

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Campus Monterrey

División de Electrónica, Computación, Información y
Comunicaciones

Programa de Graduados



Diseño del perfil de permitividad de una guía de onda
dieléctrica plana
mediante el método de *inverse scattering*.

TESIS

Presentada como requisito parcial para obtener el grado académico de

Maestro en Ciencias en Ingeniería Electrónica
especialidad en
Telecomunicaciones

por

Ing. Roberto David Rodríguez Said

Monterrey, N.L., Julio de 2004

© Roberto David Rodríguez Said, 2004

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Campus Monterrey

División de Electrónica, Computación, Información y
Comunicaciones

Programa de Graduados

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la presente tesis de Roberto David Rodríguez Said sea aceptada como requisito parcial para obtener el grado académico de **Maestro en Ciencias en Ingeniería Electrónica**, especialidad en:

Telecomunicaciones

Comité de tesis:

Dr. Ramón M. Rodríguez Dagnino

Asesor de la tesis

Dr. Gabriel Campuzano Treviño

Sinodal

Dr. Raúl Rodríguez Miranda

Sinodal

Dr. David Garza Salazar

Director del Programa de Graduados

Julio de 2004

**Diseño del perfil de permitividad de una guía de
onda
dieléctrica plana no-homogénea por el método de
inverse scattering.**

por

Ing. Roberto David Rodríguez Said

Tesis

Presentada al Programa de Graduados en Electrónica, Computación, Información y
Comunicaciones

como requisito parcial para obtener el grado académico de

Maestro en Ciencias en Ingeniería Electrónica

especialidad en

Telecomunicaciones

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Campus Monterrey

Julio de 2004

A mi amada esposa, Jessi, la persona que mejor me entiende en este mundo y mi inspiración en todo momento. Por compartir mis preocupaciones, mis sueños, mis desvelos, y mis anhelos, Jessi, este trabajo es tan tuyo como mío.

A mis padres, Dr. Roberto Rodriguez y Dra. Ma. del Carmen Said, por el enorme impulso que me han dado y por ayudar a forjar mi carácter, mi eterno respeto, mi admiración y parte de este trabajo también les pertenece.

Reconocimientos

Gracias a mi asesor el Dr. Ramón M. Rodríguez Dagnino por compartir parte de su experiencia, por su paciencia, su disposición y la invaluable guía que me ha brindado.

Gracias a mis sinodales, Dr. Gabriel Campuzano Treviño y Dr. Raúl Rodríguez Miranda por disposición, su tiempo y sus acertados comentarios.

Gracias al Dr. Graciano Dieck Assad y al Depto. de Ing. Eléctrica por brindarme la oportunidad y la experiencia inolvidable de colaborar como asistente de docencia dentro del Laboratorio de Sistemas de Comunicaciones.

Gracias a mis hermanos Minerva y Alejandro por su enorme apoyo en todo momento.

Gracias a los diferentes maestros que he tenido en todo este tiempo que han dejado en mí mucho más de lo que se puede explicar en un pizarrón.

ROBERTO DAVID RODRÍGUEZ SAID

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Julio 2004

Diseño del perfil de permitividad de una guía de
onda
dieléctrica plana no-homogénea por el método de
inverse scattering.

Roberto David Rodríguez Said, M.C.
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, 2004

Asesor de la tesis: Dr. Ramón M. Rodríguez Dagnino

En este trabajo se lleva a cabo la implementación de un método numérico capaz de realizar la operación de *inverse scattering* orientada al diseño del perfil de permitividad de una guía de onda dieléctrica plana con un determinado coeficiente de reflexión transversal. Este último con la información sobre los modos de propagación que se desean tener en la guía.

Índice general

Reconocimientos	VI
Resumen	VII
Índice de figuras	x
Capítulo 1. Introducción	1
Capítulo 2. Problema de <i>scattering</i> e <i>inverse scattering</i>	4
2.1. Problema de <i>scattering</i>	4
2.1.1. Ejemplo	7
2.2. Problema de <i>inverse scattering</i>	9
2.3. Transformada de <i>inverse scattering</i>	13
2.3.1. Evolución de los parámetros de <i>scattering</i>	14
2.3.2. Ejemplo: Solución tipo solitón de la KdV	17
Capítulo 3. Modos de propagación y parámetros de <i>scattering</i>	19
3.1. Guía de onda y el problema de <i>scattering</i>	19
3.2. <i>Inverse scattering</i> , $b(k) = 0$	23
3.3. Modos de propagación y el coeficiente de reflexión	23
3.3.1. k_x real	26
3.3.2. k_x puramente imaginario.	27
3.3.3. k_x con parte real e imaginaria	27
3.4. <i>Inverse scattering</i> $b(k) \neq 0$	28
3.4.1. Diseño a partir del coeficiente de reflexión	30
Capítulo 4. Método numérico y resultados	34
4.1. Escenario	34
4.2. Discretización de la ecuación G-L-M y Método Numérico	36
4.2.1. Esquema de Iteración con Relajación	36
4.2.2. Valores Iniciales para $K(x, t)$	38
4.3. Reconstrucción del Potencial	39

4.4. Ejemplo 1	40
4.5. Ejemplo 2	40
Capítulo 5. Conclusiones	45
Bibliografía	47
Vita	49

Índice de figuras

2.1. Representación de la dispersión debida a un potencial	6
2.2. Transformada de <i>inverse scattering</i>	14
3.1. Perfil de permitividad de la guía de onda plana.	21
3.2. <i>Scattering</i> en la guía de onda homogénea.	24
3.3. Propagación en tres regiones.	25
3.4. Lugar de los polos del índice de reflexión.	31
4.1. Rotación de los ejes x,t discretizados.	37
4.2. Ejemplo 1.	41
4.3. Ejemplo 2.	43

Capítulo 1

Introducción

La solución del problema de *scattering* e *inverse scattering*, es decir, la *transformada de inverse scattering* y los métodos generalizados han demostrado tener diferentes aplicaciones. Una de las más importantes y estudiadas es la solución de ecuaciones no lineales como la ecuación Korteweg-de Vries (KdV), la sine-Gordon y la ecuación no lineal de Schrödinger. Se mostrará un problema clásico de *scattering* e *inverse scattering* explicando la obtención de la solución tipo solitón de la KdV para dar una introducción a la filosofía detrás de este método.

Así mismo, se mostrará más adelante que el problema de *scattering* plantea ondas propagándose en diferentes direcciones afectadas por coeficientes de *reflexión* y de *transmisión*. Estas ondas viajeras tienen lugar a partir de una onda incidente que tiene contacto con un medio que provoca la dispersión (*scattering*). En este trabajo se muestra la forma en la que estas ondas se pueden asociar con el problema de funciones propias de Sturm-Liouville, y así, se puede convertir un problema de *scattering* en un problema de obtención de valores y funciones propias a partir de una función de potencial. La función de potencial se puede relacionar con las propiedades de un medio de dispersión ó con otras circunstancias como se verá más adelante. En este escenario los coeficientes de transmisión y reflexión están relacionados con los comportamientos asintóticos de estas funciones propias correspondientes a la forma de onda viajera. La solución de este problema de *scattering* se completa obteniendo la expresión de estos coeficientes llamados parámetros de *scattering*.

Por otro lado, en el problema de *inverse scattering* se plantea la situación opuesta. Lo que se desea obtener es una función de potencial con base en los parámetros de *scattering*. En este trabajo el papel central como parámetro de *scattering* lo juega el coeficiente de reflexión. No sólo en la aplicación de este trabajo sino en diferentes aplicaciones es muy útil conocer las propiedades de un medio con base en lo que el mismo medio "nos regresa". Se puede pensar entonces que este proceso puede ayudar para desarrollar aplicaciones involucrando mediciones remotas. En realidad, ésta última es una de las diferentes aplicaciones que se le ha dado al *inverse scattering*. Resolver este problema puede tornarse bastante complicado. De hecho, sólo se conocen soluciones al problema *inverse scattering* para algunas formas del coeficiente de reflexión. Entre

estas soluciones conocidas se encuentran las soluciones para cuando el coeficiente de reflexión es igual a cero y para cuando el coeficiente de reflexión tiene una forma racional, así como algunas otras soluciones derivadas de estas mismas. En este trabajo se presentarán de forma general éstos dos casos principales.

Aprovechando este panorama de *scattering-inverse scattering*, se explicará un ejemplo en el que se aplique la transformada de *inverse scattering* para encontrar la solución de la ecuación no lineal KdV. Específicamente se tratará la solución tipo solitón que tiene esta ecuación. La filosofía detrás de la transformada de *inverse scattering* involucra primero la solución del problema de *scattering* para un perfil inicial de la función de potencial obteniendo así parámetros de *scattering* que dependen de la variable de dispersión k . Más adelante, estos parámetros son *evolucionados* en el tiempo. A lo que se refiere este término es que se le agrega la dependencia del tiempo a los parámetros de *scattering* con ayuda de la ecuación no lineal. Es por esto último que tanto a la ecuación KdV como a otras ecuaciones de su tipo se les llama en ocasiones *ecuaciones no lineales de evolución*. Con los parámetros evolucionados se resuelve el problema de *inverse scattering* y se obtiene el perfil de la función de potencial para cualquier tiempo.

Para la aplicación específica de este trabajo sólo es necesario resolver el problema de *inverse scattering*. No es necesario obtener un coeficiente de reflexión ya que éste se escoge dependiendo de los modos de propagación que se deseen tener dentro de la guía de onda. Por lo tanto, no es necesario resolver el problema de *scattering*. Sin embargo, es necesario conocer la filosofía detrás de ambos problemas para entender a fondo lo que se obtiene al resolver el *inverse scattering*.

En este trabajo se mostrará la forma en que la condición de guía esta ligada al coeficiente de reflexión transversal de un perfil dieléctrico. De hecho, se verá que la condición de guía, también conocida como una condición de oscilación, es la misma que la condición de los polos del coeficiente de reflexión transversal que depende de la variable de dispersión k . Se verá también que, de acuerdo a ciertas relaciones de dispersión en las fronteras del perfil, la variable de dispersión sólo puede ser solución de la condición de polo del coeficiente de reflexión si esta se encuentra en ciertas regiones del plano complejo. Específicamente, sólo si k se encuentra sobre el eje positivo imaginario ó si se encuentra en la parte inferior del plano complejo ($\text{Im}\{k\} < 0$), puede ser solución de la condición de polos del coeficiente de reflexión. Se observará que un polo como el del primer caso se traduce en una onda guiada, mientras que el segundo caso se traduce en una onda que se desvanece en la dirección de propagación.

Sabiendo esto, es posible diseñar una guía de onda con base en un coeficiente de reflexión con polos colocados intencionalmente para obtener ciertas propiedades de propagación. Aplicando el planteamiento del problema de *inverse scattering* se puede obtener una función de potencial que se relacione con las propiedades de dispersión del medio. En este caso, estas propiedades de dispersión se relacionan con el perfil de

permitividad de la guía de onda plana.

Capítulo 2

Problema de *scattering* e *inverse scattering*

2.1. Problema de *scattering*

Se puede ejemplificar el problema clásico de *scattering* explicando la forma en la que aplica a la siguiente ecuación

$$\psi_{xx} + (\lambda - u)\psi = 0. \quad (2.1)$$

El desarrollo gira en torno al problema de Sturm-Liouville (S-L) para esta ecuación donde $\psi(x; \lambda)$ es una función acotada y donde se dice que la función $u(x)$ es una función de potencial. A esta ecuación se le conoce como la ecuación de Schrödinger en una dimensión.

El problema de Sturm-Liouville plantea la obtención de los valores propios para el parámetro λ , así como sus correspondientes funciones propias $\psi(x; \lambda)$. Es decir, a cada función propia $\psi(x; \lambda)$ que puede ser solución de esta ecuación $S - L$ corresponde un valor de λ que hace que se satisfaga la ecuación (2.1).

Las funciones propias tienen la forma de ondas propagándose en las direcciones $x \rightarrow \pm\infty$. En este contexto se puede plantear un problema de *scattering* que es el mismo que el problema de valores y funciones propias de la ecuación (2.1), donde las ondas propagándose en las diferentes direcciones corresponden a las ondas dispersadas en una frontera a partir de una onda incidente.

Con el fin de que exista una solución apropiada para $\psi_{xx} + (\lambda - u)\psi = 0$, es necesario que $u(x)$ sea integrable [1], es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)| dx < \infty.$$

De hecho, $u(x)$ debe caer lo suficientemente rápido como para satisfacer las condiciones de Fadeev (Fadeev 1958), es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)|u(x)| dx < \infty$$

El espectro de valores que λ puede tomar está compuesto por dos tipos correspondientes a los valores de $\lambda > 0$ y los valores correspondientes a $\lambda \leq 0$. Se dice que los primeros pertenecen al espectro continuo de valores propios, mientras que los segundos pertenecen al espectro discreto de valores propios.

De igual forma pueden existir dos tipos de funciones propias que pueden ser caracterizadas por su comportamiento cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Debido a que $u \rightarrow 0$ con esta circunstancia, la ecuación de Sturm-Liouville se convierte en

$$\psi_{xx} \sim -\lambda\psi.$$

Así, para $\lambda > 0$ la función es, asintóticamente, una combinación lineal de $\exp(\pm i\lambda^{1/2}x)$. Por otro lado, si $\lambda < 0$, la función propia involucrará ya sea crecimiento exponencial, decaimiento exponencial, o ambos. En general, esta solución puede tomar la siguiente forma:

$$\psi(x) \sim \beta e^{-\lambda^{1/2}x} + \gamma e^{(-\lambda)^{1/2}x}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

donde β y γ son constantes. Sin embargo, esta solución sólo está acotada para valores de $\beta = 0$. Como se mencionó, los valores de λ para los cuales esto se cumple, constituyen el espectro discreto. De la misma forma, el comportamiento de la función propia en el caso de $x \rightarrow \infty$ también debe tener el mismo tipo de caída exponencial.

Las funciones que son acotadas y decaen exponencialmente para $x \rightarrow \pm\infty$ son integrables en varios sentidos, por ejemplo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx < \infty.$$

Sin embargo, las funciones propias asociadas al espectro continuo no son cuadráticamente integrables, aunque éstas sean funciones acotadas [1].

Se puede definir $\kappa_n = (-\lambda)^{1/2}$, para cada valor propio discreto ($n = 1, 2, \dots, N$) y ordenando estos valores de acuerdo a la convención $\kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_N$, la solución acotada será caracterizada por su comportamiento en $+\infty$ de la siguiente forma

$$\psi(x) \sim c_n \exp(-\kappa_n x), \quad x \rightarrow \infty \tag{2.2}$$

donde con el subíndice n se numera cada una de las funciones propias. La constante c_n se agrega para cumplir con la normalización de la integral cuadrática de la siguiente forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1. \tag{2.3}$$

En el caso del espectro continuo se puede escribir $\sqrt{\lambda} = k$ y definir la solución que es una combinación lineal de dos comportamientos oscilatorios en infinito.

$$\hat{\psi}(x; k) \sim \begin{cases} e^{-ikx} + b e^{ikx} & , \quad x \rightarrow +\infty \\ a e^{-ikx} & , \quad x \rightarrow -\infty. \end{cases} \tag{2.4}$$

Las constantes c_n , $b(k)$ y $a(k)$ pueden ser determinadas de forma única para una determinada función de potencial $u(x)$. La figura 2.1 muestra la interpretación gráfica de la función propia asociada con el espectro continuo. Las funciones propias del espectro continuo son comúnmente interpretadas como una onda incidente proveniente de $+\infty$ (e^{-ikx}), junto con una onda reflejada hacia $+\infty$ (be^{ikx}) y una onda transmitida desde $+\infty$ hacia $-\infty$ (ae^{-ikx}). Por lo tanto, las constantes a y b son usualmente referidas como coeficientes de transmisión y reflexión.

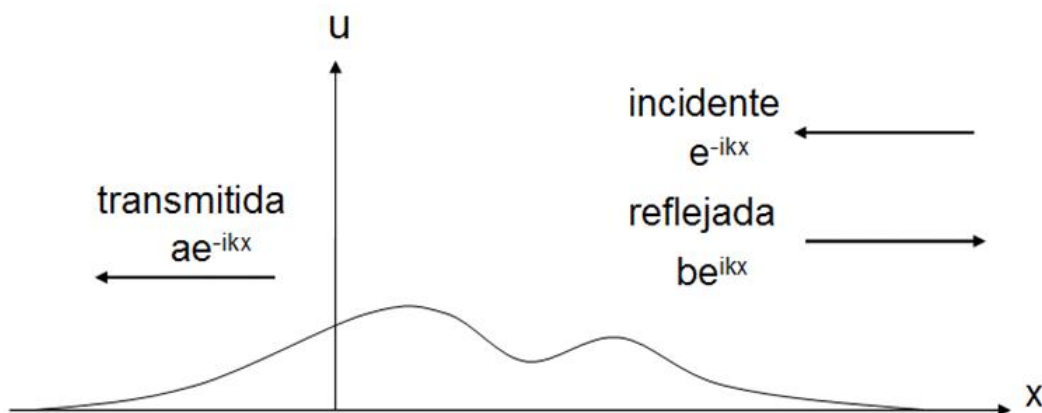


Figura 2.1: Representación de la dispersión debida a un potencial

Si se toman en cuenta las ecuaciones de dos funciones propias para diferentes valores del espectro discreto de la misma función de potencial de la forma

$$\psi_m'' - (k_m^2 + u)\psi_m$$

y

$$\psi_n'' - (\kappa_n^2 + u)\psi_n, \quad (2.5)$$

se puede llegar a la expresión

$$\frac{d}{dx}W(\psi_m, \psi_n) = (\kappa_n^2 - k_m^2)\psi_n\psi_m = \psi_m\psi_n'' - \psi_n\psi_m'',$$

donde W es el operador Wronskiano definido por $W(\alpha, \beta) = \alpha\beta' - \beta\alpha'$. La integración de la ecuación (2.5) da como resultado

$$[W(\psi_m, \psi_n)]_{-\infty}^{\infty} = (\kappa_n^2 - k_m^2) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n\psi_m dx.$$

Debido a que $\psi_m, \psi_n \rightarrow 0$ conforme $x \rightarrow \pm\infty$, la parte que involucra al Wronskiano evaluado se hace cero y se obtiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n\psi_m dx = 0, \quad (m \neq n).$$

Es decir, las funciones ψ_m y ψ_n son ortogonales. En cuanto al espectro continuo si se toma el Wronskiano de la función propia definida por la ecuación (2.4) como se muestra

$$W(\hat{\psi}, \hat{\psi}^*) = 2ikaa^* = 2ik(1 - bb^*),$$

se puede obtener

$$|a|^2 + |b|^2 = 1,$$

lo cual nos indica la relación de conservación de energía en el *scattering*.

2.1.1. Ejemplo

Se puede mostrar la solución de un problema de *scattering* mediante un ejemplo con una función de potencial

$$u(x) = -U_0 \operatorname{sech}^2 x$$

donde U_0 es una constante. De esta forma, la ecuación de Sturm-Liouville es ahora

$$\psi'' + (\lambda + U_0 \operatorname{sech}^2 x)\psi = 0.$$

Se usa la transformación de $T = \tanh x$ de tal forma que $-1 < T < 1$ para $-\infty < x < \infty$. Con este cambio de variable, el operador d/dx ahora se define como

$$\frac{d}{dx} \equiv \operatorname{sech}^2 x \frac{d}{dT} = (1 - T^2) \frac{d}{dT}.$$

La ecuación de Sturm-Liouville se escribe entonces

$$(1 - T^2) \frac{d}{dT} \left\{ (1 - T^2) \frac{d\psi}{dT} \right\} + \{\lambda + U_0(1 - T^2)\}\psi = 0$$

ó

$$\frac{d}{dT} \left\{ (1 - T^2) \frac{d\psi}{dT} \right\} + \left(U_0 + \frac{\lambda}{(1 - T^2)} \right) \psi = 0. \quad (2.6)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación asociada de Legendre. Si se supone $U_0 = N(N + 1)$, donde N es un entero positivo, considerando el espectro discreto y considerando $\lambda = k^2$, las soluciones para κ_n son $\kappa_n = n$ donde $n = 1, 2, 3, \dots, N$. Por otro lado, las soluciones para ψ_n son proporcionales a las funciones asociadas de Legendre, $P_N^n(T)$, donde

$$P_N^n(T) = (-1)^n (1 - T^2)^{n/2} \frac{d^n}{dT^n} P_N(T),$$

y

$$P_N(T) = \frac{1}{N! 2^N} \frac{d^N}{dT^N} (T^2 - 1)^N.$$

A la función $P_N(T)$ se le conoce como la función de Legendre de orden N . En este caso la constante $U_0 = N(N + 1)$, y si suponemos una función de potencial donde $U_0 = 2$, entonces

$$u(x) = 6\text{sech}^2 x.$$

Dado que $U_0 = N(N + 1) = 6$, $N = 2$. Entonces se tiene que los posibles valores propios del espectro discreto son: $\kappa_n = 1, 2$. Corresponden a estos valores propios las funciones propias

$$\psi_1(x) \propto P_2^1(\tanh x) = -3\tanh x \text{sech } x$$

y

$$\psi_2(x) \propto P_2^2(\tanh x) = 3\text{sech}^3 x,$$

dado que $P_2(T) = \frac{1}{2}(3T^2 - 1)$. Ahora, para cumplir con la normalización (2.3) se agrega una constante de normalización de acuerdo a la ecuación (2.2), y se obtiene

$$\psi_1(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \tanh x \text{sech } x$$

así como,

$$\psi_2(x) = \frac{3^{1/2}}{2} \text{sech}^2 x,$$

correspondientes a los valores propios $\lambda = -1, -4$. En el caso del espectro continuo ($\lambda = \kappa_n^2 > 0$) la solución de la ecuación (2.6) conforme $x \rightarrow -\infty$ puede ser escrita como

$$\hat{\psi}(x; k) = a(k)2^{ik}(\text{sech } x)^{-ik} F(\tilde{a}, \tilde{b}; \tilde{c}; (1 + T)/2),$$

donde $\tilde{a} = \frac{1}{2} - ik + (U_0 + \frac{1}{4})^{1/2}$, $\tilde{b} = \frac{1}{2} - ik - (U_0 + 1/4)^{1/2}$ y $\tilde{c} = 1 - ik$. $F(\tilde{a}, \tilde{b}; \tilde{c}; z)$ es la función hipergeométrica para la cual $z \rightarrow 0^+$ corresponde a $x \rightarrow +\infty$, y $z \rightarrow 1^-$ corresponde a $x \rightarrow -\infty$, siendo $z = \frac{1}{2}(1 + T)$ [1].

Esta solución presenta el comportamiento

$$\hat{\psi} \sim a(k)e^{-ikx}, \quad x \rightarrow -\infty.$$

Así mismo se sabe que el comportamiento cuando $x \rightarrow \infty$ es

$$\hat{\psi} \sim \frac{a\Gamma(\tilde{c})\Gamma(\tilde{a} + \tilde{b} - \tilde{c})}{\Gamma(\tilde{a})\Gamma(\tilde{b})} e^{-ikx} + \frac{a\Gamma(\tilde{c})\Gamma(\tilde{c} - \tilde{a} - \tilde{b})}{\Gamma(\tilde{c} - \tilde{a})\Gamma(\tilde{c} - \tilde{b})} e^{ikx}.$$

Comparando esto con la condición (2.4) se pueden determinar completamente los coeficientes de *scattering* obteniéndose

$$a(k) = \frac{\Gamma(\tilde{a})\Gamma(\tilde{b})}{\Gamma(\tilde{c})\Gamma(\tilde{a} + \tilde{b} - \tilde{c})},$$

así como,

$$b(k) = \frac{a(k)\Gamma(\tilde{c})\Gamma(\tilde{c} - \tilde{a} - \tilde{b})}{\Gamma(\tilde{c} - \tilde{a})\Gamma(\tilde{c} - \tilde{b})}.$$

Para este caso de $U_0 = N(N + 1)$ se puede demostrar haciendo uso de algunas propiedades de las funciones gama que el coeficiente de reflexión es igual a 0. Primero, se recuerda que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + z\right) = \pi / \cos \pi z.$$

Con esto se puede obtener que, dentro de la expresión de $b(k)$,

$$\Gamma(\tilde{c} - \tilde{a})\Gamma(\tilde{c} - \tilde{b}) = \Gamma\left\{\frac{1}{2} - \left(U_0 + \frac{1}{2}\right)^{1/2}\right\}\Gamma\left\{\frac{1}{2} + \left(U_0 + \frac{1}{2}\right)^{1/2}\right\} = \pi / \cos\left\{\pi\left(U_0 + \frac{1}{4}\right)^{1/2}\right\}.$$

Entonces en el caso de

$$\left(U_0 + \frac{1}{4}\right)^{1/2} = N + \frac{1}{2},$$

es decir,

$$U_0 = N(N + 1),$$

el denominador de la expresión del coeficiente de reflexión se hace infinito y $b(k)=0$.

2.2. Problema de *inverse scattering*

El problema de *inverse scattering* puede definirse como la obtención del potencial $u(x)$ a partir de los parámetros de *scattering* (c_n , $a(k)$ y $b(k)$). Se hará un enfoque al caso de la ecuación relacionada con el problema de Sturm- Liouville

$$\psi_{xx} + (k^2 - u)\psi = 0$$

con $\lambda = k^2$, es decir, se considera el caso del espectro continuo y se buscarán soluciones del tipo $\psi \sim e^{ikx}$ conforme $x \rightarrow +\infty$. A éstas se les conoce como las soluciones de Jost para el caso de una k real.

Se supone que la solución tiene la forma de

$$\psi_+(x; k) = e^{ikx} + \int_x^\infty K(x, z)e^{ikz} dz. \quad (2.7)$$

En este caso el subíndice + denota que es una solución que satisface la condición (2.4) cuando $x \rightarrow +\infty$. Derivando esta ecuación mediante la propiedad de Leibniz se puede obtener

$$\psi_{+xx} = e^{ikx} \left(-k^2 - \frac{d\hat{K}}{dx} - ik\hat{K} - \hat{K}_x \right) - \int_x^\infty K_{xx}e^{ikz} dz,$$

donde $\hat{K} = K(x, x)$. El subíndice denota una derivada parcial y el operador d/dx denota una derivada total. Es decir, $d\hat{K}/dx = \hat{K}_x + \hat{K}_z$, donde el circunflejo sobre la derivada parcial indica evaluación en $z = x$. Así también ψ_+ puede ser escrita convenientemente como

$$\psi_+ = e^{ikx} \left(1 + \frac{i\hat{K}}{k} - \frac{\hat{K}_z}{k^2} \right) - \frac{1}{k^2} \int_x^\infty K_{zz} e^{ikz} dz.$$

Después de integrar por partes dos veces, dado que ambas funciones,

$$K(x, z), K_z(x, z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow +\infty.$$

La ecuación de Sturm- Liouville ahora se convierte en

$$\begin{aligned} 0 &= \psi_{+xx} + (k^2 - u)\psi_+ \\ &= -e^{ikx} \left(u + 2\frac{\hat{K}}{dx} \right) + \int_x^\infty (K_{xx} - K_{zz} - u(x)K) e^{ikz} dz, \end{aligned}$$

la cual se satisface si

$$K_{xx} - K_{zz} - u(x)K = 0, \quad z > x$$

y

$$u(x) = -2\frac{d\hat{K}}{dx} = -2K_x(x, x) + K_z(x, x). \quad (2.8)$$

Junto con las condiciones

$$K(x, z), K_z(x, z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow +\infty$$

quedan definidas las propiedades de $K(x, z)$.

La idea a seguir de ahora en adelante es obtener esta función $K(x, z)$ (que puede determinar la función de potencial $u(x)$) a partir de los parámetros de *scattering*. Se puede ver que la función K no depende de k directamente y por lo tanto, el sentido de transformada se puede comenzar a apreciar. De hecho, a partir de la definición de $K(x, z)$ (2.7), se podría decir que ψ_+ es equivalente a la transformada de Fourier de $\delta(x - z) + K(x, z)$.

Es posible construir la función propia para el espectro continuo que satisfaga las condiciones (2.4) escribiendo lo siguiente:

$$\hat{\psi} = \psi_+^* + b(k)\psi_+. \quad (2.9)$$

Esta expresión satisface el comportamiento de $\hat{\psi}$ conforme $x \rightarrow +\infty$. De igual forma se podría desarrollar el comportamiento para el caso de $x \rightarrow -\infty$ alterando adecuadamente la ecuación (2.7) y utilizando el comportamiento conforme $x \rightarrow -\infty$ descrito por (2.4). Entonces, a partir de la ecuación (2.9) y la ecuación (2.7) se obtiene

$$\hat{\psi}(x; k) = e^{-ikx} + b(k)e^{ikx} + \int_{-\infty}^\infty K(x, z)e^{-ikz} dz + b(k) \int_{-\infty}^\infty K(x, z)e^{ikz} dz.$$

Debido a que $K(x, z) = 0$ para $z < x$. Después de reorganizar esta ecuación se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x, z)e^{-ikz} dz = \hat{\psi} - e^{-ikx} - b(k)e^{ikx} - b(k) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, z)e^{ikz} dz.$$

Se pueden invertir ambos lados en el sentido de transformada para obtener

$$K(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \hat{\psi}(x; k) - e^{-ikx} - b(k)e^{ikx} - b(k) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y)e^{iky} dy \right\} e^{ikz} dk, \quad (2.10)$$

donde y ha sido reemplazada por z como la variable de integración interna. Hay que notar que aquí se cuenta con las relaciones de simetría

$$\psi(x; k) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, z)e^{ikz} dz,$$

$$\psi(x; -k) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, z)e^{-ikz} dz$$

y

$$K(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x; k)e^{-ikz} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x; -k)e^{ikz} dk.$$

Ahora se puede definir una función F de la forma

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k)e^{ikx} dk, \quad (2.11)$$

que es una integral a lo largo del eje real k . En la ausencia de valores propios del espectro continuo, $b(k)$ es una función entera. Utilizando las ecuaciones (2.10) y (2.11) e intercambiando el orden de integración de la integral doble se obtiene

$$K(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\psi} - e^{-ikx})e^{ikz} dk - F(x+z) - \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y)F(y+z) dy. \quad (2.12)$$

Es posible evaluar la primera integral del lado derecho de la igualdad sabiendo que $\hat{\psi}e^{ikx} \rightarrow 1$ conforme $|k| \rightarrow \infty$. Esto es porque, como se puede demostrar, $|a| \rightarrow 1$ en el mismo límite. Entonces, utilizando un contorno C que cubra la parte superior del plano complejo k ($\text{Im}(k)$) con un radio $R \rightarrow \infty$, el teorema de Cauchy permite obtener el resultado

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\psi} - e^{-ikx})e^{ikz} dz = 0$$

y así se tiene que

$$K(x, z) + F(x+z) + \int_x^{\infty} K(x, y)F(y+z) dy = 0, \quad z > x > -\infty.$$

Esta es la llamada ecuación Gel'fand-Levitan ó, escrita de esta forma, la ecuación de Marchenko.

Ahora se puede atender el caso del espectro discreto. Se puede confirmar que la formulación de la ecuación (2.12) mantiene su forma si k es ahora una variable compleja.

Esto aunque $F(x)$ siga siendo una integral a lo largo del eje real. La diferencia aparece al evaluar la integral conteniendo $\hat{\psi}$. La expresión

$$(\hat{\psi}e^{ikx} - 1)e^{ik(z-x)} = (\hat{\psi} - e^{-ikx})e^{ikz}$$

ahora cuenta con polos en la parte superior del plano complejo. Éstos corresponden a los polos de $a(k)$. Entonces, según el teorema de los residuos se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\psi} - e^{ikz})e^{ikz} dz = 2\pi i \sum_{n=1}^N R_n, \quad (2.13)$$

donde R_n es el residuo de $\hat{\psi}e^{ikz}$ en $k = \kappa_n$. Con el fin de obtener R_n es necesario introducir la otra solución de Jost y utilizar algunas identidades involucrando Wronskianos. Después de este procedimiento es posible obtener que

$$R_n = ic_n^2 \psi_+(x; i\kappa_n) \exp(-\kappa_n z).$$

Utilizando entonces las ecuaciones (2.13) y (2.7) para tener una expresión para $\psi_+(x; i\kappa_n)$ se llega a que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\psi} - e^{ikx})e^{ikz} dz = -2\pi \sum_{n=1}^N c_n^2 \exp(-\kappa_n z) \left\{ \exp(-\kappa_n x) + \int_x^{\infty} K(x, y) \exp(-\kappa_n y) dy \right\},$$

donde la variable de integración del lado derecho ha sido reemplazada por y para evitar una confusión. Si se utiliza esta expresión dentro de la ecuación (2.12) se obtiene nuevamente la ecuación de Marchenko

$$K(x, z) + F(x+z) + \int_x^{\infty} K(x, y)F(y+z) dy = 0, \quad (2.14)$$

si se redefine F de la forma

$$F(X) = \sum_{n=1}^N c_n^2 \exp(-\kappa_n X) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k)e^{ikX} dk,$$

de la cual se puede recuperar (2.11), si no existe un espectro discreto ($c_n = 0, n = 1, 2, \dots, N$).

De esta forma se muestra que es posible recuperar la función de $u(x)$ a partir de los parámetros de *scattering* ($b(k)$, c_n y $-\kappa_n$) mediante este proceso de *inverse scattering*. Los parámetros de *scattering* determinan $F(X)$ y la solución de la ecuación de Marchenko, K , como se vió, determina la función de potencial $u(x)$. Entonces, la esencia del método de *inverse scattering* en este caso radica en la solución de la ecuación (2.14).

Se verá más adelante que para casos en los que el coeficiente de reflexión, $b(k) = 0$, se puede llegar a una solución analítica de la ecuación de Marchenko. Sin embargo, se torna especialmente complicado encontrar su solución para casos en los que $b(k) \neq 0$. Para estos casos a veces es necesario reformular el problema de *inverse scattering* para encontrar una ecuación equivalente a (2.14) que pueda determinar la función de potencial.

2.3. Transformada de *inverse scattering*

En este punto se puede aprovechar el preámbulo de la solución de los problemas de *scattering* e *inverse scattering* para mostrar cómo pueden operar en conjunto dentro de la llamada *transformada de inverse scattering*.

Primero, es conveniente hacer una recapitulación de los resultados importantes mostrados hasta el momento. Se comenzó presentando el problema de *scattering* de la ecuación tipo Sturm-Liouville.

$$\psi_{xx} + (\lambda - u)\psi = 0.$$

Después se presentaron los comportamientos asintóticos correspondientes a las funciones propias del espectro continuo ($\lambda > 0$, $k = \lambda^{1/2}$),

$$\hat{\psi}(x; k) \sim \begin{cases} e^{-ikx} + b(k)e^{ikx} & , x \rightarrow +\infty \\ a(k)e^{-ikx} & , x \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Para el caso del espectro discreto ($\lambda < 0$ con $\kappa_n = (-\lambda)^{1/2}$) también se mostró que el comportamiento asintótico de las funciones propias correspondientes tiene la forma

$$\psi_n(x) \sim c_n \exp(-\kappa_n x), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Se mostró que

$$u(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x),$$

donde $K(x, z)$ es la solución de la ecuación de Marchenko

$$K(x, z) + F(x + z) + \int_x^\infty K(x, y)F(y + z) dy = 0$$

y F esta definida como

$$F(X) = \sum_{n=1}^N c_n^2 \exp(-\kappa_n X) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty b(k)e^{ikX} dk. \quad (2.15)$$

El procedimiento a seguir para la solución de problemas mediante la transformada de *inverse scattering* es el que muestra la figura 2.2.

Es necesario partir de un perfil inicial, dígase $u(x, t = 0)$. De esta función de x se obtienen parámetros de *scattering*, de igual forma para $t = 0$ ($S(0)$), mediante la solución del problema de *scattering*. Más tarde se lleva a cabo un proceso mediante el cual, se deduce la dependencia del tiempo a los parámetros de *scattering* y se dice que los parámetros son evolucionados en el tiempo. De esta forma se obtienen parámetros de *scattering* que pueden ser evaluados para cualquier tiempo, dígase $S(t)$. Una vez que $S(t)$ ha sido determinado, éste puede determinar el potencial que de igual forma

puede ser evaluado para cualquier tiempo mediante la solución del problema de *inverse scattering*.

Aunque no se había mencionado hasta ahora, el método de *scattering-inverse scattering* presentado se desarrolló para encontrar la solución de la ecuación no-lineal de Korteweg-de Vries ó KdV,

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Gardner, Greene, Kruskal y Miura resolvieron la ecuación KdV en el año de 1968 relacionando la ecuación no-lineal con una ecuación del tipo Sturm-Liouville, y así relacionándola con un problema de evolución. El papel de la ecuación KdV comienza a cobrar importancia al respecto de la evolución de los parámetros de *scattering* como se mostrará a continuación.

2.3.1. Evolución de los parámetros de *scattering*

Se toma en cuenta la ecuación de Sturm-Liouville

$$\psi_{xx} + (\lambda - u)\psi = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

Se asume que esta ecuación puede ser diferenciada con respecto a x y con respecto a t . Así se obtiene

$$\psi_{xxx} - u_x\psi + (\lambda - u)\psi_x = 0$$

y

$$\psi_{xxt} + (\lambda_t - u_t)\psi + (\lambda - u)\psi_t = 0,$$

respectivamente. Por otro lado se define una función

$$R(x, t) = \psi_t + u_x\psi - 2(u + 2\lambda)\psi_x = 0. \tag{2.16}$$

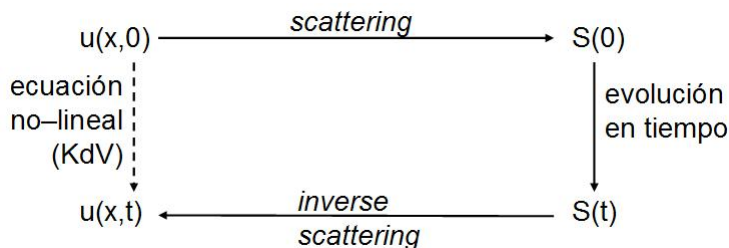


Figura 2.2: Transformada de *inverse scattering*

Utilizando estas tres ecuaciones, la ecuación de S-L y debido al hecho que $u(x, t)$ debe satisfacer la KdV se puede comprobar que la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial x}(\psi_x R - \psi R_x) = \lambda_t \psi^2 \quad (2.17)$$

se satisface.

Haciendo referencia al espectro discreto, se puede decir que la ecuación anterior se cumple para cualquier función propia y su correspondiente valor propio. Escogiendo cualquier valor propio, por ejemplo $\lambda = \kappa_n^2$ con $n = 1, 2, \dots, N$. Se puede integrar la ecuación (2.17) de $-\infty$ a $+\infty$ y obtener

$$[\psi_{nx} R_n - \psi_n R_{nx}]_{-\infty}^{\infty} = -(\kappa_n^2)_t \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2 dx. \quad (2.18)$$

Aquí se denota R_n como una función evaluada en términos de ψ_n y κ_n . Debido a que ψ_n decae exponencialmente, de igual forma R_n , y por lo tanto, la parte izquierda de la ecuación (2.18) tiene que ser igual a 0 por la evaluación de los términos en $-\infty$ y $+\infty$. Lo que se encuentra del lado derecho de la ecuación también tiene que ser igual a cero entonces, pero se sabe que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2 dx = 1.$$

Eso significa que

$$(\kappa_n^2)_t = 0,$$

ó que κ_n , al igual que λ es constante con respecto al tiempo. Regresando a la ecuación (2.17), de igual forma partiendo de su integración, y haciendo uso de la ecuación de Sturm-Liouville, también se puede obtener la igualdad

$$R_n = \psi_{nt} + u_x \psi_n - 2(u - 2\kappa_n^2)\psi_{nx} = 0, \quad (2.19)$$

de la cual podemos obtener la información del parámetro de evolución $c_n(t)$. Primero, es necesario recordar que

$$\psi_n(x; t) \sim c_n(t) \exp(-\kappa_n x), \quad x \rightarrow +\infty;$$

así mismo, se recuerda que $u \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow +\infty$.

Ahora sustituyendo estas expresiones en la ecuación (2.19) y cancelando el factor de la exponencial se puede ver que

$$\frac{dc_n}{dt} - 4\kappa_n^3 c_n = 0.$$

Solucionando para $c_n(t)$ se obtiene

$$c_n(t) = c_n(0) \exp(4\kappa_n^3 t). \quad (2.20)$$

Haciendo un análisis paralelo al anterior, pero tomando en cuenta una función \hat{R} , es posible obtener información acerca de la evolución de los parámetros de *scattering* que conciernen al espectro continuo. La función \hat{R} denota una función R con la misma definición (2.16), pero evaluada en términos de funciones propias continuas $\hat{\psi}$. Tomando en cuenta el comportamiento asintótico

$$\hat{\psi}(x, t; k) \sim a(k; t)e^{-ikx}, \quad x \rightarrow -\infty,$$

se puede obtener que

$$\frac{da}{dt} + 4ik^3a = ha, \quad (2.21)$$

donde la función $h = h(t; k) = \hat{R}/\hat{\psi}$. Por el otro lado, de acuerdo al comportamiento de $\hat{\psi}$ cuando $x \rightarrow +\infty$

$$\hat{\psi}(x; t, k) \sim e^{-ikx} + b(k; t)e^{ikx}$$

se tiene

$$\hat{R}(x, t; k) \sim \frac{db}{dt}e^{ikx} + 4ik^3(e^{-ikx} - be^{ikx})$$

y así, la definición de $h(t; k)$ implica que

$$\frac{db}{dt}e^{ikx} + 4ik^3(e^{-ikx} - be^{ikx}) = h(e^{-ikx} + be^{ikx}). \quad (2.22)$$

Debido a que e^{ikx} y e^{-ikx} son linealmente independientes la ecuación (2.22) brinda dos resultados. Primero que

$$\frac{db}{dt} - 4ik^3b = hb,$$

y luego que

$$h(t; k) = 4ik^3.$$

Utilizando este resultado para h en la ecuación (2.21) se obtiene que

$$\frac{da}{dt} = 0.$$

Con esta información, ya es posible conocer la evolución de los parámetros $a(k; t)$ y $b(k; t)$. Así, se tiene que

$$a(k; t) = a(k; 0),$$

así como,

$$b(k; t) = b(k; 0) \exp(8ik^3t),$$

para $t \geq 0$. Ecuaciones que concluyen la evolución de los parámetros de *scattering* en el tiempo. Hasta ahora cobra sentido la leyenda KdV en la figura 2.2. Así como el objetivo del procedimiento es la solución de la KdV, ésta misma es la ecuación que contiene la información de la evolución en el tiempo. En la siguiente sección se muestra con un ejemplo el proceso completo de la solución de un problema mediante la transformada de *inverse scattering*.

2.3.2. Ejemplo: Solución tipo solitón de la KdV

Según la figura 2.2 el procedimiento de la transformada no lineal comienza con un perfil inicial ó una función de potencial. Para este ejemplo se puede utilizar

$$u(x, 0) = -2\text{sech}^2 x.$$

Se puede notar que utilizamos la misma función de potencial con la cual se ilustró el problema de *scattering* en la sección 2.1. La ecuación de Sturm- Liouville tiene entonces la forma

$$\psi_{xx} + (\lambda + 2\text{sech}^2 x)\psi = 0.$$

Debido a que $U_0 = N(N + 1) = 2$, cuando $N = 1$, sólo se tiene una solución acotada del espectro discreto con la proporción

$$\psi(x) \propto P_1^1(\tanh x) = -\text{sech}(x).$$

Buscando normalizar la función propia para el perfil inicial de acuerdo con la condición (2.3), primero se tiene que notar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sech}^2 x \, dx = 2.$$

Entonces, la función propia normalizada debe ser

$$\psi_1(x) = 2^{-1/2} \text{sech } x$$

para cumplir con la normalización de la integral cuadrática. Obteniendo el comportamiento asintótico de la función normalizada se puede observar que

$$\psi_1(x) \sim 2^{1/2} e^{-x}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Lo cual cumple con el comportamiento esperado para una función propia del espectro discreto. De aquí se puede obtener un parámetro de scattering observando que $c_1(0) = 2^{1/2}$ de acuerdo con (2.2). Ahora, utilizando la ecuación (2.20) en cuanto a la evolución en tiempo de $c_n(t)$ a partir de $c_1(0)$ se tiene que

$$c_1(t) = 2^{1/2} e^{4t}.$$

El potencial $u(x)$ ya puede ser determinado, ya que se escogió un potencial inicial ($u(x, 0)$) para el cual, como se mencionó en la primera parte del capítulo, se tiene un coeficiente de reflexión ($b(k)$) igual a 0. Con estos datos y utilizando la definición (2.15) se obtiene

$$F(X; t) = 2e^{8t-X}.$$

Alimentando esta función en la ecuación de Marchenko se obtiene

$$K(x, z; t) + 2e^{8t-(x+z)} + 2 \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y; t) e^{8t-(y+z)} dy = 0.$$

Si se supone $K(x, z)$ separable de la forma $K(x, z) = L(x)e^{-z}$. Esta ecuación se puede simplificar obteniéndose

$$L + 2e^{8t-x} + 2Le^{8t} \int_x^{\infty} e^{-2y} dy = 0.$$

Resolviendo para L se obtiene

$$L(x, t) = \frac{-2e^{8t-x}}{1 + e^{8t-2x}}.$$

Con esta expresión para L se puede encontrar K para inmediatamente, a partir de la ecuación (2.8), encontrar $u(x)$. Finalmente se llega a que

$$u(x, t) = -2\operatorname{sech}^2(x - 4t).$$

Resultado conocido como solución de un solitón. Se dice que éste es un perfil de forma constante que viaja a lo largo del eje x .

En este capítulo se mostró la filosofía detrás de los problemas de *scattering* e *inverse scattering*, la cual será útil para entender el problema que se plantea más adelante para el caso de la guía de onda dieléctrica. Así mismo, se dió una pequeña introducción a los problemas relacionados con la transformada de *inverse scattering*. Los ejemplos presentados, aunque no corresponden a un coeficiente de reflexión diferente de 0 como en los casos que se verán más adelante, sirven muy bien para vislumbrar el significado físico del esquema antes de comenzar a resolver problemas con algunas variaciones.

Capítulo 3

Modos de propagación y parámetros de *scattering*

3.1. Guía de onda y el problema de *scattering*

Como se mencionó en la introducción, el objetivo de este trabajo es la utilización de la solución del problema de *inverse scattering* presentada en el capítulo anterior para el diseño del perfil de permitividad de una guía de onda plana dieléctrica con base en los modos de propagación que se deseen tener dentro de la misma.

El planteamiento del problema o, tal vez se podría decir, del área de oportunidad, viene de la relación que existe entre los modos de propagación y el problema de *scattering* dentro de la misma. En la primera parte de este capítulo se planteará la manera en la que las ecuaciones de onda dentro de la guía toman la forma de la ecuación del problema de Sturm-Liouville que se revisó en el capítulo anterior. Se mostrará cómo algunas soluciones del espectro discreto del problema de *scattering* corresponden a los modos guiados y cómo algunas otras soluciones corresponden a los modos llamados débilmente guiados.

La función de permitividad del núcleo de la guía de onda se relaciona con la función de potencial de la ecuación Sturm-Liouville como se mostrará más adelante. De esta forma, si los modos de propagación que se desean tener dentro de la guía determinan los datos de *scattering* y mediante la solución del *inverse scattering* se determina la función de potencial de la ecuación de Schrödinger, entonces es posible diseñar una guía de onda mediante este método.

Se hace referencia a los problemas de *scattering* e *inverse scattering* asociados a la propagación dentro de la guía de onda, pero no se mencionará mucho sobre la evolución de los parámetros de *scattering*. Esto es porque en este enfoque se parte del conocimiento de los parámetros y se limita a llevar a cabo el *inverse scattering* a partir de éstos.

Primero, se sabe que las ecuaciones que rigen la propagación de la luz en las guías de onda planas son:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla \left(\mathbf{E} \cdot \frac{1}{\kappa} \nabla \kappa \right) + \frac{\kappa}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = 0$$

y

$$\nabla^2 \mathbf{H} + \frac{1}{\kappa} (\nabla \kappa) \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \frac{\kappa}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0.$$

Donde $\mathbf{E} = (E_{\tilde{x}}, E_{\tilde{y}}, E_{\tilde{z}})$ y $\mathbf{H} = (H_{\tilde{x}}, H_{\tilde{y}}, H_{\tilde{z}})$ corresponden al campo eléctrico y al campo magnético respectivamente. κ es la permitividad relativa definida por $\kappa = \kappa(\tilde{x}) = \varepsilon(\tilde{x})/\varepsilon_0$, en donde $\varepsilon(\tilde{x})$ es la permitividad dieléctrica de la guía de onda que se supone que es sólo una función de la coordenada \tilde{x} , ε_0 es la permitividad en el espacio libre, y c es la velocidad de la luz en el espacio libre. Si se considera (\tilde{z}) como la dirección de propagación y ω como la frecuencia de radiación del laser, para ondas polarizadas planas, se puede asumir que las soluciones tendrán la forma de

$$E_{\tilde{y}}(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{k}_0, t) = E_{\tilde{y}}(\tilde{x}, k_0) \exp[j(\omega t - \beta \tilde{z})], \quad (3.1)$$

para los modos TE, y

$$E_{\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{k}_0, t) = E_{\tilde{x}}(\tilde{x}, k_0) \exp[j(\omega t - \beta \tilde{z})],$$

para los modos TM. Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones vectoriales se pueden obtener las ecuaciones de onda

$$\frac{d^2}{d\tilde{x}^2} E_{\tilde{y}}(\tilde{x}, \tilde{k}_0) + [k_0^2 \kappa(\tilde{x}) - \beta^2] E_{\tilde{y}}(\tilde{x}, k_0) = 0,$$

en el primer caso, así como en el segundo,

$$\frac{d^2}{d\tilde{x}^2} E_{\tilde{x}}(\tilde{x}, k_0) + \frac{d}{d\tilde{x}} \left[\frac{1}{\kappa} \frac{d\kappa}{d\tilde{x}} \right] + [k_0^2 \kappa(\tilde{x}) - \beta^2] E_{\tilde{x}}(\tilde{x}, k_0) = 0.$$

En este contexto k_0 es el número de onda en el espacio libre. Se define el número de onda para este tipo de propagación de la forma $2\pi/\lambda = \omega/c$ y β es la constante de propagación en la dirección \tilde{z} . Restringiremos la discusión a los modos TE porque la ecuación para estos modos es la que mejor se puede acoplar al problema de *inverse scattering*, además, la propagación de un sólo modo estaría especificada por el modo fundamental TE. Así que si se piensa en una guía monomodo, es posible restringir la discusión a este modo (TE) correspondiente. Entonces, revisando la ecuación (3.1), ésta puede ser reescrita de la forma

$$\frac{d^2}{d\tilde{x}^2} E_{\tilde{y}}(\tilde{x}, k_0) + [-\beta^2 + k_0^2 \kappa(\tilde{x})] E_{\tilde{y}}(\tilde{x}, k_0) = 0. \quad (3.2)$$

Ahora, normalizando convenientemente la ecuación anterior se puede definir

$$x = \tilde{x}/L$$

y

$$\psi(x, k_0) = \frac{E_y(x, k_0)}{E_{y_0}},$$

donde E_{y_0} corresponde a la máxima amplitud del campo eléctrico y L corresponde al ancho de la guía de onda.

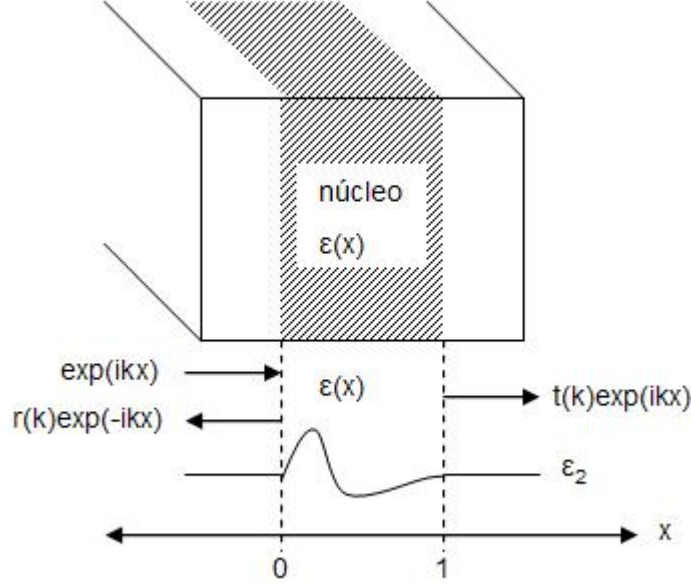


Figura 3.1: Perfil de permitividad de la guía de onda plana.

Para la guía de onda mostrada en la figura (3.1) se puede tener una expresión de la permitividad del núcleo no-homogéneo de la forma

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon_1[1 - g(x)] & 0 \leq x \leq 1 \\ \varepsilon_2 & x \leq 0 \text{ ó } x \geq 1 \end{cases},$$

en la cual $\varepsilon_1 = \max\{\varepsilon(x)\}$ corresponde al máximo valor de la permitividad del núcleo no-homogéneo. ε_2 es el valor de la permitividad del recubrimiento. Como se ve en la figura (3.1), $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Se puede asumir que la función $g(x)$ es real, acotada, continua y que pertenece al espacio de funciones $L_1(-\infty, \infty)$. Por otro lado, para que $\varepsilon(x)$ no tenga cruces por cero, se requiere que $\max\{g(x)\} < 0$.

Utilizando estas tres últimas ecuaciones en la ecuación (3.2) se obtiene

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x, k_0) + L^2\{-\beta^2 + k_0^2\varepsilon_1[1 - g(xL)]\}\psi(x, k_0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Ahora, si se define una frecuencia normalizada V de la forma

$$V^2 = k_0 L^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2),$$

la ecuación de onda para el modo TE toma la forma

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x, k_0) + \left\{ -L^2 \beta^2 + \frac{V^2 \varepsilon_1}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} [1 - g(xL)] \right\} \psi(x, k_0) = 0,$$

que se puede reescribir como

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x, k_0) + [k^2 - q(xL)] \psi(x, k) = 0. \quad (3.3)$$

Ecuación en la cual se ha utilizado

$$k^2 = L^2 (-\beta^2 + k_0^2 \varepsilon_2),$$

así como

$$q(xL) = \frac{V^2 \varepsilon_1}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} g(xL) - V^2.$$

La ecuación (3.3) es una ecuación del tipo de Schrödinger, en la cual, se tiene una función de potencial $q(xL)$, así como se tiene una variable espectral k . Esta ecuación también tiene la forma de la ecuación de Sturm-Liouville que se trató para el problema de *scattering*. De aquí se pueden establecer algunas relaciones, como por ejemplo, la relación que existe entre la función de potencial y el perfil de permitividad de la guía de onda. Otra relación interesante, es la que existe entre las soluciones acotadas ψ del espectro discreto de k que corresponden a la solución de reflexión total interna dentro de la guía.

Volviendo a la figura (3.1), también se considera que $\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2$ conforme $x \rightarrow 1$. Así como se puede recordar que $\varepsilon(x) = \varepsilon_2$ para $x \leq 0$ ó $x \geq 1$. Es por estos dos últimos argumentos que se puede saber que $g(x) \rightarrow 1 - \varepsilon_2/\varepsilon_1$ y que $q(x) \rightarrow 0$ conforme $x \rightarrow 1$ ó $x \leq 0$.

También se sabe que la función de potencial debe cumplir con ciertas condiciones para ser una solución adecuada de la ecuación (3.3). Se debe cumplir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| |q(x)| dx < \infty$$

para que $q(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ pueda ser una función meromórfica y se pueda aplicar el *inverse scattering*. A continuación se muestra la forma en la que se puede plantear el *inverse scattering* para encontrar la función de potencial a partir de los parámetros de *scattering*. En la siguiente sección se considera la situación en la que el coeficiente de reflexión es igual a 0.

3.2. Inverse scattering, $b(k) = 0$

La función de potencial $q(x)$ puede ser determinada usando la teoría de *inverse scattering* debido a que $q(x) \rightarrow 0$ conforme $x \rightarrow 1$ usando la ecuación de Gel'fand, Levitan, Marchenko

$$K(x, y) + F(x + y) + \int_x^\infty K(x, z)F(y + z)dz = 0, \quad (3.4)$$

donde

$$F(x, y) = \sum_{n=1}^N c_n^2 e^{k_n(x+y)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty b(k) e^{-ik(x+y)} dk,$$

y donde $b(k)$ es el coeficiente de reflexión y $\{c_n\}$ son las N constantes reales de normalización. Una vez que $K(x, y)$ ha sido obtenida, el potencial puede ser fácilmente encontrado tomando la derivada de $K(x, x)$ obteniéndose

$$q(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x).$$

Resolver esto puede ser muy complicado para casos en los que la única restricción es que el coeficiente de reflexión $b(k) \leq 1$. Sin embargo, se ha demostrado que para el caso en el que $b = 0$ es posible resolver la ecuación integral y ello se lleva a cabo de una manera más sencilla. Debido al hecho de que la ecuación de Marchenko, como se vió en el capítulo anterior, es separable, se puede llegar a la solución. Una solución más general con el coeficiente de reflexión igual a 0 fue encontrada por Kay y Moses (1956), y su forma es

$$K(x, x) = \frac{d}{dx} \ln\{\det[\Delta]\},$$

donde

$$\Delta_{mn} = \delta_{mn} + \frac{c_m c_n}{k_m + k_n} e^{-(k_m + k_n)x}.$$

Sin embargo, un problema un poco más complejo comienza a surgir con el hecho de que se tenga un coeficiente de reflexión diferente de 0. En la siguiente sección se presentará un poco más a fondo el efecto del coeficiente de reflexión sobre la propagación dentro de la guía de onda.

3.3. Modos de propagación y el coeficiente de reflexión

Para encontrar la relación entre el coeficiente de reflexión transversal de la guía de onda y su estructura modal, primero se puede analizar una guía de onda homogénea para más tarde volver al problema de guía de onda no-homogénea.

Se supone la dirección de propagación $+z$ como en la figura (3.2). A la permitividad del núcleo se le ha denominado ϵ_x .

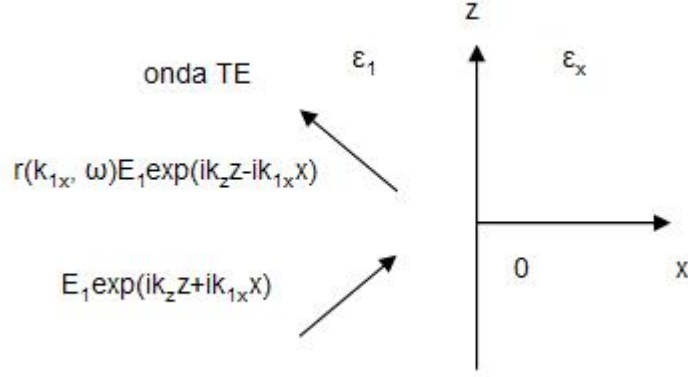


Figura 3.2: *Scattering* en la guía de onda homogénea.

A la dirección en x se le llama la dirección transversal. El coeficiente de reflexión se obtiene del problema de *scattering* directo para una onda plana incidente, y éste tiene la forma

$$r(k_{1x}, \omega) = \frac{R_{10} + R_{01} \exp(i2k_x d)}{1 + R_{-10} R_{01} \exp(i2k_x d)},$$

donde k_z es el número de onda en la dirección z , y ω es la frecuencia angular. d ó L es el grueso del núcleo. R_{ij} es el coeficiente de reflexión de Fresnel para una onda incidente de un medio i a un medio j . Debido a que

$$R_{-10} = -R_{01},$$

los polos se determinan por

$$R_{01}^2 \exp(i2k_x d) = 1 \quad (3.5)$$

para el caso de una polarización TE, donde

$$R_{01} = \frac{k_x - k_{1x}}{k_x + k_{1x}}. \quad (3.6)$$

Las relaciones de dispersión están dadas por

$$k_{1x}^2 + k_{1z}^2 = k_1^2,$$

donde $k_{1z} = k_z$ y,

$$k_x^2 + k_z^2 = k^2.$$

k_z es la misma en los medios debido a la condición de acoplamiento de fase. Se puede probar que

$$r(k_{1x} = 0) = -1,$$

que es la condición de normalización del coeficiente de reflexión racional. Los polos de $r(k_{1x})$ son aquellos que satisfacen la ecuación (3.5). En los polos $r \rightarrow \infty$, lo cual indica una estructura autoresonante. Cuando una onda plana es incidente hacia el núcleo con una k_{1x} real, debido a la conservación de la energía, $|r| \leq 1$. Esto es porque para valores reales de k_{1x} y k_x , $|R_{01}| \leq 1$, la condición de los polos no será satisfecha. Entonces, los polos de $r(k_{1x})$ son complejos.

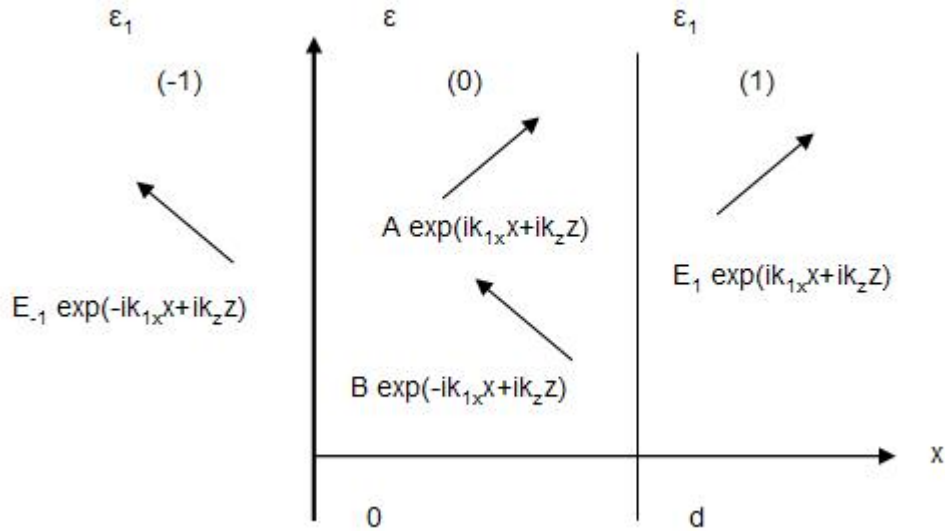


Figura 3.3: Propagación en tres regiones.

En la figura (3.3) los modos guiados se definen como ondas propagándose a lo largo de la dirección $+z$ y que decaen exponencialmente a lo largo de la dirección transversal fuera del núcleo. Los modos en la guía son determinados por las condiciones de frontera. Para una onda TE, los campos E_y en las tres regiones pueden ser expresados de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_{-1} &= E_{-1} \exp(ik_z z) \exp(-ik_{1x}x), & \text{para la región } (-1), x < 0, \\
\tilde{E}_0 &= \exp(ik_z z)[A \exp(ik_x x) + B \exp(ik_x x)], & \text{para } 0 < x < d, \text{ y} \\
\tilde{E}_1 &= E_1 \exp(ik_z z) \exp(ik_{1x}x), & \text{para la región } (1), x > d.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

En $x = 0$ en la región (0), la onda viajera hacia la derecha es debida a la reflexión de la onda viajera hacia la izquierda y reflejada en la frontera, entonces $A = BR_{0(-)}$. Usando la característica $R_{-10} = -R_{01}$ se tiene

$$A = BR_{01}.$$

En $x = d$ en la región (0), la onda viajera hacia la izquierda se debe a la reflexión de la onda viajera hacia la derecha en la frontera. Por lo tanto,

$$B = \exp(-ik_x d) = A \exp(ik_x d)R_{01}.$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores se tiene

$$\exp(2ik_x d)R_{01}^2 = 1. \tag{3.8}$$

Esta ecuación es la condición de resonancia transversal satisfecha por cualquier distribución de campo de la figura (3.3). Esta condición de resonancia es conocida también como la condición de “guía”, y es la misma que la ecuación (3.5). Por lo tanto, la condición de guía es la misma que la condición de los polos para el coeficiente de reflexión.

Para una frecuencia angular fija ω existe sólo una variable no conocida en la ecuación (3.8). Esta variable puede ser k_{1x} ó k_x . Las posibles soluciones que satisfacen la condición de guía pueden ser vistas de tres diferentes maneras.

3.3.1. k_x real

Si se supone k_{1x} real también. Esto da $|\exp(i2k_x d)| = 1$ y $|R_{01}| < 1$, de acuerdo a (3.6). Este caso no puede satisfacer la condición de guía de la ecuación (3.8). Si se supone $\varepsilon_1 > \varepsilon$, debido a que $k_{1x}^2 = k_x^2 + k_1^2 - k^2$, si k_x es real, k_{1x} también será real. Por lo tanto, no hay ningún modo discreto para $\varepsilon_1 > \varepsilon$.

En otro caso, si se supone que k_{1x} es puramente imaginaria. Aquí $k_1^2 - k^2 = k_{1x}^2 - k_x^2 < 0$, $\varepsilon_1 < \varepsilon$ y $k_{1x}^2 = k_x^2 + k_1^2 - k^2$ es real. Entonces, si k_{1x} es compleja, tiene que ser puramente imaginario. En este caso $|\exp(i2k_x d)| = 1$, $|R_{01}| = 1$, así que es posible para la condición de guía tener un número finito de soluciones con valores de k_x discretos. $k_x^2 = k_{1x}^2 + k^2 - k_1^2 < k^2 - k_1^2$. Las soluciones adecuadas de k_{1x} se encuentran en el eje imaginario positivo, la onda decae a lo largo de la dirección x fuera del núcleo. Por otro lado, también existen soluciones inadecuadas de k_{1x} que se encuentran en el eje

imaginario negativo del plano k_{1x} . La solución de la ecuación (3.8) en el caso presente también incluye una solución trivial con la raíz $k_x = 0$, la cual da un campo igual a cero en cualquier lado. Esto se puede demostrar a partir de $A = BR_{01}$, si $k_x = 0$, $R_{01} = -1$ y entonces $A = -B$. En este caso, de las ecuaciones (3.7), $\tilde{E}_0 = 0$. Debido a que E_y es continua en las fronteras, también \hat{E}_{-1} y $\tilde{E}_1 = 0$.

3.3.2. k_x puramente imaginario.

Esto implica que $k_z^2 > k^2$ y que k_z es real. A continuación se explican las diferentes consideraciones que se pueden tomar.

1. $\varepsilon > \varepsilon_1$, $k_z^2 > k^2$, así que,

$$k_{1x}^2 = k_x^2 - (k^2 - k_1^2) < k_x^2 < 0,$$

y k_{1x} es también un número imaginario. Si se escoge $k_x = ia$ y $k_{1x} = ia_1$ para ondas que decaen fuera del núcleo, y $a_1 > 0$ siendo $|a_1| > |a|$.

- a) $a > 0$, $|R_{01}| < 1$, y $\exp(-2ad) < 1$, la cual no es una solución posible de la ecuación (3.8).
- b) $a < 0$, $|R| > 1$ y $\exp(-2ad) > 1$, la cual es tampoco una solución posible de la ecuación (3.8).

2. $\varepsilon < \varepsilon_1$, $k < k_1$.

- a) k_{1x} es real, $k_1 > k_z$. $|R_{01}| = 1$, y $|\exp(-2ad)| \neq 1$. Esta tampoco puede ser una solución para la ecuación (3.8).
- b) k_{1x} es imaginaria, $k_1 < k_z$, que es el mismo caso (1).

Así, se aprecia que el caso cuando k_x es puramente imaginario no puede satisfacer la condición de polos del coeficiente de reflexión.

3.3.3. k_x con parte real e imaginaria

Debido a que $k_z^2 = k^2 - k_x^2$, k_z es complejo y se puede decir que $k_z = k'_z + ik''_z$. Siendo la dirección de propagación $+z$, $k'_z > 0$ y $k''_z > 0$. Definiendo de igual forma $k_x = k'_x + ik''_x$ y partiendo de $k_x^2 = k^2 - k_z^2 = k^2 - k'^2_z + k''^2_z - i2k'_zk''_z$, se obtiene $k'_x k''_x = -k'_z k''_z$. Por la misma razón, $k_{1x} = k'_{1x} + ik''_{1x}$, así como, $k_{1x}^2 = k_1^2 - k_z^2 = k_1^2 - k'^2_z + k''^2_z - i2k'_zk''_z$, y, $k'_{1x} k''_{1x} = -k'_z k''_z$. Debido a que $k'_z k''_z > 0$ y $k'_x k''_x < 0$, $k'_{1x} k''_{1x} < 0$. Las ondas que viajan por fuera del núcleo requieren que $k'_{1x} > 0$ en las regiones (-1) y (1); por lo tanto $k''_{1x} < 0$.

Existen dos casos equivalentes para $k_x, k'_x > 0$ y $k''_x < 0$. Se escoge $k'_x > 0$ y $k''_x < 0$. Esto significa que $|\exp(-2k''_x d)| > 1$. Si la ecuación (3.8) se satisface, entonces $|R_{01}| < 1$. Esto es debido a que

$$|R_{01}| = \left| \frac{(k'_x - k'_{1x})^2 + (k''_x - k''_{1x})^2}{(k'_x + k'_{1x})^2 + (k''_x + k''_{1x})^2} \right|^{1/2},$$

da que $|R_{01}| < 1$, entonces, es una solución posible. A estas soluciones se les llama modos débilmente guiados debido a que la potencia se fuga de la superficie. Fuera del núcleo, la onda viaja en el dirección x , pero decae en la dirección z .

Como conclusión se puede decir que las posibles soluciones a la condición de guía son discretas y se pueden clasificar en dos tipos:

(I) Modos guiados. En el caso de que k_x es real, $k_x^2 < k^2 - k_1^2$, y k_{1x} sólo tiene parte imaginaria positiva. La onda se guía entre las dos superficies, y fuera de las superficies decae exponencialmente. Esta onda superficial es asociada a la reflexión total interna en las fronteras.

(II) Modos débilmente guiados. Cuando k_x es compleja, y $|k'_{1x}| > 0$, $k''_{1x} < 0$.

Se puede hacer la extensión de este caso al caso de una guía no-homogénea, primero dividiendo la fibra en más de tres regiones y luego tomando el límite cuando el número de regiones es muy grande y de espesor muy pequeño. Xia [4] demostró con este análisis que la condición de guía sigue siendo la misma que la condición de los polos del coeficiente de reflexión. Así que la condición para que un polo represente un modo guiado es que se localice en el eje imaginario positivo y que para que un polo represente un modo débilmente guiado, éste tiene que contener una parte real y una imaginaria negativa.

Como se mencionó anteriormente, se puede tornar muy complicado resolver la ecuación de Marchenko (3.4) cuando el coeficiente de reflexión es diferente de 0. Sin embargo, un planteamiento alternativo del *inverse scattering* (Kay 1960) hace posible resolver el problema cuando el coeficiente de reflexión tiene una forma racional descrita por el lugar de los polos. En la siguiente sección se muestra este método junto con un resultado conocido para un coeficiente de reflexión con 3 polos.

3.4. *Inverse scattering* $b(k) \neq 0$

Ahora que se ha planteado que el problema de *scattering* es similar al estudiado en el capítulo anterior, y que se ha visto el efecto del coeficiente de reflexión en los modos de la guía de onda, se puede hacer un poco de énfasis en el problema de *inverse scattering*, pero enfocado a un coeficiente de reflexión con forma racional.

La estructura modal de la guía estará representada por los parámetros de *scattering*, en este caso, específicamente por el coeficiente de reflexión transversal. La guía de

onda será diseñada para que el coeficiente de reflexión incluya un modo de propagación, así como modos débilmente guiados.

La relación matemática entre los parámetros de *scattering* que caracterizan las propiedades de propagación de la guía y la función de potencial $q(x)$ se da por la teoría de *inverse scattering*, y específicamente para el caso de la relación que existe con el coeficiente de reflexión $r(k)$ la teoría de *inverse scattering* de Kay, obtenida a partir del análisis espectral de la ecuación (3.3) de Gel'fand, Levitan y Marchenko. Las ecuaciones básicas pueden ser escritas a partir de la formulación dependiente del tiempo para el problema de *scattering*. Es decir, presentando la transformada de Fourier de la función propia $\psi(x, k)$, es decir $\Psi(x, t)$, que depende del tiempo y que satisface

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(x, t) - q(x) \Psi(x, t) = 0, \quad (3.9)$$

en la cual se toma la variable t correspondiente a la velocidad de la luz $c \equiv 1$. En el espacio libre se considera la solución de onda incidente de la ecuación dependiente del tiempo (3.9) como un impulso unitario

$$\Psi_{in}(x, t) = \delta(x - t), \quad x < 0, \quad t > 0,$$

la cual produce el transitorio reflejado ó función característica

$$R(x, t) = R(x + t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(k) \exp[-ik(x + t)] dk - i \sum_{n=1}^N r_n \exp[-ik_n(x + t)]. \quad (3.10)$$

Se dice que la integral es la transformada de Fourier del coeficiente de reflexión. Los modos discretos que corresponden a los modos propagados se representan con la suma sobre los polos k_n en el eje positivo imaginario con residuos r_n . Debido a la condición de causalidad, se debe considerar que

$$R(x + t) = 0, \quad \text{para } x + t \leq 0.$$

Es decir, se produce un transitorio de reflexión hasta que la onda propagada haya interactuado con el núcleo no-homogéneo de la guía.

Es posible relacionar la amplitud $\Psi(x, t)$ de la onda dentro de núcleo de la guía con la amplitud $\Psi_0(x, t)$ fuera del núcleo mediante una transformación lineal independiente del parámetro k de la siguiente forma

$$\Psi = \begin{cases} \Psi_0(x, t) + \int_{-x}^x K(x, z') \Psi_0(z', t) dz' & , \quad x \geq 0 \\ \Psi_0(x, t) & , \quad x \leq 0 \end{cases}, \quad (3.11)$$

en la cual,

$$\Psi_0(x, t) = \delta(x - t) + R(x + t). \quad (3.12)$$

De las consideraciones físicas se sabe que $\Psi(x, t)$ es un transitorio moviéndose hacia la derecha de tal forma que

$$\Psi(x, t) = 0 \quad \text{para } t < x.$$

Por lo tanto, $K(x, t) = 0$ para $t > x$, y $K(x, t) = 0$ para $t \leq x$. Sustituyendo la ecuación (3.12) en la ecuación (3.11) y usando la condición de causalidad para $R(x+t)$ se obtiene la ecuación integral

$$K(x, t) + R(x+t) + \int_{-t}^x K(x, z')R(z'+t)dz' = 0, \quad t < x, \quad (3.13)$$

que es la versión de Kay de la ecuación integral de Gel'fand, Levitan, Marchenko. Sustituyendo la ecuación (3.11) en la ecuación (3.9) se puede saber que la función $K(x, t)$ satisface una ecuación de la forma (3.9) para una amplitud de onda $\Psi(x, t)$ si se cumplen las condiciones

$$K(x, -x) = 0$$

y

$$2 \frac{d}{dx} K(x, x) = q(x).$$

Entonces, la solución de la ecuación (3.13) para $K(x, t)$ conlleva a la síntesis de las guías de onda. Se puede resolver la ecuación (3.13) usando varios métodos, sin embargo, es especialmente importante el método que involucra un coeficiente de reflexión de forma racional ya que tiene varias aplicaciones de importancia.

3.4.1. Diseño a partir del coeficiente de reflexión

Como se mencionó, los polos del coeficiente de reflexión localizados sobre el eje imaginario positivo, se traducen en soluciones del espectro discreto de valores propios ó modos guiados, mientras que los polos localizados en la parte $\text{Im}(k) < 0$ corresponden a los modos débilmente guiados. Esto es de forma general, pero debido a que el coeficiente de reflexión también debe cumplir con otras condiciones referentes a su naturaleza, la localización de estos polos esta limitada de cierta forma. Además, en ocasiones se parte de una aproximación de un modelo de coeficiente de reflexión a una función racional conocida ó con ciertas propiedades, lo que deriva en otras relaciones entre la localización de los polos. En la figura (3.4) se muestran las regiones permitidas para los polos del coeficiente de reflexión para una determinada aproximación de función racional. En realidad, esta función racional fue derivada de una respuesta tipo Butterworth, pero con la variante de que los polos que corresponden a los modos débilmente guiados se encuentran dentro del círculo unitario. La región permitida para

estos polos esta limitada por la parte de abajo por la curva $\text{Im}(k) = -a/2$ y por la de arriba por la curva $|k| = 2a^2 \cos(2\gamma)$, si se expresa k en coordenadas polares de la forma $k = |k| \exp(i\gamma)$. Se ha notado que las aproximaciones tipo Butterworth poseen propiedades que facilitan la solución del problema de *inverse scattering*.

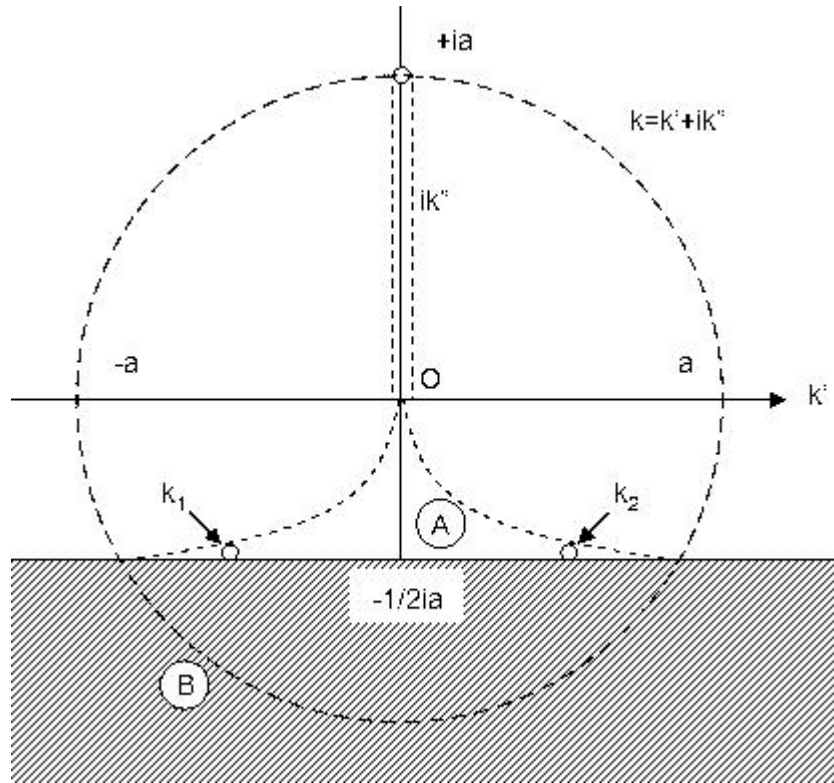


Figura 3.4: Lugar de los polos del índice de reflexión.

Volviendo al problema de *inverse scattering* se puede mostrar la solución para este caso de un coefeciente de reflexión con tres polos de la forma

$$r(k) = \frac{r_0}{(k - k_1)(k - k_2)(k - k_3)},$$

donde r_0 es una constante encontrada usando la condición de normalización $r(0) = -1$. Los dos polos simétricos localizados en la mitad de abajo del plano k son $k_1 = -c_1 - ic_2$ y $k_2 = c_1 - ic_2$ y el tercer polo localizado en la parte positiva del eje imaginario es $k_3 = +ia$. Aquí se plantea que $c_1, c_2, a \in \mathfrak{R}^+$. Ahora, escribiendo la misma ecuación, pero en términos de la magnitud y la fase se obtiene

$$|r(k)|^2 = \frac{(c_1^2 + c_2^2)^2 a^2}{[(k + c_1)^2 + c_2^2][(k - c_1)^2 + c_2^2](k^2 + a^2)}$$

y

$$\phi(k) = - \left[-\pi/2 + \tan^{-1} \left(\frac{a}{k} \right) \right] - \left[\tan^{-1} \left(\frac{c_2}{k + c_1} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{c_2}{k - c_1} \right) \right].$$

El coeficiente de reflexión debe satisfacer la condición de conservación de energía $|r(k)|^2 \leq 1$ para toda k real.

Aplicando la ecuación (3.10) se obtiene

$$R(x+t) = -\frac{a(c_1^2 + c_2^2)}{c_1^2 + (c_2 + a)^2} \left\{ \exp[-c_2(x+t)] \left[\cos(c_1(x+t)) + \frac{c_2 - a}{c_1} \sin(c_1(x+t)) \right] - \exp[a(x+t)] \right\}$$

La cual se puede resolver para obtener una función de potencial [3]

$$q(x) = 2[\mathbf{a}^T(x) - \mathbf{a}^T(x)\mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{A}'(x)]\mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{b}, \quad (3.14)$$

donde

$$\mathbf{a}^T = [1 \quad t \quad \exp(\eta_1 t) \quad \exp(-\eta_1 t) \quad \exp(\eta_2 t) \quad \exp(-\eta_2 t)],$$

$$\mathbf{b}^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -a(-c_1^2 + c_2^2)],$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f(\eta_1) & a(c_1^2 + c_2^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f(\eta_2) & a(c_1^2 + c_2^2) \\ 1 & -x & \exp(-\eta_1 x) & \exp(\eta_1 x) & \exp(-\eta_2 x) & \exp(\eta_2 x) \\ 0 & -1 & -\eta_1 \exp(-\eta_1 x) & \eta_1 \exp(\eta_1 x) & -\eta_2 \exp(-\eta_2 x) & \eta_2 \exp(\eta_2 x) \\ 0 & 0 & \eta_1^2 \exp(-\eta_1 x) & \eta_1^2 \exp(\eta_1 x) & \eta_2^2 \exp(-\eta_2 x) & \eta_2^2 \exp(\eta_2 x) \end{bmatrix}$$

y con los valores de constantes

$$\begin{aligned} \eta_1 &= [(\sigma + \rho)2]^{1/2}, & \eta_2 &= [(\sigma - \rho)/2]^{1/2}, \\ \sigma &= a^2 + 2c_2^2 - 2c_1^2, & \rho &= [(a^2 - 4c_2^2)(a^2 + 4c_1^2)]^{1/2}, \end{aligned}$$

donde $f(\cdot)$ tiene la forma funcional

$$f(p) = (p + ik_1)(p + ik_2)(p + ik_3)$$

y donde ' simboliza una derivación con respecto a x . Entonces, a partir de la función de potencial 3.14 se puede obtener el perfil de permitividad

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon_2 - 2\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{V^2} [\mathbf{a}^T(x) - \mathbf{a}^T(x)\mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{A}'(x)]\mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{b} \\ \varepsilon_2 \end{cases}.$$

Esta variación de *inverse scattering* ha demostrado ser útil para encontrar una solución analítica cuando el coeficiente de reflexión tiene una forma racional y será el punto de partida para desarrollar el método numérico para el diseño de la guía de onda dieléctrica. En el siguiente capítulo el método numérico demostrará su versatilidad encontrando la función de potencial de este caso así como para un caso que requeriría de una solución analítica significativamente diferente.

Aunque se decidió utilizar esta versión de *inverse scattering* de Kay para desarrollar el método numérico en realidad también sería posible encontrar la solución numérica utilizando la integral de Marchenko vista en el capítulo dos y en la sección (3.2). El método de Kay resulta en una forma más viable de encontrar una solución analítica cuando el coeficiente de reflexión tiene ciertas propiedades, pero en cuanto a soluciones numéricas no debe ser mucho más complicado desarrollar un método que resuelva la ecuación (3.4). Sin embargo, es probable que se requiera de un poco más de capacidad de cómputo en el caso de la solución de la ecuación (3.4), ya que en ésta se involucra una integral con un límite infinito, mientras que en (3.13) ambos límites son finitos. Debido a que $K(z) \rightarrow 0$ conforme $z \rightarrow \infty$, en realidad la cantidad de cómputo necesaria depende de la resolución que se desee tener en la solución numérica.

Capítulo 4

Método numérico y resultados

4.1. Escenario

En el capítulo anterior se presentaron los resultados correspondientes a un coeficiente de reflexión diferente de cero y de forma racional. Sin embargo, es necesario presentar un método numérico capaz de realizar la operación de *inverse scattering* para otras formas del coeficiente de reflexión en caso que no sea posible darle una forma adecuada al coeficiente de reflexión para llevar a cabo la operación. El método que se desarrolló en este trabajo corresponde a la versión planteada de Ge, Jordan y Tamil [2] del método desarrollado por Kritikos *et al.* (1982) y Ge (1987) para llevar a cabo el *inverse scattering*. La formulación del problema inicia de la misma forma en la que se comenzó en el capítulo anterior, es decir, planteando las ecuaciones correspondientes al modo TE de la guía de onda plana como

$$E_y(x, z, t) = E_0(x, k_0)\exp[i(\beta z - \omega t)],$$

donde k_0 es el número de onda en el espacio libre y β es la constante de propagación en la dirección z . La ecuación de onda tiene la forma de una ecuación de Schrödinger

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + [-\beta^2 + k_0^2 n^2(x)]E = 0.$$

Esta ecuación puede ser reescrita de la forma

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + [k^2 - v(x)]E = 0,$$

donde

$$k^2 = -\beta^2 + k_0^2 n_2^2$$

representa la constante transversal de propagación y

$$v(x) = k_0^2 [n_2^2 - n^2(x)]$$

es el potencial de *scattering* que es función del número de onda en el espacio libre $k_0 = 2\pi/\lambda$, el índice de refracción del recubrimiento y el perfil del índice de refracción del núcleo no-homogéneo $n(x)$, que es lo que se busca diseñar.

Con base en la teoría de *inverse scattering*, se sabe que el potencial se puede conocer resolviendo la integral de Gel'fand, Levitan y Marchenko

$$K(x, t) + R(x + t) + \int_{-t}^x K(x, y)R(x + y)dy = 0, \quad t \leq x, \quad x > 0, \quad (4.1)$$

donde

$$R(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(k)\exp(-ikt) dk - i \sum_{p=1}^P r_P \exp(-ik_P t)$$

es el transitorio reflejado ó función característica. La transformada de Fourier del coeficiente de reflexión $r(k)$ representa los modos no guiados. El espectro discreto esta representado como la suma de los polos k_P sobre el eje imaginario positivo con residuos r_P . El coeficiente de reflexión $r(k)$ caracteriza las propiedades de propagación de la guía de onda como se vió en el capítulo anterior, los polos del coeficiente sobre el eje imaginario positivo representan los modos guiados, así como los modos en la mitad inferior del plano k representan los modos no guiados.

Utilizando las condiciones de frontera

$$K(x, -x) = -R(0) \quad (4.2)$$

y

$$v(x) = 2 \frac{dK(x, x)}{dx}, \quad (4.3)$$

es posible recuperar la función de potencial resolviendo la ecuación integral de Marchenko.

Así como en el capítulo anterior, el *kernel* de la ecuación integral satisface la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial t^2} - v(x)K(x, t) = 0, \quad (4.4)$$

que es la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. Con esto en mente se puede presentar la discretización del *inverse scattering*.

4.2. Discretización de la ecuación G-L-M y Método Numérico

La ecuación (4.1) se discretiza adecuadamente para ser aplicada al método numérico haciendo un giro de 45° con respecto a la abscisa como se muestra en la figura 4.1.

El intervalo $\Delta t = 2\Delta x$, y $x = m\Delta x$, para $m = 0, 1, \dots, N$. Donde N es el número total de puntos a lo largo de la dirección x , mientras $t = n\Delta t - (m/2)\Delta t$, para $n = 0, 1, \dots, m$. La ecuación G-L-M entonces toma la forma

$$K_m(n) + R_m(n) + \sum_{l=m-n}^m C(l)K_m(l)R_m(l)\Delta t = 0, \quad n = 0, 1, \dots, m, \quad (4.5)$$

donde $y = l\Delta t - (m/2)\Delta t$. El subíndice m en $K_m(n)$ representa la posición del punto a lo largo de la dirección x , y el argumento n representa la posición del punto a lo largo del eje t . $C(l)$ es un coeficiente para la integración numérica trapezoidal con la forma

$$C(l) = \begin{cases} 1/2 & l = m - n, \text{ y } m \\ 1 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

4.2.1. Esquema de Iteración con Relajación

La ecuación G-L-M es una ecuación integral que puede ser resuelta en una forma iterativa. Reescribiendo la ecuación (4.5) como

$$K_m^i(n) = -R_m(n) - \sum_{l=m-n}^m C(l)K_m^{i-1}(l)R_m(l)\Delta t, \quad (4.6)$$

donde el superíndice respresenta el i -avo resultado de la iteración. Como se puede ver, el proceso de iteración sólo involucra los puntos a lo largo de la columna m en la figura 4.1.

Una forma de mejorar la convergencia del resultado, es utilizando un método de relajación de la forma

$$K_m^i(n) = (1 - \omega)K_m^{i-1}(n) + \omega \left[-R_m(n) - \sum_{l=m-n}^m C(l)K_m^{i-1}(l)R_m(l)\Delta t \right],$$

donde ω es el factor de relajación. Si ω tiene un valor entre 0 y 1, se dice que es un método bajo-relajado. Si el valor de ω cae entre 1 y 2, se dice que es un método de sobrerrelajación. La operación que realiza este esquema es una ponderación de un resultado *actual* de la iteración con el resultado de la iteración anterior. Por ejemplo, si se escoge un factor de relajación de $\omega = 0.5$, en la iteración i -ésima se obtendrá un

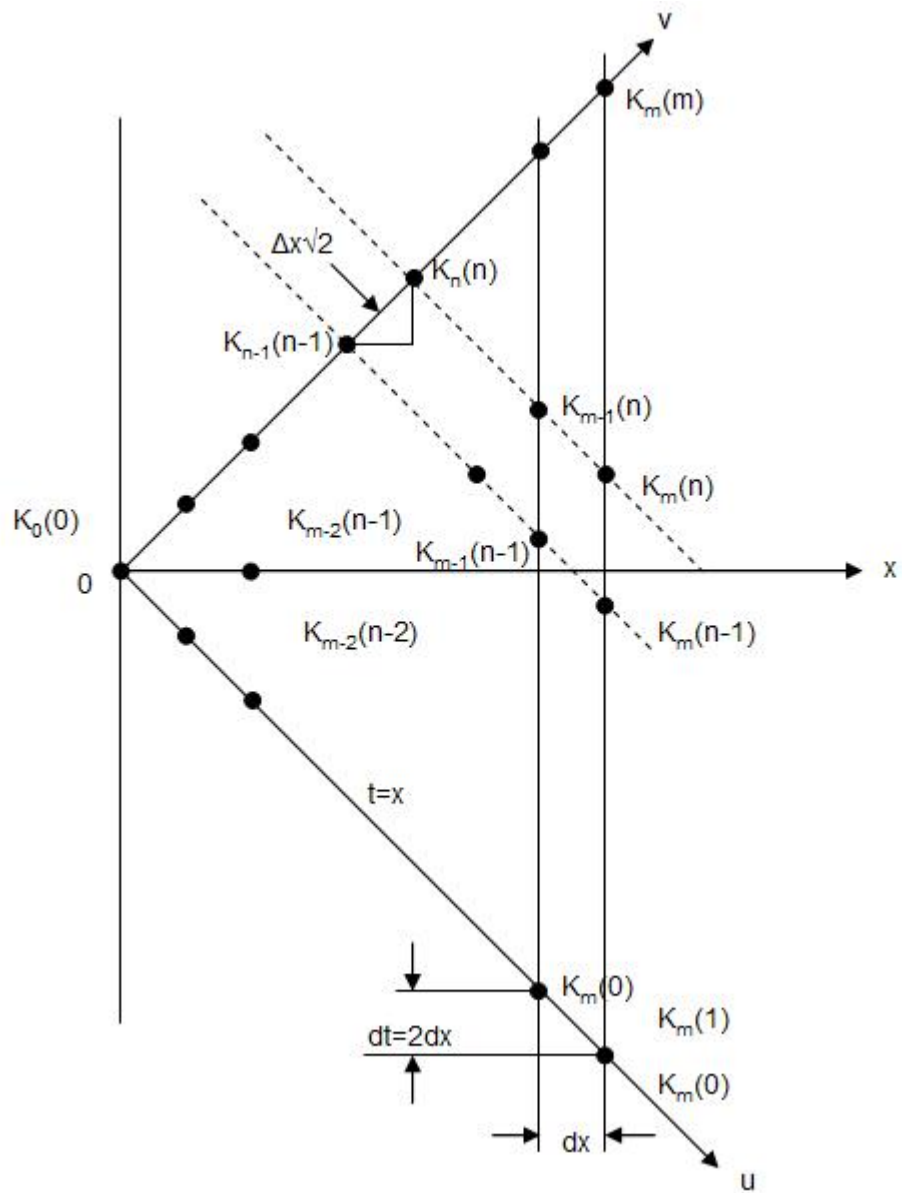


Figura 4.1: Rotación de los ejes x, t discretizados.

resultado que, a lo más, puede diferir del resultado de la iteración $i-1$ en un 50 %. No se permite que el valor de la iteración cambie bruscamente, esto para el caso bajo-relajado.

En la implementación del método se utilizaron valores de ω entre 0.5 y 0.1 con resultados similares. En realidad, se podía ver cómo los puntos de la malla convergían rápidamente a un valor después de algunas iteraciones debido a una buena selección de los valores iniciales.

4.2.2. Valores Iniciales para $K(x, t)$

Se sabe que la solución analítica de la ecuación G-L-M converge. Sin embargo, la convergencia de la versión discretizada no puede estar garantizada debido a los errores insertados de truncación y discretización. Por ello, es importante que se establezcan buenos valores iniciales para correr un menor riesgo de que las iteraciones no converjan a un valor. Para este caso un algoritmo de *leap-frogging* puede ser utilizado para proveer un valor inicial efectivo.

La forma en la que se obtiene el algoritmo de *leap-frogging* es sustituyendo la ecuación (4.3) en la ecuación (4.4) para obtener

$$\frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial t^2} - \frac{dK(x, x)}{dx} K(x, t) = 0 \quad (4.7)$$

y se introducen nuevas variables u y v definidas como

$$u = \frac{x - t}{\sqrt{2}},$$

y

$$v = \frac{x + t}{\sqrt{2}}.$$

Se obtiene entonces

$$\frac{\partial^2 K(u, v)}{\partial u \partial v} - \sqrt{2} \frac{\partial K(u, v)}{\partial v} K(u, v) = 0.$$

Al discretizar esta ecuación (Kritikos 1982) se tiene

$$K_m(n) = K_{m-1}(n) + K_{m-1}(n-1) + \{2\Delta x[K_n(n) - K_{n-1}(n-1)] - 1\} K_{m-2}(n-1), \quad (4.8)$$

para $n > 0$, $m > 0$, $n \neq m$, la cual, relaciona el punto de malla $K_m(n)$ con otros cinco puntos como se muestra en la figura 4.1. Hay que notar que el punto $K_m(n)$ se encuentra en la columna actual de reconstrucción, mientras que los otros cinco puntos con los que se relaciona se encuentran en columnas más a la izquierda. Estos cinco puntos pertenecen a una condición de frontera ó son puntos que ya han sido reconstruidos por las iteraciones del algoritmo. La ecuación (4.8) no provee valores para $K_m(m)$ ($n = m$), y es necesario adoptar un proceso diferente para encontrar estos valores.

Resolviendo la ecuación (4.5) para $K_m(m)$ se obtiene

$$K_m(m) = \frac{-R_m(m) - \sum_{l=0}^{m-1} C(l)K_m(l)R_m(l)\Delta t}{1 + C(m)R_m(m)\Delta t}, \quad m > 0, \quad m = n. \quad (4.9)$$

Más allá, a partir de la ecuación (4.2) se obtiene

$$K_m(0) = -R(0).$$

De esta forma se pueden obtener los valores iniciales de todos los puntos de $K_m(n)$ para poder ser alimentados al proceso iterativo de la solución de la ecuación G-L-M discretizada.

4.3. Reconstrucción del Potencial

El potencial en su forma discretizada, con la ayuda de la ecuación (4.3), puede ser expresado de la forma

$$v(m-1) = \frac{K_m(m) - K_{m-2}(m-2)}{\Delta x}, \quad m \geq 2. \quad (4.10)$$

Esta expresión puede ser utilizada para reconstruir el potencial cuando los valores de $K_m(m)$; $m = 0, 1, \dots, N$ ya han sido encontrados. Sin embargo, la ecuación (4.10) puede reconstruir el potencial para cada valor de x , excepto para $x = 0$, valor que corresponde al punto de la malla $m = 0$.

Para encontrar el valor del potencial en este punto, se sustituye la ecuación (4.1) en la ecuación (4.3), y se obtiene el resultado

$$v(x) = -2 \frac{dR(2x)}{dx} - K(x, x)R(2x) + \int_{-t}^x \frac{\partial}{\partial x} [K(x, y)R(y+x)] dy.$$

Debido a que $R(t) = 0$ para $t \leq 0$, se tiene en el origen

$$v(0) = -2 \left. \frac{dR(2x)}{dx} \right|_{x=0} = -4R'(0), \quad (4.11)$$

la cual es una fórmula exacta para recuperar el potencial en el origen.

El proceso de *inverse scattering* puede entonces ser resumido en los pasos siguientes:

1. Calcular el valor del potencial en $v(0)$ utilizando la ecuación (4.11).
2. Calcular los valores iniciales de $K_m(n)$ en la columna de reconstrucción utilizando las ecuaciones (4.9) y (4.8).

3. Utilizar la ecuación (4.6) para obtener una mejor aproximación de los valores de $K_m(n)$ de la columna de reconstrucción.
4. Calcular el potencial de $v(m-1)$ utilizando la ecuación (4.10).
5. Incrementar la columna de reconstrucción.

4.4. Ejemplo 1

En el capítulo 3 un coeficiente de reflexión con tres polos ha sido utilizado para diseñar una guía de onda plana.

$$r(k) = \frac{k_1 k_2 k_3}{(k - k_1)(k - k_2)(k - k_3)},$$

donde $k_1 = -C_1 - iC_2$, $k_2 = C_1 - iC_2$, $k_3 = ia$, $a > 0$. El polo k_3 se localiza en la parte positiva del eje imaginario, representando el modo guiado. Los polos k_1 y k_2 se encuentran en la mitad inferior del plano complejo k para representar los modos no guiados. La función característica de este coeficiente de reflexión es

$$R(t) = -\frac{a(C_1^2 + C_2^2)}{C_1^2 + (C_2 + a)^2} \exp \left\{ (-C_2 t) \left[\cos(C_1 t) + \frac{C_2 + a}{C_1} \sin(C_1 t) \right] - \exp(at) \right\}.$$

Se puede encontrar fácilmente que $v(0) = -4R'(0) = 0$. La figura 4.2 muestra la función de potencial obtenida de forma analítica de la forma

$$v(x) = \frac{24x(x^3 - 3)}{(2x^3 + 3)^2},$$

junto con su reconstrucción discretizada para valores de $C_1 = \sqrt{3}/2$, $C_2 = 1/2$ y $a = 1$. En la figura 3.4 se puede ver la localización de los polos para este ejemplo.

4.5. Ejemplo 2

Como otro ejemplo se puede presentar el caso en el que se toma una función de potencial que produce un índice de reflexión $r(k) = 0$, como el caso estudiado en el capítulo 2 y se trunca debido a la longitud finita del núcleo no-homogéneo. Se ha demostrado que en el caso truncado, el coeficiente de reflexión $r(k) \neq 0$ y que este tipo de guía soporta tanto modos guiados como modos no guiados.

El coeficiente de reflexión tiene la forma

$$r(k) = -\exp(i2kx_1) \frac{\operatorname{sech}^2(x_1)}{k^2 + 1 + [k + i \tanh(x_1)]^2}, \quad (4.12)$$

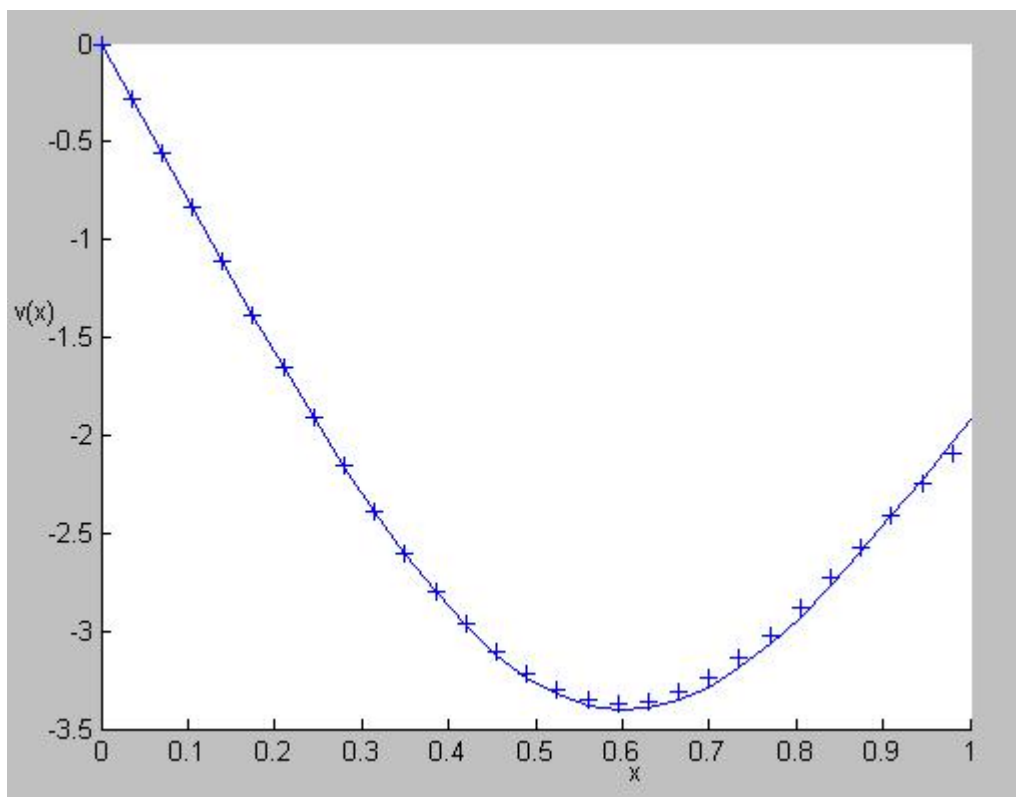


Figura 4.2: Ejemplo 1.

el cual tiene dos polos en el plano complejo k localizados en

$$k_1 = -\frac{i}{2}\{[2 - \tanh^2(x_1)]^{1/2} + \tanh(x_1)\}$$

y

$$k_2 = -\frac{i}{2}\{[2 - \tanh^2(x_1)]^{1/2} - \tanh(x_1)\}.$$

Ambos polos son imaginarios, pero debido a que $[2 - \tanh^2(x_1)]^{1/2} > |\tanh(x_1)|$, k_2 es el que se encuentra en la parte positiva y por lo tanto el que representa el modo guiado. El factor $\exp(i2kx_1)$ en la ecuación (4.12) representa un desplazamiento x_1 en el eje x relativo al potencial sin truncar. La misma ecuación puede ser reescrita de la forma

$$r_0(k) = -\frac{\operatorname{sech}^2(x_1)}{k^2 + 1 + [k + i\tanh(x_1)]^2},$$

en la cual el factor de fase ha sido eliminado. La función característica correspondiente a este coeficiente de reflexión es

$$R_0(t) = \frac{\operatorname{sech}^2(x_1)}{2[2 - \tanh^2(x_1)]^{1/2}} \times [-\exp(-0,5\{[2 - \tanh^2(x_1)]^{1/2} + \tanh(x_1)\}t) + \exp(0,5\{[2 - \tanh^2(x_1)]^{1/2} - \tanh(x_1)\}t)].$$

Con el uso de la ecuación (4.11) el potencial en el truncamiento es

$$v_0(0) = -2\operatorname{sech}^2(x_1).$$

En la figura 4.3 se muestra el potencial obtenido por la reconstrucción numérica, así como el potencial exacto dado por la expresión.

$$v_0(x) = -2\operatorname{sech}^2(x + x_1).$$

De esta forma concluye la discusión de este capítulo. Se ha visto cómo el método numérico resulta en un método práctico para resolver el problema de *inverse scattering* relacionado con el diseño del perfil de permitividad de una guía de onda plana dieléctrica de forma general a partir de un índice de reflexión cuyo lugar de polos contienen la información *a priori* de los modos de propagación que se tendrán dentro de la guía.

Se ha visto que se parte de la versión discretizada de la ecuación de Marchenko y que ésta se resuelve por medio de un algoritmo iterativo. Se mencionó que los valores iniciales de este algoritmo son importantes para tratar de garantizar la convergencia del resultado y que la implementación del algoritmo de *leap frogging* puede ayudar a encontrar valores iniciales efectivos. También se vió que un factor de relajación puede

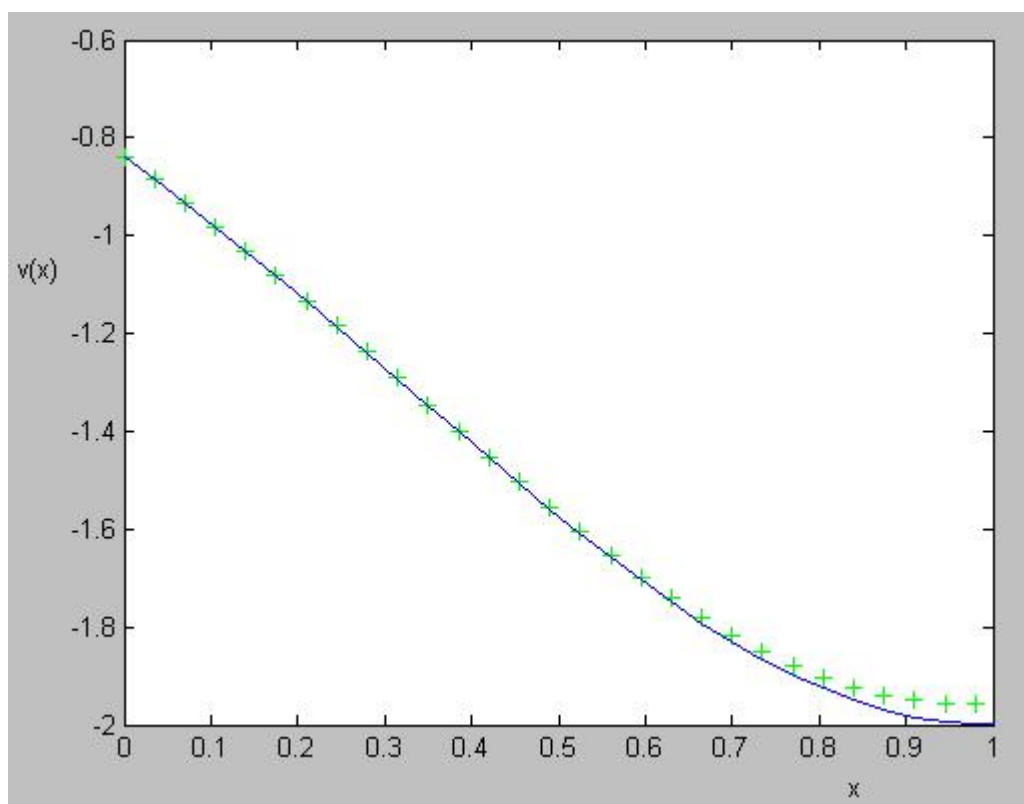


Figura 4.3: Ejemplo 2.

ayudar a que el resultado de cada iteración no varíe demasiado. Así mismo se vió que es necesaria cierta manipulación matemática para encontrar el valor de la función de potencial para $x = 0$, que el algoritmo no puede dar, pero por fortuna se puede llegar a una solución exacta en términos de la función característica R .

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se mostró el significado que se le da al problema de *scattering* e *inverse scattering* en el diseño de guías de onda planas. Se muestra que se puede asociar al problema de Sturm-Liouville para las funciones propias y valores propios, en el cual, las funciones propias se relacionan con ondas incidentes y transmitidas en una dirección y reflejadas en la dirección opuesta. Se introdujeron así mismo las nociones de *coeficiente de transmisión* y de *reflexión* que están involucrados con estas ondas transmitidas y reflejadas con un comportamiento asintótico característico. Se mostró también que existen soluciones para los valores propios pertenecientes al llamando *espectro continuo*, así como valores pertenecientes al *espectro discreto* y que las funciones propias están asociadas a un valor perteneciente a uno de cualquiera de estos dos espectros.

Se explicó que el problema de *scattering* se refiere a la obtención de los valores y las funciones propias a partir de una llamada *función de potencial* involucrada dentro de la ecuación de Sturm-Liouville. Y que, por el contrario, el problema de *inverse scattering* se refiere a la obtención de la función de potencial a partir de los *parámetros de scattering*. Haciendo referencia con esto último a los coeficientes de transmisión, reflexión y las constantes de normalización ligadas a los comportamientos asintóticos de las funciones propias de la ecuación de S-L.

En el capítulo 2 se mostró la aplicabilidad de la solución de los problemas de *scattering* e *inverse scattering* mediante la transformada de *inverse scattering* para la solución de la ecuación KdV. El procedimiento a *grosso modo* es el siguiente. Se parte de un perfil inicial de potencial, y resolviendo el problema de *scattering* para este perfil, se encuentran los parámetros de *scattering* también iniciales. Después se obtiene la evolución de los parámetros de *scattering* con ayuda de la ecuación KdV. Inmediatamente se resuelve el problema de *inverse scattering* con estos *nuevos* parámetros de *scattering* y se obtiene como resultado un perfil que se puede evaluar para cualquier *tiempo*.

Más adelante se planteó la relación entre el problema de Sturm-Liouville y *scattering* con el diseño de una guía de onda dieléctrica plana. Se pudo ver que la ecuación que gobierna los modos propagados dentro de la guía es también la llamada ecuación de Schrödinger similar a la ecuación S-L presentada con anterioridad como ejemplo del *scattering* e *inverse scattering*. Así mismo, se vio que la función de potencial de

esta ecuación esta relacionada con el perfil de permitividad de la guía no-homogénea. Se mostró que los polos del coeficiente de reflexión transversal de la guía contienen información acerca de la cantidad de modos guiados y no guiados dentro de guía de onda. Entonces, como lo marca el problema de *inverse scattering*, es posible obtener nuevamente la función de potencial y el perfil de permitividad de la guía de onda a partir de un coeficiente de reflexión prescrito.

Se mostró el problema de *inverse scattering* planteado por Kay. Con este planteamiento, es posible obtener la función de potencial ligada al problema de *scattering* a partir de la información de los polos de coeficiente de reflexión cuando éste tiene una forma racional. También se mostró la forma en la que el problema se puede discretizar y resolver de forma numérica de una manera rápida para fines prácticos. Se compararon los resultado de dos soluciones analíticas conocidas con los resultados del método numérico resultando satisfactorios.

Bibliografía

- [1] P. G. Drazin, y R. S. Johnson: *Solitons: an Introduction*, Cambridge texts in applied mathematics. Gran Bretaña. (1996).
- [2] D. B. Ge, A. K. Jordan y L. S. Tamil: *Numerical inverse scattering theory for the design of planar optical waveguides*, J.Opt.Soc.Am.A. Volume 11, No. 11, Noviembre 1994, pags. 2809-2815.
- [3] A. K. Jordan y S. Lakshmanasamy: *Inverse-scattering theory applied to the design of single mode planar optical waveguides*, J.Opt.Soc.Am.A. Volume 6, No. 8, Agosto 1989, pags. 1206-1212.
- [4] J. Xia, A. K. Jordan y J. A. Kong: *Inverse-scattering view of modal structures in inhomogeneous optical waveguides*, J.Opt.Soc.Am.A. Volume 9, No. 5, Mayo 1992, pags. 740-747.
- [5] D. W. Mills y L. S. Tamil: *Analisis of planar optical waveguides using scattering data*, J.Opt.Soc.Am.A. Volume 9, No. 10, Octubre 1992, pags. 1769-1778.
- [6] D. W. Mills y L. S. Tamil: *A New Approach to the Design of Graded Index Guided Wave Devices*, IEEE Microwave and Guided Wave Letters. Volume 1, No. 4, Abril 1991, pags. 87-89.
- [7] S. P. Yukon y B. Bendow: *Design of waveguides with prescribed propagation constants*, J.Opt.Soc.Am. Volume 70, No. 2, Febrero 1980, pags. 172-179.
- [8] A. K. Jordan, y H.Ñ. Kritikos: *An Application of One-Dimensional Inverse-Scattering Theory for Inhomogeneous Regions*, Antennas and Propagation, IEEE Transactions on. Volume 21, No. 6, Noviembre 1973, pags. 909-911.
- [9] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, y H. Segur: *The Inverse Scattering Transform-Fourier Analysis for Nonlinear Problems*, Studies in Applied Mathematics. Volume LIII, No. 4, Diciembre 1974, pags. 249-315.
- [10] J. B. Keller, I. Kay, y J. Shmoys: *Determination of the Potential from Scattering Data*, Physical Review. Volume 102, No. 2, Abril 1956, pags. 557-567.

- [11] A. Hasegawa y Y. Kodama : *Solitons in Optical Communications*, Oxford University Press. E.E.U.U. (1995).
- [12] G. Keiser: *Optical Fiber Communications*, Mc Graw Hill Inc. 2da Ed., E.E.U.U. (1991).
- [13] A. H. Cherin: *An Introduction to Optical Fibers*, Mc Graw Hill Book Company. E.E.U.U. (1976).
- [14] J. A. Kong: *Electromagnetic Wave Theory*, John Wiley & Sons. E.E.U.U. (1986).