INSTITUTO TECNOLOGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY

CAMPUS MONTERREY

PROGRAMA DE GRADUADOS EN ELECTRONICA, COMPUTACION, INFORMACION Y COMUNICACIONES

MODELO DE REZAGOS DISTRIBUIDOS: EXPANSION DEL MODELO GEOMETRICO DE KOYCK

TESIS

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

CON ESPECIALIDAD EN ESTADISTICA APLICADA

POR

SAMUEL RODRIGUEZ MUÑIZ

MONTERREY, N. L. DICIEMBRE DE 2002

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY

CAMPUS MONTERREY

PROGRAMA DE GRADUADOS EN ELECTRÓNICA, COMPUTACIÓN, INFORMACIÓN Y COMUNICACIONES

MODELO DE REZAGOS DISTRIBUIDOS: EXPANSIÓN DEL MODELO GEOMÉTRICO DE KOYCK

TESIS

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN ESTADÍSTICA APLICADA

POR:

SAMUEL RODRÍGUEZ MUÑIZ

MONTERREY , N. L. DICIEMBRE 2002

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY

DIVISIÓN DE ELECTRÓNICA, COMPUTACIÓN, INFORMACIÓN Y COMUNICACIONES

PROGRAMAS DE GRADUADOS EN ELECTRÓNICA, COMPUTACIÓN, INFORMACIÓN Y COMUNICACIONES

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la presente tesis del Lic. Samuel Rodríguez Muñiz sea aceptada como requisito parcial para obtener el grado académico de Maestro en Ciencias con Especialidad en Estadística Aplicada.

Comité de tesis:

Dr. Francisco García Hernández
Asesor

Dra. Rebeca Romero Álvarez
Sinodal

Ing. Osmar Hazael Zavaleta Vázquez
Sinodal

Dr. David Alejandro Garza Salazar
Director del Programa de Graduados en Electrónica, Computación, Información y Comunicaciones.

Diciembre de 2002

MODELO DE REZAGOS DISTRIBUIDOS: EXPANSIÓN DEL MODELO GEOMÉTRICO DE KOYCK

POR:

SAMUEL RODRÍGUEZ MUÑIZ

TESIS

Presentada al Programa de Graduados en Electrónica, Computación, Información y Comunicaciones.

Este trabajo es requisito parcial para obtener el grado de Maestro en Ciencias con Especialidad en Estadística Aplicada.

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY

DICIEMBRE 2002

Dedicatoria

A mi amigo José Luis, por brindarme su amistad y apoyo en todo momento.

Gracias

Agradecimientos

A mi madre, quien me ha brindado todo su tiempo, cariño, comprensión, desvelos y mucho más.

A mi familia, por creer en mi.

Al Ing. Osmar Zavaleta, quien durante toda la Maestría me brindó su apoyo y siempre tuvo un momento para resolverme alguna duda.

Al Dr. Francisco García, por su total disposición para la finalización de este proyecto.

A la Dra. Rebeca Romero, por obsequiarme siempre una sonrisa.

A la Maestra Gabriela Monforte, Iliana Chio, Angélica Díaz, Diana Chio y Mónica Rodríguez, por compartir conmigo gratos momentos.

A la vida, por sonreírme como hasta ahora lo ha hecho.

Gracias

Resumen

En el marco de los Modelos de Rezagos Distribuidos, el presente estudio tiene el objetivo de retomar el modelo generado por L.M. Koyck durante la década de los 50's y adecuarlo, a través del desarrollo de su base algebraica, para emplearlo en la estimación de un modelo con dos variables explicatorias.

Se inicia la investigación estableciendo las implicaciones de estimar los Modelos Dinámicos de Rezagos Distribuidos así como los factores que originan los rezagos desde el punto de vista económico.

Posteriormente se desarrolla la teoría que sustenta la construcción de los Modelos de Ajuste Parcial y de Expectativas Adaptativas, cuyos esquemas se desprenden del Modelo Geométrico de Koyck con una sola variable independiente. A partir del modelo original de Koyck, se derivan dos modelos que, con base a supuestos algebraicos, resultan en ecuaciones con una y dos variables dependientes rezagadas, cuya problemática, al momento de realizar la estimación por Mínimos Cuadrados Ordinarios, provoca ineficiencia estadística de los parámetros estimadados.

Por último, se lleva a cabo la estimación de una función agregada de demanda de electricidad para la República Mexicana, empleando los dos modelos desarrollados y utilizando el Método de Mínimos Cuadrados Generalizados como una forma alternativa para ganar mayor eficiencia en la estimación de los parámetros.

Tabla de Contenido

Lista de Gráficas

Lista de Tablas

Capítulo 1
Introducción

Generalmente cuando se estudian los modelos de Regresión se considera que la variable dependiente es impactada por las variables independientes en un mismo instante o periodo, lo cual es establecido para facilitar su comprensión. Sin embargo, en el contexto económico una variable dependiente podría estar impactada por valores rezagados de las variables independientes. Dichos modelos son conocidos como Modelos Dinámicos.

Para ejemplificar esta situación se puede analizar el impacto que genera en la distribución del ingreso de un individuo, el aumento en el precio de gasolina. Debido a que tiene la restricción de un ingreso fijo, lo que primeramente va hacer es consumir menos de gasolina durante los próximos meses, pero necesariamente tendrá que redistribuir su ingreso para poder tener la misma utilidad a menos que negocie un aumento de sueldo. La redistribución del ingreso o el aumento de éste, pueden ocurrir en algún mes o tal vez un año.

1.1 Prefacio

Dentro de los Modelos Dinámicos se ubican los Modelos de Rezagos Distribuidos cuya base teórica es considerar que los rezagos guardan cierta distribución en el tiempo lo cual podrían permitir la estimación de dichos modelos.
Pero, aquí surge una importante pregunta ¿cuál es o debe ser la extensión de los rezagos? Por cuánto tiempo una familia será afectada por la caída del salario real del jefe de familia al registrarse una devaluación de la moneda en el país donde vive.

Tratando de resolver este problema, se introdujeron los modelos de rezagos finitos, donde se considera que el rezago termina en un punto, por decir k; el problema surge cuando se quiere introducir en la ecuación la especificación de los k rezagos.
A la par surgieron los modelos de rezagos infinitos, los cuales determinan que será factible estimar modelos al sujetar los rezagos a cierta distribución. Es aquí donde se centrará la tesis, ya que el modelo considerado, estipula que los rezagos puede ser ajustados a través de una distribución geométrica.

1.2 Objetivo

El objetivo de la presente tesis consiste en dos cosas: por una parte, llevar a cabo el desarrollo teórico del Modelo Geométrico de Koyck con la inclusión de dos variables explicatorias y por la otra, buscar un método que permita aumentar la eficiencia de la estimación del Modelo Geométrico de Koyck, a través de su aplicación en la estimación de demanda de electricidad para todo el país.

1.3 Metodología

La derivación del Modelo Geométrico de Koyck con dos variables se obtendrá a través de un desarrollo algebraico, pero para su estimación se utilizará el Modelo de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) y Generalizados (MCG).

1.4 Estructura de la Tesis

La presente tesis se encuentra dividida en cinco capítulos:

Capítulo 1. Introducción.- Se lleva a cabo la introducción del Modelo de Rezagos Distribuidos dentro del Marco de los Modelos Dinámicos. Así mismo, se establece la necesidad de utilizar alguna distribución que permita manejar los rezagos infinitos con el propósito de establecer modelos factibles a estimar.

Capítulo 2. Antecedentes.- Dentro de este apartado se expone el origen de los modelos dentro del contexto económico así como una revisión de la utilización del Modelo de Rezagos Distribuidos en diversas áreas económicas. Posteriormente, se introduce el Modelo de Rezagos Distribuidos y se explican los Modelos de Ajuste Parcial y de Expectativas Adaptativas.

Capítulo 3. Extensión del Modelo Geométrico de Koyck.- Se deriva algebraicamente el Modelo Geométrico de Koyck con la inclusión de dos variable explicativas así como la determinación de la Matriz de Varianzas y Covarianzas para el proceso de estimación del Modelo a través del Método de Mínimos Cuadrados Generalizados.

Capítulo 4. Estimación del modelo de demanda de electricidad.- Se lleva a cabo la estimación de la demanda de electricidad de la República Mexicana a través de las extensiones desarrolladas del Modelo Geométrico de Koyck por medio de MCO y MCG. Se construyen unas tablas con los errores estándar y las elasticidades de los modelos.

Capítulo 5. Conclusiones y Desafíos futuros.- Aquí se presentan los resultados de aplicar el método de Mínimos Cuadrados Generalizados a las dos variantes del Modelo Geométrico de Koyck así como se establece la problemática de la estimación consistente de los coeficientes y la posible autocorrelación entre los errores y la variable dependiente rezagada.

Capítulo 2
Antecedentes

El origen del análisis de los rezagos distribuidos se soporta en la hipótesis de que existe una variable que ejerce determinada influencia sobre otra, no instantáneamente, sino sobre una extensión, tal vez infinita, de periodos de tiempo. Si la estructura persiste, entonces la magnitud de la variable dada, por decir y, en un tiempo t depende no sólo sobre una variable determinante, por decir x, en el tiempo t sino también sobre los valores asumidos por x en algunos, o tal vez todos, los periodos de tiempo previos.

La historia de los rezagos distribuidos data de la década de los 30's con el trabajo de Fisher [1937] y Tinbergen [1939]. Este tema fue ampliamente discutido en la literatura de los ciclos económicos analizándose bajo los términos de "multiplicadores dinámicos", "acelerador flexible" y "persistencia de hábitos".

Este esquema conceptual ha encontrado numerosas aplicaciones en el trabajo empírico. Por citar algunos autores tenemos que Cagan [1956], Allais [1956] y Barro [1969] han empleado el modelo de rezagos distribuidos de formación de expectativas en el estudio de la demanda de dinero durante las hiperinflaciones; Nerlove [1956] usó los modelos de expectativas racionales y de ajuste parcial (derivados del modelo de rezagos distribuidos) en sus estudios sobre la oferta y demanda de "commodities" agrícolas; Waugh y Nerlove [1968] intentaron evaluar el impacto en el tiempo de la publicidad sobre la venta de naranjas; Brown [1952] y Zellner [1957] realizaron estudios sobre funciones de consumo agregadas que contenían un simple rezago distribuido como tipo de ajuste; Stone & Rowe [1957] así como Wu [1965] utilizaron el esquema en su análisis de la demanda por bienes durables.

Chow [1968] también aplicó el análisis de rezagos distribuidos al estudio de la demanda de dinero; Bryan y Carleton [1967] estudiaron el ajuste de portafolios de inversión de los bancos en el marco de rezagos; Tobin [1968] analizó la demanda por activos financieros; Maddala y Vogel [1969] determinaron la demanda corporativa por flujo de dinero; Kareken y Solow [1963] hicieron lo propio con la determinación de los efectos cuantitativos en las instituciones financieras y públicas por la política monetaria.

El análisis de movimiento de capitales a corto plazo, las funciones de producción dinámicas, el análisis de la demanda laboral, el estudio del gasto en los gobiernos estatales y municipales, la planeación en la demanda por electricidad y muchas otras relaciones económicas más han sido analizadas bajo el esquema de rezagos distribuidos.

Pero, ¿qué factores originan los rezagos en los procesos económicos?

2.1 Origen de los Rezagos

Se establece que son tres las causas que provocan estos rezagos en el comportamiento de los procesos económicos: el factor psicológico, el tecnológico y el institucional.

El hábito y la incertidumbre son catalogados como las principales causas del factor psicológico. Por ejemplo, al subir el precio de la gasolina, mucha gente sigue consumiéndola en la misma medida, porque un cambio de comportamiento genera, en ese instante, una pérdida de utilidad tanto más rápido y mayor haya sido el aumento, pero al largo plazo, la gente puede ir cambiando sus hábitos. Por decir, dentro de la familia o en el vecindario, se pueden compartir los vehículos en desplazamientos cotidianos. Las salidas buscando el entretenimiento fuera de la ciudad, pueden sustituirse por otras formas alternas de recreación como es el cine o el teatro, donde es posible utilizar el trasporte urbano. Además, se puede hacer mayor uso de los transportes colectivos, sobre todo en trayectos largos y bien comunicados.

La incertidumbre es otra causa psicológica importante de los rezagos en el comportamiento económico. La gente suele comportarse no sólo atendiendo a las pautas de cambio observadas en los precios, sino también de acuerdo con las expectativas que se vayan generando sobre el escenario futuro. La formación de expectativas es un proceso psicológico complejo en el que entran en juego factores muy diversos. Por ejemplo, en la formación de las expectativas de los precios de los productos derivados del petróleo, no da igual que los precios internacionales del crudo de petróleo (de los cuales los Gobiernos fijan los derivados) vengan influidos por los acuerdos de la OPEP o que varíen libremente según las condiciones de los mercados. De aquí mismo parten los modelos de Expectativas Adaptativas y de Ajuste Parcial que posteriormente se analizarán con más detalle.

Entre los factores tecnológicos destaca el periodo de vida de los bienes duraderos, por ejemplo, al subir el precio de la gasolina, la gente prefiere automóviles de menor consumo, pero la sustitución del parque vehicular por otro más adecuado implica un costo para la sociedad y una inversión de mediano plazo para las personas.
Otras veces el conocimiento imperfecto también explica los rezagos; vease el mercado de computadoras portátiles, donde los consumidores dudan en adquirir un equipo por temor a que vengan nuevas innovaciones y hagan obsoleto el equipo ya adquirido o tal vez esperan que con el surgimiento de nuevas marcas, el mercado sea más competitivo y como consecuencia el precio tienda a bajar obteniendo así mejorar su utilidad de compra.

Las causas de los rezagos de naturaleza institucional son diversas, entre ellas cabe mencionar la falta de transparencia de algunos mercados, sobre todo los de "segunda mano". También son importantes los retrocesos ocasionados por las decisiones que deben tomarse institucionalmente, ya sea en empresas o en organismos públicos. Por ejemplo, ante la elevación de los precios de combustible respecto a los del carbón, las empresas cementeras y las térmicas pueden plantearse la sustitución de quemadoras de combustible por otras de carbón. El rezago entre el momento en que se produce la elevación de precios y aquel en que se efectúan las inversiones viene influido por aspectos institucionales relacionados con el tiempo necesario para tomar decisiones en los órganos pertinentes y para conseguir los capitales necesarios para llevar a cabo las inversiones.

En el mercado financiero se hace evidente cuando inversionistas que tienen sus fondos en instrumentos de largo plazo a término fijo se encuentran con las manos atadas al verse imposibilitados de transferir sus recursos a otros con mayor rendimiento antes de la terminación del plazo determinado.

El análisis metodológico del corto y largo plazo refleja la importancia que juegan los rezagos dentro de la Economía, pues con base a su estudio se puede definir que las elasticidades precio-ingreso de corto plazo son generalmente menores que las de largo plazo o que la propensión marginal a consumir a corto es menor que la de largo plazo.

2.2 Modelo con Rezagos Distribuidos

Uno de los modelos dinámicos más utilizados en el área de la Econometría y que apareció en el trabajo de Fisher [1937] es

$$y_t = \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \cdots + \beta_k x_{t-k} + u_t$$

que se conoce con el nombre de modelo con rezagos distribuidos. Aquí x_t es una variable exógena (o por lo menos predeterminada), u_t es una variable aleatoria estacionaria con media cero y una estructura de covarianza fijada (que podría ser o no, serialmente correlacionada) y las $\beta's$ son tal que su suma es finita $(\sum_i \beta_i < \infty)$ y todas son del mismo signo.

Este es un modelo dinámico lineal general, en el que los multiplicadores dinámicos de equilibrio son las constantes β_i ya que

$$\frac{\partial y_t}{\partial x_{t-s}} = \beta_s$$

los cuales, dentro de este contexto, se denominan coeficientes de reacción. La suma de todos los coeficientes de reacción $\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i = \beta$, se le denomina multiplicador total.

Los problemas con este modelo se presentan al tratar de estimar los coeficientes aplicando, directamente, el Método de Mínimos Cuadrados ya que se pierden *k* grados de libertad debido a que el modelo se puede estimar solamente a partir de (*n*-*k*) observaciones y si *k* es grande provoca que se utilicen muy pocas observaciones. Otro problema es la presencia de multicolinealidad provocada por tener como variables explicatorias a rezagos de la x y que redunda en estimaciones estadísticamente deficientes de los coeficientes del modelo.

Se puede rescribir la anterior ecuación como

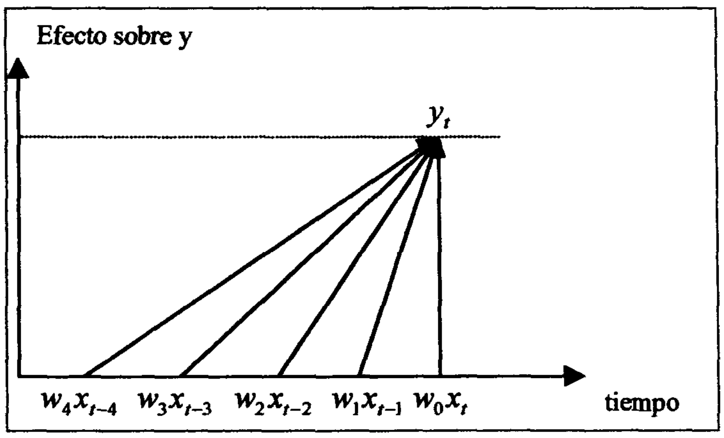
$$y_t = \beta(w_0 x_t + w_1 x_{t-1} + w_2 x_{t-2} + \cdots) + u_t$$

donde en esta reparametrización las w_i son todas no negativas y suman uno. Esta hipótesis es contraria, por ejemplo a trayectorias oscilantes y puede ser violada en situaciones especiales tal como en el análisis de procesos especulativos.

En esta ecuación el nivel actual de y está en función de un número de valores pasados de $x's$, con las $w's$ indicando la influencia relativa de los valores rezagados de las $x's$ sobre las $y's$ (Ver Gráfica 1.1) La secuencia de las $w's$ describe la forma del rezago, es decir, la forma en el tiempo de una reacción económica.

En vista de que las $w's$ son no negativas y suman uno, ellas pueden ser identificadas, formalmente con probabilidades definidas sobre un conjunto de enteros no negativos (0, 1, 2, 3,..., ∞). Esto es muy conveniente, ya que en la discusión de la forma del rezago y de varios parámetros asociados con estos (como la media y la varianza del rezago) es factible utilizar todos los resultados disponibles acerca de diferentes tipos de distribuciones de probabilidad y sus momentos. En particular, se puede hacer uso de la notación de una función generadora para la secuencia $w_0, w_1, w_2, \ldots$

Gráfica 1.1 Efecto de una unidad de cambio de x sobre y en el tiempo t



Nota: W_i tiende a ser menor a medida que se aleja del tiempo t

Usando una variable dummy, z, es posible definir una función polinomial

$$A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

si esta función converge en algún intervalo $-z_0 < z < z_0$, entonces $A(z)$ es llamada función generadora de la secuencia (a_i). Además, si todas las $a_i's$ son no negativas y $A(1) = 1$ entonces $A(z)$ es una función generadora de probabilidad.

Las ventajas de usar esta última son tres: (1) $A(z)$ podría reducirse a una simple forma algebraica; (2) se pueden obtener los parámetros de la distribución de probabilidad directamente como funciones derivadas de la función generadora y; (3) se facilita grandemente la derivación de las distribuciones de sumas de variables aleatorias.

Por ejemplo, al considerar la distribución de probabilidad geométrica para los rezagos con la secuencia de las $w's$ será dada por

$$w_i = (1-\lambda)\lambda^i.$$

entonces, tomando $|z| \leq 1$, la función generadora de esta secuencia se simplifica a

$$W(z) = (1-\lambda)(1 + \lambda z + \lambda^2 z^2 + \lambda^3 z^3 + \ldots)$$

$$= \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda z}$$

La media de la variable no negativa cuyo comportamiento sigue esta distribución de probabilidad es dada por

$$E(z) = \sum_{i=0}^{\infty} i w_i = W'(1)$$

donde $W'(1)$ es la primera derivada de la función generadora evaluada en z=1. Tomando en cuenta la distribución geométrica, entonces la media del rezago puede ser encontrado por

$$\mu_z = W'(1)$$

$$W'(z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{(1-\lambda)}{1-\lambda z}\right) = \lambda(1-\lambda)(1-\lambda z)^{-2}$$

y estableciendo z=1, resulta que

$$\mu_z = W'(1) = \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

Similarmente, la varianza de la distribución de rezagos es dada por

$$Var(z) = W''(1) + W'(1) - [W'(1)]^2$$

que en el caso de la distribución geométrica se reduce a

$$\sigma_z^2 = \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}$$

En todo esto se puede apreciar las ventajas de utilizar estas modificaciones algebraicas.

2.2.1 Operador de Rezagos

Dos instrumentos útiles para simplificar la obtención de los parámetros de un rezago (rezago medio, rezago mediano y varianza del rezago) son el operador de rezagos y la función generatriz de rezagos.
Si z_t es una función del tiempo, el operador de rezagos, L, se define como

$$Lz_t = z_{t-1}$$

las potencias del operador se definen como aplicaciones sucesivas, es decir,

$$L^2 z_t = z_{t-2}$$

y, en general, $L^s z_t = z_{t-s}$ con s > 0.

El uso combinado del operador y la función generatriz de rezagos proporciona importantes ventajas instrumentales, como se comprueba a continuación.
Regresando a la ecuación preescrita del modelo de un rezago distribuido

$$y_t = \beta(w_0 x_t + w_1 x_{t-1} + w_2 x_{t-2} + \cdots) + u_t$$

ahora, empleando el operador de rezagos, se puede rescribir de la siguiente forma:

$$y_t = \beta(w_0 + w_1 L + w_2 L^2 + w_3 L^3 + \cdots)x_t + u_t =$$

$$= \beta W(L)x_t + u_t$$

donde $W(L)$ es una notación abreviada para los polinomios en el operador de rezagos L.

Resulta adecuado resaltar la similaridad con la función generadora $W(z)$ establecida con anterioridad. Ya que z es una variable auxiliar dummy, se puede sustituir L por ésta e interpretar a $W(L)$ como ambas. Aunque conceptualmente las dos son diferentes se pueden intercambiar dentro de este contexto.

En particular sí $W(L)$ es una función de rezagos geométrica, se puede rescribir la ecuación previa como

$$y_t = \frac{\beta(1-\lambda)}{1-\lambda L} x_t + u_t$$

Una vez establecido el contexto en el que opera el Modelo de Rezagos Distribuidos, se revisará la aplicación metodológica que han hecho varios autores y en especial, L.M. Koyck [1954]

La popularidad de los modelos de rezagos distribuidos como técnica econométrica es debido, por mucho, al trabajo de Koyck [1954], Cagan [1956] y Nerlove [1956]

Asumiendo una distribución geométrica de los rezagos, Koyck [1954] demostró que una ecuación de la forma

$$y_t = a\sum(1-\lambda)\lambda^i x_{t-i} + u_t$$

puede ser resuelta rezagando la ecuación un periodo, multiplicándola por λ después y restando esta ecuación resultante a la original.

La ecuación resultante es mucho más simple para estimar, excepto por el hecho que si la distribución original de u_t fuera serialmente no correlacionada, esto no resultaría verdadero para los errores de la ecuación transformada. Lo anterior se verá con más detalles en el Capítulo 4.

Cagan [1956], por su parte, sugirió un modelo de expectativas adaptativas en el cual las expectativas son revisadas en proporción al error asociado con el nivel previo de expectativas.
Este modelo implica una declinación geométrica de los rezagos distribuidos para los precios esperados como una función de todos los precios pasados y los coeficientes son obtenidos a través de un proceso de máxima verosimilitud.

En cuanto a Nerlove [1956], él combinó el modelo de expectativas adaptativas de Cagan [1956] con el procedimiento de reducción de Koyck [1954] para obtener un procedimiento de estimación, tanto racional como creíble, aplicable a un amplio rango de problemas. Además, él sugirió una justificación alternativa para la forma asumida por los rezagos: el Modelo de Ajuste Parcial.

Dentro de este modelo, los valores actuales de las variables independientes determinan el valor deseado de la variable dependiente, pero sólo una fracción (fijada) del ajuste deseado es captada dentro un periodo de tiempo particular.

Este modelo guía exactamente a la misma ecuación reducida del Modelo de Expectativas Adaptativas, excepto que este no induce correlación serial adicional en los términos del error si es que estos no iniciaron el proceso con ella.

Este tipo de modelo ha sido ampliamente usado en investigaciones econométricas, sin embargo, también ha generado mucha discusión acerca de sus respuestas.

A continuación se analiza con más profundidad la teoría que soporta tales modelos.

2.3 Modelo de Ajuste Parcial

Una variable retardada puede introducirse en una ecuación de comportamiento a través de una hipótesis simple sobre la causa del rezago. Así por ejemplo, se tiene la siguiente ecuación de consumo

$$c_t = \alpha + \beta y_t + \gamma c_{t-1} + u_t$$

en donde c_{t-1} capta el efecto del hábito adquirido por los consumidores. Esta ecuación coincide con la forma autoregresiva de un modelo de rezago distribuido cuyos coeficientes de reacción reflejan una distribución geométrica decreciente.

Otero [1993] señala que se puede llegar a esta especificación por dos caminos: el primero es a través de la formulación de una hipótesis sobre el comportamiento de los consumidores; y el segundo, por su introducción como supuesto que simplifique el proceso de estimación.

El rezago de estructura geométrica juega un papel fundamental es estos esquemas, ya que fue precisamente los trabajos de Koyck [1954], lo que dieron la pauta para que diversos autores retomaran esta progresión de rezagos y formularan sus modelos.

Los Modelos de Ajuste Parcial generan rezagos distribuidos tomando en cuenta la rigidez en el comportamiento económico, soportado por el hecho que no existe incertidumbre sobre el futuro, lo cual se refleja en el aspecto de que cualquier impacto exógeno se estima como permanente.

Tomando en cuenta el equilibrio a largo plazo (y^*), se puede expresar que éste depende de las condiciones exógenas mediante el siguiente modelo

$$y_t^* = \alpha + \beta x_t + u_t$$

Esta relación no puede estimarse directamente debido a que y_t^* no es observable, por lo que para estimar a α y β es necesario establecer una hipótesis que permita visualizar la forma de ajuste de y a su valor de equilibrio a largo plazo.

El supuesto básico del ajuste parcial es que y se aproxima a y_t^* en un tiempo t continuo mediante

$$\frac{dy(t)}{dt} = \partial(\ldots)[y^*(t) - y(t)]$$

que en forma discreta se puede expresar de la siguiente manera

$$y_t - y_{t-1} = \partial(\ldots)(y_t^* - y_{t-1})$$

donde $0 < \partial(\ldots) \leq 1$ funge como la condición de estabilidad y no negatividad del modelo.

La interpretación de la forma discreta del modelo de ajuste parcial es que el cambio de y de un periodo al siguiente es proporcional a la diferencia entre el valor deseado o de largo plazo y el actual. El factor de proporcionalidad $\partial(\ldots)$ es por lo general variable y su ajuste está en función de factores diversos según las circunstancias que imperen, que en la forma más simple, puede tomarse como constante. Tomando en cuenta lo anterior, y_t^* puede eliminarse de la ecuación inicial resultando

$$y_t = \alpha\delta + \delta\beta x_t + (1-\delta)y_{t-1} + \delta u_t$$

Esta forma coincide con el modelo autoregresivo del rezago distribuido

$$y_t = \alpha(1-\lambda) + \beta_0 x_t + \lambda y_{t-1} + (u_t - \lambda u_{t-1})$$

difiriendo sólo con lo que respecta a la forma del término de error. Al respecto esto se ha utilizado como una justificación teórica del rezago de estructura geométrica.

El modelo con δ constante implica que el ajuste se lleva a cabo a través de una distribución exponencial, lo que deriva en que valores pequeños de δ provocaran ajustes más lentos, puesto que se está estableciendo situaciones con mayor rigidez.

Una manera en hacer más realista el presente análisis es que δ sea una función de y_t, es decir, $\delta(...) = ky(t)$, que corresponde a establecer un ajuste cuya trayectoria es logística. La ecuación de ajuste sería de la siguiente manera

$$\frac{dy(t)}{dt} = ky(t)[y^*(t) - y(t)]$$

cuya aproximación discreta es

$$\ln y_t - \ln y_{t-1} = k(y_t^* - y_{t-1})$$

Con la sustitución de la ecuación original en la anterior, se obtiene que

$$\ln \frac{y_t}{y_{t-1}} = k\alpha + k\beta x_t - ky_{t-1} + ku_t.$$

Chow [1967] en su trabajo de estimación de la demanda de ordenadores, utilizó como función de demanda

$$\ln y_t^* = \alpha + \beta_1 \ln p_t + \beta_2 \ln x_t + u_t$$

donde p es el precio del bien de consumo mientras que la x corresponde al ingreso de los consumidores. A través de la sustitución de la ecuación $\ln y_t - \ln y_{t-1} = \alpha(\ln y_t^* - \ln y_{t-1})$ en la función de demanda estipulada, se obtiene un modelo directo para estimar

$$\ln y_t = \alpha a + \beta_1 a \ln p_t + \beta_2 a \ln x_t + (1-a)\ln y_{t-1} + au_t$$

La anterior ecuación representa a un modelo de crecimiento donde se toman en cuenta el impacto del precio y de la renta en el proceso de crecimiento de la demanda.

Otero [1993] comenta que la ecuación es muy parecida con la forma autoregresiva correspondiente al modelo de Koyck [1954], con reservación de la variable p precio.

2.4 Modelo de Expectativas Adaptativas

El comportamiento de los agentes económicos, ante un escenario de incertidumbre, se basa en las expectativas que generan respecto a ciertas variables económicas de interés. Por tomar sólo un ejemplo, las decisiones de los campesinos relativas al área que van a dedicar a cultivar cierto grano depende, en mucho, de las expectativas que ellos generan sobre el precio futuro del producto en el mercado.

Es necesario definir $x^e(t)$ como el valor esperado de la variable x con base a la información que se tiene hasta este momento, que se introduce al análisis a través del siguiente modelo:

$$y(t) = \alpha + \beta x^e(t) + u(t)$$

que deriva en la siguiente forma discreta encontrada en varios estudios empíricos

$$y_t = \alpha + \beta x_t^e + u_t$$

A través de la ecuación anterior se pretende vincular el comportamiento de los agentes económicos, y_t, al valor esperado de alguna variable, x_t^e, suponiendo que existe una relación lineal exenta de cualquier tipo de rigidez.

Resulta necesario establecer, dentro del esquema, una hipótesis que permita visualizar el proceso de formación de expectativas por parte de los agentes. Cagan [1956] considera que en un cambio de expectativas existe, en general, una componente inducida por los cambios de los valores corrientes de x y otra autónoma, que viene influida por causas distintas de la anterior (por ejemplo: cambios tecnológicos repentinos).

Si no existe información, entonces es muy probable que los agentes basen sus expectativas conforme a los valores históricos de las variables exógenas contenidas en sus modelos; es decir

$$\frac{dx^e(t)}{dt} = \mu[x(t) - x^e(t)],$$

expresión que denota que las expectativas se van modificando de acuerdo con la evolución de las condiciones exógenas y de manera que el cambio de expectativas en cualquier instante, t, es proporcional a la diferencia entre el valor real y el valor esperado de ese momento.

Esta fórmula es modificada para su aplicación en estudios empíricos por la siguiente expresión discreta

$$x_t^e - x_{t-1}^e = \mu[x_t - x_{t-1}^e],$$

en donde $0 < \mu \leq 1$, funge como condición de estabilidad y no negatividad.

La solución general está determinada por

$$x_t^e = (1-\mu)^t x_0^e + \sum_{i=0}^{t-1} \mu(1-\mu)^i x_{t-i}$$

pero con el objetivo de simplificarla, se estipula que el origen es indefinidamente alejado, reduciéndose la anterior expresión a

$$x_t^e = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(1-\mu)^i x_{t-i}$$

La interpretación es que el valor de las expectativas es una media ponderada de los valores pasados de x, con ponderaciones decrecientes, siguiendo una progresión geométrica de razón (1- μ), a medida que la distancia con el pasado se va acrecentando.

La ecuación permite inferir que x_t^e puede interpretarse como una fórmula de predicción y, que bajo ciertas circunstancias, se trata de un predictor óptimo que produce un "alisado" de la serie x. La nueva serie, $\hat{x}_t(1)$, va a estar constituida por las medias ponderadas de valores de la serie primaria, presentando fluctuaciones más amortiguadas que la original.

Regresando a la estimación de las primeras ecuaciones del apartado, es necesario que para poder estimar α, β y μ se debe eliminar x_t^e puesto que resulta no observable; tal proceso, es posible al sustituir

$$x_t^e = (1-\mu)^t x_0^e + \sum_{i=0}^{t-1} \mu(1-\mu)^i x_{t-i} \text{ en } y(t) = \alpha + \beta x^e(t) + u(t)$$

generando la siguiente ecuación

$$y_t = \alpha + \beta \sum_{i=0}^{\infty} \mu(1-\mu)^i x_{t-i} + u_t$$

que mediante la transformación de Koyck se obtiene la expresión

$$y_t = \alpha\mu + \beta\mu x_t + (1-\mu) y_{t-1} + u_t - (1-\mu) u_{t-1}$$

Esta ecuación coincide con la forma autoregresiva del Modelo de Koyck.

Cabe señalar que el modelo de Ajuste Parcial, con δ constante, puede ser transformado y aplicado a un esquema de varias variables; sin embargo, no puede establecerse lo mismo para el modelo de Expectativas Adaptativas.

Por ejemplo, si en la ecuación $y(t) = \alpha + \beta x^e(t) + u(t)$ se agregaran otras variables explicativas, es visible que se generarían problemas de sobre-identificación al obtener la forma autorregresiva; para brincar tal obstáculo, es necesario aplicar un método de estimación directa que no precise de la forma autorregresiva.

Capítulo 3
Extensión del Modelo Geométrico de Koyck[1]

3.1 Estructura con una variable explicativa

En su importante contribución al estudio de las relaciones de rezagos distribuidos, L.M. Koyck [1954] mostró que una considerable simplificación podría ser obtenida al suponer que los pesos declinaban geométricamente y una infinita cola era introducida. La relación queda establecida de la siguiente manera:

$$y_t = a\sum(1-\lambda)\lambda^i x_{t-i} + u_t$$

que podría ser resuelta rezagando la ecuación una vez, multiplicarla por λ después y por último, sustrayendo la ecuación resultante a la ecuación original,

$$y_{t-1} = a\sum(1-\lambda)\lambda^i x_{t-i-1} + u_{t-1}$$

$$\lambda y_{t-1} = a(1-\lambda)\lambda\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i x_{t-i-1} + \lambda u_{t-1}$$

$$y_t - \lambda y_{t-1} = a(1-\lambda)\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i x_{t-i} - a(1-\lambda)\lambda\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i x_{t-i-1} + u_t - \lambda u_{t-1}$$

mediante un reacomodo de términos, se obtiene una ecuación final

$$y_t = a(1-\lambda)x_t + \lambda y_{t-1} + u_t - \lambda u_{t-1}$$

la cual es mucho más simple para trabajar ya que en lugar de estimar un número infinito de parámetros con una muestra finita de datos ahora sólo se tendrán que estimar los parámetros de la forma autoregresiva.

[1] Ha habido diversas propuestas entre los autores para imponer algún tipo de estructura en los coeficientes del modelo de rezagos distribuidos; revisar Maddala, G.S. [1988] *Econometría*, McGraw-Hill, México, pp 373-410.

Sin embargo, esta aparente simplificación es comprada a costa, para la consistente estimación de la relación, del requerimiento de enfrentarse con la problemática de estimar ecuaciones con términos de la variable dependiente rezagada como variables explicatorias.

Los estimadores de Mínimos Cuadrados Ordinarios resultan ser consistentes al establecer que los términos del error son serialmente independientes y siguen una distribución que satisface los supuestos del teorema de límite central, aún en el caso de sesgo por muestras pequeñas; pero, si los errores son serialmente dependientes, un sesgo asintótico existe.
Además, la transformación del modelo de rezagos al modelo autoregresivo, provoca que la varianza y las correlaciones seriales también cambien.

Por lo tanto, si los errores en el modelo original son serialmente independientes, estos no lo son en la forma autoregresiva, lo cual significa que si se aplica Mínimos Cuadrados Ordinarios se obtendrán estimadores inconsistentes.

Una vez estipulado lo anterior, se procederá a calcular el modelo.

Partiendo del Modelo de rezagos distribuidos

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 x_{1t-1} + \beta_3 x_{1t-2} + \cdots + \beta_k x_{1t-k} + u_t$$

donde $u_t \sim N(0, \sigma^2 I)$ y $E(u_t, u_{t-j}) = 0$.

Estipulando que $\beta_2 = \lambda\beta_1$, $\beta_3 = \lambda^2\beta_1$, $\beta_4 = \lambda^3\beta_1$ y así sucesivamente, se puede rescribir la ecuación como

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_1 \lambda x_{1t-1} + \beta_1 \lambda^2 x_{1t-2} + \cdots + \beta_1 \lambda^k x_{1t-k} + u_t$$

$$= \beta_0 + \beta_1 \left[\lambda^0 x_{1t} + \lambda^1 x_{1t-1} + \lambda^2 x_{1t-2} + \cdots + \lambda^k x_{1t-k}\right] + u_t$$

posteriormente, se multiplicará la ecuación anterior por λ y se rezagará un periodo

$$\lambda y_{t-1} = \lambda\beta_0 + \lambda\beta_1 x_{1t-1} + \lambda^2 \beta_1 x_{1t-2} + \cdots + \beta_1 \lambda^{k+1} x_{1t-k-1} + \lambda u_{t-1}$$

Restando la anterior ecuación a la ecuación original se obtiene

$$y_t - \lambda y_{t-1} = \beta_0(1-\lambda) + \beta_1 x_{1t} + \beta_1 \lambda^{k+1} x_{1t-k} + u_t - \lambda u_{t-1}$$

sabiendo que $\beta_1 \lambda^{k+1} x_{1t-k} = 0$ si $k \to \infty$, entonces la ecuación quedaría

$$y_t - \lambda y_{t-1} = \beta_0(1-\lambda) + \beta_1 x_{1t} + u_t - \lambda u_{t-1}$$

$$y_t = \beta_0 * + \beta_1 x_{1t} + \lambda y_{t-1} + v_t$$

donde $\beta_0 * = (1-\lambda)\beta_0$,

$v_t = u_t - \lambda u_{t-1}$, es decir, sigue un modelo AR(1)

β_1 lo restringe la teoría a ser < 1

$\lambda \in (0,1)$ para estabilizar el sistema

Es necesario notar que como la matriz de covarianza de v no es una escalar múltiple de la matriz de identidad, el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) arroja estimadores, aunque insesgados, ineficientes.
Es por ello necesario emplear el método de Mínimos Cuadrados Generalizados que permitirá obtener una mayor disminución en los errores estándar de los estimadores; para esto, será necesario calcular la matriz de varianzas y covarianzas.

Se partirá del siguiente modelo

$$y_t = \alpha x_t + \lambda y_{t-1} + v_t \qquad \text{donde } v_t = u_t - \lambda u_{t-1}$$
$$|\lambda| < 1,\ u_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$$

haciendo sucesivas sustituciones hacia atrás se encuentra que

$$v_t = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_{t-i}$$

de la suposición de u_t se tiene que la media es igual a cero

$$E(v_t) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i E(u_{t-i}) = 0$$

Por su parte, la varianza de v_t es obtenida mediante la siguiente expresión:

$$E(v_t^2) = E(u_t^2) + \lambda^2 E(u_t^2) + \lambda^4 E(u_t^2) + \cdots = \sigma_u^2 /(1-\lambda^2) = \sigma_v^2$$

donde se aplica el resultado de la suma de una serie convergente así como la independencia del término del error.

La covarianza de v_t con v_{t-1} es

$$E(v_1, v_{t-1}) = E[(u_t + \lambda u_{t-1} + \lambda^2 u_{t-2} + \cdots)(u_{t-i} + \lambda u_{t-i-1} + \lambda^2 u_{t-i-2} + \cdots)] = \lambda^i \sigma_v^2$$

por lo tanto la matriz de varianzas y covarianzas puede ser escrita como

$$Evv' = \sigma_u^2 \Omega = \sigma_u^2 \frac{1}{1-\lambda^2} \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \dots & \lambda^{T-1} \\ \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda \\ \lambda^{T-1} & \lambda^{T-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Ya una vez estimada la matriz, se procederá a obtener los coeficientes de los estimadores a través de Mínimos Cuadrados Generalizados, que se obtienen a partir del modelo $\tilde{\beta} = \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} X'\Omega^{-1}Y$. Johnston, J. & John DiNardo [1997]

$$\text{donde } \Omega^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda & & & & \\ -\lambda & (1+\lambda^2) & -\lambda & & 0 & \\ & -\lambda & (1+\lambda^2) & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & (1+\lambda^2) & -\lambda \\ & & & & -\lambda & 1 \end{bmatrix}$$

Si fuera el caso en que Ω sea conocida, el modelo de Mínimos Cuadrados Generalizados puede ser transformado como $P'Y = P'X\beta + P'V$

$$\text{donde } P' = \begin{bmatrix} (1-\lambda^2)^{1/2} & & & & 0 \\ -\lambda & 1 & & & \\ & -\lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \lambda & 1 \end{bmatrix}$$

Lo que resta ahora es estipular cual será el proceso a través del cual se obtendrá el valor de lambda.

Métodos desarrollados por Cochrane-Orcutt y Hildreth-Lu han sido empleados para la estimación de lambda, sin embargo, estos han presentado dificultades al tratar de hacer una estimación con pocas observaciones. Fomby, Carter Hill & Johnson [1984]

La obtención del valor de lambda será tomando el valor del coeficiente de la variable dependiente rezagada arrojado por la regresión hecha a través del modelo de Mínimos Cuadrados Ordinarios, con base al esquema desarrollado por García [2001]

3.2 Estructura con dos variables explicativas

De acuerdo a la literatura econométrica, resulta muy cuestionable querer explicar un proceso económico a través de una sola variable independiente puesto que se induce a un problema de sub-identificación.

La revisión de la literatura del análisis de rezagos distribuidos así como los ejemplos estudiados no contemplan el desarrollo algebraico de modelos con más de una variable, pues es muy probable que la complicación algebraica del desarrollo desincentive dicha labor.

Como se estableció en el Capítulo 1, parte de la aportación de la presente tesis es precisamente desarrollar un modelo que permita soportar algebraicamente el Modelo de Koyck[1954] con dos variables explicativas y es precisamente esto, lo que a continuación se detalla.

Primeramente se va a suponer que los parámetros de las variables independientes rezagadas son diferentes, pero que siguen una misma distribución geométrica.
A continuación se presenta toda el álgebra perteneciente a este paso.

$$y_t = \alpha + \beta \sum_{i=0}^{\infty} w_i (x_{1t-i}) + u_t \qquad \text{(modelo original)}$$

$$y_t = \alpha + \beta \sum_{i=0}^{\infty} w_i x_{1t-i} + \gamma \sum_{i=0}^{\infty} w_i x_{2t-i} + u_t \quad \text{(se introduce la nueva variable)}$$

sabiendo que los pesos del rezago siguen una distribución geométrica, es decir

$$\sum_{i=0}^{\infty} w_i = (1-\lambda)\sum \lambda^i$$

sustituyendo en la ecuación con dos variables se tiene que

$$y_t = \alpha + \beta(1-\lambda)\sum \lambda^i x_{1t-i} + \gamma(1-\lambda)\sum \lambda^i x_{2t-i} + u_t$$

Utilizando el operador de rezagos, la ecuación resultante será

$$y_t = \alpha + \beta(1-\lambda)\sum \lambda^i L^i x_{1t} + \gamma(1-\lambda)\sum \lambda^i L^i x_{2t} + u_t$$

$$y_t = \alpha + \frac{\beta(1-\lambda)}{(1-\lambda L)} x_{1t} + \frac{\gamma(1-\lambda)}{(1-\lambda L)} x_{2t} + u_t$$

Es necesario multiplicar la ecuación por el denominador que tienen en común dos elementos del lado derecho, con el propósito de dejar la ecuación en su mínima expresión

$$(1-\lambda L)y_t = (1-\lambda L)\alpha + \beta(1-\lambda)x_{1t} + \gamma(1-\lambda)x_{2t} + (1-\lambda L)u_t$$

$$y_t - \lambda y_{t-1} = \alpha^* + \beta(1-\lambda)x_{1t} + \gamma(1-\lambda)x_{2t} + u_t - \lambda u_{t-1} \quad \text{donde } \alpha^* = (1-\lambda L)\alpha$$

$$y_t = \alpha^* + \beta(1-\lambda)x_{1t} + \gamma(1-\lambda)x_{2t} + \lambda y_{t-1} + v_t \quad \text{donde } v_t = u_t - \lambda u_{t-1}$$

Hasta aquí, el Modelo de Koyck [1954] presenta la problemática de que existe un rezago de la variable dependiente en el lado derecho de la ecuación y que el término de error sigue un proceso autorregresivo de orden 1, AR(1). Lo anterior resulta importante señalarlo debido a que en la estimación del modelo, estos problemas tratarán de resolverse.

Pero por otra parte, existe la posibilidad de que ambas variables explicativas tengan parámetros de distribución diferentes, lo que complicaría la estimación debido a que surgirían problemas con la identificación de los parámetros respectivos para cada una de las variables.

A continuación se desarrolla el álgebra para representar la anterior situación.

$$y_t = \alpha + \beta\sum_{i=0}^{\infty} w_i x_{1t-i} + \gamma\sum_{i=0}^{\infty} v_i x_{2t-i} + u_t$$

sabiendo que $\sum_{i=0}^{\infty} w_i = (1-\lambda)\sum \lambda^i$ y $\sum_{i=0}^{\infty} v_i = (1-\delta)\sum \delta^i$ entonces se tiene que

$$y_t = \alpha + \beta(1-\lambda)\sum \lambda^i x_{1t-i} + \gamma(1-\delta)\sum \delta^i x_{2t-i} + u_t$$

Utilizando ahora el operador de rezagos

$$y_t = \alpha + \beta(1-\lambda)\sum \lambda^i L^i x_{1t} + \gamma(1-\delta)\sum \delta^i L^i x_{2t} + u_t$$

empleando el artificio algebraico de la distribución geométrica nuevamente

$$y_t = \alpha + \frac{\beta(1-\lambda)}{1-\lambda L}x_{1t} + \frac{\gamma(1-\delta)}{1-\delta L}x_{2t} + u_t$$

$$(1-\lambda L)y_t = (1-\lambda L)\alpha + \beta(1-\lambda)x_{1t} + \frac{\gamma(1-\delta)(1-\lambda L)}{(1-\delta L)}x_{2t} + (1-\lambda L)u_t$$

$$(1-\lambda L)(1-\delta L)y_t = (1-\lambda L)(1-\delta L)\alpha + \beta(1-\lambda)(1-\delta L)x_{1t} +$$
$$+\gamma(1-\lambda L)(1-\delta)x_{2t} + (1-\lambda L)(1-\delta L)u_t$$

Tomando en cuenta las siguientes simplificaciones:

$$(1-\lambda L)(1-\delta L)y_t = y_t - (\lambda+\delta)y_{t-1} + \lambda\delta y_{t-2}$$

$$\alpha^* = (1-\lambda L)(1-\delta L)\alpha$$

$$\beta(1-\lambda)(1-\delta L)x_{1t} = \beta(1-\lambda)[x_{1t} - \delta x_{1t-1}]$$

$$\gamma(1-\lambda L)(1-\delta)x_{2t} = \gamma(1-\delta)[x_{2t} - \lambda x_{2t-1}]$$

$$y_t - (\lambda+\delta)y_{t-1} + \delta\lambda y_{t-2} = \alpha^* + \beta(1-\lambda)[x_{1t} - \delta x_{1t-1}] + \gamma(1-\delta)[x_{2t} - \lambda x_{2t-1}] +$$
$$+u_t - (\lambda+\delta)u_{t-1} + \delta\lambda u_{t-2}$$

$$y_t = \alpha^* + (\lambda+\delta)y_{t-1} - \delta\lambda y_{t-2} + \beta(1-\lambda)[x_{1t} - \delta x_{1t-1}] + \gamma(1-\delta)[x_{2t} - \lambda x_{2t-1}] +$$
$$+u_t - (\lambda+\delta)u_{t-1} + \delta\lambda u_{t-2}$$

La ecuación resultante enfrenta las características de contener dos rezagos de la variable dependiente en el lado derecho de la ecuación y que los errores presentan un proceso autorregresivo de orden 2, AR(2).

Con el objetivo de identificar a cada uno de los parámetros a continuación se muestran algunas expresiones algebraicas

$$\alpha_1 = \lambda+\delta,\ \alpha_2 = \delta\lambda,\ \alpha_3 = \beta(1-\lambda),\ \alpha_4 = \beta(1-\lambda)\delta,\ \alpha_5 = \gamma(1-\delta) \text{ y } \alpha_6 = \gamma(1-\delta)\lambda$$

ahora es factible identificar los siguientes parámetros

$$\frac{\alpha_4}{\alpha_3} = \frac{\beta(1-\lambda)\delta}{\beta(1-\lambda)} = \delta$$

$$\frac{\alpha_6}{\alpha_5} = \frac{\gamma(1-\delta)\lambda}{\gamma(1-\delta)} = \lambda$$

$$\frac{\alpha_3}{\left(1-\dfrac{\alpha_6}{\alpha_5}\right)} = \frac{\beta(1-\lambda)}{(1-\lambda)} = \beta$$

$$\frac{\alpha_5}{\left(1-\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\right)}=\frac{\gamma(1-\delta)}{(1-\delta)}=\gamma$$

Para poder hacer uso del método de Mínimos Cuadrados Generalizados, nuevamente se tendrá que estimar la matriz de varianzas y covarianzas para errores que siguen un proceso de AR(2), con el objetivo de verificar el aumento en la eficiencia de los parámetros estimados y la eliminación del problema de autocorrelación.

El cálculo de la matriz de varianzas y covarianzas se describe a continuación, Fomby et al [1984]

$$E[v_t,v_{t-1}]=E[(\theta_1u_{t-1}+\theta_2u_{t-2}+u_t)(\theta_1u_{t-2}+\theta_2u_{t-3}+u_{t-1})]$$

$$=E[(\theta u_{t-1}u_{t-1}+\theta_1\theta_2u_{t-2}u_{t-2})]=\theta_1V[u_{t-1}]+\theta_1\theta_2V[u_{t-2}]$$

$$=\theta_1\sigma_u^2+\theta_1\theta_2\sigma_u^2$$

$$E[v_t,v_{t-2}]=[(\theta_1u_{t-1}+\theta_2u_{t-2}+u_t)(\theta_1u_{t-3}+\theta_2u_{t-4}+u_{t-2}]$$

$$=E[\theta_2u_{t-2}u_{t-2}]=\theta_2V[u_{t-1}]=\theta_2\sigma_u^2$$

$$E[v_1,v_{t-3}]=E[(\theta_1u_{t-1}+\theta_2u_{t-2}+u_t)(\theta_1u_{t-4}+\theta_2u_{t-5}+u_{t-3})]=0$$

$$=\sigma^2\begin{bmatrix}\theta_1^2+\theta_2^2+1 & \theta_1+\theta_1\theta_2 & \theta_2 & & & & & 0\\ \theta_1+\theta_1\theta_2 & \theta_1^2+\theta_2^2+1 & \theta_1+\theta_1\theta_2 & \theta_2 & & & & \\ \theta_2 & \theta_1+\theta_1\theta_2 & \theta_1^2+\theta_2^2+1 & \theta_1+\theta_1\theta_2 & \theta_2 & & & \\ & \theta_2 & \theta_1+\theta_1\theta_2 & \theta_1^2+\theta_2^2+1 & \theta_1+\theta_1\theta_2 & \ddots & & \theta_2\\ & & & \ddots & \ddots & & \ddots & \theta_1+\theta_1\theta_2\\ 0 & & & & \theta_2 & & \theta_1+\theta_1\theta_2 & \theta_1^2+\theta_2^2+1\end{bmatrix}$$

Sea $E(ee')=\sigma_u^2\Psi$

$$\Psi^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -\theta_1 & -\theta_2 & & & & \\ -\theta_1 & 1+\theta_1^2 & -\theta_1+\theta_1\theta_2 & \ddots & & 0 & \\ -\theta_2 & -\theta_1+\theta_1\theta_2 & 1+\theta_1^2 & \ddots & \ddots & & \\ & -\theta_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -\theta_2 \\ & 0 & & \ddots & \ddots & 1+\theta_1^2 & -\theta_1 \\ & & & & -\theta_2 & -\theta_1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sea P tal que $PP' = \Psi^{-1}$ la matriz de transformación del Modelo de Mínimos Cuadrados Generalizados puede ser determinada como

$$P'=\begin{bmatrix} \sigma_u/\sigma_e & & & & & \\ -\rho\sqrt{1-\theta_1^2} & \sqrt{1-\theta_2^2} & & & 0 & \\ -\theta_2 & -\theta_1 & 1 & & & \\ & -\theta_2 & -\theta_1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -\theta_2 & -\theta_1 & 1 \end{bmatrix}$$

Capítulo 4
Estimación del modelo de demanda de electricidad

El objetivo de este capítulo es el de estimar un modelo que permita entender el comportamiento de la demanda por electricidad en la República Mexicana a través del Modelo Geométrico de Koyck. Para ello, es necesario establecer las siguientes ideas sobre el mercado energético.

El tiempo requerido para planear, construir y poner en marcha plantas generadoras de electricidad es frecuentemente considerable, típicamente varía entre cuatro y diez años. Es por ello la necesidad de entender y saber realizar un pronóstico adecuado de la demanda por electricidad. El impacto social y económico de tener sobre o sub-capacidad generadora de electricidad resulta de gran magnitud, puesto que se estarán distrayendo recursos necesarios para cubrir necesidades de salud, educación o vivienda por una parte y por la otra, la necesidad de crecimiento del país se vería limitada por la falta de fuentes de energía que permitan expandir la planta industrial y de servicios, creando a su vez conflictos sociales.

Un segundo estimulo para entender la demanda por electricidad es que la construcción de una nueva planta es frecuentemente acompañada por intensas controversias políticas asociadas al origen proveniente de los recursos, la seguridad de la planta, el impacto ambiental y las consecuencias económicas.

Una de las características fundamentales de la demanda por electricidad es que ésta es determinada por la necesidad de servicios que envuelven equipos cuyo insumo es la electricidad, por ejemplo, la lámpara, el aire acondicionado, la lavadora; es decir, aparatos electrodomésticos necesarios para cubrir las necesidades de las personas en sus hogares.
Otra segunda característica de la demanda por electricidad es que está determinada por la larga vida de estos equipos, denominados en el ambiente económico como bienes durables.
Los refrigeradores, por ejemplo, pueden tener una vida productiva de alrededor de 10 años, mientras que las máquinas en la industria tienen periodos de vida que fluctúan en los 20 años.

Dadas estas características, es factible considerar que parte del consumo por electricidad se encuentra fijado por la ingeniería del diseño y los procedimientos operacionales intrínsecos de cada equipo.

El hecho de que el stock de equipo sea durable y que las características de diseño no cambian periódicamente significa que el consumo de electricidad para muchos servicios sólo será alterado por cambios en el patrón de uso del equipo (varíe la demanda por sus servicios) o mediante la adquisición de equipo diferente con características de consumo eléctrico modificado. Si el precio real de electricidad aumenta, los consumidores podrían reducir sus necesidades de aire acondicionado mediante la tolerancia a las temperaturas altas pero este no responderá de la misma manera para las personas de clase social baja y media baja, donde la electricidad resulta en un bien básico y que al registrarse un aumento en su precio necesariamente redistribuirán sus egresos para tener la misma capacidad de consumo eléctrico de antes.

Dentro de la literatura se han escrito varios documentos tratando de modelar la demanda por electricidad, entre estos destacan el análisis realizado por Fisher & Kaysen[1962] quienes escribieron el libro "A Study in Econometrics: The Demand for Electricity in the United States" el cual es considerado como un clásico.

Los autores hacen el análisis separando la demanda por dos tipos de usuarios: los industriales y los domésticos o familias. Por una parte, determinan que la demanda de electricidad de la industria va a estar ligada al volumen de producción industrial mientras que la del sector doméstico será una función de demanda indirecta en donde estos requieren, en primera instancia, bienes de línea blanca y en segunda, la electricidad con que operan dichos bienes.
El modelo de demanda para el sector doméstico queda determinado por el precio de la electricidad y del ingreso per cápita y es empleado por los autores para estimar funciones de demanda del sector doméstico para cada uno de los estados que conforman la Unión Americana.

Otro estudio interesante es el desarrollado por el Electric Power Research Institute (EPRI) en 1996 denominado "Demand Forecasting in the Electric Utility Industry"; en el citado documento se hace un resumen del conjunto de técnicas para el pronóstico de la energía eléctrica y se mencionan los factores que ha orillado la evolución en la técnicas utilizadas desde la década de los 60's.

En ambos documentos se hace un esfuerzo en resolver el problema de agregación, lo que permite utilizar un solo tipo de función de demanda. García [2001]

En el documento "Análisis de la Industria Eléctrica de México: Un Enfoque Regional" García [2001] hace un estudio sobre las condiciones del mercado eléctrico nacional: las empresas que generan ésta, el patrón de crecimiento en la demanda con base a una clasificación del tipo de consumidor y también de acuerdo a la región, la evolución de los precios de la electricidad y la relación precio-costo así como los subsidios otorgados a la población.

García [2001] realiza un análisis agregado de la demanda de energía eléctrica para el cual utiliza un modelo causal donde contempla sólo un efecto precio y un efecto ingreso.
El autor considera que tanto las empresas como las familias reaccionan lentamente al existir una variación ya sea en los precios del bien como en sus ingresos, por lo que esto dio pie a que utilizará un modelo de rezagos distribuidos bajo el esquema de Koyck [1954]
Es precisamente dicho estudio, en el cual se fundamente el presente análisis.

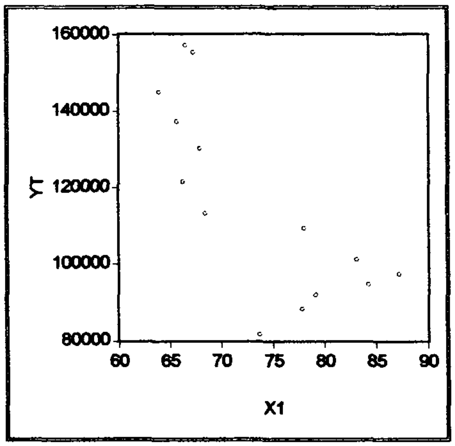
4.1 Estudio empírico de la demanda

El modelo de demanda va a estar construido por la variable ***Ventas*** (y_t) que corresponde a la cantidad de Gigawatts facturados por la Comisión Federal de Electricidad para toda la República Mexicana y que será la variable a estimar. Por parte de las variables explicatorias se tiene, primeramente, al ***Precioreal***(x_{1t}) que corresponde al precio real medio de las tarifas, englobando los diferentes sectores en que se ubican los consumidores (industrial, comercial o doméstico) y que viene estimado en centavos por Kilowatts consumidos, y el ***Pibreal***(x_{2t}) que es la producción de bienes y servicios generada por los agentes económicos dentro de la nación en precios constantes, es decir, tomando como base un año, que en este caso es 1993, se estima la variación eliminando el efecto inflación y reflejando sólo el crecimiento real de la producción de la nación.

Lo que primeramente se procedió a realizar fueron dos diagramas de dispersión para ver la relación entre las dos variables explicatorias y la dependiente.

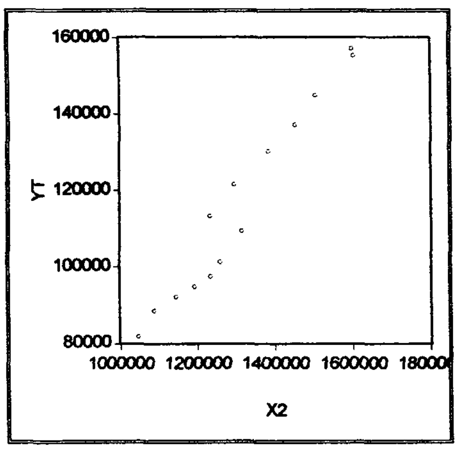
La relación entre el ***Precioreal*** y ***Ventas*** al parecer sigue la lógica del mercado ya que presenta una tendencia negativa, es decir, que al aumentar el precio real de los Kilowatts consumidos, los agentes económicos disminuyen su demanda por el servicio.
Algo importante a señalar en la Gráfica 4.1, es la baja pendiente de la línea imaginaria que se ajusta a los puntos. Esto puede ser soportado por la importancia de la electricidad como fuente de energía carente de sustitutos perfectos, lo que intuye que caiga en la clasificación económica de bien básico, es decir, que la respuesta al cambio del precio del bien no es muy rápida o tal vez nula ya que la electricidad siempre será consumida por la sociedad al ser una necesidad primaria en la vida cotidiana. Por ejemplo, para la clase alta es muy probable que al aumentar el precio de la electricidad cambien su comportamiento reduciendo el periodo de tiempo que prenden el aire acondicionado, pero es muy difícil que las personas de clase social más baja eliminen el uso del refrigerador y la televisión o el empresario retire la máquina procesadora de determinada línea de producción.

Gráfica 4.1 Diagrama de dispersión de Ventas (y_t) contra Precioreal (x_1)



Con respecto a la relación entre ***Ventas*** y ***Pibreal*** se aprecia que un aumento en el ingreso real de los agentes económicos les permitirá comprar más aparatos electrodomésticos o bienes de consumo, que en su conjunto, presionaran por un aumento en la capacidad productiva de la industria, redundando todo en una mayor demanda por electricidad; ahí la razón de su pendiente positiva.

Gráfica 4.2 Diagrama de dispersión de Ventas (y_t) contra Pibreal (x_2)



Una vez realizado lo anterior, se procederá a correr el Modelo Geométrico de Koyck. Es necesario aclarar, que con el objetivo de obtener una interpretación directa de las elasticidades ingreso y precio, se transformaron los modelos por medio de la función del logaritmo natural, resultando la siguiente expresión matemática

$$\ln y_t = \beta_0 + \beta_1 \ln x_{1t} + \beta_2 \ln x_{2t} + \beta_3 \ln y_{t-1} + u_t$$

Se utilizó el programa econométrico E-views para generar la corrida, obteniendo el presente modelo

	$\ln y_t =$	-1.30	$-0.442 \ln x_{1t}$	$+0.787 \ln x_{2t}$	$+0.325 \ln y_{t-1}$	$+u_t$	**(Modelo 1)**
Error estd.		0.699	0.062	0.133	0.102		
t-ratio		-1.85	-7.05	5.88	3.17		

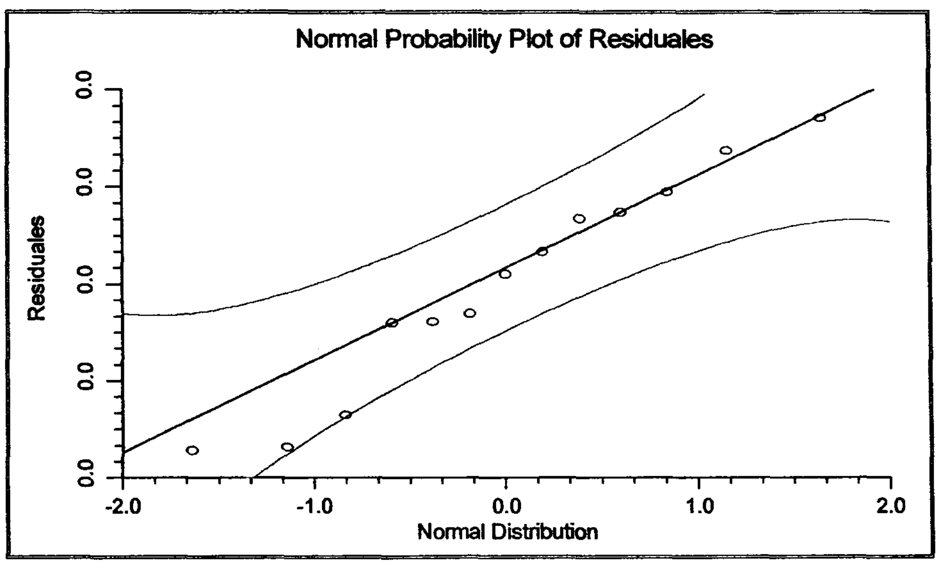
con una R^2 igual a 0.9983, se puede considerar que tanto las dos variables explicatorias como la dependiente rezagada, describen muy bien el comportamiento de la variable dependiente.

El modelo cumple con las restricciones de estabilidad determinadas por la teoría, donde β_1 es menor que 0, β_2 es mayor que 0 y β_3 es mayor que 0 pero menor a 1. Sólo la constante resultó no ser estadísticamente significativa.

Es necesario comprobar ahora los tres supuestos básicos que soportan la capacidad de inferencia sobre cualquier modelo cuya estimación sea obtenida por Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO).

El primer supuesto en analizar es la normalidad que deben mostrar los residuales generados por la corrida; en la Gráfica 4.3 es visible que los residuales se encuentran la mayoría a través de la línea de probabilidad y los que no, todavía se encuentran dentro del área del intervalo de la estimación, por lo que se determina que la normalidad existe.

Gráfica 4.3 Normalidad de los residuales



Se aplicó la Prueba de White, Gujarati [1995], para analizar la posible heteroskedasticidad de los residuales; en esta prueba se estipula como hipótesis nula la ausencia de heteroskedasticidad dentro del modelo. La prueba arrojó que no se puede rechazar la hipótesis nula debido a que el estadístico de prueba (4.297) resultó menor al valor de tablas (12.59, Ji-cuadrada), por lo que el supuesto de igualdad de varianza entre las observaciones se mantiene.

Con lo que respecta a la autocorrelación es imposible llevar a cabo alguna prueba puesto que se estipula que existe un problema de autocorrelación teórica de los errores.

Teniendo presente el problema de la probable correlación entre los errores y en la búsqueda de una mayor eficiencia, se procederá a desarrollar el Método de Mínimos Cuadrados Generalizados, para ello será necesario calcular la matriz de varianzas y covarianzas para un proceso AR(1) seguido por los errores del modelo.

Sólo para recordar la estructura, a continuación se vuelve escribir la matriz

$$\Omega^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda & & & & \\ -\lambda & (1+\lambda^2) & -\lambda & & 0 & \\ & -\lambda & (1+\lambda^2) & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & (1+\lambda^2) & -\lambda \\ & & & & -\lambda & 1 \end{bmatrix}$$

Como se había establecido, el valor de lambda será obtenido del coeficiente de la variable rezagada del pasado modelo de regresión, el cual fue de 0.325
El cálculo de la inversa de la matriz de varianzas y covarianzas queda de la siguiente manera:

$$\Omega^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0.32 & & & & & \\ -0.32 & 1.10 & -0.32 & & & 0 & \\ & -0.32 & 1.10 & -0.32 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -0.32 & 1.10 & -0.32 & \\ & 0 & & & -0.32 & 1.10 & -0.32 \\ & & & & & -0.32 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se procederá a calcular el modelo de Mínimos Cuadrados Generalizados mediante la ecuación $\tilde{\beta} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}Y$

$$\ln y_t = -1.587 - 0.440 \ln x_{1t} + 0.830 \ln x_{2t} + 0.296 \ln y_{t-1} + u_t \quad \textbf{(Modelo 2)}$$

Error estd.	1.0E-05	0.0053	0.0090	0.0081
t-ratio		83.01	92.22	36.54

el cumple con las restricciones de estabilidad determinadas por la teoría, donde $\beta_1$es menor que 0, β_2 es mayor que 0 y $\beta_3$es mayor que 0 pero menor a 1.
Los cuatros coeficientes resultan significativos.

Como el interés de la presente tesis es verificar el aumento en la eficiencia de los estimadores, es necesario evaluar la disminución de los errores estándar de los coeficientes. En la Tabla 4.1 se calculó el aumento de la eficiencia en la estimación de los parámetros a través de verificar la tasa de decrecimiento de los errores estándar; como se aprecia, la tasa de disminución en general fue mayor al 90%, lo cual permite inferir que la estimación por Mínimos Cuadrados Generalizados (MCG) es más eficiente.

Tabla 4.1 Análisis de los errores estándar de los parámetros

Coeficientes	β_0	β_1	β_2	β_3
Regresión por MCO	0.699	0.062	0.133	0.102
Regresión por MCG	0.00001	0.0053	0.0090	0.0081
Porcentaje de disminución de los errores	99	91	93	92

Por otra parte, el cálculo de las elasticidades Ingreso y Precio de la demanda de electricidad, Tabla 4.2, permite identificar que en el largo, la electricidad va a crecer 1.178 de lo que crezca el ingreso, en este caso el PIB real. La cuestión estriba en conocer el cálculo del PIB para determinar la inversión necesaria que las autoridades energéticas del país, en este caso México, deberán destinar en la construcción de infraestructura energética.

En lo que respecta a la elasticidad Precio de la demanda, se observa que los valores son negativos, como lo dicta la teoría, y los cuales indican el cambio porcentual en que se contraerá la demanda al verse incrementado el precio medio real de la electricidad en una unidad, que en este caso es de -0.440 en el corto plazo mientras que en el largo es de -0.625.

Tabla 4.2 Elasticidades de Corto y Largo Plazo

	Ingreso	Precio
Elasticidad Corto Plazo	0.830	-0.440
Elasticidad Largo Plazo	1.178	-0.625

El segundo modelo teórico que se estimará supone que las dos variables explicatorias tienen diferente parámetro por lo que la ecuación queda de la siguiente manera:

$$y_t = \alpha^* + (\lambda + \delta)y_{t-1} - \delta\lambda y_{t-2} + \beta(1-\lambda)[x_{1t} - \delta x_{1t-1}] + \gamma(1-\delta)[x_{2t} - \lambda x_{2t-1}] + $$
$$+ u_t - (\lambda + \delta)u_{t-1} + d\lambda u_{t-2}$$

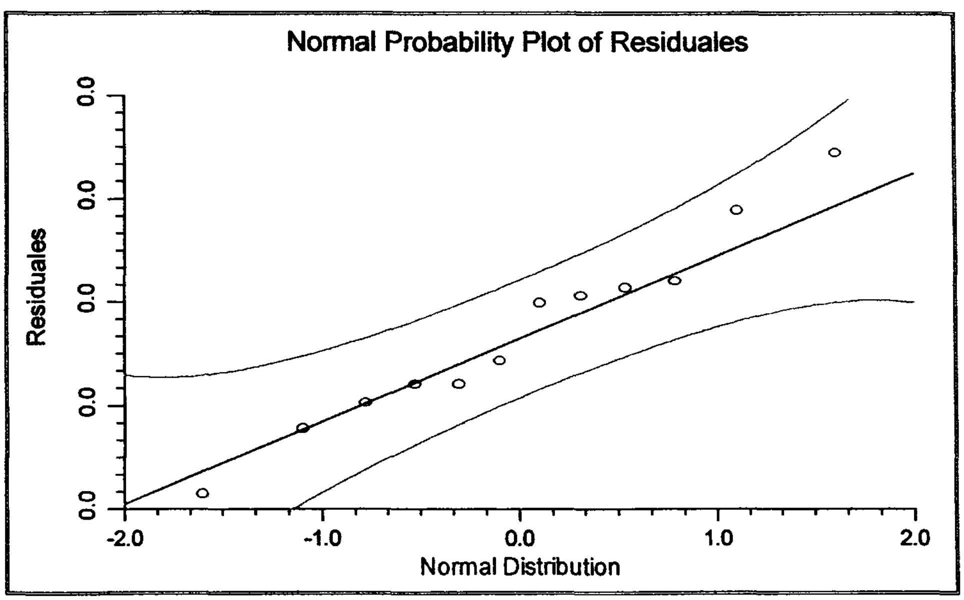
$$\ln y_t = -1.053 - 0.429 \ln x_{1t} + 0.719 \ln x_{2t} + 0.206 \ln y_{t-1} + 0.176 \ln y_{t-2} + u_t$$

Error estd.	0.880	0.072	0.156	0.203	0.210
t-ratio	-1.196	-5.970	4.609	1.016	0.837

La R^2 es de 0.9982, que es muy semejante al estimado por MCO con sólo una variable rezagada, pero en este modelo sólo los coeficientes de las variables ***Precioreal*** y ***Pib*** son estadísticamente significativos (**Modelo 3**).
Todos los coeficientes se encuentran de acuerdo a las restricciones de estabilidad estipuladas.

Se pasara a la comprobación de los supuestos de MCO.
A través de la Gráfica 4.4 es posible comprobar que los residuales tienen un comportamiento normal, ya que a pesar de no encontrarse sobre la línea, ningún punto se sale del intervalo.

Gráfica 4.4 Normalidad de los residuales



Se llevó a cabo la prueba de White con términos no cruzados que mostró la ausencia de heteroskedasticidad al rechazarse la hipótesis nula debido a que el estadístico obtenido (8.18) resultó ser menor que el valor de la Ji-cuadrada ($\chi^2_8 = 15.5073$).

De nueva cuenta, en el modelo existe un problema de autocorrelación teórico.

Se va a proceder a calcular el Modelo de Mínimos Cuadrados Generalizados con el objetivo de obtener mayor eficiencia en la estimación de los errores al incluirse la matriz de varianzas y covarianzas para un proceo AR(2).

De igual manera se recurre a los coeficientes de los dos rezagos de la variable dependiente obtenidos en la regresión anterior para realizar el cálculo de la matriz; los valores son $\theta_1 = 0.206$ y $\theta_2 = 0.176$

$$\hat{\Omega}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0.206 & -0.175 & & & & \\ -0.206 & 1.04 & -0.170 & -0.175 & & 0 & \\ -0.175 & -0.170 & 1.04 & -0.170 & \ddots & & \\ & -0.175 & -0.170 & 1.04 & \ddots & -0.175 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & -0.170 & -0.175 \\ & 0 & & -0.175 & -0.170 & 1.04 & -0.206 \\ & & & & -0.175 & -0.206 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se calculara los estimadores de Mínimos Cuadrados Generalizados Creíbles a través del modelo $\tilde{\beta} = \left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{-1}Y$

El modelo generado queda de la siguiente manera:

$$\ln y_t = -1.424 - 0.404 \ln x_{1t} + 0.735 \ln x_{2t} + 0.249 \ln y_{t-1} + 0.135 \ln y_{t-2} + u_t$$

Error estd.	1.2E-05	0.0062	0.0117	0.0416	0.0341
t-ratio		65.16	62.82	5.98	3.95

La R^2 es de 0.9981, lo cual comprueba que la robustez se sigue manteniendo, pero ahora todos los coeficientes resultan estadísticamente significativos (**Modelo 4**).
Los coeficientes se siguen ajustando a las restricciones de estabilidad requeridas por la teoría que soporta el modelo.
Igual que el anterior modelo, se construyó la Tabla 4.3 con el objetivo de comparar los errores estándar derivados de ambos métodos de estimación. Al igual que con los modelos con un rezago, en estos modelos existe una reducción bastante considerable de los errores estándar con relación a la estimación de Mínimos Cuadrados Ordinarios. La menor tasa la registra β_4 (84%) mientras que la más alta le corresponde a β_0 (99%).

Tabla 4.3 Análisis de los errores estándar de los parámetros

Parámetros	β_0	β_1	β_2	β_3	β_4
Regresión por MCO	0.880	0.072	0.156	0.203	0.210
Regresión por MCG	0.000012	0.0062	0.0117	0.0416	0.0341
Porcentaje de disminución de los errores estándar	99	91	93	80	84

El cálculo de las elasticidades de Ingreso y Precio de la demanda, como se indican en la Tabla 4.4, permite verificar que existe coherencia económica, al ser negativa para un aumento en los precios reales del servicio y positiva para un incremento en el ingreso nacional. Con relación al cálculo de las elasticidades para el modelo con un solo rezago, un cambio porcentual del precio real de la electricidad o del ingreso nacional, impactará en menor medida a la demanda de electricidad en el modelo con dos rezagos, ya que las elasticidades son más pequeñas en valor absoluto.

Tabla 4.4 Elasticidades de Corto y Largo Plazo

	Ingreso	Precio
Elasticidad de Corto Plazo	0.735	-0.404
Elasticidad de Largo Plazo	0.978	-0.537

Capítulo 5
Conclusiones y Desafíos futuros

En el presente estudio establezco con claridad la base teórica que se encuentra detrás de los Modelos de Rezagos Distribuidos y en específico, del Modelo Geométrico de Koyck.

La instrumentación del Modelo de Koyck en la estimación de la función de demanda de electricidad del mercado mexicano, a través del método de Mínimos Cuadrados Generalizados, permite obtener parámetros cuyos errores estándar disminuyen en una tasa promedio del 90% con referente a los arrojados por el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios.

La robustez de los modelos se comprobó al obtener R^2 muy altas acompañadas con la verificación positiva de los supuestos de normalidad, homoskedasticidad y resolviendo el problema teórico de autocorrelación de los errores a través del cálculo de la matriz de varianzas y covarianzas con procesos autorregresivos.

Esto me permite sostener que es posible llevar a cabo inferencia a través de los modelos estimados.

Es importante señalar que en este trabajo sólo me concentré en resolver el problema de eficiencia en la estimación de los coeficientes más sin embargo no verifico que estos se estimen de manera consistente.

Otro problema también es la posible autocorrelación entre los errores del modelo y las variables dependientes rezagadas.

Ambas situaciones pueden ser, en un futuro, temas de investigación.

Anexos

Tabla 1. Datos del Análisis Econométrico

Año	INPC (2Q Julio 2002) *	PIB real 1993 (millones de pesos) **	Ventas (GWh) ***	Precio medio (Ctvs/KWh) ***	Precio medio real 2002 (Ctvs/KWh)
1988	10.96	1042981.103	81884.673	8.06110809	73.5635
1989	13.15	1085800.79	88537.163	10.2164918	77.6890
1990	16.66	1141999.324	92123.246	13.15965245	79.0117
1991	20.43	1190131.795	94768.24	17.18376325	84.1111
1992	23.60	1232275.581	97569.982	20.54761679	87.0742
1993	25.90	1256195.971	101276.858	21.49405247	82.9910
1994	27.70	1312200.43	109532.858	21.57004613	77.8611
1995	37.40	1230607.98	113365.036	25.55699713	68.3356
1996	50.26	1293859.108	121572.808	33.22092388	66.1027
1997	60.62	1381525.171	130254.616	41.08615851	67.7742
1998	70.28	1449310.06	137209.486	46.05598625	65.5336
1999	81.93	1503499.597	144996.452	52.27193076	63.7973
2000	89.71	1603261.54	155348.661	60.21090584	67.1163
2001	95.42	1598832.341	157203.919	63.35243716	66.3905

Fuente: * Banco de México (http://www.banxico.org.mx)
** INEGI (http://www.inegi.gob.mx)
*** Comisión Federal de Electricidad (http://www.cfe.gob.mx)

Descripción detallada de Estructura de los Modelos

Modelo con un rezago

a)Con constante y por MCO. **(Modelo 1)**

$$\ln y_t = -1.30 - 0.442 \ln x_{1t} + 0.787 \ln x_{2t} + 0.325 \ln y_{t-1}$$

t-ratio	-1.85	-7.05	5.88	3.17
Error Estd.	0.699	0.062	0.133	0.102

R^2=0.998300

b)Con constante y por MCG. **(Modelo 2)**

$$\ln y_t = -1.587 - 0.440 \ln x_{1t} + 0.830 \ln x_{2t} + 0.296 \ln y_{t-1}$$

Error Estd.	1.0 E-05	0.0053	0.0090	0.0081

R^2=0.99823

Modelo con dos rezagos

a)Con constante y por MCO. **(Modelo 3)**

$$y_t = -1.053 - 0.429 x_{1t} + 0.719 x_{2t} + 0.206 y_{t-1} + 0.176 y_{t-2}$$

t-ratio	-1.196	-5.970	4.609	1.016	0.837
Error Estd.	0.880	0.072	0.156	0.203	0.210

R^2=0.998239

b)Con constante y por MCG. **(Modelo 4)**

$$y_t = -1.424 - 0.404 x_{1t} + 0.735 x_{2t} + 0.249 y_{t-1} + 0.135 y_{t-2}$$

Error Estd.	1.2E-05	0.0062	0.0117	0.0416	0.0341

R^2=0.9981

Tabla 2. Salida de la Regresión del Modelo 1

Dependent Variable: LNYT
Method: Least Squares
Date: 09/30/02 Time: 10:30
Sample(adjusted): 1989 2001
Included observations: 13 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-1.300980	0.699842	-1.858963	0.0960
LNX1	-0.441930	0.062638	-7.055248	0.0001
LNX2	0.786545	0.133711	5.882434	0.0002
LNYT(-1)	0.325237	0.102473	3.173874	0.0113

R-squared	0.998300	Mean dependent var	11.66581
Adjusted R-squared	0.997734	S.D. dependent var	0.202114
S.E. of regression	0.009621	Akaike info criterion	-6.202008
Sum squared resid	0.000833	Schwarz criterion	-6.028178
Log likelihood	44.31305	F-statistic	1762.162
Durbin-Watson stat	2.243414	Prob(F-statistic)	0.000000

Tabla 3. Prueba de Heteroskedasticidad de White del Modelo 1

White Heteroskedasticity Test:

F-statistic	0.493739	Probability	0.794246
Obs*R-squared	4.297005	Probability	0.636552

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Date: 09/30/02 Time: 10:05
Sample: 1989 2001
Included observations: 13

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.443793	0.868607	0.510925	0.6277
LNX1	-0.023396	0.032747	-0.714454	0.5018
LNX1^2	0.002635	0.003777	0.697639	0.5115
LNX2	-0.072266	0.163898	-0.440919	0.6747
LNX2^2	0.002597	0.005809	0.447122	0.6705
LNYT(-1)	0.019878	0.055550	0.357841	0.7327
LNYT(-1)^2	-0.000891	0.002381	-0.374086	0.7212

R-squared	0.330539	Mean dependent var	6.41E-05
Adjusted R-squared	-0.338922	S.D. dependent var	6.61E-05
S.E. of regression	7.64E-05	Akaike info criterion	-15.81646
Sum squared resid	3.51E-08	Schwarz criterion	-15.51225
Log likelihood	109.8070	F-statistic	0.493739

Durbin-Watson stat	2.353260	Prob(F-statistic)	0.794246

Tabla 4. Salida de la Regresión del Modelo 3

Dependent Variable: LNYT
Method: Least Squares
Date: 09/30/02 Time: 10:09
Sample(adjusted): 1990 2001
Included observations: 12 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-1.053146	0.880501	-1.196076	0.2706
LNX1	-0.428938	0.071852	-5.969704	0.0006
LNX2	0.719033	0.156018	4.608659	0.0025
LNYT(-1)	0.206259	0.203094	1.015582	0.3436
LNYT(-2)	0.175503	0.209787	0.836578	0.4305

R-squared	0.998239	Mean dependent var	11.68869
Adjusted R-squared	0.997233	S.D. dependent var	0.192707
S.E. of regression	0.010137	Akaike info criterion	-6.050920
Sum squared resid	0.000719	Schwarz criterion	-5.848876
Log likelihood	41.30552	F-statistic	992.0806
Durbin-Watson stat	2.339448	Prob(F-statistic)	0.000000

Tabla 5. Prueba de Heteroskedasticidad de White del Modelo 3

White Heteroskedasticity Test:

F-statistic	0.803243	Probability	0.644076
Obs*R-squared	8.180754	Probability	0.416016

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Date: 09/30/02 Time: 10:10
Sample: 1990 2001
Included observations: 12

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-1.464778	1.807499	-0.810389	0.4770
LNX1	-0.031510	0.042458	-0.742133	0.5118
LNX1^2	0.003828	0.004838	0.791210	0.4866
LNX2	0.205260	0.285733	0.718362	0.5244
LNX2^2	-0.007265	0.010172	-0.714269	0.5266
LNYT(-1)	0.417131	0.411756	1.013052	0.3856

LNYT(-1)^2	-0.017804	0.017648	-1.008823	0.3874
LNYT(-2)	-0.406304	0.422124	-0.962524	0.4068
LNYT(-2)^2	0.017463	0.018281	0.955274	0.4099

R-squared	0.681729	Mean dependent var	5.99E-05
Adjusted R-squared	-0.166992	S.D. dependent var	7.61E-05
S.E. of regression	8.22E-05	Akaike info criterion	-15.86124
Sum squared resid	2.03E-08	Schwarz criterion	-15.49756
Log likelihood	104.1674	F-statistic	0.803243
Durbin-Watson stat	2.795526	Prob(F-statistic)	0.644076

Proceso de Estimación Modelo 2

Se va a estimar $\widetilde{\beta} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}Y$ para obtener los parámetros del Modelo de Mínimos Cuadrados Generalizados con un rezago.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 4.35 & 13.89 & 11.31 \\ 1 & 4.36 & 13.94 & 11.39 \\ 1 & 4.32 & 13.98 & 11.43 \\ 1 & 4.46 & 14.02 & 11.45 \\ 1 & 4.41 & 14.04 & 11.48 \\ 1 & 4.35 & 14.08 & 11.52 \\ 1 & 4.22 & 14.02 & 11.60 \\ 1 & 4.19 & 14.07 & 11.63 \\ 1 & 4.21 & 14.13 & 11.70 \\ 1 & 4.18 & 14.18 & 11.77 \\ 1 & 4.15 & 14.22 & 11.82 \\ 1 & 4.20 & 14.28 & 11.88 \\ 1 & 4.19 & 11.95 & 11.95 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 11.39 \\ 11.43 \\ 11.45 \\ 11.48 \\ 11.52 \\ 11.60 \\ 11.63 \\ 11.70 \\ 11.77 \\ 11.82 \\ 11.88 \\ 11.95 \\ 11.96 \end{bmatrix}$$

$$\Omega^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -.32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -.32 & 1.10 & -.32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -.32 & 1.10 & -.32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.32 & 1.10 & -.32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -.32 & 1.10 & -.32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.32 & 1.10 & -.32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.32 & 1.10 & -.32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.32 & 1.10 & -.32 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.32 & 1.10 & -.32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.32 & 1.10 & -.32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.32 & 1.10 & -.32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.32 & 1.10 & -.32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.32 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(X\Omega^{-1}X\right) = \begin{bmatrix} 6.357 & 27.266 & 89.600 & 73.858 \\ 27.266 & 117.020 & 384.211 & 316.640 \\ 29.600 & 384.211 & 1262.829 & 1041.040 \\ 73.858 & 316.640 & 1041.040 & 858.824 \end{bmatrix}$$

$$\left(X\Omega^{-1}X\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 543.464 & -43.108 & -631.580 & 314.570 \\ -43.108 & 48.865 & -55.261 & 52.710 \\ -631.580 & -55.261 & 156.682 & -115.307 \\ 314.570 & 52.710 & -115.307 & 93.345 \end{bmatrix}$$

$$\left(X\Omega^{-1}Y\right) = \begin{bmatrix} 74.175 \\ 317.997 \\ 1045.502 \\ 861.955 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \left(X\Omega^{-1}X\right)^{-1}\left(X\Omega^{-1}Y\right) = \begin{bmatrix} -1.587 \\ -0.440 \\ 0.830 \\ 0.296 \end{bmatrix}$$

Estimación de la R^2 del Modelo 2

$$\hat{Y} = X\beta = \begin{bmatrix} 11.386 \\ 11.444 \\ 11.462 \\ 11.484 \\ 11.530 \\ 11.605 \\ 11.633 \\ 11.699 \\ 11.763 \\ 11.838 \\ 11.896 \\ 11.943 \\ 11.966 \end{bmatrix} \qquad e = \left(Y - \hat{Y}\right) = \begin{bmatrix} 0.0046 \\ -0.0132 \\ -0.0034 \\ 0.0036 \\ -0.0048 \\ -0.0018 \\ 0.0051 \\ 0.0086 \\ 0.0134 \\ -0.0095 \\ -0.0120 \\ 0.0095 \\ -0.0015 \end{bmatrix}$$

$$e'e = \left(Y - \hat{Y}\right)'\left(Y - \hat{Y}\right) = 0.000862$$

$$Y'Y = 1769.674$$

$$SCT = Y'Y - n\bar{Y}^2 = 0.490204$$

$$SCE = SCT - e'e = 0.489341$$

$$R^2 = \left(1 - \frac{e'e}{SCT}\right) = 0.9982$$

Estimación De la Matriz de Varianzas y Covarianzas

$$Var - Cov = \sigma^2\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} = \frac{\tilde{e}'\Psi^{-1}\tilde{e}}{T-K}\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.008E-05 & 3.299E-05 & -3.39E-05 & 2.78E-05 \\ 3.299E-05 & 0.0053 & -0.0065 & 0.0060 \\ -3.39E-05 & -0.0065 & 0.0090 & -0.0085 \\ 2.789E-05 & 0.0060 & -0.0085 & 0.0081 \end{bmatrix}$$

Proceso de Estimación <u>Modelo 4</u>

Se va a estimar $\tilde{\beta} = (X'\Psi^{-1}X)^{-1}X'\Psi^{-1}Y$ para obtener los parámetros del Modelo de Mínimos Cuadrados Generalizados con dos rezagos.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 4.36 & 13.94 & 11.39 & 11.31 \\ 1 & 4.32 & 13.98 & 11.43 & 11.39 \\ 1 & 4.46 & 14.02 & 11.45 & 11.43 \\ 1 & 4.41 & 14.04 & 11.48 & 11.45 \\ 1 & 4.35 & 14.08 & 11.52 & 11.48 \\ 1 & 4.22 & 14.02 & 11.60 & 11.52 \\ 1 & 4.19 & 14.07 & 11.63 & 11.60 \\ 1 & 4.21 & 14.13 & 11.70 & 11.63 \\ 1 & 4.18 & 14.18 & 11.77 & 11.70 \\ 1 & 4.15 & 14.22 & 11.82 & 11.77 \\ 1 & 4.20 & 14.28 & 11.88 & 11.82 \\ 1 & 4.19 & 14.28 & 11.95 & 11.88 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 11.31 \\ 11.39 \\ 11.43 \\ 11.45 \\ 11.48 \\ 11.52 \\ 11.60 \\ 11.63 \\ 11.70 \\ 11.77 \\ 11.82 \\ 11.88 \end{bmatrix}$$

$$\Psi^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -.206 & -.175 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -.206 & 1.04 & -.170 & -.175 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -.175 & -.170 & 1.04 & -.170 & -.175 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -.175 & -.170 & 1.04 & -.170 & -.175 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.175 & -.170 & 1.04 & -.170 & -.175 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -.175 & -.170 & 1.04 & -.170 & -.175 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.175 & -.170 & 1.04 & -.170 & -.175 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.175 & -.170 & 1.04 & -.170 & -.175 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.175 & -.170 & 1.04 & -.170 & -.175 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.175 & -.170 & 1.04 & -.170 & -. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.175 & -.170 & 1.04 & -. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.175 & -.206 & \end{bmatrix}$$

$$\left(X\Psi^{-1}X\right)=\begin{bmatrix} 5.029 & 21.556 & 70.970 & 58.566 & 58.288 \\ 21.556 & 92.477 & 304.151 & 250.928 & 249.747 \\ 70.970 & 304.151 & 1001.597 & 826.592 & 822.676 \\ 58.556 & 250.928 & 826.592 & 682.231 & 678.993 \\ 58.288 & 249.747 & 822.676 & 678.993 & 675.775 \end{bmatrix}$$

$$\left(X\Psi^{-1}X\right)^{-1}=\begin{bmatrix} 7234.390 & -84.658 & -827.854 & -363.413 & 780.247 \\ -84.658 & 52.707 & -57.258 & 74.435 & -17.262 \\ -827.854 & -57.258 & 193.114 & -44.037 & -98.279 \\ -363.413 & 74.435 & -44.037 & 356.627 & -300.878 \\ 780.241 & -17.262 & -98.279 & -300.878 & 361.036 \end{bmatrix}$$

$$\left(X\Psi^{-1}Y\right)=\begin{bmatrix} 58.795 \\ 251.906 \\ 829.827 \\ 684.898 \\ 681.649 \end{bmatrix}$$

$$\beta=\left(X\Psi^{-1}X\right)^{-1}\left(X\Psi^{-1}Y\right)=\begin{bmatrix} -1.424 \\ -0.404 \\ 0.735 \\ 0.249 \\ 0.135 \end{bmatrix}$$

Estimación de la R^2 del Modelo 4

$$\hat{Y} = X\beta = \begin{bmatrix} 11.436 \\ 11.461 \\ 11.485 \\ 11.530 \\ 11.601 \\ 11.631 \\ 11.701 \\ 11.761 \\ 11.836 \\ 11.896 \\ 11.944 \\ 11.971 \end{bmatrix} \qquad e = (Y - \hat{Y}) = \begin{bmatrix} -0.0052 \\ -0.0024 \\ 0.0026 \\ -0.0047 \\ 0.0025 \\ 0.0068 \\ 0.0072 \\ 0.0160 \\ -0.0074 \\ -0.0123 \\ 0.0090 \\ -0.0060 \end{bmatrix}$$

$$e'e = \left(Y - \hat{Y}\right)' \left(Y - \hat{Y}\right) = 0.000752$$

$$Y'Y = 1639.915$$

$$SCT = Y'Y - n\bar{Y}^2 = 0.408496$$

$$SCE = SCT - e'e = 0.407744$$

$$R^2 = \left(1 - \frac{e'e}{SCT}\right) = 0.9981$$

Estimación de la Matriz de Varianzas y Covarianzas

$$Var - Cov = \sigma^2 \left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} = \frac{\tilde{e}'\Psi^{-1}\tilde{e}}{T-K} \left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.252E-05 & 3.528 & -2.357E-10 & 0.0001 & -9.686E-05 \\ 3.528E-05 & 0.006 & -0.008 & 0.008 & -0.001 \\ -2.35E-05 & 0.008 & 0.011 & -0.010 & -0.009 \\ 0.0001 & 0.008 & -0.0103 & 0.0416 & -0.032 \\ -9.686 & -0.001 & -0.0009 & -0.032 & 0.034 \end{bmatrix}$$

Referencias

Allais, M. [1956] "Explication des Cycles Économique par un Modéle Non Linéaire a Régulation Retardeé," *Metronomica*, 4, pp. 4-83. 1956

Almon, S. [1965] "The distributed Lag between Capital Appropiations and Net Expenditures," *Econometrica*, January, pp. 178-196. 1965

Barro, R.J. [1969] "Inflation, the Payments Period, and the Demand for Money," Ph.D. dissertation Harvard University.1969

Berndt, E. R. [1996] *The Practice of Econometrics Classic and Contemporary*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading Massachusetts. 1996

Brown, T.M. [1952] "Habit Persistence and Lags in Consumer Behavior," *Econometrica*, 20, pp. 355-371.

Bryan, W.R. & W.T. Carleton [1967] "Short-Run Adjustments of and Individual Bank," *Econometrica*, 35, pp. 321-347. 1967

Cagan, P. [1956] "The Monetary Dynamics of Hyperinflation," in M. Friedman, ed., *Studies in Quantity Theory of Money*. Chicago: University of Chicago Press, pp. 23-117. 1956

Chow, G.C. [1957] *Demand for Automobiles in the United States*. Amsterdam: North Holland Publishing Co. 1957

DeLeeuw, F. [1962] "The Demand for Capital Goods by Manufacturers: A Study for Quarterly Time Series," *Econometrica*, 30, pp. 407-423. 1962

Dhrymes, P.J. [1969] "Efficient Estimation of Distributed Lags with Autocorrelated Error," *International Economic Review*, pp. 47-67. 1969

Dhrymes, P.J., L.R. Klein & k. Stiglitz [1970] "Estimation of Distributed Lags," *International Economics Review*, Juny, pp. 235-250. 1970

Dhrymes, J.P. [1981] *Distribuited Lags; Problems of Estimation and Formulation*, Second Edition, North-Holland, Netherlands. 1981

Fisher, I. [1937] "Note on a Short-Cut Meted for Calculating Distributed Lags," *International Statistical Institute Bulletin*, pp. 323-327. 1937

Fomby, T.B., R. Carter Hill & Stanley R. Johnson [1984] *Advanced Econometrics Methods*, pring-Verlag, New York. 1984

García, F. [2001] "Análisis de la Industria Eléctrica de México: Un Enfoque Regional". Monterrey, México. 2001

Gelling s, C. W. Editor [1996] *Demand Forecasting in the Electric Utility Industry*. Second Edition. PennWell Publishing Company. USA. 1996

Greene, W. H. [1998] *Análisis Econométrico*, Tercera Edición, Prentice Hall, España. 1998

Griliches, Z. [1967] "Distributed Lags: A Survey," E*conometrica*, 35, January, pp. 16-49. 1967

Gujarati, D. N. [1995] *Basic Econometrics*. Third Edition, McGraw-Hill International Editions, Singapore. 1995

Johnston, J. & John Dinardo [1997] Econometrics Methods, Fourth Edition, McGraw-Hill, Singapore.1977

Jorgenson, D.W. [1966] "Rational Distributed Lag Functions," *Econometrica*, 34, January, pp. 134-149. 1966

Kareken, J. & R.M. Solow [1963] "Lags in Monetary Policy," pp. 14-96 in Commission on Money and Credit, *Stabilization Policies*. Englewood Cliffs: Prentice Hall. 1963

Kmenta, J. [1990] *Elements of Econometrics*. Second Edition, Macmillan Publishing Company, Singapore. 1990

Koyck, L.M. [1954] *Distributed Lags and Investment Analysis*. Amsterdam: North Holland Publisihing Co.1954

Maddala, G.S & A.S. Rao [1971] "Maximum Likelihood Estimation of Solow's and Jorgenson's Distributed Lags," *The Review of Economics and Statistics*, February, pp. 80-88. 1971

Maddala, G.S. [1988] *Econometría*, McGraw-Hill, México. 1988

Maddala, G.S. & R.C. Vogel [1969] "Estimating Lagged Relationships in Corporate Demand for Liquid Assets," *Review of Economics and Statistics*, 51, pp. 53-61. 1969

Maeshiro, A. [1980] "Small Sample Properties of Estimators of Distributed Lag Models," *International Economic Review*, 21(3), October, pp 721-733.1980

Nerlove, M. [1956] "Estimate of the Elasticities of Supply of Selected Agricultural Commodities," *Journal of Farm Economics*, 38 (2). 1956

Nerlove, M. [1958] *Distributed Lags and Demand Analysis*, USDA, Agriculture Handbook No. 141, Washington. 1958

Nerlove, M. & F.V. Waugh [1968] "Advertising without Supply Control: Some Implications of a Study of the Advertising of Oranges," *Journal of Farm Economics*, 43, pp.813-837. 1968

Nerlove, M. [1972] "Lags in Economic Behavior," *Econometrica*, 40(2), March, pp. 221-251. 1972

Otero, J.M. [1993] *Econometría. Series de Tiempo y Predicción*. Editorial AC, España. 1993

Rao, P. & Z. Griliches [1969] "Small sample properties of several two-stage regression methods in the context of autocorrelated errors," *Journal of the American Statistical Association*, 64, pp. 253-272. 1969

Solow, R.M. [1960] "On a Family of Lag Distributions," *Econometrica*, April, pp. 393-406. 1960

Stone, R. & D.A. Rowe [1957] "The Market Demand for Durable Goods," *Econometrica*, 25, pp. 423-443. 1957

Tinbergen, J. [1939] *Statistical Testing of Business Cycle Theories, vol. II: Business Cycle in the United States of America 1919-1932*. Ginebre, League of Nations. 1939

Tobin, J. & C. Swan [1969] "Monetary Theory, Money and Permanent Income: Some Empirical Tests," *American Economic Review*, 59, pp. 285-295. 1969

Wu, D.M. [1965] "An Empirical Analysis of Household Duable Goods Expenditure," *Econometrica*, 33, pp. 761-780. 1965

Zellner, A. [1957] "The Short-Run Consumption Function," *Econometrica*, 25, pp. 552-566. 1957