

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS
SUPERIORES DE MONTERREY

CAMPUS MONTERREY

DIVISION DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PROGRAMA DE GRADUADOS EN CIENCIAS
Y HUMANIDADES



MONITOREO DE LA MEDIA DE UN PROCESO
MULTIVARIABLE SUJETO A CAMBIOS TIPO
TENDENCIA

T E S I S

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA
OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS
ESPECIALIDAD EN ESTADÍSTICA APLICADA

EUNICE LOPEZ CAMACHO

MAYO DEL 2001

**INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE
MONTERREY**

CAMPUS MONTERREY

DIVISIÓN DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

PROGRAMA DE GRADUADOS EN CIENCIAS Y HUMANIDADES



**MONITOREO DE LA MEDIA DE UN PROCESO MULTIVARIADO
SUJETO A CAMBIOS TIPO TENDENCIA**

TESIS

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE**

**MAESTRO EN CIENCIAS
ESPECIALIDAD EN ESTADÍSTICA APLICADA**

EUNICE LÓPEZ CAMACHO

MAYO DE 2001

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY

CAMPUS MONTERREY

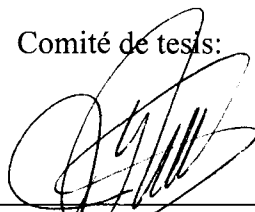
DIVISIÓN DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

PROGRAMA DE GRADUADOS EN CIENCIAS Y HUMANIDADES

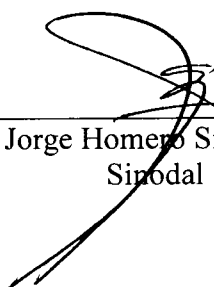
Los miembros del comité evaluador recomendamos que el presente trabajo de tesis presentado por Eunice López Camacho sea aceptado como requisito parcial para obtener el grado académico de Maestro en Ciencias con especialidad en:

ESTADÍSTICA APLICADA


Comité de tesis:



Dr. José Guadalupe Ríos Alejandro
Asesor

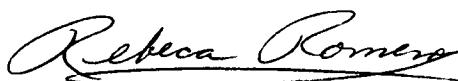


Dr. Jorge Homero Sierra Cavazos
Sinodal



Dr. Christian Geraud Garrigoux Michel
Sinodal

APROBADO



Dra. Rebeca Romero Álvarez
Coordinadora del Programa de la Maestría en Estadística Aplicada

Mayo de 2001

A mis padres, Salomón y Felicitas

A Arturo

Agradecimientos

Al Dr. José Guadalupe Ríos, por su paciencia y dedicación.

A las personas del Departamento de Matemáticas del Campus Monterrey por su amistad y apoyo, en especial a la Dra. Rebeca Romero y a mis sinodales, el Dr. Christian Garrioux y el Dr. Jorge H. Sierra. También a mi amiga Act. Laura Cabañas.

A mis hermanos Israel y Salomón Yassir, por todo su cariño.

Resumen

Cuando en un proceso es necesario monitorear más de una característica de calidad simultáneamente, la práctica usual ha sido elaborar cartas de control para cada variable por separado. Desafortunadamente, esto conduce a resultados equivocados sobre todo cuando las variables están altamente correlacionadas. Por otra parte, muchas veces los cambios en el proceso son de tipo *tendencia*, es decir, el proceso empieza bajo control, luego viene un desajuste y el parámetro de interés empieza a subir o bajar de manera gradual hasta que la carta de control detecta este cambio.

Este trabajo describe la construcción de cuatro cartas de control que son propuestas para el monitoreo multivariado: RIM, MAT, CSM1 y CSM2. Esto se logra a través de la adaptación de las cartas univariadas: Regresión Isotónica, Maxi-Min y CUSUM; en donde las primeras dos están diseñadas para monitorear la media de una variable normal sujeta a cambios tipos *tendencia*. La carta CUSUM es efectiva en detectar pequeños cambios en la media de un proceso.

Posteriormente se evalúa el desempeño de las cartas propuestas en delatar tanto cambios tipo *escalón* como cambios tipo *tendencia* considerando los escenarios de parámetros conocidos y desconocidos. Además, se realiza un estudio comparativo del desempeño de las cartas obtenidas con otras cuatro cartas mutivariadas ya existentes.

De las cuatro cartas propuestas, la carta MAT resultó tener mejor desempeño en cambios tipo *escalón* y tipo *tendencia* pequeños y grandes.

Índice general

Lista de tablas	<i>iv</i>
Lista de figuras	<i>vi</i>
Lista de abreviaturas	<i>viii</i>
1. Introducción	
1.1 Antecedentes.....	1
1.2 Planteamiento del problema	3
1.3 Antecedentes respecto al monitoreo multivariado.....	4
1.3.1 Carta T_1^2	5
1.3.2 Múltiples cartas CUSUM univariadas.....	13
1.3.3 Esquema multivariado CUSUM #1 de Pignatiello y Runger.....	14
1.3.4 Esquema multivariado CUSUM #2 de Pignatiello y Runger.....	15
1.4 Motivación y objetivo.....	17
2. Monitoreo del cambio tipo tendencia	
2.1 Introducción.....	19
2.2 Transformación del estadístico de Hotelling	20
2.2.1 Media y varianza conocidas	20
2.2.2 Media y varianza desconocidas	25
2.2.3 Comportamiento de la transformación cuando el proceso está fuera de control..	30
2.3 Derivación de la Carta RIM.....	37

2.3.1	Idea general de la regresión isotónica.....	37
2.3.2	Carta Regresión Isotónica para la media de un proceso	38
2.3.3	Construcción de la carta RIM.....	41
2.4	Derivación de la Carta MAT	46
2.4.1	Idea general de la prueba maxi-min	46
2.4.2	Carta basada en la prueba maxi-min para la media de un proceso	48
2.4.3	Construcción de la carta MAT.....	50
2.5	Derivación de las Cartas CSM1 y CSM2	55
2.5.1	Carta CUSUM	55
2.5.2	Construcción de la carta CSM1	56
2.5.3	Construcción de la carta CSM2	59
3.	Estudio comparativo de desempeño	
3.1	Introducción.....	63
3.2	Metodología.....	64
3.3	Propiedad de dirección invariante	65
3.4	Calibración de las cartas	66
3.5	PLC cuando el proceso está fuera de control	69
3.5.1	PLC cuando el proceso está fuera de control con cambio tipo escalón.....	70
3.5.2	PLC cuando el proceso está fuera de control con cambio tipo tendencia	73
4.	Conclusiones	
4.1	Introducción.....	79
4.2	Conclusiones.....	79
4.2.1	Escenario de parámetros conocidos con cambio tipo escalón.....	80
4.2.2	Escenario de parámetros desconocidos con cambio tipo escalón.....	80
4.2.3	Escenario de parámetros conocidos con cambio tipo tendencia.....	81
4.2.4	Escenario de parámetros desconocidos con cambio tipo tendencia	81
4.3	Sugerencias para futuras investigaciones	82

Apéndice A. Valores de PLC para el caso de parámetros desconocidos

A.1 PLC cuando el proceso está fuera de control con cambio tipo escalón.....83
A.2 PLC cuando el proceso está fuera de control con cambio tipo tendencia99

Apéndice B. Códigos en lenguaje C

B.1 Código en lenguaje C de la Carta RIM para el escenario de parámetros conocidos115
B.2 Código en lenguaje C de la Carta MAT para el escenario de parámetros conocidos120
B.3 Código en lenguaje C de la Carta CSM1 para el escenario de parámetros conocidos124
B.4 Código en lenguaje C de la Carta RIM para el escenario de parámetros desconocidos...128
B.5 Código en lenguaje C de la Carta MAT para el escenario de parámetros desconocidos..132
B.6 Código en lenguaje C de la Carta CSM1 para el escenario de parámetros desconocidos 137
B.7 Código en lenguaje C de la Carta CSM2 para el escenario de parámetros desconocidos 140

Referencias 144

Lista de tablas

1.1 Datos del ejemplo 1.1	8
2.1 Datos del ejemplo 2.2	43
2.2 Datos del ejemplo 2.3	52
2.3 Datos del ejemplo 2.4	58
2.4 Datos del ejemplo 2.5	62
3.1 Valores de PLC bajo control con parámetros conocidos.....	66
3.2 Valores de PLC bajo control con parámetros desconocidos.	67
PLC fuera de control con parámetros conocidos	
3.3 (cambio tipo escalón, $p = 2$)	70
3.4 (cambio tipo escalón, $p = 3$)	71
3.5 (cambio tipo escalón, $p = 10$)	72
3.6 (cambio tipo tendencia, $p = 2$).....	74
3.7 (cambio tipo tendencia, $p = 3$).....	75
3.8 (cambio tipo tendencia, $p = 10$).....	76
PLC fuera de control con parámetros desconocidos	
A.1 (cambio tipo escalón, $p = 2, n = 5$)	83
A.2 (cambio tipo escalón, $p = 2, n = 10$)	84
A.3 (cambio tipo escalón, $p = 2, n = 15$)	85
A.4 (cambio tipo escalón, $p = 2, n = 20$)	86

A.5 (cambio tipo escalón, $p = 2, n = 25$)	87
A.6 (cambio tipo escalón, $p = 2, n = 30$)	88
A.7 (cambio tipo escalón, $p = 3, n = 5$)	89
A.8 (cambio tipo escalón, $p = 3, n = 10$)	90
A.9 (cambio tipo escalón, $p = 3, n = 15$)	91
A.10 (cambio tipo escalón, $p = 3, n = 20$)	92
A.11 (cambio tipo escalón, $p = 3, n = 25$)	93
A.12 (cambio tipo escalón, $p = 3, n = 30$)	94
A.13 (cambio tipo escalón, $p = 10, n = 15$)	95
A.14 (cambio tipo escalón, $p = 10, n = 20$)	96
A.15 (cambio tipo escalón, $p = 10, n = 25$)	97
A.16 (cambio tipo escalón, $p = 10, n = 30$)	98
A.17 (cambio tipo tendencia, $p = 2, n = 5$)	99
A.18 (cambio tipo tendencia, $p = 2, n = 10$)	100
A.19 (cambio tipo tendencia, $p = 2, n = 15$)	101
A.20 (cambio tipo tendencia, $p = 2, n = 20$)	102
A.21 (cambio tipo tendencia, $p = 2, n = 25$)	103
A.22 (cambio tipo tendencia, $p = 2, n = 30$)	104
A.23 (cambio tipo tendencia, $p = 3, n = 5$)	105
A.24 (cambio tipo tendencia, $p = 3, n = 10$)	106
A.25 (cambio tipo tendencia, $p = 3, n = 15$)	107
A.26 (cambio tipo tendencia, $p = 3, n = 20$)	108
A.27 (cambio tipo tendencia, $p = 3, n = 25$)	109
A.28 (cambio tipo tendencia, $p = 3, n = 30$)	110
A.29 (cambio tipo tendencia, $p = 10, n = 15$)	111
A.30 (cambio tipo tendencia, $p = 10, n = 20$)	112
A.31 (cambio tipo tendencia, $p = 10, n = 25$)	113
A.32 (cambio tipo tendencia, $p = 10, n = 30$)	114

Lista de figuras

1.1 Cambio tipo escalón	3
1.2 Cambio tipo tendencia	3
Transformación Wilson-Hilferty y estandarización de 1000 datos	
2.1 con distribución χ^2 con 2 grados de libertad	22
2.2 con distribución χ^2 con 3 grados de libertad	23
2.3 con distribución χ^2 con 10 grados de libertad	24
Transformación z de Fisher y estandarización de 1000 datos	
2.4 con distribución F con 2 y 18 grados de libertad en el numerador y denominador	27
2.5 con distribución F con 10 y 10 grados de libertad en el numerador y denominador	28
2.6 con distribución F con 10 y 20 grados de libertad en el numerador y denominador	29
Curvas con distribución normal donde la media y varianza de cada curva corresponden a la media y varianza de las variables obtenidas al transformar y estandarizar variables	
2.7 χ_3^2 con parámetros de no centralidad $\lambda = 0, 0.25, 1$ y 4	33
2.8 $F_{2,18}$ con parámetros de no centralidad $\lambda = 0, 0.25, 1$ y 4	34
2.9 $F_{10,10}$ con parámetros de no centralidad $\lambda = 0, 0.25, 1$ y 4	35
2.10 $F_{10,20}$ con parámetros de no centralidad $\lambda = 0, 0.25, 1$ y 4	36
2.11 Gráfica de las 10 observaciones del ejemplo 2.2 en $p = 3$ dimensiones	43
2.12 Carta RIM	45

2.13	Carta MAT.....	54
2.14	Carta CSM1.....	58
2.15	Carta CSM2.....	62

Lista de abreviaturas

CEP	Control estadístico de proceso
CSM1	Nombre de la carta de control que surge de una primera adaptación de la carta CUSUM al caso multivariado
CSM2	Nombre de la carta de control que surge de una segunda adaptación de la carta CUSUM al caso multivariado
CUSUM	Suma acumulada (<i>en inglés: Cumulative Sum</i>)
LSC	Límite superior de control
MAT	Nombre de la carta de control que adapta al caso multivariado la prueba de Abelson y Tukey
MC1	Esquema multivariado CUSUM #1 de Pignatiello y Runger
MC2	Esquema multivariado CUSUM #2 de Pignatiello y Runger
RIM	Nombre de la carta de control que aplica la regresión isotónica al monitoreo multivariado
PAVA	Pool-Adjacent-Violators Algorithm
PLC	Promedio de longitud de corrida
RI	Regresión Isotónica
W&N	Múltiples cartas CUSUM univariadas de Woodal y Ncube

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1 Antecedentes

En un proceso industrial, cualquier característica de calidad varía inevitablemente. Pueden existir muchas causas de tal variación, sin embargo, se pueden clasificar básicamente en dos tipos: la variación producida por la misma aleatoriedad del proceso, la cual es virtualmente imposible de evitar, llamada *variación común*; y la variación producida por el desgaste o desajuste de las máquinas, errores del operador, materia prima defectuosa, etc., llamada *variación especial*. Esta última está relacionada con los principales problemas de calidad que puede tener un producto. Cuando se presenta la variación especial se dice que el proceso está fuera de control, por lo que una tarea importante e inmediata del ingeniero encargado del proceso es detectar tal variación y tratar de eliminarla. Las *cartas de control* juegan un papel importante en detectar la variación especial.

Las cartas de control son herramientas estadísticas utilizadas para monitorear cierta característica de calidad del producto de un proceso y detectan cuando el proceso está fuera de control. Además, las cartas de control son una parte importante del *control estadístico de proceso*.

Un control estadístico de proceso (*CEP*) es un procedimiento para monitorear cierta característica de calidad dentro de un proceso industrial. El procedimiento general del *CEP* se describe como sigue: periódicamente se toman muestras de tamaño m del proceso, se calcula un estadístico y el valor del estadístico se grafica en la carta de control correspondiente y se compara con ciertos valores llamados *límites de control*. Los valores de los límites de control se determinan de acuerdo a la distribución del estadístico bajo la suposición de que el proceso está bajo control. Si el valor del estadístico excede estos límites de control, entonces el proceso se declara fuera de control. Sin embargo, puede ocurrir que la carta de control emita una señal de alarma estando el proceso bajo control, a esto se le llama *falsa alarma*.

Existe una relación estrecha entre una carta de control y una prueba de hipótesis. Esencialmente, dicha carta o gráfica es una prueba de hipótesis de que el proceso está bajo control estadístico. Un punto que se ubica entre los límites de control es equivalente a no poder rechazar la hipótesis de que el proceso está bajo control, y otro que se encuentra fuera de los límites equivale al rechazo de dicha hipótesis (Montgomery, 1997).

Como en una prueba de hipótesis, puede considerarse la probabilidad del error tipo I de la carta de control (concluir que el proceso está fuera de control cuando en realidad no lo está) y la probabilidad del error tipo II de dicha carta (concluir que el proceso está bajo control cuando en realidad no es así). Se le llama potencia a la probabilidad de concluir que el proceso está fuera de control.

Existen dos escenarios distintos en el control estadístico de calidad (algunos autores los llaman fase I y fase II). El primer escenario ocurre cuando los parámetros necesarios para monitorear el proceso son conocidos y se utilizan para construir la carta de control.

El segundo escenario sucede cuando los parámetros del proceso no se conocen y se estiman en una primera etapa utilizando una muestra de n subgrupos de observaciones en control. La carta se construye con estas estimaciones. Una segunda etapa consiste en utilizar la carta de control para observaciones futuras con el fin de detectar cualquier desviación de los valores de los parámetros estimados en la primera etapa.

El desempeño de una carta de control se mide por medio del PLC (promedio de longitud de corrida); el número de muestras obtenidas hasta que la carta da la señal de alarma se define como la *longitud de una corrida*. La longitud de una corrida es una variable aleatoria y su promedio se conoce como PLC. Cuando el proceso está bajo control se desea un bajo índice de falsas alarmas o un PLC grande, mientras que cuando el proceso está fuera de control se desea que el PLC sea pequeño.

1.2 Planteamiento del problema

Tradicionalmente se ha considerado que el comportamiento del parámetro de interés en el proceso es de tipo *escalón*, es decir, el proceso empieza bajo control y el parámetro se comporta de una manera constante hasta un tiempo t , entonces viene un desajuste de la máquina y el parámetro sube (o baja) de manera súbita o en forma de escalón y se mantiene constante hasta que el cambio es detectado por la carta de control y se reajusta el proceso. Sin embargo, es más realista pensar que los cambios en el proceso son de tipo *tendencia*, es decir, el proceso empieza bajo control y se mantiene constante hasta un tiempo t ; luego viene un desajuste en el proceso y el parámetro de interés empieza a subir o bajar de manera gradual hasta que la carta detecta este cambio.

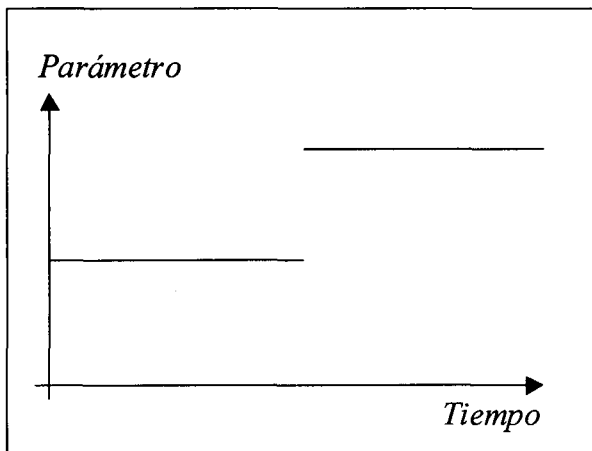


Figura 1.1 Cambio tipo escalón.

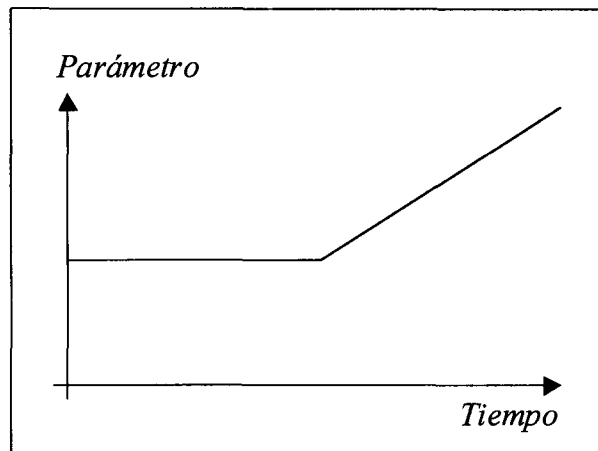


Figura 1.2 Cambio tipo tendencia.

En un trabajo reciente (José G. Ríos, 1997) se diseñaron cartas de control para monitorear la media de una variable continua en un proceso. Las cartas *Regresión Isotónica* y *Maxi-Min* que se obtuvieron resultaron tener mejor desempeño que las CUSUM (Cumulative Sum) para pendientes pequeñas en cambios graduales, mientras que para cambios tipo escalón tuvieron un desempeño similar al de la CUSUM.

Por otro lado, cuando en un proceso es necesario monitorear más de una característica de calidad simultáneamente, la práctica usual ha sido elaborar cartas de control para cada variable por separado. Desafortunadamente, esto conduce a resultados equivocados sobre todo cuando las variables están altamente correlacionadas (Ryan, 1989). Además, el error tipo I no se preserva, sino que se incrementa conforme el número de variables es mayor.

1.3 Antecedentes respecto al monitoreo multivariado

Se han desarrollado técnicas que permiten monitorear simultáneamente varias variables. En 1950, Seder propuso la *Multi-Vari Chart*, la cual es principalmente una herramienta gráfica que muestra la variabilidad entre diferentes factores (Ryan, 1989).

La carta de control multivariada más popular utiliza el estadístico T^2 de Hotelling y algunas veces es llamada carta multivariada de Shewhart.

Entre otras cartas de control multivariadas que han sido propuestas están las CUSUM multivariadas discutidas por Pignatiello y Runger (1990), Crosier (1988), Healy (1987), y Woodall y Ncube (1985). Lowry, Woodall y Champ (1992) presentaron la versión multivariada de la carta de control EWMA (por sus siglas en inglés Exponentially Weighted Moving Average).

Para ninguna de estas cartas se ha evaluado el desempeño en cuanto a detectar cambios tipo tendencia.

En lo que respecta a cartas de control diseñadas especialmente para monitorear la media de un proceso multivariado sujeto a cambio tipo tendencia, Chan y Li (1994) diseñaron una carta de control multivariada llamada M; sin embargo tampoco evalúan su desempeño.

En las siguientes subsecciones se describen con más detalle algunas de las técnicas para el monitoreo multivariado.

1.3.1 Carta T^2

Esta es la carta de control multivariada más utilizada y está basada en los estadísticos T_1^2 y T_2^2 . Esta carta de control fue desarrollada en 1947 por Hotelling, quien fue uno de los primeros estadísticos en notar la ineficiencia del uso de múltiples cartas univariadas cuando las variables de interés están correlacionadas. La distribución T^2 de Hotelling es el análogo para el caso multivariado de la distribución univariada t (Tracy y otros, 1997).

Considerando observaciones individuales (tamaño de muestra = 1), se tiene un vector $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_p)^t$ de variables de interés a monitorear de dimensión p , donde p es el número de variables que se monitorean. \mathbf{X} sigue una distribución normal multivariada con vector de medias $\boldsymbol{\mu}$ y matriz de varianzas y covarianzas $\boldsymbol{\Sigma}$. Los parámetros $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ se definen como sigue:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

donde $\mu_i = E(X_i)$ $i = 1, 2, \dots, p$.

$$\text{y } \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \sigma_{n1} & & & \sigma_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

donde $\sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j)$ $i, j = 1, 2, \dots, p$. Nótese que $\mathbf{\Sigma}$ es una matriz simétrica.

Si $\mathbf{\mu}$ y $\mathbf{\Sigma}$ son conocidos, entonces el estadístico T_1^2 es calculado mediante la expresión:

$$T_1^2 = (\mathbf{X} - \mathbf{\mu})' \mathbf{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{\mu}) \quad (1.3)$$

El estadístico T_1^2 sigue una distribución χ^2 con p grados de libertad (Alt, 1981) donde p es el número de variables a monitorear. \mathbf{X} es el vector observado. La señal de alarma se da cuando el valor de T_1^2 es mayor al límite superior de control (LSC):

$$LSC = \chi_{\alpha, p}^2 \quad (1.4)$$

En este caso, el PLC cuando el proceso está bajo control es $\frac{1}{\alpha}$, donde α es la probabilidad de que un vector observado esté fuera de la región de control.

Si el proceso está fuera de control, es decir, el vector de medias es $\mathbf{\mu}_1$, diferente del vector de medias nominal $\mathbf{\mu}$, el estadístico T_1^2 sigue una distribución χ^2 no central con p grados de libertad y parámetro de no centralidad

$$\lambda = (\mathbf{\mu}_1 - \mathbf{\mu})' \mathbf{\Sigma}^{-1} (\mathbf{\mu}_1 - \mathbf{\mu}) \quad (1.5)$$

Reduciendo esta expresión al caso cuando el proceso está bajo control ($\mathbf{\mu}_1 = \mathbf{\mu}$), el parámetro de no centralidad, λ , es cero y el estadístico T_1^2 sigue una distribución χ^2 central, como se había comentado.

De este modo, la potencia en esta carta está dada por:

$$P(\chi_{p,\lambda}^2 > \chi_{p,\alpha}^2) \quad (1.6)$$

donde $\chi_{p,\lambda}^2$ denota una variable aleatoria con distribución χ^2 no central con p grados de libertad y parámetro de no centralidad λ (Alt, 1981) y $\chi_{p,\alpha}^2$ es el 100(1- α)-ésimo percentil de la distribución χ_p^2 central.

En caso de que se tomen muestras de tamaño m en lugar de observaciones individuales, el estadístico T_1^2 es calculado mediante la expresión

$$T_1^2 = m(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}) \quad (1.7)$$

el cual, al igual que en el caso de la muestra de tamaño 1, sigue una distribución χ^2 con p grados de libertad, donde p es el número de variables a monitorear. $\bar{\mathbf{X}}$ es el vector de medias muestrales obtenido a partir de m observaciones (Alt, 1981).

Por otra parte, si $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ son desconocidos, el procedimiento de control se realiza en dos etapas. En la primera se calculan $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ y \mathbf{S}_n quienes son estimadores de $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

$$\text{y } \mathbf{S}_n = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & & \\ & & \ddots & \\ s_{n1} & & & s_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

donde

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{ik} \text{ para } i = 1, 2, \dots, p \quad (1.10)$$

$$y \quad s_{ij} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{ik} - \bar{x}_i)(x_{jk} - \bar{x}_j), \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, p \\ j = 1, 2, \dots, p \end{cases} \quad (1.11)$$

Donde \bar{x}_i representa el estimador de la media de la característica i a partir de una muestra de n vectores; mientras que s_{ij} es el estimador de la varianza de la variable i cuando $i=j$ y de la covarianza de las variables i y j cuando $i \neq j$. Obsérvese que S_n es una matriz simétrica.

Ejemplo 1.1. Obtener $\hat{\mu}$ y S_n a partir de la siguiente muestra observada de $n = 15$ vectores de dimensión $p = 3$.

Tabla 1.1 Datos del ejemplo 1.1

Número de observación	Variable 1	Variable 2	Variable 3
1	1.54	0.50	4.96
2	1.98	1.90	5.30
3	1.86	2.66	6.47
4	1.82	2.41	4.76
5	1.07	0.83	3.30
6	1.12	2.68	2.54
7	1.84	2.15	0.84
8	2.82	2.22	4.48
9	1.91	2.02	5.72
10	1.84	0.63	4.03
11	1.83	3.14	5.93
12	1.42	0.25	3.45
13	2.71	1.05	3.12
14	1.56	0.96	3.07
15	1.78	2.34	6.33

La media de la primera variable de calidad es:

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{15} \sum_{k=1}^{15} x_{1k} = \frac{1}{15} (1.54 + 1.98 + \dots + 1.78) = 1.807$$

El estimador de la media multivariada es:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.807 \\ 1.716 \\ 4.286 \end{pmatrix}$$

La varianza de la primera variable se calcula así:

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{1}{15-1} \sum_{k=1}^{15} (x_{1k} - \bar{x}_1)(x_{1k} - \bar{x}_1) = \frac{1}{14} \sum_{k=1}^{15} (x_{1k} - \bar{x}_1)^2 \\ &= \frac{1}{14} [(1.54 - 1.807)^2 + (1.98 - 1.807)^2 + \dots + (1.78 - 1.807)^2] \end{aligned}$$

$$s_{11} = 0.227$$

La covarianza de las variables 2 y 3 es:

$$\begin{aligned} s_{23} &= \frac{1}{15-1} \sum_{k=1}^{15} (x_{2k} - \bar{x}_2)(x_{3k} - \bar{x}_3) \\ &= \frac{1}{14} [(0.50 - 1.650)(4.96 - 4.286) + (1.90 - 1.650)(5.30 - 4.286) + \dots + (2.34 - 1.650)(6.33 - 4.286)] \end{aligned}$$

$$s_{23} = 0.436$$

De igual manera se calcula s_{22} , s_{33} , s_{12} y s_{13} . El estimador de la matriz de varianzas y covarianzas es:

$$\mathbf{S}_{15} = \begin{pmatrix} 0.227 & 0.095 & 0.129 \\ 0.095 & 1.087 & 0.436 \\ 0.129 & 0.436 & 2.498 \end{pmatrix}$$

Una vez obtenidos $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ y \mathbf{S}_n , debe verificarse que las observaciones utilizadas en el cálculo de las estimaciones se encuentran bajo control estadístico. Esto se hace calculando la siguiente expresión para cada vector \mathbf{X} utilizado en estimar $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ y \mathbf{S}_n

$$B = \frac{n}{(n-1)^2} (\mathbf{X} - \hat{\boldsymbol{\mu}})' \mathbf{S}_n^{-1} (\mathbf{X} - \hat{\boldsymbol{\mu}}) \quad (1.12)$$

la cual sigue una distribución Beta con parámetros $\frac{p}{2}$ y $\frac{n-p-1}{2}$ (Tracy y otros, 1997). La observación se considera bajo control si $B_{1-\frac{\alpha}{2}, \frac{p}{2}, \frac{n-p-1}{2}} < B < B_{\frac{\alpha}{2}, \frac{p}{2}, \frac{n-p-1}{2}}$. Las observaciones

que resulten estar fuera de control deben sustraerse de la muestra de tal modo que $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ y \mathbf{S}_n se calculen utilizando únicamente observaciones que se encuentren bajo control.

Cuando las n observaciones utilizadas en estimar $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ y \mathbf{S}_n están bajo control, se realiza la segunda etapa del procedimiento de control al calcular el estadístico T_2^2 para observaciones individuales:

$$T_2^2 = (\mathbf{X} - \hat{\boldsymbol{\mu}})' \mathbf{S}_n^{-1} (\mathbf{X} - \hat{\boldsymbol{\mu}}) \quad (1.13)$$

donde p es el número de variables a monitorear y n es el tamaño de la muestra de donde $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ fueron estimados en la primera etapa. \mathbf{X} es el vector observado en la segunda etapa. Es decir, se trata de observaciones diferentes a las utilizadas en estimar $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$. Además, en el estadístico T_2^2 el estimador del vector de medias $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ y la matriz $p \times p$ de varianzas y covarianzas muestral \mathbf{S}_n deben ser estadísticamente independientes bajo la hipótesis de normalidad.

En esta situación la expresión $\frac{n(n-p)}{p(n-1)(n+1)} T_2^2$ tiene una distribución F con p y $n-p$ grados de libertad en el numerador y denominador respectivamente (Tracy y otros, 1997).

Esta carta sólo tiene límite superior de control, el cual se calcula a través de la expresión:

$$LSC = \frac{p(n-1)(n+1)}{n(n-p)} F_{\alpha, p, n-p} \quad (1.14)$$

Aquí, el PLC del proceso bajo control es $\frac{1}{\alpha}$, donde α es la probabilidad de que un vector observado esté fuera de la región de control.

Si el proceso está fuera de control, es decir, el vector de medias es $\boldsymbol{\mu}_1$, diferente del vector de medias nominal $\boldsymbol{\mu}$, la expresión $\frac{n(n-p)}{p(n-1)(n+1)} T_2^2$ sigue una distribución $F_{p, n-p}$ no central con parámetro de no centralidad

$$\lambda = (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}) \quad (1.15)$$

Bajo la hipótesis de que el proceso está bajo control, ($\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}$) el parámetro de no centralidad es cero ($\lambda = 0$) y entonces $\frac{n(n-p)}{p(n-1)(n+1)} T_2^2$ tiene una distribución F centrada, como se había comentado.

De este modo, la potencia en esta carta está dada por:

$$P(F'_{p, n-p, \lambda} > F_{p, n-p, \alpha}) \quad (1.16)$$

donde $F'_{p, n-p, \lambda}$ denota una variable aleatoria con distribución F no central con p y $n-p$ grados de libertad y parámetro de no centralidad λ (Tracy y otros, 1997) y $F_{p, n-p, \alpha}$ es el $100(1-\alpha)$ -ésimo percentil de la distribución $F_{p, n-p}$ central.

En caso de que se tomen muestras de tamaño m en lugar de observaciones individuales cuando los parámetros son desconocidos, la primera etapa del procedimiento de control consiste en encontrar los estimadores de $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ a partir de una muestra de n subgrupos de tamaño m . $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ se obtiene promediando las medias de los n subgrupos. Del mismo modo, \mathbf{S}_n se determina promediando las matrices de varianzas y covarianzas muestrales de los n subgrupos.

Una vez obtenidos $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ y \mathbf{S}_n , debe verificarse que las observaciones utilizadas en el cálculo de las estimaciones se encuentran bajo control estadístico. Esto se hace calculando la siguiente expresión para cada vector $\bar{\mathbf{X}}$ utilizado en estimar $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ y \mathbf{S}_n

$$F = \frac{mn - n - p + 1}{mnp - np - mp + p} m(\bar{\mathbf{X}} - \hat{\boldsymbol{\mu}})' \mathbf{S}_n^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \hat{\boldsymbol{\mu}}) \quad (1.17)$$

la cual sigue una distribución F con grados de libertad p y $mn - n - p + 1$ (Ryan, 1989). El subgrupo se considera bajo control si $F_{1-\frac{\alpha}{2}; p, mn-n-p+1} < F < F_{\frac{\alpha}{2}; p, mn-n-p+1}$. Los subgrupos que resulten estar fuera de control deben sustraerse de la muestra de tal modo que $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ y \mathbf{S}_n se calculen utilizando únicamente observaciones que se encuentren bajo control.

Cuando los n subgrupos utilizados en estimar $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ y \mathbf{S}_n están bajo control, se realiza la segunda etapa del procedimiento de control. Cuando se tienen muestras de tamaño m , el estadístico T_2^2 es calculado mediante la expresión

$$T_2^2 = m(\bar{\mathbf{X}} - \hat{\boldsymbol{\mu}})' \mathbf{S}_n^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \hat{\boldsymbol{\mu}}) \quad (1.18)$$

donde p es el número de variables a monitorear y n es el número de subgrupos de donde $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ fueron estimados en la primera etapa. $\bar{\mathbf{X}}$ es el vector de medias muestrales obtenido a

partir de m observaciones. $\bar{\mathbf{X}}$ es calculado en la segunda etapa; es decir, emplea observaciones diferentes a las utilizadas en estimar $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$.

En esta situación la expresión $\frac{nm - n - p + 1}{p(n + 1)(m - 1)} T_2^2$ tiene una distribución F con p y $nm - n - p + 1$ grados de libertad en el numerador y denominador respectivamente (Ryan, 1989).

Tanto T_1^2 como T_2^2 representan una medida del cuadrado de la distancia entre $\boldsymbol{\mu}$ y el vector observado \mathbf{X} . Esta medida de distancia es llamada *distancia de Mahalanobis* o *distancia estadística* (Tracy y otros, 1997). Nótese que la distancia lineal o euclídeana asume $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}$.

1.3.2 Múltiples cartas CUSUM univariadas

Woodal y Ncube (1985) describen cómo un proceso normal multivariado de p dimensiones puede ser monitoreado construyendo una carta CUSUM univariada para cada una de las p variables. Para la i -ésima variable se forman las sumas acumuladas:

$$S_{i,t} = \max(0, S_{i,t-1} + X_{it} - K_i) \quad (1.19)$$

$$T_{i,t} = \min(0, S_{i,t-1} + X_{it} + K_i) \quad (1.20)$$

donde $h_i > S_{i,0} \geq 0$, $-h_i < T_{i,0} \leq 0$, $K_i > 0$ y X_{it} es la observación tomada en el tiempo t para la variable i . Para detectar un cambio en la media multivariada, el procedimiento señala que el proceso está fuera de control en el tiempo t cuando $S_{i,t} > h_i$ o $T_{i,t} < -h_i$ para algunos parámetros K_i y h_i . El parámetro K_i depende de la distancia entre μ y μ_1 (donde μ_1 es la media del proceso fuera de control especificado).

El esquema de múltiples cartas CUSUM univariadas dará una señal de fuera de control cuando cualquiera de las p cartas produzca una señal de fuera de control.

El PLC de este esquema es fácil de obtener cuando las variables monitoreadas son mutuamente independientes. Cuando éstas no son independientes se puede realizar una transformación sobre las variables originales para obtener variables independientes o bien, si las p sumas acumuladas son enteras, se puede representar este esquema como una cadena de Markov y a partir de la matriz de transición de probabilidades, calcular el PLC (Woodal y Ncube, 1985).

1.3.3 Esquema multivariado CUSUM #1 de Pignatiello y Runger

Este esquema de monitoreo multivariado propuesto por Pignatiello y Runger (1990) considera la suma acumulada:

$$\mathbf{C}_t = \sum_{i=t-n_t+1}^t (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}) \quad (1.21)$$

donde n_t está definida formalmente en la ecuación 1.25.

$$\frac{1}{n_t} \mathbf{C}_t = \left(\frac{1}{n_t} \sum_{i=t-n_t+1}^t \mathbf{X}_i \right) - \boldsymbol{\mu} \quad (1.22)$$

El vector $\frac{1}{n_t} \mathbf{C}_t$ representa la diferencia entre el promedio muestral acumulado y el valor nominal de la media.

La norma de \mathbf{C}_t está dada por:

$$\|C_t\| = \sqrt{C_t' \Sigma^{-1} C_t} \quad (1.23)$$

la cual es una medida de la distancia de la media nominal del proceso a la media estimada con las últimas n_t observaciones.

La carta de control multivariada se construye definiendo $MC1$ como:

$$MC1_t = \max\{\|C_t\| - kn_t, 0\} \quad (1.24)$$

y

$$n_t = \begin{cases} n_{t-1} + 1 & \text{si } MC1_{t-1} > 0 \\ 1 & \text{cualquier otro caso} \end{cases} \quad (1.25)$$

De este modo, n_t puede ser interpretada como el número de muestras tomadas desde la última vez que el estadístico $MC1_t$ tomó el valor de 0.

El valor de k sugerido por Pignatiello y Runger (1990) es un medio de la medida de distancia entre $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\mu}_1$ (donde $\boldsymbol{\mu}_1$ es la media especificada del proceso fuera de control).

Obsérvese que el estadístico $MC1$ contiene información de los últimos n_t observaciones. Este esquema sólo tiene límite superior de control. Si $MC1$ excede el valor del LSC designado por h , entonces el proceso se determina como fuera de control.

1.3.4 Esquema multivariado CUSUM #2 de Pignatiello y Runger

En lugar construir el esquema multivariado CUSUM basándose en la distancia del promedio muestral acumulado a $\boldsymbol{\mu}$, se puede considerar la suma acumulada de los cuadrados de las distancias entre cada media muestral y $\boldsymbol{\mu}$.

El cuadrado de la distancia D_t^2 de la t -ésima muestra al valor nominal $\boldsymbol{\mu}$ está dado por:

$$D_t^2 = (\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}) \quad (1.26)$$

Como ya se había dicho, cuando el proceso está en control D_t^2 tiene distribución χ^2 central con p grados de libertad. Entonces, dado que el valor esperado de una variable χ^2 es igual a sus grados de libertad, se tiene que $E(D_t^2) = p$ si el proceso está bajo control. Además, D_t^2 tiene distribución χ_p^2 no central cuando el proceso está fuera de control.

Se forma la suma acumulada univariada de un sólo lado:

$$MC2_t = \max\{0, MC2_{t-1} + D_t^2 - k\} \quad (1.27)$$

con $MC2_0 = 0$. El proceso se considera fuera de control si $MC2$ excede el valor del *LSC* designado por h . El valor de k propuesto por Pignatiello y Runger (1990) es:

$$k = E(D_t^2) + \frac{1}{2} \lambda^2 = p + \frac{1}{2} \lambda^2 \quad (1.28)$$

donde λ^2 es el cuadrado de la distancia estadística o de Mahalanobis entre $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\mu}_1$.

Ambos esquemas multivariados el CUSUM #1 y el CUSUM#2, se basan en la forma cuadrática del vector de medias. La diferencia entre los dos esquemas radica en el punto en que se realiza la suma acumulada. CUSUM#1 acumula los vectores observados, \mathbf{X} , *antes* de producir la forma cuadrática; mientras que CUSUM#2 calcula la forma cuadrática para cada observación \mathbf{X} , y posteriormente acumula *esas* formas cuadráticas.

1.4 Motivación y objetivo

Las cartas de control univariadas para características de calidad individuales no proveen de una región “de control” adecuada. De modo que las cartas de control multivariadas son necesarias. Entre las más conocidas está la carta T^2 de Hotelling, la cual es útil en la detección de cambios tipo escalón en las medias de las características, pero no es efectiva para detectar otros fenómenos de proceso fuera de control, como los cambios tipo tendencia (Chan y Li, 1994).

Por tal razón, en este trabajo se propone adaptar la carta de control CUSUM univariada y las cartas de Regresión Isotónica y Maxi-Min propuestas por Ríos (1997) al monitoreo de un proceso multivariado, a través de una transformación de los estadísticos T_1^2 y T_2^2 de Hotelling. La transformación convierte estos estadísticos en nuevas variables que siguen aproximadamente una distribución normal.

La motivación para construir nuevas cartas si ya existen varias es el **desempeño**. El uso de cartas de control con buen desempeño permite un mayor control en la calidad del producto del proceso. Entre mejor desempeño tengan las cartas, más rápido detectan que el proceso se salió de control, lo cual evita un gasto innecesario de materia prima, se permite un ahorro de energía y además se evita acelerar el deterioro o desajuste de las máquinas.

En el capítulo dos de este trabajo se describe la construcción de cuatro cartas de control que son propuestas para el monitoreo multivariado. En el capítulo tres se evalúa el desempeño de estas cartas en delatar cambios tipo escalón y tipo tendencia. Además, se realiza un estudio comparativo del desempeño de las cartas obtenidas con las siguientes cartas multivariadas ya existentes:

- Carta multivariada tipo Shewhart (basada en los estadísticos T_1^2 o T_2^2 de Hotelling).
- Múltiples cartas CUSUM univariadas introducidas por Woodall y Ncube (1985).
- Esquemas CUSUM #1 multivariado introducido por Pignatiello y Runger (1990).
- Esquemas CUSUM #2 multivariado introducido por Pignatiello y Runger (1990).

En el capítulo cuatro se comentan los resultados y se enuncian las conclusiones finales. Los apéndices presentan tablas con los resultados correspondientes al escenario de parámetros desconocidos y los códigos de los programas implementados en el estudio de desempeño realizado.

Capítulo 2

MONITOREO DEL CAMBIO TIPO TENDENCIA

2.1 Introducción

En este capítulo se presenta la construcción de cartas de control para monitorear una media multivariada a través de la adaptación las siguientes cartas:

- Carta Regresión Isotónica.
- Carta Maxi-Min.
- Carta CUSUM.

En donde las primeras dos están diseñadas para monitorear la media de una variable normal sujeta a cambios tipos tendencia. Por otra parte, la carta CUSUM es efectiva en detectar pequeños cambios en la media de un proceso.

Estas tres cartas de control fueron originalmente diseñadas para monitorear la media de una variable de calidad (monitoreo univariado). En este trabajo se pretende adaptarlas al monitoreo multivariado en donde se desea detectar cambios en el vector de medias de p características de calidad.

2.2 Transformación del estadístico de Hotelling

El punto de partida para la construcción de las cartas propuestas en este trabajo será la carta desarrollada por Hotelling en 1947 para el control multivariado, donde se utilizan los estadísticos T_1^2 y T_2^2 .

Suponga que se desean monitorear p variables $X_1, X_2, X_3, \dots, X_p$; por ejemplo, si a las unidades de un proceso productivo se les miden p características de calidad de interés. Con estas mediciones, se obtiene un vector $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_p)^t$. Además, se asume que \mathbf{X} sigue una distribución normal multivariada con vector de medias $\boldsymbol{\mu}$ y matriz de varianzas y covarianzas $\boldsymbol{\Sigma}$. Se supone independencia entre un vector de observaciones y otro.

Se trata de observaciones individuales, es decir, cada vector observado consiste en las mediciones de las p características de calidad en una muestra de tamaño 1. Se quiere probar si la media multivariada ha iniciado un comportamiento creciente o decreciente.

2.2.1 Media y varianza conocidas

Si la media del proceso bajo control $\boldsymbol{\mu}$, y la matriz de varianzas y covarianzas, $\boldsymbol{\Sigma}$, son conocidas, entonces se calcula el estadístico $T_{1i}^2 = (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})$ para cada vector \mathbf{X}_i . Esto transforma el i -ésimo vector de p observaciones (una observación por cada característica de calidad) en un escalar, T_{1i}^2 , con distribución χ^2 con p grados de libertad (Alt, 1981).

El siguiente paso consiste en transformar el estadístico T_1^2 en una variable con distribución aproximadamente normal.

Kendall y Stuart (1958) mencionan dos transformaciones para que una variable aleatoria con distribución χ^2 con p grados de libertad se transforme en una nueva variable que siga una distribución aproximadamente normal:

- 1) La transformación de Fisher establece que la variable aleatoria $\sqrt{2\chi^2}$ se distribuye aproximadamente normal con media $\sqrt{2p-1}$ y varianza unitaria. Kendall y Stuart (1958) muestran que, conforme p crece, $\sqrt{2\chi^2}$ tiende a la normalidad considerablemente más rápido que χ^2 .
- 2) La transformación Wilson-Hilferty, también llamada transformación de raíz cúbica, indica que para valores grandes de p , la expresión $\left(\frac{\chi^2}{p}\right)^{1/3}$ tiene una distribución aproximadamente normal con media $1 - \frac{2}{9p}$ y varianza $\frac{2}{9p}$.

Kendall y Stuart (1958) señalan que la aproximación Wilson-Hilferty es más exacta y es la que se utiliza en este trabajo.

A partir del estadístico T_1^2 (ecuación 1.3) se construyen las siguientes variables:

$$W_1 = \left(\frac{T_1^2}{p}\right)^{1/3} \quad (2.1)$$

$$y \quad Z_1 = \frac{W_1 - \left(1 - \frac{2}{9p}\right)}{\sqrt{\frac{2}{9p}}} \quad (2.2)$$

Z_1 es una variable continua con distribución aproximada a la normal estándar univariada.

Las siguientes tres figuras representan 1000 datos generados aleatoriamente que tienen distribución χ^2 con 2, 3 y 10 grados de libertad. A tales datos se les aplicó la transformación de Wilson-Hilferty y se estandarizaron.

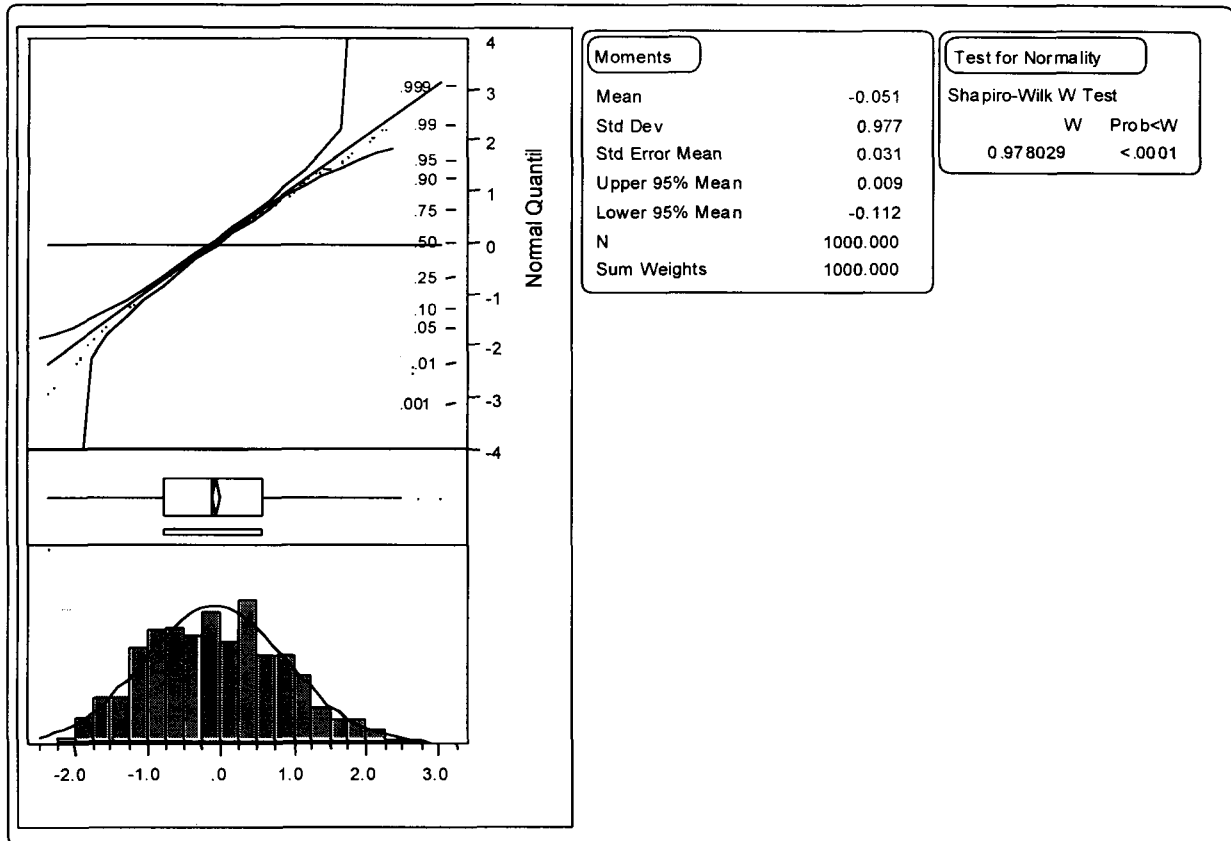


Figura 2.1 Transformación Wilson-Hilferty y estandarización de 1000 datos con distribución χ^2 con 2 grados de libertad, los cuales fueron generados aleatoriamente con el software JMPIN.

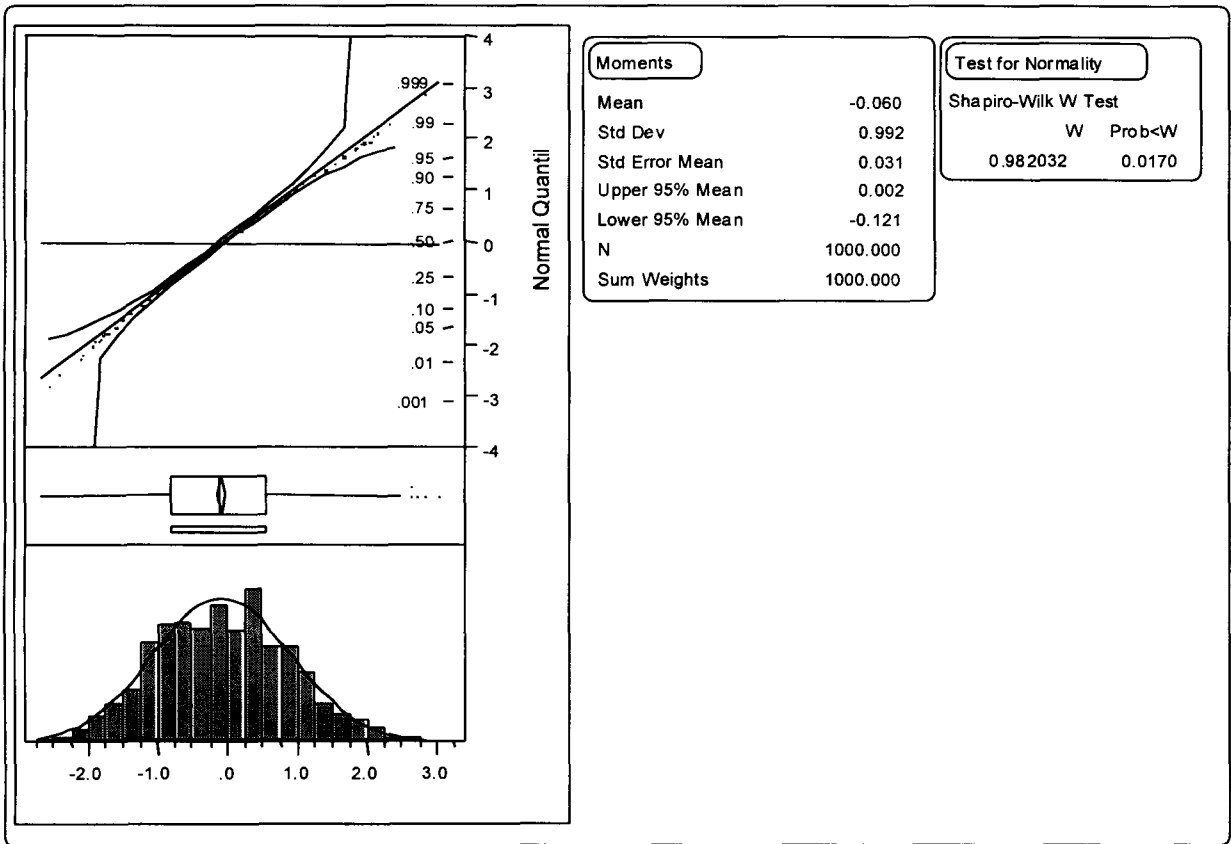


Figura 2.2 Transformación Wilson-Hilferty y estandarización de 1000 datos con distribución χ^2 con 3 grados de libertad, los cuales fueron generados aleatoriamente con el software JMPIN.

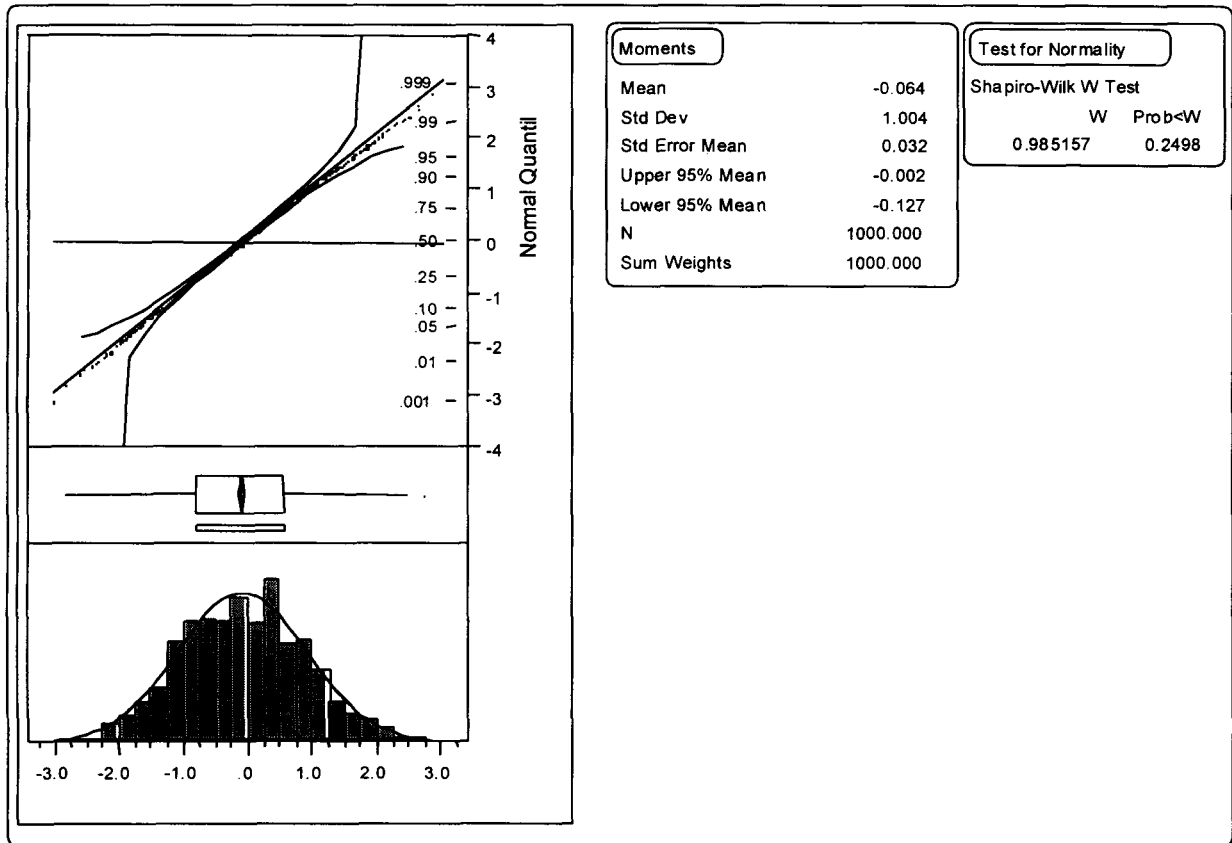


Figura 2.3 Transformación Wilson-Hilferty y estandarización de 1000 datos con distribución χ^2 con 10 grados de libertad, los cuales fueron generados aleatoriamente con el software JMPIN.

Obsérvese que el ajuste de la transformación es mejor en cuanto mayor sea el número de grados de libertad.

2.2.2 Media y varianza desconocidas

Por otra parte, si la media del proceso bajo control, $\boldsymbol{\mu}$, y la matriz de varianzas y covarianzas, $\boldsymbol{\Sigma}$, son desconocidas; entonces la construcción de la carta de control consta de dos etapas. En la primera, se encuentran los estimadores $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ y \mathbf{S}_n a partir de una muestra de n vectores observados que se encuentren bajo control. Posteriormente, en la etapa 2, se aplica la carta a observaciones futuras al calcular el estadístico $T_{2i}^2 = (\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})' \mathbf{S}_n^{-1} (\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})$, para cada vector \mathbf{X}_i . Otra vez, el cálculo de T_{2i}^2 transforma el i -ésimo vector de p observaciones en un escalar (Tracy y otros, 1997).

El siguiente paso consiste en transformar el estadístico T_2^2 en una variable con distribución aproximadamente normal. El estadístico T_2^2 será utilizado en la expresión $\frac{n(n-p)}{p(n-1)(n+1)} T_2^2$, ya que se sabe tiene una distribución $F_{p, n-p}$ (Tracy y otros, 1997).

Se consideraron dos transformaciones para convertir a una variable F en otra con distribución aproximadamente normal:

- 1) Tiku (1981) señala que a partir de la transformación de raíz cúbica de una variable ji-cuadrada, una variable con distribución F_{v_1, v_2} también puede transformarse en otra variable con distribución aproximada normal estándar mediante la expresión:

$$z = \frac{(F)^{1/3} \left(1 - \frac{2}{9v_2} \right) - \left\{ 1 - \frac{2}{9v_1} \right\}}{\left\{ \frac{2}{9v_1} + \frac{2}{9v_2} (F)^{2/3} \right\}^{1/2}} \quad (2.3)$$

- 2) Kendall y Stuart (1958) indican que la expresión $z = \frac{1}{2} \ln F$ transforma la distribución $F_{p, n-p}$ en una distribución z de Fisher y tiene la ventaja de ser una aproximación de la

distribución normal con media $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{p}\right)$ y varianza $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{n-p}\right)$ cuando ambos grados de libertad son grandes. Obsérvese que esta transformación es más simple que la anterior.

En este trabajo se aplica la transformación z de Fisher.

A partir del estadístico T_2^2 (ecuación 1.13) se construyen las siguientes variables:

$$F = \frac{n(n-p)}{p(n-1)(n+1)} T_2^2 \quad (2.4)$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \ln F \quad (2.5)$$

$$\text{y } Z_2 = \frac{W_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{p}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{n-p}\right)}} \quad (2.6)$$

Ahora Z_2 es una variable continua con distribución aproximada a la normal estándar univariada.

Las siguientes gráficas representan 1000 datos generados aleatoriamente que tienen distribución F . A tales datos se les aplicó la transformación z de Fisher y se estandarizaron. La primera gráfica, la Figura 2.4, representa la transformación de una distribución $F_{2,18}$ para ilustrar el caso donde los grados de libertad son muy diferentes entre sí. Mientras que la Figura 2.5, a partir de una $F_{10,10}$, ilustra el caso donde hay equilibrio entre los valores de los grados de libertad. Se muestra también un caso intermedio en la Figura 2.6.

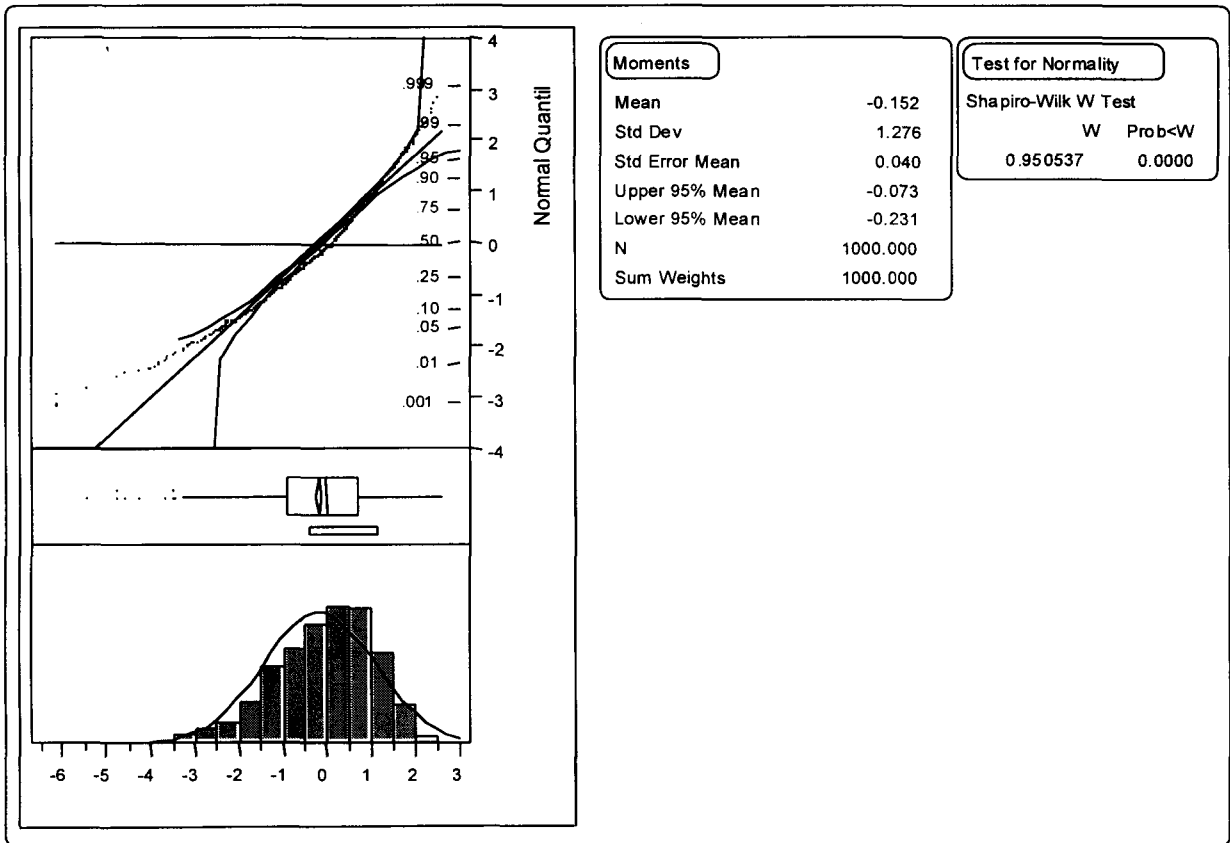


Figura 2.4 Transformación z de Fisher y estandarización de 1000 datos con distribución F con 2 y 18 grados de libertad en el numerador y denominador respectivamente, los cuales fueron generados aleatoriamente con el software JMPIN.

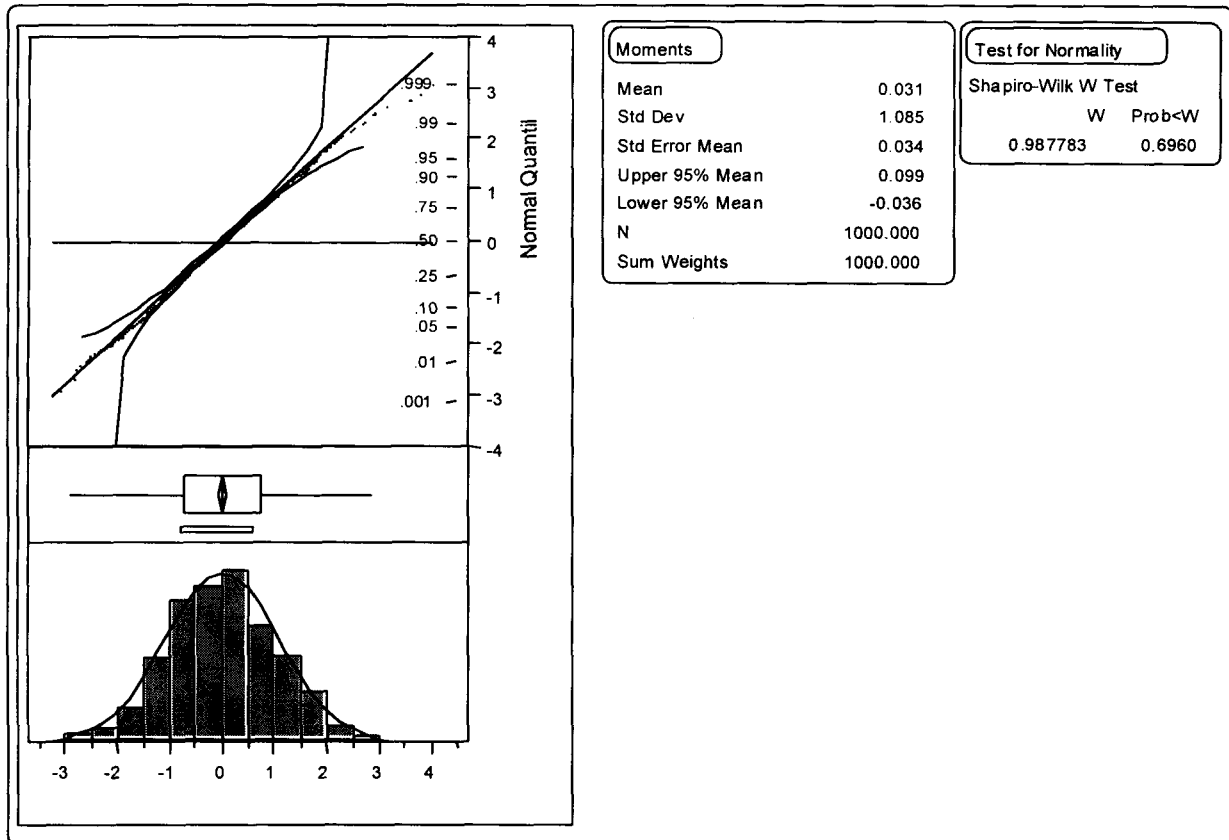


Figura 2.5 Transformación z de Fisher y estandarización de 1000 datos con distribución F con 10 y 10 grados de libertad en el numerador y denominador, los cuales fueron generados aleatoriamente con el software JMPIN.

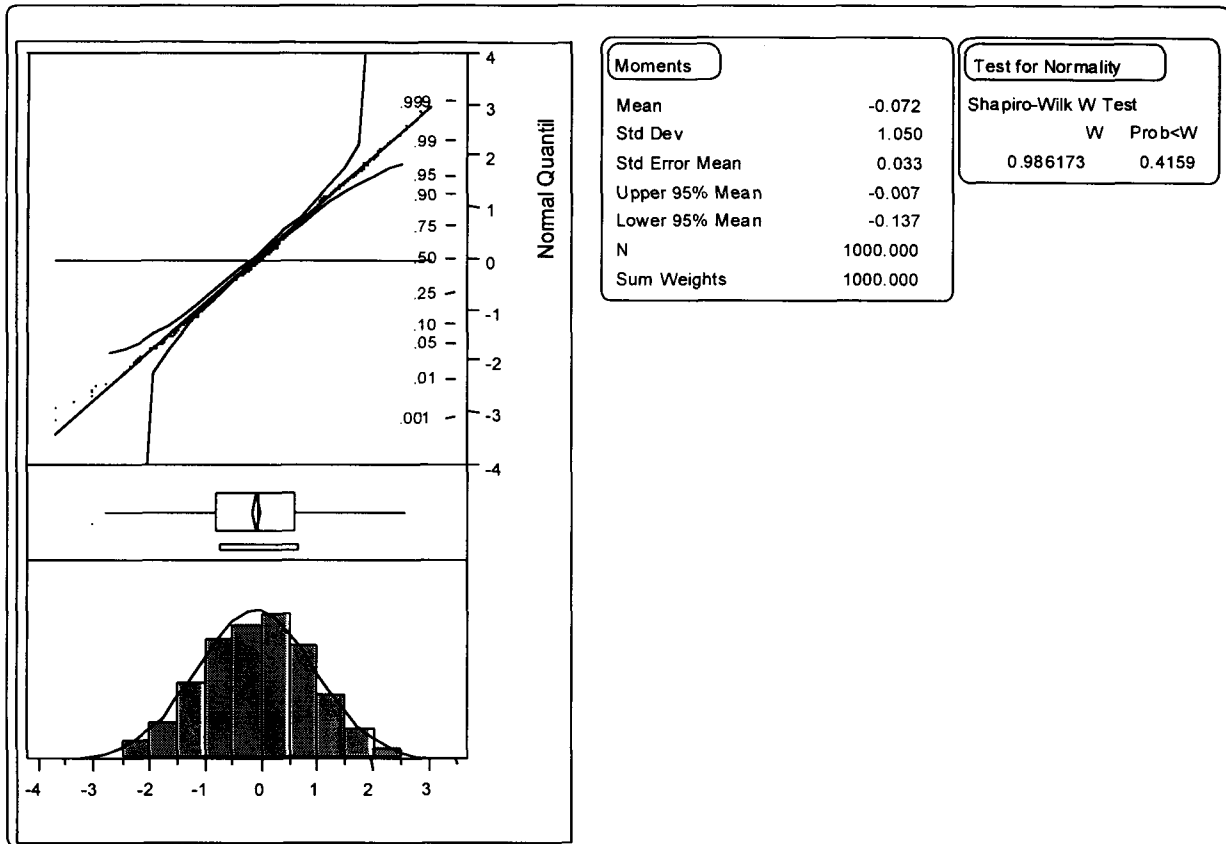


Figura 2.6 Transformación z de Fisher y estandarización de 1000 datos con distribución F con 10 y 20 grados de libertad en el numerador y denominador, los cuales fueron generados aleatoriamente con el software JMPIN.

Obsérvese que el ajuste a la distribución normal es muy adecuado para el caso de $F_{10,10}$ y $F_{10,20}$ donde el número de grados de libertad no es muy pequeño. Sin embargo, para el caso de $F_{2,18}$ (Figura 2.4), el ajuste es discutible. No obstante, como se verá en el capítulo 3 (sección 3.2), esta “desviación” de la distribución normal está considerada al determinar el límite de control de las cartas propuestas, obteniendo diferentes límites de control para diferentes grados de libertad de la distribución F involucrada.

2.2.3 Comportamiento de la transformación cuando el proceso está fuera de control

Cuando el proceso está fuera de control, las expresiones T_1^2 y $F = \frac{n(n-p)}{p(n-1)(n+1)}T_2^2$ se distribuyen χ^2 no central y F no central respectivamente (sección 1.3.1). El parámetro de no centralidad en ambos casos está dado por $\lambda = (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu})$.

Sin embargo, dado que se trabaja bajo la hipótesis de que el proceso está en control, la transformación Wilson-Hilferty aplicada sobre T_1^2 (ecuación 1.3) y la transformación z de Fisher aplicada sobre $F = \frac{n(n-p)}{p(n-1)(n+1)}T_2^2$ (ecuación 2.4) siempre trabajan bajo el supuesto de que se tienen variables χ^2 y F centradas.

Por otra parte, al aplicar las transformaciones, se espera que la media de la variable transformada sea mayor en cuanto mayor sea el verdadero parámetro de no centralidad de las distribuciones χ^2 y F asociadas a los estadísticos T_1^2 y T_2^2 .

Tiku (1981) establece la siguiente la transformación para una variable χ^2 no central:

$$Y_1 = \left(\frac{\chi^2}{p + \lambda} \right)^{1/3} \quad (2.7)$$

donde p son los grados de libertad y λ es el parámetro de no centralidad. Y_1 sigue una distribución aproximadamente normal. En este caso,

$$E(Y_1) = 1 - \frac{2(p + 2\lambda)}{9(p + \lambda)^2} \quad (2.8)$$

Esta transformación es una generalización al caso no central de la transformación

$$W_1 = \left(\frac{\chi^2}{p} \right)^{1/3} \quad (\text{ecuación 2.1}).$$

En el monitoreo de un proceso, dado que se trabaja bajo la hipótesis de que el proceso está en

control, aún en el caso de no centralidad se aplica la transformación $W_1^* = \left(\frac{\chi^2}{p} \right)^{1/3}$ como se

indica en la ecuación 2.1. En este caso, W_1^* denotará al resultado obtenido de la ecuación 2.1 cuando el proceso está fuera de control ($\lambda > 0$). Obsérvese que

$$W_1^* > Y_1 \quad \forall \chi^2 > 0, \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall p > 0 \quad (2.9)$$

de este modo

$$E(W_1^*) > E(Y_1) \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall p > 0 \quad (2.10)$$

Es decir, si se tiene una variable χ^2 no central y se transforma con las expresiones

$W_1^* = \left(\frac{\chi^2}{p} \right)^{1/3}$ y $Y_1 = \left(\frac{\chi^2}{p + \lambda} \right)^{1/3}$, el valor esperado de la variable transformada es mayor si se

ha aplicado W_1^* .

Por otra parte, cuando $\lambda = 0$ (χ^2 central), el valor esperado de $W_1 = \left(\frac{\chi^2}{p} \right)^{1/3}$ está dado por

$$E(W_1) = 1 - \frac{2}{9p} \quad (2.11)$$

según lo indica la transformación Wilson-Hilferty.

Comparando (2.8) con (2.11):

$$E(Y_1) > E(W_1) \quad (2.12)$$

porque

$$1 - \frac{2(p+2\lambda)}{9(p+\lambda)^2} > 1 - \frac{2}{9p} \quad \forall \lambda > 0, \forall p > 0$$

Es decir, dado un valor de p , si se tiene una variable χ^2 central y otra variable χ^2 no central

y se les aplican las transformaciones $W_1 = \left(\frac{\chi^2}{p}\right)^{1/3}$ y $Y_1 = \left(\frac{\chi^2}{p+\lambda}\right)^{1/3}$ respectivamente; el

valor esperado de la variable transformada es mayor cuando χ^2 es no central ($\lambda > 0$).

Ahora, de (2.10) y (2.12) se tiene

$$\begin{aligned} E(W_1^*) &> E(Y_1) > E(W_1) \\ E(W_1^*) &> E(W_1) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Es decir, se concluye que el valor esperado de la variable χ^2 después de la transformación

$\left(\frac{\chi^2}{p}\right)^{1/3}$ es mayor si $\lambda > 0$.

Para ilustrar el caso de una variable con distribución χ^2 con 3 grados de libertad y parámetro de no centralidad λ , la siguiente figura representa la distribución aproximadamente normal

estándar obtenida con la transformación Wilson-Hilferty (ecuaciones 2.1 y 2.2). Se consideran cuatro diferentes parámetros de no centralidad.

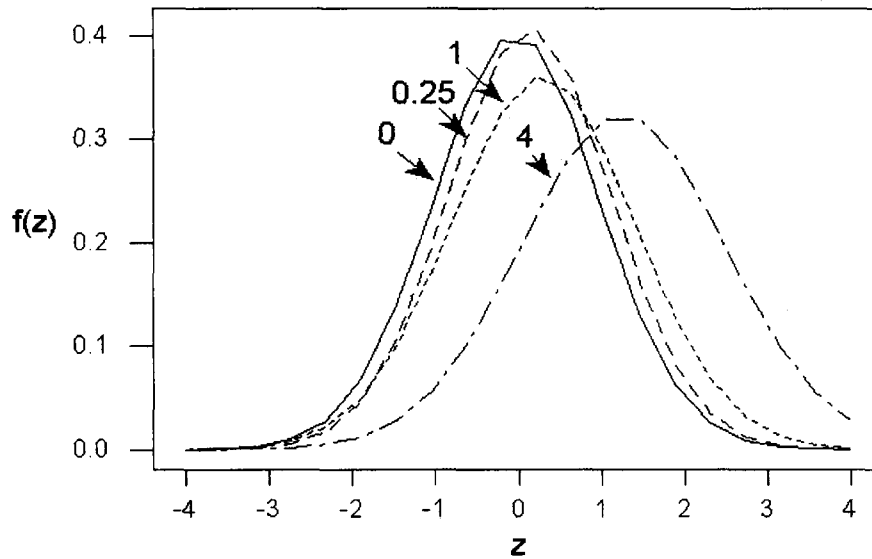


Figura 2.7 Curvas con distribución normal. La media y varianza de cada curva corresponden a la media y varianza de las variables obtenidas al transformar y estandarizar variables χ_3^2 con parámetros de no centralidad $\lambda = 0, 0.25, 1$ y 4 . La gráfica fue generada con el software MINITAB.

Es fácil observar que en este caso, la media de la variable transformada es mayor en cuanto mayor es el parámetro de no centralidad.

Se ilustra también el desplazamiento de la media de una variable generada al aplicar la transformación z de Fisher (ecuaciones 2.5 y 2.6) a una variable F no centrada. Se consideran 3 diferentes grados de libertad ($F_{2,18}$, $F_{10,10}$ y $F_{10,20}$) y cuatro diferentes valores de parámetros de no centralidad, λ (0, 0.25, 1 y 4).

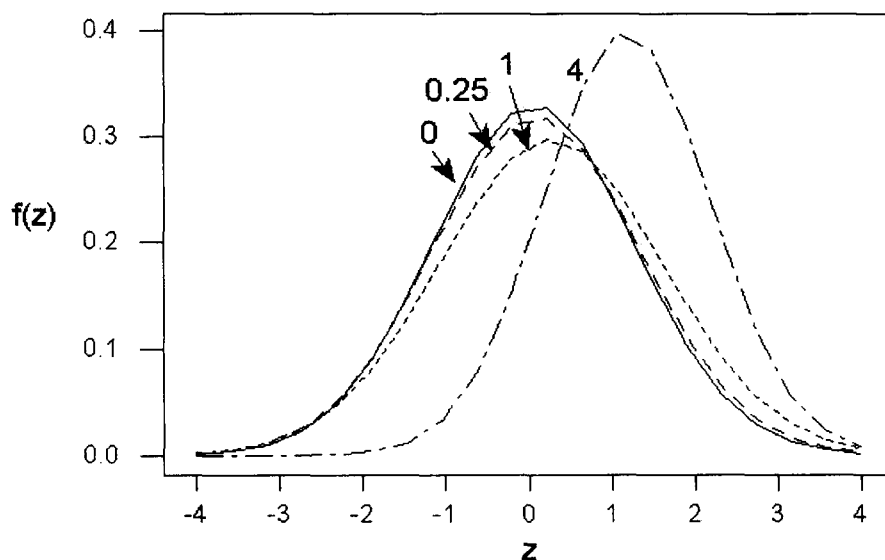


Figura 2.8 Curvas con distribución normal. La media y varianza de cada curva corresponden a la media y varianza de las variables obtenidas al transformar y estandarizar variables $F_{2,18}$ con parámetros de no centralidad $\lambda = 0, 0.25, 1$ y 4 . La gráfica fue generada con el software MINITAB.

En este caso la media de la variable transformada es mayor en cuanto mayor es el parámetro de no centralidad. Sin embargo, se desplaza muy poco cuando el parámetro de no centralidad cambia de 0 a 0.25.

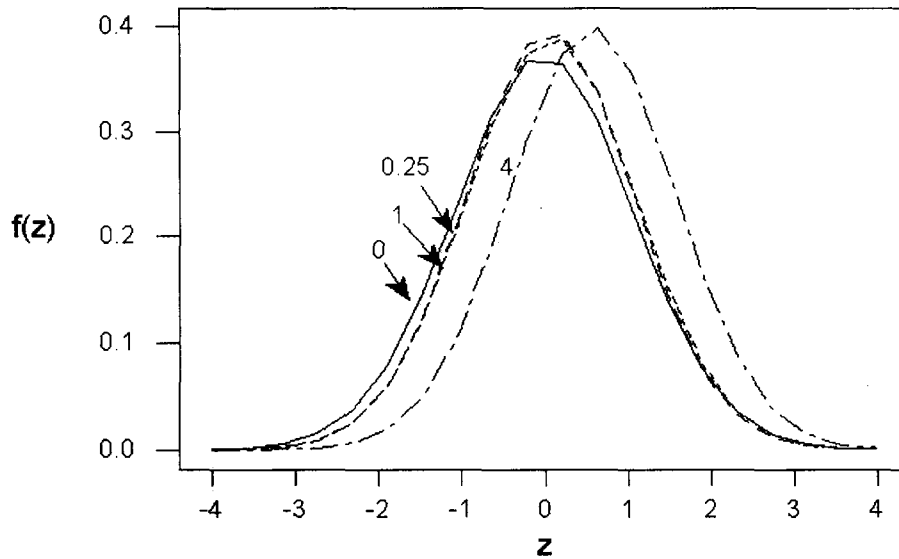


Figura 2.9 Curvas con distribución normal. La media y varianza de cada curva corresponden a la media y varianza de las variables obtenidas al transformar y estandarizar variables $F_{10,10}$ con parámetros de no centralidad $\lambda = 0, 0.25, 1$ y 4 . La gráfica fue generada con el software MINITAB.

En este caso la media de la variable transformada es mayor en cuanto mayor es el parámetro de no centralidad. Sin embargo, las gráficas prácticamente se empalman con los parámetros de no centralidad cambia 0.25 y 1 , siendo su media muy similar.

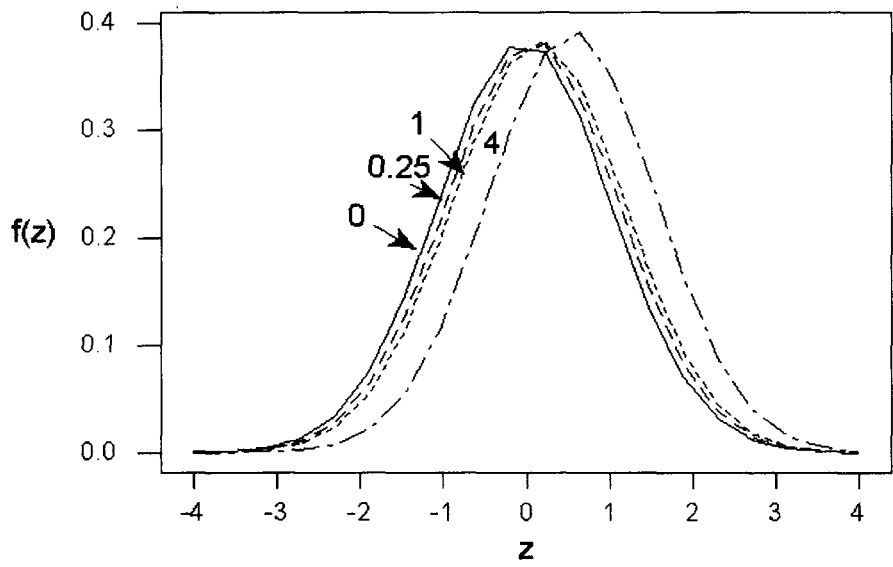


Figura 2.10 Curvas con distribución normal. La media y varianza de cada curva corresponden a la media y varianza de las variables obtenidas al transformar y estandarizar variables $F_{10,20}$ con parámetros de no centralidad $\lambda = 0, 0.25, 1$ y 4 . La gráfica fue generada con el software MINITAB.

En este caso también se observa que la media de la variable transformada es mayor en cuanto mayor es el parámetro de no centralidad. Esto justificará el uso de cartas de control de un solo lado al monitorear la media de la variable transformada si lo que se quiere detectar es el aumento del parámetro de no centralidad en la variable original.

2.3 Derivación de la Carta RIM

2.3.1 Idea general de la regresión isotónica

La regresión isotónica es un procedimiento para estimar parámetros (en nuestro caso la media de una variable) sujeto a un conjunto de desigualdades. Bartholomew (1959) propuso una prueba para contrastar lo siguiente:

Suponiendo que se tienen n observaciones independientes $x_1, x_2, \dots, x_b, \dots, x_n$ donde X_i es una variable aleatoria con distribución normal con media μ_i y varianza σ_i^2 . Las hipótesis a probar son:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n \quad \text{vs.} \quad H_1: \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$$

La hipótesis alternativa H_1 es llamada *orden simple*. El estadístico de prueba está dado por

$$\chi_n^{-2} = \sum_{i=1}^n a_i (x_i - \bar{x})^2 - \sum_{i=1}^n a_i (x_i - \hat{m}_i)^2, \quad (2.14)$$

donde

$$a_i = \frac{1}{\sigma_i^2}, \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i x_i}{\sum_{i=1}^n a_i} \quad (2.15)$$

y los \hat{m}_i son los estimadores de las μ_i desconocidos bajo H_1 . Si χ_n^{-2} es suficientemente grande, H_0 se rechaza. Los estimadores de las medias μ_i son los valores de las m_i que minimizan

$$U_n = \sum_{i=1}^n a_i (x_i - m_i)^2 \quad (2.16)$$

sujeto a H_1 . Este conjunto de estimadores es la regresión isotónica de las x_i para un orden simple. El procedimiento aplicado por Bartholomew para obtener la regresión isotónica de las x_i para un orden simple es el algoritmo de promedios de violaciones consecutivas conocido como PAVA (por sus siglas en inglés Pool-Adjacent-Violators Algorithm) presentado por Robertson y otros (1988).

2.3.2 Carta Regresión Isotónica para la media de un proceso

La carta de regresión isotónica propuesta por Ríos (1997) para monitorear la media de una característica de calidad tiene los siguientes supuestos:

- Las observaciones de la variable son independientes entre sí y siguen una distribución normal.
- Cuando el proceso está bajo control, la media y la varianza son conocidas y constantes; pero cuando el proceso se sale de control, se supone que la media sigue un comportamiento monótono mientras que la varianza permanece constante.
- El inicio del comportamiento monótono (creciente o decreciente) de la media del proceso se da en un número de muestra desconocido, ψ , llamado *punto de cambio*. El punto de cambio en el proceso puede ilustrarse como sigue:

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_\psi = \mu_0 \leq \mu_{\psi+1} \leq \mu_{\psi+2} \leq \dots \leq \mu_T, \quad \text{o bien,} \quad \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_\psi = \mu_0$$

$$\geq \mu_{\psi+1} \geq \mu_{\psi+2} \geq \dots \geq \mu_T$$
donde T es el número de muestras tomadas, μ_k es la media del proceso en muestra k y μ_0 es la media del proceso cuando está bajo control, la cual es conocida.
- Sin pérdida de generalidad, las observaciones pueden estandarizarse, con ello, la media del proceso bajo control es cero y su varianza es 1. Bajo este supuesto, el comportamiento monótono de la media iniciando en la muestra ψ se puede expresar como:

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_\psi = 0 \leq \mu_{\psi+1} \leq \mu_{\psi+2} \leq \dots \leq \mu_T, \quad \text{si el punto de cambio da lugar a}$$

comportamiento monótono ascendente, o bien, $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_\psi = 0$
 $\geq \mu_{\psi+1} \geq \mu_{\psi+2} \geq \dots \geq \mu_T$ en caso de un comportamiento descendente.

La carta de regresión isotónica se basa en la prueba generalizada del cociente de verosimilitudes, donde la estimación de la media del proceso en la muestra k (μ_k) se obtiene mediante regresión isotónica sujeto a la restricción de que la media tiene un comportamiento monótono.

Suponiendo que existen T observaciones independientes $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_T$ donde X_k es una variable aleatoria normal, con media μ_k y varianza 1. Se quiere contrastar las hipótesis:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_T = 0$$

vs.

$$H_1: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_\psi = 0 \leq \mu_{\psi+1} \leq \mu_{\psi+2} \leq \dots \leq \mu_T \quad \text{o}$$

$$H_1: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_\psi = 0 \geq \mu_{\psi+1} \geq \mu_{\psi+2} \geq \dots \geq \mu_T$$

(al menos una desigualdad estricta)

donde $0 \leq \psi \leq T-1$, ψ y las μ_k para $k > \psi$ son desconocidas. Si $\psi = 0$, entonces el proceso está fuera de control desde el inicio. Ríos (1997) demostró que el estadístico de la carta de regresión isotónica para detectar incrementos es:

$$S_{RI}^+ = \sum_{k=1}^T (m_k)^2 \quad (2.17)$$

donde el conjunto $\{m_k\}$ es la regresión isotónica de $\{x_k\}$ sobre la región $\mathbf{k} = \{u \in \mathfrak{R}^T \mid 0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_T\}$.

Análogamente, el estadístico de la carta de regresión isotónica para detectar decrementos es:

$$S_{RI}^- = \sum_{k=1}^T (m_l)^2 \quad (2.18)$$

donde el conjunto $\{m_i\}$ es la regresión isotónica de $\{x_i\}$ sobre la región $\mathbf{I} = \{\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^T \mid 0 \geq u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_T\}$

Por lo que el estadístico de la carta de regresión isotónica para dos lados es:

$$S_{RI} = \max\{S_{RI}^-, S_{RI}^+\} \quad (2.19)$$

La carta RI indica que el proceso está fuera de control cuando $S_{RI} > h$, donde h es el límite de control elegido vía simulación de tal manera que se tenga un *PLC* adecuado cuando el proceso esté bajo control. La razón por la que la región de rechazo de la prueba se construye mediante simulación es porque la distribución del estadístico S_{RI} es muy difícil de determinar.

Para calcular el estadístico S_{RI}^+ , primero se obtiene la regresión isotónica de las observaciones para el orden simple (región $\mathbf{k} = \{\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^T \mid 0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_T\}$) aplicando el algoritmo PAVA. Después de obtener la regresión isotónica, los valores negativos que hayan resultado se hacen cero, luego se aplica la ecuación 2.17 a las estimaciones m_k obtenidas. El estadístico S_{RI}^- se obtiene aplicando el procedimiento de S_{RI}^+ a los simétricos de las observaciones, es decir, a $-x_1, -x_2, \dots, -x_T$. S_{RI}^+ detecta el comportamiento no decreciente mientras que S_{RI}^- detecta el comportamiento no creciente en la media del proceso.

Ejemplo 2.1. Se ilustra el cálculo de la regresión isotónica sobre $H_1: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_\psi = 0 \leq \mu_{\psi+1} \leq \mu_{\psi+2} \leq \dots \leq \mu_T$ para las siguientes observaciones estandarizadas $\{-2(1), 2(1), 0(1), 3(1), 6(1), 4(1)\}$ donde los pesos están entre paréntesis. Se utiliza el PAVA para obtener la regresión isotónica sobre H_1 .

Nótese que la segunda y tercera observación violan el orden simple. Considerando el promedio de ellas, $[2(1) + 0(1)]/(1+1) = 1$, entonces el “nuevo” conjunto de observaciones es $\{-2(1), 1(2), 3(1), 6(1), 4(1)\}$. Ahora la cuarta y quinta observación violan el orden simple.

Promediando éstas: $[6(1) + 4(1)]/(1+1) = 5$, el “nuevo” conjunto de observaciones es $\{-2(1), 1(2), 3(1), 5(2)\}$. Nótese que ya no hay observaciones que violen el orden simple. Reemplazando las observaciones negativas por cero, se tiene que la regresión isotónica para H_1 es $\{0, 1, 1, 3, 5, 5\}$.

2.3.3 Construcción de la carta RIM

Ahora suponga que lo que se quiere monitorear es un vector de medias. El propósito es contrastar H_0 vs. H_1 pero considerando ahora que la media es un vector p -dimensional.

Para probar si la media multivariada ha iniciado un comportamiento monótono creciente, la nueva carta de control RIM surge al construir una carta IR de un sólo lado (el superior) para cualquiera de las variables Z_1 ($\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ conocidas) o Z_2 ($\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ desconocidas), las cuales son obtenidas según las ecuaciones 2.2 y 2.6 de la sección 2.2. En este trabajo recibe el nombre de RIM por tratarse de la adaptación de la técnica de regresión isotónica al caso multivariado.

El estadístico de la carta RIM es:

$$S_{RIM} = \sum_{k=1}^T (m_k)^2 \quad (2.20)$$

donde el conjunto $\{m_k\}$ es la regresión isotónica de $\{Z_k\}$ sobre la región $\mathbf{k} = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^T \mid 0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_T\}$.

Recordando que los estadísticos T_1^2 y T_2^2 representan el cuadrado de la distancia estadística entre $\boldsymbol{\mu}$ y el vector observado \mathbf{X} (sección 1.3.1); valores grandes de estos estadísticos indican que esta medida de distancia es grande, mientras que valores pequeños de estos estadísticos indican que esta medida de distancia es pequeña. Al aplicar la transformación a la normal, se observa que Z_1 y Z_2 son crecientes con respecto a T_1^2 y T_2^2 respectivamente. Dado que lo que

nos interesa es detectar cuándo T_1^2 o T_2^2 han aumentado, es necesario enfocarse sólo en detectar incrementos de las variables transformadas Z_1 y Z_2 . Esta es la razón por la que se trabaja únicamente con el lado superior de la carta.

La carta de control emite la señal de alarma si $S_{RIM} > h$, donde h es el número obtenido vía simulación de tal manera que proporciona un adecuado PLC cuando el proceso está bajo control. La razón por la cual el límite de control (o región de rechazo) se obtiene por simulación se debe a que la distribución de S_{RIM} es muy difícil de calcular. Si $S_{RIM} < h$, entonces la carta no emite señal alguna, debe tomarse la siguiente observación y repetir los cálculos.

Ejemplo 2.2. Para $p = 3$ características de calidad, se tienen 10 observaciones multivariadas tomadas de manera independiente. Se trabaja con observaciones individuales (el tamaño de cada muestra es 1). La media y la matriz de varianzas y covarianzas son conocidas:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.0 \\ 14.0 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.5 & 1.1 & -0.3 \\ 0.0 & -0.3 & 1.1 \end{pmatrix}$$

Se quiere construir la carta RIM para las observaciones. La Tabla 2.1 muestra los 10 vectores de observaciones ($\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$), el estadístico T_1^2 , su transformación (W_1), su estandarización (Z_1) y el estadístico de regresión isotónica (S_{RIM}).

Tabla 2.1 Datos del ejemplo 2.2.

Número de observación	X_1	X_2	X_3	T_1^2	W_1	Z_1	S_{RIM}
1	11.07	15.30	4.02	5.0290	1.1879	0.963	*
2	9.27	12.85	0.78	5.2675	1.2064	1.031	1.989
3	9.76	14.23	1.67	0.6729	0.6076	-1.170	0.226
4	11.20	16.00	1.55	3.8920	1.0906	0.605	0.592
5	7.85	12.99	2.69	3.1830	1.0199	0.345	0.678
6	8.64	13.72	3.60	2.5962	0.9530	0.099	0.594
7	8.23	13.99	2.76	2.6476	0.9592	0.122	0.570
8	7.26	12.68	2.60	5.1832	1.1999	1.007	1.583
9	9.81	12.35	3.72	3.2237	1.0243	0.361	1.505
10	9.69	12.94	3.57	1.6240	0.8150	-0.408	0.877

* Valor no calculado.

En el software SPSS 8.0 se elaboró una gráfica de estas 10 observaciones en un espacio tridimensional:

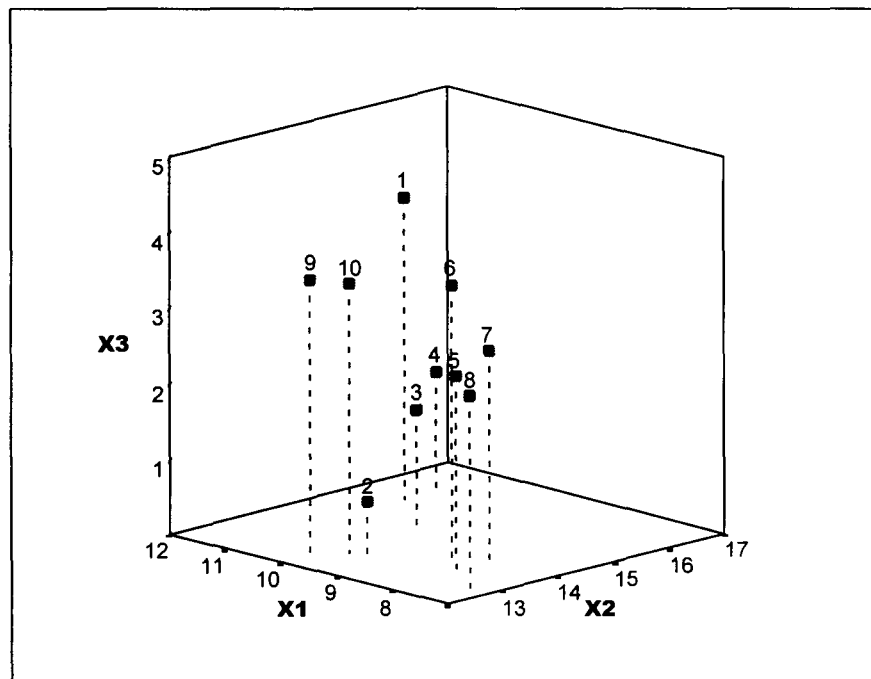


Figura 2.11 Gráfica de las 10 observaciones del ejemplo 2.2 en $p = 3$ dimensiones.

Se muestra el cálculo del estadístico T_1^2 para la primera observación multivariada a partir de la ecuación $T_{1i}^2 = (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})$ de la manera siguiente:

$$T_{11}^2 = \left[\begin{pmatrix} 11.07 \\ 15.30 \\ 4.02 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10.0 \\ 14.0 \\ 2.5 \end{pmatrix} \right]' \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.5 & 1.1 & -0.3 \\ 0.0 & -0.3 & 1.1 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 11.07 \\ 15.30 \\ 4.02 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10.0 \\ 14.0 \\ 2.5 \end{pmatrix} \right]$$

$$T_{11}^2 = (1.07 \quad 1.30 \quad 1.52) \begin{pmatrix} 0.7971530 & -0.3914591 & -0.1067616 \\ -0.3914591 & 1.1743772 & 0.3202847 \\ -0.1067616 & 0.3202847 & 0.9964413 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.07 \\ 1.30 \\ 1.52 \end{pmatrix}$$

$$T_{11}^2 = 5.0290$$

Aplicando la transformación descrita en la sección 2.2.1 (ecuaciones 2.1 y 2.2) para encontrar en valor de W_1 y Z_1 para la primera observación:

$$W_{11} = \left(\frac{T_1^2}{p} \right)^{1/3} = \left(\frac{5.0290}{3} \right)^{1/3} = 1.1879$$

$$Z_{11} = \frac{W_{11} - \left(1 - \frac{2}{9p} \right)}{\sqrt{\frac{2}{9p}}} = \frac{1.1879 - \left(1 - \frac{2}{9(3)} \right)}{\sqrt{\frac{2}{9(3)}}} = 0.9626$$

Para la primera observación, el estadístico de regresión isotónica no se puede calcular porque no existe observación anterior para compararla.

Se muestra el cálculo del estadístico S_{RIM} para la quinta observación multivariada. Considerando las cinco primeras observaciones transformadas y estandarizadas $\{0.963, 1.031, -1.170, 0.605, 0.345\}$, el primer paso es calcular la regresión isotónica (m_k) de las observaciones bajo $H_1: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_\psi = 0 \leq \mu_{\psi+1} \leq \mu_{\psi+2} \leq \dots \leq \mu_T$ aplicando PAVA.

La segunda y tercera observación violan el orden simple, por lo que se promedian y se obtiene $[1.031 + (-1.170)]/2 = -0.070$. Entonces, el nuevo conjunto de observaciones es $\{0.963(1),$

$-0.070(2), 0.605(1), 0.345(1)$ con los pesos entre paréntesis. Ahora las dos primeras observaciones violan el orden, promediándolas se obtiene $[0.963(1) + (-0.070)(2)] / (1+2) = 0.275$. Así, el nuevo conjunto de observaciones es $\{0.275(3), 0.605(1), 0.345(1)\}$. Como la segunda y tercera observación violan el orden simple, se promedian $[0.605(1) + 0.345(1)] / 2 = 0.475$. El conjunto de observaciones ahora es $\{0.275(3), 0.475(2)\}$. Notando que ya no hay observaciones que violen el orden, la regresión isotónica para el orden simple es $\{0.275, 0.275, 0.275, 0.475, 0.475\}$. En caso de haber resultado valores negativos, éstos se habrían reemplazado por ceros. El cálculo de S_{RIM} es el siguiente:

$$S_{RIM} = \sum_{k=1}^T (m_k)^2 = (0.275)^2 + (0.275)^2 + (0.275)^2 + (0.475)^2 + (0.475)^2 = 0.678$$

Al graficar S_{RIM} , la carta RIM para las primeras 10 observaciones multivariadas queda como sigue:

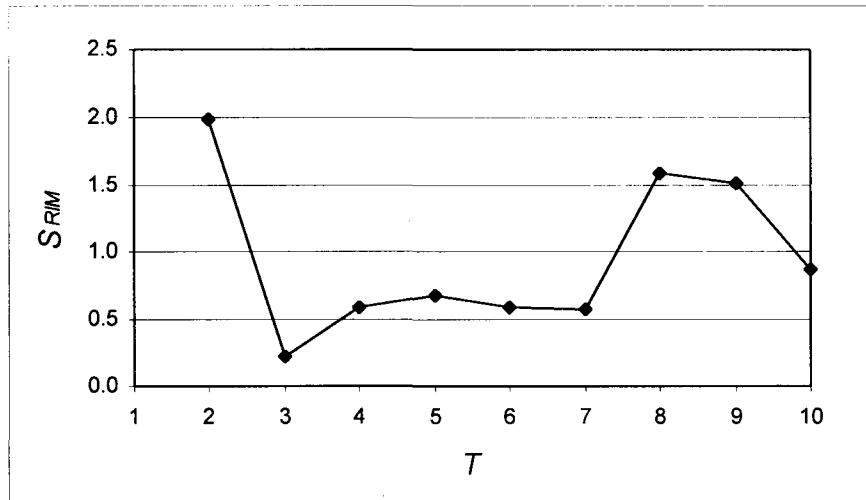


Figura 2.12 Carta RIM.

2.4 Derivación de la Carta MAT

En esta sección se presenta la construcción de una carta de control denominada MAT, basada en la prueba maxi-min de Abelson y Tukey (1963), la cual permite detectar un comportamiento monótono de la media de un proceso multivariado.

2.4.1 Idea general de la prueba maxi-min

Este procedimiento para detectar el comportamiento monótono fue propuesto por Abelson y Tukey (1963). La prueba maxi-min utiliza una combinación lineal de las observaciones, donde los coeficientes son construidos de tal manera que maximizan la función potencia mínima.

Considerando un conjunto de observaciones x_1, x_2, \dots, x_n , independientes, donde X_k es una variable aleatoria con distribución normal, con media μ_k y varianza unitaria. Abelson y Tukey (1963) estudiaron el problema con las siguientes hipótesis a contrastar: $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n$ vs. $H_1: \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$ (al menos una desigualdad estricta) y como estadístico de prueba usaron el contraste $\sum c_k x_k$, pero donde los coeficientes no suman cero, es decir, $\sum c_k \neq 0$.

El procedimiento propuesto por Abelson y Tukey (1963) para construir el estadístico de la prueba maxi-min es como sigue: Sea $R = \sum_{k=1}^n c_k x_k$, donde $X_i \sim N(0,1)$. Entonces, R sigue una

distribución normal con media $\sum_{k=1}^n c_k \mu_k$ y varianza $\sum_{k=1}^n (c_k)^2$. Transformando R :

$$H = \frac{\sum_{k=1}^n c_k x_k}{\left[\sum_{k=1}^n (c_k)^2 \right]^{1/2}} \quad (2.21)$$

H tiene una distribución normal con media $\frac{\sum_{k=1}^n c_k \mu_k}{\left[\sum_{k=1}^n (c_k)^2\right]^{1/2}}$ y varianza 1. H_0 se rechaza si

$H > z_\alpha$. La potencia de esta prueba en función de los coeficientes c_k es:

$$P(H > z_\alpha) = P\left\{\frac{\sum_{k=1}^n c_k x_k}{\left[\sum_{k=1}^n (c_k)^2\right]^{1/2}} > z_\alpha\right\} \quad (2.22)$$

Sea $\mathbf{c} = (c_k)$ un vector desconocido y $\mathbf{x} = (\mu_k)$ un vector dado en H_1 . Sea θ el ángulo entre \mathbf{c} y \mathbf{x} . Entonces

$$\text{Cos } \theta = \frac{\sum_{k=1}^n c_k \mu_k}{\|\mathbf{c}\| \|\mathbf{x}\|} \quad (2.23)$$

De este modo, la potencia de la prueba se puede expresar como $P = P\{\|\mathbf{x}\| \text{Cos } \theta > z_\alpha\}$, donde, bajo H_1 y para un \mathbf{x} fijo, la función potencia se incrementa cuando $\text{Cos } \theta$ crece, lo que equivale a que el ángulo θ decrezca. Por lo tanto, el valor apropiado de \mathbf{c} es el vector en \mathfrak{R}^n que minimice el ángulo máximo entre \mathbf{c} y \mathbf{x} en la región H_1 .

Ríos (1997) demostró que $c_k = (n-k+1)^{1/2} - (n-k)^{1/2}$ son los coeficientes del estadístico

$$R = \sum_{k=1}^n c_k x_k \text{ para } k = 1, 2, \dots, n \text{ para probar}$$

$$H_0: 0 = \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n$$

vs.

$$H_1: 0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n \text{ (al menos una desigualdad estricta)}$$

y H_0 se rechaza si R es suficientemente grande.

Si se quiere probar $H_0: 0 = \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n$ vs. $H_1: 0 \geq \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$ se puede usar el estadístico $R' = \sum_{k=1}^n c_k (-x_k)$. Es decir, se realiza el mismo procedimiento que antes pero ahora sobre $(-x_k)$ obteniéndose $R' = -R$. Considerando el valor absoluto de R se obtiene el estadístico de una prueba de dos lados:

$$S = |R| = \left| \sum_{k=1}^n c_k x_k \right| \quad (2.24)$$

donde $c_k = (n-k+1)^{1/2} - (n-k)^{1/2}$ para $k = 1, 2, \dots, n$. Si S es suficientemente grande entonces se rechaza H_0 . De este modo, esta prueba detecta tanto el comportamiento no creciente y no decreciente de las medias.

2.4.2 Carta basada en la prueba maxi-min para la media de un proceso

Ríos (1997) propone una carta de control adaptando la prueba maxi-min a la media de un proceso.

Se suponen T observaciones independientes, $x_1, x_2, \dots, x_b, \dots, x_T$ donde X_k es una variable aleatoria normal, con media μ_k y varianza 1. Se quieren contrastar las hipótesis:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_T = 0$$

vs.

$$H_1: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_\psi = 0 \leq \mu_{\psi+1} \leq \mu_{\psi+2} \leq \dots \leq \mu_T \quad \circ$$

$$H_1: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_\psi = 0 \geq \mu_{\psi+1} \geq \mu_{\psi+2} \geq \dots \geq \mu_T$$

(al menos una desigualdad estricta)

donde $0 \leq \psi \leq T-1$, ψ y las μ_k para $k > \psi$ son desconocidas. Si $\psi = 0$, entonces el proceso está fuera de control desde el inicio. Para un punto de cambio fijo, $\psi = i$, se tiene la misma

situación que antes para $k > i$, considerando las últimas $T - i$ observaciones. El estadístico correspondiente es

$$S_{T-i} = |R_{T-i}| = \left| \sum_{k=i+1}^T c_{k-i} x_k \right| \quad (2.25)$$

donde $c_{k-i} = (T - k + 1)^{1/2} - (T - k)^{1/2}$ para $k = i+1, i+2, \dots, i+T$. Se busca el punto de cambio, i , que maximiza S_{T-i} obteniéndose el estadístico

$$S_{AT} = \max_i \{S_{T-i}\} = \max_i \left\{ \sum_{k=i+1}^T c_{k-i} x_k \right\} \quad (2.26)$$

sobre $i = 0, 1, 2, \dots, T-1$ donde $c_{k-i} = (T - k + 1)^{1/2} - (T - k)^{1/2}$ para $k = i+1, i+2, \dots, i+T$.

Esta carta da la señal de alarma cuando $S_{AT} > h$, donde h es el límite de control elegido vía simulación de tal manera que se tenga un *PLC* adecuado cuando el proceso esté bajo control. Al igual que para la carta de regresión isotónica, la razón por la cual la región de rechazo de la prueba se construye mediante simulación es porque la distribución del estadístico S_{AT} es muy difícil de determinar. Obsérvese que esta carta detecta tanto comportamientos no crecientes como no decrecientes de la media, por lo que es una carta de control de dos lados.

Si se quiere construir la carta de un sólo lado para detectar únicamente incrementos (lado superior), el estadístico debe ser:

$$S_{AT}^+ = \max_i \{S_{T-i}^+\} = \max_i \left\{ \sum_{k=i+1}^T c_{k-i} x_k \right\} \quad (2.27)$$

sobre $i = 0, 1, 2, \dots, T-1$ donde $c_{k-i} = (T - k + 1)^{1/2} - (T - k)^{1/2}$ para $k = i+1, i+2, \dots, i+T$.

Donde $S_{T-i}^+ = R_{T-i} = \sum_{k=i+1}^T c_{k-i} x_k$.

Por otra parte, si se quiere construir la carta de un sólo lado para detectar únicamente decrementos (lado inferior), el estadístico debe ser:

$$S_{AT}^- = \max_i \{S_{T-i}^-\} = \max_i \left\{ - \sum_{k=i+1}^T c_{k-i} x_k \right\} \quad (2.28)$$

sobre $i = 0, 1, 2, \dots, T-1$ donde $c_{k-i} = (T-k+1)^{1/2} - (T-k)^{1/2}$ para $k = i+1, i+2, \dots, i+T$.

Donde $S_{T-i}^- = -R_{T-i} = - \sum_{k=i+1}^T c_{k-i} x_k$.

2.4.3 Construcción de la carta MAT

Ahora suponga que se quiere detectar un comportamiento monótono, ya sea creciente o decreciente en un vector de medias. El propósito es contrastar H_0 vs. H_1 pero considerando ahora que la media es un vector p -dimensional.

De manera similar al procedimiento para la construcción de la carta RIM, la carta de control MAT surge al construir la carta de lado superior descrita en la sección anterior para cualquiera de las variables Z_1 ($\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ conocidas) o Z_2 ($\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ desconocidas), las cuales son obtenidas según las ecuaciones 2.2 y 2.6 de la sección 2.2. En este trabajo, la nueva carta recibe el nombre de MAT por tratarse de la adaptación al caso multivariado de la prueba de Abelson y Tukey.

Tanto Z_1 como Z_2 son crecientes con respecto a T_1^2 y T_2^2 respectivamente. Entonces, dado que lo que nos interesa es detectar cuándo T_1^2 o T_2^2 han aumentado, sólo es necesario detectar incrementos de las variables transformadas Z_1 y Z_2 . Esta es la razón por la que se trabaja únicamente con el lado superior de la carta.

El estadístico de la carta MAT es:

$$S_{MAT} = \max_i \{S_{T-i}^+\} = \max_i \left\{ \sum_{k=i+1}^T c_{k-i} Z_k \right\} \quad (2.29)$$

sobre $i = 0, 1, 2, \dots, T-1$ donde $c_{k-i} = (T - k + 1)^{1/2} - (T - k)^{1/2}$ para $k = i+1, i+2, \dots, i+T$.

En este caso, $S_{T-i}^+ = \sum_{k=i+1}^T c_{k-i} Z_k$.

La carta de control emite la señal de alarma si $S_{MAT} > h$, donde h es el número obtenido vía simulación de tal manera que proporciona un adecuado PLC cuando el proceso está bajo control. La razón por la cual el límite de control (o región de rechazo) se obtiene por simulación se debe a que la distribución de S_{MAT} es muy difícil de calcular. Si $S_{MAT} < h$, entonces la carta no emite señal alguna, debe tomarse la siguiente observación y repetir los cálculos.

Ejemplo 2.3. Para $p = 3$ características de calidad, se tienen 10 observaciones multivariadas tomadas de manera independiente. Se trabaja con observaciones individuales (el tamaño de cada muestra es 1). En este caso, la media y la matriz de varianzas y covarianzas son desconocidas y fueron estimadas con base a una muestra de $n = 25$ observaciones tomadas previamente. Sus estimaciones son:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \bar{\mathbf{X}}_{25} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.0 \\ 14.0 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{25} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.5 & 1.1 & -0.3 \\ 0.0 & -0.3 & 1.1 \end{pmatrix}$$

Se quiere construir la carta MAT para las observaciones. La Tabla 2.2 muestra los 10 vectores de observaciones ($\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$), el estadístico T_2^2 , su transformación (W_2), su estandarización (Z_2) y el estadístico de la carta MAT (S_{MAT}).

Tabla 2.2 Datos del ejemplo 2.3.

Número de observación	X_1	X_2	X_3	T_2^2	F	W_2	Z_2	S_{MAT}
1	11.07	15.30	4.02	5.0290	1.4775	0.1952	0.7793	*
2	9.27	12.85	0.78	5.2675	1.5476	0.2184	0.8325	1.1553
3	9.76	14.23	1.67	0.6729	0.1977	-0.8105	-1.5317	-0.9392
4	11.20	16.00	1.55	3.8920	1.1435	0.0670	0.4848	0.4848
5	7.85	12.99	2.69	3.1830	0.9352	-0.0335	0.2537	0.4546
6	8.64	13.72	3.60	2.5962	0.7628	-0.1354	0.0196	0.2788
7	8.23	13.99	2.76	2.6476	0.7779	-0.1256	0.0422	0.2608
8	7.26	12.68	2.60	5.1832	1.5228	0.2103	0.8140	1.0201
9	9.81	12.35	3.72	3.2237	0.9471	-0.0272	0.2683	0.7875
10	9.69	12.94	3.57	1.6240	0.4771	-0.3700	-0.5194	0.0157

* Valor no calculado.

Se muestra el cálculo del estadístico T_2^2 para la primera observación multivariada a partir de la ecuación $T_{2i}^2 = (\mathbf{X} - \hat{\boldsymbol{\mu}})' \mathbf{S}_n^{-1} (\mathbf{X} - \hat{\boldsymbol{\mu}})$ de la misma manera en que si hizo en el ejemplo 2.2:

$$T_{21}^2 = \left[\begin{pmatrix} 11.07 \\ 15.30 \\ 4.02 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10.0 \\ 14.0 \\ 2.5 \end{pmatrix} \right]' \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.5 & 1.1 & -0.3 \\ 0.0 & -0.3 & 1.1 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 11.07 \\ 15.30 \\ 4.02 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10.0 \\ 14.0 \\ 2.5 \end{pmatrix} \right]$$

$$T_{21}^2 = (1.07 \quad 1.30 \quad 1.52) \begin{pmatrix} 0.7971530 & -0.3914591 & -0.1067616 \\ -0.3914591 & 1.1743772 & 0.3202847 \\ -0.1067616 & 0.3202847 & 0.9964413 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.07 \\ 1.30 \\ 1.52 \end{pmatrix}$$

$$T_{21}^2 = 5.0290$$

Aplicando la transformación descrita en la sección 2.2.2 (ecuaciones 2.4, 2.5 y 2.6) para encontrar en valor de F , W_2 y Z_2 para la primera observación:

$$F = \frac{n(n-p)}{p(n-1)(n+1)} T_2^2 = \frac{25(25-3)}{3(25-1)(25+1)} \cdot 5.0290 = 1.4775$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \ln F = \frac{1}{2} \ln(1.4775) = 0.1952$$

$$Z_2 = \frac{W_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{p} \right)}{\sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{n-p} \right)}} = \frac{0.1952 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{25-3} - \frac{1}{3} \right)}{\sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{25-3} \right)}} = 0.7793$$

Para la primera observación, el estadístico de Abelson y Tukey no se puede calcular porque no existe observación anterior para compararla.

Se muestra el cálculo del estadístico S_{MAT} para la quinta observación multivariada ($T = 5$). Para el cual se consideran las cinco primeras observaciones transformadas y estandarizadas $\{0.7793, 0.8325, -1.5317, 0.4848, 0.2537\}$.

Se tiene que el estadístico de prueba es: $S_{MAT} = \max_i \{S_{T-i}^+\} = \max_i \left\{ \sum_{k=i+1}^T c_{k-i} Z_k \right\}$ sobre $i = 0, 1,$

$2, \dots, T-1$ donde $c_{k-i} = (T-k+1)^{1/2} - (T-k)^{1/2}$ para $k = i+1, i+2, \dots, i+T$.

Para $i = 0$

$$\begin{aligned} S_5^+ &= \sum_{k=1}^5 c_k Z_k = \left(5^{1/2} - 4^{1/2}\right)(0.7793) + \left(4^{1/2} - 3^{1/2}\right)(0.8325) + \left(3^{1/2} - 2^{1/2}\right)(-1.5317) + \\ &\quad \left(2^{1/2} - 1^{1/2}\right)(0.4848) + \left(1^{1/2} - 0^{1/2}\right)(0.2537) \\ &= 0.3748 \end{aligned}$$

Para $i = 1$

$$\begin{aligned} S_4^+ &= \sum_{k=2}^5 c_{k-1} Z_k = \left(4^{1/2} - 3^{1/2}\right)(0.8325) + \left(3^{1/2} - 2^{1/2}\right)(-1.5317) + \\ &\quad \left(2^{1/2} - 1^{1/2}\right)(0.4848) + \left(1^{1/2} - 0^{1/2}\right)(0.2537) \\ &= 0.1908 \end{aligned}$$

Para $i = 2$

$$S_3^+ = \sum_{k=3}^5 c_{k-2} Z_k = \left(3^{1/2} - 2^{1/2}\right)(-1.5317) + \left(2^{1/2} - 1^{1/2}\right)(0.4848) + \left(1^{1/2} - 0^{1/2}\right)(0.2537) \\ = -0.0323$$

Para $i = 3$

$$S_2^+ = \sum_{k=4}^5 c_{k-3} Z_k = \left(2^{1/2} - 1^{1/2}\right)(0.4848) + \left(1^{1/2} - 0^{1/2}\right)(0.2537) \\ = 0.4546$$

Para $i = 4$

$$S_1^+ = \sum_{k=5}^5 c_{k-4} Z_k = \left(1^{1/2} - 0^{1/2}\right)(0.2537) \\ = 0.2537$$

Por lo tanto, $S_{MAT} = \max\{0.3748, 0.1908, -0.0323, 0.4546, 0.2537\} = 0.4546$

Al graficar S_{MAT} , la carta MAT para las primeras 10 observaciones multivariadas queda como sigue:

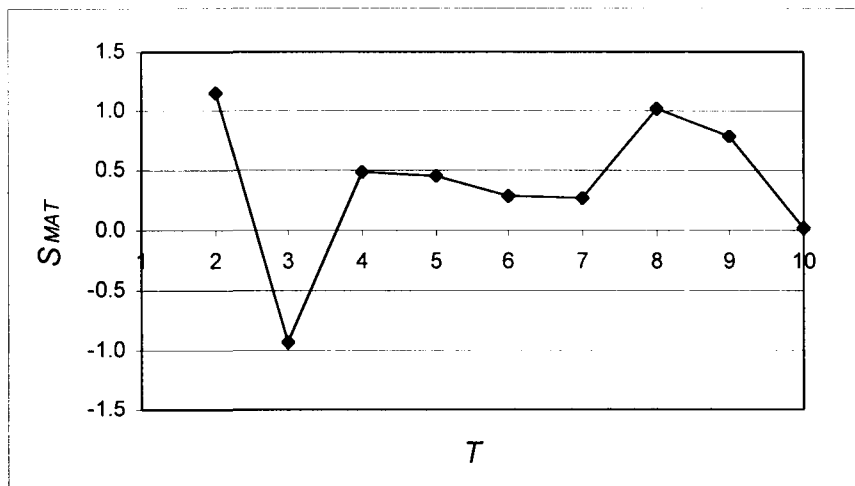


Figura 2.13 Carta MAT.

La carta da la señal de alarma si $S_{MAT} > h$, de lo contrario se toma la observación siguiente y el S_{MAT} vuelve a ser calculado con $T = 6$.

2.5 Derivación de las Cartas CSM1 y CSM2

En esta sección se proponen dos maneras distintas de adaptar una carta de control CUSUM a un proceso multivariado.

2.5.1 Carta CUSUM

La carta de control CUSUM fue propuesta por primera vez por E. S. Page en 1954. Esta carta incorpora directamente toda la información en la secuencia de valores observados y son especialmente útiles cuando se trabaja con observaciones individuales (Montgomery, 1997).

Sea x_i la i -ésima observación. Cuando el proceso está bajo control, x_i se distribuye normalmente con media μ y varianza σ . Se asume σ constante.

Los estadísticos para el lado superior e inferior de la carta CUSUM están dados por:

$$S_i^+ = \max\left[0, x_i - (\mu + K) + S_{i-1}^+\right] \quad (2.30)$$

$$S_i^- = \max\left[0, (\mu + K) - x_i + S_{i-1}^-\right] \quad (2.31)$$

con valores iniciales $S_0^+ = S_0^- = 0$

El parámetro K se le llama usualmente *valor de referencia* y depende de la distancia entre μ y μ_1 (donde μ_1 es la media del proceso fuera de control especificado). K puede elegirse como:

$$K = \frac{|\mu_1 - \mu|}{2} \quad (2.32)$$

Por lo que, si se quiere detectar un cambio de una desviación estándar en una variable con media 0 y varianza 1, se sugiere utilizar el valor de $K = \frac{1}{2}$.

Debido a que S_i combina información de varias observaciones, las cartas CUSUM son más efectivas que las cartas tipo Shewhart para detectar cambios pequeños la media del proceso (Montgomery, 1997).

Para detectar un cambio en la media, el procedimiento señala que el proceso está fuera de control en el tiempo i cuando $S_i^+ > h$ o $S_i^- < -h$ para algún parámetro h que proporcione un adecuado PLC cuando el proceso se encuentra bajo control.

Una carta CUSUM superior es aquella que sólo utiliza el estadístico S^+ pues se quiere detectar desviaciones de la media en dirección positiva.

Se verán dos maneras de adaptar esta carta al monitoreo multivariado dando lugar a las cartas CSM1 y CSM2.

2.5.2 Construcción de la carta CSM1

Análogamente al procedimiento para la construcción de la carta RIM y MAT, la carta de control CSM1 surge al monitorear alguna de las variables transformadas Z_1 ($\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ conocidas) o Z_2 ($\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ desconocidas) con una carta CUSUM superior. La obtención de Z_1 y Z_2 se describe en la sección 2.2 (ecuaciones 2.2 y 2.6).

El estadístico de la carta CSM1 para la variable transformada Z_1 o Z_2 de la i -ésima observación multivariada es:

$$S_{CSM1,i} = \max[0, Z_i - (\mu + K) + S_{CSM1,i-1}] \quad (2.33)$$

con valor inicial $S_{CSM1,0} = 0$,

$$\mu = 0 \text{ y } K = \frac{1}{2}$$

Tanto Z_1 y Z_2 como son crecientes con respecto a T_1^2 y T_2^2 respectivamente. Como lo que interesa es detectar cuándo T_1^2 o T_2^2 han aumentado, es necesario enfocarse sólo en detectar incrementos de las variables transformadas Z_1 y Z_2 . Esta es la razón por la que se trabaja únicamente con el lado superior de la carta CUSUM.

En este trabajo, la nueva carta recibe el nombre de CSM1 por tratarse de la primera adaptación estudiada de la carta CUSUM al caso **multivariado**.

La carta da la señal de alarma si $S_{CSM1} > h$, para algún parámetro h que proporcione un adecuado *PLC* cuando el proceso se encuentra bajo control. Debe considerarse que se está trabajando con variables que se distribuyen *aproximadamente* normal. La falta de ajuste perfecto a la distribución normal estándar de las variables transformadas Z_1 y Z_2 es la razón por la que se sugiere obtener h por medio de simulación y así encontrar un adecuado valor de h para cada valor particular de p y n .

Ejemplo 2.4. Para la variable Z_2 obtenida a partir de las 10 observaciones multivariadas presentadas del ejemplo 2.3, se construye una carta CSM1.

La Tabla 2.3 muestra los 10 vectores de observaciones ($\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$), el estadístico T_2^2 , su transformación (W_2), su estandarización (Z_2) y los estadísticos para la carta CSM1.

Tabla 2.3 Datos del ejemplo 2.4.

Número de observación	X_1	X_2	X_3	T_2^2	F	W_2	Z_2	S_{CSM1}
1	11.07	15.30	4.02	5.0290	1.4775	0.1952	0.7793	0.2793
2	9.27	12.85	0.78	5.2675	1.5476	0.2184	0.8325	0.6117
3	9.76	14.23	1.67	0.6729	0.1977	-0.8105	-1.5317	0.0000
4	11.20	16.00	1.55	3.8920	1.1435	0.0670	0.4848	0.0000
5	7.85	12.99	2.69	3.1830	0.9352	-0.0335	0.2537	0.0000
6	8.64	13.72	3.60	2.5962	0.7628	-0.1354	0.0196	0.0000
7	8.23	13.99	2.76	2.6476	0.7779	-0.1256	0.0422	0.0000
8	7.26	12.68	2.60	5.1832	1.5228	0.2103	0.8140	0.3140
9	9.81	12.35	3.72	3.2237	0.9471	-0.0272	0.2683	0.0823
10	9.69	12.94	3.57	1.6240	0.4771	-0.3700	-0.5194	0.0000

Se presenta el cálculo del estadístico S_{CSM1} para las primeras tres observaciones:

$$S_{CSM1,1} = \max[0, Z_1 - (\mu + K) + S_{CSM1,1-1}] = \max[0, 0.7793 - (0 + 0.5) + 0] = 0.2793$$

$$S_{CSM1,2} = \max[0, Z_2 - (\mu + K) + S_{CSM1,2-1}] = \max[0, 0.8325 - (0 + 0.5) + 0.2793] = 0.6117$$

$$S_{CSM1,3} = \max[0, Z_3 - (\mu + K) + S_{CSM1,3-1}] = \max[0, -1.5317 - (0 + 0.5) + 0.6117] = 0.0$$

Al graficar S_{CSM1} , la carta CSM1 para las primeras 10 observaciones multivariadas queda como sigue:

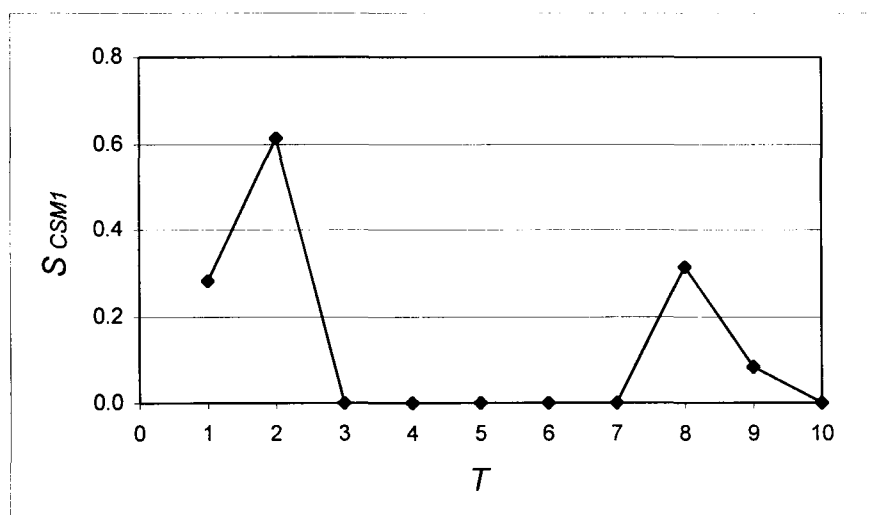


Figura 2.14 Carta CSM1.

2.5.3 Construcción de la carta CSM2

La construcción de la carta CSM2 es exclusiva para el escenario donde los parámetros $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ son desconocidos.

El análogo de esta carta para el escenario donde los parámetros son conocidos corresponde a la carta descrita por Pignatiello y Runger (1990) como Esquema multivariado CUSUM #2 (sección 1.3.4).

En la sección 1.3.1, se comentó que el estadístico de Hotelling T_2^2 para el caso de parámetros desconocidos está relacionado con la distribución F mediante la expresión $\frac{n(n-p)}{p(n-1)(n+1)}T_2^2$, la cual tiene una distribución F con p y $n-p$ grados de libertad en el numerador y denominador respectivamente (Tracy y otros, 1997). Se sabe también que el parámetro de no centralidad, $\lambda = (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu})$ (ecuación 1.15), de esta distribución F representa el cuadrado de la distancia de Mahalanobis entre $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\mu}_1$, y que $\lambda = 0$ cuando el proceso está bajo control.

En general, sea F' una variable con distribución F cuyos grados de libertad en el numerador y denominador son ν_1 y ν_2 . Entonces su valor esperado está dado por:

$$E(F') = \left(\frac{\nu_2}{\nu_2 - 2} \right) \left(1 + \frac{\lambda}{\nu_1} \right) \quad (2.34)$$

(Tiku, 1981), donde λ es el parámetro de no centralidad.

Al despejar λ de la expresión anterior se tiene:

$$\left(E(F') - \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2} \right) \frac{\nu_1(\nu_2 - 2)}{\nu_2} = \lambda \quad (2.35)$$

Dado que el valor esperado es un operador lineal:

$$E\left[\left(F' - \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2}\right) \frac{\nu_1(\nu_2 - 2)}{\nu_2}\right] = \lambda \quad (2.36)$$

Por lo que

$$M' = \left(F' - \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2}\right) \frac{\nu_1(\nu_2 - 2)}{\nu_2} \quad (2.37)$$

estima insesgadamente el parámetro de no centralidad de la variable F' .

En nuestro caso, $F = \frac{n(n-p)}{p(n-1)(n+1)} T_2^2$ y los grados de libertad asociados con esta expresión

son $\nu_1 = p$ y $\nu_2 = n - p$. De este modo, la variable

$$M = \left(\frac{n(n-p)}{p(n-1)(n+1)} T_2^2 - \frac{n-p}{n-p-2}\right) \frac{p(n-p-2)}{n-p} \quad (2.38)$$

es un estimador del valor de λ , es decir, M estima el cuadrado de la distancia de Mahalanobis o distancia estadística.

De esta manera, el detectar un incremento en la variable M equivale a detectar que el parámetro de no centralidad de la distribución asociada F ha comenzado a incrementarse. Un incremento en λ indica que el cuadrado de la distancia estadística entre $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\mu}_1$ ha dejado de ser cero y que el proceso está fuera de control. Por tanto, se puede monitorear el proceso mediante el monitoreo de M .

La carta de control CSM2 surge al desarrollar una carta CUSUM superior para la variable M .

El estadístico de la carta CSM2 para la variable M de la i -ésima observación multivariada es:

$$S_{CSM2,i} = \max\left[0, M_i - (\mu + K) + S_{CSM2,i-1}\right] \quad (2.39)$$

con valor inicial $S_{CSM2,0} = 0$,

$$\mu = 0 \text{ y } K = \frac{1}{2}$$

Se construye únicamente el lado superior de la carta CUSUM porque lo que interesa es detectar incrementos de M .

En este trabajo, la nueva carta recibe el nombre de CSM2 por tratarse de una segunda adaptación estudiada de la carta CUSUM al caso multivariado.

Al igual que para la carta CSM1, la carta CSM2 da la señal de alarma si $S_{CSM2} > h$, para algún parámetro h que proporcione un adecuado PLC cuando el proceso se encuentra bajo control.

Ejemplo 2.5. Para el estadístico de Hotelling T_2^2 obtenido a partir de las 10 observaciones multivariadas presentadas del ejemplo 2.3, construya una carta CSM2.

La Tabla 2.4 muestra los 10 vectores de observaciones ($\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$), el estadístico T_2^2 , la variable M y el estadístico para la carta CSM2.

Tabla 2.4 Datos del ejemplo 2.5.

Número de observación	X_1	X_2	X_3	T_2^2	M	S_{CSM2}
1	11.07	15.30	4.02	5.0290	1.0296	0.5296
2	9.27	12.85	0.78	5.2675	1.2207	1.2504
3	9.76	14.23	1.67	0.6729	-2.4608	0.0000
4	11.20	16.00	1.55	3.8920	0.1186	0.0000
5	7.85	12.99	2.69	3.1830	-0.4495	0.0000
6	8.64	13.72	3.60	2.5962	-0.9197	0.0000
7	8.23	13.99	2.76	2.6476	-0.8785	0.0000
8	7.26	12.68	2.60	5.1832	1.1532	0.6532
9	9.81	12.35	3.72	3.2237	-0.4169	0.0000
10	9.69	12.94	3.57	1.6240	-1.6987	0.0000

Se presenta el cálculo del estadístico S_{CSM2} para las primeras tres observaciones:

$$S_{CSM2,1} = \max[0, M_1 - (\mu + K) + S_{CSM2,1-1}] = \max[0, 1.0296 - (0 + 0.5) + 0] = 0.5296$$

$$S_{CSM2,2} = \max[0, M_2 - (\mu + K) + S_{CSM2,2-1}] = \max[0, 1.2207 - (0 + 0.5) + 0.5296] = 1.2504$$

$$S_{CSM2,3} = \max[0, M_3 - (\mu + K) + S_{CSM2,3-1}] = \max[0, -2.4608 - (0 + 0.5) + 1.2504] = 0.0$$

Al graficar S_{CSM2} , la carta CSM2 para las primeras 10 observaciones multivariadas queda como sigue:

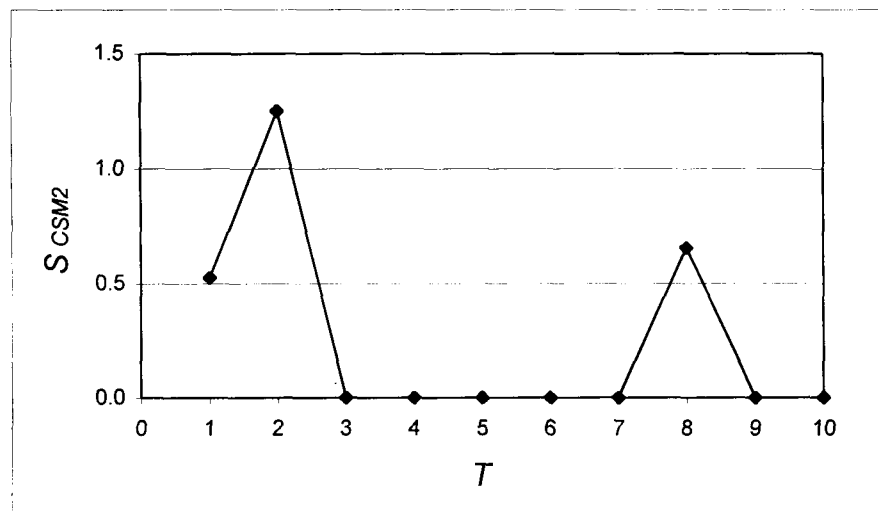


Figura 2.15 Carta CSM2.

Capítulo 3

ESTUDIO COMPARATIVO DE DESEMPEÑO

3.1 Introducción

En este capítulo se presenta un estudio comparativo del desempeño de las cartas:

- RIM
- MAT
- CSM1
- CSM2

las cuales fueron desarrolladas en el capítulo anterior. Además de estudiar su desempeño en cambios tipo escalón y tipo tendencia, estas nuevas cartas se comparan entre sí y también se comparan contra las cartas:

- T^2 de Hotelling (T^2)
- Múltiples cartas CUSUM univariadas de Woodal y Ncube (W&N)
- Esquema multivariado CUSUM #1 de Pignatiello y Runger (MC1)
- Esquema multivariado CUSUM #2 de Pignatiello y Runger (MC2)

las cuales se encuentran en la literatura y fueron descritas en el capítulo 1 (secciones 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3 y 1.3.4) como antecedentes del monitoreo de una media multivariada. Éstas serán identificadas con los nombres que aparecen entre paréntesis al final de cada una. Pignatiello y Runger (1990) hacen un comparativo de estas cuatro cartas considerando parámetros conocidos y un cambio tipo escalón en el parámetro de no centralidad.

3.2 Metodología

El desempeño de las cuatro cartas obtenidas se estudiará por medio del PLC. La estructura de los estadísticos propuestos es compleja, varía de acuerdo al número de observación y su distribución es difícil de obtener, por lo que el método para encontrar los PLC es la simulación. Las estimaciones del PLC se realizan mediante simulación Monte Carlo, para lo cual se implementan programas en lenguaje C.

Debe considerarse que se está trabajando con variables que se distribuyen *aproximadamente* normal. La falta de ajuste perfecto a la distribución normal estándar de las variables transformadas Z_1 y Z_2 (descritas en la sección 2.2, ecuaciones 2.2 y 2.6) impide obtener exactamente el mismo valor del PLC para cualquier cantidad de características a monitorear, p , y cualquier tamaño de muestra, n , utilizada para estimar parámetros desconocidos.

En el caso de parámetros conocidos, donde no se necesita una muestra previa de tamaño n , el estadístico de Hotelling del que se parte en este trabajo tiene distribución χ^2 con p grados de libertad y se espera un mejor ajuste de la transformación a la distribución normal estándar en cuanto mayor sea p (sección 2.2.1).

Por otra parte, cuando los parámetros son desconocidos, el estadístico de Hotelling está relacionado con la distribución F , en la cual se espera un buen ajuste cuando tanto p como n son grandes. En cambio, cuando p y n son pequeñas y/o muy diferentes entre sí, el ajuste no es tan bueno; sin embargo, esto no impacta negativamente en la construcción de las cartas de control debido a que esta “falta de ajuste” se considera en la estimación del PLC cuando el proceso está bajo control y cuando no lo está.

Las cartas de control propuestas dan la señal de alarma cuando el valor del estadístico supera cierto parámetro h , donde h se determina mediante simulación de acuerdo al PLC deseado con el proceso bajo control.

Para la estimación del PLC se generaron 10,000 corridas independientes. Una corrida es una serie de observaciones simuladas hasta que la carta de control da la señal de alarma, registrándose el número de estas observaciones. A esto se le llama longitud de corrida. Entonces, el PLC es el promedio de estas 10,000 corridas.

3.3 Propiedad de dirección invariante

El estadístico de la carta T^2 de Hotelling, el punto de partida de las cuatro cartas propuestas en este trabajo, es invariante en dirección. Esto es, el desempeño de su PLC está determinado únicamente por la distancia estadística entre la media nominal $\boldsymbol{\mu}$ y la media fuera de control $\boldsymbol{\mu}_1$ y no por una dirección de la media en particular (Pignatiello y Runger, 1990).

Por ejemplo, suponiendo que se tienen $p = 2$ dimensiones, $\boldsymbol{\mu} = (0, 0)'$ y la matriz de varianzas y covarianzas es una matriz identidad de orden 2. Entonces, por la propiedad de dirección invariante, la carta T^2 tiene exactamente el mismo PLC para todas las posibles $\boldsymbol{\mu}_1$ a la misma distancia del objetivo. Los cambios de la media del vector nominal hacia los vectores $(1, 0)'$, $(0, -1)'$, $(0.5\sqrt{2}, 0.5\sqrt{2})'$ y $(-0.5\sqrt{2}, -0.5\sqrt{2})'$, todos tienen el mismo PLC. Esta es la razón por la que se simula la situación de fuera de control considerando únicamente la distancia estadística entre $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\mu}_1$.

Las cuatro cartas propuestas en este trabajo, RIM, MAT, CSM1 y CSM2, presentan la propiedad de dirección invariante, debido a que todas surgen a partir de los estadísticos T_1^2 y T_2^2 , los cuales son invariantes en dirección.

Entre las cartas consideradas para comparar las cartas propuestas, el esquema multivariado CUSUM #1 de Pignatiello y Runger (MC1) y las múltiples cartas CUSUM univariadas de Woodal y Ncube (W&N) son variantes en dirección. Es decir, en éstas, para efectos de

comparación con las cartas propuestas, se consideró que todo el desplazamiento de la media ocurrió sólo a lo largo de una de las p dimensiones.

3.4 Calibración de las cartas

El primer paso a realizar para estudiar el desempeño de las cartas propuestas, es calibrar las 4 cartas de control. Es decir, se debe determinar el valor de h para cada carta de modo que tengan el mismo PLC con el mismo proceso bajo control. Esto debe hacerse para cada carta tanto para el caso de parámetros conocidos como de parámetros desconocidos. El PLC depende únicamente del valor de p (número de características a monitorear) y de n (tamaño de la muestra utilizada para estimar μ y Σ si no se conocen). El PLC no depende de los verdaderos valores de los parámetros.

Se consideran tres posibles valores de p : 2, 3 y 10. Además, en el escenario de parámetros desconocidos, se consideran seis posibles valores de n : 5, 10, 15, 20, 25 y 30.

Se eligió que el PLC de las cartas con el proceso bajo control fuera 200. De este modo, la probabilidad de cometer el error tipo I en cada observación está fijado en $\alpha = \frac{1}{PLC} = \frac{1}{200} = 0.005$. Las tablas 3.1 y 3.2 muestran los valores de h para cada una de las cartas propuestas, la estimación del PLC correspondiente a ese valor de h y la estimación del error estándar de \hat{PLC} .

Tabla 3.1 Valores de PLC bajo control con parámetros conocidos.

p		RIM	MAT	CSM1
2	$h =$	10.29	3.66	3.52
	$PLC =$	202.18	200.42	199.36
	$Std dev =$	1.833	1.910	1.95
3	$h =$	10.19	3.63	3.51
	$PLC =$	202.81	202.20	199.54
	$Std dev =$	1.886	1.963	1.97
10	$h =$	10.19	3.62	3.51
	$PLC =$	202.56	198.42	199.96
	$Std dev =$	1.879	1.953	1.96

Recuerde que la construcción de la carta CSM2 es exclusiva para el escenario donde los parámetros μ y Σ son desconocidos (sección 2.5.3), por lo que esta carta no se considera en la tabla anterior.

Tabla 3.2 Valores de PLC bajo control con parámetros desconocidos.

<i>n</i>	<i>p</i>		RIM	MAT	CSM1	CSM2
5	2	<i>h</i> =	14.32	4.29	4.60	37.50
		<i>PLC</i> =	196.99	202.45	198.93	200.17
		<i>Std dev</i> =	1.844	1.974	1.966	1.985
	3	<i>h</i> =	21.30	5.25	5.80	*
		<i>PLC</i> =	198.10	199.49	200.68	*
		<i>Std dev</i> =	1.817	1.886	1.938	*
10	2	<i>h</i> =	10.30	3.62	3.80	21.00
		<i>PLC</i> =	199.31	200.12	198.33	199.03
		<i>Std dev</i> =	1.885	1.984	1.941	1.898
	3	<i>h</i> =	11.00	3.77	3.86	31.10
		<i>PLC</i> =	199.97	199.95	200.48	199.65
		<i>Std dev</i> =	1.848	1.971	1.951	1.918
15	2	<i>h</i> =	9.75	3.52	3.70	17.70
		<i>PLC</i> =	200.31	197.34	200.66	198.75
		<i>Std dev</i> =	1.885	1.947	1.976	1.924
	3	<i>h</i> =	9.95	3.60	3.64	24.50
		<i>PLC</i> =	198.85	202.03	200.91	200.65
		<i>Std dev</i> =	1.846	1.981	1.967	1.920
	10	<i>h</i> =	14.85	4.35	4.49	123.20
		<i>PLC</i> =	201.43	200.18	198.64	200.59
		<i>Std dev</i> =	1.859	1.909	1.95	1.885
20	2	<i>h</i> =	9.57	3.49	198.64	16.45
		<i>PLC</i> =	200.84	202.03	198.84	200.73
		<i>Std dev</i> =	1.869	1.972	1.921	1.946
	3	<i>h</i> =	9.57	3.54	3.56	22.00
		<i>PLC</i> =	197.90	202.53	200.72	199.58
		<i>Std dev</i> =	1.867	1.968	1.983	1.919
	10	<i>h</i> =	11.65	3.88	3.86	75.00
		<i>PLC</i> =	200.53	199.38	199.73	199.43
		<i>Std dev</i> =	1.877	1.931	1.970	1.866

* Valor no calculado.

Tabla 3.2 Continuación.

<i>n</i>	<i>p</i>		RIM	MAT	CSM1	CSM2
25	2	<i>h</i> =	9.46	3.47	3.66	15.70
		<i>PLC</i> =	199.86	200.23	202.28	199.51
		<i>Std dev</i> =	1.858	1.958	1.937	1.934
	3	<i>h</i> =	9.46	3.50	3.53	20.90
		<i>PLC</i> =	201.52	200.38	200.01	200.25
		<i>Std dev</i> =	1.894	1.951	1.982	1.910
	10	<i>h</i> =	10.68	3.72	3.67	61.80
		<i>PLC</i> =	197.48	197.98	198.62	200.45
		<i>Std dev</i> =	1.854	1.916	1.950	1.851
30	2	<i>h</i> =	9.41	3.46	3.62	15.32
		<i>PLC</i> =	200.41	200.01	198.00	200.46
		<i>Std dev</i> =	1.851	1.943	1.885	1.933
	3	<i>h</i> =	9.37	3.48	3.53	20.20
		<i>PLC</i> =	201.20	200.30	202.38	199.87
		<i>Std dev</i> =	1.903	1.924	2.001	1.926
	10	<i>h</i> =	10.28	3.65	3.59	55.30
		<i>PLC</i> =	198.87	199.16	199.96	199.91
		<i>Std dev</i> =	1.840	1.929	1.955	1.848

* Valor no calculado.

Así, por ejemplo, si se pretende monitorear $p = 2$ características de calidad utilizando una carta MAT, suponiendo que no se conocen los parámetros μ y Σ de la distribución normal bivariada y que estos parámetros se estiman a partir de una muestra de tamaño $n = 10$; entonces con $h = 3.62$ la carta está calibrada a un PLC de 200.12; es decir, en promedio, la carta dará una señal de alarma cada 200 observaciones cuando el proceso está bajo control.

Obsérvese que el PLC en todas las cartas y valores de p es muy cercano a 200. Para los valores de h mostrados en las tablas, intervalos de confianza del 95% obtenidos vía simulación para el PLC contienen al 200 cuando el proceso está bajo control.

Ninguna carta de control puede construirse para $n=5$ y $p=10$ y para $n=10$ y $p=10$, porque no se tienen suficientes grados de libertad del denominador para la variable $F_{n,n-p}$ que se obtiene a partir del estadístico T_2^2 (sección 2.5.3).

Además, la carta CSM2 no se puede construir para $n=5$ y $p=3$, pues en este caso la distribución F asociada tiene 5 y $5-3=2$ grados de libertad en el numerador y denominador respectivamente. Se sabe que el valor esperado no existe para una distribución F con 2 grados de libertad en el denominador (Casella y Berger, 1990) por lo que el cálculo del estadístico M , de la carta CSM2 tiene una división entre cero cuando $n-p=2$ (sección 2.5.3).

3.5 PLC cuando el proceso está fuera de control

Con los valores de h dados en las tablas 3.1 y 3.2 se realizaron simulaciones de las cuatro cartas. Dado que las cuatro cartas tienen el mismo PLC con el proceso bajo control para las distintas p y n consideradas, se debe ahora estimar el PLC con el proceso fuera de control. Una carta tiene mejor desempeño si tiene menor PLC con el proceso fuera de control.

Se considera que el proceso está fuera de control cuando las expresiones T_1^2 y $F = \frac{n(n-p)}{p(n-1)(n+1)} T_2^2$ ya no se distribuyen χ^2 y F centrales sino que tienen parámetro de no centralidad dado por $\lambda = (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu})$ (sección 1.3.1). El parámetro de no centralidad es el cuadrado de la distancia de Mahalanobis entre $\boldsymbol{\mu}_1$ (vector de medias fuera de control) y $\boldsymbol{\mu}$ (vector de medias nominal). De este modo, la distancia de Mahalanobis entre $\boldsymbol{\mu}_1$ y $\boldsymbol{\mu}$ sería

$$d = \sqrt{\lambda} = \sqrt{(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu})} \quad (3.1)$$

Se consideraron dos casos de fuera de control: cuando el cambio es tipo escalón y cuando es tipo tendencia.

3.5.1 PLC cuando el proceso está fuera de control con cambio tipo escalón

Para la situación de fuera de control con cambios tipo escalón en la media multivariada, se simuló el comportamiento del PLC con nueve diferentes distancias d : 0.1, 0.25, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0 y 4.0.

Las tablas 3.3, 3.4 y 3.5 muestran los valores de PLC para el cambio tipo escalón en el escenario de parámetros conocidos. Se presentan tanto las cartas propuestas (izquierda) como las cartas ya existentes consideradas (derecha). Debajo de los PLC estimados por simulación se encuentra su respectivo error estándar.

Tabla 3.3 PLC fuera de control con parámetros conocidos.

Cambio tipo escalón					$p = 2$			
d	$\lambda = d^2$	MIR	MAT	CSM1	T^2	W&N	MC1	MC2
	$h=$	10.29	3.66	3.52	10.60	4.83	4.75	13.50
0.1	0.01	195.26 1.784	190.73 1.811	190.79 1.870	194.85			
0.25	0.0625	157.62 1.410	149.93 1.401	160.02 1.557	170.99			
0.5	0.25	86.19 0.725	76.86 0.691	92.33 0.888	115.55	33.69 0.349	31.31 0.339	85.3
1.0	1	24.40 0.171	18.75 0.156	24.09 0.203	41.92	9.92 0.068	9.28 0.066	22.1
1.5	2.25	9.77 0.060	7.69 0.058	8.77 0.058	15.78	5.58 0.029	5.23 0.027	8.9
2.0	4	5.17 0.028	4.23 0.029	4.74 0.025	6.88	3.89 0.016	3.69 0.016	4.9
2.5	6.25	3.38 0.015	2.86 0.017	3.23 0.013	3.55	3.02 0.011	2.91 0.011	3.2
3.0	9	2.56 0.009	2.15 0.011	2.49 0.008	2.16	2.51 0.008	2.40 0.008	2.4
4.0	16	2.05 0.002	1.60 0.006	1.78 0.005	1.23			

Tabla 3.4 PLC fuera de control con parámetros conocidos.

Cambio tipo escalón			$p = 3$					
d	$\lambda = d^2$	MIR	MAT	CSM1	T^2	W&N	MC1	MC2
	$h =$	10.19	3.63	3.51	12.84	5.22	5.48	17.40
0.1	0.01	195.04 1.812	195.31 1.911	193.87 1.898	196.06			
0.25	0.0625	164.08 1.491	158.75 1.527	167.48 1.653	177.34			
0.5	0.25	98.15 0.847	87.98 0.794	105.12 1.039	129.18	37.65 0.386	33.54 0.362	95.8
1.0	1	29.76 0.217	22.93 0.193	30.31 0.269	52.40	10.69 0.071	10.13 0.071	27.0
1.5	2.25	11.85 0.076	9.07 0.069	10.83 0.077	20.41	5.92 0.029	5.66 0.028	11.0
2.0	4	6.14 0.034	4.84 0.034	5.59 0.031	8.80	4.17 0.017	4.00 0.016	6.0
2.5	6.25	3.85 0.018	3.19 0.020	3.64 0.016	4.38	3.21 0.012	3.17 0.011	3.9
3.0	9	2.80 0.011	2.34 0.013	2.71 0.010	2.55	2.66 0.009	2.63 0.008	2.8
4.0	16	2.09 0.003	1.67 0.007	1.88 0.006	1.33			

Tabla 3.5 PLC fuera de control con parámetros conocidos.

Cambio tipo escalón					$p = 10$			
d	$\lambda = d^2$	MIR	MAT	CSM1	T^2	W&N	MC1	MC2
	$h=$	10.19	3.62	3.51	25.19	6.40	9.55	38.1
0.1	0.01	198.79 <i>1.852</i>	194.93 <i>1.898</i>	196.91 <i>1.930</i>	198.21			
0.25	0.0625	181.32 <i>1.672</i>	175.82 <i>1.719</i>	181.32 <i>1.785</i>	189.21			
0.5	0.25	134.27 <i>1.178</i>	121.71 <i>1.129</i>	140.45 <i>1.371</i>	161.33	48.22 <i>0.491</i>	43.86 <i>0.506</i>	126.9
1.0	1	54.45 <i>0.417</i>	42.90 <i>0.370</i>	59.63 <i>0.554</i>	92.47	12.93 <i>0.079</i>	12.62 <i>0.074</i>	49.1
1.5	2.25	22.91 <i>0.155</i>	16.83 <i>0.137</i>	22.67 <i>0.187</i>	44.53	7.10 <i>0.032</i>	7.66 <i>0.031</i>	21.5
2.0	4	11.25 <i>0.069</i>	8.49 <i>0.064</i>	10.24 <i>0.070</i>	20.59	4.91 <i>0.018</i>	5.66 <i>0.018</i>	11.8
2.5	6.25	6.47 <i>0.036</i>	5.12 <i>0.036</i>	5.82 <i>0.032</i>	9.92	3.81 <i>0.013</i>	4.55 <i>0.013</i>	7.5
3.0	9	4.22 <i>0.021</i>	3.42 <i>0.022</i>	3.93 <i>0.018</i>	5.21	3.12 <i>0.009</i>	3.84 <i>0.010</i>	5.3
4.0	16	2.46 <i>0.008</i>	2.05 <i>0.011</i>	2.36 <i>0.008</i>	2.02			

Los valores de PLC que aparecen para las cartas W&N y MC1 fueron calculados por Pignatiello y Runger (1990) por medio de simulación Monte Carlo. Los valores de PLC para la carta MC2 fueron determinados por Pignatiello y Runger (1990) utilizando un enfoque de cadenas de Markov. Estos autores no realizan el cálculo del PLC para $d = 0.1, 0.25$ y 4.0 .

Los valores del PLC para la carta T^2 surgen a partir de la distribución χ^2 no central de tal modo que:

$$PLC = \frac{1}{P(\chi_{p,\lambda}^2 > h)} \quad (3.2)$$

donde p es el número de variables monitoreadas, $\lambda = d^2$ y h es el límite superior de control fijado para la carta T^2 . Para los diferentes valores de p y d considerados, el PLC se calculó con el software JMPIN.

Las tablas correspondientes al cambio tipo escalón con el escenario de parámetros desconocidos y los diferentes valores de p , n y d considerados se encuentran en el Apéndice A. En estas tablas aparecen los valores del PLC para las cartas propuestas MIR, MAT, CSM1 y CSM2 y para la carta T^2 . No se encuentran para las cartas MC1, MC2 y W&N pues Pignatiello y Runger (1990) no las evalúan en el escenario de parámetros.

Los valores del PLC para la carta T^2 para el escenario de parámetros desconocidos surgen a partir de la distribución F no central de tal modo que:

$$PLC = \frac{1}{P(F_{p,n-p,\lambda} > h)} \quad (3.3)$$

donde p es el número de variables monitoreadas, n es el tamaño de la muestra de donde los parámetros fueron estimados, $\lambda = d^2$ y h es el límite superior de control fijado para la carta T^2 . Para los diferentes valores de p , n y d considerados, el PLC se calculó con el software JMPIN.

3.5.2 PLC cuando el proceso está fuera de control con cambio tipo tendencia

Para la situación de fuera de control con cambios tipo tendencia, se consideró que la distancia de Mahalanobis, d , sufre un incremento m cada unidad de tiempo, donde la unidad de tiempo es el periodo entre dos observaciones consecutivas. Es decir, d depende del tiempo de modo que $d = mT$, donde T es el número de unidades de tiempo que han pasado desde que el proceso se salió de control y d empezó a incrementarse.

Es evidente que si cuando el proceso está bajo control, $d = 0$, y por lo tanto no es posible considerar decrementos en d pues esta medida de distancia siempre debe ser positiva.

Se simuló el comportamiento del PLC con once diferentes pendientes m : 0.01, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.5 y 1.0.

Las tablas 3.6, 3.7 y 3.8 muestran los valores de PLC para el cambio tipo tendencia en el escenario de parámetros conocidos. Se presentan tanto las cartas propuestas (izquierda) como la carta T^2 ya existente (derecha). Debajo de los PLC estimados por simulación se encuentra su respectivo error estándar.

Tabla 3.6 PLC fuera de control con parámetros conocidos.

Cambio tipo tendencia		$p = 2$			
m	$\lambda = (mT)^2$	MIR	MAT	CSM1	T^2
	$h =$	10.29	3.66	3.52	10.60
0.01	$(0.01T)^2$	71.98 0.298	53.57 0.251	70.87 0.333	80.46
0.05	$(0.05T)^2$	26.77 0.076	12.54 0.097	25.99 0.080	29.87
0.10	$(0.10T)^2$	16.75 0.042	10.61 0.049	16.21 0.043	18.41
0.15	$(0.15T)^2$	12.74 0.030	6.66 0.044	12.30 0.030	13.76
0.20	$(0.20T)^2$	10.44 0.024	6.80 0.035	10.09 0.024	11.12
0.25	$(0.25T)^2$	8.99 0.020	5.04 0.028	8.75 0.020	9.43
0.30	$(0.30T)^2$	7.96 0.017	4.73 0.028	7.73 0.017	8.24
0.35	$(0.35T)^2$	7.14 0.016	4.59 0.023	6.98 0.015	7.34
0.40	$(0.40T)^2$	6.54 0.014	3.94 0.021	6.40 0.013	6.64
0.50	$(0.50T)^2$	5.60 0.012	3.64 0.019	5.54 0.011	5.62
1.00	$(1.00T)^2$	3.51 0.007	2.40 0.011	3.59 0.007	3.35

Tabla 3.7 PLC fuera de control con parámetros conocidos.

Cambio tipo tendencia		$p = 3$			
m	$\lambda = (mT)^2$	MIR	MAT	CSMI	T^2
	$h =$	10.19	3.63	3.51	12.84
0.01	$(0.01T)^2$	76.03 0.322	57.44 0.278	75.43 0.359	85.51
0.05	$(0.05T)^2$	28.34 0.080	12.54 0.095	27.49 0.086	31.94
0.10	$(0.10T)^2$	17.79 0.044	11.83 0.053	17.20 0.046	19.62
0.15	$(0.15T)^2$	13.50 0.032	6.70 0.043	13.08 0.032	14.62
0.20	$(0.20T)^2$	11.07 0.025	7.03 0.039	10.73 0.025	11.82
0.25	$(0.25T)^2$	9.46 0.021	5.56 0.028	9.23 0.021	10.00
0.30	$(0.30T)^2$	8.37 0.018	4.70 0.028	8.17 0.018	8.73
0.35	$(0.35T)^2$	7.52 0.016	4.84 0.025	7.37 0.015	7.77
0.40	$(0.40T)^2$	6.86 0.014	4.24 0.021	6.75 0.014	7.02
0.50	$(0.50T)^2$	5.89 0.012	3.71 0.020	5.83 0.012	5.93
1.00	$(1.00T)^2$	3.66 0.007	2.50 0.012	3.74 0.007	3.52

Tabla 3.8 PLC fuera de control con parámetros conocidos.

Cambio tipo tendencia		$p = 10$			
m	$\lambda = (mT)^2$	MIR	MAT	CSM1	T^2
	$h =$	10.19	3.62	3.51	25.19
0.01	$(0.01T)^2$	88.85 0.410	70.43 0.350	88.62 0.455	101.49
0.05	$(0.05T)^2$	34.31 0.100	15.30 0.095	33.40 0.108	39.07
0.10	$(0.10T)^2$	21.51 0.053	13.63 0.082	20.80 0.056	23.98
0.15	$(0.15T)^2$	16.21 0.038	9.33 0.044	15.65 0.039	17.80
0.20	$(0.20T)^2$	13.25 0.029	6.52 0.044	12.84 0.029	14.34
0.25	$(0.25T)^2$	11.33 0.024	7.17 0.040	10.96 0.024	12.11
0.30	$(0.30T)^2$	9.97 0.021	6.20 0.029	9.69 0.020	10.54
0.35	$(0.35T)^2$	8.93 0.018	4.74 0.027	8.71 0.018	9.35
0.40	$(0.40T)^2$	8.10 0.016	4.72 0.028	7.95 0.016	8.44
0.50	$(0.50T)^2$	6.93 0.014	4.28 0.021	6.82 0.013	7.10
1.00	$(1.00T)^2$	4.25 0.008	2.74 0.013	4.30 0.008	4.15

Pignatiello y Runger (1990) no evalúan el desempeño de las cartas MC1, MC2 y W&N con cambios tipo tendencia.

Los valores del PLC para la carta T^2 surgen a partir de la distribución χ^2 no centrada de la siguiente manera:

$$PLC = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot P(\text{longitud de la corrida} = i)$$

$$\begin{aligned}
PLC &= P(\text{longitud de la corrida} = 1) + \sum_{i=2}^{\infty} i \cdot P(\text{longitud de la corrida} = i) \\
PLC &= P\left(\begin{array}{l} \text{longitud de} \\ \text{la corrida} = 1 \end{array}\right) + \sum_{i=2}^{\infty} i \cdot P\left(\begin{array}{l} \text{No haya señal de alarma} \\ \text{en las primeras } i-1 \text{ observaciones} \end{array} \cap \begin{array}{l} \text{Haya señal de alarma} \\ \text{en la observación } i \end{array}\right) \\
PLC &= P(\chi_{p, \lambda=m^2}^2 > h) + \sum_{i=2}^{\infty} \left\{ i \cdot \prod_{j=1}^{i-1} \left[1 - P(\chi_{p, \lambda=(jm)^2}^2 > h) \right] \cdot P(\chi_{p, \lambda=(im)^2}^2 > h) \right\} \quad (3.4)
\end{aligned}$$

donde p es el número de variables monitoreadas, $\lambda = d^2 = (mT)^2$ y h es el límite superior de control fijado para la carta T^2 . Para los diferentes valores de p y m considerados, el PLC se calculó numéricamente con el software JMPIN resolviendo la sumatoria hasta un término convenientemente grande.

Las tablas correspondientes al cambio tipo pendiente con el escenario de parámetros desconocidos y los diferentes valores de p , n y m considerados se encuentran en el Apéndice A. En estas tablas aparecen los valores del PLC para las cartas propuestas MIR, MAT, CSM1 y CSM2 y para la carta T^2 . No se encuentran para las cartas W&N MC1 y MC2 pues Pignatiello y Runger (1990) no las evalúan considerando el cambio tipo pendiente y el escenario de parámetros desconocidos.

Los valores del PLC para la carta T^2 para el escenario de parámetros desconocidos surgen a partir de la distribución F no centrada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
PLC &= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot P(\text{longitud de la corrida} = i) \\
PLC &= P(\text{longitud de la corrida} = 1) + \sum_{i=2}^{\infty} i \cdot P(\text{longitud de la corrida} = i) \\
PLC &= P\left(\begin{array}{l} \text{longitud de} \\ \text{la corrida} = 1 \end{array}\right) + \sum_{i=2}^{\infty} i \cdot P\left(\begin{array}{l} \text{No haya señal de alarma} \\ \text{en las primeras } i-1 \text{ observaciones} \end{array} \cap \begin{array}{l} \text{Haya señal de alarma} \\ \text{en la observación } i \end{array}\right) \\
PLC &= P(F_{p, n-p, \lambda=m^2} > h) + \sum_{i=2}^{\infty} \left\{ i \cdot \prod_{j=1}^{i-1} \left[1 - P(F_{p, n-p, \lambda=(jm)^2} > h) \right] \cdot P(F_{p, n-p, \lambda=(im)^2} > h) \right\} \quad (3.5)
\end{aligned}$$

donde p es el número de variables monitoreadas, n es el tamaño de la muestra de donde los parámetros fueron estimados, $\lambda = d^2 = (mT)^2$ y h es el límite superior de control fijado para la carta T^2 . Para los diferentes valores de p , n y m considerados, el PLC se calculó numéricamente con el software JMPIN resolviendo la sumatoria hasta un término convenientemente grande.

Capítulo 4

CONCLUSIONES

4.1 Introducción

En este capítulo se presentan conclusiones finales con base a los resultados del estudio de desempeño de las cartas propuestas y se discuten algunos tópicos sugeridos como investigaciones a futuro.

4.2 Conclusiones

A pesar de que los resultados no son como se esperaban; a diferencia de otros estudios, en este trabajo se evalúa el desempeño de las cartas de control propuestas considerando el escenario de parámetros desconocidos (estimados mediante una muestra) y considerando el caso del cambio tipo tendencia. Por esta razón, las cuatro cartas presentadas, sólo se comparan entre sí y con la carta T^2 cuando se trata de parámetros desconocidos y/o cambios tipo tendencia (secciones 4.2.2, 4.2.3 y 4.2.4).

4.2.1 Escenario de parámetros conocidos con cambio tipo escalón

Aquí se comentan los resultados presentados en las tablas 3.3, 3.4 y 3.5.

- a) Las cartas ya existentes W&N y MC1 evaluadas por Pignatiello y Runger (1990) presentan mejor desempeño cuando se trata de cambios pequeños en la media multivariada.
- b) Únicamente cuando la distancia estadística entre la media fuera de control y la media bajo control es de 4, la carta T^2 es la que da más rápidamente la señal de alarma, en promedio.
- c) De las tres cartas propuestas para este caso, la carta MAT resultó tener mejor desempeño en cambios tipo escalón pequeños y grandes.

4.2.2 Escenario de parámetros desconocidos con cambio tipo escalón

Aquí se comentan los resultados presentados en las tablas A.1 a la A.16.

- a) **La carta recomendada para cualquier magnitud de cambios tipo escalón es la carta MAT**, la cual resultó tener mejor desempeño en todos los valores analizados de p (número de características a monitorear) y n (tamaño de la muestra empleada en estimar parámetros). No obstante, ésta es la carta cuyo estadístico requiere de más cálculos.
- b) En todos los casos, las cuatro cartas propuestas, RIM, MAT, CSM1 y CSM2, son mucho mejores que la tradicional carta multivariada T^2 .
- c) En el caso de $p = 3$ y $n = 5$, la carta CSM2 no puede ser estimada, pero las demás cartas estudiadas, RIM, MAT y CSM1, se desempeñan mejor que la carta T^2 .
- d) Comparada con las cartas RIM, MAT y CSM1, la carta CSM2 no tiene buen desempeño con valores pequeños de n , pero los valores de PLC obtenidos se acercan a los de las otras cartas conforme n es mayor.

4.2.3 Escenario de parámetros conocidos con cambio tipo tendencia

Aquí se comentan los resultados presentados en las tablas 3.6, 3.7 y 3.8.

- a) **La carta recomendada para cualquier magnitud de cambios tipo tendencia es la carta MAT**, la cual resultó tener mejor desempeño en todos los valores analizados de p (número de características a monitorear) y n (tamaño de la muestra empleada en estimar parámetros). No obstante, ésta es la carta cuyo estadístico requiere de más cálculos.
- b) La carta T^2 es la que, en promedio, da más tarde la señal de alarma, excepto cuando la pendiente del cambio tipo tendencia es muy grande (del orden de una unidad de distancia estadística entre observación y observación). En este caso, la carta T^2 es mejor que las cartas RIM y CSM1 pero no es mejor que la carta MAT.

4.2.4 Escenario de parámetros desconocidos con cambio tipo tendencia

Aquí se comentan los resultados presentados en las tablas A.17 a la A.32.

- a) **La carta recomendada para cualquier magnitud de cambios tipo tendencia es la carta MAT**, la cual resultó tener mejor desempeño en todos los valores analizados de p (número de características a monitorear) y n (tamaño de la muestra empleada en estimar parámetros). No obstante, ésta es la carta cuyo estadístico requiere de más cálculos.
- b) Los PLC obtenidos con cambios tipo tendencia son mucho menores para la carta MAT en comparación con el resto de las cartas, sobre todo cuando n es grande.
- c) Se observa que los PLC simulados con cambios tipo tendencia para la carta MAT no son estrictamente decrecientes con respecto a la pendiente del cambio.
- d) Las cuatro cartas propuestas, RIM, MAT, CSM1 y CSM2, son mejores que la tradicional carta multivariada T^2 , salvo cuando la pendiente del cambio tipo tendencia es muy grande (del orden de una unidad de distancia estadística entre observación y observación). En estos casos, la carta T^2 tiene un comportamiento más competitivo.
- e) En el caso de $p = 3$ y $n = 5$, la carta CSM2 no puede ser evaluada, pero las demás cartas estudiadas, RIM, MAT y CSM1, se desempeñan mucho mejor que la carta T^2 .

4.3 Sugerencias para futuras investigaciones

De este estudio surgieron varios puntos de discusión que pueden ser estudiados en el futuro. Algunos de estos puntos son los siguientes:

- El supuesto de varianza constante es un punto crítico. Un cambio en la matriz de varianzas y covarianzas impacta el cálculo de la distancia estadística entre el vector de medias fuera de control y el vector nominal de medias. Este cálculo es indispensable en la construcción de las cartas desarrolladas.
- También es necesario desarrollar y evaluar cartas de control para detectar tendencias lineales en la estructura de varianzas y covarianzas de las características de calidad monitoreadas.
- Las cartas propuestas son invariantes en dirección. Es decir, detectan una salida de control del proceso si la media se desplaza de la media nominal, independientemente de la dirección en que lo hace. Sin embargo, es posible que una dirección interese más que otras, o que una dirección represente un deterioro en el proceso mientras que otra representa una mejora; por lo que es necesario la evaluación de cartas de control variantes en dirección con cambios tipo tendencia.

Apéndice A

Valores de PLC para el caso de parámetros desconocidos

Las tablas de este apéndice muestran los valores de PLC para el cambio tipo escalón y tipo tendencia en el escenario de parámetros desconocidos. Se presentan tanto las cartas propuestas (izquierda) como la carta T^2 existente en la literatura (derecha). Debajo de los PLC estimados por simulación se encuentra su respectivo error estándar.

A.1 PLC cuando el proceso está fuera de control con cambio tipo escalón

Tabla A.1 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo escalón		$p = 2$		$n = 5$		T^2
d	$\lambda = d^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	
	$h =$	14.32	4.29	4.60	37.50	49.80
0.1	0.01	195.05 1.820	197.76 1.918	195.88 1.932	198.60 1.967	198.55
0.25	0.0625	176.26 1.635	174.59 1.679	176.65 1.728	189.32 1.881	191.27
0.5	0.25	125.98 1.106	114.73 1.070	127.72 1.237	159.77 1.572	168.86
1.0	1	47.86 0.351	35.81 0.305	47.10 0.421	87.49 0.830	113.29
1.5	2.25	21.05 0.129	14.57 0.113	18.16 0.134	40.30 0.337	70.96
2.0	4	11.85 0.062	8.34 0.060	9.52 0.053	20.84 0.149	44.98
2.5	6.25	7.90 0.037	5.83 0.038	6.41 0.028	12.89 0.082	29.59
3.0	9	5.89 0.025	4.49 0.028	4.98 0.018	8.90 0.053	20.29
4.0	16	4.01 0.014	3.19 0.018	3.64 0.010	5.27 0.029	10.73

Tabla A.2 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo escalón		$p = 2$		$n = 10$		T^2
d	$\lambda = d^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	
	<i>h=</i>	<i>10.30</i>	<i>3.62</i>	<i>3.80</i>	<i>21.00</i>	<i>11.04</i>
0.1	0.01	193.62 <i>1.840</i>	192.95 <i>1.891</i>	193.88 <i>1.895</i>	195.77 <i>1.883</i>	197.08
0.25	0.0625	165.82 <i>1.539</i>	160.54 <i>1.566</i>	169.05 <i>1.657</i>	173.10 <i>1.658</i>	182.97
0.5	0.25	101.76 <i>0.900</i>	91.94 <i>0.870</i>	107.67 <i>1.026</i>	114.00 <i>1.058</i>	144.26
1.0	1	31.28 <i>0.223</i>	24.19 <i>0.207</i>	31.90 <i>0.276</i>	35.52 <i>0.282</i>	72.06
1.5	2.25	12.99 <i>0.077</i>	9.61 <i>0.075</i>	11.98 <i>0.081</i>	14.35 <i>0.094</i>	34.18
2.0	4	7.20 <i>0.036</i>	5.55 <i>0.039</i>	6.53 <i>0.032</i>	7.82 <i>0.044</i>	17.12
2.5	6.25	4.84 <i>0.021</i>	3.78 <i>0.023</i>	4.51 <i>0.017</i>	5.08 <i>0.026</i>	9.32
3.0	9	3.63 <i>0.014</i>	2.93 <i>0.017</i>	3.54 <i>0.011</i>	3.63 <i>0.017</i>	5.54
4.0	16	2.55 <i>0.007</i>	2.14 <i>0.011</i>	2.64 <i>0.006</i>	2.28 <i>0.010</i>	2.53

Tabla A.3 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo escalón		$p = 2$		$n = 15$		T^2
d	$\lambda = d^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	
	$h =$	9.75	3.52	3.70	17.70	8.19
0.1	0.01	193.71 <i>1.808</i>	190.80 <i>1.875</i>	195.42 <i>1.914</i>	193.85 <i>1.878</i>	196.39
0.25	0.0625	162.53 <i>1.489</i>	157.77 <i>1.524</i>	165.99 <i>1.611</i>	165.89 <i>1.576</i>	179.31
0.5	0.25	95.68 <i>0.841</i>	87.72 <i>0.831</i>	102.37 <i>0.979</i>	102.17 <i>0.946</i>	134.75
1.0	1	28.04 <i>0.203</i>	21.96 <i>0.191</i>	29.22 <i>0.251</i>	29.54 <i>0.233</i>	60.37
1.5	2.25	11.68 <i>0.069</i>	8.97 <i>0.069</i>	10.90 <i>0.073</i>	11.83 <i>0.075</i>	26.24
2.0	4	6.46 <i>0.032</i>	4.97 <i>0.034</i>	6.01 <i>0.028</i>	6.46 <i>0.035</i>	12.36
2.5	6.25	4.35 <i>0.018</i>	3.41 <i>0.021</i>	4.20 <i>0.015</i>	4.23 <i>0.021</i>	6.48
3.0	9	3.26 <i>0.012</i>	2.66 <i>0.015</i>	3.30 <i>0.010</i>	3.05 <i>0.014</i>	3.81
4.0	16	2.34 <i>0.006</i>	1.96 <i>0.009</i>	2.47 <i>0.006</i>	1.94 <i>0.008</i>	1.81

Tabla A.4 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo escalón		$p = 2$		$n = 20$		T^2
d	$\lambda = d^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	
	$h =$	9.57	3.49	3.66	16.45	7.21
0.1	0.01	194.11 <i>1.807</i>	194.02 <i>1.898</i>	194.17 <i>1.885</i>	194.17 <i>1.864</i>	196.08
0.25	0.0625	163.37 <i>1.502</i>	157.70 <i>1.531</i>	164.73 <i>1.589</i>	163.92 <i>1.561</i>	177.39
0.5	0.25	93.88 <i>0.829</i>	86.72 <i>0.813</i>	99.50 <i>0.943</i>	97.19 <i>0.903</i>	129.96
1.0	1	26.90 <i>0.191</i>	21.18 <i>0.185</i>	27.70 <i>0.234</i>	27.14 <i>0.209</i>	55.15
1.5	2.25	11.12 <i>0.066</i>	8.47 <i>0.065</i>	10.39 <i>0.068</i>	10.85 <i>0.067</i>	23.02
2.0	4	6.18 <i>0.030</i>	4.77 <i>0.032</i>	5.79 <i>0.027</i>	6.00 <i>0.032</i>	10.57
2.5	6.25	4.16 <i>0.017</i>	3.33 <i>0.020</i>	4.06 <i>0.015</i>	3.93 <i>0.019</i>	5.48
3.0	9	3.12 <i>0.011</i>	2.58 <i>0.014</i>	3.20 <i>0.009</i>	2.83 <i>0.013</i>	3.23
4.0	16	2.26 <i>0.005</i>	1.89 <i>0.009</i>	2.39 <i>0.005</i>	1.80 <i>0.008</i>	1.59

Tabla A.5 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo escalón		$p = 2$		$n = 25$		
d	$\lambda = d^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	T^2
	<i>h=</i>	<i>9.46</i>	<i>3.47</i>	<i>3.66</i>	<i>15.70</i>	<i>6.73</i>
0.1	0.01	193.89 <i>1.798</i>	192.85 <i>1.884</i>	197.78 <i>1.902</i>	192.73 <i>1.857</i>	195.83
0.25	0.0625	161.87 <i>1.493</i>	155.53 <i>1.520</i>	167.88 <i>1.628</i>	161.44 <i>1.552</i>	176.15
0.5	0.25	92.08 <i>0.804</i>	84.88 <i>0.798</i>	99.79 <i>0.943</i>	94.24 <i>0.878</i>	127.04
1.0	1	26.19 <i>0.185</i>	20.59 <i>0.179</i>	27.26 <i>0.229</i>	25.86 <i>0.200</i>	52.20
1.5	2.25	10.84 <i>0.064</i>	8.34 <i>0.063</i>	10.27 <i>0.067</i>	10.38 <i>0.064</i>	21.30
2.0	4	6.02 <i>0.029</i>	4.67 <i>0.031</i>	5.71 <i>0.027</i>	5.73 <i>0.031</i>	9.65
2.5	6.25	4.04 <i>0.017</i>	3.23 <i>0.019</i>	4.00 <i>0.014</i>	3.76 <i>0.018</i>	4.98
3.0	9	3.05 <i>0.011</i>	2.50 <i>0.014</i>	3.15 <i>0.009</i>	2.71 <i>0.012</i>	2.94
4.0	16	2.22 <i>0.005</i>	1.87 <i>0.008</i>	2.36 <i>0.005</i>	1.73 <i>0.007</i>	1.49

Tabla A.6 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo escalón		$p = 2$		$n = 30$		T^2
d	$\lambda = d^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	
	<i>h=</i>	<i>9.41</i>	<i>3.46</i>	<i>3.62</i>	<i>15.32</i>	<i>6.44</i>
0.1	0.01	194.56 <i>1.806</i>	192.29 <i>1.880</i>	191.61 <i>1.861</i>	192.28 <i>1.859</i>	195.63
0.25	0.0625	161.42 <i>1.502</i>	156.58 <i>1.521</i>	163.33 <i>1.589</i>	160.74 <i>1.552</i>	175.28
0.5	0.25	91.27 <i>0.800</i>	84.23 <i>0.793</i>	96.73 <i>0.913</i>	93.57 <i>0.869</i>	125.08
1.0	1	25.79 <i>0.181</i>	20.42 <i>0.178</i>	26.48 <i>0.222</i>	25.12 <i>0.193</i>	50.32
1.5	2.25	10.66 <i>0.062</i>	8.23 <i>0.063</i>	10.04 <i>0.064</i>	10.11 <i>0.062</i>	20.23
2.0	4	5.93 <i>0.029</i>	4.62 <i>0.031</i>	5.59 <i>0.026</i>	5.60 <i>0.030</i>	9.09
2.5	6.25	3.99 <i>0.016</i>	3.20 <i>0.019</i>	3.93 <i>0.014</i>	3.67 <i>0.018</i>	4.69
3.0	9	3.01 <i>0.010</i>	2.50 <i>0.013</i>	3.09 <i>0.009</i>	2.65 <i>0.012</i>	2.78
4.0	16	2.20 <i>0.004</i>	1.82 <i>0.008</i>	2.32 <i>0.005</i>	1.70 <i>0.007</i>	1.43

Tabla A.7 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo escalón		$p = 3$		$n = 5$		T^2
d	$\lambda = d^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	
	$h =$	21.30	5.25	5.80	*	199.16
0.1	0.01	196.10 1.795	196.39 1.872	199.18 1.922	*	199.34
0.25	0.0625	186.27 1.691	182.12 1.729	189.00 1.821	*	195.93
0.5	0.25	155.63 1.351	140.54 1.292	155.81 1.492	*	184.68
1.0	1	83.07 0.621	63.04 0.519	80.72 0.749	*	150.19
1.5	2.25	42.83 0.275	28.46 0.220	36.22 0.298	*	114.58
2.0	4	24.72 0.141	16.12 0.121	18.57 0.127	*	86.08
2.5	6.25	16.41 0.086	11.12 0.080	11.73 0.064	*	65.28
3.0	9	12.03 0.058	8.33 0.057	8.59 0.040	*	50.44
4.0	16	7.74 0.033	5.67 0.037	5.80 0.021	*	32.05

* Valor no calculado porque el estadístico M , de la carta CSM2 tiene una división entre cero cuando $n - p = 2$ (ecuación 2.38).

Tabla A.8 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo escalón		$p = 3$		$n = 10$		T^2
d	$\lambda = d^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	
	$h =$	11.00	3.77	3.86	31.10	10.88
0.1	0.01	196.82 1.822	193.44 1.901	196.85 1.933	196.18 1.867	198.11
0.25	0.0625	175.80 1.598	168.21 1.633	178.80 1.742	179.15 1.702	188.79
0.5	0.25	120.32 1.054	110.18 1.025	127.46 1.213	130.84 1.220	160.73
1.0	1	43.23 0.319	33.34 0.290	45.69 0.405	49.31 0.400	95.61
1.5	2.25	18.31 0.115	13.34 0.104	17.04 0.128	20.47 0.136	51.44
2.0	4	9.88 0.053	7.31 0.052	8.64 0.050	11.08 0.062	27.78
2.5	6.25	6.37 0.030	4.86 0.032	5.62 0.025	7.13 0.037	15.69
3.0	9	4.63 0.020	3.65 0.022	4.23 0.015	5.05 0.025	9.40
4.0	16	3.02 0.010	2.49 0.013	2.97 0.008	3.08 0.014	4.09

Tabla A.9 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo escalón		$p = 3$		$n = 15$		T^2
d	$\lambda = d^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	
	$h =$	9.95	3.60	3.64	24.50	7.23
0.1	0.01	193.62 1.805	196.77 1.916	197.14 1.939	195.77 1.849	197.57
0.25	0.0625	170.29 1.566	168.32 1.635	174.89 1.726	172.72 1.607	185.44
0.5	0.25	109.86 0.966	102.86 0.981	119.23 1.166	115.19 1.058	150.61
1.0	1	36.61 0.267	28.62 0.247	38.83 0.338	38.09 0.297	78.89
1.5	2.25	15.23 0.093	11.47 0.088	14.32 0.102	15.73 0.098	37.62
2.0	4	8.27 0.043	6.21 0.043	7.40 0.040	8.60 0.046	18.44
2.5	6.25	5.30 0.024	4.14 0.027	4.87 0.021	5.54 0.027	9.71
3.0	9	3.86 0.016	3.11 0.018	3.70 0.013	3.97 0.018	5.58
4.0	16	2.58 0.007	2.18 0.011	2.64 0.007	2.44 0.010	2.42

Tabla A.10 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo escalón		$p = 3$		$n = 20$		T^2
d	$\lambda = d^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	
	$h =$	9.57	3.54	3.56	22.00	6.16
0.1	0.01	192.28 <i>1.810</i>	194.84 <i>1.887</i>	194.96 <i>1.932</i>	194.63 <i>1.856</i>	197.26
0.25	0.0625	166.34 <i>1.545</i>	164.82 <i>1.589</i>	171.80 <i>1.703</i>	167.68 <i>1.574</i>	183.60
0.5	0.25	105.16 <i>0.921</i>	99.24 <i>0.938</i>	114.18 <i>1.104</i>	107.62 <i>0.999</i>	145.34
1.0	1	34.12 <i>0.248</i>	26.77 <i>0.235</i>	36.22 <i>0.315</i>	34.23 <i>0.268</i>	71.35
1.5	2.25	14.06 <i>0.085</i>	10.65 <i>0.082</i>	13.34 <i>0.094</i>	14.00 <i>0.085</i>	32.16
2.0	4	7.62 <i>0.040</i>	5.81 <i>0.041</i>	6.94 <i>0.037</i>	7.72 <i>0.040</i>	15.13
2.5	6.25	4.92 <i>0.022</i>	3.86 <i>0.025</i>	4.61 <i>0.019</i>	5.00 <i>0.024</i>	7.78
3.0	9	3.58 <i>0.014</i>	2.94 <i>0.017</i>	3.49 <i>0.012</i>	3.56 <i>0.016</i>	4.43
4.0	16	2.42 <i>0.007</i>	2.04 <i>0.010</i>	2.49 <i>0.006</i>	2.21 <i>0.009</i>	1.97

Tabla A.11 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo escalón		$p = 3$		$n = 25$		
d	$\lambda = d^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	T^2
	<i>h=</i>	<i>9.46</i>	<i>3.50</i>	<i>3.53</i>	<i>20.90</i>	<i>5.65</i>
0.1	0.01	194.79 <i>1.822</i>	193.38 <i>1.891</i>	194.42 <i>1.931</i>	194.80 <i>1.848</i>	196.94
0.25	0.0625	166.99 <i>1.544</i>	163.39 <i>1.564</i>	171.23 <i>1.673</i>	168.16 <i>1.589</i>	182.32
0.5	0.25	103.94 <i>0.897</i>	96.43 <i>0.910</i>	112.46 <i>1.093</i>	105.96 <i>0.984</i>	142.04
1.0	1	33.05 <i>0.239</i>	25.86 <i>0.226</i>	34.80 <i>0.300</i>	32.40 <i>0.248</i>	67.08
1.5	2.25	13.61 <i>0.082</i>	10.24 <i>0.078</i>	12.86 <i>0.091</i>	13.32 <i>0.080</i>	29.28
2.0	4	7.35 <i>0.038</i>	5.57 <i>0.039</i>	6.71 <i>0.036</i>	7.33 <i>0.038</i>	13.48
2.5	6.25	4.73 <i>0.021</i>	3.75 <i>0.023</i>	4.46 <i>0.018</i>	4.74 <i>0.022</i>	6.85
3.0	9	3.44 <i>0.013</i>	2.83 <i>0.016</i>	3.39 <i>0.011</i>	3.37 <i>0.015</i>	3.90
4.0	16	2.36 <i>0.006</i>	1.98 <i>0.009</i>	2.43 <i>0.006</i>	2.10 <i>0.008</i>	1.78

Tabla A.12 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo escalón		$p = 3$		$n = 30$		T^2
d	$\lambda = d^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	
	$h=$	9.37	3.48	3.53	20.20	5.36
0.1	0.01	194.27 <i>1.808</i>	192.47 <i>1.856</i>	196.15 <i>1.930</i>	194.15 <i>1.851</i>	196.83
0.25	0.0625	166.15 <i>1.537</i>	163.11 <i>1.547</i>	172.28 <i>1.678</i>	167.40 <i>1.574</i>	181.56
0.5	0.25	103.13 <i>0.894</i>	94.71 <i>0.902</i>	112.78 <i>1.092</i>	104.02 <i>0.970</i>	139.92
1.0	1	32.35 <i>0.233</i>	25.23 <i>0.221</i>	34.11 <i>0.294</i>	31.41 <i>0.241</i>	64.40
1.5	2.25	13.22 <i>0.079</i>	9.90 <i>0.076</i>	12.62 <i>0.088</i>	12.82 <i>0.076</i>	27.53
2.0	4	7.16 <i>0.037</i>	5.44 <i>0.038</i>	6.58 <i>0.034</i>	7.06 <i>0.036</i>	12.51
2.5	6.25	4.62 <i>0.021</i>	3.64 <i>0.022</i>	4.39 <i>0.018</i>	4.58 <i>0.022</i>	6.32
3.0	9	3.36 <i>0.013</i>	2.77 <i>0.016</i>	3.33 <i>0.011</i>	3.25 <i>0.014</i>	3.60
4.0	16	2.31 <i>0.006</i>	1.93 <i>0.009</i>	2.40 <i>0.006</i>	2.03 <i>0.008</i>	1.67

Tabla A.13 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo escalón		$p = 10$		$n = 15$		T^2
d	$\lambda = d^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	
	$h=$	14.85	4.35	4.49	123.20	13.62
0.1	0.01	199.52 <i>1.843</i>	198.19 <i>1.895</i>	197.12 <i>1.931</i>	199.19 <i>1.857</i>	199.53
0.25	0.0625	193.12 <i>1.768</i>	188.51 <i>1.790</i>	191.78 <i>1.880</i>	193.12 <i>1.787</i>	197.14
0.5	0.25	171.20 <i>1.531</i>	159.80 <i>1.511</i>	171.25 <i>1.673</i>	173.97 <i>1.593</i>	188.93
1.0	1	110.04 <i>0.912</i>	91.32 <i>0.806</i>	114.40 <i>1.102</i>	118.36 <i>1.039</i>	160.88
1.5	2.25	62.29 <i>0.456</i>	45.70 <i>0.371</i>	63.64 <i>0.592</i>	68.98 <i>0.543</i>	126.54
2.0	4	35.95 <i>0.237</i>	24.19 <i>0.191</i>	33.86 <i>0.293</i>	40.72 <i>0.277</i>	94.56
2.5	6.25	22.44 <i>0.134</i>	14.84 <i>0.115</i>	18.86 <i>0.143</i>	26.11 <i>0.155</i>	68.77
3.0	9	15.08 <i>0.084</i>	10.22 <i>0.075</i>	11.92 <i>0.075</i>	18.16 <i>0.098</i>	49.54
4.0	16	8.27 <i>0.041</i>	6.00 <i>0.041</i>	6.52 <i>0.030</i>	10.37 <i>0.051</i>	26.10

Tabla A.14 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo escalón		$p = 10$		$n = 20$		T^2
d	$\lambda = d^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	
	$h=$	11.65	3.88	3.86	75.00	5.85
0.1	0.01	198.75 1.857	196.92 1.915	198.05 1.965	197.66 1.834	199.28
0.25	0.0625	188.22 1.757	185.23 1.806	186.92 1.860	186.34 1.704	195.37
0.5	0.25	156.68 1.424	149.38 1.438	160.02 1.588	154.88 1.401	182.25
1.0	1	85.64 0.687	71.79 0.642	92.98 0.890	82.99 0.679	140.72
1.5	2.25	42.50 0.299	31.14 0.259	44.40 0.405	41.40 0.282	96.63
2.0	4	22.90 0.143	16.02 0.125	21.49 0.175	23.37 0.131	62.08
2.5	6.25	13.77 0.078	9.84 0.072	11.76 0.078	14.86 0.073	38.84
3.0	9	9.08 0.047	6.74 0.047	7.58 0.041	10.33 0.046	24.31
4.0	16	4.96 0.022	3.87 0.024	4.36 0.017	5.96 0.024	10.19

Tabla A.15 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo escalón		$p = 10$		$n = 25$		
d	$\lambda = d^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	T^2
	$h=$	10.68	3.72	3.67	61.80	4.42
0.1	0.01	195.08 1.828	195.65 1.892	196.58 1.933	197.76 1.822	199.15
0.25	0.0625	182.28 1.679	180.96 1.746	186.14 1.823	184.15 1.671	194.28
0.5	0.25	147.53 1.304	141.73 1.351	155.80 1.521	147.15 1.315	178.17
1.0	1	75.34 0.606	63.08 0.549	82.90 0.788	71.63 0.567	129.59
1.5	2.25	35.52 0.248	26.05 0.214	37.10 0.332	34.29 0.226	82.27
2.0	4	18.79 0.116	13.27 0.102	17.45 0.135	19.13 0.102	48.72
2.5	6.25	11.11 0.062	8.03 0.058	9.65 0.060	12.15 0.056	28.27
3.0	9	7.33 0.038	5.57 0.038	6.35 0.032	8.47 0.036	16.62
4.0	16	4.03 0.017	3.26 0.020	3.71 0.013	4.91 0.019	6.43

Tabla A.16 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo escalón		$p = 10$		$n = 30$		T^2
d	$\lambda = d^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	
	$h=$	10.28	3.65	3.59	55.30	3.85
0.1	0.01	196.35 <i>1.819</i>	195.70 <i>1.881</i>	197.58 <i>1.922</i>	197.25 <i>1.817</i>	198.92
0.25	0.0625	182.84 <i>1.680</i>	179.75 <i>1.731</i>	186.05 <i>1.810</i>	183.80 <i>1.670</i>	193.39
0.5	0.25	145.86 <i>1.295</i>	138.48 <i>1.318</i>	154.42 <i>1.503</i>	141.65 <i>1.251</i>	175.31
1.0	1	70.29 <i>0.555</i>	58.83 <i>0.523</i>	78.85 <i>0.743</i>	65.59 <i>0.513</i>	122.51
1.5	2.25	32.12 <i>0.222</i>	23.51 <i>0.195</i>	33.76 <i>0.296</i>	30.69 <i>0.195</i>	73.95
2.0	4	16.57 <i>0.101</i>	12.16 <i>0.092</i>	15.45 <i>0.117</i>	17.00 <i>0.087</i>	41.66
2.5	6.25	9.82 <i>0.054</i>	7.44 <i>0.053</i>	8.57 <i>0.052</i>	10.79 <i>0.048</i>	23.15
3.0	9	6.51 <i>0.033</i>	4.98 <i>0.033</i>	5.71 <i>0.028</i>	7.55 <i>0.031</i>	13.16
4.0	16	3.61 <i>0.015</i>	2.98 <i>0.017</i>	3.39 <i>0.012</i>	4.39 <i>0.016</i>	4.93

A.2 PLC cuando el proceso está fuera de control con cambio tipo tendencia

Tabla A.17 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo tendencia		$p = 2$		$n = 5$		T^2
m	$\lambda = (mT)^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	
	$h =$	14.32	4.29	4.60	37.50	49.80
0.01	$(0.01T)^2$	85.52 0.395	67.72 0.331	84.13 0.413	100.29 0.549	112.58
0.05	$(0.05T)^2$	33.59 0.101	14.91 0.092	31.69 0.101	39.45 0.145	48.98
0.10	$(0.10T)^2$	21.55 0.057	13.48 0.084	20.04 0.055	25.47 0.081	31.86
0.15	$(0.15T)^2$	16.72 0.040	10.27 0.047	15.44 0.039	19.68 0.059	24.51
0.20	$(0.20T)^2$	13.87 0.033	6.83 0.042	12.84 0.030	16.43 0.047	20.24
0.25	$(0.25T)^2$	12.07 0.027	6.72 0.044	11.13 0.025	14.15 0.039	17.42
0.30	$(0.30T)^2$	10.76 0.024	7.02 0.037	9.95 0.022	12.59 0.034	15.41
0.35	$(0.35T)^2$	9.80 0.022	6.16 0.030	9.09 0.020	11.41 0.031	13.87
0.40	$(0.40T)^2$	9.04 0.020	5.07 0.028	8.38 0.018	10.45 0.028	12.65
0.50	$(0.50T)^2$	7.87 0.017	4.71 0.028	7.35 0.015	9.06 0.024	10.85
1.00	$(1.00T)^2$	5.24 0.011	3.43 0.017	5.05 0.009	5.83 0.015	6.70

Tabla A.18 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo tendencia		$p = 2$		$n = 10$		
m	$\lambda = (mT)^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	T^2
	$h =$	10.30	3.62	3.80	21.00	11.04
0.01	$(0.01T)^2$	76.44 0.330	58.09 0.287	76.51 0.358	78.91 0.370	94.09
0.05	$(0.05T)^2$	28.84 0.082	12.76 0.095	28.26 0.088	29.67 0.093	36.93
0.10	$(0.10T)^2$	18.42 0.046	12.36 0.057	17.78 0.047	18.98 0.052	23.10
0.15	$(0.15T)^2$	14.11 0.032	6.95 0.042	13.60 0.033	14.54 0.037	17.35
0.20	$(0.20T)^2$	11.67 0.026	6.95 0.043	11.24 0.025	12.04 0.029	14.14
0.25	$(0.25T)^2$	10.08 0.021	6.42 0.031	9.74 0.021	10.40 0.024	12.03
0.30	$(0.30T)^2$	8.96 0.019	4.96 0.028	8.68 0.018	9.25 0.021	10.52
0.35	$(0.35T)^2$	8.11 0.016	4.73 0.028	7.88 0.016	8.36 0.019	9.41
0.40	$(0.40T)^2$	7.43 0.015	4.80 0.025	7.24 0.015	7.66 0.017	8.52
0.50	$(0.50T)^2$	6.46 0.013	3.78 0.020	6.34 0.012	6.62 0.015	7.23
1.00	$(1.00T)^2$	4.23 0.008	2.76 0.013	4.28 0.007	4.23 0.009	4.32

Tabla A.19 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo tendencia		$p = 2$		$n = 15$		T^2
m	$\lambda = (mT)^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	
	$h=$	9.75	3.52	3.70	17.70	8.19
0.01	$(0.01T)^2$	74.28 0.317	56.42 0.275	75.13 0.350	74.98 0.346	88.99
0.05	$(0.05T)^2$	27.96 0.078	12.58 0.096	27.56 0.084	28.07 0.085	34.14
0.10	$(0.10T)^2$	17.69 0.043	11.70 0.053	17.25 0.045	17.84 0.047	21.22
0.15	$(0.15T)^2$	13.57 0.031	6.67 0.043	13.21 0.032	13.67 0.034	15.90
0.20	$(0.20T)^2$	11.22 0.024	7.09 0.040	10.92 0.025	11.30 0.027	12.90
0.25	$(0.25T)^2$	9.69 0.020	5.90 0.029	9.44 0.020	9.78 0.022	10.96
0.30	$(0.30T)^2$	8.59 0.017	4.69 0.028	8.41 0.017	8.66 0.020	9.58
0.35	$(0.35T)^2$	7.79 0.016	4.87 0.027	7.64 0.015	7.83 0.017	8.56
0.40	$(0.40T)^2$	7.14 0.014	4.63 0.023	7.03 0.014	7.16 0.016	7.74
0.50	$(0.50T)^2$	6.20 0.012	3.72 0.021	6.14 0.012	6.20 0.013	6.56
1.00	$(1.00T)^2$	4.03 0.007	2.65 0.013	4.14 0.007	3.94 0.008	3.91

Tabla A.20 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo tendencia		$p = 2$		$n = 20$		
m	$\lambda = (mT)^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	T^2
	$h =$	9.57	3.49	3.66	16.45	7.21
0.01	$(0.01T)^2$	73.70 0.310	55.83 0.272	74.05 0.343	73.56 0.335	86.74
0.05	$(0.05T)^2$	27.61 0.076	12.68 0.098	27.24 0.081	27.39 0.082	32.90
0.10	$(0.10T)^2$	17.46 0.042	11.39 0.052	17.07 0.044	17.40 0.045	20.41
0.15	$(0.15T)^2$	13.37 0.030	6.69 0.043	13.05 0.031	13.28 0.033	15.27
0.20	$(0.20T)^2$	11.03 0.024	7.10 0.039	10.75 0.024	11.04 0.026	12.39
0.25	$(0.25T)^2$	9.54 0.020	5.66 0.028	9.30 0.020	9.50 0.021	10.51
0.30	$(0.30T)^2$	8.46 0.017	4.66 0.028	8.30 0.017	8.42 0.019	9.19
0.35	$(0.35T)^2$	7.67 0.015	4.85 0.026	7.54 0.015	7.61 0.017	8.19
0.40	$(0.40T)^2$	7.02 0.014	4.48 0.022	6.93 0.013	6.97 0.015	7.42
0.50	$(0.50T)^2$	6.09 0.012	3.66 0.020	6.05 0.011	6.03 0.013	6.28
1.00	$(1.00T)^2$	3.96 0.007	2.62 0.013	4.07 0.007	3.83 0.008	3.74

Tabla A.21 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo tendencia		$p = 2$		$n = 25$		T^2
m	$\lambda = (mT)^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	
	$h =$	9.46	3.47	3.66	15.70	6.73
0.01	$(0.01T)^2$	72.85 0.307	55.11 0.269	73.84 0.340	72.54 0.328	85.30
0.05	$(0.05T)^2$	27.36 0.075	12.57 0.097	27.08 0.081	27.01 0.081	32.28
0.10	$(0.10T)^2$	17.31 0.041	11.14 0.051	16.99 0.043	17.11 0.045	19.97
0.15	$(0.15T)^2$	13.25 0.030	6.63 0.044	12.96 0.031	13.12 0.032	14.94
0.20	$(0.20T)^2$	10.95 0.023	7.06 0.037	10.71 0.024	10.86 0.025	12.10
0.25	$(0.25T)^2$	9.44 0.019	5.52 0.028	9.27 0.020	9.36 0.021	10.27
0.30	$(0.30T)^2$	8.38 0.017	4.66 0.028	8.26 0.017	8.29 0.018	8.97
0.35	$(0.35T)^2$	7.60 0.015	4.89 0.026	7.50 0.015	7.50 0.016	8.00
0.40	$(0.40T)^2$	6.96 0.014	4.36 0.021	6.90 0.013	6.86 0.015	7.24
0.50	$(0.50T)^2$	6.03 0.012	3.69 0.020	6.03 0.011	5.93 0.013	6.13
1.00	$(1.00T)^2$	3.92 0.007	2.64 0.013	4.05 0.007	3.77 0.008	3.65

Tabla A.22 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo tendencia		$p = 2$		$n = 30$		T^2
m	$\lambda = (mT)^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	
	$h =$	9.41	3.46	3.62	15.32	6.44
0.01	$(0.01T)^2$	72.72 0.306	54.87 0.267	72.93 0.337	72.27 0.325	84.49
0.05	$(0.05T)^2$	27.23 0.075	12.57 0.096	26.81 0.081	26.78 0.079	31.87
0.10	$(0.10T)^2$	17.23 0.041	11.00 0.051	16.87 0.043	16.99 0.044	19.70
0.15	$(0.15T)^2$	13.19 0.029	6.69 0.044	12.87 0.030	12.98 0.032	14.73
0.20	$(0.20T)^2$	10.88 0.023	7.02 0.037	10.61 0.023	10.76 0.025	11.92
0.25	$(0.25T)^2$	9.41 0.019	5.44 0.028	9.20 0.019	9.26 0.021	10.12
0.30	$(0.30T)^2$	8.34 0.017	4.68 0.028	8.20 0.017	8.22 0.018	8.85
0.35	$(0.35T)^2$	7.57 0.015	4.90 0.026	7.44 0.015	7.44 0.016	7.88
0.40	$(0.40T)^2$	6.92 0.013	4.30 0.021	6.84 0.013	6.80 0.014	7.13
0.50	$(0.50T)^2$	5.99 0.011	3.70 0.020	5.98 0.011	5.88 0.012	6.04
1.00	$(1.00T)^2$	3.89 0.007	2.65 0.013	4.01 0.007	3.73 0.008	3.59

Tabla A.23 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo tendencia		$p = 3$		$n = 5$		T^2
m	$\lambda = (mT)^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	
	$h =$	21.30	5.25	5.80	*	199.16
0.01	$(0.01T)^2$	101.75 0.503	82.41 0.417	97.74 0.517	*	132.82
0.05	$(0.05T)^2$	42.59 0.137	21.92 0.108	38.53 0.130	*	64.71
0.10	$(0.10T)^2$	27.85 0.077	12.00 0.095	24.67 0.071	*	44.00
0.15	$(0.15T)^2$	21.66 0.056	13.40 0.085	19.04 0.051	*	34.68
0.20	$(0.20T)^2$	18.18 0.045	12.33 0.054	15.89 0.040	*	29.13
0.25	$(0.25T)^2$	15.86 0.039	9.16 0.044	13.92 0.034	*	25.42
0.30	$(0.30T)^2$	14.28 0.033	7.21 0.042	12.46 0.029	*	22.72
0.35	$(0.35T)^2$	12.99 0.030	6.58 0.043	11.39 0.026	*	20.63
0.40	$(0.40T)^2$	11.99 0.028	6.79 0.044	10.53 0.023	*	18.96
0.50	$(0.50T)^2$	10.50 0.024	6.85 0.036	9.26 0.020	*	16.46
1.00	$(1.00T)^2$	7.07 0.016	4.57 0.024	6.38 0.013	*	10.56

* Valor no calculado porque el estadístico M , de la carta CSM2 tiene una división entre cero cuando $n - p = 2$ (ecuación 2.38).

Tabla A.24 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo tendencia		$p = 3$		$n = 10$		
m	$\lambda = (mT)^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	T^2
	$h =$	11.00	3.77	3.86	31.10	10.88
0.01	$(0.01T)^2$	83.51 0.368	65.06 0.321	83.97 0.408	85.64 0.408	103.78
0.05	$(0.05T)^2$	32.18 0.093	14.02 0.093	31.16 0.099	33.13 0.102	41.97
0.10	$(0.10T)^2$	20.50 0.051	13.76 0.074	19.57 0.053	21.25 0.056	26.42
0.15	$(0.15T)^2$	15.69 0.036	8.66 0.043	14.92 0.037	16.39 0.040	19.89
0.20	$(0.20T)^2$	12.96 0.029	6.48 0.044	12.38 0.029	13.59 0.032	16.19
0.25	$(0.25T)^2$	11.23 0.024	7.10 0.040	10.67 0.024	11.73 0.027	13.79
0.30	$(0.30T)^2$	9.94 0.021	6.35 0.030	9.51 0.020	10.43 0.023	12.07
0.35	$(0.35T)^2$	8.99 0.018	4.88 0.027	8.62 0.018	9.43 0.021	10.77
0.40	$(0.40T)^2$	8.25 0.017	4.67 0.028	7.93 0.016	8.63 0.019	9.77
0.50	$(0.50T)^2$	7.15 0.014	4.64 0.023	6.90 0.013	7.49 0.016	8.29
1.00	$(1.00T)^2$	4.64 0.009	3.07 0.015	4.60 0.008	4.79 0.010	4.95

Tabla A.25 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo tendencia		$p = 3$		$n = 15$		T^2
m	$\lambda = (mT)^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	
	$h=$	9.95	3.60	3.64	24.50	7.23
0.01	$(0.01T)^2$	79.69 0.345	62.38 0.301	80.49 0.385	79.97 0.370	96.73
0.05	$(0.05T)^2$	30.39 0.086	13.16 0.093	29.69 0.093	30.51 0.090	37.74
0.10	$(0.10T)^2$	19.27 0.047	13.32 0.064	18.67 0.049	19.59 0.049	23.49
0.15	$(0.15T)^2$	14.77 0.033	7.53 0.041	14.23 0.034	15.04 0.035	17.60
0.20	$(0.20T)^2$	12.17 0.026	6.67 0.044	11.74 0.027	12.46 0.028	14.29
0.25	$(0.25T)^2$	10.50 0.022	7.04 0.034	10.14 0.022	10.77 0.023	12.13
0.30	$(0.30T)^2$	9.33 0.019	5.35 0.027	9.02 0.019	9.55 0.021	10.59
0.35	$(0.35T)^2$	8.42 0.017	4.62 0.028	8.16 0.017	8.64 0.018	9.45
0.40	$(0.40T)^2$	7.72 0.015	4.78 0.027	7.50 0.015	7.93 0.017	8.55
0.50	$(0.50T)^2$	6.68 0.013	4.02 0.021	6.53 0.012	6.85 0.014	7.23
1.00	$(1.00T)^2$	4.30 0.008	2.80 0.014	4.34 0.008	4.36 0.009	4.30

Tabla A.26 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo tendencia		$p = 3$		$n = 20$		
m	$\lambda = (mT)^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	T^2
	$h=$	9.57	3.54	3.56	22.00	6.16
0.01	$(0.01T)^2$	78.05 0.338	60.85 0.295	79.08 0.374	77.89 0.357	93.59
0.05	$(0.05T)^2$	29.71 0.084	12.99 0.094	29.06 0.091	29.55 0.086	36.05
0.10	$(0.10T)^2$	18.88 0.045	13.10 0.060	18.34 0.048	18.94 0.047	22.36
0.15	$(0.15T)^2$	14.39 0.032	7.11 0.041	13.92 0.033	14.52 0.033	16.69
0.20	$(0.20T)^2$	11.83 0.026	6.92 0.044	11.48 0.026	12.03 0.026	13.55
0.25	$(0.25T)^2$	10.24 0.021	6.66 0.032	9.94 0.021	10.42 0.022	11.48
0.30	$(0.30T)^2$	9.07 0.019	4.93 0.027	8.83 0.018	9.22 0.019	10.02
0.35	$(0.35T)^2$	8.19 0.016	4.64 0.028	7.99 0.016	8.33 0.017	8.93
0.40	$(0.40T)^2$	7.51 0.015	4.92 0.025	7.32 0.014	7.63 0.016	8.09
0.50	$(0.50T)^2$	6.49 0.012	3.74 0.020	6.37 0.012	6.59 0.013	6.83
1.00	$(1.00T)^2$	4.16 0.008	2.68 0.013	4.23 0.007	4.20 0.008	4.05

Tabla A.27 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo tendencia		$p = 3$		$n = 25$		T^2
m	$\lambda = (mT)^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	
	$h =$	9.46	3.50	3.53	20.90	5.65
0.01	$(0.01T)^2$	77.86 0.334	59.59 0.292	78.31 0.371	77.12 0.350	91.86
0.05	$(0.05T)^2$	29.36 0.083	12.82 0.094	28.81 0.090	29.11 0.085	35.07
0.10	$(0.10T)^2$	18.65 0.044	12.79 0.058	18.12 0.047	18.62 0.046	21.71
0.15	$(0.15T)^2$	14.23 0.031	7.00 0.042	13.78 0.033	14.31 0.033	16.21
0.20	$(0.20T)^2$	11.74 0.025	7.02 0.043	11.37 0.025	11.83 0.026	13.14
0.25	$(0.25T)^2$	10.13 0.021	6.48 0.030	9.82 0.021	10.23 0.021	11.14
0.30	$(0.30T)^2$	8.97 0.018	4.85 0.027	8.73 0.018	9.04 0.019	9.71
0.35	$(0.35T)^2$	8.10 0.016	4.78 0.028	7.91 0.016	8.19 0.017	8.66
0.40	$(0.40T)^2$	7.40 0.014	4.85 0.024	7.25 0.014	7.51 0.015	7.83
0.50	$(0.50T)^2$	6.40 0.012	3.69 0.020	6.30 0.012	6.47 0.013	7.83
1.00	$(1.00T)^2$	4.10 0.008	2.66 0.013	4.17 0.007	4.12 0.008	3.92

Tabla A.28 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo tendencia		$p = 3$		$n = 30$		
m	$\lambda = (mT)^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	T^2
	$h=$	9.37	3.48	3.53	20.20	5.36
0.01	$(0.01T)^2$	77.11 0.333	59.06 0.289	78.17 0.371	76.21 0.348	90.66
0.05	$(0.05T)^2$	29.16 0.082	12.62 0.094	28.67 0.089	28.77 0.083	34.51
0.10	$(0.10T)^2$	18.48 0.044	12.63 0.057	18.01 0.047	18.39 0.045	21.33
0.15	$(0.15T)^2$	14.09 0.031	6.92 0.042	13.69 0.033	14.11 0.032	15.93
0.20	$(0.20T)^2$	11.62 0.025	7.05 0.043	11.29 0.025	11.67 0.025	12.89
0.25	$(0.25T)^2$	10.03 0.020	6.34 0.030	9.76 0.021	10.10 0.021	10.92
0.30	$(0.30T)^2$	8.87 0.018	4.77 0.027	8.68 0.018	8.94 0.018	9.53
0.35	$(0.35T)^2$	8.02 0.016	4.77 0.028	7.85 0.016	8.09 0.016	8.48
0.40	$(0.40T)^2$	7.34 0.014	4.80 0.024	7.21 0.014	7.41 0.015	7.68
0.50	$(0.50T)^2$	6.34 0.012	3.64 0.020	6.27 0.012	6.39 0.012	6.49
1.00	$(1.00T)^2$	4.06 0.007	2.67 0.013	4.14 0.007	4.06 0.008	3.84

Tabla A.29 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo tendencia		$p = 10$		$n = 15$		T^2
m	$\lambda = (mT)^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	
	$h =$	14.85	4.35	4.49	123.20	13.62
0.01	$(0.01T)^2$	111.52 0.593	93.67 0.507	111.07 0.635	114.06 0.622	137.10
0.05	$(0.05T)^2$	47.31 0.158	26.54 0.121	44.93 0.163	49.08 0.165	63.46
0.10	$(0.10T)^2$	30.51 0.087	12.56 0.091	28.44 0.086	32.31 0.090	41.29
0.15	$(0.15T)^2$	23.50 0.061	12.93 0.093	21.69 0.059	25.11 0.064	31.60
0.20	$(0.20T)^2$	19.48 0.048	13.59 0.061	17.91 0.046	20.90 0.051	25.95
0.25	$(0.25T)^2$	16.81 0.040	10.03 0.045	15.41 0.038	18.19 0.042	22.20
0.30	$(0.30T)^2$	14.84 0.034	7.49 0.041	13.65 0.032	16.22 0.036	19.53
0.35	$(0.35T)^2$	13.45 0.030	6.45 0.043	12.32 0.028	14.67 0.033	17.52
0.40	$(0.40T)^2$	12.33 0.027	6.73 0.045	11.35 0.025	13.48 0.030	15.90
0.50	$(0.50T)^2$	10.68 0.023	6.99 0.034	9.81 0.021	11.69 0.025	13.54
1.00	$(1.00T)^2$	6.81 0.014	4.15 0.021	6.41 0.012	7.51 0.015	8.16

Tabla A.30 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo tendencia		$p = 10$		$n = 20$		T^2
m	$\lambda = (mT)^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	
	$h=$	11.65	3.88	3.86	75.00	5.85
0.01	$(0.01T)^2$	102.03 0.507	85.47 0.441	102.36 0.557	100.91 0.490	123.67
0.05	$(0.05T)^2$	41.29 0.131	21.23 0.106	39.93 0.139	41.72 0.120	52.85
0.10	$(0.10T)^2$	26.43 0.069	11.74 0.095	25.12 0.072	27.13 0.065	33.43
0.15	$(0.15T)^2$	20.18 0.049	13.94 0.069	19.07 0.050	21.08 0.045	25.16
0.20	$(0.20T)^2$	16.60 0.038	9.96 0.044	15.67 0.038	17.50 0.035	20.47
0.25	$(0.25T)^2$	14.30 0.032	6.93 0.041	13.46 0.031	15.14 0.030	17.38
0.30	$(0.30T)^2$	12.63 0.027	6.50 0.045	11.90 0.027	13.49 0.026	15.18
0.35	$(0.35T)^2$	11.38 0.024	7.15 0.041	10.74 0.023	12.22 0.023	13.53
0.40	$(0.40T)^2$	10.36 0.022	6.85 0.032	9.81 0.021	11.20 0.021	12.26
0.50	$(0.50T)^2$	8.94 0.018	4.75 0.027	8.49 0.017	9.68 0.018	10.36
1.00	$(1.00T)^2$	5.62 0.011	3.71 0.018	5.46 0.010	6.18 0.011	6.12

Tabla A.31 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo tendencia		$p = 10$		$n = 25$		
m	$\lambda = (mT)^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	T^2
	$h=$	10.68	3.72	3.67	61.80	4.42
0.01	$(0.01T)^2$	97.90 0.473	80.95 0.413	98.18 0.529	96.38 0.448	117.80
0.05	$(0.05T)^2$	39.07 0.120	19.13 0.102	38.05 0.130	39.24 0.109	48.76
0.10	$(0.10T)^2$	24.84 0.064	12.25 0.097	23.90 0.067	25.59 0.057	30.51
0.15	$(0.15T)^2$	18.91 0.045	13.25 0.058	18.10 0.046	19.78 0.040	22.88
0.20	$(0.20T)^2$	15.60 0.034	8.28 0.041	14.87 0.035	16.40 0.032	18.50
0.25	$(0.25T)^2$	13.41 0.029	6.40 0.043	12.78 0.029	14.21 0.026	15.68
0.30	$(0.30T)^2$	11.82 0.025	6.91 0.043	11.27 0.024	12.64 0.023	13.69
0.35	$(0.35T)^2$	10.62 0.022	7.12 0.034	10.14 0.021	11.43 0.020	12.19
0.40	$(0.40T)^2$	9.70 0.020	5.82 0.028	9.29 0.019	10.47 0.018	11.02
0.50	$(0.50T)^2$	8.34 0.016	4.56 0.028	8.01 0.016	9.06 0.015	9.29
1.00	$(1.00T)^2$	5.23 0.010	3.25 0.016	5.15 0.009	5.77 0.009	5.46

Tabla A.32 PLC fuera de control con parámetros desconocidos.

Cambio tipo tendencia		$p = 10$		$n = 30$		T^2
m	$\lambda = (mT)^2$	MIR	MAT	CSM1	CSM2	
	$h=$	10.28	3.65	3.59	55.30	3.85
0.01	$(0.01T)^2$	95.47 0.457	78.81 0.396	96.44 0.513	93.98 0.432	114.36
0.05	$(0.05T)^2$	37.85 0.114	18.21 0.099	37.13 0.124	37.92 0.103	46.54
0.10	$(0.10T)^2$	24.08 0.061	12.50 0.095	23.24 0.064	24.62 0.055	29.02
0.15	$(0.15T)^2$	18.28 0.043	12.53 0.053	17.54 0.044	19.03 0.038	21.64
0.20	$(0.20T)^2$	15.02 0.034	7.65 0.040	14.38 0.034	15.79 0.029	17.54
0.25	$(0.25T)^2$	12.91 0.027	6.33 0.043	12.36 0.027	13.66 0.025	14.83
0.30	$(0.30T)^2$	11.39 0.024	7.20 0.041	10.89 0.023	12.15 0.021	12.94
0.35	$(0.35T)^2$	10.23 0.021	6.66 0.031	9.81 0.020	10.98 0.019	11.51
0.40	$(0.40T)^2$	9.33 0.019	5.22 0.027	8.98 0.018	10.06 0.017	10.40
0.50	$(0.50T)^2$	8.01 0.016	4.76 0.028	7.73 0.015	8.69 0.014	8.76
1.00	$(1.00T)^2$	5.01 0.009	3.05 0.016	4.97 0.009	5.53 0.009	5.14

Apéndice B

Códigos en lenguaje C

En este apéndice se muestran los códigos utilizados en las simulaciones.

B.1 Código en lenguaje C de la Carta RIM para el escenario de parámetros conocidos

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

#define IM1 2147483563
#define IM2 2147483399
#define AM (1.0/IM1)
#define IMM1 (IM1-1)
#define IA1 40014
#define IA2 40692
#define IQ1 53668
#define IQ2 52774
#define IR1 12211
#define IR2 3791
#define NTAB 32
#define NDIV (1+IMM1/NTAB)
#define EPS 1.2e-7
#define RNMX (1.0-EPS)

double ran2(long *idum)
{
    int j;
    long k;
    static long idum2=123456789;
    static long iy=0;
    static long iv[NTAB];
    double temp;

    if(*idum<=0){
        if(-(*idum)<1) *idum=1;
        else *idum=-(*idum);
        idum2=(*idum);
        for(j=NTAB+7;j>=0;j--){
            k=(*idum)/IQ1;
            *idum=IA1*(*idum-k*IQ1)-k*IR1;
            if(*idum<0) *idum+=IM1;
            if(j<NTAB) iv[j]=*idum;
        }
        iy=iv[0];
    }
}
```

```

k=(*idum)/IQ1;
*idum=IA1*( *idum-k*IQ1)-k*IR1;
if(*idum<0) *idum+=IM1;
k=idum2/IQ2;
idum2=IA2*(idum2-k*IQ2)-k*IR2;
if(idum2<0) idum2+=IM2;
j=iy/NDIV;
iy=iv[j]-idum2;
iv[j]=*idum;
if(iy<1) iy+=IMM1;
if((temp=AM*iy)>RNMX) return RNMX;
else return temp;
}

double chisquare(double ll,long *idum)
{
double a,b,q,d,df,V,Y,Z,W,u1,u2;
double ran2(long *idum);
df=ll;
if(df<=1.0) {printf("ERROR, THE NUMBER OF VARIABLES MUST BE GREATER THAN
1\n");
return 0.0;}
a=1/sqrt(2.0*(df/2.0)-1.0); b=(df/2.0)-log(4.0); q=(df/2.0)+(1.0/a);
d=1.0+log(4.5);
going9:
u1=ran2(idum); u2=ran2(idum);
V=a*log(u1/(1.0-u1));
Z=(u1*u1)*u2;
Y=(df/2.0)*exp(V);
W=b+q*V-Y;
if((W+d-4.5*Z)>=0.0) return 2.0*Y;
if(W>=log(Z)) return 2.0*Y;
goto going9;
}

double gasdev(long *idum)
{
double ran2(long *idum);
static int iset=0;
static double gset;
double fac,rsq,v1,v2;

if(iset==0){
do{
v1=2.0*ran2(idum)-1.0;
v2=2.0*ran2(idum)-1.0;
rsq=v1*v1+v2*v2;
} while(rsq>=1.0||rsq==0);
fac=sqrt(-2.0*log(rsq)/rsq);
gset=v1*fac;
iset=1;
return v2*fac;
} else {
iset=0;
return gset;
}
}

```

```

double ncchisq( double df, double ncp, long *idum)
{ if(df<=0.0)
  {printf("ERROR NCCHISQ, DF DEBE SER POSITIVO\n");
   return 0.0;
  }
  if(ncp<0.0)
  {printf("ERROR NCCHISQ, NCP DEBE SER NO NEGATIVO\n");
   return 0.0;
  }
  if(df==1.0) return pow(gasdev(idum)+sqrt(ncp),2.0);
  if(df==2.0) return pow(gasdev(idum),2.0)+pow(gasdev(idum)+sqrt(ncp),2.0);
  else return chisquare(df-1.0,idum)+pow(gasdev(idum)+sqrt(ncp),2.0);
}

```

```

main()
{
double runs,run,T,h,psi,mvalue,maximum,ww,pnc,gl,www,wwww;
double chibarsquare,statistic,delta,R;
double preruns,sumofrunlength,sumofsqrdrunl;
int stop,i,j,l,begin,flag,samplesize;
long seed;
double Z[5000];
double Z2[5000];
double X[5000];
double W[5000];
FILE *fpt;

h=10.29; /*h value, If maximum>h, the chart signals */
samplesize=100;
gl=2.0; /*grados de libertad de la dist. chi-cuadrada*/
pnc=0.0; /*parametro de no-centralidad de la dist. chi-cuadrada*/
mvalue=0.0;
delta=0.0;
runs=10000.0;
seed=-278577;
statistic=0.0;
sumofrunlength=0.0; sumofsqrdrunl=0.0; ww=0.0;
if((fpt=fopen("riml.xit","a"))==NULL)
  { printf(" ERROR OPENING FILE RIM1.XIT\n");
   goto thend; }
fprintf(fpt,"OUTPUT OF RIM CHART (SLOPE=%f DELTA=%f)\n",
mvalue,delta);
fprintf(fpt,"h = %f\n",h);
if((fclose(fpt))!=0)
  { printf(" ERROR CLOSING FILE RIM1.XIT\n");
   goto thend; }

for(run=1.0; run<=runs; run=run+1.0)
{
  preruns=0.0;
  psi=preruns; R=0.0;
  stop=1;
  T=0.0;
  while(stop==1)

```

```

{
going6:
;
T=T+1.0;

www=ncchisq(g1,pnc, &seed); /*pnc o mvalue*T*mvalue*T */
wwww=(pow(www/(g1),0.333333)-(1.0-(2.0/(9*(g1)))))/sqrt(2.0/(9.0*(g1)));

Z[(int)(T-1.0)]=wwww;
R=Z[(int)(T-1.0)];
Z2[(int)(T-1.0)]= -Z[(int)(T-1.0)];
if(T==1.0) goto going6;
begin=0;
{
flag=1;
doingstastic:
i=0;
for(l=begin; l<(int)(T); l++)
{
if(flag==1) X[i]=Z[l];
else X[i]=Z2[l];
W[i]=1.0;
if(i==0)
{ i=i+1;
goto going1;
}
going2:
;
if( X[i] >= X[i-1] )
{ i=i+1;
goto going1;
}
X[i-1]=( (W[i-1]*X[i-1]) + (W[i]*X[i]) )/( W[i-1]+ W[i]);
W[i-1]=W[i-1] + W[i];
if(i-1==0) goto going1;
i=i-1;
goto going2;
going1:
;
}
chibarsquare=0.0;
for(j=0; j<i; j=j+1)
{if(X[j]<=0.0) continue;
chibarsquare=chibarsquare+(W[j]*pow(X[j],2.0));
}
maximum=chibarsquare;
}

if(maximum>h)
{
if(T<=preruns)
{
preruns=preruns-T;
psi=preruns;
T=0.0;
R=0.0;
goto going6;
}
}

```

```

    }
    stop=0;
    sumofrunlength=sumofrunlength+(T-psi);
    sumofsqrdrunl=sumofsqrdrunl+(T-psi)*(T-psi);
    if(fmod(run,100.0)==0.0)
    {ww=((sumofsqrdrunl/run)-pow(sumofrunlength/run,2.0))/run;
    printf("DONE RUN: %f ARL=%f STDEV=%f E=%f\n",run,
    sumofrunlength/run,sqrt(ww),maximum );}

    if(fmod(run,1.0)==0.0)
    { if((fpt=fopen("riml.out","w"))==NULL)
      { printf("ERROR OPENING FILE RIM1.OUT\n");
        goto thend; }
      fprintf(fpt,"RUNING NUMBER = %f\n",run);
      fprintf(fpt,"ARL = %f STD DEV = %f\n",sumofrunlength/run,
      sqrt(((sumofsqrdrunl/run)-pow(sumofrunlength/run,2.0))/run) );

      fprintf(fpt,"sor=%f\nsors=%f\nseed=%d",sumofrunlength,sumofsqrdrunl,seed);
      if((fclose(fpt))!=0)
        { printf("ERROR CLOSING FILE RIM1.OUT\n");
          goto thend; }
    }

    if(fmod(run,1000.0)==0.0) {
      if((fpt=fopen("riml.xit","a"))==NULL)
        {printf("ERROR OPENING FILE RIM1.XIT\n");
          goto thend;
        }
      ww=((sumofsqrdrunl/run)-pow(sumofrunlength/run,2.0))/run;
      fprintf(fpt,"Running number = %f\n",run);
      fprintf(fpt,"sum of RL = %f sum of sqrd RL = %f\n",sumofrunlength,
      sumofsqrdrunl);
      fprintf(fpt,"ARL = %f STD DEV = %f\n",
      sumofrunlength/run,sqrt(ww) );
      if((fclose(fpt))!=0) { printf("ERROR CLOSING FILE RIM1.XIT\n");
        goto thend;}
    }
  }
}

if((fpt=fopen("riml.xit","a"))==NULL)
  { printf(" ERROR OPENING FILE RIM1.XIT\n");
    goto thend; }
fprintf(fpt,"--- ARL = %f STD DEV = %f CPL=%f\n",
sumofrunlength/runs,sqrt(ww),preruns );
if((fclose(fpt))!=0) printf(" ERROR CLOSING FILE RIM1.XIT\n");
thend:
;
}

```

B.2 Código en lenguaje C de la Carta MAT para el escenario de parámetros conocidos

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

#define IM1 2147483563
#define IM2 2147483399
#define AM (1.0/IM1)
#define IMM1 (IM1-1)
#define IA1 40014
#define IA2 40692
#define IQ1 53668
#define IQ2 52774
#define IR1 12211
#define IR2 3791
#define NTAB 32
#define NDIV (1+IMM1/NTAB)
#define EPS 1.2e-7
#define RNMX (1.0-EPS)

double ran2(long *idum)
{
    int j;
    long k;
    static long idum2=123456789;
    static long iy=0;
    static long iv[NTAB];
    double temp;
    if (*idum<=0){
        if(-(*idum)<1) *idum=1;
        else *idum=-(*idum);
        idum2=(*idum);
        for (j=NTAB+7;j>=0;j--){
            k=(*idum)/IQ1;
            *idum=IA1*(*idum-k*IQ1)-k*IR1;
            if(*idum<0) *idum+=IM1;
            if(j<NTAB) iv[j]=*idum;
        }
        iy=iv[0];
    }
    k=(*idum)/IQ1;
    *idum=IA1*(*idum-k*IQ1)-k*IR1;
    if (*idum<0) *idum+=IM1;
    k=idum2/IQ2;
    idum2=IA2*(idum2-k*IQ2)-k*IR2;
    if (idum2<0) idum2+=IM2;
    j=iy/NDIV;
    iy=iv[j]-idum2;
    iv[j]=*idum;
    if(iy<1) iy+=IMM1;
    if((temp=AM*iy)>RNMX) return RNMX;
    else return temp;
}
```

```

double chisquare(double ll, long *idum)
{
double a,b,q,d,df,V,Y,Z,W,u1,u2;
double ran2(long *idum);
df=ll;
if(df<=1.0) {printf("ERROR, THE NUMBER OF VARIABLES MUST BE GREATER THAN
1\n");
return 0.0;}
a=1/sqrt(2.0*(df/2.0)-1.0); b=(df/2.0)-log(4.0); q=(df/2.0)+(1.0/a);
d=1.0+log(4.5);
going9:
u1=ran2(idum); u2=ran2(idum);
V=a*log(u1/(1.0-u1));
Z=(u1*u1)*u2;
Y=(df/2.0)*exp(V);
W=b+q*V-Y;
if((W+d-4.5*Z)>=0.0) return 2.0*Y;
if(W>=log(Z)) return 2.0*Y;
goto going9;
}

double gasdev(long *idum)
{
double ran2(long *idum);
static int iset=0;
static double gset;
double fac,rsq,v1,v2;

if(iset==0){
do{
v1=2.0*ran2(idum)-1.0;
v2=2.0*ran2(idum)-1.0;
rsq=v1*v1+v2*v2;
} while(rsq>=1.0||rsq==0);
fac=sqrt(-2.0*log(rsq)/rsq);
gset=v1*fac;
iset=1;
return v2*fac;
} else {
iset=0;
return gset;
}
}

double ncchisq( double df, double ncp, long *idum)
{ if(df<=0.0)
{printf("ERROR NCCHISQ, DF DEBE SER POSITIVO\n");
return 0.0;
}
if(ncp<0.0)
{printf("ERROR NCCHISQ, NCP DEBE SER NO NEGATIVO\n");
return 0.0;
}
if(df==1.0) return pow(gasdev(idum)+sqrt(ncp),2.0);
if(df==2.0) return pow(gasdev(idum),2.0)+pow(gasdev(idum)+sqrt(ncp),2.0);
else return chisquare(df-1.0,idum)+pow(gasdev(idum)+sqrt(ncp),2.0);
}

```

```

double abval(double x)
{ if(x>= 0.0 ) return x;
  else return -x;
}

main()
{
double maximum,h,run,runs,slopevartimes,mvalue,preruns,T,deltavartimes,chpe;
double sumofrun,sumofrunsqr,w,phi,sumofchpe,sumofsqrchpe;
double i,ww,www,x,m,gl,pnc;
double observation[7000];
double abtkystat[7000];
FILE *fpt;
int stop>windowlength,begin;
long seed;
sumofrun=0.0; sumofrunsqr=0.0; sumofchpe=0.0; sumofsqrchpe=0.0;
h=3.62;
gl=10.0; /*grados de libertad de la dist. chi-cuadrada*/
pnc=0.0; /*parametro de no centralidad de la dist. chi-cuadrada*/
mvalue=0.0;
slopevartimes=0.0;
deltavartimes=0.0;
phi=0.0;
runs=10000.0;
>windowlength=400; /* >windowlength=0 means that there is no window */
seed=578991;
if((fpt=fopen("mat1.xit","a"))==NULL)
  { printf("ERROR OPENING FILE MAT1.XIT\n");
    goto thend; }
fprintf(fpt,"OUTPUT OF MAT CHART (WINLENGTH=%d SLOPE = %f)\n",
>windowlength,mvalue);
fprintf(fpt,"  h = %f\n",h);
if((fclose(fpt))!=0)
  { printf("ERROR CLOSING FILE MAT1.XIT\n");
    goto thend; }

for(run=1.0; run<=runs; run=run+1.0)
  {
  stop=0;
  T=0.0; w=0.0;
  preruns=25.0;
  while(stop==0)
    {
    going3:
    ;
    T=T+1.0;
    if(T<=preruns) m=0.0;
    else m=slopevartimes;
    x=0.0;

ww=ncchisq(gl,pnc, &seed); /* pnc o mvalue*mvalue*T*T */
www=(pow(ww/(gl),0.333333)-(1.0-(2.0/(9*(gl)))))/sqrt(2.0/(9.0*(gl)));
  observation[(int)(T-1.0)]=www;
}
}

```



```

        w=observation[(int)(T-1.0)];
        if(T==1.0) goto going3;
begin=0;
        abtkystat[begin]=0.0;
        for(i=(double)begin; i<T; i=i+1.0)
        {
        abtkystat[begin]=abtkystat[begin]+((sqrt(T-i)-sqrt(T-
(i+1))) * observation[(int)i]);
        }
        for(i=(double)begin+1.0; i<=(T-1.0); i=i+1.0)
        {
abtkystat[(int)i]=abtkystat[(int)i-1]-(sqrt(T-(i-1.0))-sqrt(T-
i))*observation[(int)i-1];
        }

        maximum=(abtkystat[begin]);  chpe=0.0;
        if(T==2.0) goto going4;
        for(i=(double)begin; i<(T-1.0); i=i+1.0)
        {
if(maximum<(abtkystat[(int)i+1])) {maximum=(abtkystat[(int)i+1]);
                                chpe=i+1.0;}
        }
going4:
;
if(maximum>h)
{
    if(T<=preruns)
    {
        preruns=preruns-T;
        T=0.0; w=0.0;
        goto going3;
    }
    stop=1;
    sumofrun=sumofrun+(T-preruns);
    sumofrunsqrd=sumofrunsqrd+(T-preruns)*(T-preruns);
    sumofchpe=sumofchpe+chpe;
    sumofsqrdchpe=sumofsqrdchpe+(chpe*chpe);
if(fmod(run,100.0)==0.0) printf("DONE RUN: %f  ARL=%f  STDEV=%f\n",run,
sumofrun/run,
sqrt(((sumofrunsqrd/run)-pow(sumofrun/run,2.0))/run) );

        if(fmod(run,1000.0)==0.0)
        { if((fpt=fopen("mat1.xit","a"))==NULL)
          { printf("ERROR OPENING FILE MAT1.XIT\n");
            goto thend; }
          fprintf(fpt,"RUNING NUMBER = %f\n",run);
          fprintf(fpt,"ARL = %f  STD DEV = %f\n",sumofrun/run,
sqrt(((sumofrunsqrd/run)-pow(sumofrun/run,2.0))/run) );
          if((fclose(fpt))!=0)
          { printf("ERROR CLOSING FILE MAT1.XIT\n");
            goto thend; }
        }
        } /* close if maximum > h */
    } /* close while */
} /* close for runs */

```

```

if((fpt=fopen("mat1.xit","a"))==NULL)
  { printf("ERROR OPENING FILE MAT1.XIT\n");
    goto thend; }
  fprintf(fpt,"----  ARL = %f  STD DEV = %f CPL=%f\n",sumofrun/runs,
sqrt(((sumofrunsqrd/runs)-pow(sumofrun/runs,2.0))/runs),preruns  );
  fprintf(fpt,"CHPE AV = %f  STD DEV = %f\n",sumofchpe/runs,
sqrt(((sumofsqrdchpe/runs)-pow(sumofchpe/runs,2.0))/runs)  );
if((fclose(fpt))!=0)  printf("ERROR CLOSING FILE MAT1.XIT\n");
  thend:
  ;
}

```

B.3 Código en lenguaje C de la Carta CSM1 para el escenario de parámetros conocidos

```

#include <stdio.h>
#include <math.h>

#define IM1 2147483563
#define IM2 2147483399
#define AM (1.0/IM1)
#define IMM1 (IM1-1)
#define IA1 40014
#define IA2 40692
#define IQ1 53668
#define IQ2 52774
#define IR1 12211
#define IR2 3791
#define NTAB 32
#define NDIV (1+IMM1/NTAB)
#define EPS 1.2e-7
#define RNMX (1.0-EPS)

double ran2(long *idum)
{
  int j;
  long k;
  static long idum2=123456789;
  static long iy=0;
  static long iv[NTAB];
  double temp;
  if (*idum<=0){
    if(-(*idum)<1) *idum=1;
    else *idum=-(*idum);
    idum2=(*idum);
    for (j=NTAB+7;j>=0;j--){
      k=(*idum)/IQ1;
      *idum=IA1*(*idum-k*IQ1)-k*IR1;
      if(*idum<0) *idum+=IM1;
      if(j<NTAB) iv[j]=*idum;
    }
  }
}

```

```

        iy=iv[0];
    }
    k=(*idum)/IQ1;
    *idum=IA1*( *idum-k*IQ1)-k*IR1;
    if (*idum<0) *idum+=IM1;
    k=idum2/IQ2;
    idum2=IA2*(idum2-k*IQ2)-k*IR2;
    if (idum2<0) idum2+=IM2;
    j=iy/NDIV;
    iy=iv[j]-idum2;
    iv[j]=*idum;
    if(iy<1) iy+=IMM1;
    if((temp=AM*iy)>RNMx) return RNMx;
    else return temp;
}

double gasdev(long *idum)
{
    double ran2(long *idum);
    static int iset=0;
    static double gset;
    double fac,rsq,v1,v2;

    if(iset==0){
        do{
            v1=2.0*ran2(idum)-1.0;
            v2=2.0*ran2(idum)-1.0;
            rsq=v1*v1+v2*v2;
        } while(rsq>=1.0||rsq==0);
        fac=sqrt(-2.0*log(rsq)/rsq);
        gset=v1*fac;
        iset=1;
        return v2*fac;
    } else {
        iset=0;
        return gset;
    }
}

double chisquare(double ll,long *idum)
{
    double a,b,q,d,df,V,Y,Z,W,u1,u2;
    double ran2(long *idum);
    df=ll;
    if(df<=1.0) {printf("ERROR, THE NUMBER OF VARIABLES MUST BE GREATER THAN
1\n");
        return 0.0;}
    a=1/sqrt(2.0*(df/2.0)-1.0); b=(df/2.0)-log(4.0); q=(df/2.0)+(1.0/a);
    d=1.0+log(4.5);
    going9:
    u1=ran2(idum); u2=ran2(idum);
    V=a*log(u1/(1.0-u1));
    Z=(u1*u1)*u2;
    Y=(df/2.0)*exp(V);
    W=b+q*V-Y;
    if((W+d-4.5*Z)>=0.0) return 2.0*Y;
    if(W>=log(Z)) return 2.0*Y;
}

```

```

goto going9;
}

double ncchisq( double df, double ncp, long *idum)
{ if(df<=0.0)
  {printf("ERROR NCCHISQ, DF DEBE SER POSITIVO\n");
   return 0.0;
  }
  if(ncp<0.0)
  {printf("ERROR NCCHISQ, NCP DEBE SER NO NEGATIVO\n");
   return 0.0;
  }
  if(df==1.0) return pow(gasdev(idum)+sqrt(ncp),2.0);
  if(df==2.0) return pow(gasdev(idum),2.0)+pow(gasdev(idum)+sqrt(ncp),2.0);
  else return chisquare(df-1.0,idum)+pow(gasdev(idum)+sqrt(ncp),2.0);
}

double maxh(w)
double w;
{
  if(w>0.0) return(w);
  return (0.0);
}

double maxl(h)
double h;
{
  if(h>0.0) return(h);
  return (0.0);
}

main()
{
double runs,run,sumh,x,h,k,delta,mvalue,T,psi,w,sumofchpe;
double sumofrun,sumofrunsqrd,preruns,m,sumofsqrdchpe,Np,ww,gl,pnc;
int stop;
FILE *fpt;
long seed;

runs=10000.0;
seed=-278577;
h=3.51;
psi=0.0;
w=0.0;
mvalue=0.5;
delta=0.0;
k=1.0;
gl=3.0;
pnc=0.0;

sumofrun=0.0; sumofrunsqrd=0.0; sumofchpe=0.0; sumofsqrdchpe=0.0;

if((fpt=fopen("csml.xit","a"))==NULL)
  { printf("ERROR OPENING FILE CSML.XIT\n");
    goto thend; }
fprintf(fpt,"OUTPUT OF CSML CHART ( SLOPE = %f)\n",mvalue);

```

```

fprintf(fpt, "    h = %f\n",h);
if((fclose(fpt))!=0)
  { printf("ERROR CLOSING FILE CSM1.XIT\n");
    goto thend;  }

for(run=1.0; run<=runs; run=run+1.0)
  {
  stop=0;
  sumh=0.0;
  T=0.0;    Np=0.0;
  preruns=0.0;
  while(stop==0)
    {
    going1:
    ;
    T=T+1.0;
    if(T<=preruns) m=0.0;
    else m=mvalue;
    ww=ncchisq(gl,mvalue*T*mvalue*T, &seed); /* pnc o pnc=mvalue*T*mvalue*T
    */
    x=(pow(ww/(gl),0.333333)-(1.0-(2.0/(9*(gl)))))/sqrt(2.0/(9.0*(gl))));
    w=x;
    sumh= maxh(x - (.5*k ) + sumh);
    if(sumh>0.0) Np=Np+1.0;
    else Np=0.0;
    if(sumh>h)
      {
      if(T<=preruns)
        {
        preruns=preruns-T;
        T=0.0;
        sumh=0.0;  w=0.0;  Np=0.0;
        goto going1;
        }
      stop=1;
      sumofrun=sumofrun+(T-preruns);
      sumofrunsqrd=sumofrunsqrd+(T-preruns)*(T-preruns);
    if(fmod(run,100.0)==0) printf("RUN: %f ARL=%f STDEV=%f\n",run,sumofrun/run,
    sqrt(((sumofrunsqrd/run)-pow(sumofrun/run,2.0))/run)  );
      }
    }
  }

  thend:
  ;
}

```

B.4 Código en lenguaje C de la Carta RIM para el escenario de parámetros desconocidos

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

#define IM1 2147483563
#define IM2 2147483399
#define AM (1.0/IM1)
#define IMM1 (IM1-1)
#define IA1 40014
#define IA2 40692
#define IQ1 53668
#define IQ2 52774
#define IR1 12211
#define IR2 3791
#define NTAB 32
#define NDIV (1+IMM1/NTAB)
#define EPS 1.2e-7
#define RNMX (1.0-EPS)

double ran2(long *idum)
{
    int j;
    long k;
    static long idum2=123456789;
    static long iy=0;
    static long iv[NTAB];
    double temp;

    if(*idum<=0){
        if(-(*idum)<1) *idum=1;
        else *idum=-(*idum);
        idum2=(*idum);
        for(j=NTAB+7;j>=0;j--){
            k=(*idum)/IQ1;
            *idum=IA1*(*idum-k*IQ1)-k*IR1;
            if(*idum<0) *idum+=IM1;
            if(j<NTAB) iv[j]=*idum;
        }
        iy=iv[0];
    }
    k=(*idum)/IQ1;
    *idum=IA1*(*idum-k*IQ1)-k*IR1;
    if(*idum<0) *idum+=IM1;
    k=idum2/IQ2;
    idum2=IA2*(idum2-k*IQ2)-k*IR2;
    if(idum2<0) idum2+=IM2;
    j=iy/NDIV;
    iy=iv[j]-idum2;
    iv[j]=*idum;
    if(iy<1) iy+=IMM1;
    if((temp=AM*iy)>RNMX) return RNMX;
    else return temp;
}
```

```

double chisquare(double ll, long *idum)
{
double a,b,q,d,df,V,Y,Z,W,u1,u2;
double ran2(long *idum);
df=ll;
if(df<=1.0) {printf("ERROR, THE SAMPLE SIZE MUST BE GREATER THAN 1\n");
return 0.0;}
a=1/sqrt(2.0*(df/2.0)-1.0); b=(df/2.0)-log(4.0); q=(df/2.0)+(1.0/a);
d=1.0+log(4.5);
going9:
u1=ran2(idum); u2=ran2(idum);
V=a*log(u1/(1.0-u1));
Z=(u1*u1)*u2;
Y=(df/2.0)*exp(V);
W=b+q*V-Y;
if((W+d-4.5*Z)>=0.0) return 2.0*Y;
if(W>=log(Z)) return 2.0*Y;
goto going9;
}

double gasdev(long *idum)
{
double ran2(long *idum);
static int iset=0;
static double gset;
double fac,rsq,v1,v2;

if(iset==0){
do{
v1=2.0*ran2(idum)-1.0;
v2=2.0*ran2(idum)-1.0;
rsq=v1*v1+v2*v2;
} while(rsq>=1.0||rsq==0);
fac=sqrt(-2.0*log(rsq)/rsq);
gset=v1*fac;
iset=1;
return v2*fac;
} else {
iset=0;
return gset;
}
}

double ncchisq( double df, double ncp, long *idum)
{ if(df<=0.0)
{printf("ERROR NCCHISQ, DF DEBE SER POSITIVO\n");
return 0.0;
}
if(ncp<0.0)
{printf("ERROR NCCHISQ, NCP DEBE SER NO NEGATIVO\n");
return 0.0;
}
if(df==1.0) return pow(gasdev(idum)+sqrt(ncp),2.0);
if(df==2.0) return pow(gasdev(idum),2.0)+pow(gasdev(idum)+sqrt(ncp),2.0);
}

```

```

    else return chisquare(df-1.0, idum)+pow(gasdev(idum)+sqrt(ncp), 2.0);
}

```

```

main()

```

```

{
double runs, run, T, h, psi, mvalue, maximum, ww, pnc, www, wwww;
double chibarsquare, statistic, delta, R, glnum, glden;
double preruns, sumofrunlength, sumofsqrdrunl, mediadeZ, desvestdeZ;
int stop, i, j, l, begin, flag, samplesize;
long seed;
double Z[5000];
double Z2[5000];
double X[5000];
double W[5000];
FILE *fpt;

```

```

h=9.37; /*h value, If maximum>h, the chart signals */
samplesize=100;
glnum=3.0; /*grados de libertad del numerador*/
glden=27.0; /*grados de libertad del denominador*/
pnc=0.0; /*parametro de no-centralidad de la distribucion F*/
mvalue=0.0;
delta=0.0;
runs=10000.0;
seed=-278577;
statistic=0.0;
mediadeZ=0.5*((1.0/glden)-(1.0/glnum));
desvestdeZ=sqrt(0.5*((1.0/glden)+(1.0/glnum)));
sumofrunlength=0.0; sumofsqrdrunl=0.0; ww=0.0;
if((fpt=fopen("rim2.xit", "a"))==NULL)
    { printf(" ERROR OPENING FILE RIM2.XIT\n");
      goto thend; }
fprintf(fpt, "OUTPUT OF RIM CHART (SLOPE=%f DELTA=%f)\n",
mvalue, delta);
fprintf(fpt, "h = %f\n", h);
if((fclose(fpt))!=0)
    { printf(" ERROR CLOSING FILE RIM2.XIT\n");
      goto thend; }

```

```

for(run=1.0; run<=runs; run=run+1.0)

```

```

{
    preruns=0.0;
    psi=preruns; R=0.0;
    stop=1;
    T=0.0;
    while(stop==1)
    {
        going6:
        ;
        T=T+1.0;

```

```

        www=(ncchisq(glnum, pnc, &seed)/glnum)/(chisquare(glden, &seed)/glden);
        /*pnc o pnc=mvalue*mvalue*T*T */
        wwww=0.5*log(www);

```

```

        Z[(int)(T-1.0)]=(www- mediadeZ)/desvestdeZ;

```



```

R=Z[(int)(T-1.0)];
Z2[(int)(T-1.0)]= -Z[(int)(T-1.0)];
if(T==1.0) goto going6;
begin=0;
{
    flag=1;
    doingstastic:
    i=0;
    for(l=begin; l<(int)(T); l++)
    {
        if(flag==1) X[i]=Z[l];
        else X[i]=Z2[l];
        W[i]=1.0;
        if(i==0)
        { i=i+1;
          goto going1;
        }
        going2:
        ;
        if( X[i] >= X[i-1] )
        { i=i+1;
          goto going1;
        }
        X[i-1]=( (W[i-1]*X[i-1]) + (W[i]*X[i]) )/( W[i-1]+W[i] );
        W[i-1]=W[i-1] + W[i];
        if(i-1==0) goto going1;
        i=i-1;
        goto going2;
        going1:
        ;
    }
    chibarsquare=0.0;
    for(j=0; j<i; j=j+1)
    {if(X[j]<=0.0) continue;
     chibarsquare=chibarsquare+(W[j]*pow(X[j],2.0));
    }
    maximum=chibarsquare;
}

if(maximum>h)
{
    if(T<=preruns)
    {
        preruns=preruns-T;
        psi=preruns;
        T=0.0;
        R=0.0;
        goto going6;
    }
    stop=0;
    sumofrunlength=sumofrunlength+(T-psi);
    sumofsqrdrunl=sumofsqrdrunl+(T-psi)*(T-psi);
    if(fmod(run,100.0)==0.0)
    {ww=((sumofsqrdrunl/run)-pow(sumofrunlength/run,2.0))/run;
      printf("DONE RUN: %f ARL=%f STDEV=%f E=%f\n",run,
            sumofrunlength/run,sqrt(ww),maximum );}
}

```

```

    if(fmod(run,100.0)==0.0)
    { if((fpt=fopen("rim2.out","w"))==NULL)
      { printf("ERROR OPENING FILE RIM2.OUT\n");
        goto thend; }
      fprintf(fpt,"RUNING NUMBER = %f\n",run);
      fprintf(fpt,"ARL = %f  STD DEV = %f\n",sumofrunlength/run,
sqrt(((sumofsqrdrunl/run)-pow(sumofrunlength/run,2.0))/run) );

fprintf(fpt,"sor=%f\nsors=%f\nseed=%d",sumofrunlength,sumofsqrdrunl,seed);
      if((fclose(fpt))!=0)
      { printf("ERROR CLOSING FILE RIM2.OUT\n");
        goto thend; }
    }

    if(fmod(run,1000.0)==0.0) {
      if((fpt=fopen("rim2.xit","a"))==NULL)
      {printf("ERROR OPENING FILE RIM2.XIT\n");
        goto thend;
      }
      ww=((sumofsqrdrunl/run)-pow(sumofrunlength/run,2.0))/run;
      fprintf(fpt,"Running number = %f\n",run);
      fprintf(fpt,"sum of RL = %f  sum of sqrd RL = %f\n",sumofrunlength,
sumofsqrdrunl);
      fprintf(fpt,"ARL = %f  STD DEV = %f\n",
sumofrunlength/run,sqrt(ww) );
      if((fclose(fpt))!=0) { printf("ERROR CLOSING FILE RIM2.XIT\n");
        goto thend;}
    }
  }
}

if((fpt=fopen("rim2.xit","a"))==NULL)
  { printf(" ERROR OPENING FILE RIM2.XIT\n");
    goto thend; }
fprintf(fpt,"--- ARL = %f  STD DEV = %f  CPL=%f\n",
sumofrunlength/runs,sqrt(ww),preruns );
if((fclose(fpt))!=0) printf(" ERROR CLOSING FILE RIM2.XIT\n");
thend:
;
}

```

B.5 Código en lenguaje C de la Carta MAT para el escenario de parámetros desconocidos

```

#include <stdio.h>
#include <math.h>

#define IM1 2147483563
#define IM2 2147483399
#define AM (1.0/IM1)
#define IMM1 (IM1-1)

```

```

#define IA1 40014
#define IA2 40692
#define IQ1 53668
#define IQ2 52774
#define IR1 12211
#define IR2 3791
#define NTAB 32
#define NDIV (1+IMM1/NTAB)
#define EPS 1.2e-7
#define RNMX (1.0-EPS)

double ran2(long *idum)
{
    int j;
    long k;
    static long idum2=123456789;
    static long iy=0;
    static long iv[NTAB];
    double temp;
    if (*idum<=0){
        if (-(*idum)<1) *idum=1;
        else *idum=-(*idum);
        idum2=(*idum);
        for (j=NTAB+7;j>=0;j--){
            k=(*idum)/IQ1;
            *idum=IA1*(*idum-k*IQ1)-k*IR1;
            if(*idum<0) *idum+=IM1;
            if(j<NTAB) iv[j]=*idum;
        }
        iy=iv[0];
    }
    k=(*idum)/IQ1;
    *idum=IA1*(*idum-k*IQ1)-k*IR1;
    if (*idum<0) *idum+=IM1;
    k=idum2/IQ2;
    idum2=IA2*(idum2-k*IQ2)-k*IR2;
    if (idum2<0) idum2+=IM2;
    j=iy/NDIV;
    iy=iv[j]-idum2;
    iv[j]=*idum;
    if(iy<1) iy+=IMM1;
    if((temp=AM*iy)>RNMX) return RNMX;
    else return temp;
}

double chisquare(double ll,long *idum)
{
    double a,b,q,d,df,V,Y,Z,W,u1,u2;
    double ran2(long *idum);
    df=ll;
    if(df<=1.0) {printf("ERROR, THE SAMPLE SIZE MUST BE GREATER THAN 1\n");
        return 0.0;}
    a=1/sqrt(2.0*(df/2.0)-1.0); b=(df/2.0)-log(4.0); q=(df/2.0)+(1.0/a);
    d=1.0+log(4.5);
    going9:
    u1=ran2(idum); u2=ran2(idum);
    V=a*log(u1/(1.0-u1));
}

```

```

Z=(u1*u1)*u2;
Y=(df/2.0)*exp(V);
W=b+q*V-Y;
if((W+d-4.5*Z)>=0.0) return 2.0*Y;
if(W>=log(Z)) return 2.0*Y;
goto going9;
}

double gasdev(long *idum)
{
double ran2(long *idum);
static int iset=0;
static double gset;
double fac,rsq,v1,v2;

if(iset==0){
do{
v1=2.0*ran2(idum)-1.0;
v2=2.0*ran2(idum)-1.0;
rsq=v1*v1+v2*v2;
} while(rsq>=1.0||rsq==0);
fac=sqrt(-2.0*log(rsq)/rsq);
gset=v1*fac;
iset=1;
return v2*fac;
} else {
iset=0;
return gset;
}
}

double ncchisq( double df, double ncp, long *idum)
{ if(df<=0.0)
{printf("ERROR NCCHISQ, DF DEBE SER POSITIVO\n");
return 0.0;
}
if(ncp<0.0)
{printf("ERROR NCCHISQ, NCP DEBE SER NO NEGATIVO\n");
return 0.0;
}
if(df==1.0) return pow(gasdev(idum)+sqrt(ncp),2.0);
if(df==2.0) return pow(gasdev(idum),2.0)+pow(gasdev(idum)+sqrt(ncp),2.0);
else return chisquare(df-1.0,idum)+pow(gasdev(idum)+sqrt(ncp),2.0);
}

double abval(double x)
{ if(x>= 0.0 ) return x;
else return -x;
}

main()
{
double maximum,h,run,runs,slopevartimes,mvalue,preruns,T,deltavartimes,chpe;
double sumofrun,sumofrunsqrd,w,phi,sumofchpe,sumofsqrdchpe;
double i,ww,www,m,glnum,glden,pnc,mediadeZ,desvestdeZ;
double observation[7000];

```

```

double abtkystat[7000];
FILE *fpt;
int stop,windowlength,begin;
long seed;
sumofrun=0.0; sumofrunsqrd=0.0; sumofchpe=0.0; sumofsqrdchpe=0.0;
h=3.60;
glnum=3.0; /*grados de libertad del numerador de la distribucion F*/
glden=12.0; /*grados de libertad del denominador de la distribucion F*/
mvalue=0.0;
pnc=0.0; /*parametro de no centralidad de la dist. F*/
mediadeZ=0.5*((1.0/glden)-(1.0/glnum));
desvestdeZ=sqrt(0.5*((1.0/glden)+(1.0/glnum)));
slopevartimes=0.0;
deltavartimes=0.0;
phi=0.0;
runs=10000.0;
windowlength=400;
seed=578991;
if((fpt=fopen("mat2.xit","a"))==NULL)
    { printf("ERROR OPENING FILE MAT2.XIT\n");
      goto thend; }
fprintf(fpt,"OUTPUT OF MAT CHART (WINLENGTH=%d SLOPE = %f)\n",
windowlength,mvalue);
fprintf(fpt,"    h = %f\n",h);
if((fclose(fpt))!=0)
    { printf("ERROR CLOSING FILE MAT2.XIT\n");
      goto thend; }

for(run=1.0; run<=runs; run=run+1.0)
    {
        stop=0;
        T=0.0; w=0.0;
        preruns=25.0;
        while(stop==0)
            {
                going3:
                ;
                T=T+1.0;
                if(T<=preruns) m=0.0;
                else m=slopevartimes;

ww=(ncchisq(glnum,pnc, &seed)/glnum)/(chisquare(glden,&seed)/glden); /*pnc
o pnc=mvalue*T */
www=0.5*log(ww);

                observation[(int)(T-1.0)]=(www-mediadeZ)/desvestdeZ;
                w=observation[(int)(T-1.0)];
                if(T==1.0) goto going3;
                begin=0;
                abtkystat[begin]=0.0;
                for(i=(double)begin; i<T; i=i+1.0)
                    {
                        abtkystat[begin]=abtkystat[begin]+((sqrt(T-i)-sqrt(T-
(i+1)))*observation[(int)i]);
                    }
                for(i=(double)begin+1.0; i<=(T-1.0); i=i+1.0)
                    {

```

```

abtkystat[(int)i]=abtkystat[(int)i-1]-(sqrt(T-(i-1.0))-sqrt(T-
i))*observation[(int)i-1];
    }

    maximum=(abtkystat[begin]);  chpe=0.0;
    if(T==2.0) goto going4;
    for(i=(double)begin; i<(T-1.0); i=i+1.0)
    {
    if(maximum<(abtkystat[(int)i+1])) {maximum=(abtkystat[(int)i+1]);
    chpe=i+1.0;}
    }
    going4:
    ;
    if(maximum>h)
    {
    if(T<=preruns)
    {
    preruns=preruns-T;
    T=0.0; w=0.0;
    goto going3;
    }
    stop=1;
    sumofrun=sumofrun+(T-preruns);
    sumofrunsqrd=sumofrunsqrd+(T-preruns)*(T-preruns);
    sumofchpe=sumofchpe+chpe;
    sumofsqrdchpe=sumofsqrdchpe+(chpe*chpe);
    if(fmod(run,100.0)==0.0) printf("DONE RUN: %f  ARL=%f  STDEV=%f\n",run,
sumofrun/run,
sqrt(((sumofrunsqrd/run)-pow(sumofrun/run,2.0))/run)  );

    if(fmod(run,1000.0)==0.0)
    { if((fpt=fopen("mat2.xit","a"))==NULL)
    { printf("ERROR OPENING FILE MAT2.XIT\n");
    goto thend; }
    fprintf(fpt,"RUNING NUMBER = %f\n",run);
    fprintf(fpt,"ARL = %f  STD DEV = %f\n",sumofrun/run,
sqrt(((sumofrunsqrd/run)-pow(sumofrun/run,2.0))/run)  );
    if((fclose(fpt))!=0)
    { printf("ERROR CLOSING FILE MAT2.XIT\n");
    goto thend; }
    }
    }
    }

if((fpt=fopen("mat2.xit","a"))==NULL)
{ printf("ERROR OPENING FILE MAT2.XIT\n");
goto thend; }
fprintf(fpt,"----  ARL = %f  STD DEV = %f  CPL=%f\n",sumofrun/runs,
sqrt(((sumofrunsqrd/runs)-pow(sumofrun/runs,2.0))/runs),preruns  );
fprintf(fpt,"CHPE AV = %f  STD DEV = %f\n",sumofchpe/runs,
sqrt(((sumofsqrdchpe/runs)-pow(sumofchpe/runs,2.0))/runs)  );
if((fclose(fpt))!=0)  printf("ERROR CLOSING FILE MAT2.XIT\n");
thend:
;
}

```

B.6 Código en lenguaje C de la Carta CSM1 para el escenario de parámetros desconocidos

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

#define IM1 2147483563
#define IM2 2147483399
#define AM (1.0/IM1)
#define IMM1 (IM1-1)
#define IA1 40014
#define IA2 40692
#define IQ1 53668
#define IQ2 52774
#define IR1 12211
#define IR2 3791
#define NTAB 32
#define NDIV (1+IMM1/NTAB)
#define EPS 1.2e-7
#define RNMX (1.0-EPS)

double ran2(long *idum)
{
    int j;
    long k;
    static long idum2=123456789;
    static long iy=0;
    static long iv[NTAB];
    double temp;
    if (*idum<=0){
        if (-(*idum)<1) *idum=1;
        else *idum=-(*idum);
        idum2=(*idum);
        for (j=NTAB+7;j>=0;j--){
            k=(*idum)/IQ1;
            *idum=IA1*(*idum-k*IQ1)-k*IR1;
            if(*idum<0) *idum+=IM1;
            if(j<NTAB) iv[j]=*idum;
        }
        iy=iv[0];
    }
    k=(*idum)/IQ1;
    *idum=IA1*(*idum-k*IQ1)-k*IR1;
    if (*idum<0) *idum+=IM1;
    k=idum2/IQ2;
    idum2=IA2*(idum2-k*IQ2)-k*IR2;
    if (idum2<0) idum2+=IM2;
    j=iy/NDIV;
    iy=iv[j]-idum2;
    iv[j]=*idum;
    if(iy<1) iy+=IMM1;
    if((temp=AM*iy)>RNMX) return RNMX;
    else return temp;
}
```

```

double gasdev(long *idum)
{
double ran2(long *idum);
static int iset=0;
static double gset;
double fac,rsq,v1,v2;

if(iset==0){
do{
v1=2.0*ran2(idum)-1.0;
v2=2.0*ran2(idum)-1.0;
rsq=v1*v1+v2*v2;
} while(rsq>=1.0||rsq==0);
fac=sqrt(-2.0*log(rsq)/rsq);
gset=v1*fac;
iset=1;
return v2*fac;
} else {
iset=0;
return gset;
}
}

double chisquare(double ll,long *idum)
{
double a,b,q,d,df,V,Y,Z,W,u1,u2;
double ran2(long *idum);
df=ll;
if(df<=1.0) {printf("ERROR, THE SAMPLE SIZE MUST BE GREATER THAN 1\n");
return 0.0;}
a=1/sqrt(2.0*(df/2.0)-1.0); b=(df/2.0)-log(4.0); q=(df/2.0)+(1.0/a);
d=1.0+log(4.5);
going9:
u1=ran2(idum); u2=ran2(idum);
V=a*log(u1/(1.0-u1));
Z=(u1*u1)*u2;
Y=(df/2.0)*exp(V);
W=b+q*V-Y;
if((W+d-4.5*Z)>=0.0) return 2.0*Y;
if(W>=log(Z)) return 2.0*Y;
goto going9;
}

double ncchisq( double df, double ncp, long *idum)
{ if(df<=0.0)
{printf("ERROR NCCHISQ, DF DEBE SER POSITIVO\n");
return 0.0;
}
if(ncp<0.0)
{printf("ERROR NCCHISQ, NCP DEBE SER NO NEGATIVO\n");
return 0.0;
}
if(df==1.0) return pow(gasdev(idum)+sqrt(ncp),2.0);
if(df==2.0) return pow(gasdev(idum),2.0)+pow(gasdev(idum)+sqrt(ncp),2.0);
else return chisquare(df-1.0,idum)+pow(gasdev(idum)+sqrt(ncp),2.0);
}

```



```

double maxh(w)
double w;
{
    if(w>0.0) return(w);
    return (0.0);
}

double maxl(h)
double h;
{
    if(h>0.0) return(h);
    return (0.0);
}

main()
{
double runs,run,sumh,x,h,k,delta,mvalue,T,psi,w,sumofchpe;
double sumofrun,sumofrunsqr,preruns,m,sumofsqrchpe,Np,ww,pnc;
double glnum,glden;
int stop;
FILE *fpt;
long seed;

runs=10000.0;
seed=-278577;
h=3.59;
psi=0.0;
w=0.0;
mvalue=0.0;
delta=0.0;
k=1.0;
glnum=10.0;
glden=20.0;
pnc=4.0;

sumofrun=0.0; sumofrunsqr=0.0; sumofchpe=0.0; sumofsqrchpe=0.0;

if((fpt=fopen("csml.xit","a"))==NULL)
    { printf("ERROR OPENING FILE CSM1.XIT\n");
      goto thend; }
fprintf(fpt,"OUTPUT OF CSM1 CHART ( SLOPE = %f)\n",mvalue);
fprintf(fpt,"    h = %f\n",h);
if((fclose(fpt))!=0)
    { printf("ERROR CLOSING FILE CSM1.XIT\n");
      goto thend; }

for(run=1.0; run<=runs; run=run+1.0)
{
    stop=0;
    sumh=0.0;
    T=0.0;    Np=0.0;
    preruns=0.0;
    while(stop==0)
    {
        going1:
        ;
    }
}

```

```

T=T+1.0;
if(T<=preruns) m=0.0;
else m=mvalue;
ww=(ncchisq(glnum,pnc, &seed)/glnum)/(chisquare(glden, &seed)/glden);
/* pnc o mvalue*mvalue*T*T */
x= ( 0.5*log(ww) - 0.5*((1.0/glden)-(1.0/glnum)) )/
sqrt( 0.5*((1.0/glnum)+(1.0/glden)) );
w=x;
sumh= maxh(x - (.5*k ) + sumh);
if(sumh>0.0) Np=Np+1.0;
else Np=0.0;
if(sumh>h)
{
if(T<=preruns)
{
preruns=preruns-T;
T=0.0;
sumh=0.0; w=0.0; Np=0.0;
goto going1;
}
stop=1;
sumofrun=sumofrun+(T-preruns);
sumofrunsqrd=sumofrunsqrd+(T-preruns)*(T-preruns);
}
if(fmod(run,100.0)==0) printf("RUN: %f ARL=%f STDEV=%f\n",run,sumofrun/run,
sqrt(((sumofrunsqrd/run)-pow(sumofrun/run,2.0))/run) );
}
}
}
thend:
;
}

```

B.7 Código en lenguaje C de la Carta CSM2 para el escenario de parámetros desconocidos

```

#include <stdio.h>
#include <math.h>

#define IM1 2147483563
#define IM2 2147483399
#define AM (1.0/IM1)
#define IMM1 (IM1-1)
#define IA1 40014
#define IA2 40692
#define IQ1 53668
#define IQ2 52774
#define IR1 12211
#define IR2 3791
#define NTAB 32
#define NDIV (1+IMM1/NTAB)
#define EPS 1.2e-7
#define RNMX (1.0-EPS)

```

```

double ran2(long *idum)
{
    int j;
    long k;
    static long idum2=123456789;
    static long iy=0;
    static long iv[NTAB];
    double temp;
    if (*idum<=0){
        if(-(*idum)<1) *idum=1;
        else *idum=-(*idum);
        idum2=(*idum);
        for (j=NTAB+7;j>=0;j--){
            k=(*idum)/IQ1;
            *idum=IA1*(*idum-k*IQ1)-k*IR1;
            if(*idum<0) *idum+=IM1;
            if(j<NTAB) iv[j]=*idum;
        }
        iy=iv[0];
    }
    k=(*idum)/IQ1;
    *idum=IA1*(*idum-k*IQ1)-k*IR1;
    if (*idum<0) *idum+=IM1;
    k=idum2/IQ2;
    idum2=IA2*(idum2-k*IQ2)-k*IR2;
    if (idum2<0) idum2+=IM2;
    j=iy/NDIV;
    iy=iv[j]-idum2;
    iv[j]=*idum;
    if(iy<1) iy+=IMM1;
    if((temp=AM*iy)>RNMX) return RNMX;
    else return temp;
}

```

```

double gasdev(long *idum)
{
    double ran2(long *idum);
    static int iset=0;
    static double gset;
    double fac,rsq,v1,v2;

    if(iset==0){
        do{
            v1=2.0*ran2(idum)-1.0;
            v2=2.0*ran2(idum)-1.0;
            rsq=v1*v1+v2*v2;
        } while(rsq>=1.0||rsq==0);
        fac=sqrt(-2.0*log(rsq)/rsq);
        gset=v1*fac;
        iset=1;
        return v2*fac;
    } else {
        iset=0;
        return gset;
    }
}

```

```

double chisquare(double ll,long *idum)
{
double a,b,q,d,df,V,Y,Z,W,u1,u2;
double ran2(long *idum);
df=ll;
if(df<=1.0) {printf("ERROR, THE SAMPLE SIZE MUST BE GREATER THAN 1\n");
return 0.0;}
a=1/sqrt(2.0*(df/2.0)-1.0); b=(df/2.0)-log(4.0); q=(df/2.0)+(1.0/a);
d=1.0+log(4.5);
going9:
u1=ran2(idum); u2=ran2(idum);
V=a*log(u1/(1.0-u1));
Z=(u1*u1)*u2;
Y=(df/2.0)*exp(V);
W=b+q*V-Y;
if((W+d-4.5*Z)>=0.0) return 2.0*Y;
if(W>=log(Z)) return 2.0*Y;
goto going9;
}

double ncchisq( double df, double ncp, long *idum)
{ if(df<=0.0)
{printf("ERROR NCCHISQ, DF DEBE SER POSITIVO\n");
return 0.0;
}
if(ncp<0.0)
{printf("ERROR NCCHISQ, NCP DEBE SER NO NEGATIVO\n");
return 0.0;
}
if(df==1.0) return pow(gasdev(idum)+sqrt(ncp),2.0);
if(df==2.0) return pow(gasdev(idum),2.0)+pow(gasdev(idum)+sqrt(ncp),2.0);
else return chisquare(df-1.0,idum)+pow(gasdev(idum)+sqrt(ncp),2.0);
}

double maxh(w)
double w;
{
if(w>0.0) return(w);
return (0.0);
}

double maxl(h)
double h;
{
if(h>0.0) return(h);
return (0.0);
}

main()
{
double runs,run,sumh,x,h,k,T,w,sumofchpe;
double sumofrun,sumofrunsqrd,mvalue,sumofsqrdchpe,ww,pnc;
double glnum,gliden;
int stop;
FILE *fpt;

```

```

long seed;

runs=10000.0;
seed=-278577;
h=55.3;
w=0.0;
mvalue=0.0;
k=1.0;
glnum=10.0;
glden=20.0;
pnc=0.0;

sumofrun=0.0; sumofrunsqrd=0.0; sumofchpe=0.0; sumofsqrdchpe=0.0;

if((fpt=fopen("csm2.xit","a"))==NULL)
    { printf("ERROR OPENING FILE CSM2.XIT\n");
      goto thend; }
fprintf(fpt,"OUTPUT OF CSM2 CHART ( SLOPE = %f)\n",mvalue);
fprintf(fpt,"  h = %f\n",h);
if((fclose(fpt))!=0)
    { printf("ERROR CLOSING FILE CSM2.XIT\n");
      goto thend; }

for(run=1.0; run<=runs; run=run+1.0)
    {
    stop=0;
    sumh=0.0;
    T=0.0;
    while(stop==0)
        {
        T=T+1.0;
        ww=(ncchisq(glnum,pnc, &seed)/glnum)/(chisquare(glden, &seed)/glden);
/* pnc o mvalue*mvalue*T*T */
        x=((ww-(glden/(glden-2)))*(glnum*(glden-2)/glden));
        w=x;
        sumh= maxh(x - (.5*k) ) + sumh);
        if(sumh>h)
            {
            stop=1;
            sumofrun=sumofrun+(T);
            sumofrunsqrd=sumofrunsqrd+(T)*(T);
            if(fmod(run,1000.0)==0) printf("RUN: %f ARL=%f STDEV=%f\n",run,sumofrun/run,
            sqrt(((sumofrunsqrd/run)-pow(sumofrun/run,2.0))/run) );
            }
        }
    }
    thend:
    ;
}

```

Referencias

- [1] Abelson, R. P. y Tukey, J. W. (1963). "Efficient Utilization of Non-Numerical Information in Quantitative Analysis: General Theory and the Case of Simple Order". *Annals of Mathematical Statistics*, **34**, pp. 1347-1369.
- [2] Alt, Frank, B. (1981). "Multivariate Quality Control". *Encyclopedia of Statistical Science*. **6**, Kotz, S. y Johnson, N. L., editores. John Wiley & Sons Inc., New York, N. Y. pp. 110-122.
- [3] Bartholomew, D. J. (1959). "A Test of Homogeneity for Ordered Alternatives". *Biometrika*, **46**, pp. 36-48.
- [4] Casella, George y Berger, Roger L. (1990). *Statistical Inference*. Duxbury Press, E.U.A.
- [5] Chan, Lai K. y Li, Gou-Ying. (1994). "A Multivariate Control Chart for Detecting Linear Trends". *Communication in Statistics*, **23**, No. 4, pp. 997-1012.
- [6] Crosier, Ronald B. (1988). "Multivariate Generalizations of Cumulative Sum Quality-Control Schemes". *Technometrics*, **30**, No. 3, pp. 291-303.
- [7] Healy, John D. (1987). "A Note on Multivariate CUSUM procedures". *Technometrics*, **29**, No. 4, pp. 409-412.
- [8] Kendall, Maurice G. y Stuart, Alan (1958). *The Advanced Theory of Statistics*. C. Griffin.
- [9] Lowry, Cynthia A., Woodall, William H., Champ, Charles W. y Rigdon Steven E. (1992). "A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart". *Technometrics*, **34**, No. 1, pp. 46-53.
- [10] Montgomery, Douglas C. (1997). *Introduction to Statistical Quality Control*. John Wiley & Sons Inc., New York, N. Y.

- [11] Pignatiello, Joseph J. Jr. y Runger, George C. (1990). "Comparisons of Multivariate CUSUM Charts". *Journal of Quality Technology*, **22**, No. 3, pp. 173-186.
- [12] Ríos, José Guadalupe (1997). Monitoring a Process Mean Under Trend Shift. Unpublished Ph. D. dissertation. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey.
- [13] Robertson, T. Wrigth, F. T. y Dykstra, R. L. (1988). Ordered Restricted Statistical Inference. John Wiley & Sons Inc, New York, N. Y.
- [14] Ryan, T.P. (1989). Statistical Methods for Quality Improvement. John Wiley & Sons Inc, New York, N. Y.
- [15] Tiku, M. L. (1981). "Noncentral Chi-Squared Distribution". *Encyclopedia of Statistical Science*. **6**, Kotz, S. y Johnson, N. L., editores. John Wiley & Sons Inc., New York, N. Y. pp. 276-280.
- [16] Tiku, M. L. (1981). "Noncentral F -Distribution". *Encyclopedia of Statistical Science*. **6**, Kotz, S. y Johnson, N. L., editores. John Wiley & Sons Inc., New York, N. Y. pp. 280-284.
- [17] Tracy, Nola D.; Young, John C. y Mason, Robert L (1997). "Some Aspects of Hotelling's T^2 Statistic for Multivariate Quality Control". Aparece en *Statistics of Quality* editado por Ghosh, Subir; Schucany, William R. y Smith, William B. Editorial Decker.
- [18] Woodall, William H. y Ncube, Matoteng M. (1985). "Multivariate CUSUM Quality-Control Procedures". *Technometrics*, **27**, No. 3, pp. 285-292.

Centro de Información-Biblioteca



3000200500051