

INSTITUTO TECNOLOGICO Y DE ESTUDIOS
SUPERIORES DE MONTERREY

ESCUELA DE GRADUADOS

EXPLORACION Y COMPROBACION DE UN
METODO PARA ENCONTRAR EL
OPTIMO DE FUNCIONES IMPLICITAS

TESIS PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OPTAR AL GRADO ACADEMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
ESPECIALIDAD EN INVESTIGACION DE OPERACIONES
POR
MARIA ESPERANZA BURES RAMIREZ

1968

INSTITUTO TECNOLOGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY

ESCUELA DE GRADUADOS

EXPLORACION Y COMPROBACION DE UN METODO PARA ENCONTRAR

EL OPTIMO DE FUNCIONES IMPLICITAS

TESIS PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL

PARA OPTAR AL GRADO ACADEMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

ESPECIALIDAD EN INVESTIGACION DE OPERACIONES

P O R

MARIA ESPERANZA BURES RAMIREZ

1 9 6 8

NOMENCLATURA

- A_i = Corrección a H_i para generar la inversa del Jacobiano.
- A_{last} = Tendencia.
- B_i = Aproximación al Jacobiano.
- c = Vector de las constantes usado para expresar una ecuación de segundo grado en forma matricial.
- D_i = Corrección a H_i para cancelar la suposición inicial sobre H_i .
- f = Vector de derivadas parciales de la función objetivo = gradiente.
- f_j = Derivada parcial de la función objetivo θ .
- \emptyset = Norma del vector f .
- F_t = Elemento estacional en el Método de Winters.
- H_i = Negativo de la matriz inversa de la aproximación del Jacobiano. (definida por ecuación 14).
- I = Matriz identidad.
- i = Subíndice para referirse a una interacción o a una aproximación.
- J = Jacobiano.
- j = Subíndice para referirse a alguna de las ecuaciones del sistema, o sea a alguna de las derivadas parciales.
- k = Subíndice para referirse a alguna de las variables, o sea a alguna de las incógnitas.

- L = Longitud del ciclo estacional.
- M = Número de datos que integran la primera parte de la serie de tiempo.
- n = Número de incógnitas.
- N = Número de datos pronosticados.
- O = Función objetivo.
- p_i = Vector dirección (definida por ecuación 3).
- PRON = Pronóstico.
- Q = Matriz para expresar una ecuación cuadrática en forma matricial.
- r = Número de períodos de tiempo en el futuro en el Método de Winters.
- s_i = Incremento a t_i para expansión por Series de Taylor.
- S_{last} = Elemento constante del Método de Winters.
- t_i = Escalar para evitar que diverja el método de Newton.
- V_1 = Valor promedio de las ventas del primer año.
- V_i = Valor de los elementos de la serie de tiempo.
- x_i = Aproximación i a la solución = Factores de ponderación en el Método de Winters.
- x_j = Elementos del vector x_i .
- x_1 = Factor de ponderación para el elemento constante.
- x_2 = Factor de ponderación para la tendencia.

x_3 = Factor de ponderación para el elemento estacional.

Δx = Dirección de avance entre aproximaciones sucesivas =
vector dirección.

y_i = Vector de diferencia de gradientes (definida por ecuación 14).

RESUMEN

En este trabajo se hizo una exploración del método cuasi-newtoniano desarrollado por Fletcher y Powell para funciones implícitas. Para probar el método se usó una computadora IBM 1620, usando los super lenguajes Kingston Fortran II y Fortran II-D.

La función implícita usada como ejemplo fué la función de error del pronóstico del Método de Promedios Movibles Ponderados Exponencialmente desarrollado por Winters.

Los resultados de la aplicación del método de Fletcher y Powell se comparan con los obtenidos mediante otros dos métodos. (Evaluación de la función objetivo para diferentes combinaciones de las variables independientes y el Método de Friedman y Savage).

La función objetivo estudiada parece ser multimodal, tiene contornos muy agudos y en ciertas regiones es prácticamente plana. A pesar de ello, el Método de Fletcher y Powell trabajó bien y fué posible localizar el óptimo absoluto, lo cual se logró partiendo de muy diferentes puntos iniciales.

El Método de Fletcher y Powell fué el más eficiente de los métodos probados, pues no solo se llegó al resultado con el menor número de iteraciones, sino que se obtuvo el mejor resultado (menor valor de la desviación estándar).

I N D I C E

	<u>PAGINA</u>
Nomenclatura	i
Resumen	iv
I.- Introducción	1
II.- Antecedentes	2
III.- Método de Newton-Raphson	6
IV.- Métodos Cuasi-newtonianos	9
V.- Métodos de Fletcher y Powell	16
VI.- Algoritmo Computacional y Comentarios al mismo	24
VII.- Parte Experimental	31
VIII.- Resultados y Evaluación del Método de Fletcher y Powell	38
IX.- Comentarios y Conclusiones	47
X.- Bibliografía	49
XI.- Apéndices	
Apéndice 1.- Programa para el Método de Flet- cher y Powell	51
Apéndice 2.- Programa para el Método de Fried- man y Savage	65
Curriculum Vitae	71

LISTA DE TABLAS EN EL TEXTO

	<u>PAGINA</u>
Tabla 1.- Resultados Obtenidos con el Método de Fletcher y Powell	38
Tabla 2.- Valor de la Función Objetivo para Diferentes Combinaciones de los -- Factores de Ponderación	43
Tabla 3.- Resultados Obtenidos con el Método de Friedman y Savage	46

I.- INTRODUCCION

El objetivo de esta tesis es explorar y comprobar un método - para encontrar puntos estacionarios de funciones implícitas y comparar su eficiencia con la de otros métodos.

El método estudiado fué el desarrollado por Fletcher y Powell. Como función implícita se escogió la función de error del pronóstico del Método de Promedios Movibles Ponderados Exponencialmente desarrollado por Winters.

La limitación de los métodos de optimización consiste en que no se puede garantizar que el punto obtenido sea un óptimo absoluto. Además, con relación al punto obtenido, se recomienda hacer una exploración a su alrededor para tener mayor evidencia de que se trata de un punto estacionario y no algún otro punto en que se detenga el método de optimización por sus propias limitaciones.

II.- ANTECEDENTES

El método clásico a seguir para encontrar un punto estacionario (máximo o mínimo) de una función objetivo 0 , es calcular las derivadas parciales de dicha función con respecto a cada una de las variables que intervienen, y buscar los valores de las variables que hacen cero ese sistema de ecuaciones (14)*. Por lo tanto, el problema de encontrar un punto estacionario se convierte en el problema de encontrar la solución de un sistema de ecuaciones simultáneas, o sea encontrar las raíces del sistema de ecuaciones.

Las ecuaciones (derivadas parciales) pueden expresarse en la forma:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ \overline{f}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Se supone que existe por lo menos una solución real al sistema de ecuaciones, y que las funciones son continuas y tienen primeras derivadas continuas. A menudo estas suposiciones son válidas al tratar con ecuaciones provenientes de muchos sistemas físicos.

* Los números entre paréntesis se refieren a la bibliografía que aparece al final de esta tesis.

En la práctica, el procedimiento descrito antes puede llegar a ser muy laborioso, pues a menudo ocurre que la función objetivo -- es muy compleja y cara (en términos de tiempo de computación) para - fines de evaluación, y que el valor de sus derivadas parciales únicamente puede inferirse mediante aproximación por diferencias finitas.

Aún cuando se pudiera encontrar en forma más o menos sencilla la expresión matemática de las derivadas parciales, lo más frecuente es que sean expresiones de orden superior o funciones trascendenta--les, y entonces aparece el problema de resolver un sistema de n -- ecuaciones simultáneas no lineales.

Por lo tanto es necesario buscar la forma de encontrar los -- puntos estacionarios de la función objetivo mediante otros métodos.

De acuerdo a Wilde y Beightler (15), los métodos que existen para encontrar el máximo o el mínimo de una función pueden clasifi--carse en dos categorías:

- 1) Técnicas de eliminación, en las cuales se trata de disminuir continuamente la región en la que se puede encontrar el óptimo.
- 2) Procedimientos de escalamiento, en los cuales el punto seleccionado se mueve hacia donde, basándose en medidas locales, - la función objetivo parece que mejora.

Los métodos de eliminación son extremadamente efectivos cuan-

do hay una sola variable independiente. Aunque muy pocos problemas prácticos de optimización involucran una sola variable de decisión, muchos procedimientos de escalamiento multidimensionales involucran la optimización de una sola dimensión (una sola variable) como subrutina. Entre estos procedimientos podría mencionarse el método del gradiente, todos los métodos que siguen el contorno de la superficie de respuesta, los métodos cuasi-newtonianos entre los cuales se encuentra el método de Fletcher y Powell (4, 13, 15), etc.

Los métodos de eliminación consisten en seleccionar un intervalo o región inicial donde se buscará el punto crítico, escoger una serie de valores para la variable independiente y de acuerdo a los valores de la variable dependiente eliminar cierta parte del intervalo, y repetir el procedimiento en el intervalo restante hasta encontrar el punto estacionario. Los métodos de eliminación más conocidos son el Método de Bolzano, el Método de Investigación por Pares, el Método de Fibonacci, el Método de la Sección Dorada y el Método del Block Dorado (15).

En los métodos de escalamiento los pasos o puntos sucesivos que se obtienen tienen dos propósitos:

- a) Obtener un mejor valor de la función objetivo.
- b) Proporcionar información útil para localizar puntos o experimentos futuros donde es probable que se encuentre el óptimo.

La estrategia general de estos procedimientos es (15): en un

principio, explorar en una pequeña región, escogida al azar, de forma que se pueda seleccionar el siguiente punto en donde la función objetivo es mejor. A continuación se trata de escalar tan aprisa como sea posible, explorando sólo cuando sea estrictamente necesario para guiar los siguientes puntos; finalmente, cerca del punto crítico, se necesita una intensa exploración para obtener una mejoría en el valor de la función objetivo y para comprobar si el punto obtenido es realmente un punto estacionario o no.

Los métodos de escalamiento más conocidos son el Método del Gradiente de Cauchy, el Procedimiento de Aceleración de Forsythe y Matzkin, los Métodos de seguir la línea de contorno de la superficie respuesta (ridge following methods) de Hooke y Jeeves, Rosenbrock, Gelfard y Tsetlin, Humphrey y Bear, la Técnica de Tangentes Paralelas de Shah, Buehler y Kempthorne, el Procedimiento del Gradiente De flexionado de Fletcher y Powell, los Métodos de Aproximación Cuadrática y los de Ascenso Amortiguado (15).

Dentro de los métodos de escalamiento, el de Fletcher y Powell (2, 4, 13) se clasifica, junto con otros métodos que tienen bases similares, como métodos cuasi-newtonianos, por tener las bases del método de Newton para encontrar las raíces de ecuaciones simultáneas. Basándose en este método se han desarrollado una serie de algoritmos que permiten encontrar la solución de n ecuaciones simultáneas no lineales en un número reducido de evaluaciones de la función objetivo.

III.- METODO DE NEWTON-RAPHSON

Uno de los métodos más ampliamente usados para resolver la -- ecuación 1 es la técnica de Newton-Raphson (7, 9, 10, 11).

Si x_i es la aproximación i a la solución de la ecuación 1, el método de Newton-Raphson es definido por

$$x_{i+1} = x_i - J_i^{-1} f_i \quad (2)$$

donde f_i es el vector de derivadas parciales evaluado en x_i , J_i^{-1} es la inversa de la matriz de derivadas parciales de f_i evaluadas en x_i , conocida como Jacobiano, y x_{i+1} es una posible mejor solución a la ecuación 1. El determinante del Jacobiano debe ser diferente de cero.

La expresión $J_i^{-1} f_i$ nos da la dirección en la cual se encuentra una mejor solución a la ecuación 1.

El método de Newton-Raphson expresado en la forma anterior -- tiene dos desventajas desde el punto de vista computacional.

La primera de ellas es la dificultad de calcular el Jacobiano. Aún si las funciones f_i son suficientemente simples de forma que sus derivadas parciales puedan obtenerse analíticamente, la cantidad de trabajo necesario para evaluar las n^2 de ellas puede ser excesivo. - En la mayoría de los problemas prácticos las f_i son demasiado com--

plicadas para que se puedan evaluar sus derivados parciales y por lo tanto debe obtenerse numéricamente una aproximación al Jacobiano.

A menudo eso se hace directamente, o sea calculando $\partial f_i / \partial x_i$ mediante evaluación de f_i para dos diferentes valores de x_i y manteniendo constantes las $n-1$ variables independientes restantes. Aunque este procedimiento directo da una aproximación inmediata a las derivadas parciales, tiene algunas desventajas, siendo la más seria de ellas la cantidad de trabajo involucrado.

La segunda desventaja del método de Newton-Raphson es que, -- sin algunas modificaciones, el método no converge. Aunque en general no puede asegurarse la convergencia del método, puede prevenirse la divergencia del mismo expresando el método de Newton en la siguiente forma:

$$x_{i+1} = x_i - t_i J_i^{-1} f_i \quad (3)$$

donde t_i es un escalar suficientemente pequeño que permite que la norma del vector, \emptyset , siempre se reduzca localmente

$$\emptyset = \sum_{i=1}^n f_i^2 \quad \text{ó} \quad (4)$$

$$\emptyset = \sum_{i=1}^n |f_i|$$

Como se acaba de mencionar, no hay forma de asegurar que el método converja. Sin embargo, cuando éste converge, lo hace en for-

ma cuadrática; esto es, el error de la aproximación actual es la raíz cuadrada del error de la aproximación anterior (6), lo cual garantiza que la convergencia es rápida.

IV.- METODOS CUASI-NEWTONIANOS (2)

Para contrarrestar algunas de las desventajas del método de Newton se sugiere que se evalúe el Jacobiano sólo una vez o sólo cada cierto número de iteraciones, en vez de hacerlo en cada iteración como es lo estrictamente requerido. Cualquiera de estas variantes requiere la evaluación completa del Jacobiano.

En los métodos cuasi-newtonianos las derivadas parciales de las funciones f_i no se estiman directamente, sino que se hacen correcciones a la inversa del Jacobiano aproximado haciendo uso de valores del vector f . Esto se basa en la suposición de que cuando se está lejos de la solución, la información proporcionada por el Jacobiano se desaprovecha en su mayor parte, puesto que no es necesario conocer exactamente la dirección del movimiento.

Por lo tanto, se empieza con una aproximación del Jacobiano -- que se va corrigiendo conforme se obtiene más información, y cuando se tiene una buena aproximación del Jacobiano el proceso caerá en la convergencia cuadrática del método de Newton. En esta forma se combina la sencillez de los métodos de matriz constante (una sola estimación del Jacobiano para todas las iteraciones) con la rápida convergencia del método básico de Newton. Esta es la filosofía seguida en los métodos cuasi-newtonianos. La corrección del Jacobiano se hace mediante aproximación de secantes a las derivadas.

Recordando que x_i es la aproximación i a la solución de la ecuación 1, y que f_i es el vector de derivados parciales en ese punto, se define

$$p_i = - B_i^{-1} f_i \quad (5)$$

donde B_i es alguna aproximación al Jacobiano evaluada en x_i . Por lo tanto una modificación simple al método de Newton es

$$x_{i+1} = x_i + t_i p_i \quad (6)$$

donde t_i , cuya derivación se discute en la sección VI es un escalar escogido para evitar que el método diverja.

Por lo tanto x puede definirse como

$$x = x_i + t p_i \quad (7)$$

donde t puede tomar cualquier valor arbitrario.

Las funciones f_j son ahora funciones de una sola variable, t , y tienen primeras derivadas con respecto a t , puesto que se supuso que existen las primeras derivadas parciales con respecto a x_k ($\partial f_j / \partial x_k$).

Una aproximación a las derivadas df_j/dt , $j = 1, 2, \dots, n$, puede usarse para mejorar la aproximación al Jacobiano, B_i . Esto se demuestra en la siguiente forma:

$$\frac{df_j}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \cdot \frac{dx_k}{dt}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

Si df/dt se entiende como el vector $\left[df_j/dt \right]$, la ecuación 8 llega a ser

$$\frac{df}{dt} = J p_i = - J B_i^{-1} f_i \quad (9)$$

Por lo tanto, si se tuviera una estimación exacta de df/dt , se podría usar para establecer una condición que debe ser satisfecha por cualquier aproximación al Jacobiano.

Ya se ha supuesto que las funciones f_j son suficientemente -- complicadas para que no sea fácil obtener una expresión analítica de sus primeras derivadas parciales; la única forma de obtener una estimación de df/dt es diferenciando. Puesto que el objetivo es obtener una aproximación al Jacobiano en el punto x_{i+1} , es necesario obtener una aproximación a df/dt en ese punto. Esto puede lograrse expandiendo cada una de las f_j como una función de t usando series de Taylor con relación a t_i y suponiendo que los términos de segundo orden y superiores son pequeños. Esto da

$$f(t_i - s) \approx f_{i+1} - s \frac{df}{dt} \quad (10)$$

Cuando se calculan f_{i+1} y $f(t_i - s)$, donde s es un valor -- particular escogido de forma como se mencionará más adelante, la ecuación 10 puede usarse sin necesidad de evaluaciones adicionales de f para obtener una aproximación a df/dt y por lo tanto para imponer --

una condición sobre la aproximación del Jacobiano. Ninguna evaluación especial de f es necesaria puesto que si s se hace igual a t_i , $f(t_i - s)$ llega a ser f_i , una cantidad conocida. Eliminando df/dt entre las ecuaciones 9 y 10 se obtiene

$$f_{i+1} - f(t_i - s_i) \approx s_i J p_i \quad (11)$$

La ecuación anterior relaciona 4 cantidades ya conocidas con una quinta, el Jacobiano, del cual se tiene sólo una aproximación, B_i , y de la cual se busca una mejor aproximación, B_{i+1} . En los métodos cuasi-newtonianos B_{i+1} se escoge de tal manera que satisfaga la ecuación

$$f_{i+1} - f(t_i - s_i) = s_i B_{i+1} p_i \quad (12)$$

Al comparar las ecuaciones 11 y 12 se observa que si el error en 11 es despreciable -si la suma de los términos de segundo grado y mayores en la expansión usando series de Taylor es suficientemente pequeña- entonces B_{i+1} tendrá por lo menos una de las propiedades requeridas del Jacobiano. Si, por otra parte, la suma omitida es grande, la matriz B_{i+1} no será una aproximación del Jacobiano. Por lo tanto, parece razonable escoger s_i tan pequeño como sea posible, sin que introduzca un error por redondear cifras en la estimación de df/dt .

Si s_i se hace igual a t_i , la ecuación 12 llega a ser

$$f_{i+1} - f_i = t_i B_{i+1} p_i \quad (13)$$

y esto demuestra que el elemento j del vector $B_{i+1} p_i$ toma el valor de df_j/dt evaluado en algún punto, que varía con j entre x_i y x_{i+1} (según el primer teorema del valor medio*)

Aunque esto no es tan bueno como obtener un conjunto de derivadas evaluadas en x_{i+1} , esto asegura que B_{i+1} se refiere a puntos más cercanos a la solución que x_i , puesto que x_{i+1} es en algún sentido una mejor aproximación a la solución que x_i .

Ahora, si los cálculos se llevan a cabo guardando la matriz B_i en la memoria de la computadora, será necesario resolver n ecuaciones lineales para calcular el vector dirección p_i , usando la ecuación 5; pero si se almacena en la memoria la inversa de esta matriz, la operación se reduce a una multiplicación de una matriz por un vector. Si H_i y y_i se definen por

$$H_i = - B_i^{-1} \quad (14)$$

y

$$y_i = f_{i+1} - f(t_i - s_i) \quad (15)$$

* El primer teorema del valor medio establece que dados dos puntos, a y b , sobre una curva $y = f(x)$ donde $f(x)$ tiene derivadas continuas, la pendiente de la cuerda entre a y b es igual a la pendiente de la tangente a la curva en algún punto intermedio

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad a < c < b$$

las ecuaciones 5 y 12 llegan a ser

$$P_i = H_i f_i \quad (16)$$

y

$$H_{i+1} y_i = -s_i P_i \quad (17)$$

si se escoge $s_i = t_i$ se tiene

$$H_{i+1} y_i = -t_i P_i \quad (18)$$

Las ecuaciones 17 ó 18 no definen -como la ecuación 12 una ma---
triz única, sino una clase de matrices. Por lo tanto las ecuaciones
6, y de la 15 a la 17 definen una clase de métodos basados en el mé-
todo de Newton para resolver un conjunto de ecuaciones simultáneas -
no lineales, conocidos como métodos cuasi-newtonianos.

Los métodos particulares se derivan haciendo suposiciones pos-
teriores con relación a las propiedades de B_{i+1} ó H_{i+1} .

El hecho más importante de los métodos cuasi-newtonianos es -
que aunque la matriz de iteración H_i cambia de paso a paso, no se re-
quieren evaluaciones adicionales de f fuera de aquellas que serían -
necesarias si H_i permaneciera constante. Esta es una consideración
importante si el vector f es laborioso de calcular. Otro hecho de -
estos métodos es que cuando x_i se aproxima a la solución, las suposi-
ciones hechas al derivar la ecuación 10 son más validas. Por lo tan

to B_i tiende al Jacobiano, y la velocidad de convergencia puede esperarse que mejore cuando se está acercando a la solución, y en los últimos pasos llega a ser cuadrática.

V.- METODO DE FLETCHER Y POWELL (15)

La derivación del método de Fletcher y Powell que se presenta en este trabajo se debe a Wilde y Beightler (15).

El método del gradiente defleccionado de Fletcher y Powell es muy eficiente cuando se pueden obtener gradientes exactos en forma relativamente fácil. Esto ocurre cuando la función objetivo es implícita, lo cual hace que la evaluación de la función objetivo sea tan costosa que el esfuerzo extra para calcular el gradiente sea relativamente pequeño.

A continuación se presenta una descripción detallada del método y de su comportamiento para cuando la función objetivo es cuadrática. Si no existen tales circunstancias, el procedimiento no terminará tan pronto, pero después de n pasos o iteraciones la matriz de deflección H generalmente llegará a ser una mejor estimación de la curvatura en el mínimo, medida por la inversa de la matriz de segundas derivadas parciales.

Así, el método converge rápidamente tan pronto como se acerca lo suficiente como para hacer válida la aproximación cuadrática. Sin embargo, si la función objetivo no es cuadrática, la convergencia no puede garantizarse.

En el método de Fletcher y Powell la corrección a la matriz H_i (la inversa del Jacobiano) se hace en la siguiente forma:

$$H_{i+1} = H_i + A_i + D_i \quad (19)$$

El papel de A_i es generar la inversa del Jacobiano en n pasos. En efecto, A_i se escoge en tal forma que sus sumas sean igual a la inversa del Jacobiano.

$$\sum_{i=1}^n A_i = J^{-1} \quad (20)$$

La secuencia de matrices D_i debe cancelar la suposición inicial de H_1 .

$$\sum_{i=1}^n D_i = -H_1 \quad (21)$$

La matriz H_1 se escoge que sea definitivamente positiva de forma tal que la nueva dirección de búsqueda dé una mejora local de la función objetivo.

Para mostrar que las ecuaciones 20 y 21 dan una secuencia que converge a J^{-1} , se tiene:

$$H_{n+1} = H_n + A_n + D_n$$

$$H_{n+1} = H_{n-1} + (A_n + A_{n-1}) + (D_n + D_{n-1}) \quad (22)$$

-

-

$$H_{n+1} = H_1 + \sum_{i=1}^n A_i + \sum_{i=1}^n D_i = J^{-1}$$

Ahora falta encontrar la forma de calcular A_i y D_i a partir de información generada a lo largo del camino. El agente principal para esto es el vector de diferencias de gradiente, definido como la diferencia entre los gradientes al principio y al final del paso i .

$$y_i = f_{i+1} - f_i \quad (23)$$

Suponiendo una función objetivo cuadrática, y expresando dicha función en forma matricial

$$0 = \frac{1}{2} x' Q x + c x + \text{cte} \quad (24)$$

donde c es un vector de n elementos y Q es una matriz definitivamente positiva simétrica no singular $n \times n$.

En cualquier punto, el gradiente es dado por

$$f = c + Qx \quad (25)$$

$$x^* - x = \Delta x^* = - Q^{-1} f \quad (26)$$

La diferencia de gradientes, y , puede relacionarse a la matriz desconocida Q por diferenciación de la función objetivo para ob

tener los gradientes

$$\begin{aligned} y_i &= (c + Qx_{i+1}) - (c + Qx_i) \\ &= Q \Delta x_i \end{aligned} \quad (27)$$

Para encontrar A_n , de las ecuaciones 20 y 27 se tiene

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= I \Delta x_i = Q^{-1} Q \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^n A_1 Q \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^n A_i y_i \end{aligned} \quad (28)$$

Pero si A_i va a depender sólo de información generada en el - paso i , entonces sólo el término i de la suma debería ser diferente de cero. Esto es

$$x_i = A_i y_i \quad (29)$$

y

$$A_1 y_n = 0 \quad \text{para} \quad l = i \quad (30)$$

Multiplicando Δx_i por la unidad (escrito en forma complicada) se tiene

$$\Delta x_i = \Delta x_i \left[\frac{\Delta x_i' y_i}{\Delta x_i' y_i} \right] = \left[\frac{\Delta x_i \quad \Delta x_i'}{\Delta x_i' y_i} \right] y_i \quad (31)$$

la cual, al compararla con la ecuación 29 da

$$A_i = \frac{\Delta x_i \Delta x_i'}{\Delta x_i' y_i} \quad (32)$$

Δx_i da la dirección de avance entre aproximaciones sucesivas, o sea el vector dirección, p_i . Por lo tanto la ecuación 32 puede escribirse

$$A_i = \frac{p_i p_i'}{p_i' y_i} \quad (33)$$

La ecuación 33 es válida para funciones objetivos cuadráticas. Cuando este no es el caso, se introduce un escalar t_i para prevenir que el método diverja. En la sección VI se explica la forma de seleccionar dicho escalar.

$$A_i = \frac{t_i p_i p_i'}{p_i' y_i} \quad (34)$$

Rosen (13) y Broyden (2) definen $p_i = - H_i f_i$, lo que produ--
ce

$$A_i = - \frac{t_i p_i p_i'}{p_i' y_i}$$

Esta última modificación de signo se usa en este trabajo.

El éxito del método del gradiente defleccionado depende del -
hecho de que los pasos $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_i$ están relacionados
a H_i mediante la expresión

$$H_i Q \Delta x_i = \Delta x_i \quad i = 1, 2, \dots, i \quad (36)$$

En particular, en el último paso ($i = n$)

$$H_n Q \Delta x_i = \Delta x_i \quad (37)$$

lo cual sólo es verdad para n pasos linealmente independientes Δx_i si $H_n Q$ es la matriz unitaria. Esto prueba que

$$H_n = Q^{-1} \quad (38)$$

En la ecuación 22 se ha demostrado que

$$H_n = J^{-1} \quad (39)$$

de donde se deduce que la matriz Q es precisamente el Jacobiano.

En terminología matricial, los pasos Δx_i son llamados vectores característicos de $H_i Q$, cada uno con valor característico unitario.

Arreglando las cosas de forma de que sea válida la ecuación 36 se tiene una forma de calcular la secuencia de D_n . La ecuación 36 puede escribirse también en la siguiente forma:

$$H_{i+1} Q \Delta x_i = \Delta x_i$$

Las ecuaciones 19, 27 y 29 dan

$$\begin{aligned}
 H_{i+1} Q \Delta x_i &= H_i y_i \\
 &= H_i y_i + A_i y_i + D_i y_i \\
 &= H_i y_i + \Delta x_i + D_i y_i
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

Las ecuaciones 36 y 40 implican que

$$D_i y_i = - H_i y_i \tag{41}$$

La solución obvia ($B_i = - H_i$) debe descartarse debido a que no se obtienen consecuencias de interés, pero hay una posibilidad no trivial obtenida por la multiplicación del miembro derecho de la ecuación 41 por la unidad, escrita en forma aún más complicada. Para cualquier vector z de n componentes se cumple que

$$1 = \frac{z' y_i}{y_i' z} \quad (y_i' z \neq 0) \tag{42}$$

las ecuaciones 41 y 42 juntas dan

$$D_i y_i = - \frac{H_i y_i z' y_i}{y_i' z} \tag{43}$$

comparando matrices

$$D_i = - \frac{H_i y_i z'}{y_i' z} \tag{44}$$

El numerador es una matriz $n \times n$ singular, mientras que el denominador es un escalar. Puesto que se requiere que H_{i+1} , H_i y A_i sean simétricas, el vector z debe seleccionarse de forma tal que D_i

sea simétrica. La selección correcta es

$$z = H_i y_i \quad (45)$$

lo cual da

$$D_i = - \frac{H_i y_i y_i' H_i'}{y_i' H_i y_i} \quad (46)$$

Por lo tanto, en el método de Fletcher y Powell la corrección a la matriz H se hace mediante la expresión

$$H_{i+1} = H_i - \frac{t_i P_i P_i'}{P_i' P_i} - \frac{H_i y_i y_i' H_i}{y_i' H_i y_i} \quad (47)$$

VI.- ALGORITMO COMPUTACIONAL Y COMENTARIOS AL MISMO

El algoritmo computacional general para los métodos cuasi-newtonianos es el siguiente (13):

- 1.- Escoger un punto inicial x_i y una aproximación inicial a la inversa del Jacobiano. En este trabajo la aproximación inicial es la matriz unitaria I .
- 2.- Calcular el vector de derivadas parciales f_i en el punto x_i . Puesto que se desconocen las expresiones de las derivadas parciales, obténgase una aproximación a ellas mediante diferencias finitas, dando un pequeño incremento a una de las variables mientras se mantiene constante el resto.
- 3.- Determinar la dirección en que se buscará una mejor aproximación a la solución. Esta dirección se define por la expresión

$$p_i = H_i f_i \quad (48)$$

- 4.- Búsqueda en la dirección marcada por p_i usando la ecuación

$$x_{i+1} = x_i + t_i p_i \quad (49)$$

hasta que una de las normas del vector x se minimice o hasta que se obtenga un mejor valor de dicha norma. Esto determina los valores de t_i y de f_{i+1} .

Ya que el vector p solo nos da la dirección en la cual se encuentra una mejor solución al sistema de ecuaciones, es necesario -- buscar en ambos sentidos, por lo que, si buscando en un sentido no se encuentra una norma mejor, se multiplica por menos uno y se busca en sentido contrario.

En este trabajo se escogió encontrar un mejor valor de la norma, y la norma seleccionada es

$$\phi = \sum_{j=1}^n |f_j| \quad (50)$$

5.- Se hacen correcciones a la matriz H , haciendo uso de la siguiente ecuación. En el punto estacionario, esta matriz coincide con el Jacobiano.

$$H_{i+1} = H_i - \frac{t_i P_i P_i'}{P_i' P_i} - \frac{H_i y_i y_i' H_i}{y_i' H_i y_i} \quad (51)$$

Este procedimiento se repite hasta que el cambio en x entre iteraciones sea alguna cantidad pequeña arbitraria o hasta que se satisfaga la ecuación 1. Ya que es prácticamente imposible, cuando se está trabajando con una computadora, el hacer que la ecuación 1 se satisfaga exactamente, en este trabajo se escogió para finalizar las iteraciones el hecho de que el valor entre iteraciones consecutivas de la función objetivo, 0 , no mejore en más de 0.1%.

Aunque en general no se puede dar una prueba rigurosa de la convergencia del método, puede prevenirse la divergencia del mismo --

reduciendo una norma apropiada del vector f , según se menciona en el punto 4.

A continuación se presentan algunos comentarios sobre los puntos de mayor interés de los métodos cuasi-newtonianos que son la inicialización del procedimiento, la forma de evitar que el método diverja y la forma de hacer la corrección a la matriz H .

Inicialización del Procedimiento.- La inicialización del procedimiento se refiere a dos puntos. La selección del valor inicial del vector x , y la evaluación de la matriz inicial H_1 .

La selección del punto de inicialización (vector x) de los métodos cuasi-newtonianos es arbitraria.

El hecho de empezar el procedimiento tan cerca del punto estacionario como sea posible siempre es ventajoso, pero se requerirá recolectar cierta información antes de que se pueda obtener una buena aproximación a la inversa del Jacobiano, y el proceso llega a ser -- esencialmente una iteración del método de Newton. Por esta razón el valor inicial del vector x no parece ser un punto muy crítico. Lo anterior es válido para el caso de funciones unimodales principalmente.

Cuando se está trabajando con funciones multimodales la selección del punto inicial es sumamente crítico, pues el punto estacionario que se encuentre dependerá del valor inicial del vector x .

Debido a que no hay ningún método que permita determinar con certeza si una función es unimodal o multimodal, lo que se hace en -- todos los casos es trabajar el proceso de optimización como una sub-optimización y considerar el punto encontrado como un óptimo local, y como tal manejarlo. No hay ningún método que asegure que el óptimo local encontrado es un óptimo absoluto.

En la práctica se recomienda empezar el proceso en diferentes puntos iniciales y dejar que las iteraciones procedan hasta encontrar el punto estacionario. Si los puntos encontrados coinciden, se hace la conjetura que la función es unimodal. Si los puntos encontrados no coinciden, puede ser que se trate de una función multimodal o que el método se haya detenido debido a sus limitaciones propias. En este caso, una de las metodologías a seguir sería explorar alrededor - del punto para determinar si en realidad se trata de un punto esta-- cionario, o si el método se detuvo debido a sus limitaciones. En algunos casos es conveniente trabajar con mayor precisión (mayor número de cifras decimales).

El mejor procedimiento para evaluar la matriz inicial H_1 parece que depende considerablemente del problema. Broyden (2) indicó que H_1 fue siempre determinada calculando el Jacobiano por aproximación mediante diferencias finitas ($n + 1$ evaluación funcionales) y - encontrando su inversa.

Barnes (1) sugirió que podría resultar una ventaja del hecho de empezar con el Jacobiano de algún problema similar resuelto pre--

viamente. Este procedimiento no parece producir ninguna ventaja significativa y podría resultar en un error al suponer equivocadamente que un problema es similar a otro cuando en realidad no lo es.

Fletcher y Powell (4) indicaron éxito del procedimiento usando la matriz identidad para inicializar el proceso, independientemente del valor de n ó de la naturaleza del proceso. Para ciertas clases de ecuaciones aparentemente es una buena selección. Esto se basa en el hecho de que al empezar las iteraciones gran parte de la información se desperdicia de cualquier manera.

Forma de evitar que el método diverja.- Ya se ha mencionado que uno de los problemas prácticos del método de Newton es su posible falla de convergencia cuando se parte de algunas soluciones iniciales. Aunque no es posible garantizar la convergencia, puede prevenirse la divergencia asegurando que alguna norma del vector de funciones f sea una función no creciente de i .

En la parte computacional, una vez que se ha calculado el vector direccional p_i usando la ecuación 16, x está constreñida a satisfacer la ecuación 7 hasta que x_{i+1} haya sido determinado. En este caso f_i y su norma llegan a ser sólo funciones de t . El valor t_i de t que se usa para determinar x_{i+1} puede escogerse en varias formas, y dos de ellas se describen a continuación.

En el primer método, t_i se escoge de forma de minimizar la norma de f_{i+1} . Esta es, quizá, la selección más obvia puesto que da

la reducción inmediata más grande de la norma y de aquí, en algún -- sentido, la mayor mejoría a la aproximación de la solución. Sin em-- bargo, para lograr esto el vector f necesita ser evaluado varias ve-- ces lo cual significa un aumento en el trabajo computacional requeri-- do comparado con la estrategia alterna de seleccionar un valor de t_i que meramente reduzca la norma. Frecuentemente el valor unitario -- del método de Newton es suficiente, pero si no lo es, será menos la-- borioso reducir la norma que minimizarla. Reduciendo la norma no se obtiene, por supuesto, una mejora inmediata tan buena como la que se obtendría con minimización de norma, pero esto significa menor traba-- jo al corregir la matriz H_i .

Los méritos relativos de estas estrategias opuestas -la de ob-- tener la mayor mejoría posible a la solución durante un paso a la de usar la nueva información tan pronto como sea posible para corregir H_i y calcular una nueva x_{i+1} - son difíciles de establecer desde un punto de vista teórico únicamente, y debe recurrirse a experimentación numérica.

Broyden (2) ha indicado que, en general, es mejor estrategia usar reducción de la norma que minimización de la misma.

El criterio usado en este trabajo para seleccionar el punto - x_{i+1} es la reducción de la norma del vector f .

También se utiliza como criterio para escoger el punto x_{i+1} , el hecho de encontrar un mejor valor para la función objetivo. Es -

decir que para escoger un punto x_{i+1} considerado como mejor solución, se utilizan dos criterios (el que se obtenga primero): reducción en la norma, o encontrar un valor menor de la función objetivo, ya que se está buscando un mínimo.

Corrección a la Matriz H.- Cuando se ha encontrado una reducción a la norma de f , se hace la corrección a la matriz H_i de acuerdo a la ecuación 47. Sin embargo, es conveniente fijar un número de iteraciones para encontrar una reducción en la norma. Si este número se excede y no se encuentra una aproximación mejor a la solución, el mejor punto obtenido en ese momento puede usarse para hacer la corrección a H_i . Sin embargo en esas circunstancias se retiene el punto básico.

Aunque esto a menudo es un procedimiento eficiente, se tiene el peligro de que si la matriz es corregida con un punto muy malo -uno con una norma mucho más grande que la del punto base- puede --- afectar en tal forma la matriz que no se pueda recuperar por correcciones posteriores.

Un procedimiento alternativo que puede usarse cuando se tiene un punto malo para hacer la corrección sería encontrar una nueva dirección de búsqueda por otro método y buscar un punto mejor. Cuando esto se ha logrado, volver al método inicial.

Aún otra alternativa es escoger otro valor inicial del vector x y empezar de nuevo el procedimiento. Esta última alternativa se usa en el presente trabajo.

VII.- PARTE EXPERIMENTAL

Como un ejemplo del uso del método de Fletcher y Powell se es cogió encontrar el punto crítico (mínimo) de la función de los errores de predicción de ventas al usar el método de Promedios Movibles Ponderados Exponencialmente desarrollado por Winters (8, 16). La ra zón de esta selección es que no se ha reportado en la literatura el uso de ningún método de optimización, excepto la mención de Winters, sin ningún dato, (8, 16), al uso del método del gradiente, para en-contrar el mínimo del error del método de promedios movibles ponderados exponencialmente.

Los datos numéricos usados en este trabajo son las ventas men suales de utensilios de cocina fabricados por Wearever Inc., subsidiaria de Aluminium Company of America, usadas también por Winters. Los datos fueron tomados de la gráfica respectiva reportada en (16), por lo que los resultados no serán exactamente iguales a los de Winters, pues se trabajó con una aproximación a dichos datos.

Método de Winters.- El método de promedios movibles ponderados exponencialmente desarrollado por Winters consiste en extrapolar una serie de tiempo haciendo una corrección al pronóstico anterior -- (en tiempo) proporcional al último error observado de la predicción (la diferencia entre el valor real y el valor pronosticado). Se supone que el pronóstico está cambiando de un período al siguiente en una cantidad proporcional al último error observado.

Una serie de tiempo puede descomponerse en tres elementos: un elemento constante, un elemento que varía en función del tiempo -conocido como tendencia-, y un elemento cíclico -conocido como estacional.

Para hacer un pronóstico mediante el método de Winters se determinan los tres elementos antes mencionados para la serie de tiempo bajo estudio (datos históricos).

La combinación de los tres elementos nos da el pronóstico del siguiente período. Después de que se ha hecho el pronóstico y una vez que se obtiene el valor real de la variable pronosticada, se corrigen los tres elementos que forman la serie de tiempo haciendo un promedio ponderado entre el valor actual y el valor del elemento calculado con los datos anteriores.

La calidad del pronóstico depende de la determinación de la ponderación que se haya dado a las observaciones pasadas al estimar cada uno de los elementos que integran la serie de tiempo.

Para medir la calidad del pronóstico pueden usarse diferentes criterios. Uno de los criterios más razonables es determinar la desviación estándar del error del pronóstico. Deben seleccionarse ---- aquellos factores de ponderación que hagan mínima dicha desviación.

Procedimiento del método de Winters (8, 16).

Hay tres puntos esenciales que deben determinarse para hacer

un pronóstico usando el método de Winters. Estos son:

- a.- El cálculo de los valores iniciales de los elementos constante, tendencia y estacional.
- b.- La determinación de los factores de ponderación.
- c.- La selección del modelo usado para hacer el pronóstico.

Para la evaluación de los dos primeros puntos, la serie de tiempo se divide en dos partes. La primera parte (los datos más antiguos) se usa para calcular los valores iniciales del elemento constante (S_{last}), la tendencia (A_{last}) y el elemento estacional (F_t). La última parte de los datos se usa para determinar los factores de ponderación.

La selección del modelo usado para el pronóstico se basa en la naturaleza de los datos. Tanto la tendencia como el factor estacional pueden ser aditivos o multiplicativos. En este trabajo se es cogió un modelo con tendencia aditiva y factor estacional multiplicativo.

A continuación se describe la forma de calcular los valores iniciales de los elementos que integran una serie de tiempo, usando la primera parte de los datos históricos. Se supone que la serie de tiempo se refiere a datos de ventas.

- 1.- Se calculan las ventas promedio para cada año, V_i .
- 2.- La estimación inicial de la tendencia se calcula con la fór--

mula

$$A_{last} = \frac{V_F - V_1}{m} \quad (52)$$

- 3.- Como la estimación inicial del elemento constante se usa el promedio de las ventas del primer año.

$$S_{last} = V_1 \quad (53)$$

- 4.- Los factores estacionales son calculados para cada período como la relación de ventas actuales para el período a las ventas anuales promedio corregidas por el factor estacional, y por la tendencia.

$$F_t = \frac{\text{Ventas}_{j,i}}{V_i - \left\{ \left[\frac{(L+1)}{2} \right] - j \right\} A_{last}} \quad (54)$$

i se refiere al año, j se refiere al mes.

De aquí

$$t = (i - 1) L + j \quad (55)$$

- 5.- Se promedian los factores estacionales para los períodos (meses) correspondientes con el objeto de obtener un factor estacional para cada mes en el año.
- 6.- Finalmente los factores estacionales se normalizan para que sumen L; para 12 períodos en un año.

$$\sum_{t=1}^{12} F_t = 12 \quad (56)$$

Este paso es necesario para asegurar que en un ciclo los elementos estacionales hagan solamente ajustes estacionales y no aumenten o disminuyan el nivel promedio de ventas.

A continuación se seleccionan valores arbitrarios de los factores de ponderación y se usa el modelo matemático para el pronóstico con la primera parte de los datos, pero no se registra ningún pronóstico. Los valores de S_{last} , A_{last} y F_t obtenidos en esta forma se consideran los valores iniciales para la segunda parte de los datos. Los valores arbitrarios de los factores de ponderación son el punto inicial de los métodos cuasi-newtonianos de optimización.

Después se usa el modelo con la segunda parte de los datos haciendo el pronóstico y calculando los errores y su desviación estándar. En este trabajo se busca el valor mínimo de la desviación haciendo uso del método de Fletcher y Powell.

El modelo matemático para el pronóstico usado en este trabajo es dado por la expresión

$$PROM = (S_{last} + A_{last}) F_{t-L} \quad (57)$$

y sólo se usa para hacer el pronóstico para el siguiente período. Esta expresión puede modificarse para hacer el pronóstico para varios

períodos en el futuro.

El procedimiento para obtener el pronóstico y hacer las correcciones a cada uno de los elementos que forman la serie de tiempo es el siguiente:

- 1.- Al final del período t , se registran las ventas reales durante ese período.
- 2.- El elemento constante se calcula con la siguiente ecuación -- usando el elemento constante del período anterior, la tendencia y el factor estacional calculados durante el ciclo anterior.

$$S_{\text{last}} = x_1 \frac{\text{Ventas}}{F_{t-L}} + (1 - x_1) (S_{\text{last-1}} + A_{\text{last-1}}) \quad (58)$$

- 3.- Se calcula el elemento estacional F_t , que puede ahora reemplazar a la estimación previa de dicho elemento para ese período

$$F_t = x_2 \frac{\text{Ventas}}{S_{\text{last}}} + (1 - x_2) F_{t-L} \quad (59)$$

- 4.- Se hace la corrección a la tendencia

$$A_{\text{last}} = x_3 (S_{\text{last}} - S_{\text{last-1}}) + (1 - x_3) A_{t-1} \quad (60)$$

- 5.- El pronóstico se hace mediante la ecuación 57.

6.- El error del pronóstico es dado por la expresión:

$$\text{Error} = \text{Ventas} - \text{Pronóstico} \quad (61)$$

7.- La desviación estándar del error se calcula mediante la expresión

$$\text{desv. std.} = \sqrt{\frac{\text{error}^2}{N-1}} \quad (62)$$

N = número de datos pronosticados.

VIII.- RESULTADOS Y EVALUACION DEL METODO DE
FLETCHER Y POWELL.

Se utilizó el método de Fletcher y Powell para encontrar la mínima desviación estándar del error del pronóstico de las ventas de utensilios de cocina usando el método de promedios movibles ponderados exponencialmente. Se escribió un programa usando el super lenguaje KINGSTON FORTRAN II, el cual se presenta en el Apéndice I y se trabajó en la computadora IBM 1620 del ITESM.

La selección de los valores iniciales de los factores de ponderación se hizo arbitrariamente. Se escogieron varios puntos iniciales y se corrió el programa hasta obtener resultados, los cuales se presentan en la Tabla 1.

T A B L A 1

RESULTADOS OBTENIDOS CON EL METODO DE
FLETCHER Y POWELL

Corrida No.	Valores Iniciales			Punto Estacionario			No. de Eva luaciones de la Fun- ción Obje- tivo	Desv. Están dar	Norma Vector Solución
	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3			
1	0.0	0.0	0.0	0.932	0.097	0.004	40	895	240
2	0.8	0.8	0.8	0.106	0.540	0.272	40	663	237
3	0.2	0.4	0.6	0.099	0.753	0.279	32	650	145
4	0.4	0.4	0.4	0.145	0.936	0.321	132	660	436
5	0.6	0.6	0.6	0.748	0.534	0.636	12	997	696
6	0.2	0.2	0.2	0.095	0.744	0.286	40	650	16

Los criterios más usados para evaluar la eficiencia de un algoritmo pueden ser la exactitud de la solución, el tiempo (de computadora) necesario para llegar a la solución y la cantidad de memoria necesaria para el programa. Frecuentemente el segundo de los criterios está en conflicto con el primero y el tercero y por lo tanto es necesario hacer algunas suposiciones arbitrarias para poder comparar dos métodos computacionales.

En las comparaciones hechas en este trabajo se omiten los requerimientos de espacio en la memoria y sólo se consideran la exactitud y el tiempo. Debido a que el procesador usado no tiene provisión para medir el tiempo de procesado, se supone que el tiempo de cómputo es directamente proporcional al número de evaluaciones de la función objetivo necesarias para llegar a la solución y que la constante de proporcionalidad es la misma para todos los métodos.

A continuación se presentan algunos comentarios sobre los resultados obtenidos usando el Método de Fletcher y Powell y posteriormente una comparación con los resultados obtenidos mediante otros métodos.

Con 4 de los 6 puntos iniciales escogidos arbitrariamente se obtiene prácticamente la misma respuesta (corridas 2, 3, 4 y 6). El número de evaluaciones de la función objetivo para llegar a la respuesta dependen de la selección del punto inicial, siendo en este ejemplo un mínimo de 12 y un máximo de 132 (promedio 61).

El punto con menor valor de la función (desviación estándar -

= 650) y menor norma es el resultante de la corrida 3, $x_1 = 0.099$, $x_2 = 0.75$ y $x_3 = 0.279$.

Para los otros dos puntos encontrados (corridas 1 y 5) se trabajó el programa con mayor precisión (12 cifras decimales en lugar de 8), y dejando el mismo límite de mejoría de la desviación estándar (0.1%). Se encontró que en ambos casos se continúan las iteraciones hasta que el método se detiene en otro punto. En ambos casos el valor de la desviación estándar para los puntos calculados con 12 cifras fue ligeramente menor que la calculada con 8 cifras. Los resultados parecen sugerir que el método se detuvo debido a sus propias limitaciones, o sea a que la mejoría para la desviación estándar fue menor que el 0.1% establecido. Se piensa que a igual resultado se hubiera llegado si, en vez de trabajar con mayor precisión se hubiera disminuído el límite de mejoría de la función objetivo.

El hecho de que el método se detenga en un punto diferente del estacionario probablemente se debe a que la función es muy plana en esa región.

Por lo tanto se recomienda tomar por lo menos tres iniciales y correr el programa hasta obtener los resultados. Si tres corridas o por lo menos dos llevan al mismo resultado, puede tomarse con cierta seguridad que se ha logrado el mínimo absoluto. De no ser así, se escogerán otros puntos iniciales para obtener mayor información.

Cuando la función estudiada no es unimodal, aún el procedimiento de escoger varios puntos iniciales puede dar en cada caso un valor diferente y no por eso puede concluirse que el método de optimización falle. En este caso se trata de puntos estacionarios locales. Entre los diferentes valores encontrados se selecciona el óptimo absoluto o dependiendo de la naturaleza del problema se hace una exploración más intensa de la función objetivo.

En el ejemplo estudiado, si se escogieran tres puntos iniciales, el número total de evaluaciones de la función objetivo necesarias para encontrar al punto estacionario son 183.

Para evaluar la eficiencia del método de Fletcher y Powell se utilizaron otros dos métodos.

- a).- Método de evaluación de la función objetivo para todas las combinaciones posibles de los factores de ponderación en incrementos determinados.
- b).- Método de Friedman y Savage (5, 15).

De acuerdo con el primer método y dado que los factores de ponderación sólo pueden tomar valores comprendidos entre 0 y 1, se evaluó la función objetivo para todas las diferentes combinaciones de las variables independientes dando incrementos a dichas variables de 0.2 unidades. Los resultados se presentan en la Tabla 2. De esta tabla se concluye que se trata de una función con mínimo absoluto en $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.6$ y $x_3 = 0.2$, y con un valor de la desviación están

dar de 702. Para llegar a este resultado se necesitaron 216 evaluaciones de la función objetivo. Una vez obtenida la localización aproximada del punto estacionario es conveniente evaluar la función objetivo en el área seleccionada dando incrementos menores a las variables independientes para localizar el punto con mayor exactitud. Esto aumenta el número necesario de evaluaciones de la función objetivo.

Se observa que el mínimo encontrado mediante el método de Fletcher y Powell es menor que el encontrado por este método (error = 8%).

La diferencia entre el número de evaluaciones de la función objetivo usando este método y el de Fletcher y Powell para el ejemplo estudiado (tres variables independientes) no es muy grande. Pero cuando se trabaja con mayor número de variables independientes, el número de posibles combinaciones de los valores de dichas variables crece geométricamente, por ejemplo para 4 variables independientes, el número de evaluaciones de la función objetivo necesarias si se diese incrementos de 0.2 unidades sería de 1,296 y para 5 variables independientes sería de 7,776, mientras que con el método de Fletcher y Powell el número de evaluaciones necesarias crece sólo linealmente con el número de variables (15). Por lo tanto el método de Fletcher y Powell es más eficiente mientras mayor sea el número de variables involucradas.

TABLA 2

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO PARA DIFERENTES COMBINACIONES DE

LOS FACTORES DE PONDERACION

x_2	x_3					
	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$x_1 = 0.0$						
0.0	2,041	2,041	2,041	2,041	2,041	2,041
0.2	1,532	1,532	1,532	1,532	1,532	1,532
0.4	1,208	1,208	1,208	1,208	1,208	1,208
0.6	1,018	1,018	1,018	1,018	1,018	1,018
0.8	920	920	920	920	920	920
1.0	893	893	893	893	893	893
$x_1 = 0.2$						
0.0	921	839	896	955	1,037	1,112
0.2	833	775	830	910	1,109	1,445
0.4	775	728	770	909	1,631	3,622
0.6	747	702	740	1,172	2,948	9,028
0.8	752	703	818	14,754	25,656	16,579
1.0	803	771	1,261	1,263	21,732	93,178
$x_1 = 0.4$						
0.0	872	882	936	967	970	970
0.2	825	852	933	996	1,004	991
0.4	802	854	997	1,138	1,157	1,086
0.6	804	888	1,142	1,494	1,665	1,421
0.8	837	978	1,433	4,534	41,300	4,379
1.0	931	1,222	2,197	2,284	28,085	12,286

TABLA 2
(Continuación)

VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO PARA DIFERENTES COMBINACIONES DE LOS -
FACTORES DE PONDERACION.

	x_3					
	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	$x_1 = 0.6$					
x_2						
0.0	866	894	931	951	971	999
0.2	841	884	930	950	963	984
0.4	833	893	951	960	954	961
0.6	841	924	999	997	965	961
0.8	967	983	1,089	1,074	1,007	983
1.0	920	1,089	1,252	1,216	1,095	1,055
	$x_1 = 0.8$					
0.0	876	917	961	1,005	1,064	1,143
0.2	868	915	960	1,003	1,058	1,135
0.4	867	920	966	1,006	1,064	1,148
0.6	872	932	978	1,019	1,083	1,187
0.8	885	953	1,000	1,043	1,124	1,269
1.0	907	984	1,035	1,084	1,193	1,416
	$x_1 = 1.0$					
0.0	910	974	1,052	1,153	1,291	1,473
0.2	910	974	1,052	1,153	1,291	1,473
0.4	910	974	1,052	1,153	1,291	1,473
0.6	910	974	1,052	1,153	1,291	1,473
0.8	910	974	1,052	1,153	1,291	1,473
1.0	910	974	1,052	1,153	1,291	1,473

El método de Friedman y Savage (5, 15) consiste en seleccionar al azar un punto inicial y dar incrementos a una de las variables independientes mientras se mantienen constantes el resto, hasta que no se obtenga una mejoría en la función objetivo. En ese caso - dar incrementos a otra de las variables y así sucesivamente hasta no obtener ninguna mejoría con incrementos en las variables. El programa utilizado para este método se presenta en el Apéndice 2 y los resultados en la Tabla 3.

De la tabla anterior se concluye que este método no es efectivo para encontrar el punto estacionario de la función bajo estudio. Este método sólo es efectivo para superficies de respuesta esféricas o elípticas, pero falla completamente cuando la superficie de respuesta tiene contornos agudos, porque una vez que se ha llegado a algún punto sobre el contorno agudo es incapaz de moverse diagonalmente para encontrar un punto mejor (15).

TABLA 3

RESULTADOS OBTENIDOS CON EL METODO DE FRIEDMAN Y SAVAGE.

Corrida No.	Valores Iniciales			Valores Finales			Incre- mento *	No. de Eva- luaciones de la Fun- ción Obje- tivo	Desvia- ción Es- tandar
	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3			
1	0.0	0.0	0.0				+		
2	0.8	0.8	0.8	0.6	0.4	0.8	-	12	954
3	0.2	0.4	0.6	0.2	0.4	0.6	+	4	909
4	0.4	0.4	0.4	0.7	0.4	0.5	+	7	959
5	0.6	0.6	0.6	0.7	0.6	0.6	+	5	982
6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.1	0.6	-	7	950
7	0.2	0.2	0.2	0.2	0.4	0.6	+		

* Se marca con + cuando el incremento que se dá a las variables es positivo y con - cuando el incremento es negativo.

IX.- COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

Cuando se trata de localizar el o los puntos estacionarios -- de funciones implícitas el Método de Fletcher y Powell ha mostrado -- ser el más eficiente de los métodos probados, pues no solo se ha lle-- gado al resultado en un número menor de evaluaciones de la función -- objetivo, sino que se obtuvo el menor valor de la desviación estándar.

El método se vuelve más eficiente con relación a los otros -- métodos probados a medida que aumenta el número de variables involucradas.

El método de Fletcher y Powell trabajó bien y se llegó al mismo punto estacionario a pesar de haber escogido muy diferentes puntos iniciales. Sin embargo, el método tiene sus limitaciones, principalmente cuando se trabaja con superficies muy planas, pues puede ocurrir que el método se detenga antes de llegar al punto estacionario, que fué lo que pasó en el ejemplo estudiado.

El método de Friedman y Savage falla totalmente en el ejemplo estudiado, debido a que se trata de una superficie de respuesta con contornos muy agudos. No se recomienda el uso de este método en optimización (15).

La técnica de hacer la corrección del vector solución tan -- pronto se encuentra una norma mejor trabajó bien, haciendo que el número de evaluaciones de la función objetivo no fuera muy elevado.

A pesar de que se fijó un número de iteraciones para encontrar una reducción en la norma del vector f , en el ejemplo estudiado nunca se llegó al límite establecido (50 iteraciones).

Como una extensión a este trabajo se sugiere probar otros métodos de optimización para tratar de encontrar algún otro con alguna ventaja sobre el presente.

Debido a que hasta el presente no hay forma de determinar analíticamente si una superficie de respuesta es unimodal o no, es muy conveniente estudiar este punto pues es de primordial importancia -- para las técnicas de optimización.

X.- BIBLIOGRAFIA

- 1.- Barnes, J.G.P., "An Algorithm for Solving Nonlinear Equations Based on the Secant Method", Computer Journal, 8, No. 1, 66 (1965).
- 2.- Broyden, C.G., "A Class of Methods for Solving Nonlinear Simultaneous Equations", Math. of Computations, 19, No. 92, -- 577 (1965).
- 3.- Díaz, J.A., "Kingston Fortran II", I.T.E.S.M. (1967).
- 4.- Fletcher, R. y M.J.D. Powell, "A Rapidly Convergent Descent - Method for Minimization", Computer Journal, 6, 163 (1963).
- 5.- Friedman, M. y L.S. Savage, "Planning Experiments Seeking Maxima" Selected Techniques of Statistical Analysis, C. Weisenhart, M.W. Hastay y W.A. Wallis, eds., McGraw-Hill Book Co., - Inc., New York (1947) citado por Wilde.
- 6.- Hamming, R.W., "Numerical Methods for Scientists and Engineers" McGraw-Hill Book Co. Inc., Tokyo, 359 (1962).
- 7.- Henrici, P., "Elements of Numerical Analysis", John Wiley & Sons, Inc., New York, 105 (1964).
- 8.- Holt, Ch. C., F. Modigliani, J.F. Muth y H.A. Simon, "Planning Production, Inventories, and Work Force", Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 258 (1960).
- 9.- Householder, A.S., "Principles of Numerical Analysis", McGraw-Hill Book, Co., New York, 135 (1953).

- 10.- Mc Calla, T.R., "Introduction to Numerical Methods and Fortran Programming", John Wiley & Sons, Inc., New York, 81-99 - (1967).
- 11.- Mc Cracken, D.D. y W.S. Dorn, "Numerical Methods and Fortran Programming," John Wiley and Sons, Inc., New York, 133-145, -- (1964).
- 12.- Muth, J.F., "Optimal Properties of Exponentially Weighted -- Forecasts", Journal of the American Statistical Association 55, 299-306 (1960).
- 13.- Rosen, E.M., "A Review of Quasi-Newton Methods in Non Linear Equations Solving and Unconstrained Optimization", Proceedings - A.C.M. National Meeting, 37, (1966).
- 14.- Teichroew, D., "An Introduction to Management Science. Deterministic Models", John Wiley & Sons, Inc., New York (1964).
- 15.- Wilde, D.J. y C.S. Beightler, "Foundations of Optimization", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 215-344 (1967).
- 16.- Winters, P.R. "Forecasting Sales by Exponentially Weighted Moving Averages", Man. Science, 6, No. 3, 324 (1960).

APENDICE 1

```

C
$ JOB
$ LIST
C MARIA ESPERANZA BURES
C METODO DE FLETCHER Y POWELL
C ABSUMA=NORMA DEL VECTOR PDVAR USADA PARA MEDIR MEJORIA DEL VECTOR X
C ALA,T=TENDENCIA
C APDVAR=PRIMERA DERIVADA DE LA FUNCION OBJETIVO EN EL PUNTO AX
C AX=POSIBLE MEJOR APROXIMACION A X
C DELTA=INCREMENTO A X PARA ESTIMAR LAS PRIMERAS DERIVADAS PARCIALES
C E=LIMITE DE MEJORIA DE LA DESV. STD.
C ERR=ERROR DE LA PREDICCION
C N=NO. TOTAL DE DATOS
C FT=ELEMENTO ESTACIONAL
C H=MATRIZ APROXIMACION DEL JACOBIANO
C M=NO. DE DATOS PRIMERA PARTE DE LA SERIE
C L=NO. DE PERIODOS QUE FORMAN UN CICLO ESTACIONAL
C P=VECTOR DIRECCION=H*PDVAR
C PDVAR=PRIMERA DERIVADA DE LA FUNCION OBJETIVO EN EL PUNTO X
C PRON=PRONOSTICO
C SLAST=ELEMENTO CONSTANTE
C T=ESCALAR PARA EVITAR QUE EL METODO DIVERGA
C V=VENTAS=ELEMENTOS DE LA SERIE DE TIEMPO
C VTAS=PROMEDIO ANUAL DE VENTAS
C VAR=DESVIACION ESTANDAR
C X=FACTOR DE PONDERACION
C Y=DIFERENCIA DE PRIMERAS DERIVADAS
C TODOS LOS DATOS DE ENTRADA ESTAN DADOS EN FORMATO LIBRE O SEA
DIMENSION X(3),PDVAR(3),H(3,3),AX(3),HYYT(3,3),P(3)
DIMENSION Y(3),PPT(3,3),HY(3),APDVAR(3),AFT(30)
DIMENSION V(100),VTAS(30),FT(30),DX(3),AAX(3)
DIMENSION HYYTH(3,3)
FS1=3HFT(
FS2=2H)=
PRINT 421
PUNCH 421
421 FORMAT(1H1,33X,6H DATOS)
READ 450,((H(I,J),J=1,3),I=1,3)
PRINT 433
PUNCH 433
433 FORMAT(1H0,28X,17HMATRIZ INICIAL H1)
PRINT 450,((H(I,J),J=1,3),I=1,3)
PUNCH 450,((H(I,J),J=1,3),I=1,3)
450 FORMAT(1H ,10X,4E14.8)
READ 500,E,DELTA,EE
500 FORMAT(5X,F5.3,F6.4,F14.12)
PRINT 430,E,DELTA,EE
PUNCH 430,E,DELTA,EE
430 FCRMAT(1H0,10X,2HE=,F10.8,3X,6HDELTA=,F10.8,3X,3HEE=,F10.8)

```

C METODO DE PROMEDIOS MOVIBLES PONDERADOS EXPONENCIALMENTE

```
READ 501,N,M,L
501 FORMAT(6X,I2,1X,I2,1X,I2)
PRINT 301,N,M,L
PUNCH 301,N,M,L
301 FORMAT(10X,2HN=,I2,5X,2HM=,I2,5X,2HL=,I2)
READ 451,(V(I),I=1,N)
PRINT 402
PUNCH 402
402 FORMAT(28X,16H SERIE DE TIEMPO)
PRINT 451,(V(I),I=1,N)
PUNCH 451,(V(I),I=1,N)
451 FORMAT(1H ,10X,4E14.8)
AL=L
AM=M
AN=N
```

C CALCULO DE LOS VALORES INICIALES

```
K=0
I=1
232 VTAS(I)=0.
230 K=K+1
VTAS(I)=VTAS(I)+V(K)
IF(K-I*L)230,231,231
231 VTAS(I)=VTAS(I)/AI
IF(K-M)200,233,233
200 I=I+1
GO TO 232
233 PRINT 420
PUNCH 420
420 FORMAT(1H0,30X,11H RESULTADOS)
PRINT 401
PUNCH 401
401 FORMAT(1H0,23X,27H PROMEDIO DE VENTAS ANUALES)
MA=M/L
PRINT 452T(VTAS(I),I=1,MA)
PUNCH 452,(VTAS(I),I=1,MA)
452 FORMAT(1H ,10X,4E14.8)
ALAST=(VTAS(MA)-VTAS(1))/(AM-AL)
SLAST=VTAS(1)
PRINT 403,SLAST,AI AST
PUNCH 403,SLAST,AI AST
403 FORMAT(10X,7H SLAST=,F16.8,5X,7H ALAST=,F16.8)
```

C CALCULO DEL FACTOR ESTACIONAL

```
DO 217 I=1,L
FT(I)=0.
217 CONTINUE
K=0
DO 202 J=1,M,L
K=K+1
DO 202 I= 1,L
```

```
AI=I
F=(L+1)/2
JJ=J+I-1
FT(I)=FT(I)+(V(JJ))/(VTAS(K)-(F-AI))*ALAST
202 CONTINUE
DO 204 I=1,L
FT(I)=FT(I)/(AM/AI)
204 CONTINUE
C NORMALIZACION DEL FACTOR ESTACIONAL
SUMAFT=0.
DO 209 I=1,L
SUMAFT=SUMAFT+FT(I)
209 CONTINUE
U=AL/SUMAFT
DO 210 I=1,L
FT(I)=FT(I)*U
AFT(I)=FT(I)
210 CONTINUE
PRINT 404,(FS1,I,FS2,FT(I),I=1,L)
PUNCH 404,(FS1,I,FS2,FT(I),I=1,L)
404 FORMAT(1H ,10X,3(2X,A3,I2,A2,F12.8))
ASLAST=SLAST
AALAST=ALAST
22 READ 502,(X(I),I=1,3)
502 FORMAT(5X,3F3.1)
PRINT 415,(X(I),I=1,3)
PUNCH 415,(X(I),I=1,3)
415 FORMAT(1H0,10X,5HX(1)=,F10.8,2X,5HX(2)=,F10.8,2X,5HX(3)=,F10.8)
ABSUM=0.
SLAST=ASLAST
ALAST=AALAST
DO 42 J=1,L
FT(J)=AFT(J)
42 CONTINUE
CALL VARIAN(X,V,FT,SLAST,ALAST,L,M,N,VAR)
PRINT 104,VAR
PUNCH 104,VAR
104 FORMAT(10X,5H VAR=,E14.8)
DO 50 I=1,3
IF(I-2)2,3,4
2 DX(1)=X(1)+DELTA
DX(2)=X(2)
DX(3)=X(3)
GO TO 5
3 DX(1)=X(1)
DX(2)=X(2)+DELTA
DX(3)=X(3)
GO TO 5
4 DX(1)=X(1)
DX(2)=X(2)
```

```
DX(3)=X(3)+DELTA
5 DO 41 J=1,L
  FT(J)=AFT(J)
41 CONTINUE
  SLAST=ASLAST
  ALAST=AALAST
  CALL VARIAN(DX,V,FT,SLAST,ALAST,L,M,N,DVAR)
  PRINT 320,DVAR
  PUNCH 320,DVAR
320 FORMAT(1H ,10X,5HDVAR=,E14.8)
  PDVAR(I)=(DVAR-VAR)/DELTA
  ABSUM=ABSUM+ABS(PDVAR(I))
50 CONTINUE
  PRINT 304,(PDVAR(I),I=1,3)
  PUNCH 304,(PDVAR(I),I=1,3)
304 FORMAT(1H0,10X,9HPDVAR(1)=,F10.4,2X,9HPDVAR(2)=,F10.4,2X,
19HPDVAR(3)=,F10.4)
  PRINT 305,ABSUM
  PUNCH 305,ABSUM
305 FORMAT(1H0,10X,6HABSUM=,E14.8)
26 DO 7 I=1,3
  P(I)=0.
  DO 7J=1,3
  P(I)=P(I)+H(I,J)*PDVAR(J)
7 CONTINUE
  PRINT 306,(P(I),I=1,3)
  PUNCH 306,(P(I),I=1,3)
306 FORMAT(1H0,10X,5HP(1)=,E14.8,2X,5HP(2)=,E14.8,2X,5HP(3)=,E14.8)
  T=2.
64 T=T*.5
  IF(ABS(T)-EE)60,61,61
61 CONTINUE
  DO 6 I=1,3
  AX(I)=X(I)-T*P(I)
  IF(AX(I)-0.)43,6,55
55 IF(AX(I)-1.)6,6,43
43 PRINT 311
  PUNCH 311
311 FORMAT(1H ,10X,17HX FUERA DEL RANGO)
  GO TO 64
6 CONTINUE
  PRINT 434,(AX(I),I=1,3)
  PUNCH 434,(AX(I),I=1,3)
434 FORMAT(1H0,10X,6HAX(1)=,F10.8,2X,6HAX(2)=,F10.8,2X,
16HAX(3)=,F10.8)
  SLAST=ASLAST
  ALAST=AALAST
  DO 52 J=1,L
  FT(J)=AFT(J)
52 CONTINUE
```

```
CALL VARIAN(AX,V,FT,SLAST,ALAST,L,M,N,AVAR)
PRINT 105,AVAR
PUNCH 105,AVAR
105 FORMAT(1H ,10X,5HAVAR=,E14.8)
C ESTIMACION DE LAS DERIVADAS PARCIALES
ABSUMA=0.
DO 47 I=1,3
  IF(I-2)10,12,30
10  AAX(I)=AX(I)+DELTA
    AAX(2)=AX(2)
    AAX(3)=AX(3)
    GO TO 31
12  AAX(1)=AX(1)
    AAX(2)=AX(2)+DELTA
    AAX(3)=AX(3)
    GO TO 31
30  AAX(1)=AX(1)
    AAX(2)=AX(2)
    AAX(3)=AX(3)+DELTA
31  DO 51 J=1,L
    FT(J)=AFT(J)
51  CONT+NUE
    ALAST=AALAST
    SLAST=ASLAST
    CALL VARIAN(AAX,V,FT,SLAST,ALAST,L,M,N,AAVAR)
    PRINT 106,AAVAR
    PUNCH 106,AAVAR
106 FORMAT(1H ,10X,6HAAVAR=,E14.8)
    APDVAR(I)=(AAVAR-AVAR)/DELTA
    ABSUMA=ABSUMA+ABS(APDVAR(I))
47  CONTINUE
    PRINT 309,(APDVAR(I),I=1,3)
    PUNCH 309,(APDVAR(I),I=1,3)
309 FORMAT(1H0,10X,10HAPDVAR(1)=,F10.4,1X,10HAPDVAR(2)=,F10.4,1X,
110HAPDVAR(3)=,F10.4)
    PRINT 308,ABSUMA
    PUNCH 308,ABSUMA
308 FORMAT(1H0,10X,7HABSUMA=,E14.8)
    IF(VAR-AVAR)53,9,9
53  IF(ABSUMA-ABSUM)9,64,64
21  CONTINUE
    PRINT 100
    PUNCH 100
100 FORMAT (1H0,10X,27HESCOGER OTRO VECTOR INICIAL)
1  DO 57 I=1,3
    DO 57 J=1,3
    IF(I-J)58,59,58
59  H(I,J)=1.
    GO TO 57
58  H(I,J)=0.
```

```
57 CONTINUE
GO TO 22
60 IF(T)21,21,62
62 T=-2.
PRINT 63
PUNCH 63
63 FORMAT(1H0,10X,7HREVERSA)
GO TO 64
9 SUM=0.
DO 11 I=1,3
SUM=SUM+ABS(AX(I)-X(I))
X(I)=AX(I)
11 CONTINUE
IF(SUM-1.E-3)25,25,27
25 PRINT 437
PUNCH 437
437 FORMAT(1H0,28X,18HPUNTO ESTACIONARIO)
PRINT 435,(X(I),I=1,3)
PUNCH 435,(X(I),I=1,3)
435 FORMAT(1H0,10X,5HX(1)=,F10.8,2X,5HX(2)=,F10.8,2X,5HX(3)=,F10.8)
PRINT 309,(APDVAR(I),I=1,3)
PUNCH 309,(APDVAR(I),I=1,3)
PRINT 105,AVAR
PUNCH 105,AVAR
PRINT 103
PUNCH 103
103 FORMAT(1H0,10X,38HCONDICION NECESARIA PERO NO SUFICIENTE)
GO TO 1
27 PRINT 102
PUNCH 102
102 FORMAT(1H0,10X,20HENCONTRO UNA X MEJOR)
PRINT 415,(X(I),I=1,3)
PUNCH 415,(X(I),I=1,3)
ABSUM=ABSUMA
IF(((ABS(VAR-AVAR))/AVAR)-E)19,19,20
20 DO 24 I=1,3
Y(I)=APDVAR(I)-PDVAR(I)
PDVAR(I)=APDVAR(I)
24 CONTINUE
VAR=AVAR
DO 16 I= 1,3
HY(I)=0.
DO 16 J=1,3
HY(I)=HY(I)+H(I,J)*Y(J)
16 CONTINUE
PRINT 439,(Y(I),I=1,3)
PUNCH 439,(Y(I),I=1,3)
439 FORMAT(1H0,10X,5HY(1)=,E14.8,2X,5HY(2)=,E14.8,2X,5HY(3)=,E14.8)
YTHY=0.
PTY=0.
```



```
DO 13 I=1,3
YTHY=YTHY+HY(I)*Y(I)
PTY=PTY+P(I)*Y(I)
13 CONTINUE
DO 15 I=1,3
DO 15 J=1,3
PPT(I,J)=P(I)*P(J)*T/PTY
HYYT(I,J)=HY(I)*Y(J)/YTHY
15 CONTINUE
DO 70 I=1,3
DO 70 J=1,3
HYYTH(I,J)=0.
DO 70 K=1,3
HYYTH(I,J)=HYYTH(I,J)+HYYT(I,K)*H(K,J)
70 CONTINUE
DO 18 I=1,3
DO 18 J=1,3
H(I,J)=H(I,J)-PPT(I,J)-HYYTH(I,J)
18 CONTINUE
PRINT 444,((H(I,J),J=1,3),I=1,3)
PUNCH 444,((H(I,J),J=1,3),I=1,3)
444 FORMAT(1H0,10X,7HH(1,1)=,E11.4,2X,7HH(1,2)=,
1E11.4,2X,7HH(1,3)=,E11.4,/11X,7HH(2,1)=,E11.4,2X,7HH(2,2)=,E11.4,
12X,7HH(2,3)=,E11.4,/11X,7HH(3,1)=,E11.4,2X,7HH(3,2)=,E11.4,2X,
17HH(3,3)=,E11.4)
GO TO 26
19 PRINT 437
PUNCH 437
PRINT 415,(X(I),I=1,3)
PUNCH 415,(X(I),I=1,3)
PRINT 309,(APDVAR(I),I=1,3)
PUNCH 309,(APDVAR(I),I=1,3)
PRINT 105,AVAR
PUNCH 105,AVAR
28 CALL EXIT
END
EOJ
$
```

```
SUBROUTINE VARIAN(X,V,FT,SLAST,ALAST,L,M,N,VAR)
DIMENSION X(3),V(99),FT(30),PRON(99),ERR(99)
C CORRECCION DE LOS VALORES INICIALES
AM=M
AN=N
K=0
J=0
225 K=K+1
J=J+1
IF(J-L) 213,213,214
214 J=1
213 IF(K-M) 220,220,221
221 IND=J-12*(J/12)+1
PRON(K)=(VDESES+ALAST)*FT(IND)
ERR(K)=V(K)-PRON(K)
220 VDESES=(X(1)*V(K))/FT(J)+(1.-X(1))*(SLAST+ALAST)
FT(J)=(X(2)*V(K))/VDESES+(1.-X(2))*FT(J)
ALAST=X(3)*(VDESES-SLAST)+(1.-X(3))*ALAST
SLAST=VDESES
IF(K-N) 225,203,203
C CALCULO DE LA VARIANCIA
203 VAR=0.
MM=M+1
DO 216 K=MM,N
VAR=VAR+ERR(K)*ERR(K)
216 CONTINUE
VAR=SQRT(VAR/((AN-AM)-1.))
RETURN
END
```

1

DATOS

MATRIZ INICIAL H1

•10000000E+01	•00000000E+00	•00000000E+00	•00000000E+00
•10000000E+01	•00000000E+00	•00000000E+00	•00000000E+00
•10000000E+01			

E= .00100000 DELTA= .00010 EE= .00000005
 N=84 M=36 L=12

SERIE DE TIEMPO

•26500000E+04	•37600000E+04	•12800000E+04	•44000000E+04
•12800000E+04	•92000000E+03	•96000000E+03	•20000000E+03
•10200000E+04	•18800000E+04	•10400000E+04	•14800000E+04
•28800000E+04	•28000000E+04	•30800000E+04	•12800000E+04
•34000000E+03	•18800000E+04	•18800000E+04	•18400000E+04
•46500000E+04	•26500000E+04	•18000000E+04	•16750000E+04
•22500000E+04	•40000000E+04	•30500000E+04	•33500000E+04
•16800000E+04	•16000000E+04	•13500000E+04	•15250000E+04
•18000000E+04	•28000000E+04	•24750000E+04	•96000000E+03
•19000000E+04	•23250000E+04	•26500000E+04	•20000000E+04
•15250000E+04	•20000000E+04	•13500000E+04	•19250000E+04
•19250000E+04	•20400000E+04	•17000000E+04	•14500000E+04
•12800000E+04	•22000000E+04	•27250000E+04	•18500000E+04
•13000000E+04	•13500000E+04	•11000000E+04	•12000000E+04
•22000000E+04	•18000000E+04	•17000000E+04	•65000000E+03
•12800000E+04	•29800000E+04	•22000000E+04	•15250000E+04
•50000000E+03	•13500000E+04	•47000000E+03	•78000000E+03
•22000000E+04	•13500000E+04	•17500000E+04	•40000000E+03
•25000000E+03	•13500000E+04	•10250000E+04	•11250000E+04
•10250000E+04	•70000000E+03	•50000000E+03	•11250000E+04
•12750000E+04	•12600000E+04	•70000000E+03	•50000000E+03

RESULTADOS

PROMEDIO DE VENTAS ANUALES

•17391666E+04	•22295833E+04	•22366666E+04	
SLAST= 1739.16660000		ALAST= 20.72916600	
FT(1)= 1.27683130	FT(2)= 1.73866430	FT(3)= 1.16186450	
FT(4)= 1.53534300	FT(5)= .54674310	FT(6)= .69576565	
FT(7)= .66585625	FT(8)= .54013595	FT(9)= 1.15718120	
FT(10)= 1.17138000	FT(11)= .83519423	FT(12)= .67504062	

X(1)= .20000000 X(2)= .2000 X(3)= .20000000
 VAR= .77520936E+03
 DVAR= .77525942E+03
 DVAR= .77518182E+03
 DVAR= .77522537E+03

PDVAR(1)= 500.6000 PDVAR(2)= -275.4000 PDVAR(3)= 160.1000

ABSUM= .93610000E+03

P(1)= .50060000E+03 P(2)=-.27540000E+03 P(3)= .16010000E+03

X FUERA DEL RANGO
X FUERA DEL RANGO
X FUERA DEL RANGO
X FUERA DEL RANGO
X FUERA DEL RANGO
X FUERA DEL RANGO
X FUERA DEL RANGO
X FUERA DEL RANGO
X FUERA DEL RANGO
X FUERA DEL RANGO
X FUERA DEL RANGO
X FUERA DEL RANGO

AX(1)= .07778320 AX(2)= .26723633 AX(3)= .16091309

AVAR= .77944552E+03
AAVAR= .77931844E+03
AAVAR= .77941740E+03
AAVAR= .77941864E+03

APDVAR(1)=-1270.8000 APDVAR(2)= -281.2000 APDVAR(3)= -268.8000

ABSUMA= .18208000E+04

AX(1)= .13889160 AX(2)= .23361817 AX(3)= .18045654

AVAR= .74548070E+03
AAVAR= .74547971E+03
AAVAR= .74545067E+03
AAVAR= .74546070E+03

APDVAR(1)= -9.9000 APDVAR(2)= -300.3000 APDVAR(3)= -200.0000

ABSUMA= .51020000E+03

ENCONTRO UNA X MEJOR

X(1)= .13889160 X(2)= .23361817 X(3)= .18045654

Y(1)=-.51050000E+03 Y(2)=-.24900000E+02 Y(3)=-.36010000E+03

H(1,1)= .3334E+00 H(1,2)= .3257E-01 H(1,3)= -.4702E+00
H(2,1)= -.3257E-01 H(2,2)= .9984E+00 H(2,3)= -.2296E-01
H(3,1)= -.4702E+00 H(3,2)= .2296E-01 H(3,3)= .6683E+00

P(1)= .10052930E+03 P(2)=-.29491920E+03 P(3)=-.12210814E+03

X FUERA DEL RANGO
X FUERA DEL RANGO
X FUERA DEL RANGO

X FUERA DEL RANGO
X FUERA DEL RANGO
X FUERA DEL RANGO
X FUERA DEL RANGO
X FUERA DEL RANGO
X FUERA DEL RANGO
X FUERA DEL RANGO

AX(1)= .04071846 AX(2)= .52162520 AX(3)= .29970277
AVAR= .77962960E+03
AAVAR= .77935301E+03
AAVAR= .77961798E+03
AAVAR= .77962356E+03

APDVAR(1)=-2765.9000 APDVAR(2)= -116.2000 APDVAR(3)= -60.4000

ABSUMA= .29425000E+04

AX(1)= .08980503 AX(2)= .37762169 AX(3)= .24007966
AVAR= .71304294E+03
AAVAR= .71292481E+03
AAVAR= .71301899E+03
AAVAR= .71301170E+03

APDVAR(1)=-1181.3000 APDVAR(2)= -239.5000 APDVAR(3)= -312.4000

ABSUMA= .17332000E+04

ENCONTRO UNA X MEJOR

X(1)= .08980503 X(2)= .37762169 X(3)= .24007966

Y(1)=-.11714000E+04 Y(2)= .60800000E+02 Y(3)=-.11240000E+03

H(1,1)= .4493E-02 H(1,2)= .6555E-01 H(1,3)= -.1094E-01
H(2,1)= .6555E-01 H(2,2)= .9695E+00 H(2,3)= -.1600E+00
H(3,1)= -.1094E-01 H(3,2)= .1600E+00 H(3,3)= .2691E-01

P(1)=-.17590002E+02 P(2)=-.25963383E+03 P(3)= .42831958E+02

X FUERA DEL RANGO
X FUERA DEL RANGO
X FUERA DEL RANGO
X FUERA DEL RANGO
X FUERA DEL RANGO
X FUERA DEL RANGO
X FUERA DEL RANGO
X FUERA DEL RANGO
X FUERA DEL RANGO

AX(1)= .12416050 AX(2)= .88471901 AX(3)= .15642349

AVAR= .67524653E+03
AAVAR= .67524296E+03
AAVAR= .67525412E+03
AAVAR= .67520805E+03

APDVAR(1)= -35.7000 APDVAR(2)= 75.9000 APDVAR(3)= -384.8000

ABSUMA= .49640000E+03

ENCANTRO UNA X MEJOR

X(1)= .12416050 X(2)= .88471901 X(3)= .15642349

Y(1)= .11456000E+04 Y(2)= .31540000E+03 Y(3)=-.72400000E+02

H(1,1)= .4380E-04 H(1,2)= .6834E-04 H(1,3)= -.7917E-04
H(2,1)= -.6833E-04 H(2,2)= .1883E-02 H(2,3)= .1171E-03
H(3,1)= -.7915E-04 H(3,2)= .1170E-03 H(3,3)= .4129E-03

P(1)= .23715648E-01 P(2)= .10028832E+00 P(3)=-.14715909E+00

AX(1)= .10044485 AX(2)= .78443069 AX(3)= .30358258
AVAR= .65477836E+03
AAVAR= .65482080E+03
AAVAR= .65478370E+03
AAVAR= .65480050E+03

APDVAR(1)= 424.4000 APDVAR(2)= 53.4000 APDVAR(3)= 221.4000

ABSUMA= .69920000E+03

ENCANTRO UNA X MEJOR

X(1)= .10044485 X(2)= .78443069 X(3)= .30358258

Y(1)= .46010000E+03 Y(2)=-.22500000E+02 Y(3)= .60620000E+03

H(1,1)= .4482E-04 H(1,2)= .3946E-04 H(1,3)= -.7460E-04
H(2,1)= -.3944E-04 H(2,2)= .2008E-02 H(2,3)= -.6098E-04
H(3,1)= -.7460E-04 H(3,2)= .6097E-04 H(3,3)= .2971E-03

P(1)= .39684500E-03 P(2)= .76970544E-01 P(3)= .30864325E-01

AX(1)= .10004801 AX(2)= .70746015 AX(3)= .27271826
AVAR= .65119542E+03
AAVAR= .65119274E+03
AAVAR= .65119274E+03
AAVAR= .65119003E+03

APDVAR(1)= -26.8000 APDVAR(2)= -26.8000 APDVAR(3)= -53.9000

ABSUMA= .10750000E+03

ENCONTRO UNA X MEJOR

X(1)= .10004801 X(2)= .70746015 X(3)= .27271826

Y(1)=-.45120000E+03 Y(2)=-.80200000E+02 Y(3)=-.27530000E+03

H(1,1)= .4424E-04 H(1,2)= .1591E-04 H(1,3)= -.6643E-04
H(2,1)= -.1590E-04 H(2,2)= .1626E-02 H(2,3)= -.1680E-03
H(3,1)= -.6643E-04 H(3,2)= .1680E-03 H(3,3)= .2699E-03

P(1)= .28213291E-02 P(2)=-.34093497E-01 P(3)=-.82663211E-02

AX(1)= .09722668 AX(2)= .74155365 AX(3)= .28098458

AVAR= .65044854E+03

AAVAR= .65045118E+03

AAVAR= .65044845E+03

AAVAR= .65044760E+03

APDVAR(1)= 26.4000 APDVAR(2)= -.9000 APDVAR(3)= -9.4000

ABSUMA= .36700000E+02

ENCONTRO UNA X MEJOR

X(1)= .09722668 X(2)= .74155365 X(3)= .28098458

Y(1)= .53200000E+02 Y(2)= .25900000E+02 Y(3)= .44500000E+02

H(1,1)= .5045E-04 H(1,2)= .6917E-04 H(1,3)= -.8345E-04
H(2,1)= -.6917E-04 H(2,2)= .1546E-02 H(2,3)= -.5076E-04
H(3,1)= -.8345E-04 H(3,2)= .5075E-04 H(3,3)= .3151E-03

P(1)= .21784393E-02 P(2)=-.27399875E-02 P(3)=-.51190547E-02

AX(1)= .09504824 AX(2)= .74429364 AX(3)= .28610363

AVAR= .65037055E+03

AAVAR= .65037146E+03

AAVAR= .65037063E+03

AAVAR= .65036988E+03

APDVAR(1)= 9.1000 APDVAR(2)= .8000 APDVAR(3)= -6.7000

ABSUMA= .16600000E+02

ENCONTRO UNA X MEJOR

X(1)= .09504824 X(2)= .74429364 X(3)= .28610363

PUNTO ESTACIONARIO

X(1)= .09504824 X(2)= .74429364 X(3)= .28610363

APDVAR(1)= 9.1000 APDVAR(2)= .8000 APDVAR(3)= -6.7000
AVAR= .65037055E+03

C

APENDICE 2

```
$      JOB
$      LIST
C      MARIA ESPERANZA BURES
C      METODO DE FRIEDMAN Y SAVAGE
C      E=LIMITE DE MEJORIA DE LA DESV. STD.
C      N=NO. TOTAL DE DATOS
C      M=NO. DE DATOS PRIMERA PARTE DE LA SERIE
C      L=NO. DE PERIODOS QUE FORMAN UN CICLO ESTACIONAL
C      AINC=INCREMENTO A LA VARIABLE INDEPENDIENTE
C      VTAS=PROMEDIO ANUAL DE VENTAS
C      V=VENTAS=ELEMENTOS DE LA SERIE DE TIEMPO
C      ALAST=TENDENCIA
C      SLAST=ELEMENTO CONSTANTE
C      FT=ELEMENTO ESTACIONAL
C      X=FACTOR DE PONDERACION
C      VAR=DESVIACION ESTANDAR
C      PRON=PRONOSTICO
C      ERR=ERROR DE LA PREDICCION
C      TODOS LOS DATOS DE ENTRADA ESTAN DADOS EN FORMATO LIBRE O SEA
C      5 DATOS POR TARJETA
      DIMENSION X(3),FT(12),AFT(12),V(1  ),VTAS(30),XX(3)
      FS1=3HFT(
      FS2=2H)=
      FS3=2HX(
      FS4=2H)=
      PRINT 421
      PUNCH 421
421  FORMAT(1H1,33X,6H DATOS)
      READ,E
      PRINT 400,E
      PUNCH 400,E
400  FORMAT(10X,3H E=,F12.8)
C    METODO DE PROMEDIOS MOVIBLES PONDERADOS EXPONENCIALMENTE
      READ,N,M,L
      PRINT 301,N,M,L
      PUNCH 301,N,M,L
      READ,(V(I),I=1,N)
      PRINT 402
      PUNCH 402
402  FORMAT(28X,16H SERIE DE TIEMPO)
      PRINT 451,(V(I),I=1,N)
      PUNCH 451,(V(I),I=1,N)
451  FORMAT(1H ,10X,4E14.8)
      READ,AINC
      PRINT 407,AINC
      PUNCH 407,AINC
407  FORMAT(10X,6H AINC=,F12.8)
      AL=L
```

```
      AM=M
      AN=N
C     CALCULO DE LOS VALORES INICIALES
      K=0
      I=1
232  VTAS(I)=0.
230  K=K+1
      VTAS(I)=VTAS(I)+V(K)
      IF(K-I*L)230,231,231
231  VTAS(I)=VTAS(I)/AI
      IF(K-M)200,233,233
200  I=I+1
      GO TO 232
233  PRINT 420
      PUNCH 420
420  FORMAT(1H0,30X,11H RESULTADOS)
      PRINT 401
      PUNCH 401
401  FORMAT(1H ,23X,27H PROMEDIO DE VENTAS ANUALES)
      PRINT 452,(VTAS(I),I=1,M/L)
      PUNCH 452,(VTAS(I),I=1,M/L)
452  FORMAT(1H ,10X,4E14.8)
      ALAST=(VTAS(M/L)-VTAS(1))/(AM-AL)
      SLAST=VTAS(1)
      PRINT 403,SLAST,AI AST
      PUNCH 403,SLAST,AI AST
403  FORMAT(10X,7H SLAST=,F16.8,5X,7H ALAST=,F16.8)
C     CALCULO DEL FACTOR ESTACIONAL
      DO 217 I=1,L
      FT(I)=0.
217  CONTINUE
      K=0
      DO 202 J=1,M,L
      K=K+1
      DO 202 I= 1,L
      AI=I
      F=(L+1)/2
      FT(I)=FT(I)+(V(J+I-1))/(VTAS(K)-(F-AI))*ALAST
202  CONTINUE
      DO 204 I=1,L
      FT(I)=FT(I)/(AM/AI)
204  CONTINUE
C     NORMALIZACION DEL FACTOR ESTACIONAL
      SUMAFT=0.
      DO 209 I=1,L
      SUMAFT=SUMAFT+FT(I)
209  CONTINUE
      U=AL/SUMAFT
      DO 210 I=1,L
      FT(I)=FT(I)*U
```

```
AFT(I)=FT(I)
210 CONTINUE
PRINT 404,(FS1,I,FS2,FT(I),I=1,L)
PUNCH 404,(FS1,I,FS2,FT(I),I=1,L)
404 FORMAT(1H ,8X,3(2X,A3,I2,A2,F12.8))
ASLAST=SLAST
AALAST=ALAST
22 READ,(X(I),I=1,3)
P=INT 415,(X(I),I=1,3)
PUNCH 415,(X(I),I=1,3)
415 FORMAT(1H0,10X,5HX(1)=,F10.8,2X,5HX(2)=,F10.8,2X,5HX(3)=,F10.8)
PRINT 410
PUNCH 410
410 FORMAT(1H0,15X,4HX(1),8X,4HX(2),7X,4HX(3),10X,3HVAR)
MM=0
JR=0
VVAR=10000000.
KK=1
995 IF(X(KK)-1.)994,994,993
994 IF(X(KK)-0.)993,990,990
990 SLAST=ASLAST
ALAST=AALAST
DO 42 J=1,L
FT(J)=AFT(J)
42 CONTINUE
CALL VARIAN(X,V,FT,SLAST,ALAST,L,M,N,VAR)
PRINT 411,(X(I),I=1,3),VAR
PUNCH 411,(X(I),I=1,3),VAR
411 FORMAT(10X,3F12.8,F16.8)
IF(((ABS(VAR-VVAR))/VVAR)-E)19,19,20
20 IF(VAR-VVAR)999,998,998
999 VVAR=VAR
DO 1 I=1,3
XX(I)=X(I)
1 CONTINUE
JR=0
X(KK)=X(KK)+AINC
GO TO 995
993 KK=KK+1
IF(KK-4)997,996,996
998 X(KK)=X(KK)-AINC
KK=KK+1
JR=JR+1
IF(KK-4)981,982,982
982 KK=1
981 IF(JR-3)997,28,28
997 X(KK)=X(KK)+AINC
GO TO 995
28 PRINT 423
PUNCH 423
```

```
423 FORMAT(26X,20HMEJOR PUNTO OBTENIDO)
    PRINT 422,(XX(I),I=1,3),VVAR
    PUNCH 422,(XX(I),I=1,3),VVAR
422 FORMAT(10X,5HX(1)=,F 6.4,2X,5HX(2)=,F 6.4,2X,5HX(3)=,F 6.4,2X,
14HVAR=,F10.4)
    GO TO 22
996 KK=1
    MM=MM+1
    IF(MM-4)992,991,991
991 GO TO 28
992 CONTINUE
    X(KK)=X(KK)+AINC
    GO TO 995
19 PRINT 412,(FS3,I,FS4,X(I),I=1,L),VAR
    PUNCH 412,(FS3,I,FS4,X(I),I=1,L),VAR
412 FORMAT(1X,3(1X,A2,I1,A2,F11.8),1X,4HVAR=,F14.8)
301 FORMAT(10X,3H N=,I2,5X,3H M=,I2,5X, 3HL=,I2)
    CALL EXIT
    END
```

```

SUBROUTINE VARIAN(X,V,FT,SLAST,ALAST,L,M,N,VAR)
DIMENSION X(3),V(99),FT(30),PRON(99),ERR(99)
C CORRECCION DE LOS VALORES INICIALES
AM=M
AN=N
K=0
J=0
225 K=K+1
J=J+1
IF(J-L)213,213,214
214 J=1
213 IF(K-M)220,220,221
221 IND=J-12*(J/12)+1
PRON(K)=(VDESES+ALAST)*FT(IND)
ERR(K)=V(K)-PRON(K)
220 VDESES=(X(1)*V(K))/FT(J)+(1.-X(1))*(SLAST+ALAST)
FT(J)=(X(2)*V(K))/VDESES+(1.-X(2))*FT(J)
ALAST=X(3)*(VDESES-SLAST)+(1.-X(3))*ALAST
SLAST=VDESES
IF(K-N)225,203,203
C CALCULO DE LA VARIANCIA
203 VAR=0.
DO 216 K=M+1,N
VAR=VAR+ERR(K)*ERR(K)
216 CONTINUE
VAR=SQRT(VAR/((AN-AM)-1.))
RETURN
END
5 EOJ
```

1

DATOS

E= .00100000

N=84

M=36

L=,12

SERIE DE TIEMPO

.26500000E+04	.37600000E+04	.12800000E+04	.44000000E+04
.12800000E+04	.92000000E+03	.96000000E+03	.20000000E+03
.10200000E+04	.18800000E+04	.10400000E+04	.14800000E+04
.28800000E+04	.28000000E+04	.30800000E+04	.12800000E+04
.34000000E+03	.18800000E+04	.18800000E+04	.18400000E+04
.46500000E+04	.26500000E+04	.18000000E+04	.16750000E+04
.22500000E+04	.40000000E+04	.30500000E+04	.33500000E+04
.16800000E+04	.16000000E+04	.13500000E+04	.15250000E+04
.18000000E+04	.28000000E+04	.24750000E+04	.96000000E+03
.19000000E+04	.23250000E+04	.26500000E+04	.20000000E+04
.15250000E+04	.20000000E+04	.13500000E+04	.19250000E+04
.19250000E+04	.20400000E+04	.17000000E+04	.14500000E+04
.12800000E+04	.22000000E+04	.27250000E+04	.18500000E+04
.13000000E+04	.13500000E+04	.11000000E+04	.12000000E+04
.22000000E+04	.18000000E+04	.17000000E+04	.65000000E+03
.12800000E+04	.29800000E+04	.22000000E+04	.15250000E+04
.50000000E+03	.13500000E+04	.47000000E+03	.78000000E+03
.22000000E+04	.13500000E+04	.17500000E+04	.40000000E+03
.25000000E+03	.13500000E+04	.10250000E+04	.11250000E+04
.10250000E+04	.70000000E+03	.50000000E+03	.11250000E+04
.12750000E+04	.12600000E+04	.70000000E+03	.50000000E+03

AINC= .10000000

RESULTADOS
PROMEDIO DE VENTAS ANUALES

.17391666E+04 .22295833E+04 .22366666E+04

SLAST= 1739.16660000

ALAST= 20.72916600

FT(1)= 1.27683130	FT(2)= 1.73866430	FT(3)= 1.16186450
FT(4)= 1.53534300	FT(5)= .54674310	FT(6)= .69576565
FT(7)= .66585625	FT(8)= .54013595	FT(9)= 1.15718120
FT(10)= 1.17138000	FT(11)= .83519423	FT(12)= .67504062

X(1)= .20000000 X(2)= .4000 X(3)= .60000000

X(1)	X(2)	X(3)	VAR
.20000000	.40000000	.6	909.44296000
.30000000	.40000000	.6	1241.43690000
.20000000	.50000000	.6	974.92278000
.20000000	.40000000	.7	1114.10930000

MEJOR PUNTO OBTENIDO

X(1)= .2000 X(2)= .4000 X(3)= .6000 VAR= 909.4430

