieren todos los precios de los bonos cupón cero -en dicha ecuación $M_{T_t} = 0$ no es aplicable para ningún i ($i = 1,2,...,N$). Esto nos lleva a que se requieran por fuerza los N precios de los bonos cupón cero: $B(t,T_0) = B_0, B(t,T_1) = B_1, \ldots, B(t,T_N) = B_{N_B}$ para poder valuar todos y cada uno de los instrumentos de mercado definidos por las cotizaciones $\{Q_{T_n}\}_{0<n\leq N}$ con $n = N_1,..,N_M(N_1 < N_2 < ... < N_M \leq N)$.

El sistema de ecuaciones que define la ecuación 4.4bis representa el sistema de ecuaciones de mercado. El cual de manera compacta se puede escribir:

$$F(\mathbf{B}) = \Big(F_{T_{N_1}}(\mathbf{B}),...,FT_{T_{N_M}}(\mathbf{B})\Big)^T, \text{donde} \quad \mathbf{B} = (\mathbf{B}(t,T_1),...,\mathbf{B}(t,T_N))^T \tag{4.5}$$

Obsérvese finalmente que el sistema de ecuaciones de mercado tiene N incógnitas y M ecuaciones. Si se tienen N precios de bonos cupón cero o factores de descuento a determinar y $M = N$ ecuaciones de equilibrio de mercado, el sistema será un *sistema de ecuaciones de mercado determinado.* Si se tienen N precios de bonos cupón cero o factores de descuento a determinar y $M < N$ ecuaciones de equilibrio de mercado, el sistema será un sistema de ecuaciones de mercado subdeterminado. Si se tienen N factores de descuento a determinar y $M < N$ ecuaciones de equilibrio de mercado, el sistema será un *sistema de ecuaciones de mercado sobredeterminado.* Debido a que un sistema sobredeterminado siempre se puede llevar a un sistema determinado (ver consideraciones al inicio del presente capitulo), los casos a analizar en las siguientes secciones serán: un *sistema de ecuaciones de mercado determinado y un sistema de ecuaciones de mercado subdeterminado.*

4.1.4 Prueba de Independencia de las Ecuaciones de Mercado

Es indispensable analizar que el sistema de ecuaciones mostrado en la ecuación 4.4 está compuesto de ecuaciones independientes. Esto puede parecer intuitivo a primera vista, pues cada ecuación se deriva de cotizaciones independientes y contiene un número de términos (y por lo tanto de bonos cupón cero) diferente que las demás, pero esto no es suficiente para afirmar que todas y cada una de las ecuaciones de mercado son independientes.

La prueba formal de que la ecuación 4.4 provee de ecuaciones independientes entre sí se puede realizar a través de una prueba de no redundancia de ecuaciones. En términos matemáticos esto significa que debemos probar que no es posible expresar alguna ecuación como una combinación lineal de las demás ecuaciones.

Para ver lo anterior, consideremos dos ecuaciones, una dada por $n = N_p$ y otra dada por $n = N_q$ con $T_{N_q} - t > T_{N_p} - t$. Esto implica tomar cualesquiera dos ecuaciones dada la condición de que todos los plazos de cotización son diferentes. La combinación lineal que se forma con estas dos ecuaciones se puede expresar como sigue.

Si:

$$F_{T_{N_r}}(\cdot) = \lambda F_{T_{N_p}}(\cdot) + (1-\lambda)F_{T_{N_q}}(\cdot), \qquad 0 < \lambda < 1$$

Entonces:

$$F_{T_{N_r}}(\cdot) = \lambda \left(V(t, T_{N_k}) - \sum_{i=1}^{N_p} B(t, T_i) M_{N_p, T_i} \right) + (1-\lambda) \left(V(t, T_{N_k}) - \sum_{i=1}^{N_q} B(t, T_i) M_{N_q, T_i} \right)$$

Con lo que:

$$\begin{aligned} F_{T_{N_r}}(\cdot) =& \lambda V(t, T_{N_k}) + (1-\lambda)V(t, T_{N_k}) - \sum_{i=1}^{N_q} B(t, T_i) \left(\lambda M_{N_p, T_i} + (1-\lambda) M_{N_q, T_i} \right) \\ & - \sum_{i=N_q+1}^{N_p} B(t, T_i) M_{N_p, T_i} \end{aligned}$$

Pudiendo escribirse:

$$F_{T_{N_r}}(\cdot) = F_{T_{N_r}}(B(t, T_1), ..., B(t, T_{N_p})) \tag{4.6}$$

La única ecuación definida por la ecuación 4.4 que podría ser expresada por la ecuación 4.6 debe depender exactamente de los bonos cupón cero $B(t, T_1), ..., B(t, T_{N_p})$. Tal ecuación es la expresada por la función $F_{T_{N_p}}(\cdot)$ y ninguna otra. Si ocurre que $F_{T_{N_p}}(\cdot) \neq F_{T_{N_r}}(\cdot)$, ya se ha probado que todas las ecuaciones son independientes (linealmente); en caso contrario, si $F_{T_{N_p}}(\cdot) = F_{T_{N_r}}(\cdot)$, todas las ecuaciones son independientes si $F_{T_{N_q}}(\cdot)$ provee información independiente a $F_{T_{N_p}}(\cdot)$, lo cual resulta evidente, pues es una ecuación que no depende (estrictamente) de $B(t, T_{N_q+1}), ..., B(t, T_{N_p})$, mientras que $F_{T_{N_p}}(\cdot)$ sí depende de tales factores de descuento. Por lo tanto podemos concluir que el sistema de ecuaciones dado por la ecuación 4.4 es un sistema de ecuaciones independientes (linealmente), ocurriendo que $F_{T_{N_p}}(\cdot) = F_{T_{N_r}}(\cdot)$ si y sólo si $\lambda = 1$. En otras palabras, la ecuación de valuación (teórica) de cada instrumento financiero en términos de los precios de los bonos cupón cero, aporta una ecuación independiente.

4.2 Una Definición de Bootstrapping de los Precios de los Bonos Cupón Cero

Es común que en vasta literatura donde se muestra la obtención de la estructura de plazos de las tasas de interés (ver por ejemplo Fabozzi (1998, 2000 y 2001) o Hull (2003)) se defina como *bootstrapping* de tasas de interés tipo cupón cero a la técnica de obtención de dichas tasas a partir de datos de mercado. Sin embargo, tal definición no es muy clara en cuanto a especificar si solamente con los datos de mercado puede obtenerse la estructura de plazos de las tasas de interés tipo cupón cero en forma continua (para cualquier plazo). En general, esto no es así. Por lo anterior, y para propósitos de la definición del modelo de ajuste continuo de la estructura de plazos, es importante dar una definición alternativa de *bootstrapping* de tasas de interés tipo cupón cero en términos de la frase equivalente "*bootstrapping* de los precios de los bonos cupón cero" (recordar que los bonos cupón cero implican cualquier tipo de tasa de interés tipo cupón cero, ver ecuaciones 3.47, 3.49 y 3.50 del Capítulo III).

Bootstrapping de los precios de los bonos cupón cero (definición): Es la obtención, a partir de los datos de mercado y modelos de ajuste o interpolación sobre las tasas de interés *forward*, tasas de interés cupón cero o precios de los bonos cupón cero, del conjunto discreto de bonos cupón cero $B(t, T_0) = B_0, \ldots, B(t, T_N) = B_N$ para los plazos $T_1 - t < \ldots < T_N - t$ (recordar que $B_0 = 1$), donde $T_1 - t < \ldots < T_N - t$ representan los plazos de cotización de mercado.

La definición anterior, supone que el *bootstrapping* de los precios de los bonos cupón cero sólo arrojará un conjunto discreto de precios de dichos bonos para los plazos de cotización del mercado. Por lo tanto, en general el *bootstrapping* por si sólo no puede definir en forma continua la estructura de plazos de las tasas de interés[34]. Por tanto, se requerirá un modelo de ajuste de la curva de rendimientos a través de tasas de interés *forward* instantáneas como los desarrollados en el capítulo III.

4.3 El Modelo Completo de Ajuste Continuo de la Estructura de Plazos de las Tasas de Interés en un Sistema de Ecuaciones de Mercado Determinado

En la sección 4.1 anterior se desarrolló el sistema de ecuaciones de mercado y se probó que sus ecuaciones son independientes entre sí. Sin embargo, dicho sistema de ecuaciones de mercado de manera general contiene N incógnitas y M ecuaciones (con $t = T_0$ que implica $B_0 = 1$). En particular, si se cumple que $M = N$, entonces se tiene que en la ecuación 4.3 $n = 1, 2, ..., N$ o equivalentemente $n \in \{N_1 = 1, N_2 = 2, .., N_M = N\}$, para la ecuación 4.4. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones de mercado está determinado.

De acuerdo a lo anterior, se cumple la primera condición necesaria de existencia planteada en el anexo IV.1 (sección AIV.1.1.1): **Número de Ecuaciones Independientes Igual a Número de Incógnitas**.

A continuación se desarrolla el modelo completo de ajuste continuo de la estructura de plazos de las tasas de interés para cada uno de los modelos de ajuste de las tasas de interés *forward*

[34] La cual es indispensable para la valuación (ver Fabozzi (2000), capítulo 5) ó para calibración de modelos dinámicos más complejos (consultar Brigo and Mercurio (2001)).

instantáneas desarrollados en el Capítulo III. Una vez expresadas las ecuaciones para cada caso, se demuestra la existencia y en su caso unicidad del equilibrio (que se entenderá como solución del conjunto de ecuaciones).

4.3.1 El Modelo con Tasas de Interés Forward Instantáneas con Tendencia Variable y que Sigue una Relación de Sustitución entre Mercados Adyacentes

En el caso de la existencia de un sistema de ecuaciones de mercado determinado, el ajuste continuo de la estructura de plazos de las tasas de interés utilizando el modelo de ajuste de tasas de interés forward instantáneas con tendencia variable y que sigue una relación de sustitución entre mercados adyacentes (desarrollado en la sección 3.4 del Capítulo III) está dado por el siguiente conjunto de ecuaciones:

Modelo 1

Sistema de Ecuaciones de Mercado (ecuaciones 4.4 y 4.5)

$$\mathbf{F}(\mathbf{B}) = \mathbf{0}$$

Con:

$$F(\mathbf{B}) = \left(F_{T_{N_1}}(\ \mathbf{B}), ..., FT_{T_{N_N}}(\ \mathbf{B})\right)^T, \quad \text{donde } \mathbf{B} = (B(t,T_1), ..., B(t,T_N))^T$$

$$F_{T_{N_k}}(B(t,T_1), ..., B(t,T_{N_k})) = V(t,T_{N_k}) - \sum_{i=1}^{N_k} B(t,T_i) M_{N_k,T_i}, \quad k = 1, \ldots, N$$

Ecuaciones de Ajuste de las Tasas de Interés Forward Instantáneas (ecuaciones 3.39, 3.40, 3.41, 3.43 y 3.44)

$$f_i(s-t) = a_i s^2 + b_i s + c_i, \quad s \in [T_{i-1}, T_i], \quad \text{con} \quad i = 1, 2, ..., N (T_0 = t)$$

Con:

$$\begin{aligned}
a_i &= -\frac{1}{T_i - T_{i-1}} \frac{\left(\theta_i^- - \theta_i^+\right)}{2} \\
b_i &= \frac{1}{T_i - T_{i-1}} \left(T_i \theta_i^- - T_{i-1} \theta_i^+\right) \\
c_i &= -\frac{\ln B_i - \ln B_{i-1}}{T_i - T_{i-1}} - \frac{1}{3} a_i \left(T_i^2 + T_i T_{i-1} + T_{i-1}^2\right) - \frac{1}{2} b_i \left(T_i + T_{i-1}\right)
\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\theta_i^- &= -2 \frac{\ln B_{i-2}}{(T_{i-1} - T_{i-2})(T_i - T_{i-2})} + 2 \frac{\ln B_{i-1}}{(T_{i-1} - T_{i-2})(T_i - T_{i-1})} - 2 \frac{\ln B_i}{(T_i - T_{i-2})(T_i - T_{i-1})} \\
\theta_i^+ &= -2 \frac{\ln B_{i-1}}{(T_i - T_{i-1})(T_{i+1} - T_{i-1})} + 2 \frac{\ln B_i}{(T_i - T_{i-1})(T_{i+1} - T_i)} - 2 \frac{\ln B_{i+1}}{(T_{i+1} - T_{i-1})(T_{i+1} - T_i)} \\
& i = 1, 2, ..., N (B_0 = 1) \ \text{ y } \ \theta_1^- = \theta_N^+ = 0
\end{aligned}$$

4.3.1.1 Existencia del Equilibrio del Modelo

En este caso, debido a que se tienen N ecuaciones de mercado independientes y N incógnitas (precios de bonos cupón cero), se puede encontrar el conjunto discreto de factores de descuento $B(t, T_0) = B_0, \ldots, B(t, T_N) = B_N$; para los plazos $T_1 - t < \ldots < T_N - t$ (recordar que $B_0 = 1$) sólo con el sistema de ecuaciones de mercado.

Matemáticamente existe un equilibrio del modelo definido en la sección V.3.1 si existe

$$\mathbf{B}^* = (B^*(t, T_1), ..., B^*(t, T_N))^T = (B_1^*, ..., B_N^*)^T$$

Tal que $\mathbf{F}(\mathbf{B}^*) = 0$

Para analizar la existencia de $\mathbf{B}^* = (B^*(t, T_1), ..., B^*(t, T_N))^T$ considérese que la ecuación 4.5 contiene funciones lineales en $\mathbf{B}$ (ver ecuación 4.4), por lo que se puede escribir como:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{V}$$

Con:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} M_{1,T_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ M_{2,T_1} & M_{2,T_2} & 0 & \cdots & 0 \\ M_{3,T_1} & M_{3,T_2} & M_{3,T_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{N,T_1} & M_{N,T_2} & M_{N,T_3} & \cdots & M_{N,T_N} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B(t, T_1) \\ B(t, T_2) \\ B(t, T_3) \\ \vdots \\ B(t, T_N) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} V(t, T_1) \\ V(t, T_2) \\ V(t, T_3) \\ \vdots \\ V(t, T_N) \end{pmatrix}$$

Debido a que todas las ecuaciones son independientes (demostrado en la sección 4.1.4), la matriz $\mathbf{A}$ es de rango completo y no singular, y por lo tanto existe $\mathbf{A}^{-1}$. En este caso $\mathbf{B}^* = (B^*(t, T_1), ..., B^*(t, T_N))^T$ se puede obtener como:

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}$$

Para probar la existencia del equilibrio del modelo de ajuste continuo de la estructura de plazos de las tasas de interés, obsérvese que dado $B^* = (B_1^*, ..., B_N^*)^T$, se pueden obtener inmediatamente el conjunto de parámetros $\{a_i, b_i, c_i\}_{i=1}^N$ que definen las ecuaciones de ajuste de las tasas de interés forward instantáneas y por lo tanto se puede obtener la estructura de plazos de las tasas de interés en forma continua con la ecuación 3.46:

$$B(t, T) = B(t, T_{i-1}) e^{-\frac{1}{3}a_i\left(T^3 - T_{i-1}^3\right) - \frac{1}{2}b_i\left(T^2 - T_{i-1}^2\right) - c_i(T - T_{i-1})}, \quad T \in [T_{i-1}, T_i]$$
$$\text{con} \quad i = 1, 2, ..., N (T_0 = t)$$

4.3.1.2 Unicidad del Equilibrio del Modelo

Debido a que el vector de precios $\mathbf{V}$ es único y diferente de cero, $\mathbf{B}$ es único y diferente de cero (nótese que $\mathbf{A}^{-1}$ no puede ser nula debido a que $\{M_{n,T_i} > 0\}_{i=1}^{n}, n = 1, 2, ..., N$). Por lo tanto la estructura de plazos de las tasas de interés en forma continua dada anteriormente es también única.

Finalmente, obsérvese que se realizó el *bootstrapping* del conjunto discreto de los precios de los bonos cupón cero (en los plazos de cotización) sólo con el sistema de ecuaciones de mercado, pero el ajuste continuo de la estructura de plazos de las tasas de interés requirió del modelo de ajuste de las tasas de interés *forward* instantáneas. Debido a esto, se puede decir que las ecuaciones de ajuste de las tasas de interés forward instantáneas son exógenas al *bootstrapping* y su valor agregado es el ajuste continuo de la estructura de plazos de las tasas de interés.

4.3.2 El Modelo con Tasas de Interés Forward Instantáneas con Tendencia Constante

El ajuste continuo de la estructura de plazos de las tasas de interés utilizando el modelo de ajuste de tasas de interés forward instantáneas con tendencia constante está dado por el siguiente conjunto de ecuaciones:

Modelo 2

Sistema de Ecuaciones de Mercado (ecuaciones 4.4 y 4.5)

$$\mathbf{F}(\mathbf{B}) = \mathbf{0}$$

Con:

$$F(\mathbf{B}) = \Big(F_{T_{N_1}}(\ \mathbf{B}), ..., FT_{T_{N_N}}(\ \mathbf{B})\Big)^T, \quad \text{donde } \mathbf{B} = (B(t,T_1), ..., B(t,T_N))^T$$

$$F_{T_{N_k}}(B(t,T_1), ..., B(t,T_{N_k})) = V(t,T_{N_k}) - \sum_{i=1}^{N_k} B(t,T_i) M_{N_k,T_i}, \quad k = 1, \ldots, N$$

Ecuaciones de Ajuste de las Tasas de Interés Forward Instantáneas (ecuaciones 3.39, 3.40, 3.41, 3.52 y 3.53)

$$f_i(s-t) = \widetilde{b}_i s + \widetilde{c}_i, s \in [T_{i-1}, T_i], \quad \text{con} \quad i = 1, 2, ..., N(T_0 = t)$$

Con:

$$\widetilde{b}_i = \frac{1}{2}\left(\theta_i^- + \theta_i^+\right)$$
$$\widetilde{c}_i = -\frac{\ln B_i - \ln B_{i-1}}{T_i - T_{i-1}} - \frac{1}{2}\widetilde{b}_i\left(T_i + T_{i-1}\right)$$

Donde:

$$\theta_i^- = -2\frac{\ln B_{i-2}}{(T_{i-1} - T_{i-2})(T_i - T_{i-2})} + 2\frac{\ln B_{i-1}}{(T_{i-1} - T_{i-2})(T_i - T_{i-1})} - 2\frac{\ln B_i}{(T_i - T_{i-2})(T_i - T_{i-1})}$$
$$\theta_i^+ = -2\frac{\ln B_{i-1}}{(T_i - T_{i-1})(T_{i+1} - T_{i-1})} + 2\frac{\ln B_i}{(T_i - T_{i-1})(T_{i+1} - T_i)} - 2\frac{\ln B_{i+1}}{(T_{i+1} - T_{i-1})(T_{i+1} - T_i)}$$
$$i = 1, 2, ..., N(B_0 = 1) \ \text{ y } \ \theta_1^- = \theta_N^+ = 0$$

4.3.2.1 Existencia del Equilibrio del Modelo

Como este modelo (desarrollado en la sección 3.6.1 del Capítulo III) es una variante del modelo anterior, el equilibrio siempre existe (la demostración es la misma desarrollada en la sección 4.3.1.1). Obsérvese que también en este caso dado $\mathbf{B}^* = \left(B_1^*, ..., B_N^*\right)^T$, se pueden obtener inmediatamente el conjunto de parámetros $\left\{\tilde{b}_i, \tilde{c}_i\right\}_{i=1}^{N}$ que definen las ecuaciones de ajuste de las tasas de interés forward instantáneas y por lo tanto se puede obtener la estructura de plazos de las tasas de interés en forma continua con la ecuación 3.54:

$$B(t,T) = B(t,T_{i-1})e^{-\frac{1}{2}\widetilde{b}_i\left(T^2-T_{i-1}^2\right)-\widetilde{c}_i(T-T_{i-1})}, \quad T \in [T_{i-1}, T_i], \quad i = 1, 2, ..., N(T_0 = t)$$

4.3.2.2 Unicidad del Equilibrio del Modelo

De la misma manera que el modelo anterior, si $\mathbf{V}$ es único y diferente de cero, $\mathbf{B}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}$ es único y diferente de cero. Por lo tanto la estructura de plazos de las tasas de interés en forma continua dada anteriormente es también única.

En este caso, también se realizó el *bootstrapping* del conjunto discreto de los precios de los bonos cupón cero (en los plazos de cotización) sólo con el sistema de ecuaciones de mercado, pero el ajuste continuo de la estructura de plazos de las tasas de interés requirió del modelo de ajuste de las tasas de interés forward instantáneas. Por tanto, nuevamente se puede decir que las ecuaciones de ajuste de las tasas de interés *forward instantáneas* son exógenas al *bootstrapping* y su valor agregado es el ajuste continuo de la estructura de plazos de las tasas de interés.

4.3.3 El Modelo con Tasas de Interés Forward Instantáneas con Tendencia Nula

El ajuste continuo de la estructura de plazos de las tasas de interés utilizando el modelo de ajuste de tasas de interés forward instantáneas con tendencia nula, que implica de interés *forward instantáneas* constantes, está dado por el siguiente conjunto de ecuaciones:

Modelo 3

Sistema de Ecuaciones de Mercado (ecuaciones 4.4 y 4.5)

$$\mathbf{F}(\mathbf{B}) = \mathbf{0}$$

Con:

$$F(\mathbf{B}) = \Big(F_{T_{N_1}}(\ \mathbf{B}), ..., FT_{T_{N_N}}(\ \mathbf{B})\Big)^T, \quad \text{donde } \mathbf{B} = (B(t,T_1), ..., B(t,T_N))^T$$

$$F_{T_{N_k}}(B(t,T_1), ..., B(t,T_{N_k})) = V(t,T_{N_k}) - \sum_{i=1}^{N_k} B(t,T_i)M_{N_k,T_i}, \quad k = 1, \ldots, N$$

Ecuaciones de Ajuste de las Tasas de Interés Forward Instantáneas (ecuaciones 3.39, 3.55 y 3.56)

$$f_i(s-t) = \overline{f_i}, \quad s \in [T_{i-1}, T_i], \quad \text{con} \quad i = 1, 2, ..., N(T_0 = t)$$

Con:

$$\overline{f_i} = -\frac{\ln B_i - \ln B_{i-1}}{T_i - T_{i-1}}, \qquad i = 1, 2, ..., N(B_0 = 1)$$

4.3.3.1 Existencia del Equilibrio del Modelo

Como este modelo (desarrollado en la sección 3.6.2 del Capítulo III) es un caso particular de cualquiera de los modelos anteriores (de hecho es el caso más simple de un modelo ajuste de las tasas de interés forward instantáneas), el equilibrio siempre existe (la demostración es la misma desarrollada en la sección V.3.1.1). Obsérvese que también en este caso dado $\mathbf{B}^* = \left(B_1^*, ..., B_N^*\right)^T$, se pueden obtener inmediatamente el conjunto de tasas de interés forward instantáneas $\left\{\overline{f_i}\right\}_{i=1}^N$ y por lo tanto se puede obtener a través de obtener $\overline{f_i}$ (ecuación 3.58) o en forma directa (ecuación 3.59 la estructura de plazos de las tasas de interés en forma continua:

$$B(t,T) = B_{i-1}e^{-\overline{f_i}(T-T_{i-1})} = B_{i-1}^{\alpha_i}B_i^{1-\alpha_i}, \quad T \in [T_{i-1}, T_i], \quad i = 1,2,...,N(T_0 = t)$$

Con:

$$\alpha_i = \frac{T_i - T}{T_i - T_{i-1}}.$$

4.3.3.2 Unicidad del Equilibrio del Modelo

De la misma manera que el modelo anterior, si $\mathbf{V}$ es único y diferente de cero, $\mathbf{B}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}$ es único y diferente de cero. Por lo tanto la estructura de plazos de las tasas de interés en forma continua dada anteriormente es también única.

En este modelo (por ser un caso particular de cualquiera de los dos anteriores modelos), también se puede decir que las ecuaciones de ajuste de las tasas de interés forward instantáneas son exógenas al *bootstrapping* y su valor agregado es el ajuste continuo de la estructura de plazos de las tasas de interés.

4.4 El Modelo Completo de Ajuste Continuo de la Estructura de Plazos de las Tasas de Interés en un Sistema de Ecuaciones de Mercado Subdeterminado

Sabemos que el sistema de ecuaciones de mercado contiene ecuaciones que son independientes entre sí, pero que en general no se puede considerar que dicho sistema contenga igual número de ecuaciones que incógnitas (primera condición – condición necesaria – de existencia del equilibrio explicada en el Anexo IV.1). En esta sección se analiza el caso más general y común en la práctica (con $t = T_0 = 0$ que implica $B_0 = 1$) donde dicho sistema de ecuaciones de mercado contiene N incógnitas y $M < N$ ecuaciones. Esto implica que el sistema de ecuaciones de mercado está subdeterminado.

De acuerdo a lo anterior, antes de probar la existencia del equilibrio necesitamos encontrar la manera de que se cumpla la primera condición necesaria de existencia planteada en el Anexo IV.1 (Sección AIV.1.1.1).

De manera general, si no se tienen más cotizaciones de mercado que las estándar $\{Q_{T_n}\}_{0<n\leq N}$ con $n = N_1, .., N_M(N_1 < N_2 <, .., < N_M \leq N)$, las cuales no corresponden a todos los plazos $T_1 - t < \ldots < T_N - t$ de los factores de descuento $B(t,T_1) = B_1, \ldots, B(t,T_N) = B_N$ (ya que $M <$

N)[35]. Se requerirá ampliar las ecuaciones del sistema de mercado en "$N - M$" o equivalentemente reducir en "$N - M$" el número de incógnitas en a través de hacer depender algunas de ellas de algunas otras. Esto se logra haciendo endógenas las ecuaciones de ajuste de las tasas de interés forward instantáneas; por lo que ya no sólo generan valor agregado en el ajuste continuo de la estructura de plazos de las tasas de interés, sino se vuelven indispensables para la solución del modelo.

Al hacer endógenas las ecuaciones de ajuste de las tasas de interés forward instantáneas, el costo que hay que pagar es que ahora se tiene un sistema de ecuaciones no lineal en el modelo completo de ajuste continuo de la estructura de plazos de las tasas de interés. La prueba de existencia del equilibrio por lo tanto ya no se puede hacer de la misma manera que se realizó en la sección 4.3.1.1, pues la no linealidad podría dar lugar a la no existencia de un equilibrio en cierta región de búsqueda de $\mathbf{B} = (B_1, ..., B_N)^T$ o a la existencia de equilibrios múltiples. Además, para encontrar el equilibrio del modelo (hallar $\mathbf{B}^* = \left(B_1^*, ..., B_N^*\right)^T$) se requiere de métodos numéricos, pues el sistema de ecuaciones no se puede resolver de manera directa.

De acuerdo a lo anterior, a continuación se desarrolla el modelo completo de ajuste continuo de la estructura de plazos de las tasas de interés para cada uno de los modelos de ajuste de las tasas de interés forward instantáneas desarrollados en el Capítulo III, pero esta vez sólo se dan las condiciones que se deben de cumplir para la existencia y en su caso unicidad del equilibrio (que se entenderá como solución del conjunto de ecuaciones).

4.4.1 El Modelo con Tasas de Interés Forward Instantáneas con Tendencia Variable y que Sigue una Relación de Sustitución entre Mercados Adyacentes

En este caso el Modelo 1 presentado en la sección 4.3.1 se convierte ahora en:

Modelo 4

Sistema de Ecuaciones de Mercado (ecuaciones 4.4, 4.5, 2.43,3.44)

$$\mathbf{F}(\mathbf{B}) = \mathbf{0}$$

Con:

$$F(\mathbf{B}) = \left(F_{T_{N_1}}(\ \mathbf{B}), ..., FT_{T_{N_N}}(\ \mathbf{B})\right)^T, \quad \text{donde } \mathbf{B} = (B(t,T_1), ..., B(t,T_N))^T$$

$$\begin{aligned} F_{T_{N_k}}(B(t,T_1), ..., B(t,T_{N_k})) =& V(t,T_{N_k}) - \sum_{i=1}^{N_{k-1}} B(t,T_i) M_{N_k,T_i} \\ & - \sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k - 1} (t,T_i) M_{N_k,T_i} - B(t,T_{N_k}) M_{N_k,T_{N_k}} \widehat{B} \end{aligned}$$

$$k = 1, 2, .., M (T_{N_M} - t = T_N - t)$$

[35] En el capítulo VI (sección 6.2) se verá que es posible crear "cotizaciones sintéticas" a partir de las cotizaciones estándar del mercado para tener un sistema de ecuaciones de mercado determinado y proceder con el ajuste continuo de la estructura de plazos tal como se mostró en la sección 4.3 anterior. No obstante, aquí el enfoque es general, suponiendo que no se tienen más cotizaciones que las estándar provistas por el mercado.

Donde:

$$\begin{aligned}
\widehat{B}(t,T_i) &= B_{N_{k-1}} e^{-\frac{1}{3}a_{N_k}\left(T_i^3 - T_{N_{k-1}}^3\right) - \frac{1}{2}b_{N_k}\left(T_i^2 - T_{N_{k-1}}^2\right) - c_{N_k}\left(T_i - T_{N_{k-1}}\right)}, \\
\widehat{B}(t,T_{N_k}) &= B(t,T_{N_k}) = B_{N_k} \\
i &= N_{k-1}+1, N_{k-1}+2, ..., N_k - 1
\end{aligned}$$

Nótese que se considera que los precios de los bonos cupón cero requeridos en cada ecuación $F_{T_{N_k}}(\cdot)$ contienen a los precios de los bonos cupón cero $B(t,T_1) = B_1, ..., B(t,T_{N_{k-1}}) = B_{N_{k-1}}$ de la ecuación $F_{T_{N_{k-1}}}(\cdot)$ y los factores de descuento subsecuentes $\widehat{B}(t,T_{N_{k-1}+1}) = \widehat{B}_{N_{k-1}+1}, ..., \widehat{B}(t,T_{N_k-1}) = \hat{B}_{N_k-1}$ que dependen del modelo de tasas de interés forward instantáneas, más el factor de descuento $B(t,T_{N_k}) = B_{N_k}$. Si se observa (ver ecuaciones de ajuste de las tasas de interés forward instantáneas), al final las variables desconocidas son $\{B_{N_k}\}_{k=1}^{M}$ $(B_{N_0} = B_0 = 1)$. Por lo tanto el *bootstrapping* se requiere realizar para el conjunto discreto $\{B_{N_k}\}_{k=1}^{M}$ de M factores de descuento. De esta manera se ha hecho que el número de incógnitas sea igual al número de ecuaciones.

Ecuaciones de Ajuste de las Tasas de Interés Forward Instantáneas (ecuaciones 3.39, 3.40, 3.41, 3.43 y 3.44)

$$f_{N_k}(s-t) = a_{N_k}s^2 + b_{N_k}s + c_{N_k}, \quad s \in [T_{N_k-1}, T_{N_k}], \quad \text{con} \quad k = 1,2,..,M(T_{N_0} = t)$$

Con:

$$\begin{aligned}
a_{N_k} &= -\frac{1}{T_{N_k} - T_{N_k-1}} \frac{\left(\theta_{N_k}^- - \theta_{N_k}^+\right)}{2} \\
b_{N_k} &= \frac{1}{T_{N_k} - T_{N_k-1}} \left(T_{N_k}\theta_{N_k}^- - T_{N_k-1}\theta_{N_k}^+\right) \\
c_{N_k} &= -\frac{\ln B_{N_k} - \ln B_{N_k-1}}{T_{N_k} - T_{N_k-1}} - \frac{1}{3}a_{N_k}\left(T_{N_k}^2 + T_{N_k}T_{N_k-1} + T_{N_k-1}^2\right) - \frac{1}{2}b_{N_k}\left(T_{N_k} + T_{N_k-1}\right)
\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\theta_{N_k}^- =& -2\frac{\ln B_{N_{k-2}}}{(T_{N_{k-1}} - T_{N_{k-2}})(T_{N_k} - T_{N_{k-2}})} + 2\frac{\ln B_{N_{k-1}}}{(T_{N_{k-1}} - T_{N_{k-2}})(T_{N_k} - T_{N_{k-1}})} \\
& -2\frac{\ln B_{N_k}}{(T_{N_k} - T_{N_{k-2}})(T_{N_k} - T_{N_{k-1}})}, \\
\theta_{N_k}^+ =& -2\frac{\ln B_{N_{k-1}}}{(T_{N_k} - T_{N_{k-1}})(T_{N_{k+1}} - T_{N_{k-1}})} + 2\frac{\ln B_{N_k}}{(T_{N_k} - T_{N_{k-1}})(T_{N_{k+1}} - T_{N_k})} \\
& -2\frac{\ln B_{N_{k+1}}}{(T_{N_{k+1}} - T_{N_{k-1}})(T_{N_{k+1}} - T_{N_k})} \\
i =& 1,2,...,N(B_{N_0} = B_0 = 1) \ \text{ y } \ \theta_1^- = \theta_N^+ = 0
\end{aligned}$$

4.4.1.1 Existencia del Equilibrio del Modelo

En este caso, al incorporar el modelo de ajuste de las tasas de interés forward instantáneas al bootstrapping se ha reducido el número de incógnitas a M , las cuales son el conjunto discreto de bonos cupón cero $B(t,T_{N_1}) = B_{N_1}, \ldots, B(t,T_{N_M}) = B_{N_M}$; para los plazos $(T_{N_1} - t = T_{N_M} - t)$. Por lo tanto, se tienen ahora M ecuaciones de mercado independientes y M incógnitas (precios de bonos cupón cero), cumpliéndose con la primera condición necesaria de existencia planteada en el Anexo IV.1 (Sección AIV.1.1.1). Sin embargo, ahora el sistema de ecuaciones es no lineal y por lo tanto no se puede aplicar la misma técnica de prueba de existencia y unicidad del equilibrio empleada en los Modelos 1, 2 y 3 de la sección 4.3. En su lugar se empleará el análisis general de prueba de existencia y unicidad de un equilibrio presentado en el Anexo IV.1, del cual ya se ha cumplido la condición necesaria (número de ecuaciones independientes igual a número de incógnitas), pero aún falta probar que se cumplan la condición suficiente dada por el Teorema de Punto Fijo (Sección AIV.1.1.2).

Favor de notar que debido a que el vector de precios $\mathbf{V}$ es único y diferente de cero, dada la solución del conjunto discreto de factores de descuento $\mathbf{B}^*$, la estructura de plazos de las tasas de interés en forma continua queda perfectamente definida por:

$$B(t,T) = B_{N_{k-1}} e^{-\frac{1}{3}a_{N_k}\left(T^3 - T^3_{N_{k-1}}\right) - \frac{1}{2}b_{N_k}\left(T^2 - T^2_{N_{k-1}}\right) - c_{N_k}\left(T - T_{N_{k-1}}\right)},$$
$$T \in [T_{N_k - 1}, T_{N_k}], \quad k = 1, 2, .., M(T_{N_0} = t)$$

La existencia del equilibrio queda definida por lo siguiente:

i) Ecuación Mapeo de Punto Fijo

Para poder analizar la existencia del equilibrio bajo las condiciones de punto fijo, primero tenemos que escribir el sistema de ecuaciones del Modelo 4 en términos de una función $\mathbf{G(B)}$ tal que en el equilibrio $\mathbf{B}^*$:

$$\mathbf{F(B)}^* = \mathbf{G(B)}^* - \mathbf{B}^* = 0$$

Esto se puede hacer si se observa que en el Modelo 4, la ecuación:

$$\begin{aligned} F_{T_{N_k}}(B(t,T_1), ..., B(t,T_{N_k})) = & V(t,T_{N_k}) - \sum_{i=1}^{N_{k-1}} B(t,T_i) M_{N_k,T_i} \\ & - \sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k - 1} (t,T_i) M_{N_k,T_i} - B(t,T_{N_k}) M_{N_k,T_{N_k}} \widehat{B} \end{aligned}$$
$$k = 1, 2, .., M(T_{N_M} - t = T_N - t)$$

Se puede transformar en:

$$B_{N_k} = \frac{1}{M_{N_k,T_{N_k}}} \left[V(t,T_{N_k}) - \sum_{i=1}^{N_{k-1}} B_i M_{N_k,T_i} - \sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k - 1} \widehat{B}_i M_{N_k,T_i} \right],$$
$$k = 1, 2, .., M(T_{N_M} - t = T_N - t)$$

Donde $\widehat{B}_{N_{k-1}+1}, ..., \widehat{B}_{N_k - 1}$dependen, entre otras cosas, de B_{N_k}. Por lo tanto, tomando:

$$g_{N_k}(B_{N_k}) = \frac{1}{M_{N_k,T_{N_k}}} \left[V(t,T_{N_k}) - \sum_{i=1}^{N_{k-1}} B_i M_{N_k,T_i} - \sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k - 1} \widehat{B}_i M_{N_k,T_i} \right],$$
$$k = 1, 2, .., M$$

Podemos formar el sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{G(B)} = \begin{pmatrix} g_{N_1}(\mathbf{B}) \\ \vdots \\ g_{N_M}(\mathbf{B}) \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_{N_1} \\ \vdots \\ B_{N_M} \end{pmatrix}$$

Donde sin pérdida de generalidad se ha hecho depender $g_{N_k}(\cdot)$ de $\mathbf{B}$ (de hecho, $g_{N_k}(\cdot)$ depende de todas las componentes de $\mathbf{B}$, lo cual hace que la solución deba encontrarse estrictamente para $\mathbf{B}$ y no para algunas de sus componentes).

ii) Dominio de la Ecuación Mapeo de Punto Fijo (Dominio de $\mathbf{B}$*)*

Ahora bien, en el Capítulo II vimos que (ecuación 3.7) el precio del bono cupón cero tiene una relación inversa con las tasas de interés, y en particular, considerando la tasa de interés cupón cero continuamente capitalizable (ecuación 4.12) tenemos que:

$$B(t,T) = \frac{1}{e^{R(t,T)(T-t)}} = e^{-R(t,T)(T-t)}, \quad t \leq T$$

Si tomamos el hecho de que $0 < R(t,T) < \infty$, se tiene que $1 > B(t,T) > 0$; y en particular dado que (ecuación 3.39) $0 < F(t,T_{i-1},T_i) = -\frac{1}{T_i - T_{i-1}} \ln \frac{B_i}{B_{i-1}} < \infty$, tenemos que $B(t,T_{i-1}) > B(t,T_i)$ para $T_{i-1} < T_i$.

Por lo anterior se debe cumplir que: $1 > B(t,T_1) = B_1 > \ldots > B(t,T_N) = B_N > 0$.

De acuerdo a esto, sin pérdida de generalidad, existe $D \subset [0,1]^M$ tal que $\mathbf{B} \in D$. En particular sabemos *a priori* que la cota superior de $B_{N_k}, k = 1,2,..,M$, debe ser un número $0 < \delta_k^+ < B_{N_{k-1}} < 1$ $(B_{N_{k-1}} > B_{N_k})$ y la cota inferior debe ser un número $1 > \delta_k^- > B_{N_{k+1}} > 0$. De esta manera $B_{N_k} \in (\delta_k^-, \delta_k^+) \subset [B_{N_{k+1}}, B_{N_{k-1}}] \subset [0,1]$.

Lo único que hace falta para aplicar las condiciones de punto fijo (ver Anexo IV.1, sección AIV.1.1.2) es que $g_{N_k}(\cdot)$ mapee en $D \subset [0,1]^M$.

iii) Mapeo de $\mathbf{G(B)}$ *en su mismo dominio*

Desafortunadamente, no se puede demostrar *a priori* que esto pasará debido a que los valores de $\{M_{n,T_i} > 0\}_{i=1}^n$, $n = N_1,..,N_M$ $(N_1 < N_2 <,..,< N_M \leq N)$ podrían ser teóricamente completamente diferentes entre ellos y arbitrariamente grandes, dando incluso valores negativos para algunos componentes de $\mathbf{G(B)}$[36].

No obstante, en la práctica rara vez sucede que $\{M_{n,T_i} > 0\}_{i=1}^n$, $n = N_1,..,N_M$ $(N_1 < N_2 <,..,< N_M \leq N)$ tomen valores muy diferentes y/o arbitrariamente grandes, y se esperan valores razonables pues en otro caso se podría tener arbitraje (el cual a su vez llevaría a valores razonables de $\{M_{n,T_i} > 0\}_{i=1}^n$). Por lo tanto, aún podemos asegurar la existencia del equilibrio si acotamos $\mathbf{G(B)}$ a que cumpla con mapear al dominio de $\mathbf{B}$.

Esto ocurre si:

[36] Obviamente esto hace que no se cumplan las condiciones de punto fijo donde necesariamente $\mathbf{G(B)}$ debe mapear a D.

iv) Condición necesaria y suficiente para la existencia del equilibrio

$$B_{N_{k+1}} < \delta_k^- < g_{N_k}(B_{N_k}) = \frac{1}{M_{N_k,T_{N_k}}}\left[V(t,T_{N_k}) - \sum_{i=1}^{N_{k-1}} B_i M_{N_k,T_i} \right.$$
$$\left. - \sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k-1} \widehat{B}_i M_{N_k,T_i}\right] < \delta_k^+ < B_{N_{k-1}}$$
$$k = 1, 2, .., M.$$

Ya que $B_{N_k} \in (\delta_k^-, \delta_k^+) \subset [B_{N_{k+1}}, B_{N_{k-1}}] \subset [0,1]$.

La condición anterior nos asegura que exista el equilibrio y su valor agregado es que se puede verificar en el proceso de derivación de la solución a través del *bootstrapping*. De manera que si consideramos que se tiene una primera aproximación $\mathbf{B}_0$ de $\mathbf{B}^*$ que cumple con $1 > B_{N_1}^0 > \ldots > B_{N_M}^0 > 0$ $(\mathbf{B}^0 \subset D \subset [0,1]^M)$ y se quiere iterar utilizando la ecuación $\mathbf{G(B)}$, las componentes del vector resultante $\mathbf{G(B)}^0 = \mathbf{B}^1 \neq \mathbf{B}^0$ pueden ajustarse para cumplir la condición necesaria y suficiente para la existencia del equilibrio en caso de que no la cumplan. El ajuste podría hacerse eligiendo $n = 1, 2, ...$ hasta que se cumpla la condición necesaria y suficiente para la existencia del equilibrio utilizando la combinación lineal dada a continuación:

$$\widehat{\mathbf{B}}^1 = w\mathbf{B}^1 + (1-w)\,\mathbf{B}^0, \quad \text{con} \quad w = \frac{1}{2^n}$$

Es fácil ver que existirá algún $n > 0$ para el cual $\widehat{\mathbf{B}}^1 = w\mathbf{B}^1 + (1-w)\,\mathbf{B}^0$ cumplirá con $(\widehat{\mathbf{B}}^1 \subset D \subset [0,1]^M)$, pues $(\mathbf{B}^0 \subset D \subset [0,1]^M)$ y $w \to 0$ par un número n suficientemente grande. $\widehat{\mathbf{B}}^1$ puede ahora utilizarse como una nueva aproximación $\widehat{\mathbf{B}}^1$ de $\mathbf{B}^*$ y probar que $\mathbf{G}(\widehat{\mathbf{B}}^1)$ cumpla con la condición necesaria y suficiente para la existencia del equilibrio planteada anteriormente y si esto no es así, repetir el proceso.

Obviamente, siempre se tendrá que especificar un criterio del número máximo de iteraciones que se permitirán para encontrar $\mathbf{B}^*$ a través de utilizar $\mathbf{G(B)}^0$ con el error de precisión deseado. Si $\widehat{\mathbf{B}}^1 \to \mathbf{B}^0$ entonces $\mathbf{B}^0$ es un punto “esquina” de $D \subset [0,1]^M$ y no es solución de $\mathbf{G(B)}$ ya que $\mathbf{G(B)}^0 = \mathbf{B}^1 \neq \mathbf{B}^0$ y habrá que elegir otro punto inicial y probar que se cumpla con la condición necesaria y suficiente para la existencia del equilibrio planteada anteriormente; cuando esto ocurra, está garantizado el equilibrio.

4.4.1.2 Unicidad del Equilibrio del Modelo

La demostración formal de la unicidad del modelo de ajuste continuo de la estructura de plazos de las tasas de interés utilizando endógenamente al *bootstrapping* el modelo de ajuste de las tasas de interés forward instantáneas se deja como una extensión de la presente investigación. Obviamente la demostración de la unicidad del equilibrio requiere la consideración de la condición necesaria y suficiente para la existencia del equilibrio derivada anteriormente más las consideraciones adicionales presentadas en el Anexo IV.1.

No obstante, el modelo se prueba numéricamente en el capítulo VI para el mercado de los *Swaps* de TIIE a 28 días y se demuestra que su equilibrio existe a través de utilizar diferentes puntos de partida $\mathbf{B}^0$ de $\mathbf{B}^*$. Para ello será necesario programar el algoritmo de solución de punto fijo y determinar los tres puntos de partida $\mathbf{B}^0$ de $\mathbf{B}^*$.

4.4.2 El Modelo con Tasas de Interés Forward Instantáneas con Tendencia Constante

El ajuste continuo de la estructura de plazos de las tasas de interés utilizando endógenamente el modelo de ajuste de tasas de interés forward instantáneas con tendencia constante está dado por el siguiente conjunto de ecuaciones:

Modelo 5

Sistema de Ecuaciones de Mercado (ecuaciones 4.4, 4.5, 4.52,4.53)

$$\mathbf{F}(\mathbf{B}) = \mathbf{0}$$

Con:

$$F(\mathbf{B}) = \left(F_{T_{N_1}}(\mathbf{B}), ..., FT_{T_{N_N}}(\mathbf{B})\right)^T, \quad \text{donde } \mathbf{B} = (B(t,T_1), ..., B(t,T_N))^T$$

$$\begin{aligned} F_{T_{N_k}}(B(t,T_1), ..., B(t,T_{N_k})) =& V(t,T_{N_k}) - \sum_{i=1}^{N_{k-1}} B(t,T_i) M_{N_k,T_i} \\ & - \sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k-1} \widehat{B}(t,T_i) M_{N_k,T_i} - B(t,T_{N_k}) M_{N_k,T_{N_k}} \end{aligned}$$

$$k = 1, 2, .., M (T_{N_M} - t = T_N - t)$$

Donde:

$$\widehat{B}(t,T_i) = B_{N_{k-1}} e^{-\frac{1}{2}\widetilde{b}_{N_k}\left(T_i^2 - T_{N_{k-1}}^2\right) - \widetilde{c}_{N_k}\left(T_i - T_{N_{k-1}}\right)}, \qquad \widehat{B}(t,T_{N_k}) = B_{N_k}$$

$$i = N_{k-1}+1, N_{k-1}+2, ..., N_k - 1$$

De la misma manera que el modelo anterior, se observa que los precios de los bonos cupón cero requeridos en cada ecuación $F_{T_{N_k}}(\cdot)$ contienen a los precios de los bonos cupón cero $B(t,T_1) = B_1, ..., B(t,T_{N_{k-1}}) = B_{N_{k-1}}$ de la ecuación $F_{T_{N_{k-1}}}(\cdot)$ y los factores de descuento subsecuentes $\widehat{B}(t,T_{N_{k-1}+1}) = \widehat{B}_{N_{k-1}+1}, ..., \widehat{B}(t,T_{N_k-1}) = \widehat{B}_{N_k-1}$ que dependen del modelo de tasas de interés forward instantáneas, más el factor de descuento $B(t,T_{N_k}) = B_{N_k}$. Por lo tanto, las M variables desconocidas son $\{B_{N_k}\}_{k=1}^M$ ($B_{N_0} = B_0 = 1$), las cuales se requieren obtener a través del *bootstrapping*.

Ecuaciones de Ajuste de las Tasas de Interés Forward Instantáneas (ecuaciones 3.39, 3.40, 3.41, 3.52 y 3.53)

$$f_{N_k}(s-t) = \widetilde{b}_{N_k} s + \widetilde{c}_{N_k}, \qquad s \in [T_{N_k-1}, T_{N_k}], \quad \text{con} \quad k = 1, 2, .., M (T_{N_0} = t)$$

Con:

$$\begin{aligned} b_{N_k} &= \frac{1}{2}\left(\theta_{N_k}^- + \theta_{N_k}^+\right) \\ c_{N_k} &= -\frac{\ln B_{N_k} - \ln B_{N_k-1}}{T_{N_k} - T_{N_k-1}} - \frac{1}{2}\widetilde{b}_{N_k}\left(T_{N_k} + T_{N_k-1}\right) \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\theta_{N_k}^{-} =& -2\frac{\ln B_{N_{k-2}}}{(T_{N_{k-1}}-T_{N_{k-2}})(T_{N_k}-T_{N_{k-2}})}+2\frac{\ln B_{N_{k-1}}}{(T_{N_{k-1}}-T_{N_{k-2}})(T_{N_k}-T_{N_{k-1}})}\\
&-2\frac{\ln B_{N_k}}{(T_{N_k}-T_{N_{k-2}})(T_{N_k}-T_{N_{k-1}})}\\
\theta_{N_k}^{+} =& -2\frac{\ln B_{N_{k-1}}}{(T_{N_k}-T_{N_{k-1}})(T_{N_{k+1}}-T_{N_{k-1}})}+2\frac{\ln B_{N_k}}{(T_{N_k}-T_{N_{k-1}})(T_{N_{k+1}}-T_{N_k})}\\
&-2\frac{\ln B_{N_{k+1}}}{(T_{N_{k+1}}-T_{N_{k-1}})(T_{N_{k+1}}-T_{N_k})}\\
&k=1,2,..,M(B_{N_0}=B_0=1)\ \text{ y }\ \theta_1^{-}=\theta_N^{+}=0
\end{aligned}$$

4.4.2.1 Existencia del Equilibrio del Modelo

Como este modelo es una variante del modelo anterior, el equilibrio existe si se cumple la condición necesaria y suficiente derivada en la sección 4.4.1.1 para la existencia del equilibrio, dada por:

$$\begin{aligned}
B_{N_{k+1}}<\delta_k^{-}<g_{N_k}(B_{N_k})=&\frac{1}{M_{N_k,T_{N_k}}}\Bigg[V(t,T_{N_k})-\sum_{i=1}^{N_{k-1}}B_iM_{N_k,T_i}\\
&-\sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k-1}\widehat{B}_iM_{N_k,T_i}\Bigg]<\delta_k^{+}<B_{N_{k-1}},\\
&k=1,2,..,M.
\end{aligned}$$

Donde: $B_{N_k}\in(\delta_k^{-},\delta_k^{+})\subset[B_{N_{k+1}},B_{N_{k-1}}]\subset[0,1]$

También en este caso, si el vector de precios de mercado $\mathbf{V}$ es único y diferente de cero, dada la solución del conjunto discreto de factores de descuento $\mathbf{B}^*$, la estructura de plazos de las tasas de interés en forma continua queda perfectamente definida por:

$$B(t,T)=B_{N_{k-1}}e^{-\frac{1}{2}\widetilde{b}_{N_k}\left(T^2-T_{N_{k-1}}^2\right)-\widetilde{c}_{N_k}\left(T-T_{N_{k-1}}\right)},\quad T\in[T_{N_k-1},T_{N_k}],k=1,2,..,M(T_{N_0}=t)$$

4.4.2.2 Unicidad del Equilibrio del Modelo

De la misma manera que el modelo anterior, la existencia de la unicidad del equilibrio del modelo, bajo la condición necesaria y suficiente de existencia del equilibrio (presentada anteriormente), se deja como una extensión de la presente investigación. Este modelo también se prueba numéricamente en el capítulo VI para el mercado de los *Swaps* de TIIE a 28 días y se demuestra que su equilibrio existe a través de utilizar diferentes puntos de partida $\mathbf{B}^0$ de $\mathbf{B}^*$.

4.4.3 El Modelo con Tasas de Interés Forward Instantáneas con Tendencia Nula

El ajuste continuo de la estructura de plazos de las tasas utilizando endógenamente el modelo de ajuste de tasas de interés forward instantáneas con tendencia nula, que implica tasas de interés *forward* instantáneas constantes, está dado por el siguiente conjunto de ecuaciones:

<u>Modelo 6</u>

Sistema de Ecuaciones de Mercado (ecuaciones 4.4, 4.5, 3.55,3.56)

$$\mathbf{F}(\mathbf{B}) = \mathbf{0}$$

Con:

$$F(\mathbf{B}) = \Big(F_{T_{N_1}}(\ \mathbf{B}), ..., FT_{T_{N_N}}(\ \mathbf{B})\Big)^T, \quad \text{donde } \mathbf{B} = (B(t,T_1), ..., B(t,T_N))^T$$

$$\begin{aligned} F_{T_{N_k}}(B(t,T_1), ..., B(t,T_{N_k})) =& V(t,T_{N_k}) - \sum_{i=1}^{N_{k-1}} B(t,T_i)M_{N_k,T_i} \\ & - \sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k-1} \widehat{B}(t,T_i)M_{N_k,T_i} - B(t,T_{N_k})M_{N_k,T_{N_k}} \\ k = 1,2,..,M(T_{N_M} - t = T_N - t) \end{aligned}$$

Donde:

$$\widehat{B}(t,T_i) = B_{N_{k-1}} e^{-\overline{f_{N_k}}\left(T_i - T_{N_{k-1}}\right)}, \widehat{B}(t,T_{N_k}) = B_{N_k}$$
$$i = N_{k-1}+1, N_{k-1}+2, ..., N_k - 1$$

Ecuaciones de Ajuste de las Tasas de Interés Forward Instantáneas (ecuaciones 4.39, 4.55 y 4.56)

$$f_{N_k}(s-t) = \overline{f_{N_k}}, \quad s \in [T_{N_k-1}, T_{N_k}], \ \text{ con } \ k = 1,2,..,M(T_{N_0} = t)$$

Con:

$$f_{N_k} = -\frac{\ln B_{N_k} - \ln B_{N_{k-1}}}{T_{N_k} - T_{N_{k-1}}}$$

4.4.3.1 Existencia del Equilibrio del Modelo

$$\begin{aligned} B_{N_{k+1}} < \delta_k^- < g_{N_k}(B_{N_k}) =& \frac{1}{M_{N_k,T_{N_k}}} \Bigg[V(t,T_{N_k}) - \sum_{i=1}^{N_{k-1}} B_i M_{N_k,T_i} \\ & - \sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k-1} \widehat{B}_i M_{N_k,T_i} \Bigg] < \delta_k^+ < B_{N_{k-1}}, \\ & k = 1,2,..,M. \end{aligned}$$

Donde: $B_{N_k} \in (\delta_k^-, \delta_k^+) \subset [B_{N_{k+1}}, B_{N_{k-1}}] \subset [0,1]$

Este modelo es un modelo muy simple donde se ha mostrado (ecuación 4.59) que:

$$\hat{B}_i = B_{N_{k-1}}^{\alpha_i} B_{N_k}^{1-\alpha_i}, \quad i = N_{k-1}+1, N_{k-1}+2, ..., N_k - 1, \quad k = 1,2,..,M(T_{N_0} = t)$$

Con $\alpha_i = \frac{T_{T_{N_k}} - T_i}{T_{N_k} - T_{N_{k-1}}}$.

4.4.3.2 Unicidad del Equilibrio del Modelo

Nótese que en este modelo simple, dado $\{B_i\}_{i=1}^{N_{k-1}}$, $g_{N_k}(B_{N_k})$ sólo depende de B_{N_k} y se puede escribir como:

$$g_{N_k}(B_{N_k}) = \frac{1}{M_{N_k,T_{N_k}}}\left[V(t,T_{N_k}) - \sum_{i=1}^{N_{k-1}} B_i M_{N_k,T_i} - \sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k-1} B_{N_{k-1}}^{\alpha_i} B_{N_k}^{1-\alpha_i} M_{N_k,T_i}\right]$$
$$i = N_{k-1}+1, N_{k-1}+2, ..., N_k - 1, \quad k = 1,2,..,M(T_{N_0} = t)$$

Donde $g'_{N_k}(B_{N_k}) = \frac{\partial g_{N_k}(B_{N_k})}{\partial B_{N_k}}$ es

$$g'_{N_k}(B_{N_k}) = \frac{1}{M_{N_k,T_{N_k}}}\left[-\sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k-1} (1-\alpha_i)\left[\frac{B_{N_{k-1}}}{B_{N_k}}\right]^{\alpha_i} M_{N_k,T_i}\right] < 0$$

Por lo que $g_{N_k}(B_{N_k})$ es estrictamente decreciente y convexa ya que:

$$g''_{N_k}(B_{N_k}) = \frac{1}{M_{N_k,T_{N_k}}}\left[\sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k-1} \alpha_i (1-\alpha_i)\frac{1}{B_{N_k}}\left[\frac{B_{N_{k-1}}}{B_{N_k}}\right]^{\alpha_i} M_{N_k,T_i}\right] > 0$$

Por lo anterior, $g_{N_k}(B_{N_k})$ y la función $h_{N_k}(B_{N_k}) = B_{N_k}$ se intersectan en un solo punto como lo muestra la Figura IV.1. Por lo tanto, si $g_{N_k}(B_{N_k})$ cumple con la condición necesaria y suficiente de existencia de equilibrio, derivada en la sección 4.4.1.1, entonces tiene un único punto fijo y por lo tanto el equilibrio del modelo es único. Es decir, existe un único $\mathbf{B}^*$ tal que:

$$\mathbf{F(B)}^* = \mathbf{G(B)}^* - \mathbf{B}^* = 0$$

$$\mathbf{G(B)} = \begin{pmatrix} g_{N_1}(\mathbf{B}) \\ \vdots \\ g_{N_M}(\mathbf{B}) \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_{N_1} \\ \vdots \\ B_{N_M} \end{pmatrix}$$

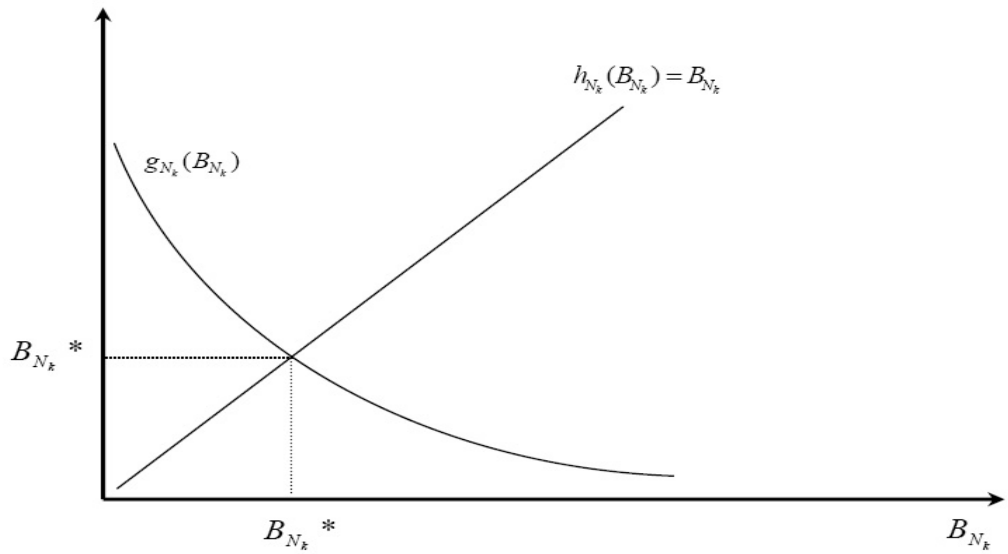

Figura 4.1 Equilibrio de punto fijo único para una función estrictamente decreciente y convexa en todo su dominio.

Finalmente, si el vector de precios de mercado $\mathbf{V}$ es único y diferente de cero, dado el equilibrio del conjunto discreto de factores de descuento $\mathbf{B}^*$, único bajo condiciones de equilibrio, la estructura de plazos de las tasas de interés en forma continua también única y está dada por:

$$B(t,T) = B_{N_{k-1}} e^{-\overline{f_{N_k}}\left(T - T_{N_{k-1}}\right)} = B_{N_{k-1}}^{\alpha_k(T)} B_{N_k}^{1-\alpha_k(T)}, \quad T \in [T_{N_{k-1}}, T_{N_k}], \quad k = 1, 2, .., M(T_{N_0} = t)$$

Con $\alpha_k(T) = \frac{T_{T_{N_k}} - T}{T_{N_k} - T_{N_{k-1}}}$.

Se ha demostrado que el modelo de ajuste continuo de la estructura de plazos de tasas de interés considerando endógeno el modelo de tasas de interés forward instantáneas constantes, tiene un equilibrio único si cumple con la condición necesaria y suficiente de existencia de equilibrio desarrollada en la sección 4.4.1.1. Esto es algo que sin duda apoya más su uso en la práctica[37]. Sin embargo, es un modelo muy simple y menos robusto conceptualmente que el modelo que utilizan endógenamente tasas de interés forward instantáneas con tendencia variable y que sigue una relación de sustitución entre mercados adyacentes (Modelo 4 de este capítulo) y que el modelo que utilizan endógenamente tasas de interés *forward* instantáneas con tendencia constante (Modelo 5 de este capítulo).

[37] Modelo de amplio uso en la práctica (modelo de *Street Convection*) y que vienen implementado en prácticamente todos los sistemas informáticos de valuación y manejo de instrumentos financieros que realizan el ajuste de la curva de rendimientos a través de las tasas de interés de composición continua (forwards o cupón cero).

CAPÍTULO 5

EL MERCADO DE LOS SWAPS DE TIIE-28 DÍAS

Los *swaps* de TIIE-28 días son instrumentos financieros conocidos como 'Derivados' a los que subyace un contrato a través del cual se intercambia una serie de flujos fijos (determinados por una tasa fija: la tasa *swap*) por aquellos flujos variables resultantes de aplicar la TIIE-28 días en fechas especificadas. Los *swaps* de TIIE-28 días son los derivados más comunes en México y representan uno de los mercados más profundos de los derivados OTC (*Over The Counter*) o de mostrador[38]. Su profundidad es tanta que en la práctica sus cotizaciones se dan en tiempo real, presentándolas las principales empresas de provisión de información como *Reuters* y *Bloomberg*.

La intención de la presente sección de este trabajo de tesis es presentar los detalles de los *swaps* de TIIE-28 días, su utilidad práctica, funcionamiento, así como las convenciones de mercado que los rodean, las cuales si no se consideran hacen que cualquier modelo de valuación de dichos derivados no refleje su valor justo.

[38] Banco de México presenta en un Boletín electrónico (Banxico, 2004) los resultados de la Encuesta Organizada por el Banco de Pagos Internacionales (BIS) sobre el volumen operado en el mercado cambiario y de derivados. Dicho Boletín contiene cifras para una muestra representativa del 98% del mercado local mexicano (10 bancos más grandes) de volumen de operación promedio diario en valor nominal de referencia de los Swaps de TIIE (Tabla 5 del mencionado Boletín). Allí se reporta que para los Swaps de Tasa de Interés de una sola divisa (a abril de 2004) se tiene un volumen de operación promedio diario de 511.61 millones de dólares, de los cuales 509.45 millones son sólo por swaps de tasa de interés en pesos mexicanos (provenientes prácticamente de Swaps de TIIE). Es importante mencionar que esta cifra al compararse con la reportada para Forwards de tasa de interés (de 915 millones de dólares para la moneda pesos mexicanos) parece ser menor; no obstante, debe leerse con cuidado, pues si se analiza bien, un Swap de tasa de interés es en realidad una serie de forwards de tasa de interés; este hecho hace que sólo un swap de 5 años (13x5=65 flujos de 28 días que pueden verse como 65 forwards de tasa de interés) represente 65 veces el equivalente en nominal de referencia para forwards de tasa de interés, lo que hace despreciable los 915 millones de dólares reportados para los forwards de tasa de interés contra 33,114.25 millones de dólares equivalentes para los swaps de tasa de interés en pesos (65 veces 509.45 millones), suponiendo para tales instrumentos una madurez promedio de 5 años (en realidad hay swaps comúnmente de 10 años y se pueden encontrar hasta de 20 y 30 años). Esta última cifra es muchísimo mayor que cualquiera de las reportadas por Banco de México para el resto de los instrumentos financieros derivados. Esto es intuitivamente razonable en la práctica si se considera que con un Swap de tasa de interés se puede utilizar para cubrir o abrir muchísimo más riesgo por tasa de interés que con un forward de tasa de interés; de hecho, la mayoría de los balances de los bancos e instituciones de seguros y pensiones (y hasta portafolios de inversión de AFORES: SIEFORES) utilizan los swaps de tasa de interés para manejar el riesgo abierto por tasa de interés de sus posiciones.

5.1 Definición de los Swaps de TIIE-28 Días

En términos generales, un *swap* de TIIE (de 28 días ó 91 días) es un contrato entre dos partes, las cuales acuerdan intercambiar flujos monetarios en el tiempo. Es un intercambio de pagos de intereses sobre una tasa de interés fija (la tasa o cotización del *swap*) por una de las partes, por pagos de intereses sobre una tasa variable (la TIIE de 28 publicada por Banco de México[39].) proveniente de su contraparte. Ambas tasas son calculadas sobre un mismo monto principal o nominal ('Monto Nominal de Referencia' del *swap* de TIIE), el cual no es intercambiado[40].

En términos formales, un *swap* de TIIE-28 días queda determinado por una serie de documentos legales debidamente definidos bajo los estándares ISDA[41]. En su definición formal, el *swap* de TIIE-28 días considera detalles como la posibilidad de prepago, rompimiento del contrato, el caso de inexistencia del índice de referencia (i.e. que la TIIE-28 días dejara de existir) e incluso la forma de transferencia de los fondos.

Con la finalidad de presentar explícitamente la documentación oficial que circunda a los Swaps de TIIE, en el Anexo V-A se presenta un ejemplo de una 'Carta Confirmación', la cual se firma por cada una de las partes que han cerrado una operación de *swap* de TIIE-28 días (quienes previamente deben tener suscrito un Contrato Marco escrito conforme a los estándares ISDA y demás cláusulas acordadas)[42]. Litzenberger (1992) presenta una discusión amplia de cómo la existencia de contratos marco para los Swaps de Tasas de Interés actúan por si mismos como verdaderos mecanismos para asegurar la homogeneidad de las cotizaciones de mercado de dichos instrumentos (que implican la seguridad que se tiene de que los involucrados respetarán los pagos), convirtiéndolos en un particular tipo de instrumentos.

5.2 Uso e Intermediación de los Swaps de TIIE-28 Días

El principal uso de los *swaps* de TIIE-28 días es como instrumentos de cobertura; no obstante, pueden ser usados como instrumentos de especulación. Una empresa puede acceder al mercado de *swaps* de TIIE-28 días a través de un intermediario financiero (por lo general un banco) que esté

---

[39] Para los detalles de la determinación de la TIIE a 28 días por parte de Banxico se puede ver (Banxico, 2007).

[40] El intercambio de nominales no se realiza pues la transferencia de fondos debería hacerse por ambas partes lo que arrojaría un flujo neto nulo en la contabilidad de cada parte (ocasionando sólo costos operativos). No obstante, es importante mencionar que la valuación de un *swap* de TIIE-28 días que considerara el pago de su nominal y la de otro idéntico pero sin pago de nominal es la misma (esto es consecuencia de que el flujo esperado por pago y recepción de nominal es cero para cualquiera de las partes de un contrato de *swap* de TIIE-28 días).

[41] ISDA se refiere a las siglas de la Asociación Internacional de Operadores de Swaps y Derivados (*International Swaps and Derivatives Association, Inc.*); dicha asociación ha establecido estándares de los contratos marco con efectos legales y cláusulas para la operación de Swaps de cualquier tipo (ISDA, 2007).

[42] Dado que el propósito de la presente tesis no es una revisión exhaustiva de la documentación legal de los contratos de *swaps* de TIIE-28 días, no se presenta mayor documentación al respecto que la Carta Confirmación del Anexo V-A; sin embargo, en el sitio `www.isda.org` se puede encontrar documentación basta acerca de los *swaps* de tasa de Interés. En cualquier caso, el Contrato Marco y Carta de Confirmación podrían sufrir ajustes de acuerdo a los detalles y variaciones que puedan acordarse por las partes en las operaciones de *swaps* de TIIE-28 días (por ejemplo, la consideración de amortizaciones o de prepago anticipado a valor de mercado).

autorizado a operar dichos *swaps*[43]. La empresa podrá realizar la transacción con el intermediario financiero sólo si cumple con los estándares definidos en la documentación ISDA respectiva (como tener patrimonio bien definido y cumplir con obligaciones fiscales).

La utilidad de los *swaps* de TIIE-28 días para quienes lo contratan es la modificación de la naturaleza de flujos provenientes de un activo o pasivo esperado como el caso de convertir un pasivo contraído a una tasa de interés variable en uno fijo (o viceversa). El incentivo para el intermediario financiero que los ofrece es obtener un diferencial o margen en la cotización de los *swaps* de TIIE-28 días como beneficio a cambio de absorber el riesgo de que la contraparte no cumpla (riesgo crédito) o de que las tasas de interés (la TIIE de 28 días) se mueva en el futro de una manera desfavorable de manera que le provoque pérdidas (riesgo de mercado).

Como el intermediario financiero provee de *swaps* de TIIE-28 días a varias contrapartes, se obtiene por lo general el beneficio de no concentrarse con una sola contraparte (beneficio por diversificación), además de que puede ofrecer exactamente el perfil de flujos opuestos a alguna contraparte de aquél que ofrece a otra, cerrando el riesgo de mercado. Esto hace sumamente atractiva la operación de *swaps* de TIIE-28 días.

5.2.1 Intercambio de Flujos Variables por Flujos Fijos

Consideremos el caso de una empresa (En la Figura 5.1, la Empresa 1) que tiene que hacer frente a una serie de pagos fijos de monto **B** cada 4 semanas (28 días) por concepto de nómina de sus empleados, mientras que sus ingresos tienen que ver con el nivel de la tasa de interés (por ejemplo una empresa que opera un Fondo de Inversión de corto plazo y que cobra comisiones a sus ahorradores sobre los intereses generados en el Fondo)[44]. Es claro en este caso que el Balance propio de la empresa tiene un pasivo prácticamente fijo, mientras que su activo principal son las comisiones cobradas a los ahorradores del Fondo que maneja, lo que provoca que su ingreso futuro dependa en gran medida del nivel de tasa de interés del mercado.

[43] Para que un intermediario financiero mexicano pueda operar *swaps* de TIIE-28 días tiene que cumplir con varios requerimientos regulatorios, entre los que destacan las "Disposiciones Prudenciales de Administración Integral de Riesgos", de la Circular nica de Bancos emitidas por la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV, 2005), la obtención de la autorización de Banco de México, la cual se otorga siempre que se cumpla con las disposiciones emitidas por dicho Banco Central en la Circular Circular 4/2006, (Emitida el 18 de Diciembre de 2006) y en especial en su anexo, el cual contiene 31 Puntos a cumplir (Banxico, 2006).

[44] En este caso hablamos de la Operadora del Fondo de Inversión (no del Fondo), la cual es una empresa con un balance constituido y patrimonio propio y es quien maneja el Fondo de Inversión.

Figura 5.1 Empresa con un pasivo fijo e ingresos variables, altamente dependientes de la tasa de corto plazo.

La empresa sabe que una baja en el nivel de tasas de interés de corto plazo (ya que el fondo de inversión es de corto plazo), provocará que sus ingresos futuros disminuyan, mientras que el pago de su nómina no lo hará. Debido a esto, la empresa estará dispuesta a entrar en un contrato de *swap* de TIIE-28 días para la cobertura de sus pasivos, aceptando recibir (de un intermediario financiero) un monto fijo cada 28 días por cierto periodo de tiempo a cambio de pagar un monto variable indizado a una tasa de corto plazo como la TIIE de 28 días. Si el monto fijo de la empresa es **B**, y el nivel de tasa de interés fija del *swap* de TIIE-28 días es s_T^B (tasa *swap Bid* o de compra –de la TIIE-28 días desde el punto de vista del mercado o intermediario financiero– del *swap* de TIIE-28 días), la empresa estará dispuesta a contratar dicho *swap* de TIIE-28 días con nominal de referencia **N** calculado como sigue:

$$N = \frac{B}{s_T^B \frac{28}{360}} \tag{5.1}$$

Donde:

N = Monto nominal o de referencia del *swap* de TIIE-28 días.

s_T^B = Tasa Fija (o tasa *swap* de compra) del *swap* de TIIE-28 días.

B = Pago fijo a realizarse cada 28 días.

Nótese que se ha encontrado el valor del nominal de referencia **N** que hace que la Empresa 1 pueda recibir exactamente **B**. De esta manera:

$$B = N \cdot s_T^B \cdot \frac{28}{360} \tag{5.2}$$

En el ejemplo presentado, el intermediario financiero paga la tasa fija o tasa *swap* a cambio de recibir la TIIE de 28 días y se dice que su posición en el *swap* de TIIE-28 días es “larga” en flujo (gana más en flujo si las tasas suben) y “corta” en tasa de interés swap. Por su lado, la Empresa 1 paga la TIIE de 28 días (que podemos denotar como i_{28}^{TIIE}) a cambio de recibir la tasa fija o tasa *swap* s_T^B y se dice que su posición en el *swap* de TIIE-28 días es “corta” en flujo o “larga” en tasa de interés. La operación del *swap* de TIIE-28 días se representa en la Figura 5.2.

Se puede observar claramente (Figura 5.2) que la Empresa 1 ahora tiene perfectamente cubierta respecto del pago de su nómina con el flujo que recibe del intermediario financiero, a cambio del cual tendrá que pagar un flujo variable indizado a la TIIE de 28 días. Por tanto, la Empresa 1 ha permutado su pasivo fijo por un pasivo variable[45]. Esta es precisamente la idea de los *swap* de tasa de interés como el caso de los *swaps* de TIIE-28 días.

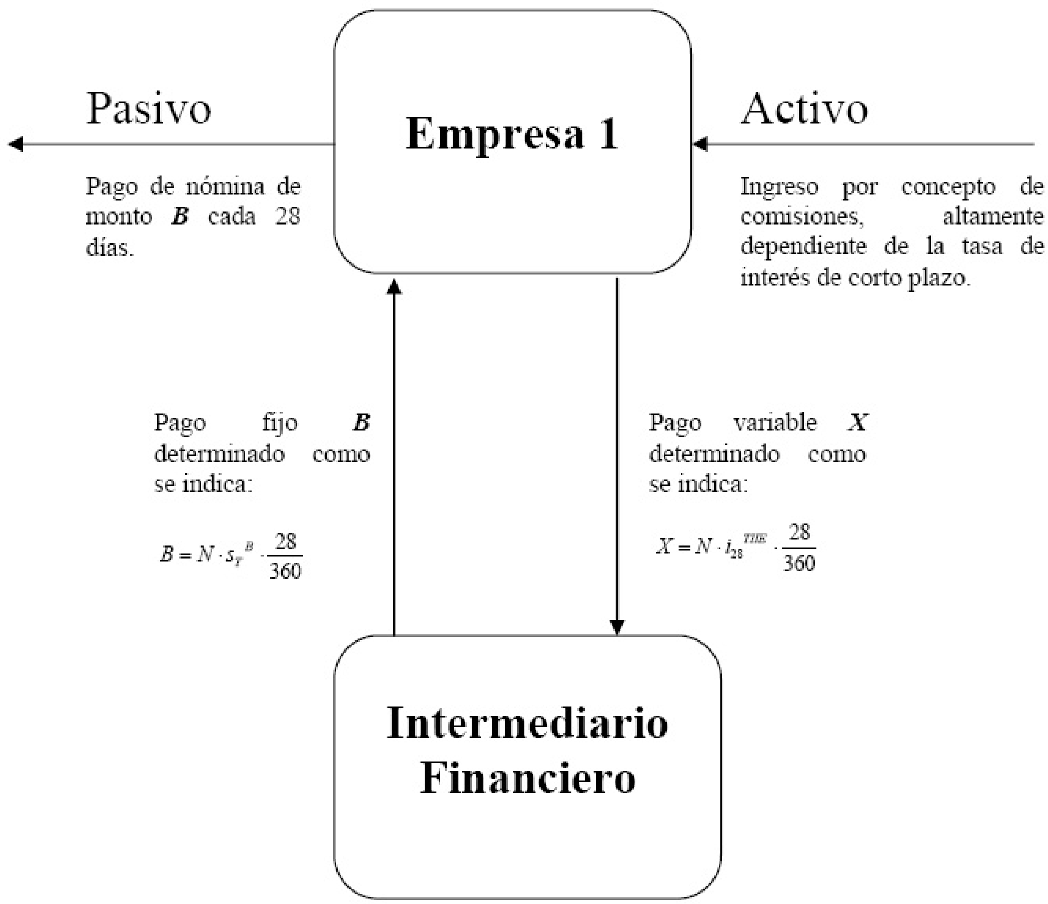

Figura 5.2 Intercambio de flujos fijos por flujos variables
a través de un swap de TIIE-28 días.

[45] En la industria financiera, a un instrumento que se utiliza para cubrir (cancelar) los flujos de otro instrumento se le conoce como "*Cash Flow Hedge (CFH)*" y puede ser considerado formalmente como instrumento de cobertura por lo que se puede obtener el beneficio contable de reducir el capital necesario de la empresa. En el caso de los intermediarios Financieros en México, esto resulta muy importante debido a que las reglas contables locales (CNBV, 2000), así como las de determinación de capital (SHCP, 1999) periten que un *CFH* sea considerado como reductor de capital.

5.2.2 Intercambio de Flujos Fijos por Flujos Variables

Consideremos el caso de otra Empresa (En la Figura 5.3, la Empresa 2), la cual tiene una deuda con valor nominal **N**[46], la cual contrajo para financiar una expansión de actividades que le provoca que pague intereses a una tasa flotante cada 28 días (por ejemplo TIIE de 28 días + 80 puntos base). Esta empresa tiene un ingreso estable y está preocupada que una alza en las tasas de interés le provoquen problemas financieros al aumentar el monto que tendrá que pagar por servicio de su deuda.

Esta empresa estará dispuesta a entrar en un contrato de cobertura de su pasivo (su deuda), aceptando recibir un monto indizado a la TIIE de 28 días cada 28 días a cambio de pagar un monto fijo. Consideremos que el mismo intermediario financiero que ofreció el *swap* de TIIE-28 días a la Empresa 1 está dispuesto a ofrecerle una posición de *swap* de TIIE-28 días a la Empresa 2 con el perfil opuesto al que ofreció a la empresa 1[47]. En este caso, el intermediario financiero ofrecerá ahora absorber los flujos variables a cambio de recibir un flujo fijo determinado por una tasa s_T^A (tasa de interés *Ask* o de venta del *swap* de TIIE-28 días). En este caso el nivel de la tasa *swap* s_T^A es mayor que s_T^B y la diferencia entre ambas ($s_T^A - s_T^B$) representa el '*Bid-Ask Spread*' o margen de compra-venta del *swap* de TIIE-28 días[48] que el intermediario financiero se queda como ganancia al proveer el servicio de venta de posiciones cortas y largas de *swaps* de TIIE-28 días[49] .

Los intercambios de flujos entre la Empresa 2 y el intermediario financiero se presentan en la Figura 5.3, donde se puede observar que la Empresa 2 cumple el objetivo de cambiar su deuda flotante a una deuda completamente fija con pagos determinados por la tasa de interés fija neta resultante igual a $s_T^A + 0.8\%$.

[46] Se han hecho coincidir los valores nominales del ejemplo para la Empresa 1 con el respectivo del ejemplo de la Empresa 2 para ejemplificar. Esto en general no es así; pero de cualquier manera, los ejemplos aquí presentados son útiles, sin perdida de fundamento, para explicar el uso de los *swaps* de TIIE-28 días, así como el margen de ganancia del intermediario financiero que los ofrece.

[47] Es altamente probable que el intermediario financiero no sólo quiera, sino desee ofrecer este producto para contrarrestar el riesgo de mercado que enfrenta, no así el riesgo crédito (aunque este último se diversifica).

[48] Si se observa bien, al considerar las dos transacciones del intermediario financiero (una con la Empresa 1 y otra con la Empresa 2), se verá que su margen de ganancia monetario, sin riesgo de mercado, es **A-B** cada 28 días por lo que duren los contratos de swap de TIIE-28 días simultáneamente; si algún contrato de *swap* queda abierto por un periodo de tiempo después de que el otro vence, el intermediario financiero tendrá que asumir el riesgo de mercado respectivo.

[49] Es importante recalcar que en la medida que el intermediario financiero tenga un número relativamente grande de contrapartes a las que les ofreció un *swap* de TIIE-28 días, el riesgo de crédito que enfrenta mejora por efecto de la diversificación, además de que su exposición por riesgo de mercado se reducirá al ofrecer perfiles de flujos opuestos entre contrapartes.

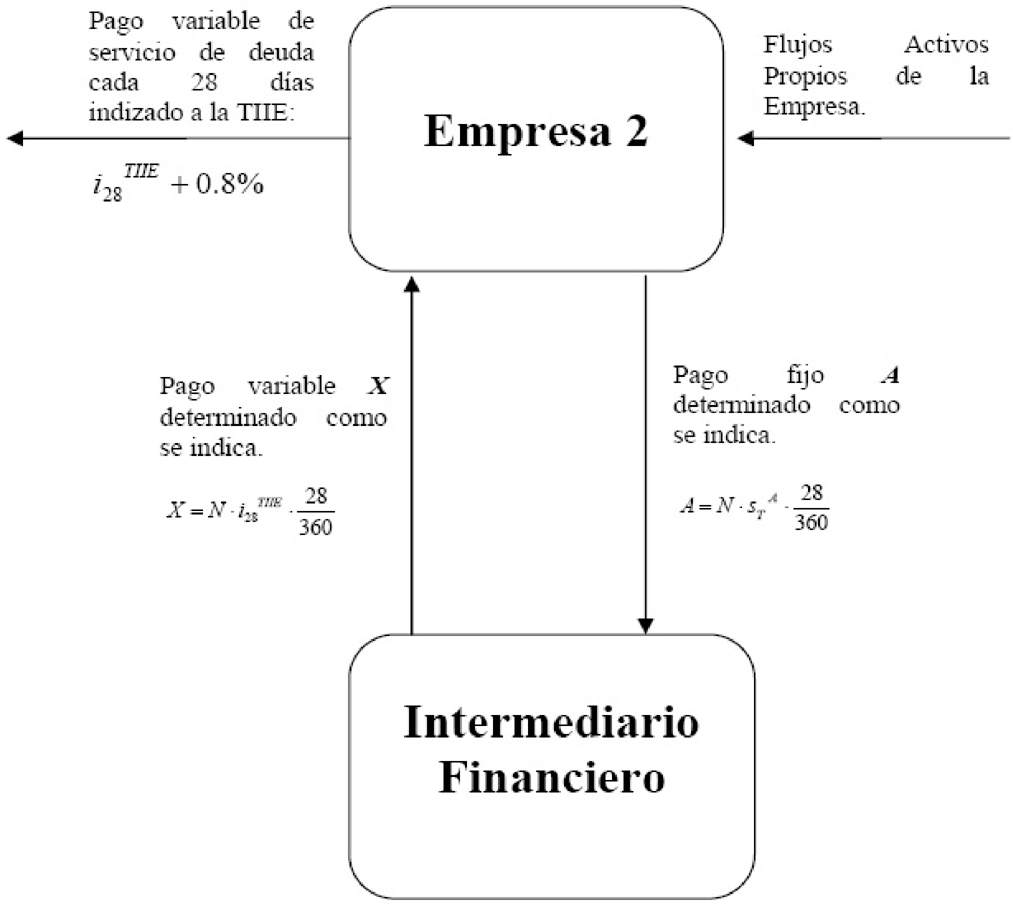

Figura 5.3 Intercambio de flujos variables por flujos fijos a través de un swap de TIIE-28 días.

5.3 Convenciones de Mercado de los Swaps de TIIE-28 Días

El mercado de los *swaps* de TIIE-28 días en México es un mercado sumamente líquido, donde las operaciones se pactan de manera directa entre las partes: una empresa o cliente *vs.* un intermediario financiero (autorizado para operar este tipo de Derivados por parte de Banco de México), o entre dos instituciones financieras (igualmente autorizadas para operar este tipo de Derivados por parte de Banco de México).

Aunque el mercado de los *swaps* de TIIE-28 días es un mercado OTC o de Mostrador, es decir, no tiene una Cámara de Compensación que elimine el riesgo contraparte y de incumplimiento; la documentación legal que circunda a sus contratos (discutidos en la sección V.1) los hace ser productos financieros altamente seguros en su operación, pues se tienen los instrumentos legales para el cumplimiento de las partes, quienes además no desean correr riesgo reputacional que el mercado les imponga al no cumplir con sus obligaciones contractuales[50] .

Algo importante a destacar de la operación de los *swaps* de TIIE-28 días es que si bien existe la posibilidad de incorporar detalles adicionales en sus contratos como la existencia de amortizaciones, el mercado de *swaps* de TIIE-28 días estándar no considera ninguna variante o detalle. Este mercado estándar siempre es la base para la determinación de las cotizaciones de cualquier *swap* de TIIE-28 días. Por ende, las convenciones de este mercado estándar son las que se discutirán en esta sección.

5.3.1 Índice o Tasa de Interés de Referencia

Es la Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio (TIIE) de 28 días, determinada y publicada diariamente por Banco de México de acuerdo a los lineamientos que dicho Banco Central ha establecido para tal efecto (Banxico, 2007).

5.3.2 Convención de Fijación (o Determinación) del Índice para el Pago de Intereses

La TIIE de 28 días se fija un día antes de la fecha de pago de intereses, de manera que la fecha del pacto o cierre del contrato, conocida como '*Trade Date*', es el día de fijación de la TIIE de 28 días. Es decir, si un *swap* de TIIE-28 días se pacta un día viernes (hábil), la TIIE de 28 días de ese día será la que se utilizará para la determinación del pago de intereses, los cuales empezarán a devengarse a partir del día inmediato hábil siguiente (el día lunes en este caso, si consideremos que éste es hábil).

5.3.3 Convención de Fecha de Inicio de Acumulación de Intereses

Los *swaps* de TIIE-28 días inician el día hábil siguiente de su pacto, por ende es a partir de esta fecha que se inicia con la acumulación de intereses; esta fecha es conocida como '*Effective Date*' por lo general se enuncia de manera relativa al *Trade Date* con la convención "T+K" donde "T" es el *Trade Date* y "K" es el número de días hábiles siguientes para iniciar la acumulación de intereses. En el caso particular de los *swaps* de TIIE-28 días, la convención para iniciar la acumulación de intereses es "**T+1**" ya que K=1.

5.3.4 Convenciones para la Cotización de Mercado

La cotización de los *swaps* de TIIE-28 días se hace con la tasa fija o tasa swap, existiendo una cotización de compra y una de venta (ver ejemplos de la sección V.2).

Los *swaps* de TIIE-28 días cotizan a plazos fijos que siempre son relativos a la fecha de cotización o *Trade Date*, de manera que a diferencia de los Bonos y otros instrumentos financieros, siempre es posible conseguir *swaps* de TIIE-28 días a sus plazos de cotización; esto es porque los *swaps* de TIIE-28 días siempre tienen plazos de cotización fijos. A continuación se presentan los plazos de cotización de los *swaps* de TIIE-28 días:

---

[50] Obviamente, para instrumentos financieros derivados *OTC* o de mostrador siempre se tiene el riesgo de incumplimiento (riesgo crédito) aunque mitigado por la documentación ISDA; así como el riesgo de no pago ante quiebra de alguna contraparte o de recuperación litigiosa.

Cuadro 5.1 Identificadores, Plazos de Cotización y Cotizaciones de los swaps de TIIE-28 días.

Identificador	**Plazo**	**Cotización**
TIIE-28 días	4 semanas	7.37%
3x1	12 semanas	7.35%
6x1	24 semanas	7.33%
9x1	36 semanas	7.34%
13x1	52 semanas	7.34%
26x1	104 semanas	7.35%
39x1	156 semanas	7.40%
52x1	208 semanas	7.45%
65x1	260 semanas	7.53%
91x1	364 semanas	7.73%
130x1	520 semanas	7.87%
195x1	780 semanas	8.02%
260x1	1040 semanas	8.13%

FUENTE: Para las cotizaciones de los Swaps de TIIE-28 días, Proveedor Integral de Precios, S.A de C.V. (`www.precios.com.mx`) para el cierre de 2006 -29 de Diciembre de 2006; para la TIIE de 28 días, Banco de México (`www.banxico.org.mx`) para la misma fecha.

El identificador de cotización de los *swaps* de TIIE-28 días mostrado en el Cuadro 5.1 se refiere al número de periodos de intercambio de pagos o flujos, los cuales son de cuatro semanas de acuerdo a la convención de la TIIE de 28 días. De esta manera, el identificador "3x1" indica que se tratan de tres periodos de cuatro semanas, o sea 3x4 = 12 semanas u 84 días.

5.3.5 Convención para la Contabilización de los Días

Algo que es importante mencionar aunque resulte obvio es que los swaps de TIIE-28 días tienen la convención de acumular interés tomando en cuenta que las tasas están "anualizadas" a un año base financiero de 360 días y los días del periodo son los días calendario transcurridos[51].

[51] En general, la anualización de una tasa de interés obedece a la convención de cómo contabilizar los días, la cual se conoce como "*Basis*" y se denota como A/B, donde A puede tomar los valores de "Actual" (ó "A") y "30", denotando, respectivamente, que los días transcurridos en un periodo de pago son los días calendarios de fecha a fecha o bien que los meses deben contarse como 30 "días". B denota el número de "días" que tiene un "año" financiero y puede tomar los valores de "Actual" (con la misma connotación anteriormente descrita), "365", "364", "360", o cualquier otra convención acuñada en cierto mercado particular (lo cual es poco común, pero posible). Para el caso de los *swaps* de TIIE-28 días, el *Basis* es A/360, denotando que las tasas efectivas que realmente se consideran para el cómputo de intereses están anualizadas (por "regla de tres") considerando los días de plazo calendario verdaderos y un "año" financiero de 360 días; de manera que, partiendo de las tasas anualizadas, la tasa efectiva se encuentra siempre multiplicando la tasa anualizada por su plazo en días (calendario) dividido entre 360.

5.3.6 Moneda y Calendario

Los *swaps* de TIIE-28 días están en Pesos Mexicanos (MXN) y el Calendario que les aplica para cualquier ajuste de fechas es el Calendario Mexicano de días inhábiles financieros publicado por la Comisión Nacional Bancaria y de Valores en el Diario Oficial de la Federación (CNBV, 2006).

5.3.7 Ajuste de Días Inhábiles

En el caso de que un flujo a pagar o recibir de los *swaps* de TIIE-28 días caiga en un día inhábil (como un Jueves o Viernes de Semana Santa), entonces la fecha de pago se ajusta al día inmediato siguiente hábil.

5.3.8 Ajuste de Acumulación de Intereses por Día Inhábil

En el caso de que la fecha de pago de intereses (flujo a pagar o recibir) se mueva por existencia de día inhábil, los intereses tendrán que ajustarse para reflejar esto. Es decir, un pago que cae en un Jueves de Semana Santa y se recorre al siguiente Lunes, tendrá que considerar cuatro días más de interés en su acumulación. A su vez, la acumulación de intereses del siguiente periodo de interés iniciará el día Lunes y tendrá cuatro días menos de interés (considerando que la siguiente fecha de pago de interés es hábil).

5.3.9 Cancelación entre Flujos a Pagar y Flujos a Recibir

Los *swaps* de TIIE-28 días tienen la convención (para facilitar su operación y registro contable) de que los flujos a pagar y los flujos a recibir se pueden cancelar entre sí en cada fecha de pago, de manera que sólo se transfiere un flujo neto por la contraparte que resulte con saldo en contra.

5.4 Valuación de los Swaps de TIIE-28 días, Obtención de su Tasa de Cotización o Tasa Swap y Obtención del Precio del Bono Cupón Cero a su Plazo de Madurez

Como se describió en la sección 5.1, un *Swap* de TIIE-28 días es un instrumento financiero que se basa en un contrato marco entre dos partes bien fundado bajo los estándares ISDA bajo el cual se realiza un intercambio de pagos de intereses sobre un mismo nominal de referencia. Dicho intercambio involucra un pago fijo, determinado por una tasa de interés fija (la tasa o cotización del *Swap*) por una de las partes, a cambio de recibir un flujo variable o flotante, determinado por un índice de referencia (la TIIE a 28 publicada por Banco de México) proveniente de su contraparte. Dicho intercambio de flujos debe incorporar las convenciones de mercado de los *Swaps* de TIIE a 28 días descritas en la sección 5.3 anterior.

En la sección 4.1.2 del Capítulo IV se describió la valuación a mercado de cualquier instrumento financiero con flujos definidos en ciertos plazos (instrumentos lineales -sin opcionalidad-). En esta sección revisaremos la equivalencia de las fórmulas allí presentadas (las cuales fueron muy generales) para los *Swaps* de TIIE-28 días.

5.4.1 Valuación a Mercado de los Swaps de TIIE-28 Días

La fórmula de valuación un Swap de TIIE (donde se reciben los flujos fijos), que tiene monto nominal de referencia N y tasa fija Q_{T_n}, cuando se considera explícitamente la serie de flujos fijos denotados como M^f_{n,T_i} $(\left\{M^f_{n,T_i} > 0\right\}^n_{i=1})$ y la serie de flujos variables denotados como M^v_{n,T_i} $(\left\{M^v_{n,T_i} > 0\right\}^n_{i=1})$ es (ver ecuación general IV.2 en el Capítulo IV):

$$\begin{aligned} V(t,T_n) &= \sum_{i=1}^{n} B(t,T_i)M^f_{n,T_i} - \sum_{i=1}^{n} B(t,T_i)M^v_{n,T_i} \\ \text{con} \quad M^v_{T_i} &= N \cdot L(t,T_i,T_{i-1}) \cdot (T_i - T_{i-1}), \quad i = 1,2,...,n \end{aligned} \tag{5.3}$$

Donde la variable t denota que la valuación se realiza en cualquier momento y T_n representa el plazo de madurez del *swap* de TIIE-28 días que se está valuando a mercado. La fórmula de valuación del *Swap* de TIIE dada por la ecuación 5.3 presupone que se conoce la estructura de plazos de las tasas de interés Notar que se ha considerado $L(t,T_i,T_{i-1})$ como la tasa flotante futura (la TIIE a 28 días) que deberá conocerse a través de la propia estructura de plazos de las tasas de interés dada por la curva de descuentos $(T_i - t, B(t,T_i))$, $0 \leq i \leq n$.

5.4.2 Obtención de la Tasa de Cotización o Tasa Swap

Si en particular consideramos que la valuación se realiza en le fecha efectiva de inicio de los *swaps* de TIIE-28 días, entonces la tasa *swap* Q_{T_n} ó cotización *all in cost* o tasa interna de retorno de los flujos del *swap* completo (tanto pata fija como pata variable) es tal que hace el valor del *swap* de TIIE-28 días $V(t,T_n)$ igual a cero. Por lo tanto tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} B(t,T_i)M^f_{T_i} = \sum_{i=1}^{n} B(t,T_i)M^v_{T_i} \tag{5.4}$$

Si a la ecuación 5.4 le agregamos en ambos lados el término $N \cdot B(t,T_n)$ no se altera (esto es equivalente a considerar que se intercambia flujo al final, pero bajo la consideración de neteo de flujos en los *Swaps* de TIIE-28 días, esto no afecta en absoluto la valuación de dicho instrumento) y obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} B(t,T_i)M^f_{T_i} + N \cdot B(t,T_n) = \sum_{i=1}^{n} B(t,T_i)M^v_{T_i} + N \cdot B(t,T_n) \tag{5.4bis}$$

O alternativamente:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} B(t,T_i) \cdot N \cdot Q_{T_n}(T_i - T_{i-1}) + N \cdot B(t,T_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} B(t,T_i) \cdot N \cdot L(t,T_{i-1},T_i) \cdot (T_i - T_{i-1}) + N \cdot B(t,T_n) \end{aligned} \tag{5.5}$$

La ecuación 5.5 no es más que la representación del mismo swap de TIIE-28 días que madura en T_n, pero sobre un nominal de referencia unitario, ya que se puede pensar que $N = 1$.

Sea:

$$W(t,T_n) \equiv \sum_{i=1}^{n} B(t,T_i)\cdot L(t,T_{i-1},T_i)\cdot(T_i - T_{i-1}) + B(t,T_n) \tag{5.6}$$

$W(t,T_n)$ representa el valor a mercado (valor presente) de la serie de flujos flotantes, incluyendo el monto nominal al final.

Ahora bien, dada la estructura de plazos $(T_i - t, B(t,T_i))$, $0 \leq i \leq n$, la tasa flotante futura $L(t,T_i,T_{i-1})$ (en realidad una tasa forward discreta de composición simple) se puede obtener como:

$$L(t,T_i,T_{i-1}) = \frac{1}{T_i - T_{i-1}}\left(\frac{B(t,T_{i-1})}{B(t,T_i)} - 1\right) \tag{5.7}$$

La ecuación 5.6 se puede escribir ahora como:

$$W(t,T_n) = \sum_{i=1}^{n} B(t,T_i)\cdot\left(\frac{B(t,T_{i-1})}{B(t,T_i)} - 1\right) + B(t,T_n) \tag{5.6bis}$$

O equivalentemente:

$$W(t,T_n) = \sum_{i=1}^{n-1} B(t,T_i)\cdot\left(\frac{B(t,T_{i-1})}{B(t,T_i)} - 1\right) + B(t,T_n)\left(\frac{B(t,T_{n-1})}{B(t,T_n)} - 1\right) + B(t,T_n)$$

De donde:

$$W(t,T_n) = \sum_{i=1}^{n-1} B(t,T_i)\cdot\left(\frac{B(t,T_{i-1})}{B(t,T_i)} - 1\right) + B(t,T_{n-1}) \tag{5.8}$$

La ecuación 5.8 es similar a la ecuación 5.6bis en estructura, solo que ya no tiene los términos que dependen de T_n. De acuerdo a esto, se puede repetir el proceso anterior y obtener ahora:

$$W(t,T_n) = \sum_{i=1}^{n-2} B(t,T_i)\cdot\left(\frac{B(t,T_{i-1})}{B(t,T_i)} - 1\right) + B(t,T_{n-1})\cdot\left(\frac{B(t,T_{n-2})}{B(t,T_{n-1})} - 1\right) B(t,T_{n-1})$$

De donde:

$$W(t,T_n) = \sum_{i=1}^{n-2} B(t,T_i)\cdot\left(\frac{B(t,T_{i-1})}{B(t,T_i)} - 1\right) + B(t,T_{n-2}) \tag{5.8bis}$$

El proceso entre la ecuación 5.8 y 5.8bis se puede repetir hasta llegar a:

$$W(t,T_n) = \sum_{i=1}^{1} B(t,T_i)\cdot\left(\frac{B(t,T_{i-1})}{B(t,T_i)} - 1\right) + B(t,T_1)$$

O bien:

$$W(t,T_n) = B(t,T_1)\cdot\left(\frac{B(t,T_0)}{B(t,T_1)} - 1\right) + B(t,T_1) = B(t,T_0) = B(t,t) = B(0,0) = 1 \tag{5.9}$$

La ecuación 5.9 es sumamente importante, pues representa que al momento de la cotización de un swap de TIIE-28 días, éste se encuentra en equilibrio en el entendido que la serie de flujos flotantes, incluyendo pago de nominal al final, determinados por las tasas de interés forwards dadas por los propios precios de los bonos cupón cero, es igual al valor del nominal (recordar que esto se derivo de la ecuación 5.5 donde $N = 1$[51]). Con este resultado inmediatamente se obtiene (de la ecuación 5.5) que:

$$\sum_{i=1}^{n} B(t,T_i) \cdot Q_{T_n}(T_i - T_{i-1}) + B(t,T_n) = 1 \tag{5.10}$$

Despejando de la ecuación 5.10 la tasa de cotización Q_{T_n} (también llamada"tasa *swap*") obtenemos:

$$Q_{T_n} = \frac{1 - B(t,T_n)}{\sum\limits_{i=1}^{n} B(t,T_i) \cdot (T_i - T_{i-1})} \tag{5.11}$$

La ecuación 5.11 permite obtener la tasa de cotización de los swaps de TIIE-28 días dada la estructura de plazos $(T_i - t, B(t,T_i))$, $0 \leq i \leq n$.

5.4.3 Obtención del Precio del Bono Cupón Cero al Plazo de Madurez

Despejando de la ecuación 5.10 el precio del bono cupón cero al plazo de cotización del *swap* de TIIE-28 días T_n, obtenemos:

$$B(t,T_n) = \frac{1 - Q_{T_n} \sum\limits_{i=1}^{n-1} B(t,T_i) \cdot (T_i - T_{i-1})}{1 + Q_{T_n} \cdot (T_n - T_{n-1})} \tag{5.12}$$

La ecuación 5.12 permite obtener el precio del bono cupón cero al plazo de cotización del *swap* de TIIE-28 días T_n si se conoce la tasa *swap* o tasa de cotización Q_{T_n} y los precios de los bonos cupón cero de todos los flujos del *swap* de TIIE con plazo menor a T_n. Esta ecuación es una ecuación muy importante a la hora de aplicar el modelo pues será la condición para obtener los precios de los bonos cupón cero a partir de las cotizaciones de los *Swaps* de TIIE-28 días. Es importante notar que la ecuación 5.12 no es más que el caso particular para los *Swaps* de TIIE-28 días de la ecuación $g_{N_k}(\bullet)$ de $\mathbf{B}$ presentada en la sección 4.4.1.1 del Capítulo 4 cuando algunos $B(t,T_i)$, $T_i < T_n$ dependen del propio $B(t,T_n)$.

5.5 Consideración de Segmentación de Mercados para la obtención de cotizaciones de Swaps de TIIE en Plazos No Comercializables

Tal como se describió en el Capítulo II, el marco teórico más completo que explica la estructura intertemporal de las tasas de interés y por ende la curva de descuentos es la Teoría del Nicho Preferido de Modigliani y Sutch (1966) que incorpora preferencias por liquidez y segmentación de mercados.

[51] En la práctica se dice que "la pata flotante (serie de flujos flotantes, incluyendo el nominal al final) vale par". Esta expresión indica que el valor presente o valor de mercado es igual al valor nominal (el valor de mercado y el valor nominal están a la par).

Con la intención de presentar de una forma más clara la consideración del presente trabajo respecto de utilizar las cotizaciones de los Swaps de TIIE de en sus plazos con mayor comerciabilidad, profundidad y liquidez para obtener los cotizaciones en plazos no comercializables, se representa gráficamente (en la Figura 5.4) la consideración de mercados segmentados en el caso de los Swaps de TIIE. Se eligen los Swaps de TIIE de 1 hasta 5 años (identificados como "13x1", "26x1", "39x1", "52x1" y "65x1").

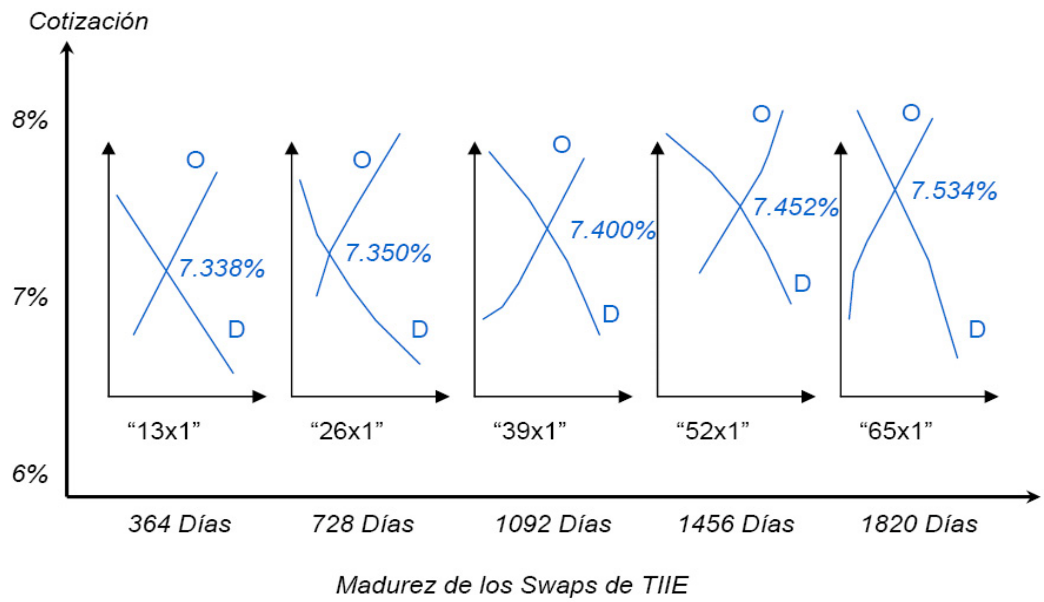

Figura 5.4 Descripción de la Teoría de Hábitat Preferido o Mercados.

Segmentados para la Estructura de Cotizaciones de los Swaps de TIIE-28 días.

Diversos estudios como el de Fama (1984), Babbel (1983) e incluso libros de texto como Santomero (1957) [páginas 86-91], presentan la correlación existente entre tasas de interés spot a distintos plazos. Bravo (2007) muestra que en general, entre más cerca (en cuanto a plazo) se encuentren las tasas de interés, mas fuerte será su correlación. La idea subyacente puede ser interpretada en el marco de la teoría de mercados segmentados o de hábitat preferido, bajo el cual los participantes de mercado tienen preferencias a lo largo de la madurez basadas en oferta y demanda (principal supuesto de ésta teoría). Por lo tanto, instrumentos con madurez no muy diferente deben tener preferencias no muy diferentes por parte de los participantes del mercado.

En el Capítulo siguiente (Capítulo VI) se presenta la aplicación de los modelos desarrollados en los Capítulos III y IV, donde obviamente se argumenta que de entre ellos, el Modelo 4 (aportación de este trabajo de tesis) es el que contiene fundamentos más sólidos para ser el utilizado en la derivación de la estructura de plazos de las tasas de interés de los Swaps de TIIE-28 días.

CAPÍTULO 6

OBTENCIÓN DE LA ESTRUCTURA DE PLAZOS DE LAS TASAS DE INTERÉS DE LOS SWAPS DE TIIE-28 DÍAS

En este capítulo se presenta de manera explícita la aplicación del modelo de ajuste de la curva de rendimientos a través de tasas de interés *forward instantáneas* con tendencia variable y que sigue una relación de sustitución entre mercados adyacentes (Modelo 1 y 4 del capítulo IV) y sus variantes (Modelos 2, 3, 5 y 6). Es importante recordar que este modelo se encuentra dentro del universo de los modelos empíricos de ajuste de la curva de rendimientos; sin embargo, su desarrollo está fundamentado en los principios base de la economía financiera combinando la Teoría de Equilibrio con la de Segmentación de Mercados.

La aplicación del modelo se hace considerando los planteamientos de los Capítulos III y IV, por lo que no se vuelven a presentar explícitamente las ecuaciones utilizadas. Sin embargo, en el Anexo VI.1 se muestra el código utilizado para obtener la curva de rendimientos *spot* de los *swaps* de TIIE, en el que se aplican todas las ecuaciones. El uso de este código es indispensable para la aplicación de las técnicas de análisis numérico (solución de punto fijo) empleadas para la obtención de la solución de los modelos 4 a 6 analizados en el Capítulo IV[53].

La derivación de la estructura de plazos de las tasas de interés de los *Swaps* de TIIE-28 días (el *Bootstrapping*) se hace considerando las convenciones e información de mercado tal cual se opera en la práctica; esto se hace con la finalidad de que el trabajo realizado represente una verdadera guía para quienes deseen implementar el modelo.

Para la aplicación de los modelos se toma la información de las cotizaciones de los *Swaps* de TIIE-28 días del cierre de 2006 (29 de Diciembre de 2006). La estructura de plazos de las tasas de interés se presenta: con tasas cupón cero de composición continua, para estar en contexto con los desarrollos teóricos; con tasas cupón cero de composición a 28 días, utilizando las mismas

[53] El código está escrito en lenguaje de programación *Visual Basic* debido a que se consideró que es el lenguaje de más fácil acceso para cualquier lector al encontrarse disponible con las aplicaciones de Microsoft Office©. No obstante, se cuidó la no utilización de comandos propios de *Visual Basic for Applications* (VBA) para que dicho código provea de una solución algorítmica prácticamente general (sólo se utilizó la funcionalidad de introducir arreglos numéricos a través de las celdas de Microsoft Excel por practicidad). Esta presentación del código permite, si así se desea, migrarlo a prácticamente cualquier lenguaje de programación. En este sentido, el anexo VI.1 puede ser utilizado en cualquier computadora siempre que está tenga Microsoft Excel; sólo basta copiar y pegar cada uno de los códigos en la sección de programación del usuario de Microsoft Excel (accesada una vez iniciado Excel con la combinación de teclas <Alt> + <F11>) dentro de un modulo de programación (que se inserta fácilmente en el menú **Insertar** → **Modulo** (o **Insert** → **Module**) si se tiene la versión en inglés) de dicha sección.

convenciones del índice TIIE-28 días; y con tasas cupón cero de composición simple (convención usada por los proveedores de precios locales como PiP y ValMer).

6.1 Enfoque General de la Derivación de la Estructura de Plazos de las Tasas de Interés

Algo importante a considerar cuando se quiere derivar la estructura de plazos de las tasas de interés de los *swaps* de TIIE-28 días es que en la práctica todos los mercados (incluyendo el de *Swaps* de TIIE-28 días) nos proveen sólo de un conjunto discreto de cotizaciones de mercado, el cual a su vez determina sólo un conjunto discreto de descuentos o tasas de interés. Por lo tanto, siempre es necesario utilizar modelos de interpolación o comportamiento sobre las tasas cupón cero o tasas forward tales como los modelos 1 a 6 del Capítulo IV[54].

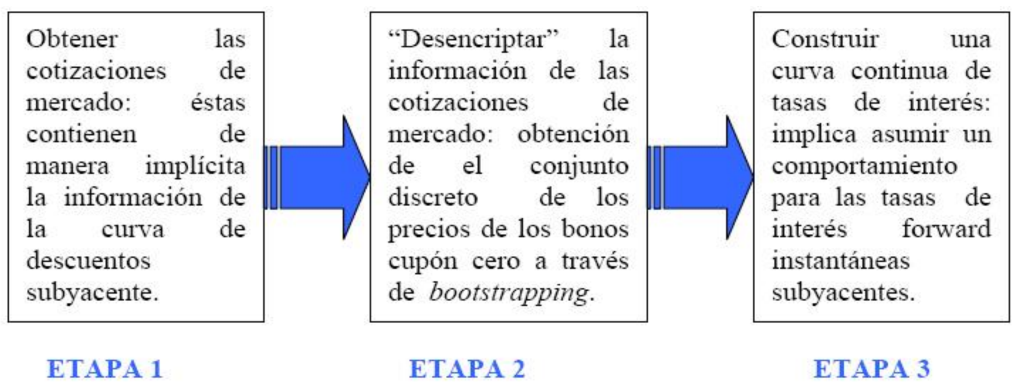

Figura 6.1 Etapas a seguir para la obtención empírica de una curva de tasas o descuentos.

Nos enfrentamos entones a un problema que debe ser resuelto por etapas tal como se muestra en la Figura 6.1. En dicha figura, las etapas 1 y 2 requieren que se tenga conocimiento preciso del mercado; de otra manera, como lo menciona Brousseau (2000) se, obtendrán malas estimaciones de los parámetros ya que la información de mercado no estará correctamente traducida al lenguaje común de los modelos.

En el Capítulo V se presentó una descripción completa de los Swaps de TIIE-28 días, incluyendo su uso y convenciones que se consideran en las Etapas 1 y 2 de la Figura 6.1 para la obtención de su curva de descuentos y correspondientes tasas forward y cupón cero que se obtendrán en este capítulo más adelante.

6.2 Interpolación de las Cotizaciones

Es común que se realice una interpolación de las cotizaciones de los *Swaps* de TIIE-28 días para obtener nuevos datos de mercado sintéticos ya sea para derivar de manera rápida una cotización de un *Swap* de TIIE-28 días a un plazo de cotización no estándar del mercado o para crear "nuevos"

[54] De aquí en adelante nos referiremos a la curva de descuentos como la determinante de la curva de tasas de interés (tipo cupón cero) ya que cualquiera de ellas determina a la otra.

nodos que permitan ajustar un *Bootstrapping* de manera más simple 129 (pudiéndose evitar la necesidad de aplicar métodos numéricos). Esta idea de interpolar las cotizaciones es algo que obedece a la ingeniería financiera, no obstante es muy difícil explicar dicha interpolación en términos de un análisis sobre la curva de rendimientos, pues las cotizaciones en general son índices que representan simplemente una convención para definir el nivel de compra y venta de los *Swaps* de TIIE-28 días. De hecho los niveles de cotización de los *Swaps* de TIIE-28 días son tasas de interés internas de retorno sólo válidas para el muy particular conjunto de flujos definidos por dicho instrumento (determinados tanto por la tasa fija a entregar o recibir –pata fija– como por el índice TIIE a 28 días a recibir o entregar –pata variable–, respectivamente). De acuerdo a lo anterior, es evidente que una interpolación de las cotizaciones en este caso es muy difícil de explicar en términos formales y cualquier explicación será dependiente de la forma en que se realice dicha interpolación y la definición en si misma del nivel de cotización.

No obstante, el presente trabajo de tesis no pretende juzgar la factibilidad o no de la interpolación de las cotizaciones dentro de un marco conceptual de las Finanzas como rama de la Economía, cuando está última es una ciencia social que mucho de su análisis y desarrollo se basa en hechos (Economía Positiva), los cuales no pueden replicarse en un laboratorio como simples experimentos (Venegas (2006), Introducción). Más aún, con la finalidad de probar los Modelos 1 a 3 analizados en el Capítulo IV, se hará uso de la interpolación de las cotizaciones para poder crear un sistema de ecuaciones de mercado determinado a través de obtener (por interpolación) cotizaciones sintéticas para los plazos necesarios.

6.2.1 Obtención de Cotizaciones Sintéticas para los Swaps de TIIE-28 Días

De manera general, las cotizaciones sintéticas se pueden obtener utilizando cualquier técnica de ajuste a la curva de cotizaciones (tasas *swap*) de los swaps de TIIE-28 días, así se puede utilizar un enfoque de ajuste polinomial entre dos puntos de cotización adyacentes que asegure suavidad al igualar derivadas, como el caso de los *splines* cúbicos de Adams & Van Deventer (1994); un ajuste global a través de una regresión no lineal, como aplicar la forma funcional resultante del modelo de Nelson & Siegel (1987) a las cotizaciones (en lugar de las tasas ceros de composición continua), un ajuste analítico global o local de un polinomio de grado $n-1$ si se toman n puntos de cotización, una interpolación que combine linealmente dos ajustes polinomiales locales adyacentes, entre otros enfoques

Debido a que el propósito fundamental de este capítulo es mostrar en particular la aplicación de los modelo del Capítulo IV, interpolaremos las cotizaciones por medio del ajuste de una recta a dos nodos adyacentes (enfoque de ajuste analítico polinomial local), es decir, obtendremos las cotizaciones sintéticas utilizando la siguiente fórmula[55]:

$$
\begin{aligned}
& Q_T = \alpha_i Q_{T_{i-1}} + (1-\alpha_i) Q_{T_i}, \quad T \in [T_{i-1}, T_i] \\
& \text{cn} \ \ \alpha_i = \frac{(T_i - t) - (T - t)}{(T_i - t) - (T_{i-1} - t)} = \frac{T_i - T}{T_i - T_{i-1}}.
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

6.3 El Bootstrapping a través de Dos Enfoques

El análisis de *Bootstrapping* presentado en este capítulo se realiza por medio de dos enfoques:

1. **Enfoque 1 (Modelos 1 a 3 del Capítulo IV)**: *Bootstrapping* con interpolación previa de cotizaciones de mercado.- Técnica de ajuste o derivación de la curva de rendimientos que utiliza las cotizaciones de mercado estándar y las cotizaciones de mercado sintéticas necesarias (creadas a partir de las primeras por interpolación o ajuste de la curva de cotizaciones) para poder crear un sistema de ecuaciones de mercado determinado. Este enfoque se utilizará para los Modelos 1 a 3 presentados en el Capítulo IV.

2. **Enfoque 2 (Modelos 4 a 6 del Capítulo IV)**: *Bootstrapping* utilizando únicamente las cotizaciones de mercado estándar.- Técnica de ajuste o derivación de la curva de rendimientos que utiliza sólo las cotizaciones de mercado estándar y recurre a técnicas de solución de análisis numérico para poder obtener implícitamente los precios de los bonos cupón cero (o su tasa de interés respectiva) necesarios para valuar cada flujo. Pare ello se considera implícito un modelo de comportamiento de las tasas *forward instantáneas* subyacentes. Este enfoque se utilizará para los Modelos 4 a 6 presentados en el Capítulo IV.

6.4 La Estructura de Plazos de las Tasas de Interés: Modelo 1, 2 y 3

Para derivar la estructura de plazos de las tasas de interés de los *swaps* de TIIE-28 días, se necesita primero inspeccionar a todos y cada uno de los instrumentos financieros para saber en qué plazos se tendrán flujos. En el caso particular de los *Swaps* de TIIE-28 días, debido a que cotizan siempre en número entero de flujos (si se considera la fecha efectiva de inicio de cada *Swap*), entonces se puede ver que existirá un flujo cada 28 días de plazo, o el plazo que lo sustituya de acuerdo a la convención "*following*" o siguiente día hábil de ajuste de fecha de pago por día inhábil. De acuerdo a esto y considerando el calendario mexicano de días inhábiles financieros del año 2006 al año 2030, presentado en el Anexo VI.2[56], se tiene que al 29 de Diciembre de 2006 para todos y cada uno de los *Swaps* de TIIE-28 días (hasta el *Swap* de 20 años o el "260x1") se tendrá flujo

---

[55] La interpolación lineal presentada en la ecuación 5.10 es la más común en el mercado cuando se interpolan cotizaciones, por lo que es la llamada "*Street Convection*" para interpolar cotizaciones. Sin embargo, cuando sea posible, cualquier *trader* preferirá obtener cotizaciones a plazos de cotización no estándar del mercado de manera implícita utilizando la curva de rendimientos obtenida por *bootstrapping*.

[56] Donde se toma el patrón de días inhábiles con base a lo publicado por la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV (2006)).

en 260 fechas presentadas en el Anexo VI.3. Como resumen, el Cuadro 6.1 presenta las fechas correspondientes con los plazos de las cotizaciones estándar de mercado incluyendo la propia TIIE a 28 días (mostrada con el identificador "1x1")[57].

Cuadro 6.1 Fechas y plazos de los últimos flujos de los swaps de TIIE-28 días para el cierre de 2006 (29 de diciembre de 2006).

Fecha *Cash*: Vie,29-Diciembre-2006 ["T"]

Fecha *Spot*: Mar,02-Enero-2006 ["T+1"]

No	Fecha Nominal	Fecha Efectiva	Plazo Spot (Días)	Cotización/1	Factor Descuento/2	Tasa Cupón Cero/3
0	Mar,02/01/2007	Mar,02/01/2007	0	7.3700%	1.00000000	7.3490%
1	Mar,30/01/2007	Mar,30/01/2007	28	7.3700%	0.99430045	7.3490%
3	Mar,27/03/2007	Mar,27/03/2007	84	7.3480%	0.98304898	7.3270%
6	Mar,19/06/2007	Mar,19/06/2007	168	7.3320%	0.96645757	7.3110%
9	Mar,11/09/2007	Mar,11/09/2007	252	7.3380%	0.95006982	7.3171%
*13	Mar,01/01/2008	Mié,02/01/2008	365	7.3380%	0.92849815	7.3171%
26	Mar,30/12/2008	Mar,30/12/2008	728	7.3500%	0.86224075	7.3296%
39	Mar,29/12/2009	Mar,29/12/2009	1092	7.4000%	0.79934659	7.3833%
52	Mar,28/12/2010	Mar,28/12/2010	1456	7.4520%	0.74013251	7.4405%
65	Mar,27/12/2011	Mar,27/12/2011	1820	7.5340%	0.68324499	7.5343%
91	Mar,24/12/2013	Mar,24/12/2013	2548	7.7250%	0.57722887	7.7640%
130	Mar,20/12/2016	Mar,20/12/2016	3640	7.8660%	0.44810248	7.9391%
195	Mar,14/12/2021	Mar,14/12/2021	5460	8.0240%	0.2897879	8.1666%
260	Mar,08/12/2026	Mar,08/12/2026	7280	8.1294%	0.18467006	8.3531%

* Fecha Nominal ajustada por día inhábil.

1/ Tasa Swap o tasa de la pata fija del Swap de TIIE.

2/ Factor de descuento (precio del bono cupón cero) resultante de resolver para las cotizaciones de mercado el equilibrio (exógeno) sin utilizar ningún método numérico y modelo de ajuste de las tasas de interés forward instantáneas.

3/ Tasa de interés tipo cupón cero de composición continua al plazo indicado en la columna 'Plazo Spot (Días)' con *Basis* Actual/360.

FUENTE: Construido por el autor con base en los datos de PiP de cotizaciones de Swaps de TIIE para el 29 de Diciembre de 2006.

[57] Se incluye la TIIE a 28 días por representar el caso trivial de un *Swap* de TIIE-28 días de un solo flujo, el cual realmente no es de interés del mercado (pues el flujo fijo y variable a intercambiar en un solo periodo de cuatro semanas son del mismo monto), pero para propósitos del *Bootstrapping* define el primer mercado de cotización a plazo.

6.4.1 Obtención de Cotizaciones Sintéticas

Una vez obtenidas las fechas y plazos en que habrá flujo (condición para aplicar el enfoque 1 de *Bootstrapping* según lo planteado anteriormente), ahora se requiere crear cotizaciones sintéticas para cada plazo donde no existan (cada plazo del anexo VI.3 que no corresponde con los plazos de la tabla VI.1). Esto se hace con la ecuación 6.1 y los resultados se presentan también en el anexo VI.3. En el anexo VI.1 se presenta el código utilizado para generar fechas (VI.1.1), ajustar las fechas por días inhábiles (VI.1.2) y realizar la interpolación (VI.1.3).

La Figura 6.2a presenta todas y cada una de las cotizaciones tanto a plazos estándar del mercado (mostradas con marcadores), como las obtenidas por interpolación. La Figura 6.2b presenta una ampliación de la Figura 6.2a pero para el primer año (13 periodos de 28 días ó 52 semanas, que es donde termina el *Swap* "13x1" de TIIE-28 días de "1 año"). Como se puede observar en detalle en la Figura 6.2b, la interpolación es lineal reflejando la forma funcional de la ecuación 6.1.

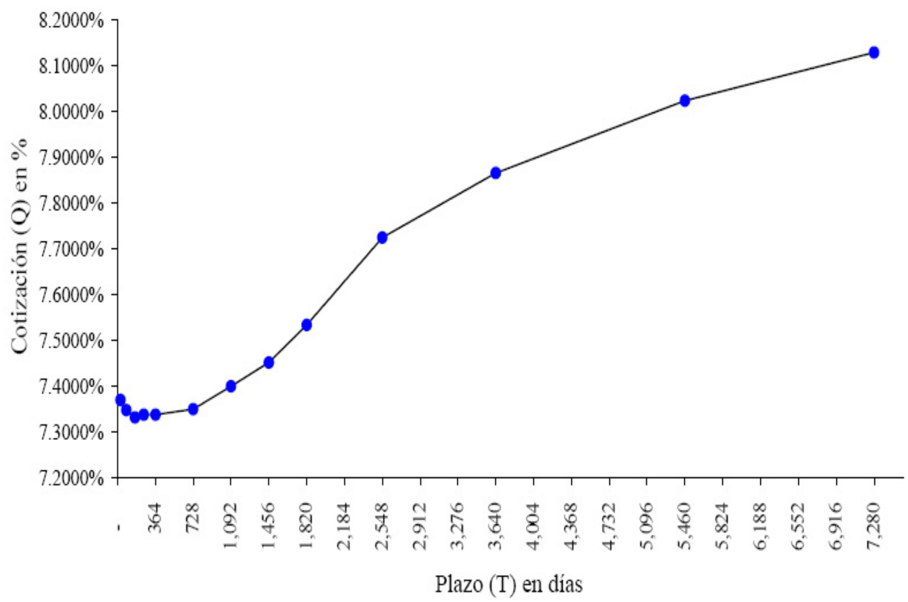

Figura 6.2a. Mercados de cotización a plazos estándard e interpolados.

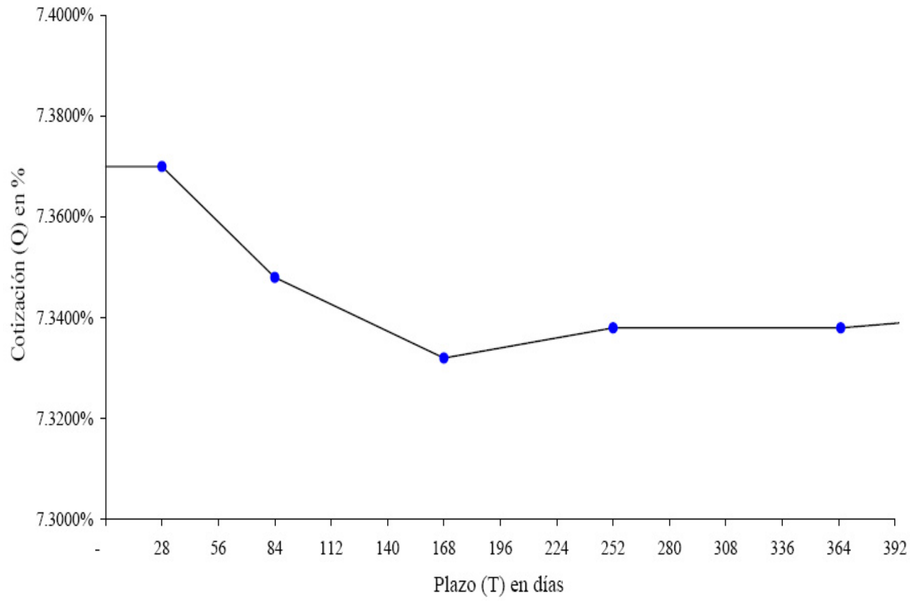

Figura 6.2b. Mercados de cotización a plazo hasta un año.

6.4.2 Obtención de los Precios de los Bonos Cupón Cero

Ahora que se tienen cotizaciones a cada uno de los flujos de cada instrumento financiero, se pueden obtener los precios de los bonos cupón cero de manera directa y sin necesidad de utilizar alguna técnica de solución de análisis numérico, simplemente utilizando la ecuación 5.12. Esto es posible debido que se tiene una cotización (Q_{T_n}) para cada plazo donde existe flujo, de manera que no existen flujos donde no se pueda aplicar la ecuación 5.12. En la sección VI.1.4 del anexo VI.1 se presenta el código utilizado para generar los factores de descuento.

Las Figuras 6.3a y 6.3b presentan, respectivamente, los factores de descuento para todos los plazos (a fecha spot) correspondiente a todas las fechas en que existe flujo y los factores de descuento para el primer año. Como se puede observar en detalle en la Figura 6.3b, los factores de descuento obtenidos son puntuales, por lo que no es posible obtener la curva de rendimientos de manera continua sin recurrir a algún tipo de modelo de comportamiento de las tasas forward instantáneas implícitas[58]. El Cuadro 6.1 muestra los resultados numéricos de los precios de los bonos cupón cero obtenidos para los plazos de cotización estándar (de los swaps). En el anexo VI.3 se pueden encontrar todos y cada uno de los precios de los bonos cupón cero para cada plazo de cada swap donde hay flujo.

[58] Vale la pena mencionar que es práctica común interpolar dichos factores de descuento a través de alguna técnica de interpolación como las mencionadas en la sección VI.2.1 para poder valuar cualquier serie de flujos. Interpolar sobre los factores de descuento puede ser práctico, pero la forma más aceptada de hacer la interpolación es sobre las tasas de interés forward instantáneas.

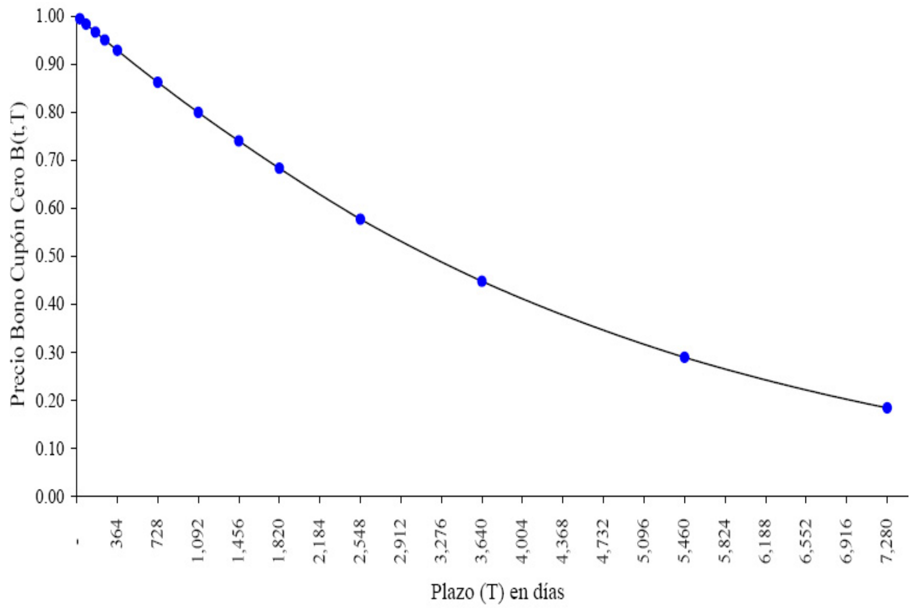

Figura 6.3a. Precios de los bonos cupón cero a plazos estándard e interpolados.

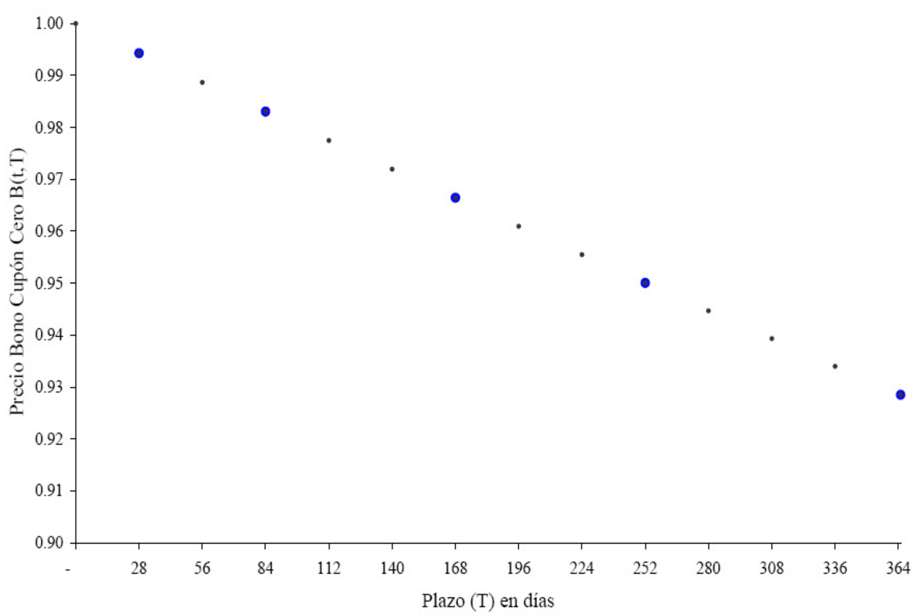

Figura 6.3b. Precios de los bonos cupón cero a plazos estándard e interpolados hasta un año.

A partir de los factores de descuento o precios de los bonos cupón cero, se pueden obtener las tasas de interés cupón cero de composición continua utilizando la ecuación 3.47. Tales tasas se presentan en la última columna en el Cuadro 6.1 y en anexo VI.3.

6.4.3 Obtención de las Tasas de Interés Forward Instantáneas para Cada Modelo

Con la intención de tener de manera completa (y continua) cualquier factor de descuento y consecuentemente cualquier nivel de tasa de interés sea esta expresada con composición continua (ecuación 3.47), con composición a cierto plazo (ecuaciones 3.10 y 3.49) o composición simple al plazo (ecuación 3.50), es que se necesita realizar el ajuste en tiempo continuo de la curva de rendimientos. Esto lo haremos aplicando las ecuaciones de ajuste de las tasas de interés forward instantáneas de los modelos 1 a 3 derivados en el Capítulo IV.

El Cuadro 6.2 muestra las tasas forward instantáneas obtenidas de aplicar: i) el modelo de tasas de interés forward instantáneas con tendencia variable y que sigue una relación de sustitución entre mercados adyacentes (Modelo 1); ii) el modelo de tasas de interés forward instantáneas con tendencia constante (Modelo 2); y iii) el modelo de tasas de interés forward instantáneas con tendencia nula (Modelo 3). Sólo se muestra la tasa forward para cada periodo efectivo de cuatro semanas hasta el primer año por fines prácticos; sin embargo, todo el continuo de tasas de interés forward instantáneas para cada modelo se muestra en las Figuras 6.4a, 6.4b, 6.4c y 6.4d. Para poder realizar esto se ha utilizado el código presentado en las secciones 6.1.5 y 6.1.7 del Anexo VI.1.

Cuadro 6.2 Tasas forward instantáneas derivadas con los modelos 1 a 3.

Fecha *Cash*: Vie,29-Diciembre-2006 ["T"]

Fecha *Spot*: Mar,02-Enero-2006 ["T+1"]

Plazo Spot	Factor Descuento	Tasa Forward Modelo 1/1	Tasa Forward Modelo 2/2	Tasa Forward Modelo 3/3
0	1.00000000	7.3526%	7.3544%	7.3490%
28	0.99430045	7.3416%	7.3435%	7.3490%
56	0.98865025	7.3160%	7.3160%	7.3270%
84	0.98304898	7.3016%	7.2997%	7.3050%
112	0.97747894	7.3022%	7.3032%	7.3057%
140	0.97194857	7.2896%	7.2896%	7.2950%
168	0.96645757	7.2961%	7.2918%	7.2842%
196	0.96096685	7.3335%	7.3366%	7.3253%
224	0.95550431	7.3314%	7.3314%	7.3294%
252	0.95006982	7.3287%	7.3304%	7.3335%
280	0.94467822	7.3144%	7.3131%	7.3171%
308	0.93931723	7.3171%	7.3171%	7.3171%
336	0.93398665	7.3169%	7.3170%	7.3171%
365	0.92849815	7.3214%	7.3201%	7.3164%

1/ Tasa de interés forward instantánea con tendencia variable y que sigue una relación de sustitución entre mercados adyacentes con *Basis* Actual/360.

2/ Tasa de interés forward instantánea con tendencia constante con *Basis* Actual/360.

3/Tasa de interés forward instantánea con tendencia nula con *Basis* Actual/360.

FUENTE: Construido por el autor con base en los datos de PiP de cotizaciones de Swaps de TIIE para el 29 de Diciembre de 2006.

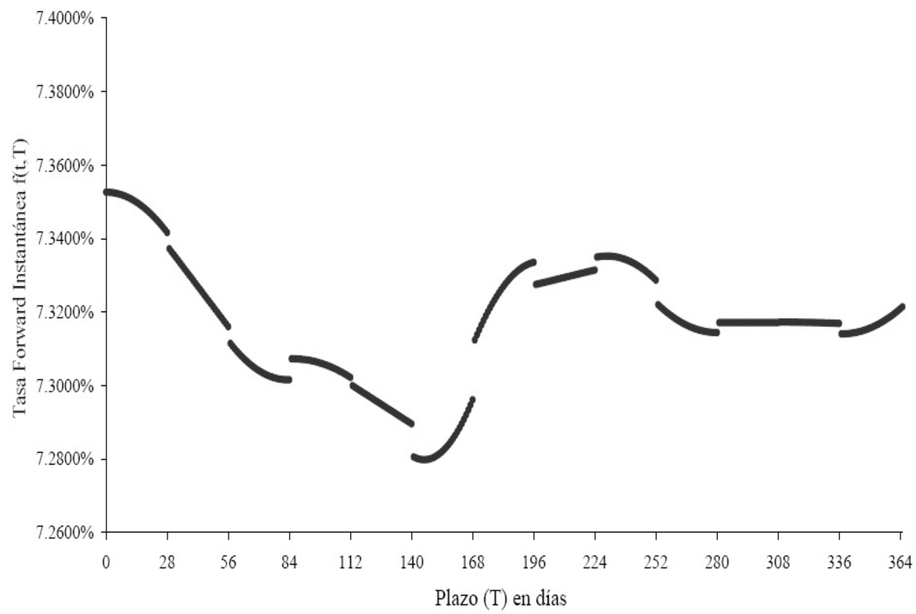

Figura 6.4a. Tasa de interés forward instantánea con tendencia variable y que sigue una relación de sustitución entre mercados adyacentes (modelo exógeno).

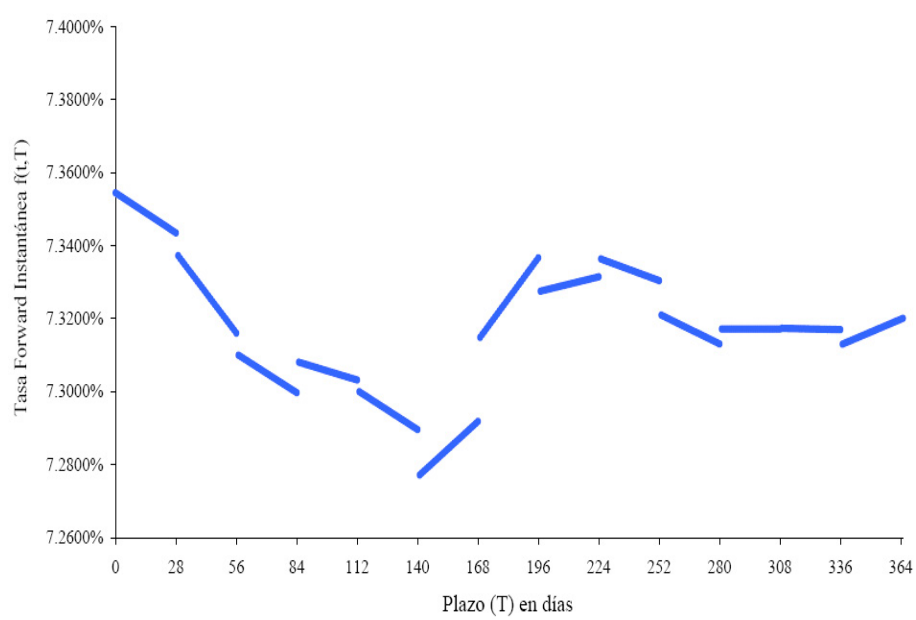

Figura 6.4b. Tasa de interés forward instantánea con tendencia constante (modelo exógeno).

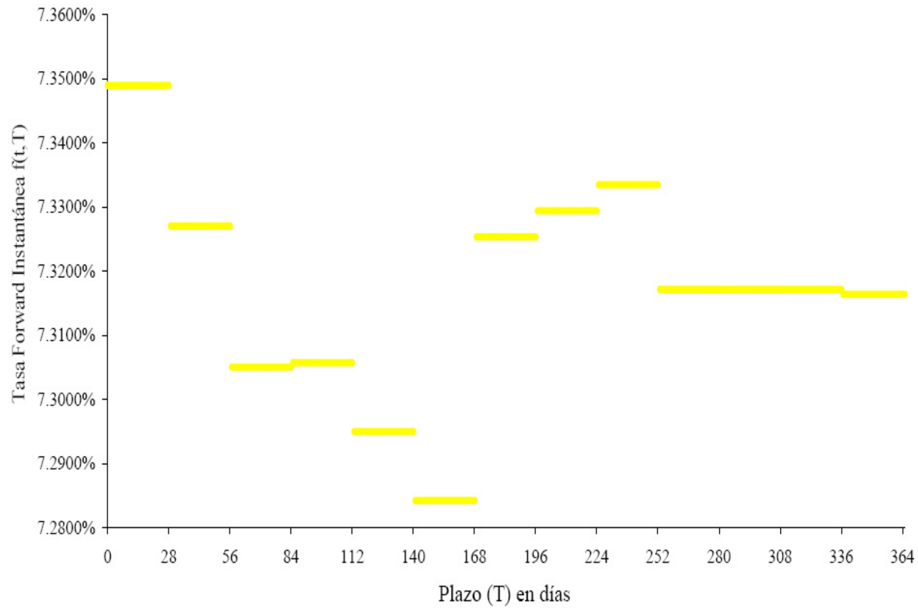

Figura 6.4c. Tasa de interés forward instantánea con tendencia nula (modelo exógeno).

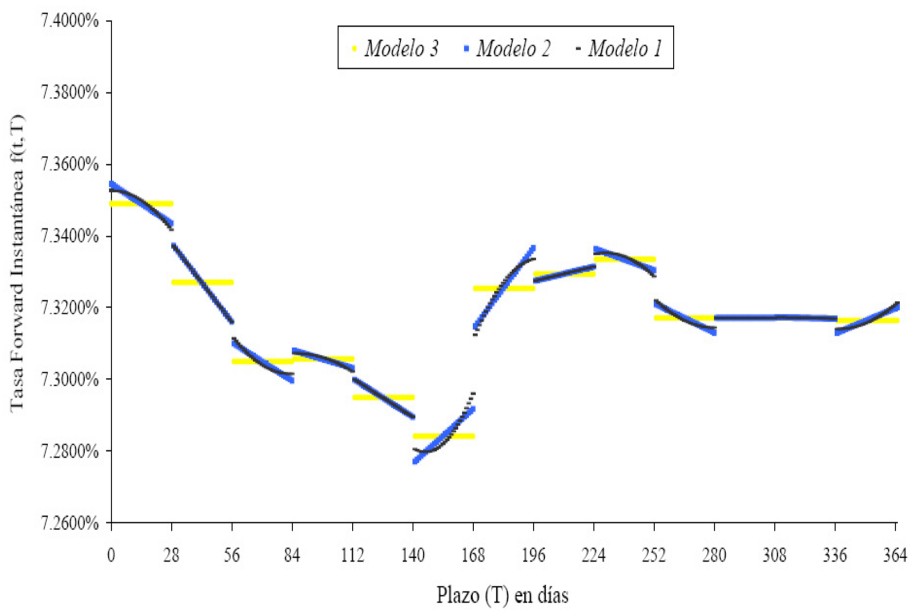

Figura 6.4d. Comparativo de modelos 1 a 3.

Se puede notar a simple vista que la Figura 6.4a presenta con mayor "suavidad" la curva de tasas de interés forward instantáneas, lo cual es una propiedad deseable (ver Cuadro 2.2 en el Capítulo II). Obviamente todos los modelos aplicados cumplen con considerar a todas las cotizaciones y debido a que consideran el equilibrio de mercado replicando los niveles observados, no arrojan niveles fuera de mercado; sin embargo, la relativa parsimonia del modelo de tasas de interés forward instantáneas con tendencia nula (comúnmente utilizado en la práctica) no parece justificar su mala representación de la curva de tasas de interés forward instantáneas (pues es el peor).

Es importante mencionar que si bien las tasas *forward instantáneas* resultantes de aplicar el Modelo 1 desarrollado en el capítulo IV representan un ajuste mucho más suave que las resultantes de asumir constante o lineal la tasa de interés forward en cada mercado de cotización a plazo, se tiene discontinuidad en ellas (al cambiar de mercados de cotización a plazo). Este hecho no es más que una consecuencia de no restringir a priori continuidad entre mercados como lo hace el modelo de *splines* cúbicos[59] de Adam & Van Deventer (1994) o el modelo de ajuste cuadrático de tasas de Hagan & West (2006). El Modelo 1 representa un comportamiento de las tasas de interés *forward instantáneas* sólo suponiendo sustitución entre mercados a través de la razón de cambios de las tasas de interés *forward instantáneas* (ecuación 3.31) y obteniendo el modelo subyacente sobre dichas tasas a través de consideraciones de equilibrio o no arbitraje entre mercados[60].

6.4.4 La Estructura de Plazos de las Tasas de Interés Cupón Cero para Cada Modelo

Finalmente, el Cuadro 6.3 presenta la estructura de plazos de las tasas de interés cupón cero expresadas con composición continua (ecuación 3.47), con composición a cierto plazo (ecuación 3.49) y composición simple al plazo (ecuación 3.50) para cada periodo efectivo de cuatro semanas hasta el primer año por fines prácticos. Como los factores de descuento mostrados son comunes a cada modelo, no hay diferencias. Para notar las diferencias por modelo, en la Figura 6.5 se muestra todo el continuo de tasas de interés cupón cero de composición continua para cada Modelo y en las figuras 6.6a y 6.6b se presentan las tasas de interés cupón cero de composición a 28 días y de composición simple al plazo, respectivamente.

[59] Ver sección 3.4.1 del Capítulo III donde se plantean las especificaciones del modelo.

[60] La continuidad de las tasas de interés *forward instantáneas* es algo deseable pero no limitativo de un modelo siempre que dicho modelo tanga un fundamento sólido en la teoría financiera y puede aplicarse de manera práctica.

Cuadro 6.3 Tasas de interés cupón cero (modelos exógenos).

Fecha *Cash*: Vie,29-Diciembre-2006 [“T”]

Fecha *Spot*: Mar,02-Enero-2006 [“T+1”]

Plazo Spot	Factor Descuento	Tasa Cupón Cero Cont./1	Tasa Cupón Cero Comp. 28 días/2	Tasa Cupón Cero Simple/3
0	1.00000000	7.3490%		
28	0.99430045	7.3490%	7.3700%	7.3700%
56	0.98865025	7.3380%	7.3590%	7.3800%
84	0.98304898	7.3270%	7.3479%	7.3900%
112	0.97747894	7.3217%	7.3426%	7.4057%
140	0.97194857	7.3163%	7.3372%	7.4214%
168	0.96645757	7.3110%	7.3318%	7.4371%
196	0.96096685	7.3130%	7.3339%	7.4606%
224	0.95550431	7.3151%	7.3359%	7.4841%
252	0.95006982	7.3171%	7.3380%	7.5077%
280	0.94467822	7.3171%	7.3380%	7.5293%
308	0.93931723	7.3171%	7.3380%	7.5510%
336	0.93398665	7.3171%	7.3380%	7.5728%
365	0.92849815	7.3171%	7.3379%	7.5953%

1/ Tasa de interés cupón cero de composición continua al plazo con *Basis* Actual/360.

2/ Tasa de interés cupón cero compuesta cada 28 días hasta el plazo con *Basis* Actual/360.

3/ Tasa de interés cupón cero de composición simple al plazo (tasa comparable con la publicada por los proveedores de precios en México: PiP o ValMer) con *Basis* Actual/360.

FUENTE: Construido por el autor con base en los datos de PiP de cotizaciones de Swaps de TIIE para el 29 de Diciembre de 2006.

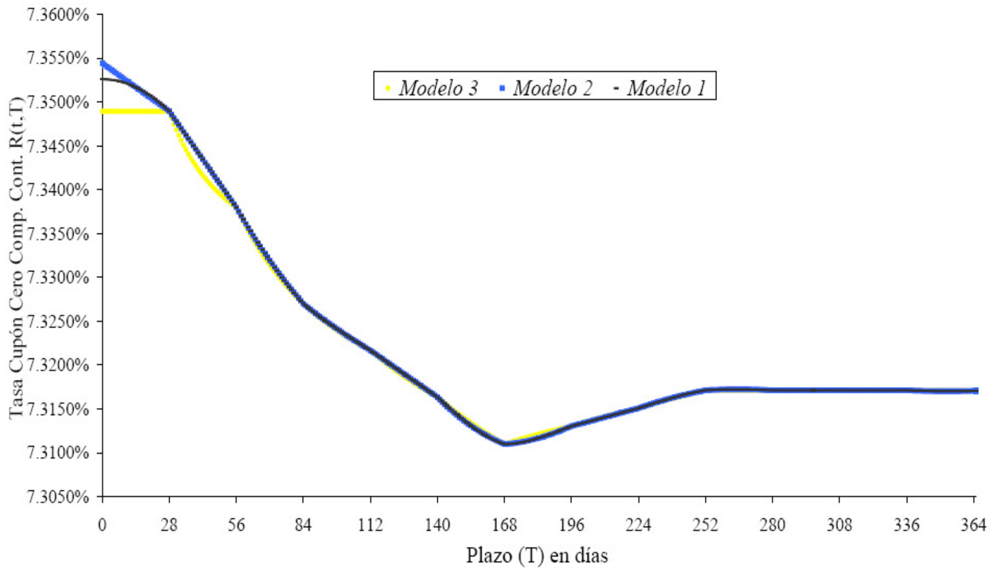

Figura 6.5 Tasas de interés cupón cero de composición continua cada 28 días hasta el plazo (modelos exógenos).

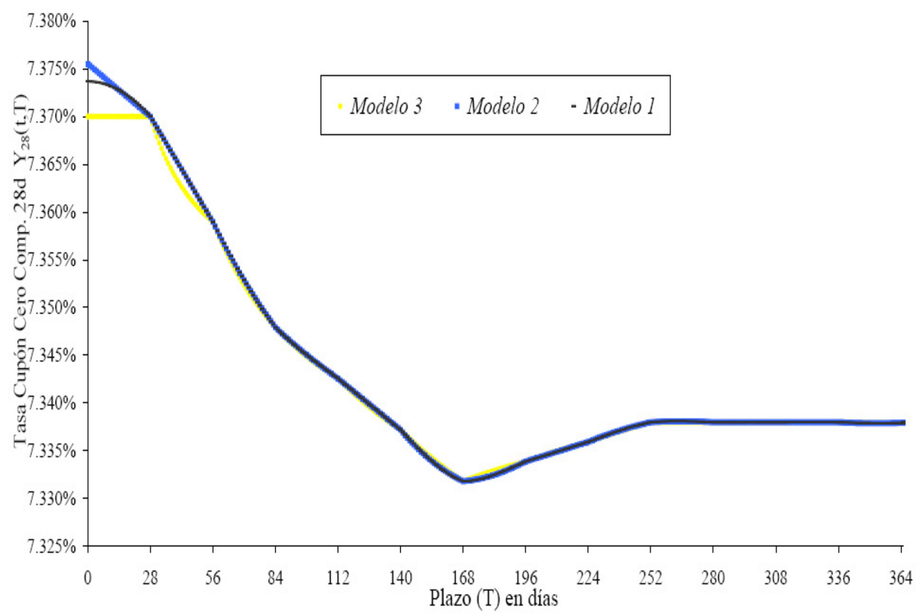

Figura 6.6a Tasas de interés cupón cero de composición cada 28 días hasta el plazo (modelos exógenos).

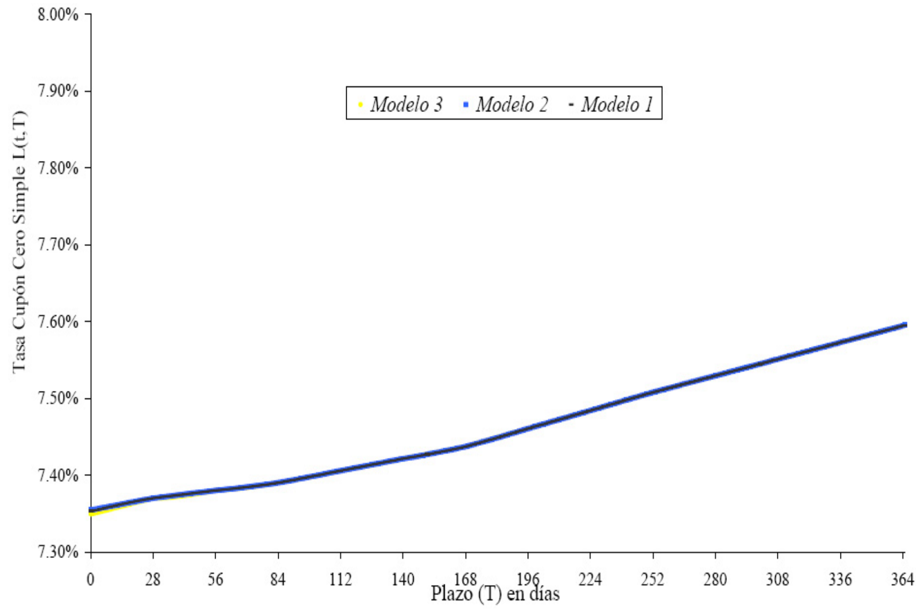

Figura 6.6b. Tasas de interés cupón cero de composición simple al plazo (modelos exógenos).

La Figura 6.6a presenta la misma forma de la Figura 6.5, indicando que la estructura de plazos de las tasas de interés cupón cero con cierta composición es similar (sólo con variación en los niveles) a la de las tasas cupón cero de composición continua. En general se ve que el Modelo 1 es el que ajusta de mejor manera la estructura de plazos (sin quiebres agudos).

La Figura 6.6b muestra un patrón monótonamente creciente para las tasas cupón cero de composición simple al plazo como las que publican los *Price Vendors* (PiP y ValMer) en México. Esta última figura no dice mucho de la forma de la curva de tasas ni de sus diferencias por Modelo como se puede apreciar.

6.5 La Estructura de Plazos de las Tasas de Interés: Modelo 4, 5 y 6

Al remover la interpolación entre cotizaciones para generar cotizaciones sintéticas de manera que se tenga un sistema de ecuaciones de mercado determinado, se tiene ahora que hacer endógeno cada uno de los modelos de ajuste de las tasas de interés *forward instantáneas* para derivar la estructura de plazos de las tasas de interés cupón cero de los *swaps* de TIIE-28 días. Esta es la característica de los modelos 4 a 6 planteados en el Capítulo IV. Para resolver la curva de descuentos, se tiene ahora que utilizar métodos numéricos. La ventaja que se tiene es que no se requiere producir cotizaciones sintéticas con métodos de interpolación sin fundamento sólido en la teoría financiera.

6.5.1 Obtención de los Precios de los Bonos Cupón Cero y Tasas de Interés Forward Instantáneas para Cada Modelo

El enfoque del método numérico utilizado para la solución de los modelos 4 a 6 es el de "punto fijo" de funciones de varias variables (la solución de un vector), acelerando las iteraciones a través de sustituir los últimos valores estimados disponibles para las variables (ver Burden and Faires (2002), sección 10.1). En la sección VI.1.6 del anexo VI.1 se presenta el código utilizado para encontrar la solución del modelo 6 y en la sección VI.1.8 para encontrar la solución de los modelo 4 y 5 (en este último código se utiliza la técnica de aceleración de las iteraciones de punto fijo).

El Cuadro 6.4 muestra las tasas forward instantáneas obtenidas de aplicar: i) el modelo de tasas de interés forward instantáneas con tendencia variable y que sigue una relación de sustitución entre mercados adyacentes (Modelo 4); ii) el modelo de tasas de interés forward instantáneas con tendencia constante (Modelo 5); y iii) el modelo de tasas de interés forward instantáneas con tendencia nula (Modelo 3). Sólo se muestra la tasa forward para cada periodo efectivo de cuatro semanas hasta el primer año por fines prácticos; sin embargo, todo el continuo de tasas de interés forward instantáneas para cada modelo se muestra en las Figuras 6.7a, 6.7b, 6.7c y 6.7d.

Cuadro 6.4 Tasas forward instantáneas derivadas con los modelos 4 a 6.

Fecha *Cash*: Vie,29-Diciembre-2006 ["T"]

Fecha *Spot*: Mar,02-Enero-2006 ["T+1"]

Plazo Spot	Factor Descuento Modelo 4	Tasa Forward Modelo 4/1	Factor Descuento Modelo 5	Tasa Forward Modelo 5/2	Factor Descuento Modelo 6	Tasa Forward Modelo 6/3
0	1.00000000	7.3526%	1.00000000	7.3544%	1.00000000	7.3490%
28	0.99430045	7.3416%	0.99430045	7.3435%	0.99430045	7.3490%
56	0.98865286	7.3149%	0.98865286	7.3160%	0.98865869	7.3161%
84	0.98304897	7.3031%	0.98304897	7.3008%	0.98304893	7.3161%
112	0.97748737	7.2926%	0.97748821	7.2942%	0.97748703	7.2950%
140	0.9719586	7.2941%	0.97195776	7.2958%	0.97195658	7.2950%
168	0.96645745	7.3023%	0.96645745	7.2973%	0.96645743	7.2950%
196	0.96096728	7.3287%	0.96096666	7.3274%	0.96096369	7.3294%
224	0.9555035	7.3326%	0.95550412	7.3314%	0.95550118	7.3294%
252	0.9500697	7.3316%	0.9500697	7.3353%	0.95006972	7.3294%
280	0.94467734	7.3170%	0.94467796	7.3172%	0.94467826	7.3170%
308	0.93931699	7.3159%	0.93931701	7.3170%	0.9393174	7.3170%
336	0.93398726	7.3164%	0.93398666	7.3167%	0.93398697	7.3170%
365	0.92849803	7.3186%	0.92849803	7.3164%	0.92849804	7.3170%

1/ Tasa de interés forward instantánea con tendencia variable y que sigue una relación de sustitución entre mercados adyacentes con *Basis* Actual/360.

2/ Tasa de interés forward instantánea con tendencia constante con *Basis* Actual/360.

3/ Tasa de interés forward instantánea con tendencia nula con *Basis* Actual/360.

FUENTE: Construido por el autor con base en los datos de PiP de cotizaciones de Swaps de TIIE para el 29 de Diciembre de 2006.

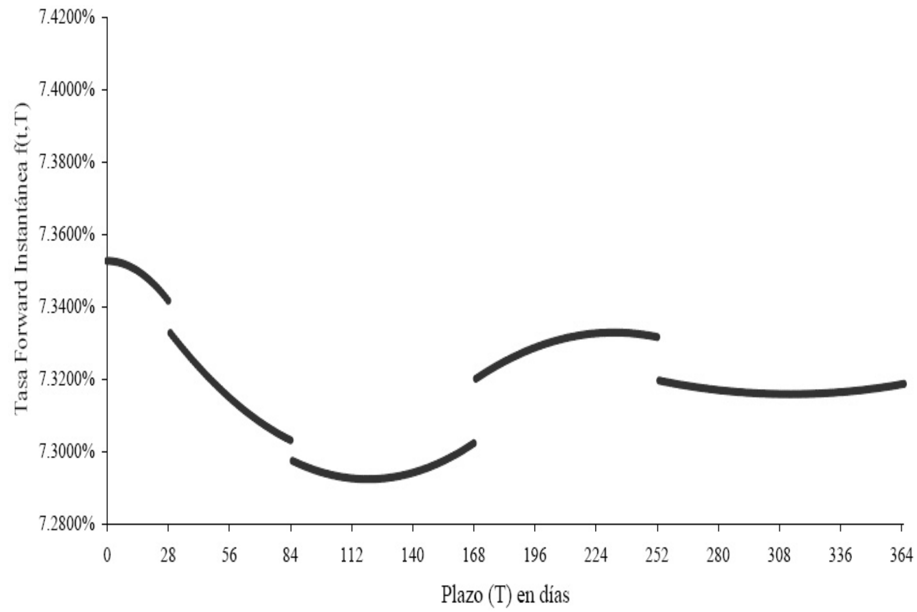

Figura 6.7a. Tasa de interés forward instantánea con tendencia variable y que sigue una relación de sustitución entre mercados adyacentes (modelo endógeno).

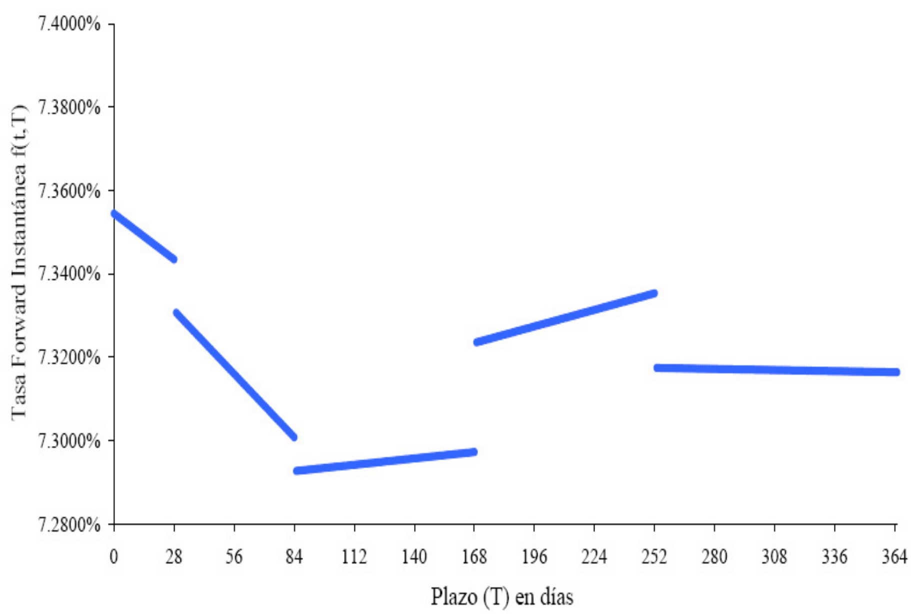

Figura 6.7b. Tasa de interés forward instantánea con tendencia constante (modelo endógeno).

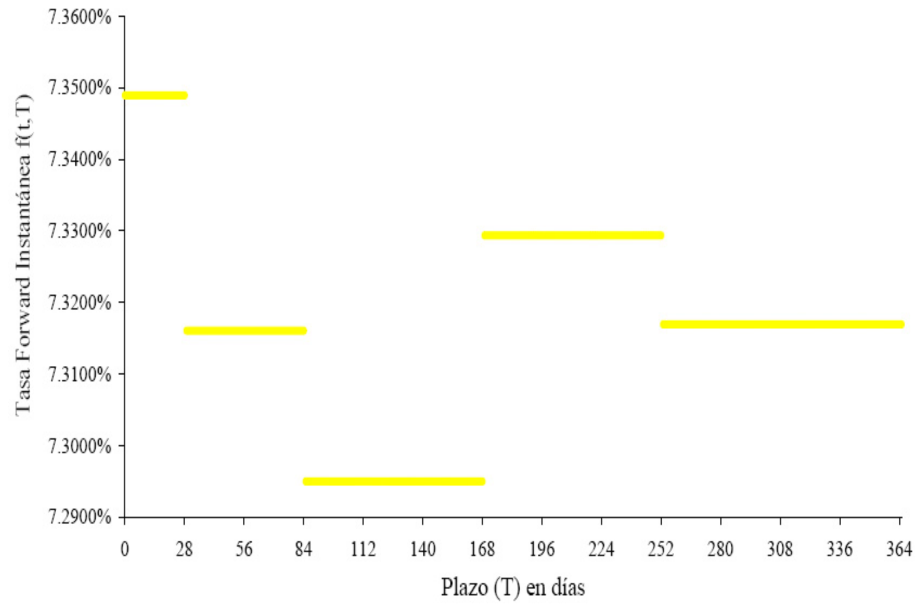

Figura 6.7c. Tasa de interés forward instantánea con tendencia nula (modelo endógeno).

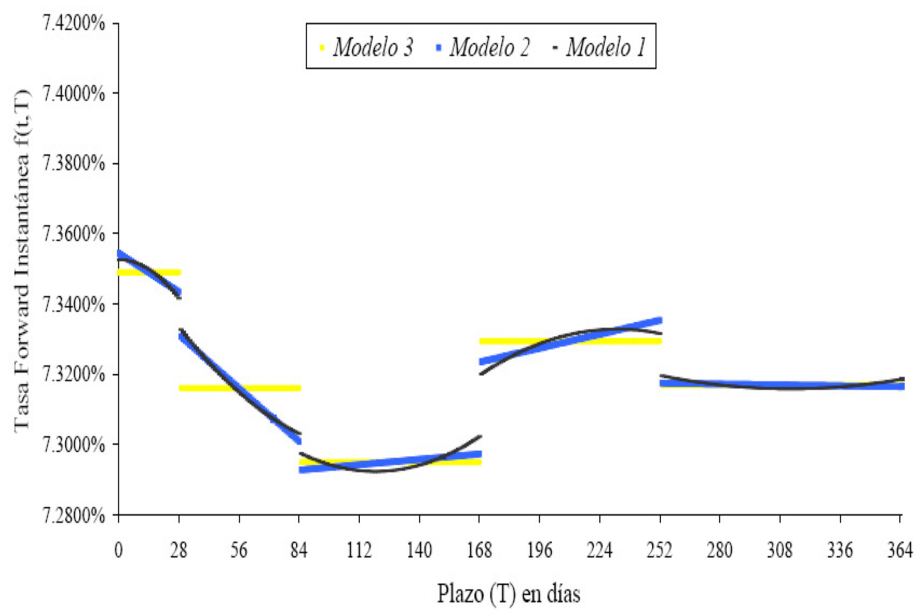

Figura 6.7d. Comparativo de modelos 4 a 6.

Nuevamente se puede notar que la Figura 6.7a presenta con mayor "suavidad" la curva de tasas de interés forward instantáneas, sugiriendo que el Modelo 4 es el mejor.

6.5.2 La Estructura de Plazos de las Tasas de Interés Cupón Cero para Cada Modelo

De igual manera que en la sección 6.4.4, el Cuadro 6.5 presenta la estructura de plazos de las tasas de interés cupón cero expresadas con composición continua para plazos de 4 semanas hasta 1 año.

Cuadro 6.5 Tasas de interés cupón cero de composición continua para los modelos 4 a 6.

Fecha *Cash*: Vie,29-Diciembre-2006 ["T"]

Fecha *Spot*: Mar,02-Enero-2006 ["T+1"]

Plazo Spot	Tasa Cupón Cero Cont. Modelo 4	Tasa Cupón Cero Cont. Modelo 5	Tasa Cupón Cero Cont. Modelo 6
0	7.3526%	7.3544%	7.3490%
28	7.3490%	7.3490%	7.3490%
56	7.3363%	7.3363%	7.3325%
84	7.3270%	7.3270%	7.3270%
112	7.3189%	7.3186%	7.3190%
140	7.3137%	7.3139%	7.3142%
168	7.3110%	7.3110%	7.3110%
196	7.3129%	7.3131%	7.3136%
224	7.3152%	7.3151%	7.3156%
252	7.3171%	7.3171%	7.3171%
280	7.3172%	7.3172%	7.3171%
308	7.3171%	7.3171%	7.3171%
336	7.3171%	7.3171%	7.3171%
365	7.3171%	7.3171%	7.3171%

FUENTE: Construido por el autor con base en los datos de PiP de cotizaciones de Swaps de TIIE para el 29 de Diciembre de 2006.

La Figura 6.8 muestra todo el continuo de tasas de interés cupón cero de composición continua para cada Modelo y las Figuras 6.9a y 6.9b presentan las tasas de interés cupón cero de composición a 28 días y de composición simple al plazo, respectivamente. Se observa que las Figuras 6.8, 6.9a y 6.9b tienen patrones similares a las Figuras 6.5, 6.6a y 6.6b, respectivamente. Esto muestra que interpolar las cotizaciones determina una estructura de plazos de las tasas de interés cupón cero muy cercana a la subyacente con modelos endógenos (suya solución se obtiene numéricamente)[61].

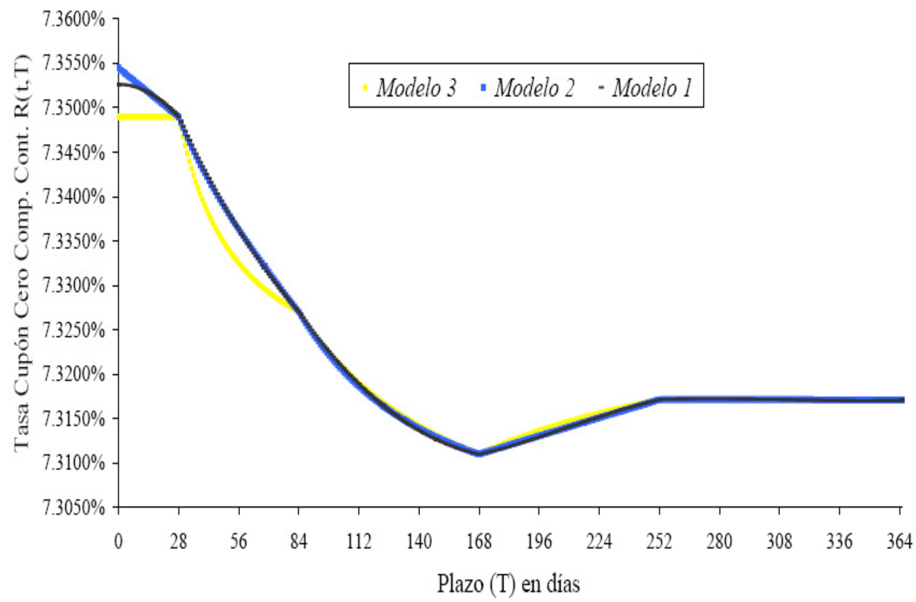

Figura 6.8 Tasas de interés cupón cero de composición continua al plazo (modelos endógenos).

[61] Es importante mencionar que la solución de los modelos endógenos 4 a 6 es única y no depende de la solución inicial asumida, pues se utilizaron como soluciones iniciales la serie de factores de descuento resultantes de interpolar las cotizaciones con diversos métodos de interpolación: lineal simple en niveles, lineal en logaritmos de los niveles, lineal en exponencial de los niveles y "*splines*" cúbicos con pendiente cero en los extremos, arrojándose en todos los casos el mismo nivel de equilibrio (solución) final. (El código presentado en las secciones VI.1.6 y VI.1.8 del anexo VI.1, utilizado para encontrar la solución numérica de los Modelos 4 a 6, tiene la flexibilidad de elegir la solución inicial tal como se indica en esta nota al pie).

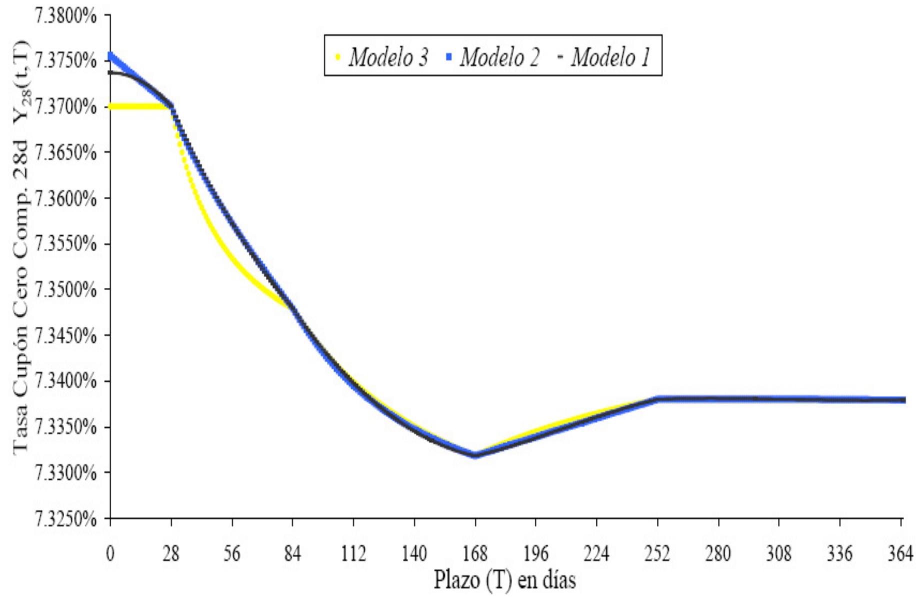

Figura 6.9a. Tasas de interés cupón cero de composición cada 28 días hasta el plazo (modelos endógenos).

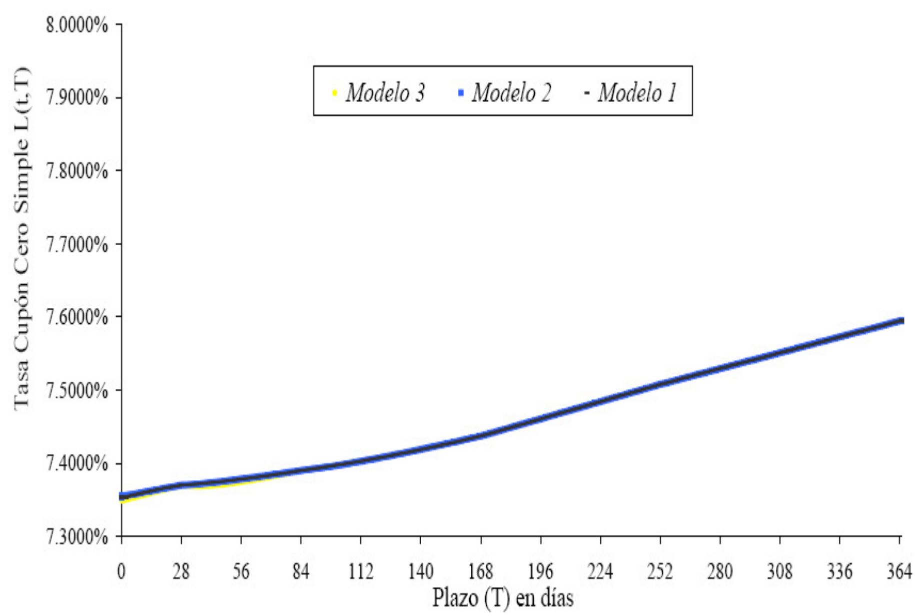

Figura 6.9b. Tasas de interés cupón cero de composición simple al plazo (modelos endógenos).

La Figura 6.8 refuerza lo presentado en la sección 6.4.4: el Modelo 4 es el que ajusta de mejor manera la estructura de plazos, dejando en segundo lugar al Modelo 5 y al final al modelo 6.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES, RECOMENDACIONES, LIMITACIONES Y POSIBLES LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN ADICIONALES

7.1. Conclusiones

El desarrollo de un nuevo modelo, dentro del relativamente abandonado mundo de los modelos empíricos, bajo fundamentos de economía financiera fue realmente el objetivo de este trabajo de tesis; por lo que se cambió la oportunidad de aplicar el cálculo estocástico y mostrar con impresión el uso de herramental matemático avanzado, por el reto de plantear un modelo original para ajustar la curva de rendimientos en el mercado de renta fija.

El presente trabajo de tesis planteó y desarrolló un modelo de ajuste de la curva de rendimientos bajo la idea de sustitución de mercados adyacentes de cotización a plazo de Modigliani y Sutch (1966). Se mostró que tal modelo mejora la obtención de la estructura de plazos de las tasas de interés con relación a los comúnmente usados (como el que supone tasas de interés forward constantes). Aunque el modelo desarrollado yace en el plano de los modelos determinísticos, la principal aportación es que combina la idea de sustitución de mercados de cotización a plazo con condiciones de equilibrio.

El modelo consideró un ajuste de la curva de tasas de interés forward instantáneas subyacentes a cualquier mercado de instrumentos de renta fija (donde existan tasas de interés) suponiendo que la tendencia de tales tasas sigue una relación de sustitución entre la tendencia global de mercados adyacentes. Como los supuestos del modelo son generales (aunque el modelo es único), se pudo mostrar que un modelo de ajuste de tasas de interés forward instantáneas de tendencia constante (derivado también en esta tesis) y el modelo de ajuste de tasas de interés forward constantes (de uso común) son casos particulares de él.

La aplicación del modelo, realizada sobre los *swaps* de TIIE-28 días, mostró empíricamente que la curva de tasas de interés forward derivada es más "suave" que la de otros modelos de ajuste puntual, pero que aún contiene "saltos" en los plazos de cotización (estándar) de los *swaps* de TIIE-28 días. No obstante, por construcción, la pendiente de tal curva de tasas forward es igual en dichos puntos, lo cual es una propiedad deseable cuando la estructura de plazos derivada se utiliza como base de calibración de modelos más complejos.

El trabajo desarrollado a lo largo de los capítulos se basó en los objetivos planteados que probaron la hipótesis para terminar con la tesis de que "**es posible derivar la estructura de plazos de las tasas de interés de los swaps de TIIE-28 días a través de un modelo de**

ajuste de la curva de rendimientos (modelo de *bootstrapping*) que recupera, además del concepto de equilibrio de mercado, la idea de sustitución de mercados a diferentes plazos de cotización".

Finalmente, el sesgo del autor por presentar un trabajo que sea útil en la práctica, lo llevó a cuidar todos los detalles en la aplicación del modelo desarrollado. De esta manera, el modelo se presentó junto con el algoritmo de su solución numérica en código de programación (Anexo VI.1). Esto lleva la intención de convertir adicionalmente el trabajo realizado en un marco de referencia práctico para la derivación de la estructura de plazos de las tasas de interés.

7.2 Recomendaciones y Limitaciones

El uso del modelo aquí planteado debe considerarse para valuación de instrumentos lineales. Su uso en valuación de instrumentos no lineales (con opcionalidad) debe considerarse para el ajuste de la estructura inicial de plazos de las tasas de interés cupón cero y como base para cualquier otro modelo dinámico como el LIBOR Market Model de Brace, et al (1997).

Los modelos planteados en este trabajo de tesis pueden extenderse para el ajuste de cualquier curva de tasas de interés; no obstante su uso práctico supone que se conocen a detalle las convenciones del mercado sobre el cual se aplicarán, requiriéndose alguna modificación (más no cambio en los enfoques de solución) al código de programación presentado en el anexo VI.1 el cual está pensado única y exclusivamente para el mercado de los *swaps* de TIIE-28 días mexicano.

7.3 Posibles Líneas de Investigación Adicionales

Desde un punto de vista pragmático, el modelo desarrollado en este trabajo de tesis se avocó a analizar la tendencia de las tasas de interés forward instantáneas; sin embargo, esto no limita que se puedan asumir de manera adicional procesos estocásticos, convirtiéndolo en un modelo dinámico (adicionando términos estocásticos con procesos Brownianos a las ecuaciones del modelo). No obstante, la estimación de los parámetros adicionales (como la volatilidad) requerirá de la incorporación de otros mercados como el de los *caps/floors* y/o *swaptions* en el proceso de calibración del modelo.

El modelo desarrollado de ajuste de la curva de rendimientos a través de asumir tasas forward con tendencia variable y que sigue una relación de sustitución entre mercados adyacentes, tiene la propiedad de que si los intervalos de tiempo que definen los mercados de cotización a plazos se reducen (aumentándose la cantidad de "mercados de cotización a plazo"), la curva de tasas de interés forward subyacente se hace más "suave" (al ajustarse más número de "parábolas"). Esta propiedad puede explorarse matemáticamente, pues es particular del modelo y no está presente, por ejemplo, en el modelo de ajuste de tasas de interés forward constantes.

El análisis formal y detallado de las condición necesaria y suficiente de equilibrio planteada en el Capítulo IV (punto iv) de "Existencia del Equilibrio" en la sección 4.4.1.1) puede realizarse a través de regiones para determinar el (los) subespacio(s) del conjunto de cotizaciones consideradas bajo el (los) cual(es) se asegura el equilibrio. De la misma manera, este análisis se puede extender para demostrar formalmente si el equilibrio es único (esto fue algo que quedo fuera del alcance del presente trabajo de tesis, pero que se probó empíricamente en el Capítulo VI).

8. REFERENCIAS

- Adams, K. and D. Van Deventer. 1994. "Fitting Yield Curves and Smooth Forward Rate Curves with Maximum Smoothness". *Journal of Fixed Income*, Vol. 4(1): 52-62.
- Aït-Sahalia, Yacine. 1999a. "Maximum Likelihood Estimation of Discretely Sampled Diffusions: A Closed-Form Approximation Methods", Working Paper, *Princeton University*
- Aït-Sahalia, Yacine. 1999b. "Transition Densities for Interest Rates and Other Nonlinear Diffusions", *Journal of Finance*, 54: 499-547.
- Andersen, Torben G. and Jesper Lund. 1997. "Estimating Continuous-Time Stochastic Volatility of the Short-Term Interest Rate", *Journal of Econometrics*, 77: 343-377.
- Arrow, K. and F. Hahn. 1986. Handbook of Mathematical Economics, Vol 3. Ed. North Holand. Holanda.
- Arrow, K. and F. Hahn. 1982. Handbook of Mathematical Economics, Vol 2. Ed. North Holand. Holanda.
- Arrow, K. and F. Hahn. 1981. Handbook of Mathematical Economics, Vol 1. Ed. North Holand. Holanda.
- Babbel, David F. 1983. "Duration and the Term Structure of Interest Rate Volatility" en *Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Inmunization* by G. Bierwag, G. Kaufman and A: Toevs, JAI Press, NY, USA.
- Back, Kerry. 1997. "Yield Curve Models: A Mathematical Review", en *Option Embedded Bonds* by Israel Nelken (editor), Irwing Professional Publishing, Chicago, USA.
- Banxico (Banco de México). 2007. Circular 2019/95, Anexo 1: Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio en Moneda Nacional (TIIE) (´ltima modificación el 10 de Enero de 2007 con la Circular 1/2007). Descargable en `http://www.banxico.org.mx/tipo/disposiciones/Circular2019/anexo01.html`.
- Banxico (Banco de México). 2006. Circular 4/2006, Reglas a las que Deberán Sujetarse las Instituciones de Banca Múltiple, las Casas de Bolsa, las Sociedades de Inversión y las Sociedades Financieras de Objeto Limitado, en la Realización de Operaciones Derivadas (Emitida el 18 de Diciembre de 2006). Descargable en: `http://www.banxico.org.mx/tipo/disposiciones/OtrasDisposiciones/Circular4-2006.html`.
- Banxico (Banco de México). 2004. Resultados de la Encuesta Organizada por el Banco de Pagos Internacionales (BIS) sobre el Volumen Operado en el Mercado Cambiario y de Derivados Abril 2004. Descargable en `http://www.banxico.org.mx/eInfoFinanciera/InfOportunaMercadosFin/Mercado`

`Cambios/ResultadosBis/Resultados.pdf.`

- Benzoni, Luca. 1999. “Pricing Options under Stochastic Volatility: An Econometric Analysis”, Working Paper, *University of Minesota.*
- Bianchi, S. and L. Yang. 2002. “Serious Zero Curves”, *Department of Mathematics, University of California*, Davis, (Jan 2002): 1-22.
- Black, Fischer. 1976. “The Pricing of Commodity Contracts”, *Journal of Financial Economics*, 3: 167-179.
- Black, Fischer, Emanuel Derman, and W. Toy. 1990. “A One-Factor Model of Interest Rates and its Application to Treasury Bond Options”, *Financial Analysts Journal*, 46: 33-39.
- Black, Fischer, and P. Karasinski. 1991. “Bond and Options Pricing when Short Rates are Lognormal”, *Financial Analysts Journal*, 47: 52-59.
- Border, Kim C. 1985. Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory. Ed. Cambridge University Press. UK
- Brace, A., D. Gatarek and D. Musiela. 1997. “The Market Model of Interest Rate Dynamics”, *Mathematical Finance*, 7 (April, 1997): 127-156.
- Bravo Pliego, Jesus. 2007. “Análisis Empírico de la Relación entre las Tasas de Interés Forward Subyacentes al Mercado Mexicano de Swaps de TIIE”, en revisión por la Revista de Administración, Finanzas y Economía.
- Brennan, Michael J., and Eduardo Schwartz. 1979. “A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds”, *Journal of Banking and Finance*, 3: 133-155.
- Brigo, Damian and Fabio Mercurio. 2001. Interest Rate Models, Theory and Practice. Springer (Springer Finance).
- Brousseau, V. 2002. “The Functional Form of Yield Curves (Working Paper No. 148)”, *Working Paper Series, European Central Bank*, (May 2002): 1-53.
- Brouwer, L. 1912. “Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten”. *Mathematische Annalen*, 38(71): 97115.
- Burden, Richard y Douglas Faires J. 2002. Análisis Numérico, Séptima Edición. Ed. Internacional Thompson Editores, S. A. de C. V. (División de Thomson Learning, Inc.). México.
- Chan, K.C., G. Karolyi, F. Longstaff and A. Sanders. 1992. “An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate”, *Journal of Finance*, 47: 1209-1227.
- Chen, L. 1996. “Interest Rate Dynamics, Derivatives Pricing, and Risk Management”, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 435 (Springer-Verlag, New York).
- Chen, R. and L. Scott. 1992. “Pricing Interest Rate Options in a Two Factor CIR Model of the Term Structure”, *Review of Financial Studies*, 5: 613-636.

- CNBV (Comisión Nacional Bancaria y de Valores). 2006. Disposiciones de Carácter General que Señalan los Días del Año 2007, en que las Entidades Financieras Sujetas a la Supervisión de la CNBV, Deberán Cerrar sus Puertas y Suspender Operaciones. (Publicada en el Diario Oficial de la Federación el 29 de Noviembre de 2006). Descargable en: `http://www.cnbv.gob.mx/circularesbancarias.asp?circ_id=7&anio=2006 &circ_asunto =Calendario%202007`.

- CNBV (Comisión Nacional Bancaria y de Valores). 2005. Circular Única de Bancos: Disposiciones de Carácter General Aplicables a las Instituciones de Crédito, Título Segundo-Capítulo IV: Disposiciones Prudenciales- Administración de Riesgos. (Publicada en el Diario Oficial de la Federación el 02 de Diciembre de 2005 -se derogan las Circulares 1423 y 1473 expedidas por la CNBV). Descargable en: `http://www.cnbv.gob.mx/circularesbancarias.asp?circ_id=14`.

- CNBV (Comisión Nacional Bancaria y de Valores). 2000. CIRCULAR Núm. 1489 (CRITERIOS CONTABLES). Descargable en: `http://www.cnbv.gob.mx/recursos/circula/Bancarias/1459.html`.

- Constantinides, George M. 1992. "A Theory of the Nominal Term Structure of Interest Rates", *Review of Financial Studies*, 5: 531-552.

- Courtadon, George. 1982, "A More Accurate Finite Difference Approximation for the Valuation of Options", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17: 697-703.

- Cox, John C., Jon E. Ingersoll, and Stephen A. Ross. 1985. "A theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, 53: 385-407.

- Cox, John C., Jonathan Ingersoll Jr. and Stephen A. Ross. 1981. "A Re-examination of Traditional Hypothesis about the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Finance*, (Sep 1981): 769-799.

- Cox, John C., Jon E. Ingersoll, and Stephen A. Ross. 1980. "An Analysis of Variable Rate Loan Contracts", *Journal of Finance*, 35: 389-403.

- Culbertson, J. M. 1957. "The Term Structure of Interest Rates", *Quarterly Journal of Economics*, (Nov 1957): 489-504.

- Dothan, Michael U. 1978. "On the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Financial Economics*, 6: 59-69.

- Duffie, Darell, and R. Kan. 1996. "A Yield Factor Model of Interest Rate", *Mathematical Finance*, 6: 379-406.

- Fabozzi, Frank. 2001. The Handbook of Fixed Income Securitites. Ed. McGraw-Hill. USA.

- Fabozzi, Frank. 2000. Bond Markets, Analysis and Strategies, Fourth Edition. Ed. Prentice Hall, Inc. USA.

- Fabozzi, Frank. 1998. Valuation of Fixed Income Securities and Derivatives, Third Edition. Ed. Frank J. Fabozzi Associates. USA.

- Fabozzi, Frank J., Franco Modigliani and Michael G. Ferri. 1998. Foundations of Financial Markets and Institutions, Second Edition. Prentice Hall. USA. Capítulos 10-13.
- Fama, Eugene F. 1984. "The Information in the Term Structure", *Journal of Financial Economics* (Dec 1984).
- Fisher, Irving. 1896. "Appreciation and Interest", *Publications of the American Economic Association*, XI (August 1896):23-29.
- Fong, H.G., and O. A. Vasicek. 1992. "Interest Rate Volatility as a Stochastic Factor", *Working Paper*, Gifford Fong Associates.
- Fulks, W. 1978. Advanced Calculus, Third Edition. Ed. John Wiley & Sons. USA.
- Gourieroux, C and A. Monfort. 1996. "Simulation Based Ecconometric Methods", Core Lectures, Oxford University Press.
- Hagan, Pat. S. and Graeme West. 2006. "Interpolation Methods for Curve Construction", *Applied Mathematical Finance*, 13(2): 89-129.
- Hagan, Pat. S. and Graeme West. 2004. "Interpolation Methods for Yield Curve Construction", *Programme in Advanced Mathematics of Finance, School of Computational & Applied Mathematics*, University of the Witwatersrand, South Africa. Puede ser solicitado a `phagan1@bloomberg.net` o bien a `graeme@finmod.co.za`
- Heath, D., R. Jarrow and A. Morton. 1992. "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology", *Econometrica*, 60: 77-105.
- Hicks, John R. 1946. Value and Capital, Secon Edition. Oxford. University Press. Capítulos 21 y 22.
- Ho, Thomas, and S. Lee. 1986. "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", *Journal of Finance*, 41: 1011-1029.
- Hull, John C. 2003. Options, Futures and Other Derivatives, Fifth Edition. Ed. Prentice Hall. USA.
- Hull, John C., and Alan White. 1994. "The Pricing Interest Rate Caps and Floors Using the Hull-White Model", *Journal of Financial Engineering*, 2: 287-296.
- Hull, John C., and Alan White. 1990. "Pricing Interest Rate Derivative Securities", *Review of Financial Studies*, 3: 573-592.
- ISDA (International Swaps and Derivatives Association, Inc.). 2007. ISDA Bookstore/Publications. Descargable en: `http://www.isda.org/publications/pubguide.html`.
- Jiang, George J. 1998. "Nonparametric Modeling of US Interest Rate Term Structure Dynamics and Implications on the Prices of Derivative Securities", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33: 465-497.

- Jiang, George J. and John Knight. 1997. "A Nonparametric Approach to the Estimation of Diffusion Processes, with an Application to a Short-Term Interest Rate Model", *Econometric Theory*, 13: 615-645.
- Keynes, John M. 1936 (publicación editada). The General Theory of Employment, Interet and Money . Harcourt, Brace Ed., Capítulo 13.
- Langetieg, T. C. 1980. "A Multivariate Model of the Term Structure", *Journal of Finance*, 35: 71-97.
- Litzenberger, R. H. 1992. "Swaps: Plain and Fanciful", *The Journal of Finance*, 47(3) (Jul 1992): 831-850.
- Lo, Andrew. 1988. "Maximum Likelyhood Estimation of a Multifactor Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Fixed Income*, 3: 14-31
- Longstaff, Francis, and Eduardo Schwartz. 1992. "Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model", *Journal of Finance*, 47: 1259-1282.
- Machlup, Fritz. 1958. "Equilibrium and Disequilibrium: Misplaced Concreteness and Disguised Politics", *Economic Journal*, (March, 1958): 1-7.
- Marsh, Terry, and Eric Rosenfeld. 1983. "Stochastic Processes for Interest Rates and Equilibrium Bond Prices", *Journal of Finance*, 38: 635-646.
- Mas-Colell, et al. 1995. Microeconomic Theory. Ed. Oxford University Press, Inc. USA.
- Merton, Robert C. 1973a. "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics*, 4: 141-183.
- Mishkin, Frederic S. 2006. The Economics of Money, Banking and Financial Markets, Seventh Edition (Update). Pearson, Addison Wesley. Capítulo 6.
- Modigliani, Franco y Sutch, Richard. 1966. "Innovations in Interest Rate Policy", *American Economic Review*, 56 (May 1966): 178-197.
- Nelson, C. and A. Siegel. 1987. "Parsimonious Modelling of Yield Curves", *Journal of Business*, 60(4).
- Nikaido, Hukukane. 1968. Convex Structures and Economic Theory. Ed. Academic Press. USA.
- Ortega, J. 1972. Numerical Analysis, a Second Course. Ed. Academia Press. USA.
- Pearson, Niel and Tongsheng Sun. 1994. "Exploiting the Conditional Density in Estimating the term Structure: An Application to the CIR Model", *Journal of Finance*, 49: 1279-1304.
- Pritsker, Matt. 1998. "Nonparametric Density Estimation and Tests of Continuous Time Interest Rate Models", *Review of Financial Studies*, 11: 449-487.
- Richard, Scott F. 1978. "An Arbitrage Model of the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Financial Economics*, 6: 33-37.

- Santomero, Anthony M. & Babbel, David F. 2001. Financial Markets, Instruments & Institutions, Second Edition (International Edition). Ed. Mc Graw-Hill. Capítulos 3-6.
- SHCP (Secretaría de Hacienda y Crédito Público). 1999. Reglas para los Requerimientos de Capitalización de las Instituciones de Banca Múltiple (Resolución que Modifica las Reglas para los Requerimientos de Capitalización de las Instituciones de Banca Múltiple, publicadas el 22 de septiembre de 1999.). Publicadas en el Diario Oficial de la Federación el día 22 de septiembre de 1999 y Modificadas en el Diario Oficial de la Federación el día 13 de diciembre de 1999. Descargable en: `http://www.shcp.gob.mx/servs/normativ/rdiversas/rd_991213.html`.
- Simon, Carl and Lawrence Blume. 1994. Mathematics for Economists, First Edition. Ed. W. W. Norton & Company, Inc. USA.
- Singleton, Kenneth. 1999. "Estimation of Affine Diffusion Models Based on the Empirical Characteristic Function", *Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University.*
- Sundaresan, Suresh M. 2000. "Continuos-Time Methods in Finance: A Review and an Assessment", *The Journal of Finance*, 55(4) (Aug 2000): 1569-1622.
- Vasicek, Oldrich, 1977. "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, 5: 177-188.
- Venegas Martínez, Francisco. 2006. Riesgos Financieros y Económicos, Productos Derivados y Decisiones Económicas Bajo Incertidumbre. Ed. Thomson, México.

9. ANEXOS

9.1. ANEXO II.1 MODELOS TEÓRICOS ESTOCÁSTICOS DE TASA CORTA

La Teoría de Expectativas Puras es la madre de los modelos de tasas de interés de corto plazo. Algunos de estos modelos (los más conocidos) se resumen en el Cuadro AII.1.1 y prácticamente la totalidad de dichos modelos que son de amplio dominio se presentan listados al final de éste anexo. Los modelos de tasa de interés estocásticos presentados en el Cuadro AII.1.1 han sido obtenidos de diversas fuentes según se indica en la columna "Autores". Cabe mencionar que un análisis muy completo de los modelos de tasa corta de un factor y multifactoriales, así como las implicaciones de dichos modelos se encuentra en Sundaresan (2000).

El modelo generalizado que describe la dinámica de la curva de tasas de interés a través de la "tasa corta" es el siguiente:

$$\mathrm{d}r = \mu(r,t)\mathrm{d}t + \sigma(r,t)\mathrm{d}z \qquad \text{(AII.1.1)}$$

Donde:

$\mathrm{d}r$ = Diferencial o cambio de la tasa corta en un periodo de tiempo $\mathrm{d}t$.

$\mu(r,t)$ = Tendencia o "drift" de la tasa corta.

$\sigma(r,t)$ = Volatilidad del cambio de la tasa corta.

$\mathrm{d}z$ = Movimiento geométrico Browniano o de Wiener.

$\mathrm{d}t$ = Diferencial o cambio del tiempo.

r = Tasa corta.

t = Tiempo.

En la ecuación AII.1.1 los elementos $\mu(r,t)$ y $\sigma(r,t)$ son expresiones generales que en el caso de que tomen cierta forma funcional (desde una constante hasta una ecuación estocástica independiente) dan origen a los distintos modelos de tasa corta según lo presentado en el Cuadro AII.1.1. En dicho cuadro, en la columna "Modelo", se puede apreciar la forma funcional concreta que se ha asumido para dichos parámetros según el autor indicado.

Es importante mencionar que los parámetros de los modelos de tasa corta suelen estimarse a través de diversas técnicas que van desde simples regresiones, mínimos cuadrados o métodos generalizados de momentos; sin embargo, cualquiera que sea el método, la estimación se realiza sobre la historia observada de la tasa corta[62]

Cuadro AII.1.1. Modelos de tasas de interés de corto plazo

Autores		Modelo		Parámetros
Merton (1970)		$\mathrm{d}r = \theta \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}z$		θ, σ son ctes.
Vasicek (1977)		$\mathrm{d}r = k(\theta - r)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}z$		k, θ, σ son ctes.
Dothan (1978)		$\mathrm{d}r = \sigma r \mathrm{d}z$		σ es cte.
Brennan-Schwartz (1979)		$\mathrm{d}r = \theta_r dt + \sigma_{r1}\mathrm{d}z_1 + \sigma_{r2}\mathrm{d}z_2$ $\mathrm{d}l = \theta_l \mathrm{d}t + \sigma_{l1}\mathrm{d}z_1 + \sigma_{l2}\mathrm{d}z_2$		$\theta_r,\ \theta_l,\ \sigma_{r1},\ \sigma_{r2},\ \sigma_{l1},\ \sigma_{l2}$ son ctes.
Constantinides - Ingersoll (1984)		$\mathrm{d}r = \sigma r^{3/2}\mathrm{d}z$		σ es cte.
Schaefer-Schwartz (1984)		$\mathrm{d}s = m(\mu - s)\mathrm{d}t + \eta \mathrm{d}z_1$ $\mathrm{d}l = (\sigma^2 - ls)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{l}\mathrm{d}z_2$		$m,\ \mu,\ \eta,\ \sigma$ son ctes.
CIR (1985)		$\mathrm{d}r = k(\theta - r)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r}\mathrm{d}z$		k, θ, σ son ctes.
Ho-Lee (1986)		$\mathrm{d}r = \theta(t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}z$		σ es cte.
Black-Derman-Toy (1990)		$\mathrm{d}\ln r = \left[\theta - \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}\ln r\right]\mathrm{d}t + \sigma(t)\mathrm{d}z$		θ depende del tiempo
Hull-White (1990)		$\mathrm{d}r = k(\theta - r)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r}\mathrm{d}z$		θ, σ dependen del tiempo
HJM (1992)		$\mathrm{d}f = \alpha(t)\mathrm{d}t + \sigma(t)\mathrm{d}z$		f es la tasa forward
Longstaff-Schwartz (1992)		$\mathrm{d}x = (\gamma - \delta x)\mathrm{d}t + \sqrt{x}\mathrm{d}z_1$ $\mathrm{d}y = (\eta - \nu y)\mathrm{d}t + \sqrt{y}\mathrm{d}z_2$		$\gamma, \delta, \eta, \nu$ son ctes.
Lin Chen (1994)		$\mathrm{d}r = k(\theta - r)\mathrm{d}t + \sqrt{\sigma}\sqrt{r}\mathrm{d}z_1$ $\mathrm{d}\theta = \nu(\bar{\theta} - \theta)\mathrm{d}t + \zeta\sqrt{\theta}\mathrm{d}z_2$ $\mathrm{d}\sigma = \mu(\bar{\sigma} - \sigma)\mathrm{d}t + \eta\sqrt{\sigma}\mathrm{d}z_3$		$k, \nu, \bar{\theta}, \zeta, \mu, \bar{\sigma}, \eta$ son ctes.

[62] Obviamente esto no es válido sobre la Teoría del Nicho Preferido de Culbertson (1957) ya que bajo dicha teoría (aceptada como la más generalizada), la tasa corta no explica por si misma los niveles de tasa de interés en los distintos plazos o vencimientos de la curva de rendimientos.

Clasificación de los modelos de Tasa corta

La forma en que se han clasificado los modelos de tasa corta obedece a si éstos tienen sólo un factor o variable estocástica (modelos de un factor) o más de un factor o variable estocástica (modelos multifactoriales), haciéndose además diferenciación de aquellos modelos que utilizan la curva de tasas de interés de cierto momento para derivar su dinámica (modelos de calibración). La Figura AII.1.1 resume dicha clasificación.

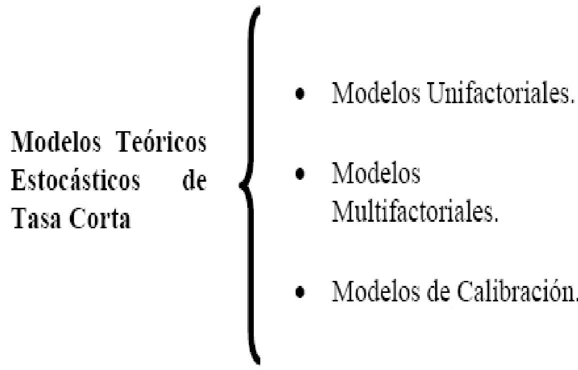

Figura AII.1.1 Clasificación de los modelos estocásticos de tasa corta.

En particular, los modelos de tasa corta, según su autor quedan clasificados como sigue:

Modelos de tasa corta de un factor:

- Modelo de Vasicek(1977).
- Modelo de CIR(1985).
- Modelo de Courtadon (1982).
- Modelo de Chen & Scott (1992).
- Modelo de Duffie & Kan (1996).
- Modelo de Brennan & Schwartz (1979).
- Modelo de Marsh & Rosenfeld (1983).
- Modelo de Constantinides (1992).
- Modelo de Merton(1973).
- Modelo de Dothan (1978).
- Modelo de CIR (1980).
- Modelo de HJM (1992).

Modelos de tasa corta multifactoriales:

- Modelo de Langetieg(1980).

- Modelo de Brennan & Schwartz Multifactorial (1979).
- Modelo de Richard (1978).
- Modelo de Longstaff & Schwartz (1992).
- Modelo de Duffie & Kan Multifactorial (1996).
- Modelo de Hull & White (1994).
- Modelo de Chen (1996).
- Modelo de Fong & Vasicek (1992).

Modelos de tasa corta de calibración:

- Modelo de Ho & Lee (1986).
- Modelo de Hull & White con Calibración (1990).
- Black, Derman & Toy (1990).
- Modelo de Black & Karansinski (1991).

9.2. ANEXO IV.1. EQUILIBRIO DEL MODELO: PRUEBA DE SU EXISTENCIA Y UNICIDAD

AIV.1.1. Condiciones de Existencia de un Equilibrio

En esta sección se analizan las consideraciones generales para la existencia de un equilibrio en un sistema o modelo que puede expresarse a través de un conjunto de variables a resolver (variables endógenas) y un conjunto de ecuaciones que proporcionan información, restricciones o consideraciones dentro del sistema o modelo.

Debido a que se utilizará el concepto de equilibrio, es necesario detenernos a revisar dicho concepto. Una definición de equilibrio comúnmente citada en Economía y Finanzas es la provista por Machlup (1958). De acuerdo a esta definición un equilibrio es "un conjunto de variables interrelacionadas seleccionadas, ajustadas de cierta manera unas a otras que no prevalece en ellas ninguna tendencia a cambiar dentro del modelo que ellas constituyen".

De acuerdo a lo anterior, un equilibrio en un modelo es un estado estable particular de las variables endógenas (seleccionadas por quien desarrolla el modelo). Obviamente dichas variables deben cumplir con todas y cada una de las ecuaciones establecidas. En términos llanos, en lo que sigue se tomará está situación de equilibrio de las variables endógenas del modelo como la solución del sistema determinado por las ecuaciones de dicho modelo.

En términos prácticos, un modelo tendrá solución si cumple con dos condiciones que describiremos más adelante:

1. Número de ecuaciones independientes igual a número de incógnitas (condición necesaria);
2. Condiciones de Punto Fijo (es condición suficiente, bajo el cumplimiento de la condición necesaria 1).

La primera condición nos garantiza que el modelo esté bien definido (no contenga ecuaciones faltantes o redundantes) y la segunda garantiza que se puede hallar al menos una solución sobre cierta zona de búsqueda de los valores de las incógnitas.

AIV.1.1.1. Número de Ecuaciones Independientes Igual a Número de Incógnitas

La primera consideración para la solución de un modelo es que se pueda reducir a un conjunto de ecuaciones bien definidas, cuyas incógnitas (variables endógenas) puedan determinarse. Es decir, que el sistema se encuentre determinado. Esta condición se verá simplemente como la existencia de "N" ecuaciones y "N" incógnitas, donde cada ecuación sea independiente y provea información no contenida en las demás (Mas-Colell, *et al* (1995), p. 593-594 y Simon and Blume, 1994, capítulo 15.3)[63].

De manera práctica, si un modelo definido por un sistema de ecuaciones tiene solución, entonces su número de ecuaciones independientes será igual a su número de incógnitas. Esto nos lleva a la conclusión inmediata que si en un modelo el número de ecuaciones independientes no es igual a su número de incógnitas, entonces el modelo no tiene solución (condición necesaria). Por lo tanto, esta condición debe verificarse si se quiere que un modelo tenga solución (sea esta única o no), no obstante, esta condición no es suficiente para asegurar la solución por lo que tenemos que seguir analizando otras condiciones para asegurar la existencia del equilibrio.

AIV.1.1.2. Condiciones de Punto Fijo

En esta sección anexo se presentan los teoremas matemáticos fundamentales que dan origen a la teoría de equilibrio económico y financiero. Se presentan al nivel requerido para su comprensión por parte de la mayoría de los practicantes de Economía y Finanzas, sin socavar su rigor, ni ideas centrales. Quienes prefieran su planteamiento en términos más formales pueden consultar Border (1985), Nikaido (1968) o Fulks (1978). Por otro lado, quienes quieran consultar su aplicación práctica puedan consultar Burden y Faires (2002).

AIV.1.1.2.1. Teorema del Valor Medio

Teorema: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua sobre $D = [a, b]$, donde D es un subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío, compacto y convexo. Además $f(a) \cdot f(b) < 0$. Entonces existe $x^* \in [a, b]$ tal que $f(x^*) = 0$.

Demostración: consultar Border (1985), Nikaido (1968) o Fulks (1978).

AIV.1.1.2.2. Teorema del Valor Intermedio

Teorema: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua sobre $D = [a, b]$, donde D es un subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío, compacto y convexo. Para cualquier $k[f(a), f(b)]$, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$.

Demostración: consultar Border (1985), Nikaido (1968) o Fulks (1978).

[63] Si existe un número de incógnitas mayor que el de ecuaciones independientes se dice que el sistema está indeterminado o subdeterminado, por lo que no existirá solución explícita o existirán tantas soluciones como libertad se tenga al tomar arbitrariamente valores definidos para cualquier número de variables igual a la diferencia entre el número de variables e incógnitas. En particular si se tienen M incógnitas y $N < M$ ecuaciones, se podrán tomar arbitrariamente $M - N$ variables para definir su valor; aquí se dice que se tienen $M - N$ grados de libertad. Por otro lado, si existen más ecuaciones independientes que incógnitas, se dice que el sistema está sobredeterminado y no tendrá solución. En este caso será condición necesaria (más no suficiente, pues podría no haber solución) descartar ecuaciones sobrantes (seleccionadas al criterio de quien desarrolla el modelo, pero siempre con fundamento de la teoría) para encontrar alguna solución.

AIV.1.1.2.3. Existencia del Equilibrio y Teorema de Punto Fijo

La existencia de un equilibrio en un problema económico y financiero no es un problema trivial y ha sido tratado teóricamente por basta literatura (ver Arrow and Intrilligator (1981, 1982, 1986)). No obstante, es factor común la utilización del Teorema de Punto Fijo de Brouwer (1912) para definir condiciones suficientes para la existencia de un equilibrio (ver Mas-Colell (1995), Capítulo 17). Dicho Teorema de Punto Fijo se presenta a continuación en una versión práctica[64] para funciones escalares en una versión tomada de Burden y Faires (2002), capítulo 2, p. 56. Para demostrar el teorema de punto fijo se utilizan tanto el Teorema del Valor Medio como el Teorema del Valor Intermedio. Posteriormente se presenta su generalización para un sistema de funciones de varias variables cuya demostración se omite, dándose la referencia de su consulta.

AIV.1.1.2.4. Teorema de Punto Fijo de Brauwer

Teorema: Sea $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ una función continua. Entonces existe $x^* \in [a, b]$ tal que $f(x^*) = x^*$. Donde x^* es llamado punto fijo de f.

Demostración: Si $f(a) = a$ ó $f(b) = b$ entonces f tiene un punto fijo en un extremo de su dominio $[a, b]$, si no ocurre esto entonces forzosamente $f(a) > a$ y $f(b) < b$. Definamos $g(x) = f(x) - x$. Se observa que $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y es continua sobre $[a, b]$. Tenemos que:

(*i*) $f(a) > a$ implica que $g(a) = f(a) - a > 0$;

(*ii*) $f(b) < b$ implica que $g(b) = f(b) - b < 0$.

(*i*) y (*ii*) implica que $g(a)g(b) < 0$ y por tanto por el Teorema del Valor Medio existe $x^* \in [a, b]$ tal que $g(x^*) = 0$. Si esto ocurre $f(x^*) = x^*$. Por lo tanto para $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ existe $x^* \in [a, b]$ tal que $f(x^*) = x^*$.

Corolario: Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua. Entonces existe $x^* \in [0, 1]$ tal que $f(x^*) = x^*$.

AIV.1.1.2.5. Teorema de Punto Fijo de para un Sistema de Ecuaciones de Varias Variables

El Teorema de Punto Fijo para un sistema de ecuaciones de varias variables no es más que una generalización del teorema de punto fijo para una función escalar.

Teorema: Sea F una función de dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ que mapea al mismo $D \subset \mathbb{R}^n$. Entonces existe $x^* \in D$ tal que $F(x^*) = x^*$. Donde x^* es llamado punto fijo de F.

Demostración: consultar Ortega (1972), p. 153.

Corolario: Sea $F : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^n$ un sistema de funciones continuas. Entonces existe $x^* \in [0, 1]^n$ tal que $F(x^*) = x^*$.

[64] Esta versión del Teorema de Punto Fijo nos será suficiente para demostrar la existencia del equilibrio del modelo desarrollado en la sección IV.4 del capitulo IV.

De acuerdo a lo anterior, si las condiciones de punto fijo se cumplen en un sistema de ecuaciones determinado, se garantiza la existencia de al menos un equilibrio sobre una región de búsqueda (el domino D) de los valores de las incógnitas.

Es importante mencionar que las condiciones de punto fijo son suficientes para garantizar la existencia del equilibrio, pero no necesarias, es decir, podrían no cumplirse en cierto intervalo y existir el equilibrio (ver ejemplo en Burden y Faires (2002), capítulo 2, p. 57)

AIV.1.2. Condiciones de Unicidad de un Equilibrio

Si un sistema de ecuaciones determinado cumple las condiciones de punto fijo sobre una región de búsqueda (el domino D) de los valores de las incógnitas, y además cumple con ser un sistema de ecuaciones contractivo, entonces se garantiza que el punto fijo es único y por tanto la solución del sistema de ecuaciones sobre la región de búsqueda es única. Esto equivale a la unicidad del equilibrio.

El Teorema de Unicidad de Punto Fijo para un sistema de ecuaciones de varias variables se omite en este anexo (puede consultarse Border (1985), Nikaido (1968) o Fulks (1978)). Sin embargo, la idea de contracción se discute a continuación, pues no sólo es útil para demostrar la unicidad de un equilibrio, sino permite asegurar que si se utiliza un criterio de búsqueda de la solución basado en una función del tipo $f(x) = x$ que cumple con las condiciones de punto fijo y es contractiva, dicho criterio de búsqueda de la solución siempre es exitoso además de que la solución será única (¡el mejor de los mundos!).

AIV.1.2.1. Funciones Contractivas y Convergencia Segura

Se tiene una contracción cuando una función continua $g : [a, b] \to [a, b]$, para la cual existe la primer derivada en todos los puntos interiores de su intervalo de dominio, tiene una tasa de cambio (primer derivada) siempre menor a 1. (Nótese que las consideraciones en la definición de g hacen que cumpla con las condiciones de punto fijo.)

En general, si el límite superior de la tasa de cambio es $k < 1$, se verifica que $|g'(\xi)| \leq k$ para todo elemento del dominio $\xi \in (a, b)$.

De forma intuitiva, una contracción es una función (con las propiedades descritas anteriormente) que para cualquier punto inicial $x_0 \in (a, b)$ que se elija, las iteraciones con $x_{n+1} = g(x_n)(n = 0, 1, \ldots)$ convergen a la solución de la ecuación $g(x^*) = x^*$. Esto es debido a que la magnitud del error entre x_n y x^* se va reduciendo en la proporción k a medida que se avanza en las iteraciones.

Teorema: Sea $g : [a, b] \to [a, b]$ una función continua, cuya derivada existe para todo $\xi \in (a, b)$. Además se cumple que $|g'(\xi)| \leq k$ para algún $k < 1$. Entonces existe $x^* \in [a, b]$ tal que $g(x^*) = x^*$ y es único.

Demostración: Por el teorema del valor medio:

$$|g(x_n) - g(x^*)| = |g'(\xi)||x_n - x^*| \leq k|x_n - x^*|$$

Pero bajo la iteración $x_{n+1} = g(x_n)$:

$$|g(x_n) - g(x^*)| = |g'(\xi)| \, |x_n - x^*| \leq k \, |g(x_{n-1}) - x^*| \leq k \cdot k \, |x_{n-1} - x^*| \leq ... \leq k^{n+1} \, |x_0 - x^*|$$

Pero, como $|x_0 - x^*| < \infty$ y $k^{n+1} \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces $g(x_n) \to g(x^*)$, o bien: $x_{n+1} \to x^*$ cuando $n \to \infty$.

9.3. ANEXO V.1. CARTA CONFIRMACIÓN DE LOS SWAPS DE TIIE-28 DÍAS BAJO ESTÁNDARES ISDA

Banco XYZ, S.A.

México D.F. a *DD* de *MMMM* de *YYYY*.

A: **"NOMBRE DE CONTRAPARTE"**
(dirección contraparte)
C.P. #####

Referencia: **ISD-0000-000000XR**
At'n: ______________________

Confirmamos la Operación de Intercambio que realizamos con ustedes en los siguientes términos con la presente Confirmación número **000000XR** emitida al amparo del Contrato Marco para Operaciones Financieras Derivadas de fecha (fecha), el Suplemento de fecha **(fecha)** y el Anexo Swaps de fecha **(fecha)**, todos celebrados entre las partes que se señalan a continuación como "Parte A" y "Parte B". Salvo que se definan en la presente de cualquier otra manera, los términos que inician con mayúscula tendrán el significado que se lista en los documentos antes mencionados.

Parte A:	**Quien corresponda**
Parte B:	**Quien corresponda**
Tipo de Operación:	( ) Operación de Intercambio de Monedas
	( )Operación de Intercambio de Tasas de Interés
	( )Operación de Intercambio de Monedas y Tasas de Interés
Monto de Referencia:	$ 000,000,000.00 de Pesos Mexicanos

Fecha de la celebración de la operación:	Día-Mes-Año
Fecha de Inicio:	Día-Mes-Año
Fecha de Vencimiento:	Día-Mes-Año
Moneda A:	Pesos Mexicanos
Tasa A:	00.00% Tasa Fija
Primera Fecha de Pago Parte A:	Día-Mes-Año
Periodicidad de Fecha de Pago Parte A:	Cada X días naturales a partir de la primera fecha de pago, en caso de ser día inhábil se realizará el día hábil siguiente.
Monto a pagar en Moneda A en cada Fecha de pago por la parte A	La cantidad que resulte al aplicar la siguiente fórmula (Monto de Referencia *00.0000%/360*Plazo)
Moneda B	Pesos Mexicanos
Tasa B	TIIE 28 Días
Sobretasa:	XX puntos base
Fuente Tasa B:	La Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio (TIIE) a 28 días, o la que la sustituya, que el Banco de México publique en el Diario Oficial de la Federación el día de inicio de cada cupón
Primera Fecha de Pago Parte B:	Día-Mes-Año
Periodicidad de Fecha de Pago Parte B:	Cada 28 días naturales a partir de la primera

	fecha de pago, en caso de ser día inhábil se realizará el día hábil siguiente.
Monto a pagar en Moneda B en cada Fecha de pago por la parte B	La cantidad que resulte al aplicar la siguiente fórmula: (Monto de Referencia *TIIE28/360*Plazo)
Finalidad de la Operación:	Parte A: negociación (X) cobertura ( ) Parte B: negociación ( ) cobertura ( )

De conformidad con el Contrato Marco, agradeceremos que cualquier aclaración u observación en relación con la Operación que aquí se confirma nos la hagan llegar por escrito dentro del Día Hábil siguiente a la fecha de recepción de la presente Confirmación. En caso de no recibir observación alguna de su parte dentro del plazo antes señalado, la Operación y los términos consignados en la presente confirmación se tendrán ratificados y aceptados tácitamente por ustedes.

A t e n t a m e n t e

Banco XYZ, S.A.

(dirección)

C.P. #####

Tesorero o Apoderado 1 de la Parte	Apoderado 2 de la Parte

Aceptamos todos y cada uno de los términos de esta Confirmación.

(“NOMBRE DE CONTRAPARTE”)

Tesorero o Apoderado 1 de la Contraparte	Apoderado 2 de la Contraparte

9.4. ANEXO VI.1. CÓDIGO EN VISUAL BASIC UTILIZADO PARA EL AJUSTE DE LA ESTRUCTURA DE PLAZOS DE LAS TASAS DE INTERÉS DE LOS SWAPS DE TIIE-28 DÍAS

VI.1.1. Obtención de Nuevas Fechas Adicionando Cualquier Intervalo de Tiempo: *FechaNueva, FechasNominales*

'FUNCIÓN PARA OBTENER CUALQUIER FECHA A PARTIR DE UNA "FechaInicial" Y LA-ESPECIFICACIÓN DEL "Intervalo" de tiempo y su "Numero" que se adicionará a dicha FechaInicial.

'NOTA1: "Interval" debe especificarse de acuerdo a las convenciones del código de VB (días:"d", meses:"m", semanas:"ww", etc).

'*Inicio del Código*****

```
Public Function FechaNueva(FechaInicial As Date, Intervalo As String, Numero As Double) As Date
FechaNueva = DateAdd(Intervalo, Numero, FechaInicial)
End Function
```

'*Fin del Código*****

'FUNCIÓN PARA OBTENER UNA SERIE DE FECHAS NOMINALES A PARTIR DE UNA FECHA INICIAL: "FechaEfectiva", EL INTERVALO DE TIEMPO: "Intervalo" y "CantidadIntervalos" Y EL NMERO DE FECHAS: "NumeroFechas" A GENERAR 'NOTA2: "La salida es un vector (fila)

'*Inicio del Código*****

```
Public Function FechasNominales(FechaEfectiva As Double, Intervalo As String, CantidadIntervalos As Double, NumeroFechas As Long)
Dim i As Long
Dim F() As Double
ReDim F(NumeroFechas)
F(0) = FechaEfectiva
For i = 1 To UBound(F)
  F(i) = DateAdd(Intervalo, CantidadIntervalos, F(i - 1))
Next
FechasNominales = F
End Function
```

'*Fin del Código*****

VI.1.2. Obtención de Días Hábiles:*DiaHabil, Following, Previous, MisFechasHabilesF*

'FUNCIÓN PARA AJUSTAR CUALQUIER "Fecha" AL DÍA HÁBIL INMEDIATO SEGÚN EL "Calendario" DE DÍAS INHABILES ESPECIFICADO Y LA "ReglaAjuste" DE DICHA Fecha EN CASO DE QUE SEA INHÁBIL.

'NOTA1: "ReglaAjuste" debe especificarse exactamente como sigue:

Following:"F" ó "f", Modified Following:"MF" ó "mf", Previous:"P" ó "p", Modified Previous:-"MP"ó"mp".

'*Inicio del Código*****

```
Public Function DiaHabil(fecha As Double, Calendario As Range, ReglaAjuste As String) As Double
Dim FHabil As Date
ReglaAjuste = UCase(ReglaAjuste)
Select Case ReglaAjuste
  Case "F", "MF"
    FHabil = Following(fecha, Calendario)
    If ReglaAjuste = "MF" And (Month(FHabil) > Month(fecha) Or Year(FHabil)> Year(fecha)) Then FHabil = Previous(fecha, Calendario)
  Case "P", "MP"
    FHabil = Previous(fecha, Calendario)
    If ReglaAjuste = "MP" And (Month(FHabil)< Month(fecha) Or Year(FHabil) < Year(fecha)) Then FHabil = Following(fecha, Calendario)
End Select
DiaHabil = FHabil
End Function
```

'*Fin del Código*****

'FUNCIÓN QUE AJUSTA UNA FECHA NOMINAL: "FechaNominal" INHÁBIL AL SIGUIENTE DÍA HÁBIL DE ACUERDO AL CALENDARIO DE DÍAS INHÁBILES ESPECIFICADO: "Calendario"

'*Inicio del Código*****

```
Public Function Following(FechaNominal As Double, Calendario As Range) As Double
Dim i As Long
Dim F As Date
F = FechaNominal
i = 1
```

```
Do
  If Weekday(F) = 7 Then F = F + 2
  If Weekday(F) = 1 Then F = F + 1
  If i > Calendario.Count Then Exit Do
  Do
    If F = Calendario.Cells(i, 1) Then F = F + 1
    i = i + 1
  Loop Until Calendario.Cells(i, 1) > F Or i > Calendario.Count
Loop Until Not (Weekday(F) = 7 Or Weekday(F) = 1)
Following = F
End Function
```

'*Fin del Código*****

'FUNCIÓN QUE AJUSTA UNA FECHA NOMINAL: "FechaNominal" INHÁBIL AL PREVIO DÍA HÁBIL DE ACUERDO AL CALENDARIO DE DÍAS INHÁBILES ESPECIFICADO: "Calendario"

'*Inicio del Código*****

```
Public Function Previous(FechaNominal As Double, Calendario As Range) As Double
Dim i As Long
Dim F As Date
F = FechaNominal
i = 1
Do
  If Weekday(F) = 7 Then F = F - 1
  If Weekday(F) = 1 Then F = F - 2
  If i > Calendario.Count Then Exit Do
  Do
    If F = Calendario.Cells(i, 1) Then
      F = F - 1
      i = i - 1
    Else
      i = i + 1
    End If
  Loop Until Calendario.Cells(i, 1) > F Or i > Calendario.Count Or i = 0
Loop Until Not (Weekday(F) = 7 Or Weekday(F) = 1)
```

Previous = F

End Function

'*Fin del Código*****

'FUNCIÓN QUE AJUSTA UNA SERIE DE FECHAS NOMINALES: "FechasNominales" INHÁBILES AL SIGUIENTE DÍA HÁBIL CORRESPONDIENTE DE ACUERDO AL CALENDARIO DE DÍAS INHÁBILES ESPECIFICADO: "Calendario"

'NOTA1: Esta función se apoya de otra función con argumentos matriciales

'*Inicio del Código*****

```
Public Function MisFechasHabilesF(FechasNominales As Range, Calendario As Range)
Dim MisFechasNominales() As Double
Dim MiCalendario() As Double
MisFechasNominales = MiVector(FechasNominales)
MiCalendario = MiVector(Calendario)
MisFechasHabilesF = FechasHabilesF(MisFechasNominales, MiCalendario)
End Function
'...
Public Function FechasHabilesF(FechasNominales() As Double, Calendario() As Double)
Dim F() As Double
Dim i As Long
Dim j As Long
F = FechasNominales
For j = 0 To UBound(F)
  Do
    If Weekday(F(j)) = 7 Then F(j) = F(j) + 2
    If Weekday(F(j)) = 1 Then F(j) = F(j) + 1
    If i >UBound(Calendario) Then Exit Do
    Do
      If F(j) = Calendario(i) Then F(j) = F(j) + 1
      i = i + 1
      If i > UBound(Calendario) Then Exit Do
    Loop Until Calendario(i) > F(j)
  Loop Until Not (Weekday(F(j)) = 7 Or Weekday(F(j)) = 1)
  i = i - 2 'Asume que no hay más de dos holidays seguidos y que las fechas están ordenadas en >=
  If i < 0 Then i = 0
```

```
Next
FechasHabilesF = F
End Function
```

'*Fin del Código*****

VI.1.3. Interpolación: *NivelInterpolado, Interpola, InterpolacionSimple, LS, SCS, MisVariosNivelesInterpolados, MisIntervalosInterpolados*

'FUNCIÓN QUE ENCUENTRA E INTERPOLA ENTRE DOS NIVELES (QUE DEPENDEN DEL TIEMPO O PLAZO COMO LAS TASAS DE INTERÉS) DADA UNA SERIE DE "Niveles", SUS "Plazos" Y EL "PlazoInterpolar"

'NOTA1: "Niveles" y "Plazos" deben corresponderse y estar ordenados por "Plazos"

'NOTA2: "Metodo" debe especificarse exactamente como se especifica en la función <Interpolacion-Simple>

'*Inicio del Código*****

```
Public Function NivelInterpolado(Plazos As Range, Niveles As Range, PlazoInterpolar As Double, Metodo As Byte)
Dim i As Long
Do
  i = i + 1
Loop Until PlazoInterpolar <= Plazos.Cells(i, 1) Or i > Plazos.Count
If i = 1 Or i > Plazos.Count Then
  'Asigna el primer valor de "Niveles" si "PlazoInterpolar" es menor que el primer plazo de "Plazos" y el último si es mayor que el último plazo de "Plazos"
  If i = 1 Then NivelInterpolado = Niveles.Cells(1, 1) Else NivelInterpolado = Niveles.Cells(Niveles.Count, 1)
Else
  'Interpola internamente (ver función: InterpolacionSimple) para cualquier "PlazoInterpolar" dentro del rango de "Plazos"
  NivelInterpolado = InterpolacionSimple(Plazos.Cells(i - 1, 1), Plazos.Cells(i, 1), Niveles.Cells(i - 1, 1), Niveles.Cells(i, 1), PlazoInterpolar, Metodo)
End If
End Function
```

'*Fin del Código*****

'FUNCIÓN QUE INTERPOLA ENTRE DOS NIVELES (QUE DEPENDEN DEL TIEMPO O PLAZO COMO LAS TASAS DE INTERÉS) DADOS DICHOS NIVELES, SUS PLAZOS Y EL "Plazo" A INTERPOLAR

'*Inicio del Código*****

```
Public Function Interpola(plazo_inf As Double, tasa_inf As Double, plazo_sup As Double, tasa_sup As Double, Plazo As Double, Metodo As Byte) As Double
Interpola = InterpolacionSimple(plazo_inf, plazo_sup, tasa_inf, tasa_sup, Plazo, Metodo)
End Function
```

'*Fin del Código*****

'COMPENDIO DE INTERPOLACIONES SIMPLES

'*Inicio del Código*****

```
Public Function InterpolacionSimple(T1 As Double, T2 As Double, R1 As Double, R2 As Double, t As Double, Metodo As Byte)
'If T < T1 Then
'  InterpolacionSimple = R1
'  ElseIf T > T2 Then
'  InterpolacionSimple = R2
'Else
  Select Case Metodo
  Case 1 'lineal simple en niveles
    InterpolacionSimple = LS(T1, T2, R1, R2, t)
  Case 2 'lineal simple en logaritmos de los niveles
    InterpolacionSimple = Exp(LS(T1, T2, Log(R1), Log(R2), t))
  Case 3 'lineal simple en exponencial de los niveles
    InterpolacionSimple = Log(LS(T1, T2, Exp(R1), Exp(R2), t))
  Case 4 'spline cúbicos simples
    InterpolacionSimple = SCS(T1, T2, R1, R2, t)
  Case Else
    InterpolacionSimple = R2
  End Select
'End If
End Function
'...
```

'INTERPOLACIÓN LINEAL SIMPLE (LS)

```
Function LS(s1 As Double, s2 As Double, x1 As Double, x2 As Double, s As Double) As Double
Dim a As Double
a = (s2 - s) / (s2 - s1)
```

LS = a * x1 + (1 - a) * x2

End Function

'...

'INTERPOLACION SPLINES CBICOS SIMPLES (SCS) ENTRE DOS PUNTOS (PENDIENTE NULA EN EXTREMOS)

```
Public Function SCS(s1 As Double, s2 As Double, x1 As Double, x2 As Double, s As Double)
Dim R() 'Se requiere que la matriz sea variant para usar las funciones de Excel de Matrices
Dim M() 'Se requiere que la matriz sea variant para usar las funciones de Excel de Matrices
ReDim R(3, 0)
ReDim M(3, 3)
For i = 0 To UBound(M, 1)
  If i = 0 Or i = 1 Then
    M(i, UBound(M, 2)) = 1
    If i = 0 Then R(0, 0) = x1 Else R(1, 0) = x2
  Else
    M(i, UBound(M, 2)) = 0
    If i = 2 Then R(2, 0) = 0 Else R(3, 0) = 0
  End If
  For j = UBound(M, 2) - 1 To 0 Step -1
    If i = 0 Or i = 1 Then
      If i = 0 Then M(i, j) = (s1 / 360) * M(i, j + 1) Else M(i, j) = (s2 / 360) * M(i, j + 1)
    Else
      If i = 2 Then M(i, j) = (3 - j) * (s1 / 360)^(2 - j) Else M(i, j) = (3 - j) * (s2 / 360) ^ (2 - j)
    End If
  Next
Next
M = Application.WorksheetFunction.MInverse(M)
R = Application.WorksheetFunction.MMult(M, R)
SCS = R(1, 1) * (s / 360)^3 + R(2, 1) * (s / 360)^2 + R(3, 1) * (s / 360) + R(4, 1)
End Function
```

'*Fin del Código*****

'FUNCIÓN QUE INTERPOLA UNA "SeriePlazosInterpolar" EN UN CONJUNTO DE "Plazos" y "Niveles" UTILIZANDO UN MÉTODO DE INTERPOLACIÓN ENTRE DOS PUNTOS.

'NOTA1: Esta función se apoya de otra función con argumentos matriciales

'NOTA2: "Metodo" debe especificarse exactamente como se especifica en la función <Interpolacion-Simple>

'*Inicio del Código*****

```
Public Function MisVariosNivelesInterpolados(Plazos As Range, Niveles As Range, SeriePlazosInterpolar As Range, Metodo As Byte)
Dim MisPlazos() As Double
Dim MisNiveles() As Double
Dim MiSeriePlazosInterpolar() As Double
MisPlazos = MiVector(Plazos)
MisNiveles = MiVector(Niveles)
MiSeriePlazosInterpolar = MiVector(SeriePlazosInterpolar)
MisVariosNivelesInterpolados = VariosNivelesInterpolados(MisPlazos, MisNiveles, MiSeriePlazosInterpolar, Metodo)
End Function
'...
Public Function VariosNivelesInterpolados(Plazos() As Double, Niveles() As Double, SeriePlazosInterpolar() As Double, Metodo As Byte)
Dim i As Long
Dim j As Long
Dim Curva() As Double
i=0
j=0
ReDim Curva(UBound(SeriePlazosInterpolar), 1)
Do Until j ¿ UBound(Curva) Or SeriePlazosInterpolar(j) > Plazos(0)
  Curva(j, 0) = SeriePlazosInterpolar(j)
  Curva(j, 1) = Niveles(0)
  j = j + 1
  If j > UBound(Curva) Then Exit Do
Loop
For i = 1 To UBound(Plazos)
  If j>UBound(Curva) Then Exit For
  Do Until SeriePlazosInterpolar(j)>Plazos(i)
    Curva(j, 0) = SeriePlazosInterpolar(j)
    Curva(j, 1) = InterpolacionSimple(Plazos(i - 1), Plazos(i), Niveles(i - 1), Niveles(i), SeriePlazosInterpolar(j), Metodo)
    j = j + 1
```

```
   If j>UBound(Curva) Then Exit For
  Loop
Next
Do Until j>UBound(Curva)
  Curva(j, 0) = SeriePlazosInterpolar(j)
  Curva(j, 1) = Niveles(UBound(Niveles))
  j = j + 1
Loop
VariosNivelesInterpolados = Curva
End Function
```

'*Fin del Código*****

'FUNCIÓN QUE INTERPOLA DENTRO DE LOS "Plazos" Y "Niveles" CIERTOS NIVELES CON CIERTA FRECUENCIA HASTA TERMINAR CON EL ULTIMO PLAZO DENTRO DE "Plazos"

'*Inicio del Código*****

```
Public Function MisIntervalosInterpolados(Plazos As Range, Niveles As Range, FrecuenciaDias As Double, Metodo As Byte)
Dim MisPlazos() As Double
Dim MisNiveles() As Double
MisPlazos = MiVector(Plazos)
MisNiveles = MiVector(Niveles)
MisIntervalosInterpolados = IntervalosInterpolados(MisPlazos, MisNiveles, FrecuenciaDias, Metodo)
End Function
'...
Public Function IntervalosInterpolados(Plazos() As Double, Niveles() As Double, FrecuenciaDias As Double, Metodo As Byte)
Dim i As Long
Dim j As Long
Dim t As Double
Dim CC() As Double
ReDim CC(1, Plazos(UBound(Plazos)) / FrecuenciaDias)
Do Until t ¿ Plazos(0)
  CC(0, j) = t
  CC(1, j) = Niveles(0)
  j = j + 1
```

```
  t = t + FrecuenciaDias
Loop
For i = 1 To UBound(Plazos)
  Do Until t>Plazos(i)
    CC(0, j) = t
    CC(1, j) = InterpolacionSimple(Plazos(i - 1), Plazos(i), Niveles(i - 1), Niveles(i), t, Metodo)
    j = j + 1
    t = t + FrecuenciaDias
  Loop
Next
IntervalosInterpolados = CC
End Function
```

'*Fin del Código*****

VI.1.4. Generación de los Precios de los Bonos Cupón Cero o Factores de Descuento con Interpolación Previa de las Cotizaciones: *SolucionInicial, MiBootExogeno*

'FUNCIÓN QUE ENCUENTRA LOS PRECIOS SPOT DE LOS BONOS CUPÓN CERO DADAS LAS COTIZACIONES ESTÁNDAR DE LOS SWAPS DE TIIE: "NivelesSwaps", SUS RESPECTIVOS NMEROS DE FLUJOS: "IDSwaps", LA FRECUENCIA DE SU FLUJO: "FrecuenciaFlujo_Dias", EL "Basis", LA "FechaValuacion", EL "Calendario" DE DÍAS INHÁBILES, EL "Metodo" DE INTERPOLACIÓN DE LAS COTIZACIONES.

'NOTA1: "IDSwaps" son los indicadores de los Swaps de TIIE-28 días (sin incluir "x1"), los cuales deben estar ordenados ascendentemente y la propia TIIE a 28 días se considera como el primer Swap de 1 flujo.

'NOTA2: "Metodo" debe especificarse exactamente como se especifica en la función <InterpolacionSimple>

'NOTA3: La variable opcional "TodosDF"=TRUE (ó 1) indica que se presentará la solución para todos los flujos de la serie de swaps, en el caso FALSE (ó 0) solo se presenta la solución para los plazos de cotizaciones estándar.

'*Inicio del Código*****

```
Public Function SolucionInicial(IDSwaps As Range, NivelesSwaps As Range, FrecuenciaFlujo_Dias As Double, Basis As Double, FechaValuacion As Date, Calendario As Range, Metodo As Byte, Optional TodosDF As Boolean)
Dim i As Long
Dim DF() As Double
Dim Q0() As Double
```

```
Dim FN() As Double
Dim FE() As Double
Dim PlazosInterpolar() As Double
Dim SwapsInterpolar() As Double
Dim Plazos() As Double
Dim Swaps() As Double
Dim MiCalendario() As Double
MiCalendario = MiVector(Calendario)
FN = FechasNominales(DiaHabil(FechaValuacion + 1, Calendario, “f”), “d”, FrecuenciaFlujo_Dias, IDSwaps.Cells
(IDSwaps.Count, 1))
FE = FechasHabilesF(FN, MiCalendario)
ReDim Q0(IDSwaps.Count, 5)
Q0(0, 0) = 0 'ID del Swap representando el número de flujos
Q0(0, 1) = FN(0) 'Fecha Nominal del Swap
Q0(0, 2) = FE(0) 'Fecha Efectiva del Swap
Q0(0, 3) = 0 'Días a Fecha Efectiva del Swap
Q0(0, 4) = NivelesSwaps.Cells(1, 1) 'Nivel de Cotización del Swap
ReDim Plazos(UBound(Q0))
ReDim Swaps(UBound(Q0))
Plazos(0) = Q0(0, 3)
Swaps(0) = Q0(0, 4)
For i = 1 To UBound(Q0)
  Q0(i, 0) = IDSwaps.Cells(i, 1)
  Q0(i, 1) = FN(Q0(i, 0))
  Q0(i, 2) = FE(Q0(i, 0))
  Q0(i, 3) = FE(Q0(i, 0)) - FE(0)
  Q0(i, 4) = NivelesSwaps.Cells(i, 1)
  Plazos(i) = Q0(i, 3)
  Swaps(i) = Q0(i, 4)
Next
ReDim PlazosInterpolar(UBound(FE))
For i = 0 To UBound(FE)
  PlazosInterpolar(i) = FE(i) - FE(0)
Next
SwapsInterpolar = VariosNivelesInterpolados(Plazos, Swaps, PlazosInterpolar, Metodo)
```

```
SwapsInterpolar = Mj(SwapsInterpolar, 1)
DF = BootExogeno(PlazosInterpolar, SwapsInterpolar, Basis)
If TodosDF = True Then
  SolucionInicial = DF
Else
  DF = Mj(DF, 2)
  Q0(0, 5) = DF(0)
  For i = 1 To UBound(Q0)
    Q0(i, 5) = DF(Q0(i, 0))
  Next
  SolucionInicial = Q0
End If
End Function
```

'*Fin del Código*****

'FUNCIÓN PARA ENCONTRAR LOS FACTORES DE DESCUENTO DE MANERA DIRECTA (SIN SOLUCIÓN NUMÉRICA) DADOS LAS COTIZACIONES: "NivelesSwaps" PARA TODOS LOS "PlazosEfectivos" DONDE HAY FLUJO, ESPECIFICÁNDOSE EL "Basis" QUE LLEVARÁN IMPLÍCITO LOS FACTORES DE DESCUENTO.

'*Inicio del Código*****

```
Public Function MiBootExogeno(PlazosEfectivos As Range, NivelesSwaps As Range, Basis As Double)
Dim MisPlazosEfectivos() As Double
Dim MisNivelesSwaps() As Double
MisPlazosEfectivos = MiVector(PlazosEfectivos)
MisNivelesSwaps = MiVector(NivelesSwaps)
MiBootExogeno = BootExogeno(MisPlazosEfectivos, MisNivelesSwaps, Basis)
End Function
'...
Public Function BootExogeno(PlazosEfectivos() As Double, NivelesSwaps() As Double, Basis As Double)
Dim i As Long
Dim DF() As Double
ReDim Preserve DF(UBound(PlazosEfectivos), 2)
DF(i, 0) = PlazosEfectivos(i)
DF(i, 1) = NivelesSwaps(i)
DF(i, 2) = 1
```

```
For i = 1 To UBound(DF)
   DF(i, 0) = PlazosEfectivos(i)
   DF(i, 1) = NivelesSwaps(i)
   DF(i, 2) = (1 - NivelesSwaps(i) / NivelesSwaps(i - 1) * (1 - DF(i - 1, 2))) / (1 + NivelesSwaps(i) * (DF(i, 0) - DF(i - 1, 0)) / Basis)
Next
BootExogeno = DF
End Function
```

'*Fin del Código*****

VI.1.5. Generación de los Precios de los Bonos Cupón Cero o Factores de Descuento Utilizando *Exógenamente* el Modelo con Tasas de Interés Forward Instantáneas con Tendencia Nula: *MiModeloBaseExogeno, MiTasaForward*

'FUNCIÓN QUE ENCUENTRA LOS PRECIOS SPOT DE LOS BONOS CUPÓN CERO DE UNA "SeriePlazosInterpolar" DADA UNA CURVA DE "FactoresDescuento" Y SUS "PlazosDiasSpot" ASUMIENDO QUE LAS TASAS DE INTERÉS FORWARD INSTANTÁNEAS SUBYACENTES (DE "Basis" ESPECIFICADO) TIENEN TENDENCIA NULA

'NOTA1: La variable opcional "TasaForward"=TRUE (ó 1) indica que se presentará la tasa forward instantánea para la Serie de Plazos interpolar en lugar de los factores de descuento.

'*Inicio del Código*****

```
Public Function MiModeloBaseExogeno(PlazosDiasSpot As Range, FactoresDescuento As Range, SeriePlazosInterpolar As Range, Basis As Double, Optional TasaForward As Boolean)
Dim i As Long
Dim j As Long
Dim a As Double
Dim Curva() As Double
ReDim Curva(1 To SeriePlazosInterpolar.Count, 1)
j = 1
Do Until j > UBound(Curva) Or SeriePlazosInterpolar.Cells(j, 1)> PlazosDiasSpot.Cells(1, 1)
   If PlazosDiasSpot.Cells(1, 1) = 0 Then Exit Do
   Curva(j, 0) = SeriePlazosInterpolar.Cells(j, 1)
   Curva(j, 1) = FactoresDescuento(1, 1)^(Curva(j, 0) / PlazosDiasSpot.Cells(1, 1))
   If TasaForward = True Then Curva(j, 1) = MiTasaForward(0, Curva(j, 0), 1, Curva(j, 1), Basis, 0)
   j = j + 1
   If j>UBound(Curva) Then Exit Do
```

Loop

For i = 2 To PlazosDiasSpot.Count

If j>UBound(Curva) Then Exit For

Do Until SeriePlazosInterpolar.Cells(j, 1)>PlazosDiasSpot.Cells(i, 1)

Curva(j, 0) = SeriePlazosInterpolar.Cells(j, 1)

a = (PlazosDiasSpot.Cells(i, 1) - Curva(j, 0)) / (PlazosDiasSpot.Cells(i, 1) - PlazosDiasSpot.Cells(i - 1, 1))

Curva(j, 1) = FactoresDescuento.Cells(i - 1, 1)^a* FactoresDescuento.Cells(i, 1)^(1 - a)

If TasaForward = True Then Curva(j, 1) = MiTasaForward(PlazosDiasSpot.Cells(i - 1, 1), Curva(j, 0), FactoresDescuento.Cells(i - 1, 1), Curva(j, 1), Basis, 0)

j = j + 1

If j>UBound(Curva) Then Exit For

Loop

Next

Do Until j>UBound(Curva)

Curva(j, 0) = SeriePlazosInterpolar.Cells(j, 1)

Curva(j, 1) = FactoresDescuento(FactoresDescuento.Count, 1)^(Curva(j, 0) / PlazosDiasSpot.Cells(PlazosDiasSpot.Count, 1))

If TasaForward = True Then Curva(j, 1) = MiTasaForward(PlazosDiasSpot.Cells(PlazosDiasSpot.Count, 1), Curva(j, 0),

FactoresDescuento(FactoresDescuento.Count, 1), Curva(j, 1), Basis, 0)

j = j + 1

Loop

MiModeloBaseExogeno = Curva

End Function

'*Fin del Código*****

'FUNCIÓN PARA OBTENER LA TASA FORWARD (CONTINUA, DISCRETA O CON CIERTA COMPOSICIÓN) ENTRE DOS FACTORES DE DESCUENTO

'*Inicio del Código*****

Public Function MiTasaForward(T1 As Double, T2 As Double, FD1 As Double, FD2 As Double, Basis As Double, Optional Composicion As Long)

If T2 = T1 Then Exit Function

If Composicion = 0 Then 'Tasa forward continua

MiTasaForward = Log(FD1 / FD2) * Basis / (T2 - T1)

ElseIf Composicion > 0 Then 'Tasa forward con la composición indicada

MiTasaForward = ((FD1 / FD2)^(Composicion / (T2 - T1)) - 1) * Basis / Composicion

```
Else 'Tasa forward simple
  MiTasaForward = (FD1 / FD2 - 1) * Basis / (T2 - T1)
End If
End Function
```

'*Fin del Código*****

VI.1.6. Generación de los Precios de los Bonos Cupón Cero o Factores de Descuento Utilizando *Endógenamente* el Modelo con Tasas de Interés Forward Instantáneas con Tendencia Nula: *MiModeloBaseEndogeno*

'FUNCIÓN QUE ENCUENTRA LOS PRECIOS SPOT DE LOS BONOS CUPÓN CERO DADAS LAS COTIZACIONES ESTÁNDAR DE LOS SWAPS DE TIIE: "NivelesSwaps", SUS RESPECTIVOS NÚMEROS DE FLUJOS: "IDSwaps", LA FRECUENCIA DE SU FLUJO: "FrecuenciaFlujo_Dias", EL "Basis", LA "FechaValuacion" Y EL "Calendario" DE DÍAS INHÁBILES

'NOTA1: "IDSwaps" son los indicadores de los Swaps de TIIE-28 días (sin incluir "x1"), los cuales deben estar ordenados ascendentemente y la propia TIIE a 28 días se considera como el primer Swap de 1 flujo.

'NOTA2: La variable opcional "TodosDF"=TRUE (ó 1) indica que se presentará la solución para todos los flujos de la serie de swaps, en el caso FALSE (ó 0) solo se presenta la solución para los plazos de cotizaciones estándar.

'*Inicio del Código*****

'FUNCIÓN QUE ENCUENTRA LOS FACTORES DE DESCUENTO (O TASA FORWARD) PARA UNA SERIE DE PLAZOS CON EL MODELO BASE

```
Public Function MiModeloBaseEndogeno(IDSwaps As Range, NivelesSwaps As Range, FrecuenciaFlujo_Dias As Double, Basis As Double, FechaValuacion As Date, Calendario As Range, Optional TodosDFs As Boolean)
Dim i As Long
Dim j As Long
Dim a As Double
Dim DF0 As Double
Dim FN() As Double
Dim FE() As Double
Dim DF() As Double
Dim DFSwaps() As Double
Dim MiCalendario() As Double
MiCalendario = MiVector(Calendario)
FN = FechasNominales(Following(FechaValuacion + 1, Calendario), "d", FrecuenciaFlujo_Dias, IDSwaps.
Cells(IDSwaps.Count, 1))
```

```
FE = FechasHabilesF(FN, MiCalendario)
ReDim DF(UBound(FE), 5)
For i = 0 To UBound(DF)
  DF(i, 0) = i 'ID del Swap representando el número de flujos
  DF(i, 1) = FN(i) 'Fecha Nominal del Swap
  DF(i, 2) = FE(i) 'Fecha Efectiva del Swap
  DF(i, 3) = FE(i) - FE(0) 'Días a Fecha Efectiva del Swap
Next
For i = 0 To 1
  DF(i, 4) = NivelesSwaps.Cells(1, 1) 'Nivel de Cotización del Swap
  DF(i, 5) = 1 / (1 + DF(i, 4) * DF(i, 3) / Basis) 'Factor de descuento
Next
For i = 2 To IDSwaps.Count
  DF0 = DF(IDSwaps.Cells(i - 1, 1), 5)^(DF(IDSwaps.Cells(i, 1), 3) / DF(IDSwaps.Cells(i - 1, 1), 3))
  Do Until Abs(DF(IDSwaps.Cells(i, 1), 5) - DF0) ¡ 1 / 1000000000
    DF(IDSwaps.Cells(i, 1), 5) = DF0
    s = 0
    For j = IDSwaps.Cells(i - 1, 1) + 1 To IDSwaps.Cells(i, 1)
      a = (DF(IDSwaps.Cells(i, 1), 3) - DF(j, 3)) / (DF(IDSwaps.Cells(i, 1), 3) - DF(IDSwaps.Cells(i - 1, 1), 3))
      DF(j, 5) = DF(IDSwaps.Cells(i - 1, 1), 5)^a * DF(IDSwaps.Cells(i, 1), 5)^(1 - a)
      s = s + DF(j, 5) * (DF(j, 3) - DF(j - 1, 3)) / Basis
    Next
      DF0 = 1 - (1 - DF(IDSwaps.Cells(i - 1, 1), 5)) * NivelesSwaps.Cells(i, 1) / NivelesSwaps.Cells(i - 1, 1) - NivelesSwaps.Cells(i, 1) * s
  Loop
Next
For i = 2 To UBound(DF) 'Comprobación encontrando las Tasas Swaps
   DF(i, 4) = (1 - DF(i, 5)) / ((1 - DF(i - 1, 5)) / DF(i - 1, 4) + DF(i, 5) * (DF(i, 3) - DF(i - 1, 3)) / Basis)
Next
If TodosDFs = True Then
  MiModeloBaseEndogeno = DF
Else
  ReDim DFSwaps(IDSwaps.Count, 5)
  i = 0
  DFSwaps(i, 0) = DF(i, 0) 'ID del Swap representando el número de flujos
```

```
    DFSwaps(i, 1) = DF(i, 1) 'Fecha Nominal del Swap
    DFSwaps(i, 2) = DF(i, 2) 'Fecha Efectiva del Swap
    DFSwaps(i, 3) = DF(i, 3) 'Días a Fecha Efectiva del Swap
    DFSwaps(i, 4) = DF(i, 4) 'Nivel de Cotización del Swap
    DFSwaps(i, 5) = DF(i, 5) 'Factor de descuento final del Swap
    For i = 1 To IDSwaps.Count
        DFSwaps(i, 0) = DF(IDSwaps.Cells(i, 1), 0) 'ID del Swap representando el número de flujos
        DFSwaps(i, 1) = DF(IDSwaps.Cells(i, 1), 1) 'Fecha Nominal del Swap
        DFSwaps(i, 2) = DF(IDSwaps.Cells(i, 1), 2) 'Fecha Efectiva del Swap
        DFSwaps(i, 3) = DF(IDSwaps.Cells(i, 1), 3) 'Días a Fecha Efectiva del Swap
        DFSwaps(i, 4) = DF(IDSwaps.Cells(i, 1), 4) 'Nivel de Cotización del Swap
        DFSwaps(i, 5) = DF(IDSwaps.Cells(i, 1), 5) 'Factor de descuento final del Swap
    Next
    MiModeloBaseEndogeno = DFSwaps
End If
End Function
```

'*Fin del Código*****

VI.1.7. Generación de los Precios de los Bonos Cupón Cero o Factores de Descuento Utilizando *Exógenamente* el Modelo de Tasas de Interés Forward Instantáneas con Tendencia Nula, Constante o Variable: *MiModeloTesisExogeno, MiBf, Mif*

'FUNCIÓN QUE ENCUENTRA LOS PRECIOS SPOT DE LOS BONOS CUPÓN CERO (CUANDO “MiB”=TRUE) O LAS TASAS DE INTERÉS FORWARD DADOS LOS “FactoresDescuento, SUS “PlazosDiasSpot” EFECTIVOS ESTÁNDAR , EL “Basis Y EL PLAZO: “MiPlazo” DE LA TASA FORWARD O FACTOR DE DESCUENTO A CALCULAR.

'NOTA1: “PlazosDiasSpot” y “FactoresDescueto” deben corresponderse y estar ordenados por “PlazosDiasSpot”, con al menos 2 elementos e iniciando con 0 días (correspondiéndole un Factor de Descuento de 1).

'NOTA2: “FwdModeloTesis” se debe elegir igual a “0” ó “FALSO” para que se presente la tasa forward flat (con tendencia nula) e igual a “1” ó “VERDADERO” para la tasa forward instantánea del Modelo según “FwdL”.

'NOTA3: “FwdL” = TRUE (ó 1) indica que se asumen las tasas forward instantáneas con tendencia constante, en caso contrario se asumen con tendencia variable y siguiendo una relación de sustitución entre mercados adyacentes.

'*Inicio del Código*****

```
Public Function MiModeloTesisExogeno(PlazosDiasSpot As Range, FactoresDescuento As Range, Basis As Double,
MiPlazo As Double, FwdModeloTesis As Boolean, Optional MiB As Boolean, Optional FwdL As Boolean) As Double
Dim i As Long
Dim j As Long
Dim s As Double
Dim F() As Double
ReDim F(PlazosDiasSpot.Count + 1, 2)
s = MiPlazo / Basis
F(1, 0) = PlazosDiasSpot.Cells(1, 1) / Basis
F(1, 2) = FactoresDescuento.Cells(1, 1)
F(0, 0) = F(1, 0) 'Ti-1 del mercado extremo a la izquierda
F(0, 2) = F(1, 2) 'Bi-1 del mercado extremo a la izquierda
For i = 2 To PlazosDiasSpot.Count
  F(i, 0) = PlazosDiasSpot.Cells(i, 1) / Basis
  F(i, 2) = FactoresDescuento.Cells(i, 1)
  F(i, 1) = -Log(F(i, 2) / F(i - 1, 2)) / ((F(i, 0) - F(i - 1, 0)))
Next
F(1, 1) = F(2, 1)
F(0, 1) = F(1, 1) 'Fi-1 del mercado extremo a la izquierda
F(UBound(F), 0) = F(UBound(F) - 1, 0) 'Ti+1 del mercado extremo a la derecha
F(UBound(F), 1) = F(UBound(F) - 1, 1) 'Fi+1 del mercado extremo a la derecha
F(UBound(F), 2) = F(UBound(F) - 1, 2) 'Bi+1 del mercado extremo a la derecha
Do
  j = j + 1
Loop Until s<= F(j, 0) Or j = UBound(F)
If j = 1 Then
 If FwdModeloTesis = True Then
  MiModeloTesisExogeno = MiBf(F(j - 1, 0), F(j, 0), F(j + 1, 0), F(j + 2, 0), F(j, 1), F(j + 1, 1), F(j + 2, 1), F(0,
0), MiB, FwdL)
 Else
  MiModeloTesisExogeno = F(0, 1)
  If MiB = True Then MiModeloTesisExogeno = F(j - 1, 2)*Exp(-MiModeloTesisExogeno* (s - F(j - 1, 0)))
 End If
ElseIf j = UBound(F) Then
 If FwdModeloTesis = True Then
```

MiModeloTesisExogeno = MiBf(F(UBound(F) - 3, 0), F(UBound(F) - 2, 0), F(UBound(F) - 1, 0), F(UBound(F), 0),

F(UBound(F) - 2, 1), F(UBound(F) - 1, 1), F(UBound(F), 1), F(UBound(F), 0), 0, FwdL)

Else

MiModeloTesisExogeno = F(j, 1)

End If

If MiB = True Then MiModeloTesisExogeno = F(j - 1, 2)*Exp(-MiModeloTesisExogeno* (s - F(j - 1, 0)))

Else

If FwdModeloTesis = True Then

MiModeloTesisExogeno = MiBf(F(j - 2, 0), F(j - 1, 0), F(j, 0), F(j + 1, 0), F(j - 1, 1), F(j, 1), F(j + 1, 1), s, MiB, FwdL)

If MiB = True Then MiModeloTesisExogeno = F(j - 1, 2) * MiModeloTesisExogeno

Else

MiModeloTesisExogeno = F(j, 1)

If MiB = True Then MiModeloTesisExogeno = F(j - 1, 2)*Exp(-MiModeloTesisExogeno* (s - F(j - 1, 0)))

End If

End If

End Function

'*Fin del Código*****

'FUNCIÓN QUE ENCUENTRA LA TASA FORWARD O EL FACTOR DE DESCUENTO DEL MODELO DE LA TESIS (CUANDO "PrecioBono"=TRUE) DADAS LAS TASAS FORWARD DISCRETAS "F1", "F2" Y "F3" Y LOS PLAZOS QUE LAS DEFINEN: "T0", "T1", "T2" Y "T3". LA FUNCIÓN CALCULA BAJO TASAS FORWARD INSTANTÁNEAS CON TENDENCIA CONSTANTE ("FwdL"=TRUE) O CON TENDENCIA VARIABLE ("FwdL"=FALSE)

'Nota1: El plazo "T" especificado debe estar entre "T1" y "T2".

'*Inicio del Código*****

Public Function MiBf(T0 As Double, T1 As Double, T2 As Double, T3 As Double, F1 As Double, F2 As Double, F3 As Double, T As Double, Optional PrecioBono As Boolean, Optional FwdL As Boolean) As Double

Dim v() As Double

v = Mif(T0, T1, T2, T3, F1, F2, F3, FwdL)

If PrecioBono = True Then

MiBf = Exp(-v(2)*(t^3 - T1^3) / 3 - v(3) * (t^2 - T1^2) / 2 - v(4) * (t - T1))

Else

MiBf = v(2) * t^2 + v(3) * t + v(4)

End If

End Function

'*Fin del Código*****

'FUNCIÓN QUE ENCUENTRA LOS PARÁMETROS DEL MODELO DE LA TESIS DADAS LAS TASAS FORWARD DISCRETAS "F1", "F2" Y "F3" Y LOS PLAZOS QUE LAS DEFINEN: "T0", "T1", "T2" Y "T3". LA FUNCIÓN CALCULA BAJO TASAS FORWARD INSTANTÁNEAS CON TENDENCIA CONSTANTE ("FwdL"=TRUE) O CON TENDENCIA VARIABLE ("FwdL"=FALSE)

'Nota1: El resultado es un arreglo de cinco elementos donde las primeras dos componentes son theta- y theta+ y las siguientes son a,b,c , en orden.

'*Inicio del Código*****

```
Public Function Mif(T0 As Double, T1 As Double, T2 As Double, T3 As Double, F1 As Double, F2 As Double, F3 As Double, Optional FwdL As Boolean)

Dim a() As Double

ReDim a(4)

a(0) = 2 * (F2 - F1) / (T2 - T0)

a(1) = 2 * (F3 - F2) / (T3 - T1)

If FwdL = True Then a(2) = 0 Else a(2) = -(a(0) - a(1)) / (T2 - T1) / 2

If FwdL = True Then a(3) = (a(0) + a(1)) / 2 Else a(3) = (a(0) * T2 - a(1) * T1) / (T2 - T1)

If FwdL = True Then a(4) = F2 - a(3)*(T2 + T1)/2 Else a(4) = F2 - a(2)*(T2^2 + T2 * T1 + T1^2) / 3 - a(3) * (T2 + T1) / 2

Mif = a

End Function
```

'*Fin del Código*****

VI.1.8. Generación de los Precios de los Bonos Cupón Cero o Factores de Descuento Utilizando *endógenamente* el Modelo de tasas de Interés Forward Instantáneas con Tendencia Constante o Variable: *MiModeloTesisEndogeno, MiModeloTesis*

'FUNCIÓN QUE ENCUENTRA LOS PRECIOS SPOT DE LOS BONOS CUPÓN CERO DADAS LAS COTIZACIONES ESTÁNDAR DE LOS SWAPS DE TIIE: "NivelesSwaps", SUS RESPECTIVOS NMEROS DE FLUJOS: "IDSwaps", LA FRECUENCIA DE SU FLUJO: "FrecuenciaFlujo_Dias", EL "Basis", LA "FechaValuacion" Y EL "Calendario" DE DÍAS INHÁBILES,ASUMIENDO QUE LAS TASAS DE INTERÉS FORWARD INSTANTÁNEAS SUBYACENTES (DE "Basis" ESPECIFICADO) TIENEN TENDENCIA CONSTANTE ("FwdL"=TRUE), O VARIABLE CON RELACIÓN DE SUSTITUCIÓN EN MERCADOS ADYACENTES ("FwdL"=FALSE)

'NOTA1: "IDSwaps" son los indicadores de los Swaps de TIIE-28 días (sin incluir "x1"), los cuales deben estar ordenados ascendentemente y la propia TIIE a 28 días se considera como el primer Swap de 1 flujo.

'NOTA2: La variable opcional "TodosDF"=TRUE (ó 1) indica que se presentará la solución para todos los flujos de la serie de swaps, en el caso FALSE (ó 0) solo se presenta la solución para los plazos de cotizaciones estándar.

'NOTA3: La variable opcional "Método" se utiliza para indicar la forma en que se obtendrá la solución inicial: interpolando las cotizaciones (debe especificarse exactamente como se especifica en la función <InterpolacionSimple>). El método numérico utilizado es una solución de Punto Fijo.

'*Inicio del Código*****

```
Public Function MiModeloTesisEndogeno(IDSwaps As Range, NivelesSwaps As Range, FrecuenciaFlujo_Dias As
Double, Basis As Double, FechaValuacion As Date, Calendario As Range, Metodo As Byte, Optional TodosDFs As
Boolean, Optional FwdL As Boolean)
Dim i As Long
Dim k As Long
Dim Aux() As Double
Dim PlazosInterpolar() As Double
Dim Plazos() As Double
Dim DFs0() As Double
Dim DFs() As Double
Dim Qs() As Double
Aux = SolucionInicial(IDSwaps, NivelesSwaps, FrecuenciaFlujo_Dias, Basis, FechaValuacion, Calendario, Metodo,
1)
PlazosInterpolar = Mj(Aux, 0)
Aux = SolucionInicial(IDSwaps, NivelesSwaps, FrecuenciaFlujo_Dias, Basis, FechaValuacion, Calendario, Metodo,
0)
Plazos = Mj(Aux, 3)
Qs = Mj(Aux, 4)
DFs = Mj(Aux, 5)
Do
  k = k + 1
  DFs0 = DFs
  DFs = ModeloTesis(Plazos, DFs0, Qs, PlazosInterpolar, Basis, 1, 0, FwdL)
Loop Until ErrorVectorial(DFs0, DFs) ¡ 1 / 1000000000
If TodosDFs = True Then
  MiModeloTesisEndogeno = ModeloTesis(Plazos, DFs, Qs, PlazosInterpolar, Basis, 0, 0, FwdL)
Else
```

```
  For i = 0 To UBound(Aux)
    Aux(i, 5) = DFs(i)
  Next
  MiModeloTesisEndogeno = Aux
End If
End Function
'...
```

'NOTA4: Para utilizar "Iterar"=TRUE (ó 1) se debe especificar "TasasForward"=False y "SeriePlazosInterpolar" debe contener todos los plazos de los flujos de los swaps

```
Public Function ModeloTesis(Plazos() As Double, DFs() As Double, Qs() As Double, SeriePlazosInterpolar() As Double, Basis As Double, Optional Iterar As Boolean, Optional TasasForward As Boolean, Optional FwdL As Boolean)
Dim i As Long
Dim j As Long
Dim s As Double
Dim CurvaDF() As Double
Dim NuevosDFs() As Double
NuevosDFs = DFs
i = 1
j = 0
ReDim CurvaDF(UBound(SeriePlazosInterpolar), 1)
Do Until j>UBound(CurvaDF) Or SeriePlazosInterpolar(j)>Plazos(i)
  CurvaDF(j, 0) = SeriePlazosInterpolar(j)
  If UBound(Plazos) = i Then
   CurvaDF(j, 1) = MiBf(Plazos(i-1) / Basis, Plazos(i-1) / Basis, Plazos(i) / Basis, Plazos(i) / Basis, Log(DFs(i-1) / DFs(i)) / (Plazos(i) / Basis - Plazos(i-1) / Basis), Log(DFs(i-1) / DFs(i)) / (Plazos(i) / Basis - Plazos(i-1) / Basis), Log(DFs(i-1) / DFs(i)) / (Plazos(i) / Basis - Plazos(i-1) / Basis), CurvaDF(j, 0) / Basis, Not TasasForward, FwdL)
  Else
   CurvaDF(j, 1) = MiBf(Plazos(i-1) / Basis, Plazos(i-1) / Basis, Plazos(i) / Basis, Plazos(i+1) / Basis, Log(DFs(i-1) / DFs(i)) / (Plazos(i) / Basis - Plazos(i-1) / Basis), Log(DFs(i-1) / DFs(i)) / (Plazos(i) / Basis - Plazos(i-1) / Basis), Log(DFs(i) / DFs(i+1)) / (Plazos(i+1) / Basis - Plazos(i) / Basis), CurvaDF(j, 0) / Basis, Not TasasForward, FwdL)
  End If
  j = j + 1
  If j > UBound(CurvaDF) Then Exit Do
Loop
```

```
For i = 2 To UBound(Plazos)
If j > UBound(CurvaDF) Then Exit For
  s = 0
  Do Until SeriePlazosInterpolar(j) > Plazos(i)
    CurvaDF(j, 0) = SeriePlazosInterpolar(j)
    If UBound(Plazos) = i Then
     CurvaDF(j, 1) = MiBf(Plazos(i-2) / Basis, Plazos(i-1) / Basis, Plazos(i) / Basis, Plazos(i) / Basis, Log(DFs(i-2) / DFs(i-1)) / (Plazos(i-1) / Basis - Plazos(i-2) / Basis), Log(DFs(i-1) / DFs(i)) / (Plazos(i) / Basis - Plazos(i-1) / Basis), Log(DFs(i-1) / DFs(i)) / (Plazos(i) / Basis - Plazos(i-1) / Basis), CurvaDF(j, 0) / Basis, Not TasasForward, FwdL)
    Else
        CurvaDF(j, 1) = MiBf(Plazos(i-2) / Basis, Plazos(i-1) / Basis, Plazos(i) / Basis, Plazos(i+1) / Basis, Log(DFs(i-2) / DFs(i-1)) / (Plazos(i-1) / Basis - Plazos(i-2) / Basis), Log(DFs(i-1) / DFs(i)) / (Plazos(i) / Basis - Plazos(i-1) / Basis), Log(DFs(i) / DFs(i+1)) / (Plazos(i+1) / Basis - Plazos(i) / Basis), CurvaDF(j, 0) / Basis, Not TasasForward, FwdL)
    End If
    If TasasForward = False Then
      CurvaDF(j, 1) = CurvaDF(j, 1) * DFs(i - 1) 'Se convierte el DF fwd a DF spot
      If Iterar = True Then s = s + CurvaDF(j, 1) * (CurvaDF(j, 0) - CurvaDF(j - 1, 0)) / Basis 'Se prepara información para los NuevosDFs
    End If
    j = j + 1
    If j > UBound(CurvaDF) Then Exit Do
    Loop
    If Iterar = True Then NuevosDFs(i) = 1 - Qs(i) / Qs(i-1) * (1 - NuevosDFs(i-1)) - Qs(i) * s 'Se obtiene una iteracion para los DFs: NuevosDFs
Next
Do Until j > UBound(CurvaDF)
   CurvaDF(j, 0) = SeriePlazosInterpolar(j)
   CurvaDF(j, 1) = MiBf(Plazos(i-2) / Basis, Plazos(i-1) / Basis, Plazos(i) / Basis, Plazos(i) / Basis, Log(DFs(i-2) / DFs(i-1)) / (Plazos(i-1) / Basis - Plazos(i-2) / Basis), Log(DFs(i-1) / DFs(i)) / (Plazos(i) / Basis - Plazos(i-1) / Basis), Log(DFs(i-1) / DFs(i)) / (Plazos(i) / Basis - Plazos(i-1) / Basis), CurvaDF(j, 0) / Basis, False, FwdL)
    If TasasForward = False Then CurvaDF(j, 1) = DFs(UBound(Plazos)) * Exp((Plazos(UBound(Plazos)) - CurvaDF(j, 0)) * CurvaDF(j, 1))
    j = j + 1
Loop
If Iterar = True Then ModeloTesis = NuevosDFs Else ModeloTesis = CurvaDF
```

End Function

'*Fin del Código*****

'FUNCIÓN QUE ENCUENTRA LOS PRECIOS SPOT DE LOS BONOS CUPÓN CERO DE UNA "SeriePlazosInterpolar" DADA UNA CURVA DE FACTORES DE DESCUENTO: "DFs" Y SUS "Plazos" SPOT (EN DÍAS) ASUMIENDO QUE LAS TASAS DE INTERÉS FORWARD INSTANTÁNEAS SUBYACENTES (DE "Basis" ESPECIFICADO) TIENEN TENDENCIA CONSTANTE ("FwdL"=TRUE), O VARIABLE CON RELACIÓN DE SUSTITUCIÓN EN MERCADOS ADYACENTES ("FwdL"=FALSE)

'NOTA1: La variable opcional "TasaForward"=TRUE (ó 1) indica que se presentará la tasa forward instantánea para la "SeriePlazosInterpolar" en lugar de los factores de descuento.

'*Inicio del Código*****

```
Public Function MiModeloTesis(Plazos As Range, DFs As Range, SeriePlazosInterpolar As Range, Basis As Double, Optional TasasForward As Boolean, Optional FwdL As Boolean)
Dim MisPlazos() As Double
Dim MisDFs() As Double
Dim MisSeriePlazosInterpolar() As Double
MisPlazos = MiVector(Plazos)
MisDFs = MiVector(DFs)
MisSeriePlazosInterpolar = MiVector(SeriePlazosInterpolar)
MiModeloTesis = ModeloTesis(MisPlazos, MisDFs, MisDFs, MisSeriePlazosInterpolar, Basis, 0, TasasForward, FwdL)
End Function
```

'*Fin del Código*****

VI.1.9. Utilería de Funciones usadas en algunos códigos anteriores: *MiVector, MiMatriz, Mj, Mi, TransponerV, ErrorVectorial*

'CONVERSIÓN DE UN RANGO DE CELDAS (COMPACTO) DE UNA SOLA COLUMNA A UN VECTOR

'*Inicio del Código*****

```
Public Function MiVector(MyRange As Range)
Dim i As Long
Dim v() As Double
ReDim v(MyRange.Count - 1)
For i = 0 To UBound(v)
    v(i) = MyRange.Cells(i + 1, 1)
```

```
Next
MiVector = v
End Function
'...
'CONVERSIÓN DE UN RANGO DE CELDAS (COMPACTO) A UNA MATRIZ
Public Function MiMatriz(MyRange As Range)
Dim i As Long
Dim j As Long
Dim M() As Double
ReDim M(MyRange.Rows.Count - 1, MyRange.Columns.Count - 1)
For i = 0 To MyRange.Rows.Count - 1
    For j = 0 To MyRange.Columns.Count - 1
        M(i, j) = MyRange.Cells(i + 1, j + 1)
    Next
Next
MiMatriz = M
End Function
'...
'EXTRACCCIÓN DE UN VECTOR COLUMNA A UNA MATRIZ
Public Function Mj(MiMatriz() As Double, j As Long)
Dim i As Long
Dim v() As Double
ReDim v(UBound(MiMatriz, 1))
For i = 0 To UBound(MiMatriz, 1)
   v(i) = MiMatriz(i, j)
Next
Mj = v
End Function
'...
'EXTRACCCIÓN DE UN VECTOR FILA A UNA MATRIZ
Public Function Mi(MiMatriz() As Double, i As Long)
Dim j As Long
Dim v() As Double
ReDim v(UBound(MiMatriz, 2))
For j = 0 To UBound(MiMatriz, 2)
```

```
   v(j) = MiMatriz(i, j)
Next
Mi = v
End Function
'...
```

'TRANSPOSICIÓN DE UN VECTOR

```
Public Function TransponerV(MiV() As Double)
Dim i As Long
Dim v() As Double
ReDim v(UBound(MiV), 0)
For i = 0 To UBound(v)
   v(i, 0) = MiV(i)
Next
TransponerV = v
End Function
'...
```

'ERROR ENTRE DOS VECTORES A TRAVÉS DEL VALOR ABSOLUTO DE LAS DESVIACIONES

```
Public Function ErrorVectorial(V0() As Double, V1() As Double)
Dim i As Long
Dim s As Double
For i = 0 To UBound(V0)
   s = s + Abs(V1(i) - V0(i))
Next
ErrorVectorial = s
End Function
Public Function MiErrorVectorial(V0 As Range, V1 As Range)
Dim MiV0() As Double
Dim MiV1() As Double
MiV0 = MiVector(V0)
MiV1 = MiVector(V1)
MiErrorVectorial = ErrorVectorial(MiV0, MiV1)
End Function
```

'*Fin del Código*****

'NOTA FINAL: Para las funciones en devuelven los resultados arreglos habrá que utilizar

<Ctrl>+<Shift>+<Enter> para mostrar los resultados en un rango seleccionado de Excel si se utiliza este código en dicha aplicación.

El código fuente aquí presentado fue elaborado en Visual Basic por Jesús Bravo Pliego (`jbravop@yahoo.com`, `jesus.bravo@hsbc.com.mx`). Este código tiene derechos de autor de acuerdo con las políticas del *Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey - Campus Ciudad de México*.

9.5. ANEXO VI.2. CALENDARIO MEXICANO DE DÍAS INHÁBILES

Cuadro AVI.2.1. Días inhábiles para México.

Día Inhábil	Día Inhábil	Día Inhábil
Lun,06/02/2006	Mié,16/09/2009	Lun,03/02/2014
Mar,21/03/2006	Lun,16/11/2009	Lun,17/03/2014
Jue,13/04/2006	Vie,25/12/2009	Jue,17/04/2014
Vie,14/04/2006	Vie,01/01/2010	Vie,18/04/2014
Lun,01/05/2006	Lun,01/02/2010	Jue,01/05/2014
Jue,02/11/2006	Lun,15/03/2010	Mar,16/09/2014
Lun,20/11/2006	Jue,01/04/2010	Lun,17/11/2014
Vie,01/12/2006	Vie,02/04/2010	Vie,12/12/2014
Mar,12/12/2006	Jue,16/09/2010	Jue,25/12/2014
Lun,25/12/2006	Lun,15/11/2010	Jue,01/01/2015
Lun,01/01/2007	Lun,07/02/2011	Lun,02/02/2015
Lun,05/02/2007	Lun,21/03/2011	Lun,16/03/2015
Lun,19/03/2007	Jue,21/04/2011	Jue,02/04/2015
Jue,05/04/2007	Vie,22/04/2011	Vie,03/04/2015
Vie,06/04/2007	Vie,16/09/2011	Vie,01/05/2015
Mar,01/05/2007	Lun,21/11/2011	Mié,16/09/2015
Vie,02/11/2007	Lun,12/12/2011	Lun,16/11/2015
Lun,19/11/2007	Lun,06/02/2012	Vie,25/12/2015
Mié,12/12/2007	Lun,19/03/2012	Vie,01/01/2016
Mar,25/12/2007	Jue,05/04/2012	Lun,01/02/2016
Mar,01/01/2008	Vie,06/04/2012	Lun,21/03/2016
Lun,04/02/2008	Mar,01/05/2012	Jue,24/03/2016
Lun,17/03/2008	Lun,19/11/2012	Vie,25/03/2016
Jue,20/03/2008	Mié,12/12/2012	Vie,16/09/2016
Vie,21/03/2008	Mar,25/12/2012	Lun,21/11/2016
Jue,01/05/2008	Mar,01/01/2013	Lun,12/12/2016
Mar,16/09/2008	Lun,04/02/2013	Lun,06/02/2017
Lun,17/11/2008	Lun,18/03/2013	Lun,20/03/2017
Vie,12/12/2008	Jue,28/03/2013	Jue,13/04/2017
Jue,25/12/2008	Vie,29/03/2013	Vie,14/04/2017
Jue,01/01/2009	Mié,01/05/2013	Lun,01/05/2017
Lun,02/02/2009	Lun,16/09/2013	Lun,20/11/2017
Lun,16/03/2009	Lun,18/11/2013	Mar,12/12/2017
Jue,09/04/2009	Jue,12/12/2013	Lun,25/12/2017
Vie,10/04/2009	Mié,25/12/2013	Lun,01/01/2018
Vie,01/05/2009	Mié,01/01/2014	Lun,05/02/2018

Día Inhábil	Día Inhábil	Día Inhábil
Lun,19/03/2018	Vie,15/04/2022	Vie,03/04/2026
Jue,29/03/2018	Vie,16/09/2022	Vie,01/05/2026
Vie,30/03/2018	Lun,21/11/2022	Mié,16/09/2026
Mar,01/05/2018	Lun,12/12/2022	Lun,16/11/2026
Lun,19/11/2018	Lun,06/02/2023	Vie,25/12/2026
Mié,12/12/2018	Lun,20/03/2023	Vie,01/01/2027
Mar,25/12/2018	Jue,06/04/2023	Lun,01/02/2027
Mar,01/01/2019	Vie,07/04/2023	Lun,15/03/2027
Lun,04/02/2019	Lun,01/05/2023	Jue,25/03/2027
Lun,18/03/2019	Lun,20/11/2023	Vie,26/03/2027
Jue,18/04/2019	Mar,12/12/2023	Jue,16/09/2027
Vie,19/04/2019	Lun,25/12/2023	Lun,15/11/2027
Mié,01/05/2019	Lun,01/01/2024	Lun,07/02/2028
Lun,16/09/2019	Lun,05/02/2024	Lun,20/03/2028
Lun,18/11/2019	Lun,18/03/2024	Jue,13/04/2028
Jue,12/12/2019	Jue,28/03/2024	Vie,14/04/2028
Mié,25/12/2019	Vie,29/03/2024	Lun,01/05/2028
Mié,01/01/2020	Mié,01/05/2024	Lun,20/11/2028
Lun,03/02/2020	Lun,16/09/2024	Mar,12/12/2028
Lun,16/03/2020	Lun,18/11/2024	Lun,25/12/2028
Jue,09/04/2020	Jue,12/12/2024	Lun,01/01/2029
Vie,10/04/2020	Mié,25/12/2024	Lun,05/02/2029
Vie,01/05/2020	Mié,01/01/2025	Lun,19/03/2029
Mié,16/09/2020	Lun,03/02/2025	Jue,29/03/2029
Lun,16/11/2020	Lun,17/03/2025	Vie,30/03/2029
Vie,25/12/2020	Jue,17/04/2025	Mar,01/05/2029
Vie,01/01/2021	Vie,18/04/2025	Lun,19/11/2029
Lun,01/02/2021	Jue,01/05/2025	Mié,12/12/2029
Lun,15/03/2021	Mar,16/09/2025	Mar,25/12/2029
Jue,01/04/2021	Lun,17/11/2025	Lun,04/02/2030
Vie,02/04/2021	Vie,12/12/2025	Lun,18/03/2030
Jue,16/09/2021	Jue,25/12/2025	Lun,18/11/2030
Lun,15/11/2021	Jue,01/01/2026	Jue,12/12/2030
Lun,07/02/2022	Lun,02/02/2026	Mié,25/12/2030
Lun,21/03/2022	Lun,16/03/2026	
Jue,14/04/2022	Jue,02/04/2026	

FUENTE: Construido por el autor a partir de los días inhábiles para 2006 publicados por la CNBV (CNBV (2006)).

ANEXO VI.3. FECHAS, PLAZOS, COTIZACIONES INTERPOLADAS, FACTORES DE DESCUENTO Y TASAS CUPÓN CERO PARA LOS SWAPS DE TIIE-28 DÍAS

Cuadro AVI.3.1. Fechas, plazos, cotizaciones, precios de bonos y niveles de tasas cupón cero para los swaps de TIIE-28 días.

Fecha *Cash*: Vie,29-Diciembre-2006 ["T"]

Fecha *Spot*: Mar,02-Enero-2006 ["T+1"]

No	Fecha Nominal	Fecha Efectiva	Plazo Spot (Días)	Cotización/1	Factor Descuento/2	Tasa Cupón Cero/3
0	Mar,02/01/2007	Mar,02/01/2007	0	7.3700%	1.00000000	7.3490%
1	Mar,30/01/2007	Mar,30/01/2007	28	7.3700%	0.99430045	7.3490%
2	Mar,27/02/2007	Mar,27/02/2007	56	7.3590%	0.98865025	7.3380%
3	Mar,27/03/2007	Mar,27/03/2007	84	7.3480%	0.98304898	7.3270%
4	Mar,24/04/2007	Mar,24/04/2007	112	7.3427%	0.97747894	7.3217%
5	Mar,22/05/2007	Mar,22/05/2007	140	7.3373%	0.97194857	7.3163%
6	Mar,19/06/2007	Mar,19/06/2007	168	7.3320%	0.96645757	7.311%
7	Mar,17/07/2007	Mar,17/07/2007	196	7.3340%	0.96096685	7.3130%
8	Mar,14/08/2007	Mar,14/08/2007	224	7.3360%	0.95550431	7.3151%
9	Mar,11/09/2007	Mar,11/09/2007	252	7.3380%	0.95006982	7.3171%
10	Mar,09/10/2007	Mar,09/10/2007	280	7.3380%	0.94467822	7.3171%
11	Mar,06/11/2007	Mar,06/11/2007	308	7.3380%	0.93931723	7.3171%
12	Mar,04/12/2007	Mar,04/12/2007	336	7.3380%	0.93398665	7.3171%
*13	Mar,01/01/2008	Mié,02/01/2008	365	7.3380%	0.92849815	7.3171%
14	Mar,29/01/2008	Mar,29/01/2008	392	7.3389%	0.92340686	7.3180%
15	Mar,26/02/2008	Mar,26/02/2008	420	7.3398%	0.91815568	7.3190%
16	Mar,25/03/2008	Mar,25/03/2008	448	7.3407%	0.912933	7.3200%
17	Mar,22/04/2008	Mar,22/04/2008	476	7.3417%	0.90773866	7.3209%
18	Mar,20/05/2008	Mar,20/05/2008	504	7.3426%	0.90257252	7.3219%
19	Mar,17/06/2008	Mar,17/06/2008	532	7.3435%	0.89743443	7.3228%
20	Mar,15/07/2008	Mar,15/07/2008	560	7.3444%	0.89232424	7.3238%
21	Mar,12/08/2008	Mar,12/08/2008	588	7.3454%	0.8872418	7.3248%
22	Mar,09/09/2008	Mar,09/09/2008	616	7.3463%	0.88218696	7.3257%
23	Mar,07/10/2008	Mar,07/10/2008	644	7.3472%	0.87715958	7.3267%
24	Mar,04/11/2008	Mar,04/11/2008	672	7.3481%	0.87215951	7.3277%
25	Mar,02/12/2008	Mar,02/12/2008	700	7.3491%	0.86718662	7.3286%
26	Mar,30/12/2008	Mar,30/12/2008	728	7.3500%	0.86224075	7.3296%
27	Mar,27/01/2009	Mar,27/01/2009	756	7.3538%	0.85726539	7.3337%
28	Mar,24/02/2009	Mar,24/02/2009	784	7.3577%	0.85231325	7.3378%
29	Mar,24/03/2009	Mar,24/03/2009	812	7.3615%	0.84738423	7.3419%

No	Fecha Nominal	Fecha Efectiva	Plazo Spot (Días)	Cotización/1	Factor Descuento/2	Tasa Cupón Cero/3
30	Mar,21/04/2009	Mar,21/04/2009	840	7.3654%	0.84247825	7.3460%
31	Mar,19/05/2009	Mar,19/05/2009	868	7.3692%	0.83759521	7.3502%
32	Mar,16/06/2009	Mar,16/06/2009	896	7.3731%	0.83273503	7.3543%
33	Mar,14/07/2009	Mar,14/07/2009	924	7.3769%	0.82789763	7.3584%
34	Mar,11/08/2009	Mar,11/08/2009	952	7.3808%	0.82308291	7.3625%
35	Mar,08/09/2009	Mar,08/09/2009	980	7.3846%	0.81829079	7.3667%
36	Mar,06/10/2009	Mar,06/10/2009	1008	7.3885%	0.81352119	7.3708%
37	Mar,03/11/2009	Mar,03/11/2009	1036	7.3923%	0.80877401	7.3750%
38	Mar,01/12/2009	Mar,01/12/2009	1064	7.3962%	0.80404917	7.3791%
39	Mar,29/12/2009	Mar,29/12/2009	1092	7.4000%	0.79934659	7.3833%
40	Mar,26/01/2010	Mar,26/01/2010	1120	7.4040%	0.79466193	7.3877%
41	Mar,23/02/2010	Mar,23/02/2010	1148	7.4080%	0.7899992	7.3920%
42	Mar,23/03/2010	Mar,23/03/2010	1176	7.4120%	0.7853583	7.3964%
43	Mar,20/04/2010	Mar,20/04/2010	1204	7.4160%	0.78073917	7.4008%
44	Mar,18/05/2010	Mar,18/05/2010	1232	7.4200%	0.7761417	7.4051%
45	Mar,15/06/2010	Mar,15/06/2010	1260	7.4240%	0.77156583	7.4095%
46	Mar,13/07/2010	Mar,13/07/2010	1288	7.4280%	0.76701147	7.4139%
47	Mar,10/08/2010	Mar,10/08/2010	1316	7.4320%	0.76247854	7.4183%
48	Mar,07/09/2010	Mar,07/09/2010	1344	7.4360%	0.75796696	7.4227%
49	Mar,05/10/2010	Mar,05/10/2010	1372	7.4400%	0.75347665	7.4272%
50	Mar,02/11/2010	Mar,02/11/2010	1400	7.4440%	0.74900752	7.4316%
51	Mar,30/11/2010	Mar,30/11/2010	1428	7.4480%	0.7445595	7.4360%
52	Mar,28/12/2010	Mar,28/12/2010	1456	7.4520%	0.74013251	7.4405%
53	Mar,25/01/2011	Mar,25/01/2011	1484	7.4583%	0.73564514	7.4476%
54	Mar,22/02/2011	Mar,22/02/2011	1512	7.4646%	0.73117649	7.4548%
55	Mar,22/03/2011	Mar,22/03/2011	1540	7.4709%	0.72672653	7.4619%
56	Mar,19/04/2011	Mar,19/04/2011	1568	7.4772%	0.72229521	7.4691%
57	Mar,17/05/2011	Mar,17/05/2011	1596	7.4835%	0.71788248	7.4763%
58	Mar,14/06/2011	Mar,14/06/2011	1624	7.4898%	0.71348831	7.4835%
59	Mar,12/07/2011	Mar,12/07/2011	1652	7.4962%	0.70911265	7.4907%
60	Mar,09/08/2011	Mar,09/08/2011	1680	7.5025%	0.70475546	7.4980%
61	Mar,06/09/2011	Mar,06/09/2011	1708	7.5088%	0.70041669	7.5052%
62	Mar,04/10/2011	Mar,04/10/2011	1736	7.5151%	0.6960963	7.5125%
63	Mar,01/11/2011	Mar,01/11/2011	1764	7.5214%	0.69179425	7.5197%
64	Mar,29/11/2011	Mar,29/11/2011	1792	7.5277%	0.6875105	7.5270%
65	Mar,27/12/2011	Mar,27/12/2011	1820	7.5340%	0.68324499	7.5343%
66	Mar,24/01/2012	Mar,24/01/2012	1848	7.5413%	0.67895373	7.5429%
67	Mar,21/02/2012	Mar,21/02/2012	1876	7.5487%	0.67467981	7.5515%
68	Mar,20/03/2012	Mar,20/03/2012	1904	7.5560%	0.6704232	7.5601%
69	Mar,17/04/2012	Mar,17/04/2012	1932	7.5634%	0.66618386	7.5687%
70	Mar,15/05/2012	Mar,15/05/2012	1960	7.5707%	0.66196177	7.5774%

No	Fecha Nominal	Fecha Efectiva	Plazo Spot (Días)	Cotización/1	Factor Descuento/2	Tasa Cupón Cero/3
71	Mar,12/06/2012	Mar,12/06/2012	1988	7.5781%	0.6577569	7.5861%
72	Mar,10/07/2012	Mar,10/07/2012	2016	7.5854%	0.65356922	7.5948%
73	Mar,07/08/2012	Mar,07/08/2012	2044	7.5928%	0.6493987	7.6035%
74	Mar,04/09/2012	Mar,04/09/2012	2072	7.6001%	0.64524532	7.6122%
75	Mar,02/10/2012	Mar,02/10/2012	2100	7.6075%	0.64110903	7.6210%
76	Mar,30/10/2012	Mar,30/10/2012	2128	7.6148%	0.63698981	7.6297%
77	Mar,27/11/2012	Mar,27/11/2012	2156	7.6222%	0.63288763	7.6385%
*78	Mar,25/12/2012	Mié,26/12/2012	2185	7.6298%	0.62865733	7.6476%
79	Mar,22/01/2013	Mar,22/01/2013	2212	7.6368%	0.62473431	7.6562%
80	Mar,19/02/2013	Mar,19/02/2013	2240	7.6442%	0.62068306	7.6650%
81	Mar,19/03/2013	Mar,19/03/2013	2268	7.6515%	0.61664874	7.6739%
82	Mar,16/04/2013	Mar,16/04/2013	2296	7.6589%	0.6126313	7.6828%
83	Mar,14/05/2013	Mar,14/05/2013	2324	7.6662%	0.60863071	7.6917%
84	Mar,11/06/2013	Mar,11/06/2013	2352	7.6736%	0.60464694	7.7007%
85	Mar,09/07/2013	Mar,09/07/2013	2380	7.6809%	0.60067997	7.7096%
86	Mar,06/08/2013	Mar,06/08/2013	2408	7.6883%	0.59672975	7.7186%
87	Mar,03/09/2013	Mar,03/09/2013	2436	7.6956%	0.59279625	7.7277%
88	Mar,01/10/2013	Mar,01/10/2013	2464	7.7030%	0.58887945	7.7367%
89	Mar,29/10/2013	Mar,29/10/2013	2492	7.7103%	0.58497931	7.7458%
90	Mar,26/11/2013	Mar,26/11/2013	2520	7.7177%	0.58109579	7.7549%
91	Mar,24/12/2013	Mar,24/12/2013	2548	7.7250%	0.57722887	7.7640%
92	Mar,21/01/2014	Mar,21/01/2014	2576	7.7286%	0.57358312	7.7681%
93	Mar,18/02/2014	Mar,18/02/2014	2604	7.7322%	0.56995595	7.7723%
94	Mar,18/03/2014	Mar,18/03/2014	2632	7.7358%	0.56634729	7.7765%
95	Mar,15/04/2014	Mar,15/04/2014	2660	7.7395%	0.56275706	7.7807%
96	Mar,13/05/2014	Mar,13/05/2014	2688	7.7431%	0.55918518	7.7849%
97	Mar,10/06/2014	Mar,10/06/2014	2716	7.7467%	0.55563156	7.7892%
98	Mar,08/07/2014	Mar,08/07/2014	2744	7.7503%	0.55209613	7.7934%
99	Mar,05/08/2014	Mar,05/08/2014	2772	7.7539%	0.5485788	7.7977%
100	Mar,02/09/2014	Mar,02/09/2014	2800	7.7575%	0.5450795	7.8020%
101	Mar,30/09/2014	Mar,30/09/2014	2828	7.7612%	0.54159816	7.8063%
102	Mar,28/10/2014	Mar,28/10/2014	2856	7.7648%	0.53813468	7.8107%
103	Mar,25/11/2014	Mar,25/11/2014	2884	7.7684%	0.534689	7.8150%
104	Mar,23/12/2014	Mar,23/12/2014	2912	7.7720%	0.53126103	7.8194%
105	Mar,20/01/2015	Mar,20/01/2015	2940	7.7756%	0.5278507	7.8238%
106	Mar,17/02/2015	Mar,17/02/2015	2968	7.7792%	0.52445793	7.8282%
107	Mar,17/03/2015	Mar,17/03/2015	2996	7.7828%	0.52108264	7.8326%
108	Mar,14/04/2015	Mar,14/04/2015	3024	7.7865%	0.51772475	7.8370%
109	Mar,12/05/2015	Mar,12/05/2015	3052	7.7901%	0.5143842	7.8415%
110	Mar,09/06/2015	Mar,09/06/2015	3080	7.7937%	0.51106089	7.8460%

No	Fecha Nominal	Fecha Efectiva	Plazo Spot (Días)	Cotización/1	Factor Descuento/2	Tasa Cupón Cero/3
111	Mar,07/07/2015	Mar,07/07/2015	3108	7.7973%	0.50775477	7.8505%
112	Mar,04/08/2015	Mar,04/08/2015	3136	7.8009%	0.50446574	7.8550%
113	Mar,01/09/2015	Mar,01/09/2015	3164	7.8045%	0.50119374	7.8595%
114	Mar,29/09/2015	Mar,29/09/2015	3192	7.8082%	0.49793868	7.8640%
115	Mar,27/10/2015	Mar,27/10/2015	3220	7.8118%	0.4947005	7.8686%
116	Mar,24/11/2015	Mar,24/11/2015	3248	7.8154%	0.49147912	7.8732%
117	Mar,22/12/2015	Mar,22/12/2015	3276	7.8190%	0.48827447	7.8778%
118	Mar,19/01/2016	Mar,19/01/2016	3304	7.8226%	0.48508646	7.8824%
119	Mar,16/02/2016	Mar,16/02/2016	3332	7.8262%	0.48191504	7.8870%
120	Mar,15/03/2016	Mar,15/03/2016	3360	7.8298%	0.47876011	7.8917%
121	Mar,12/04/2016	Mar,12/04/2016	3388	7.8335%	0.47562162	7.8963%
122	Mar,10/05/2016	Mar,10/05/2016	3416	7.8371%	0.47249948	7.9010%
123	Mar,07/06/2016	Mar,07/06/2016	3444	7.8407%	0.46939362	7.9057%
124	Mar,05/07/2016	Mar,05/07/2016	3472	7.8443%	0.46630397	7.9104%
125	Mar,02/08/2016	Mar,02/08/2016	3500	7.8479%	0.46323047	7.9152%
126	Mar,30/08/2016	Mar,30/08/2016	3528	7.8515%	0.46017302	7.9199%
127	Mar,27/09/2016	Mar,27/09/2016	3556	7.8552%	0.45713158	7.9247%
128	Mar,25/10/2016	Mar,25/10/2016	3584	7.8588%	0.45410605	7.9295%
129	Mar,22/11/2016	Mar,22/11/2016	3612	7.8624%	0.45109638	7.9343%
130	Mar,20/12/2016	Mar,20/12/2016	3640	7.8660%	0.44810248	7.9391%
131	Mar,17/01/2017	Mar,17/01/2017	3668	7.8684%	0.44520731	7.9421%
132	Mar,14/02/2017	Mar,14/02/2017	3696	7.8709%	0.44232809	7.9452%
133	Mar,14/03/2017	Mar,14/03/2017	3724	7.8733%	0.43946472	7.9482%
134	Mar,11/04/2017	Mar,11/04/2017	3752	7.8757%	0.43661714	7.9513%
135	Mar,09/05/2017	Mar,09/05/2017	3780	7.8782%	0.43378526	7.9543%
136	Mar,06/06/2017	Mar,06/06/2017	3808	7.8806%	0.430969	7.9574%
137	Mar,04/07/2017	Mar,04/07/2017	3836	7.8830%	0.42816828	7.9605%
138	Mar,01/08/2017	Mar,01/08/2017	3864	7.8854%	0.42538303	7.9637%
139	Mar,29/08/2017	Mar,29/08/2017	3892	7.8879%	0.42261316	7.9668%
140	Mar,26/09/2017	Mar,26/09/2017	3920	7.8903%	0.41985859	7.9699%
141	Mar,24/10/2017	Mar,24/10/2017	3948	7.8927%	0.41711926	7.9731%
142	Mar,21/11/2017	Mar,21/11/2017	3976	7.8952%	0.41439507	7.9763%
143	Mar,19/12/2017	Mar,19/12/2017	4004	7.8976%	0.41168596	7.9795%
144	Mar,16/01/2018	Mar,16/01/2018	4032	7.9000%	0.40899185	7.9827%
145	Mar,13/02/2018	Mar,13/02/2018	4060	7.9025%	0.40631266	7.9859%
146	Mar,13/03/2018	Mar,13/03/2018	4088	7.9049%	0.40364831	7.9891%
147	Mar,10/04/2018	Mar,10/04/2018	4116	7.9073%	0.40099874	7.9924%
148	Mar,08/05/2018	Mar,08/05/2018	4144	7.9098%	0.39836385	7.9957%
149	Mar,05/06/2018	Mar,05/06/2018	4172	7.9122%	0.39574359	7.9989%
150	Mar,03/07/2018	Mar,03/07/2018	4200	7.9146%	0.39313787	8.0022%

No	Fecha Nominal	Fecha Efectiva	Plazo Spot (Días)	Cotización/1	Factor Descuento/2	Tasa Cupón Cero/3
151	Mar,31/07/2018	Mar,31/07/2018	4228	7.9170%	0.39054661	8.0056%
152	Mar,28/08/2018	Mar,28/08/2018	4256	7.9195%	0.38796976	8.0089%
153	Mar,25/09/2018	Mar,25/09/2018	4284	7.9219%	0.38540722	8.0122%
154	Mar,23/10/2018	Mar,23/10/2018	4312	7.9243%	0.38285894	8.0156%
155	Mar,20/11/2018	Mar,20/11/2018	4340	7.9268%	0.38032483	8.0190%
156	Mar,18/12/2018	Mar,18/12/2018	4368	7.9292%	0.37780482	8.0223%
157	Mar,15/01/2019	Mar,15/01/2019	4396	7.9316%	0.37529885	8.0257%
158	Mar,12/02/2019	Mar,12/02/2019	4424	7.9341%	0.37280683	8.0292%
159	Mar,12/03/2019	Mar,12/03/2019	4452	7.9365%	0.3703287	8.0326%
160	Mar,09/04/2019	Mar,09/04/2019	4480	7.9389%	0.36786439	8.0360%
161	Mar,07/05/2019	Mar,07/05/2019	4508	7.9414%	0.36541382	8.0395%
162	Mar,04/06/2019	Mar,04/06/2019	4536	7.9438%	0.36297693	8.0430%
163	Mar,02/07/2019	Mar,02/07/2019	4564	7.9462%	0.36055364	8.0465%
164	Mar,30/07/2019	Mar,30/07/2019	4592	7.9486%	0.35814388	8.0500%
165	Mar,27/08/2019	Mar,27/08/2019	4620	7.9511%	0.35574759	8.0535%
166	Mar,24/09/2019	Mar,24/09/2019	4648	7.9535%	0.3533647	8.0570%
167	Mar,22/10/2019	Mar,22/10/2019	4676	7.9559%	0.35099513	8.0606%
168	Mar,19/11/2019	Mar,19/11/2019	4704	7.9584%	0.34863882	8.0642%
169	Mar,17/12/2019	Mar,17/12/2019	4732	7.9608%	0.3462957	8.0678%
170	Mar,14/01/2020	Mar,14/01/2020	4760	7.9632%	0.34396571	8.0714%
171	Mar,11/02/2020	Mar,11/02/2020	4788	7.9657%	0.34164876	8.0750%
172	Mar,10/03/2020	Mar,10/03/2020	4816	7.9681%	0.33934481	8.0786%
173	Mar,07/04/2020	Mar,07/04/2020	4844	7.9705%	0.33705377	8.0823%
174	Mar,05/05/2020	Mar,05/05/2020	4872	7.9730%	0.33477558	8.0859%
175	Mar,02/06/2020	Mar,02/06/2020	4900	7.9754%	0.33251019	8.0896%
176	Mar,30/06/2020	Mar,30/06/2020	4928	7.9778%	0.33025751	8.0933%
177	Mar,28/07/2020	Mar,28/07/2020	4956	7.9802%	0.32801749	8.0970%
178	Mar,25/08/2020	Mar,25/08/2020	4984	7.9827%	0.32579005	8.1007%
179	Mar,22/09/2020	Mar,22/09/2020	5012	7.9851%	0.32357514	8.1045%
180	Mar,20/10/2020	Mar,20/10/2020	5040	7.9875%	0.32137269	8.1082%
181	Mar,17/11/2020	Mar,17/11/2020	5068	7.9900%	0.31918264	8.1120%
182	Mar,15/12/2020	Mar,15/12/2020	5096	7.9924%	0.31700491	8.1158%
183	Mar,12/01/2021	Mar,12/01/2021	5124	7.9948%	0.31483946	8.1196%
184	Mar,09/02/2021	Mar,09/02/2021	5152	7.9973%	0.3126862	8.1234%
185	Mar,09/03/2021	Mar,09/03/2021	5180	7.9997%	0.31054509	8.1273%
186	Mar,06/04/2021	Mar,06/04/2021	5208	8.0021%	0.30841605	8.1311%
187	Mar,04/05/2021	Mar,04/05/2021	5236	8.0046%	0.30629902	8.1350%
188	Mar,01/06/2021	Mar,01/06/2021	5264	8.0070%	0.30419395	8.1389%
189	Mar,29/06/2021	Mar,29/06/2021	5292	8.0094%	0.30210076	8.1428%
190	Mar,27/07/2021	Mar,27/07/2021	5320	8.0118%	0.30001941	8.1467%

No	Fecha Nominal	Fecha Efectiva	Plazo Spot (Días)	Cotización/1	Factor Descuento/2	Tasa Cupón Cero/3
191	Mar,24/08/2021	Mar,24/08/2021	5348	8.0143%	0.29794982	8.1507%
192	Mar,21/09/2021	Mar,21/09/2021	5376	8.0167%	0.29589193	8.1546%
193	Mar,19/10/2021	Mar,19/10/2021	5404	8.0191%	0.29384569	8.1586%
194	Mar,16/11/2021	Mar,16/11/2021	5432	8.0216%	0.29181103	8.1626%
195	Mar,14/12/2021	Mar,14/12/2021	5460	8.0240%	0.2897879	8.1666%
196	Mar,11/01/2022	Mar,11/01/2022	5488	8.0256%	0.28784758	8.1690%
197	Mar,08/02/2022	Mar,08/02/2022	5516	8.0272%	0.28591859	8.1715%
198	Mar,08/03/2022	Mar,08/03/2022	5544	8.0289%	0.28400085	8.1739%
199	Mar,05/04/2022	Mar,05/04/2022	5572	8.0305%	0.2820943	8.1763%
200	Mar,03/05/2022	Mar,03/05/2022	5600	8.0321%	0.28019888	8.1788%
201	Mar,31/05/2022	Mar,31/05/2022	5628	8.0337%	0.27831453	8.1813%
202	Mar,28/06/2022	Mar,28/06/2022	5656	8.0354%	0.27644119	8.1837%
203	Mar,26/07/2022	Mar,26/07/2022	5684	8.0370%	0.27457879	8.1862%
204	Mar,23/08/2022	Mar,23/08/2022	5712	8.0386%	0.27272727	8.1888%
205	Mar,20/09/2022	Mar,20/09/2022	5740	8.0402%	0.27088657	8.1913%
206	Mar,18/10/2022	Mar,18/10/2022	5768	8.0418%	0.26905664	8.1938%
207	Mar,15/11/2022	Mar,15/11/2022	5796	8.0435%	0.26723741	8.1964%
208	Mar,13/12/2022	Mar,13/12/2022	5824	8.0451%	0.26542883	8.1990%
209	Mar,10/01/2023	Mar,10/01/2023	5852	8.0467%	0.26363082	8.2015%
210	Mar,07/02/2023	Mar,07/02/2023	5880	8.0483%	0.26184334	8.2041%
211	Mar,07/03/2023	Mar,07/03/2023	5908	8.0499%	0.26006633	8.2067%
212	Mar,04/04/2023	Mar,04/04/2023	5936	8.0516%	0.25829973	8.2094%
213	Mar,02/05/2023	Mar,02/05/2023	5964	8.0532%	0.25654347	8.2120%
214	Mar,30/05/2023	Mar,30/05/2023	5992	8.0548%	0.2547975	8.2147%
215	Mar,27/06/2023	Mar,27/06/2023	6020	8.0564%	0.25306177	8.2173%
216	Mar,25/07/2023	Mar,25/07/2023	6048	8.0581%	0.25133621	8.2200%
217	Mar,22/08/2023	Mar,22/08/2023	6076	8.0597%	0.24962078	8.2227%
218	Mar,19/09/2023	Mar,19/09/2023	6104	8.0613%	0.2479154	8.2254%
219	Mar,17/10/2023	Mar,17/10/2023	6132	8.0629%	0.24622004	8.2282%
220	Mar,14/11/2023	Mar,14/11/2023	6160	8.0645%	0.24453462	8.2309%
221	Mar,12/12/2023	Mar,12/12/2023	6188	8.0662%	0.2428591	8.2337%
222	Mar,09/01/2024	Mar,09/01/2024	6216	8.0678%	0.24119341	8.2364%
223	Mar,06/02/2024	Mar,06/02/2024	6244	8.0694%	0.23953752	8.2392%
224	Mar,05/03/2024	Mar,05/03/2024	6272	8.071%	0.23789135	8.2420%
225	Mar,02/04/2024	Mar,02/04/2024	6300	8.0726%	0.23625485	8.2448%
226	Mar,30/04/2024	Mar,30/04/2024	6328	8.0743%	0.23462798	8.2477%
227	Mar,28/05/2024	Mar,28/05/2024	6356	8.0759%	0.23301068	8.2505%
228	Mar,25/06/2024	Mar,25/06/2024	6384	8.0775%	0.23140288	8.2534%
229	Mar,23/07/2024	Mar,23/07/2024	6412	8.0791%	0.22980455	8.2562%
230	Mar,20/08/2024	Mar,20/08/2024	6440	8.0808%	0.22821562	8.2591%

No	Fecha Nominal	Fecha Efectiva	Plazo Spot (Días)	Cotización/1	Factor Descuento/2	Tasa Cupón Cero/3
231	Mar,17/09/2024	Mar,17/09/2024	6468	8.0824%	0.22663605	8.2620%
232	Mar,15/10/2024	Mar,15/10/2024	6496	8.0840%	0.22506578	8.2649%
233	Mar,12/11/2024	Mar,12/11/2024	6524	8.0856%	0.22350476	8.2679%
234	Mar,10/12/2024	Mar,10/12/2024	6552	8.0872%	0.22195294	8.2708%
235	Mar,07/01/2025	Mar,07/01/2025	6580	8.0889%	0.22041026	8.2738%
236	Mar,04/02/2025	Mar,04/02/2025	6608	8.0905%	0.21887668	8.2768%
237	Mar,04/03/2025	Mar,04/03/2025	6636	8.0921%	0.21735214	8.2798%
238	Mar,01/04/2025	Mar,01/04/2025	6664	8.0937%	0.21583659	8.2828%
239	Mar,29/04/2025	Mar,29/04/2025	6692	8.0953%	0.21432998	8.2858%
240	Mar,27/05/2025	Mar,27/05/2025	6720	8.0970%	0.21283227	8.2888%
241	Mar,24/06/2025	Mar,24/06/2025	6748	8.0986%	0.21134339	8.2919%
242	Mar,22/07/2025	Mar,22/07/2025	6776	8.1002%	0.20986331	8.2950%
243	Mar,19/08/2025	Mar,19/08/2025	6804	8.1018%	0.20839197	8.2981%
244	Mar,16/09/2025	Mar,16/09/2025	6832	8.1035%	0.20692932	8.3012%
245	Mar,14/10/2025	Mar,14/10/2025	6860	8.1051%	0.20547532	8.3043%
246	Mar,11/11/2025	Mar,11/11/2025	6888	8.1067%	0.20402991	8.3074%
247	Mar,09/12/2025	Mar,09/12/2025	6916	8.1083%	0.20259305	8.3106%
248	Mar,06/01/2026	Mar,06/01/2026	6944	8.1099%	0.20116469	8.3138%
249	Mar,03/02/2026	Mar,03/02/2026	6972	8.1116%	0.19974478	8.3169%
250	Mar,03/03/2026	Mar,03/03/2026	7000	8.1132%	0.19833327	8.3201%
251	Mar,31/03/2026	Mar,31/03/2026	7028	8.1148%	0.19693012	8.3234%
252	Mar,28/04/2026	Mar,28/04/2026	7056	8.1164%	0.19553527	8.3266%
253	Mar,26/05/2026	Mar,26/05/2026	7084	8.1180%	0.19414869	8.3299%
254	Mar,23/06/2026	Mar,23/06/2026	7112	8.1197%	0.19277032	8.3331%
255	Mar,21/07/2026	Mar,21/07/2026	7140	8.1213%	0.19140013	8.3364%
256	Mar,18/08/2026	Mar,18/08/2026	7168	8.1229%	0.19003805	8.3397%
257	Mar,15/09/2026	Mar,15/09/2026	7196	8.1245%	0.18868405	8.3430%
258	Mar,13/10/2026	Mar,13/10/2026	7224	8.1262%	0.18733808	8.3464%
259	Mar,10/11/2026	Mar,10/11/2026	7252	8.1278%	0.1860001	8.3497%
260	Mar,08/12/2026	Mar,08/12/2026	7280	8.1294%	0.18467006	8.3531%

* Fecha Nominal ajustada por día inhábil.

1/ Tasa Swap o tasa de la pata fija del Swap de TIIE.

2/ Factor de descuento (precio del bono cupón cero) resultante de resolver para las cotizaciones de mercado el equilibrio (exógeno) sin utilizar ningún método numérico y modelo de ajuste de las tasas de interés forward instantáneas.

3/ Tasa de interés tipo cupón cero de composición continua al plazo indicado en la columna ‘Plazo Spot (Días)’ con *Basis* Actual/360.

FUENTE: Construido por el autor con base en los datos de PiP de cotizaciones de Swaps de TIIE para el 29 de Diciembre de 2006.