

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS
SUPERIORES DE MONTERREY

CAMPUS MONTERREY

ESCUELA DE INGENIERIA Y TECNOLOGIAS
DE LA INFORMACION



TECNOLÓGICO
DE MONTERREY

ANÁLISIS DE COLAPSO DE VIGAS Y MARCOS DE
ACERO EN DOS DIMENSIONES

TESIS

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA
OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
EN INGENIERIA Y ADMINISTRACION DE LA
CONSTRUCCION

CON ACENTUACION EN MATERIALES Y
ESTRUCTURAS DE ALTO COMPORTAMIENTO

POR:

ING. MANUEL ALEJANDRO COLON REYNOSO

MONTERREY, N. L.

DICIEMBRE 2011

**INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS
SUPERIORES DE MONTERREY**

CAMPUS MONTERREY

**ESCUELA DE INGENIERIA Y TECNOLOGIAS
DE LA INFORMACION**



**TECNOLÓGICO
DE MONTERREY**

**ANÁLISIS DE COLAPSO DE VIGAS Y MARCOS DE
ACERO EN DOS DIMENSIONES**

T E S I S

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA
OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
EN INGENIERIA Y ADMINISTRACION DE LA
CONSTRUCCION**

**CON ACENTUACION EN MATERIALES Y
ESTRUCTURAS DE ALTO COMPORTAMIENTO**

P O R:

ING. MANUEL ALEJANDRO COLON REYNOSO

MONTERREY, N. L.

DICIEMBRE 2011

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS

SUPERIORES DE MONTERREY

CAMPUS MONTERREY

ESCUELA DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN



TECNOLÓGICO DE MONTERREY

ANÁLISIS DE COLAPSO DE VIGAS Y MARCOS DE ACERO EN DOS DIMENSIONES

TESIS

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER

EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

EN INGENIERÍA Y ADMINISTRACIÓN DE LA CONSTRUCCIÓN

CON ACENTUACIÓN EN MATERIALES Y ESTRUCTURAS DE ALTO COMPORTAMIENTO

POR:

ING. MANUEL ALEJANDRO COLÓN REYNOSO.

MONTERREY, N. L.

DICIEMBRE 2011

INSTITUTO TECNÓLOGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY

CAMPUS MONTERREY



ESCUELA DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN

Los miembros del comité de tesis recomendamos que el presente proyecto de tesis presentado por el Ing. Manuel Alejandro Colón Reynoso sea aceptado como requisito parcial para obtener el grado académico de:

Maestro en Ciencias en

Ingeniería y Administración de la Construcción

Con Acentuación en Materiales y Estructuras de Alto Comportamiento.

Comité de tesis:

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'R. C.', written over a horizontal line.

Dr. Raymundo Antonio Cordero Cuevas.

Asesor

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'S. Gallegos', written over a horizontal line.

Dr. Sergio Gallegos Cázares.

Sinodal

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'C. Nungaray', written over a horizontal line.

Ing. Carlos Enrique Nungaray Pérez

Sinodal

Aprobado:

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'S. Gallegos', written over a horizontal line.

Dr. Sergio Gallegos Cázares.

Director del Programa de Graduados de la

Maestría en Ingeniería y Administración de la Construcción.

Diciembre 2011

Dedicatoria.

A Dios por plantar en mí la semilla de la búsqueda de la Verdad.

A José Manuel, mi padre, por enseñarme la importancia de la responsabilidad y el valor de la integridad.

A Esther, mi madre, por enseñarme a ser comprensivo con los demás, y conmigo mismo.

A Cynthia, mi hermana, por ayudarme a ser más paciente y a madurar como persona.

Agradecimientos.

Al Dr. Raymundo Antonio Cordero Cuevas, por haberme apoyado siempre en mis intereses e inquietudes académicas. Sin su atenta dedicación, constante guía y acertados consejos, esta tesis no habría sido posible.

Al Dr. Sergio Gallegos Cázares, por la oportunidad de incorporarme a un grupo de investigación, y hacer posible para mí el cursar la maestría. Con su constante y congruente exigencia he aprendido a afrontar los desafíos académicos que se me presenten.

Al Ing. Carlos Enrique Nungaray Pérez, por su buena disposición, constante esfuerzo y excelente atención al detalle en la docencia.

Al Dr. Juventino Carlos Reyes Salinas (Q.E.P.D.), por su invaluable y excelente contribución a la formación de todos los que tuvimos la fortuna de ser sus alumnos. Continuaremos su legado.

Al Dr. Francisco Santiago Yeomans Reyna, por compartir gustosamente con sus alumnos el fruto de todos sus años de ardua labor como docente.

Al Dr. Jorge Gómez Domínguez, por alentar siempre el interés y la curiosidad intelectual en todas sus clases.

Al Dr. Salvador García Rodríguez, por fomentar el verdadero valor del pensamiento crítico e independiente.

A la Cátedra de Mecánica Computacional y el Aula CIMNE-ITESM que son una vía importante para el desarrollo de los futuros avances científicos e innovaciones tecnológicas de México.

Resumen.

El cálculo de la carga de colapso de una estructura es un objeto de estudio del análisis de estado límite. Este tipo de análisis toma en consideración el comportamiento inelástico de las estructuras, así como la plasticidad del material empleado. Los teoremas fundamentales del análisis del estado límite constituyen la base de la teoría de la carga última. Estos teoremas fundamentales son el teorema de la cota superior y el teorema de la cota inferior, los cuales dan origen al método cinemático y al método estático, respectivamente, para el cálculo de la carga última.

Uno de los rasgos distintivos del cálculo de la carga de colapso por los métodos estático y cinemático es que dichos procedimientos requieren de intuición ingenieril e inspección de los modos de falla por parte del calculista. Esto no implica un gran obstáculo para la resolución de problemas estáticamente sencillos, es decir, con un bajo grado de indeterminación estática. Conforme aumenta el grado de indeterminación estática el problema del cálculo de la carga de colapso se vuelve más complejo y difícil. Para una estructura altamente hiperestática la solución analítica se vuelve muy difícil de obtener.

En la actualidad, la gran mayoría de los programas computacionales que analizan el comportamiento inelástico de las estructuras se basan en el análisis incremental, el cual es un proceso iterativo computacionalmente costoso. Este análisis genera el historial de la respuesta de una estructura sujeta a una carga (o relación de cargas) cuya magnitud se incrementa progresivamente con cada iteración. La importancia de registrar dicho comportamiento estructural es que se pueda asegurar la ductilidad (propiedad que se observa en la capacidad de rotación) de las articulaciones plásticas, la cual es un requisito para la redistribución de momentos. En caso de que únicamente se requiera conocer la resistencia última y el modo de colapso, el análisis de estado límite resulta ser un camino más directo (siempre y cuando el modo de falla no esté controlado por pandeo, u otro tipo de falla). El "límite" que se desea estudiar en ese caso, es el estado del colapso estructural, el cual es el tema de interés de la presente tesis.

El presente trabajo de investigación tiene como objetivo generar un programa computacional de análisis de estado límite, el cual calcule la carga de colapso de una estructura, así como desplegar el mecanismo cinemático de colapso. Este programa se fundamenta en el enfoque cinemático, correspondiente al teorema de la cota superior. Se busca generar una solución numérica que por un lado se acerque a la solución analítica, y que por el otro lado sea computacionalmente más económica que la solución por análisis incremental, el cual es la tendencia actual en la industria del software enfocado a la simulación, la mecánica computacional, el análisis y diseño de estructuras (además de otras áreas de la ingeniería diferentes de las ramas civil y estructural).

Contenido

Capítulo 1. Introducción	1
1.1 Desarrollo histórico de la carga de colapso en la Teoría de Estructuras	1
1.2 La carga de colapso en el contexto del análisis plástico de vigas y marcos	16
1.3 Motivación	18
1.4 Estado actual del arte	19
1.5 Producto y contribuciones de tesis	20
Capítulo 2 Fundamentos del análisis plástico de estructuras bajo esfuerzo uniaxial	21
2.1 Curvas esfuerzo-deformación	21
Capítulo 3. Barras plásticas y articulaciones plásticas	29
3.1 Fluencia plástica en barras	29
3.2 Articulaciones plásticas y el momento plástico	31
Capítulo 4. Análisis de estado límite	37
4.1 Diferencia entre análisis incremental y Análisis de estado límite	37
4.2 Bases del análisis de estado límite	37
4.3 El multiplicador de colapso μ	38
4.4 Condición de admisibilidad plástica	39
4.5 Estado de admisibilidad estática	41
4.6 Estado de admisibilidad cinemática	41
4.7 Planteamiento del Teorema General	43
4.8 Postulado de la Máxima Disipación Plástica	44

4.9 Teorema Fundamental del Análisis del Estado Límite	45
4.10 Teorema de la Cota Inferior	45
4.11 Teorema de la Cota Superior	46
4.12 Teorema de la Cota Superior (replanteado)	46
4.13 Teorema de la Cota Inferior (replanteado)	46
4.14 Corolarios de los Teoremas del Análisis de Estado Límite	47

Capítulo 5. Formulación Matemática de la Solución por el Teorema de la cota superior 48

5.1 Disipación plástica de un elemento	48
5.2 Potencia externa	52
5.3 Planteamiento del problema de optimización	53

Capítulo 6. Funciones de interpolación y método de integración numérica 58

6.1 Formulación de las funciones de interpolación	58
6.2 Formulación del vector B y cálculo del producto $B(x)B^T(x)$	61
6.3 Integración numérica y cuadratura Gaussiana	63
6.4 Cambio de intervalo de la cuadratura Gaussiana	66
6.5 Evaluación de la cuadratura Gaussiana con 2 puntos de integración	68
6.6 Evaluación de la cuadratura Gaussiana con 3 puntos de integración	69

Capítulo 7. Métodos de solución para sistemas no lineales 70

7.1 Solución por el método de secante	71
7.2 Algoritmo de la Cota Superior por el Método de la Secante	71
7.3 Solución por el método de Quasi-Newton Raphson	77
7.4 Algoritmo de la Cota Superior por el Método de Quasi-Newton Raphson	77

Capítulo 8. Ejemplos de Aplicación del Análisis de Estado Límite	81
8.1 Consideraciones de análisis y propiedades físicas	81
8.2 Paquete computacional de Pre- y Post-Procesamiento: GiD	84
8.3 Casos de estudio	85
1. Viga doblemente empotrada	85
2. Viga simplemente apoyada	87
3. Portal sencillo	90
4. Viga continua	92
5. Portal doble vertical	95
6. Portal a dos aguas	98
7. Viga continua y empotrada	100
8. Portal rectangular	103
9. Viga Vierendeel	105
8.4 Interpretación de resultados	108
8.5 Comparación de la convergencia con 2 y 3 puntos de integración Gaussiana	110
Capítulo 9. Conclusiones	113
Bibliografía	117

Lista de Figuras

Figura 1. Viga en cantiléver de Galileo.....	1
Figura 2. Ilustración de una prueba a tensión de Galileo	1
Figura 3. Comparación de soluciones de la carga última.....	3
Figura 4. Análisis del domo de la Basílica de San Pedro, según Poleni 1748.....	5
Figura 5. Vigas del experimento de Kazinczy	7
Figura 6. Distribución de esfuerzos en vigas según Maier-Leibnitz	8
Figura 7. Marco experimental antes de la aplicación de la carga.....	10
Figura 8. Marco experimental después de la máxima carga, sin instrumentos de medición	10
Figura 9. Configuración deformada del marco experimental después de retirar la carga.....	11
Figura 10. Carga última calculada por Girkmann para su modelo experimental	11
Figura 11. Teoremas del diseño por carga última, según Greenberg y Prager, 1951-1952	15
Figura 12. Gráfica esfuerzo-deformación uniaxial para acero dulce (<i>mild steel</i>)	22
Figura 13. Aleación de acero (<i>alloy steel</i>)	23
Figura 14. Material elástico – perfectamente plástico	24
Figura 15. Material rígido – perfectamente plástico	25
Figura 16. Diagramas de fuerza axial	30
Figura 17. Sección transversal rectangular bajo flexión pura.....	32
Figura 18. Viga con carga concentrada al centro del claro.....	33
Figura 19. Idealización de una articulación plástica	35
Figura 20. Elemento isoparamétrico sujeto flexión y corte.....	58
Figura 21. Espacio real de un elemento isoparamétrico unidimensional	60
Figura 22. Sección tipo W.....	83

Figura 23. Viga doblemente empotrada, con mecanismo de colapso sobreimpuesto.....	85
Figura 24. Mecanismo de colapso de viga doblemente empotrada	85
Figura 25. Viga simplemente apoyada, con mecanismo de colapso sobreimpuesto.....	87
Figura 26. Mecanismo de colapso de viga simplemente apoyada	88
Figura 27. Portal sencillo, con mecanismo de colapso sobreimpuesto.....	90
Figura 28. Mecanismo de colapso de portal sencillo.....	90
Figura 29. Viga continua, con mecanismo de colapso sobreimpuesto.....	92
Figura 30. Mecanismo de colapso de viga continua.....	93
Figura 31. Portal doble vertical	95
Figura 32. Mecanismo de colapso de portal doble vertical, con geometría original sobreimpuesta	95
Figura 33. Mecanismo de colapso de portal doble vertical.....	96
Figura 34. Portal a dos aguas, con mecanismo de colapso sobreimpuesto	98
Figura 35. Mecanismo de colapso de portal a dos aguas	98
Figura 36. Viga continua y empotrada, con mecanismo de colapso sobreimpuesto.....	100
Figura 37. Mecanismo de colapso de viga continua y empotrada	101
Figura 38. Portal rectangular, con mecanismo de colapso sobreimpuesto	103
Figura 39. Mecanismo de colapso de portal rectangular	103
Figura 40. Viga Vierendeel	105
Figura 41. Mecanismo de colapso de viga Vierendeel, con geometría original sobreimpuesta	106
Figura 42. Mecanismo de colapso de portal rectangular	106

Lista de Tablas

Tabla 1. Esquemas de integración para $n = 2$ y $n = 3$ puntos de integración	66
Tabla 2. Propiedades de secciones tipo W	84
Tabla 3. Viga doblemente empotrada	86
Tabla 4. Viga simplemente apoyada	88
Tabla 5. Portal sencillo	91
Tabla 6. Viga continua	93
Tabla 7. Portal doble vertical	96
Tabla 8. Portal a dos aguas.....	99
Tabla 9. Viga continua y empotrada	101
Tabla 10. Portal rectangular.....	104
Tabla 11. Viga Vierendeel	107
Tabla 12. Comparación de esquemas de integración Gaussiana (2 y 3 puntos)	111

Lista de Gráficas

Gráfica 1. Multiplicador de colapso de viga doblemente empotrada	86
Gráfica 2. Multiplicador normalizado de viga doblemente empotrada	87
Gráfica 3. Multiplicador de colapso de viga simplemente apoyada.....	89
Gráfica 4. Multiplicador normalizado de viga simplemente apoyada.....	89
Gráfica 5. Multiplicador de colapso de portal sencillo	91
Gráfica 6. Multiplicador normalizado de portal sencillo	92
Gráfica 7. Multiplicador de colapso de viga continua.....	94
Gráfica 8. Multiplicador normalizado de viga continua.....	94
Gráfica 9. Multiplicador de colapso de portal doble vertical	97
Gráfica 10. Multiplicador normalizado de portal doble vertical.....	97
Gráfica 11. Multiplicador de colapso de portal a dos aguas.....	99
Gráfica 12. Multiplicador normalizado de portal a dos aguas.....	100
Gráfica 13. Multiplicador de colapso de viga continua y empotrada.....	102
Gráfica 14. Multiplicador normalizado de viga continua y empotrada	102
Gráfica 15. Multiplicador de colapso de portal rectangular	104
Gráfica 16. Multiplicador normalizado de portal rectangular	105
Gráfica 17. Multiplicador de colapso de viga Vierendeel	107
Gráfica 18. Multiplicador normalizado de viga Vierendeel	108

Capítulo 1.

Introducción.

1.1 Desarrollo histórico de la carga de colapso en la Teoría de Estructuras.

Una de las tareas esenciales del ingeniero estructural es determinar cuál es la capacidad máxima de una estructura para soportar cargas. Dicho de otra forma, lo que se busca es calcular la resistencia máxima de la estructura. Una propiedad física que indica dicha capacidad es la carga que provoca el colapso de la estructura, la cual se conoce como la carga de colapso (o carga última). Un antecedente histórico muy importante para el desarrollo de la teoría de las estructuras, fue el cálculo propuesto por el astrónomo, físico y matemático italiano Galileo Galilei en su obra "Diálogos Acerca de Dos Ciencias Nuevas" (1638), para la carga de colapso de una viga en cantiléver¹ (Figura 1).

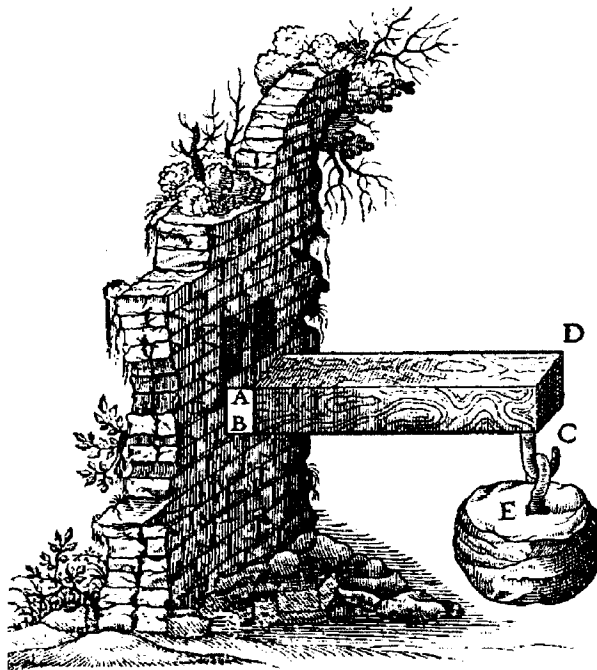


Figura 1. Viga en cantiléver de Galileo.²

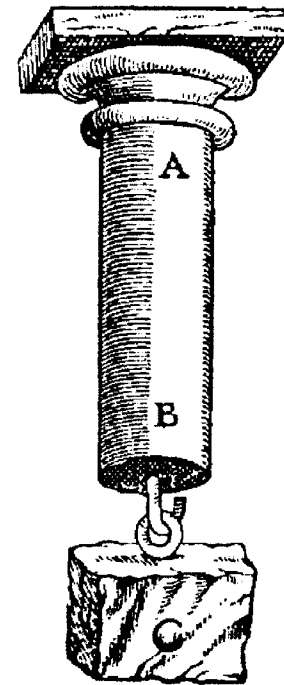


Figura 2. Ilustración de una prueba a tensión de Galileo.³

¹ Kurrer, Karl-Eugene. The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics. Berlín, Alemania. Ernst & Sohn. 2008. Pp. 260- 266

² Kurrer, K. E. Ibíd "Figure 5 -7. Galileo's bending failure problem" P. 264

³ Kurrer, K. E. Ibíd. "Figure 5 – 6. Galileo's tensile test as a thought experiment" P. 263

El problema a resolver consiste en determinar cuál es la resistencia de una viga en cantiléver a la cual se le aplica una carga E en el extremo libre. Es importante notar que el concepto del momento flector suele atribuirse a Newton, quien fue posterior a Galileo, y en la siguiente explicación se empleará una adecuación a la solución de Galileo, la cual se presenta aquí desde un punto de vista moderno que incluye el concepto del momento flector. Galileo jamás empleó explícitamente el concepto del momento flector⁴, pero aquí se menciona para poder comparar su solución con los otros dos enfoques (el elástico y el plástico).

Para calcular la carga de falla (o carga última), Galileo consideró el equilibrio de momentos flectores con respecto al punto B en la viga. En el análisis de un problema distinto (Figura 2), se consideró una barra prismática sujeta a tensión; en el extremo libre de la barra se aplicó una carga C y mientras que el otro extremo de la barra está fijo. Se observó que la carga podía asumirse como concentrada en el centro de gravedad (centroide) de la sección transversal de la barra. De ahí que Galileo hizo la misma suposición (erróneamente) para la viga en cantiléver de la Figura 1. Si bien esta suposición es válida para el caso de la barra, es incorrecta para la viga pues se asumiría que toda la sección transversal de la viga en el empotramiento entra en fluencia (o se plastifica) completamente y al mismo tiempo. Para efectos de cálculo, la carga E_B , aplicada en el extremo C de la viga en cantiléver de longitud l , peralte h , y ancho b , genera un momento flector en el extremo empotrado el cual debe ser equilibrado por la resistencia material de la viga. Galileo definió el momento flector resistente como el esfuerzo de fluencia del material de la viga, simplificado a una fuerza concentrada en el centroide de la sección de la viga, a la cual le aplica un brazo de palanca de $h/2$. Aplicando equilibrio de momentos flectores con respecto al punto B , la carga E_B que provoca el colapso de la viga es⁵:

$$E_B = \frac{\sigma_y}{l} \cdot \frac{bh^2}{2} \quad (1.1)$$

Resulta muy revelador e interesante el comparar la solución de Galileo con la solución por análisis elástico y también contrastarla con la solución que resulta del análisis plástico (el cual se emplea en la presente tesis).

⁴ Kurrer, K. E. *Ibíd.* P. 266.

⁵ *Ídem.*

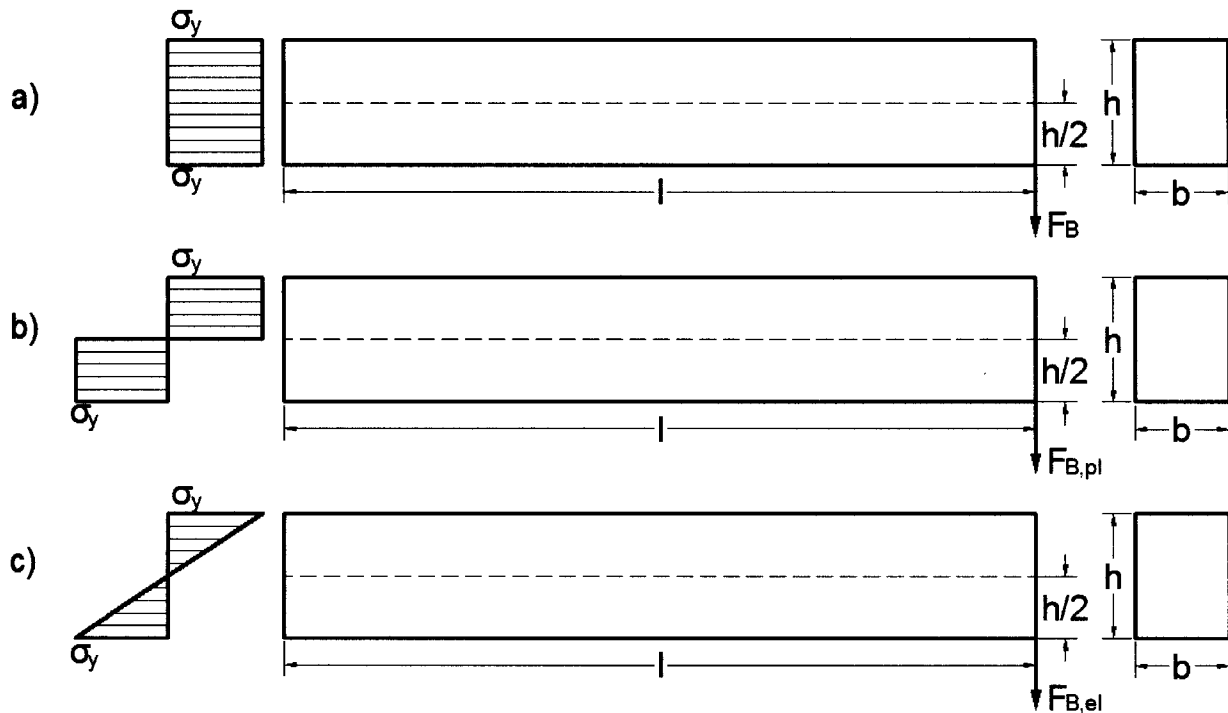


Figura 3. Comparación de soluciones de la carga última. a) Basado en teorema de Galileo, b) Con sección completamente plastificada según la teoría plástica c) Con sección en el límite elástico, según la teoría elástica.⁶

La solución de Galileo asume una distribución uniforme de esfuerzos compresivos en toda la sección transversal, la cual se plastifica al mismo tiempo. La expresión resultante⁷ es

$$E_B = \frac{\sigma_y}{l} \cdot \frac{bh^2}{2} \quad (1.1)$$

Según el punto de vista moderno, la falla ocurre cuando la sección transversal se plastifica completamente, con la porción superior de la sección en tensión y la porción inferior en compresión. El proceso de plastificación inicia con las fibras más alejadas del eje neutro de la sección; las fibras en tensión están por encima del eje neutro y las fibras en compresión se ubican debajo del eje. La carga que provocaría el colapso, según el enfoque plástico sería⁸

$$E_{B,pl} = \frac{\sigma_y}{l} \cdot \frac{bh^2}{4} \quad (1.2)$$

⁶ Imagen propia, adaptada de la imagen original, Kurrer, K. E., *Ibíd.* "Figure 5 – 9. Comparison of the failure or ultimate loads" P. 266.

⁷ Kurrer, K. E. *Ibíd.* P. 266.

⁸ *Idem.*

El análisis elástico en décadas anteriores sirvió de fundamento para el diseño por esfuerzos de trabajo permisibles (*permissible working stresses*). Desde esta perspectiva, se asume que la falla ocurre cuando la fibra más alejada (tanto en tensión como en compresión) entra en fluencia, considerando que el resto de la sección se mantiene dentro del rango elástico. La solución por análisis elástico vendría a ser⁹

$$E_{B,el} = \frac{\sigma_y}{l} \cdot \frac{bh^2}{6} \quad (1.3)$$

Se observa claramente que la solución de Galileo sobreestimó la capacidad de carga E_B , siendo el doble que la "carga plástica" $E_{B,pl}$. Por el otro lado se observa que la carga última por teoría plástica es mayor que la carga de colapso por análisis elástico. De ahí se desprende el corolario de que existe una reserva de capacidad de carga más allá del límite elástico, la cual se ignoraba anteriormente.

La determinación de la carga de colapso es necesaria para validar la seguridad de las estructuras existentes. Cerca de un siglo después de Galileo, el físico, matemático e ingeniero italiano Giovanni Poleni (1685-1761) discutió la seguridad del domo de la basílica de San Pedro en Roma, empleando las bases de lo que más tarde sería el enfoque estático del análisis de estado límite¹⁰. Para ello Poleni simplificó el problema de estabilidad del domo de San Pedro como un arco de mampostería, cuya línea de empuje que se genera por el efecto de la carga (tanto viva como muerta) estaba definida por la catenaria¹¹ invertida. La estabilidad dependía de que la línea de empuje se mantuviera dentro del perfil geométrico del arco (Figura 4).

⁹ Ídem.

¹⁰ Bažant, Zdeněk, P., Jirásek, Milan. *Inelastic Analysis of Structures*. Suiza. Wiley. 2001. P- xix

¹¹ Blockley, David. *Bridges: the science and art of the world's most inspiring structures*. Reino Unido, Oxford University Press. 2010. P. 293. La catenaria se define como la curva formada por un cable flexible mientras cuelga desde dos puntos fijos, bajo su peso propio.

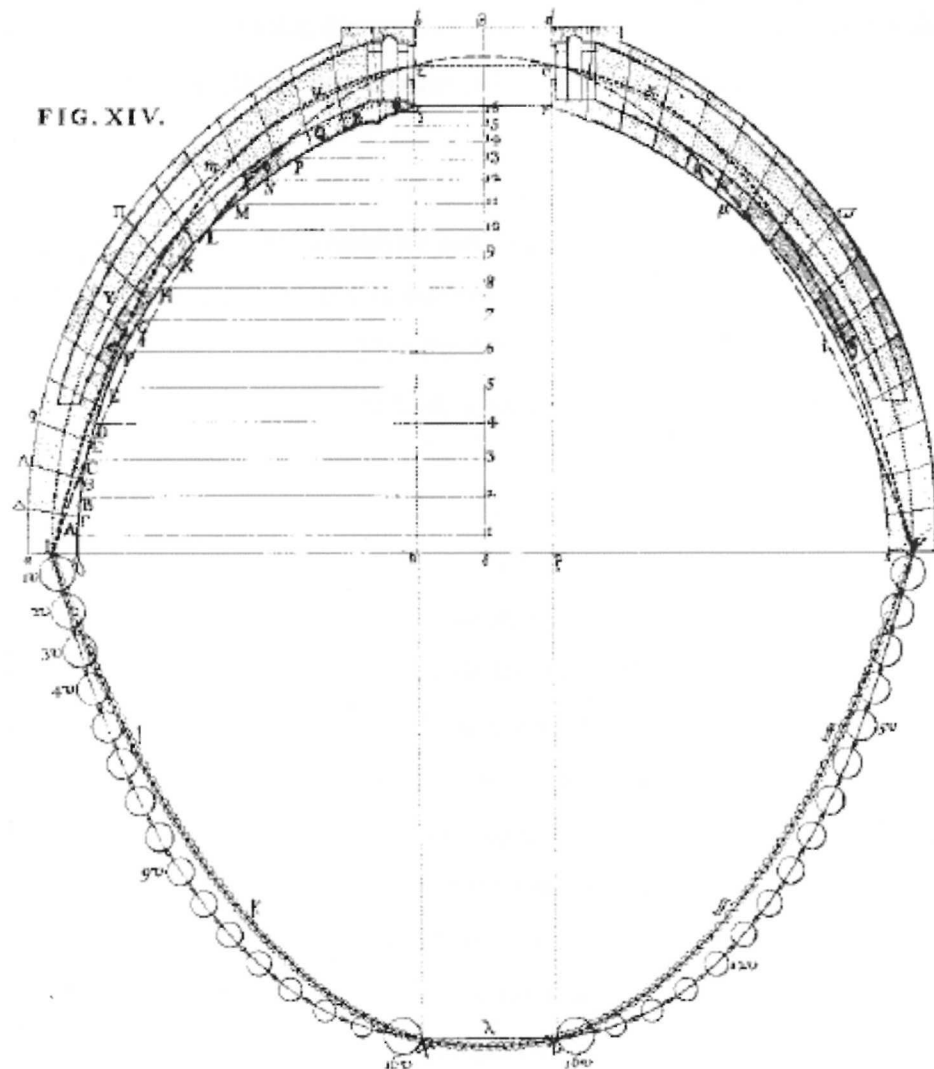


Figura 4. Análisis del domo de la Basílica de San Pedro, según Poleni 1748.¹²

El primer análisis estático de falla, así como los conceptos de deslizamiento plástico y la condición de fluencia fueron propuestos por el ingeniero civil francés Charles Auguste Coulomb (1776) en un estudio sobre muros de retención para fortificaciones militares¹³. Muchas de las ideas elementales sobre deformación plástica, falla plástica, y la reducción gradual de las cargas de pandeo

¹² Kurrer, K. E. Op cit. "Figure 4 - 33. Poleni's investigation of the dome to St. Peter's in Rome" P. 215

¹³ Kurrer, K. E. Ibíd. P. 723.

fueron emergiendo a lo largo del siglo XIX. Pioneros en los estudios de tales fenómenos fueron¹⁴ Tresca (1868), St. Vénant (1870), Rankine (1876), Bauschinger (1881) y Mohr (1900), entre otros.

Hacia principios del siglo XX, aparecieron los conceptos básicos de las superficies de fluencia, las reglas de flujo, las líneas de deslizamiento y la fricción plástica, gracias a las aportaciones de¹⁵ von Kármán (1909), von Mises (1913), Hencky (1924) y Reuß¹⁶ (1930). Notorio fue el establecimiento de los fundamentos científicos de la plasticidad en metales, y las bases de la teoría de dislocación, lo cual se acredita a Taylor (1934) y otros.

A finales del siglo XIX y principios del siglo XX ocurrió un desarrollo tecnológico que ejerció una enorme influencia sobre el desarrollo de la teoría de las estructuras, específicamente en la teoría plástica. Este suceso fue la producción económica y comercialmente viable del acero dulce (*mild steel*). Desde que comenzó el uso del acero estructural en la industria de la construcción, los ingenieros estructurales elogiaron el así llamado “ingenio”, o “auto-ayuda” del nuevo material para soportar cargas mayores a las resistencias calculadas con los modelos del análisis elástico¹⁷. Esta propiedad se conoce de manera más precisa como ductilidad: la capacidad de un cuerpo de deformarse considerablemente antes de fallar. Pero ese “ingenio” llevaba consigo la incertidumbre sobre cómo cuantificar la reserva de carga de las estructuras de acero. La linealidad del comportamiento material que hasta entonces había sido regida por la Ley de Hooke, dejó de ser apropiada para determinar la carga última en acero estructural, y es ahí que iniciaron varios esfuerzos de investigación para cuantificar experimental y teóricamente el comportamiento no lineal del nuevo material.

Uno de los primeros trabajos experimentales en el comportamiento elasto-plástico fue el realizado por el ingeniero húngaro Gábor v. Kazinczy (1889-1964), a quien se le atribuye la formulación del concepto de la articulación plástica¹⁸. En 1914, Kazinczy midió las cargas en vigas de acero de sección tipo I, las cuales embebíó en concreto (Figura 5). Los apoyos en los extremos de la viga fueron tratados

¹⁴ Bažant, Z., P. et al. Op cit. P. xix

¹⁵ Ídem.

¹⁶ N. A. Reuß es la escritura original en la referencia anterior.

¹⁷ Kurrer, K. E. Op cit. P. 121

¹⁸ Chakrabarty, J. *Theory of Plasticity*. Estados Unidos. McGraw Hill. 1988. P. 229

como empotramientos perfectos. De las serie de pruebas realizadas, Kazinczy concluyó que, para que se generase el modo de falla se deben formar tres secciones transversales completamente plastificadas (llamadas también articulaciones plásticas). Dos de estas articulaciones se formaban en los extremos de la viga, y la articulación restante al centro del claro de la viga.

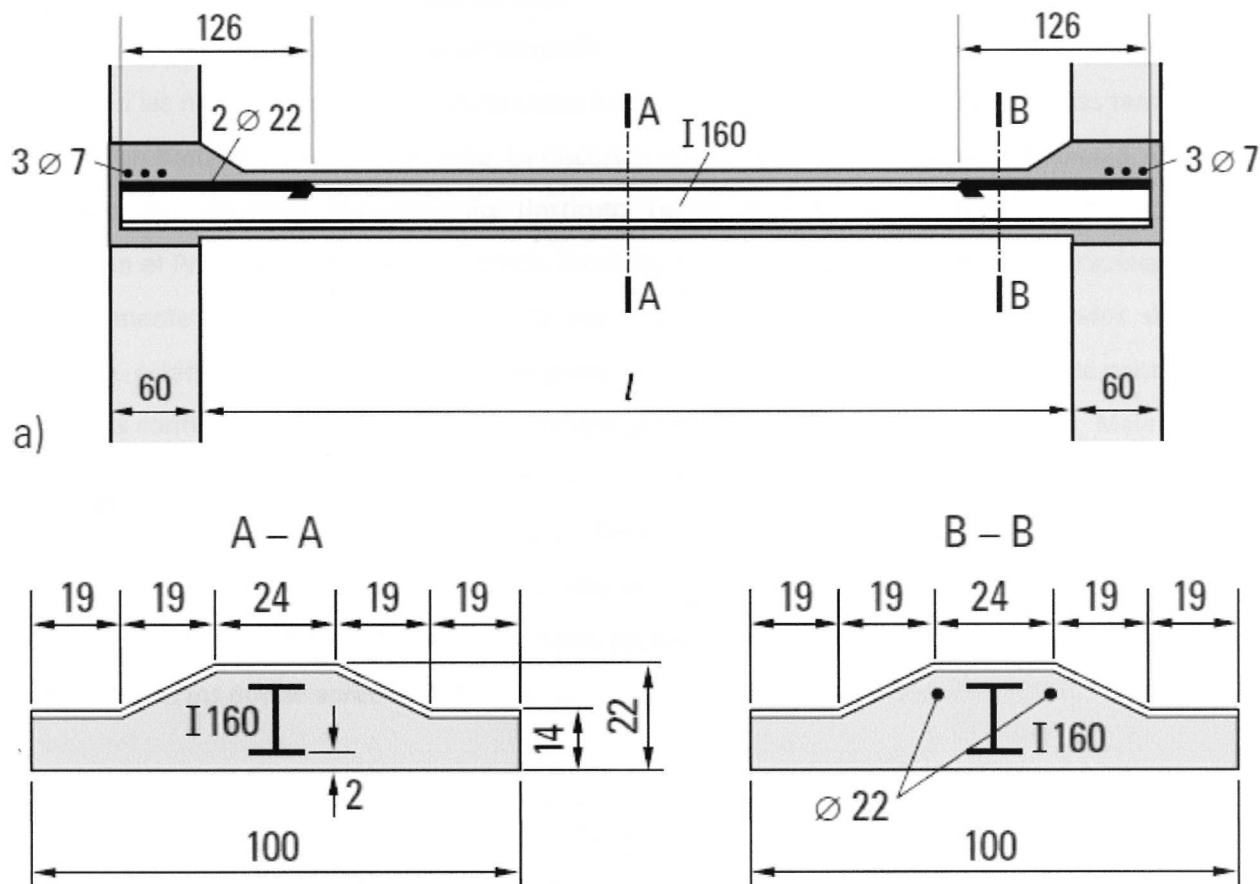


Figura 5. Vigas del experimento de Kazinczy.¹⁹

En 1917, el Prof. N. C. Kist estudió el problema de la carga última, y hacia 1920 propuso que el diseño de construcciones en acero dulce se basara en la ley de materiales idealmente elásticos así como en la simplificación del comportamiento plástico, como un material perfectamente plástico (explicado más adelante)²⁰. Hasta el día de hoy, esta ley de materiales idealizados constituye el fundamento de los procedimientos de diseño en acero basados en la teoría de la carga última. En lo que resta del presente

¹⁹ Kurrer, K. E. Op cit. "Figure 2 - 89. Kazinczy's test beams" P. 122

²⁰ Ídem.

capítulo se usarán los términos “teoría de la carga última” y “teoría de la articulación plástica” como términos intercambiables, reconociendo que el primer término es más general.

Hacia finales de la década de 1920, se llegó a la conclusión de que el diseño económico de estructuras de acero no podía sustentarse únicamente en la teoría elástica. Esta tendencia apareció primeramente en las naciones de Europa central como Alemania, Austria y Checoslovaquia, y más tarde se extendió a Gran Bretaña y la Unión Soviética. La discusión académica del tema inició en Alemania, en el nivel teórico con Hermann Maier-Leibnitz (Instituto Tecnológico de Stuttgart), y en la parte experimental con el Prof. Martin Grüning (Instituto Tecnológico de Hannover)²¹. El trabajo de Kazinczy en vigas doblemente empotradas fue expandido por Grüning para estructuras de n grados de indeterminación estática. Maier-Leibnitz, por su parte trabajó en la teoría de vigas simplemente apoyadas y vigas continuas. A partir de pruebas experimentales en vigas de dos claros iguales, Maier-Leibnitz reportó en 1928 que la pequeña cantidad de fluencia en los apoyos no tenía impacto significativo sobre la capacidad de carga de la viga, y además que el momento flector crítico de diseño no se ubicaba en los apoyos, sino en el momento flector al centro del claro, cuyo valor era el 75 % del momento en el apoyo. Siguiendo las leyes materiales propuestas por Kist, Maier-Leibnitz reportó la distribución de esfuerzos que se aprecia en la Figura 6.

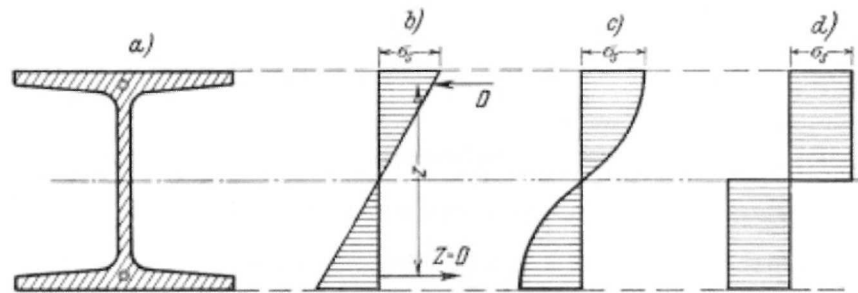


Figura 6. Distribución de esfuerzos en vigas según Maier-Leibnitz²². a) Sección transversal b) Estado en el límite elástico c) Estado parcialmente plástico d) Estado completamente plástico.

En la década de 1930 aparecieron en sucesión varios artículos sobre la plasticidad presente en las estructuras hiperestáticas de acero. El trabajo más relevante fue el realizado por el Prof. Josef

²¹ Ídem.

²² Kurrer, K. E. Ibíd. “Figure 2 – 91. Stress distribution after Maier-Leibnitz” P. 123

Fritsche del Instituto Tecnológico de Praga, y por Karl Girkmann de la compañía Waagner-Biro²³. Fritsche investigó en 1930 el comportamiento de vigas simplemente apoyadas (o isostáticas), vigas en cantiléver y algunos casos específicos de vigas continuas, mientras que en el período 1931-1932, Girkmann planteó un método de diseño plástico para marcos de acero, apoyándose en pruebas experimentales.

Fritsche fue el primero en derivar ecuaciones para el cálculo del momento flector plástico M_{pl} en secciones tipo I y secciones rectangulares sujetas a flexión pura. Primeramente resolvió la ecuación diferencial (en forma expandida) para el momento flector de vigas, y posteriormente empleó la solución obtenida para obtener la deformación elasto-plástica de vigas simplemente apoyadas.²⁴ Después de las vigas estáticamente determinadas, Fritsche se enfocó en el análisis de sistemas estáticamente indeterminados. Siguiendo ese mismo esquema matemático se resolvió la ecuación para vigas doblemente empotradas sujetas a una carga puntual, ubicada al centro del claro; Fritsche observó que en el estado de colapso plástico, las articulaciones plásticas debían existir simultáneamente en los extremos fijos y en el centro del claro. Josef Fritsche usó el mismo método para calcular la carga última en vigas continuas de dos y tres claros. Los resultados de dichos cálculos fueron validados con un nuevo análisis de las pruebas de E. Meyer, H. Maier-Leibnitz y J. H. Schaim. Fritsche llegó a la conclusión de que el esfuerzo de fluencia del acero dulce era el parámetro material crítico que debía considerarse para el método de la carga última.

Karl Girkmann inició su investigación del comportamiento plástico con el objetivo de evaluar la capacidad de "auto-ayuda" de los marcos de acero sujetos a la acción combinada de flexión y fuerza axial, y con ello lograr el dimensionamiento económico de dichas estructuras. Además de los ahorros en peso, el método de Girkmann lograba reducir los momentos flectores máximos, uniformizar los espesores requeridos de las secciones transversales y por ende, simplificar los detalles constructivos y disminuir costos. Girkmann desarrolló un método de incrementos sucesivos de carga, el cual conforma la base actual de la mayoría de los métodos de cálculo asistido por computadora (métodos que pertenecen al análisis incremental)²⁵. Dicho método de cálculo propuesto para estructuras estáticamente indeterminadas se verificó por pruebas experimentales sobre un modelo a escala

²³ Kurrer, K. E. *Ibíd.* P. 123

²⁴ *Ídem.*

²⁵ Kurrer, K. E. *Ibíd.* P. 124

compuesto por elementos de acero. El marco de prueba consistía en un marco tipo portal con dos apoyos articulados (resultando en un sistema con un grado de indeterminación estática). La configuración del modelo se aprecia en la Figura 7. La carga se aplicó concentrada al centro de la viga transversal ubicada en la parte inferior del modelo, los apoyos articulados se ubican en la parte superior (unidos por un elemento transversal para mantener estabilidad). La carga aplicada se incrementó sucesivamente al mismo tiempo que se medía la deflexión con cada incremento de carga, tal como se muestra en la Figura 8. La articulación plástica se aprecia notoriamente en la geometría deformada al centro del claro de la viga transversal (Figura 9).

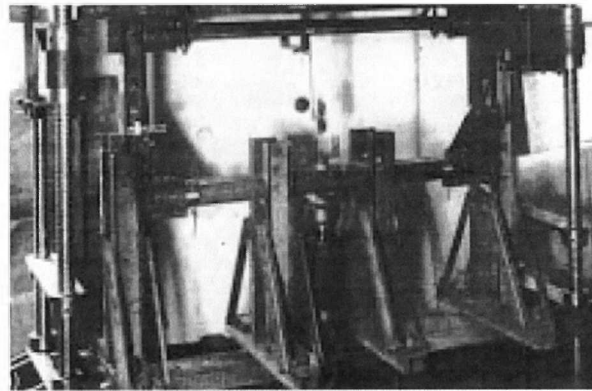


Figura 7. Marco experimental antes de la aplicación de la carga.²⁶

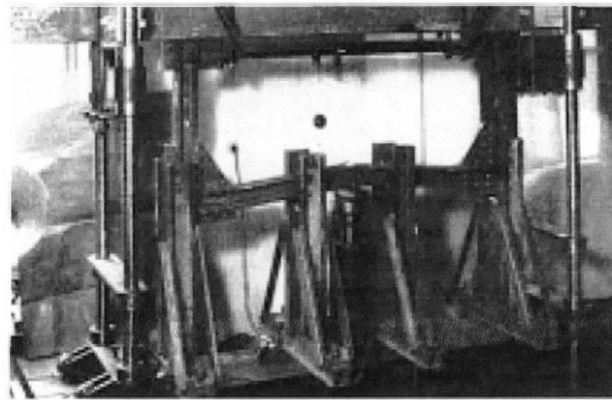


Figura 8. Marco experimental después de la máxima carga, sin instrumentos de medición.²⁷

²⁶ Kurrer, K. E. *Ibíd.* "Figure 2 – 93. a) Test frame" P. 125

²⁷ Kurrer, K. E. *Ibíd.* "Figure 2 – 93. b) test frame under maximum load" P. 125

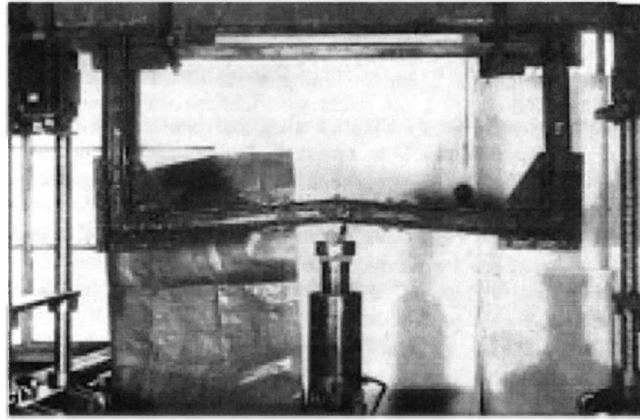


Figura 9. Configuración deformada del marco experimental después de retirar la carga.²⁸

Girkmann calculó y trazó el siguiente diagrama (Figura 10) de fuerzas para el marco, cuyos resultados fueron validados por el experimento anteriormente mencionado.

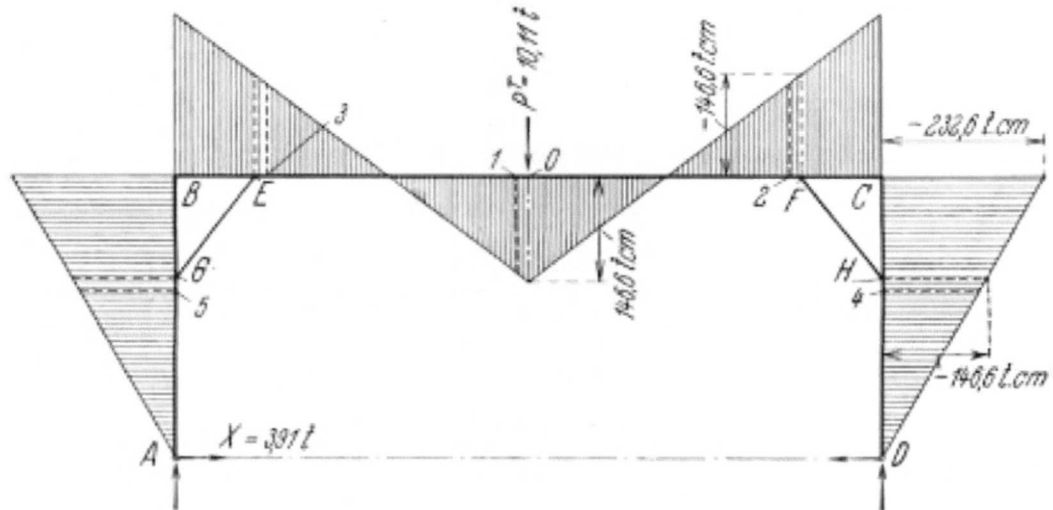


Figura 10. Carga última calculada por Girkmann para su modelo experimental.²⁹

El sistema, al contar con dos apoyos articulados, tiene un grado de indeterminación estática. En el momento de la formación de la articulación plástica, el marco se puede analizar como un marco de tres articulaciones. La carga última de 10.11 ton (toneladas) corresponde con la formación de articulaciones plásticas en los puntos E, O, F .

²⁸ Kurrer, K. E. Ibíd. "Figure 2 – 93. c) after relieving the load" P. 125

²⁹ Kurrer, K. E. Ibíd. "Figure 2 – 95. Calculated ultimate load of the test frame" P. 126

De vital importancia es reconocer que durante la primera mitad del siglo XX, dentro de la teoría de las estructuras, la carga de colapso pasó del rango elástico al dominio plástico. Es durante esta época que surgen los teoremas clásicos o fundamentales de lo que vendría a ser el análisis de estado límite. Dichos teoremas que emergieron de las investigaciones de las universidades de habla inglesa, llegaron a formar la base de la teoría de la carga última (o resistencia última). En la segunda mitad del siglo XX, dicha teoría llegó a formalizarse en los reglamentos y manuales de construcción.

Hoy en día la edificación en acero estructural ocupa una posición líder en las industrias de la construcción del Reino Unido y de Estados Unidos. Esto se debe a una temprana aceptación del método de la carga última, la cual se dio en la década de 1950, y en buena parte, fue gracias al trabajo de John Fleetwood Baker y William Prager³⁰. La labor de estos investigadores condujo a la formación de la escuela anglo-americana de la teoría de la carga última.

En 1929, la Asociación Británica del Acero (*British Steelwork Association*) constituyó el Comité para la Investigación de Estructuras de Acero (*Steel Structures Research Committee*, o SSRC) bajo el liderazgo John F. Baker, cuyo objetivo era la reestructuración de la industria británica del acero³¹. Baker logró que se formara un triunvirato de interacción entre la industria del acero, las teorías del acero y los reglamentos de la construcción en acero, lo cual llevó a la adopción de una nueva perspectiva del comportamiento de las estructuras de acero sujetas a carga. Las pruebas experimentales promovidas por Baker, así como la evaluación crítica del diseño de estructuras basado en la teoría elástica y su introducción en los reglamentos de diseño fueron descritos extensivamente en los reportes técnicos del SSRC, publicados en los años 1931, 1934 y 1936. Retomando las pruebas de Maier-Leibnitz, Baker se embarcó en un nuevo programa de pruebas experimentales que dieron como resultado la adopción del método de la carga última en las normas británicas en 1948. En 1949, Baker, quien fungió como profesor en la Universidad de Cambridge, publicó un método de prueba y error para la determinación de la distribución de momentos flectores de marcos de acero en estado límite plástico. Es notorio y revelador

³⁰ Kurrer, K. E. *Ibíd.* P. 130

³¹ *Ibidem.*

que Baker no empleó, ni hizo referencia alguna a las publicaciones del trabajo de Girkmann (cuya metodología era iterativa) de los años 1931-1932³².

El trabajo de Baker derivó en el método estático y el método cinemático para el cálculo de la carga última en vigas y marcos³³. En el método estático se asume la condición de fuerzas estáticamente permisibles para la carga dada; es por esto que recibe el nombre de método estático. El siguiente paso es calcular un factor de incremento de carga v , el cual considere la condición de plasticidad $M = M_{pl}$ en las articulaciones plásticas y $M < M_{pl}$ en las demás zonas. El último paso del método estático es la inspección de la compatibilidad geométrica de desplazamientos (revisión cinemática); esta revisión se debe a que en el estado límite plástico existe una serie de articulaciones plásticas compatibles (cinemáticamente determinadas). El método cinemático, por el otro lado, inicia con la suposición de una combinación plausible y permisible de articulaciones plásticas. Usando el principio de desplazamientos virtuales, esto es la igualdad entre el trabajo virtual externo y el trabajo interno negativo, se procede a calcular los factores de incremento de carga v . De entre todas las combinaciones de articulaciones plásticas, la combinación crítica es aquella dada por el menor factor de incremento de carga v_{min} . El método cinemático concluye con la revisión de la condición de plasticidad $M \leq M_{pl}$. Es importante recalcar que el factor de incremento de carga v está relacionado intrínsecamente con la carga de colapso, y en ciertas condiciones que se explicarán en la presente tesis, ese factor es la misma carga de colapso.

Mientras Baker dirigía los esfuerzos de investigación de plasticidad en Gran Bretaña, Prager guiaba la contraparte académica en los Estados Unidos. William (originalmente Whilelm) Prager llegó a los Estados Unidos huyendo de Alemania, inmediatamente después de que los nacionalsocialistas tomaran el poder³⁴. En 1941, Prager se unió al reconocido Departamento de Matemáticas de la Universidad de Brown, donde dio inicio a su investigación sobre el comportamiento plástico. Prager y Baker formaron un programa de intercambio entre Cambridge y Brown, que sería decisivo para el desarrollo científico de la teoría plástica y las subsecuentes aplicaciones en la construcción con acero. Prager logró demostrar que las tres expresiones concernientes a la mecánica de cuerpos sólidos

³² Ídem.

³³ Kurrer, K. E. *Ibíd.* P. 131

³⁴ Ídem.

(ecuaciones de equilibrio, ecuaciones de elasticidad y propiedades materiales) en la teoría elástica podían unificarse en una sola ecuación, mientras que para la teoría plástica la situación era muy diferente. Este nuevo enfoque fue fundamental para una posterior formulación más rigurosa de la teoría plástica aplicada a marcos de acero. El programa de intercambio rindió frutos en sus estudiantes de doctorado. Uno de ellos fue Jacques Heyman, quien regresó al Reino Unido después de un intercambio en Brown que había durado tres años (siendo un año el período típico de intercambio). En 1956 Heyman publicó, junto con Baker y M. R. Horne, el primer libro sobre la teoría plástica en estructuras de acero: *The steel skeleton. Vol 2. Plastic behaviour and design*³⁵. Este libro recopiló el trabajo de 10 años del equipo de investigación en Cambridge, y fue el primero en describir los teoremas fundamentales de la teoría de la carga última y emplearlos en aplicaciones prácticas.

Es importante reconocer que los teoremas fundamentales ya habían sido verificados de manera independiente en 1936, por el ingeniero soviético A. A. Gvozdev³⁶. Sin embargo, aunque los teoremas propuestos por Gvozdev fueron publicados en 1936, estaban disponibles únicamente en ruso, y sólo a través de la Academia de Ciencia de Moscú, cuyas publicaciones eran muy poco conocidas en Occidente. De ahí que el trabajo de Gvozdev permaneció inaccesible a la comunidad científica internacional³⁷. Los teoremas del equipo de Prager fueron redescubiertos, por así decirlo, a principios de la década de 1950 (Figura 11). La aplicación de los teoremas en el análisis de estructuras de acero permitió el uso de cálculos según la teoría plástica, los cuales ya se empleaban en el Reino Unido desde 1948 (como una cláusula de la norma británica BS).

³⁵ Kurrer, K. E. *Ibid.* P. 133

³⁶ Bažant, Z., P. et al. *Op cit.* P. xix

³⁷ Kurrer, K. E. *Op cit.* P. 133

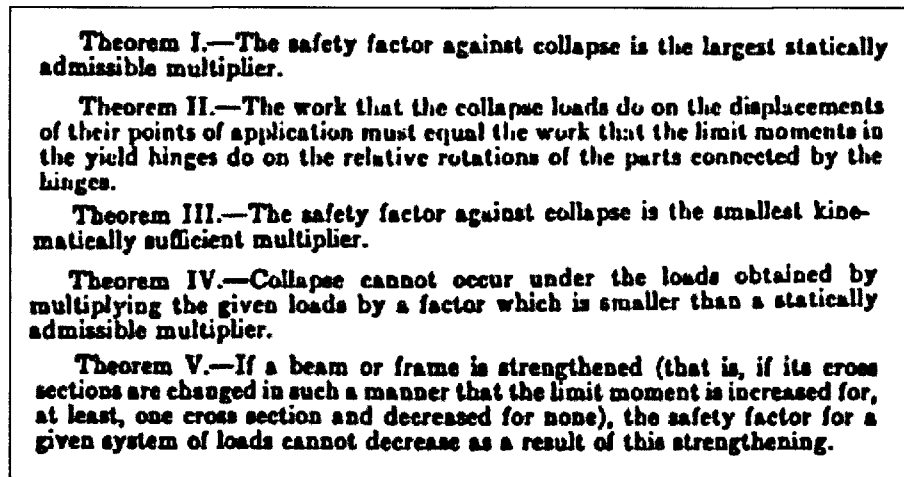


Figura 11. Teoremas del diseño por carga última, según Greenberg y Prager, 1951-1952³⁸

La teoría de estructuras fundamentada en la teoría plástica fue concebida inicialmente para el acero estructural. Más tarde se observó que también podía aplicarse a las estructuras de concreto reforzado. También fue evidente que la teoría plástica podía emplearse en cualquier construcción con un comportamiento dúctil, siempre y cuando no existan problemas de estabilidad (como fallas por pandeo). Jacques Heyman reconoció este hecho, y también otros ingenieros que desde principios del siglo XX intuían esta posible aplicación³⁹. Heyman fue el primero en reconocer que los teoremas fundamentales generaron un nuevo paradigma que podía aplicarse a todas las construcciones ejecutadas con materiales convencionales. Por ejemplo, ya desde la década de 1930, Kazinczy y Gvozdev habían considerado el aplicar el análisis por carga última a las estructuras de concreto reforzado. Sin embargo, la aplicación no era tan obvia para materiales como la madera, y mucho menos para la mampostería. Aun así, Heyman se percató que los teoremas de la teoría de la carga última podían adaptarse adecuadamente a materiales heterogéneos como la piedra natural, o los ladrillos de arcilla.

La teoría de estructuras fundamentada en la teoría plástica experimentó su fase de consolidación entre 1960 y 1970. Los estudios específicos fueron reemplazados por la publicación de manuales, los cuales jugaron un papel crucial en extender la aplicación de la teoría plástica. Los autores de estos manuales y reglamentos eran ingenieros y científicos eminentes, quienes se habían involucrado

³⁸ Kurrer, K. E. Op cit. "Figure 2 – 98. The theorems of ultimate load design after Greenberg and Prager" P. 133

³⁹ Kurrer, K. E. Ibíd. P. 134

consistentemente en este proceso de consolidación. Algunos de los autores contribuyentes fueron Beedle, Neal, Horne, Heyman y Baker⁴⁰.

Entre las investigaciones más recientes, es importante resaltar la labor del Dr. Javier Bonet de la Universidad Swansea (Gales, Reino Unido). El trabajo de investigación del Prof. Bonnet se ha enfocado a diversos temas de la mecánica computacionales, tales como: formado superplástico, análisis de impacto en el cuerpo humano, métodos libres de mallas (*meshless*) con base en partículas y análisis estructural de cascarones y membranas⁴¹. La influencia de Bonet está presente también en el presente trabajo de investigación. El Dr. Bonet, quien actualmente funge como jefe de la Escuela de Ingeniería en Swansea, fue asesor de la tesis doctoral del Dr. Raymundo Antonio Cordero Cuevas (asesor de la presente tesis de maestría). Además, Javier Bonnet fue asesor de la tesina de especialidad de Rafel Pons Fedelich (una de las principales fuentes bibliográficas aquí empleadas).

Han transcurrido más de dos siglos de avance teórico, se han establecido los conceptos mecánicos y matemáticos de la plasticidad y se han desarrollado enfoques orientados al cálculo computacional. Todo esto ha guiado a la ingeniería estructural a una etapa más estable en lo que respecta al cálculo de la resistencia última de las estructuras. La segunda mitad del siglo XX ha sido un período de rápido refinamiento y de extensa diversificación de este tema, el cual continúa hasta el día de hoy. El presente trabajo de investigación tiene como objetivo ser una contribución tecnológica en la aplicación práctica de la teoría de la plasticidad en las estructuras de acero.

1.2 La carga de colapso en el contexto del análisis plástico de vigas y marcos.

Anteriormente, los métodos convencionales de análisis y diseño se basaban en los esfuerzos permisibles de trabajo cuyo valor se ubicaba siempre dentro del rango elástico. En vista de que los resultados del análisis elástico dejan de ser válidos cuando el límite elástico es excedido en la sección

⁴⁰ Kurrer, K. E. *Ibíd.* P. 133

⁴¹ Prof. Javier Bonnet. Swansea University: School of Engineering. Disponible en: <http://www.swan.ac.uk/staff/academic/engineering/bonetjavier/>

transversal más crítica, el diseño elástico de una estructura requiere un margen de seguridad que garantice una respuesta completamente elástica.

En varias ocasiones el diseño de las estructuras de acero (y su respuesta), queda gobernado por las condiciones de servicio. Para los casos en que la resistencia última gobierna, esta capacidad de carga es superior al límite elástico. En una estructura construida con un material dúctil, la capacidad de carga rara vez se agota con el inicio de la fluencia plástica, ya que las deflexiones excesivas no ocurren antes que se alcance un valor de carga apreciablemente mayor al límite elástico⁴². Este efecto es más pronunciado en las estructuras estáticamente indeterminadas, donde existe una redistribución de esfuerzos más allá del límite elástico, lo cual resulta en un notorio incremento de la capacidad de carga. De esto se desprende que el diseño económico de una estructura puede basarse en un factor de carga adecuado aplicable a la carga para la cual, la deflexión general ocurre de un modo más o menos no restringido. Dicha carga se conoce como la carga de colapso, la cual puede calcularse por métodos de análisis plástico sin tener que considerar rango elástico-plástico de deformaciones. La influencia del endurecimiento por deformación (*strain hardening*) usualmente es despreciada, y es por esto que la capacidad de carga calculada siempre es un valor conservador.

La resistencia de una estructura se caracteriza por su carga de colapso la cual se obtiene a partir de ciertas idealizaciones⁴³. Considérese que para una estructura elasto-plástica, sin endurecimiento, un estado de colapso plástico se define como uno para el cual las deflexiones (consideradas pequeñas), comienzan a incrementarse bajo cargas externas constantes. Ya que la distribución de momentos flectores permanece sin cambios durante el colapso, el cambio en curvatura desaparece en todas partes excepto, en ciertas secciones transversales críticas donde el momento flector alcanza completamente el valor del momento plástico. En teoría, se producen curvaturas infinitamente grandes en dichas secciones críticas, generando así rotaciones propias de una articulación, las cuales dan lugar al colapso plástico a través de un mecanismo de tipo eslabón, o cadena. Si el material se asume como rígido-plástico, la carga de colapso es aquella para la cual la deformación de la estructura se torna posible, a medida que la carga va aumentando en magnitud progresivamente desde cero. La razón de la carga de

⁴² Chakrabarty, J. *Ibíd*, P. 229

⁴³ *Ídem*.

colapso con respecto a la carga de servicio, conocida como el “factor de carga”, representa el margen de seguridad bajo condiciones de servicio.

De acuerdo al teorema de la cota inferior del análisis de estado límite, una carga externa en equilibrio con una distribución de momentos flectores, la cual en ningún punto excede el valor completamente plástico, es menor o igual que la carga de colapso⁴⁴. Dicha distribución se dice que es estáticamente admisible. El teorema de la cota superior por el otro lado establece que la carga que se obtiene de igualar el trabajo externo de la misma con el trabajo interno absorbido por las articulaciones plásticas en cualquier mecanismo que se suponga es mayor que o igual a la carga de colapso. El modo de la deformada de dicho mecanismo se dice que es cinemáticamente admisible. Estos dos teoremas pueden combinarse para formar el teorema de unicidad el cual establece que, si se obtiene una distribución de momentos flectores estáticamente admisibles para una estructura que tenga suficientes articulaciones plásticas como para formar un mecanismo cinemático, entonces la carga correspondiente será igual a la carga de colapso.

Cuando una estructura está sujeta a un número de cargas, las cuales pueden aumentar con o sin una proporción estricta entre sí, el colapso plástico ocurrirá para la primera combinación de cargas para la cual una distribución de momento flector estáticamente admisible satisfaga la condición de mecanismo⁴⁵. Es por esto que la capacidad de carga de la estructura puede determinarse para cualquier relación de cargas aplicadas en el estado de colapso, sin necesidad de referencia alguna al historial de carga. De ahí se observa que la carga de colapso no se ve afectada por los esfuerzos internos iniciales, así como cualquier flexibilidad de los apoyos y por la unión imperfecta de elementos estructurales. Sin embargo, si el problema no es estáticamente determinado en el momento de colapso, la distribución de momento flector si dependerá de tales factores, como el historial de cargas, esfuerzos iniciales y el asentamiento de apoyos.

⁴⁴ Ídem.

⁴⁵ Ídem.

1.3 Motivación.

En la actualidad, el análisis en ingeniería y los reglamentos de diseño promueven el uso de la teoría de estado límite. Esto se logra mediante el uso de conceptos y procedimientos que además de aumentar la eficiencia de las etapas de análisis y diseño, conducen a estructuras eficientes y seguras que emplean menos material.

Debe notarse que respecto al estado actual del arte, las herramientas de análisis y diseño de estado límite no están disponibles en general, o bien que los procedimientos existentes son poco prácticos o costosos computacionalmente (como el caso del análisis incremental). De ahí que la búsqueda de nuevos enfoques y procedimientos prácticos para implementar el análisis límite, sea un proceso vigente en la comunidad de científicos e ingenieros.

El presente trabajo de investigación tiene como objetivo el contribuir a este esfuerzo, buscando procedimientos nuevos que sean robustos y la vez prácticos, evitando los costosos métodos de análisis incremental.

1.4 Estado actual del arte.

La perspectiva general y el alcance de la investigación reciente en el campo del análisis de estado límite, se resume en los siguientes puntos⁴⁶:

- Se tienen como base los teoremas clásicos del análisis de estado límite.
- Se estudia un material rígido-plástico de Von Mises.
- Actualmente el modelado es para problemas de esfuerzo plano.

⁴⁶ Cordero Cuevas, Raymundo Antonio. Limit State Analysis: Adaptive Finite Element Upper and Lower Bound Approach to the Evaluation of the Limit Load of Von Misses Rigid-Plastic Material Body in Plane Stress. Reino Unido. University of Wales Swansea. School of Engineering. 2005. Pp. 2-9

- La cota superior se obtiene por una solución de elemento finito (EF) con optimización Lagrangiana empleando el método de Newton-Raphson / Piccard.
- Las tracciones inter-elemento equilibrados se recuperan con la técnica de flujo constante de Ladeveze. Esto no es necesario para marcos en dos dimensiones como en el presente trabajo.
- La estimación de la cota inferior se logra con la solución de problemas locales, con base en el enfoque elemento-por-elemento.
- Se emplean esquemas adaptativos con las contribuciones elementales a la brecha (*gap*) entre cotas inferior y superior, como parámetro de control (considerándose el error en la solución).

1.5 Producto y contribuciones de tesis.

La principal contribución del presente trabajo de investigación será la formulación e implementación de una solución cinemática estricta para la obtención de la carga y modo de colapso según el teorema de la cota superior. La solución se implementará por medio de dos métodos, siendo estos el método de la secante (SEC) y el método de Quasi-Newton Raphson (QNR).

El producto generado por la investigación será el código para un programa computacional en lenguaje Fortran. Este programa emplea el análisis de estado límite para obtener la carga de colapso de una serie de problemas estructurales específicos, incluyendo el mecanismo cinemático de colapso. El programa en Fortran emplea un paquete comercial de Pre- y Pos-procesamiento. El resultado final será la carga de colapso para la estructura analizada, así como el mecanismo de colapso asociado. Todo el análisis resultante del presente trabajo se limita a marcos en el plano.

En el segundo capítulo se presentan y desarrollan los aspectos fundamentales de los cuerpos sujetos a esfuerzos uniaxiales, tales como los modelos de análisis y sus curvas correspondientes.

Capítulo 2.

Fundamentos del análisis plástico de estructuras bajo esfuerzo uniaxial.

2.1 Curvas esfuerzo-deformación.

El modelado del comportamiento inelástico de un cuerpo sólido es un tema complejo. El acero estructural más empleado en la industria de la construcción es el acero dulce (*mild steel*), el cual es un material elastoplástico. En un diagrama esfuerzo deformación σ - ϵ (Figura 12) para un acero dulce se observa que los esfuerzos σ aumentan linealmente respecto a las deformaciones unitarias ϵ hasta cierto límite. Este punto se conoce como el límite elástico. Después del límite elástico, aparece una pequeña “joroba” o protuberancia en la curva, y enseguida se forma una “meseta” horizontal, donde la deformación unitaria ϵ aumenta sin producir cambios en el nivel de esfuerzos σ . Este valor constante de esfuerzo está denotado por σ_y , se conoce como esfuerzo de cedencia, esfuerzo de fluencia, límite plástico, límite de cedencia, límite de fluencia. Esta meseta es mucho más larga que el rango elástico y eventualmente (por lo menos en el caso del acero) llega a un punto donde la curva empieza a elevarse por efecto del endurecimiento por deformación (*strain-hardening*) para alcanzar un valor máximo, y eventualmente se produce la falla de material.

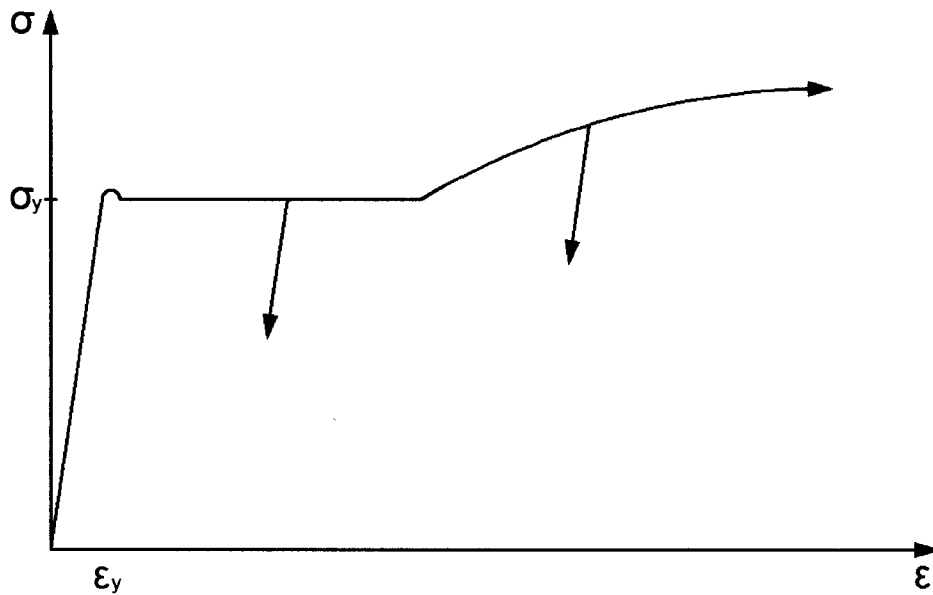


Figura 12. Gráfica esfuerzo-deformación uniaxial para acero dulce (*mild steel*)⁴⁷

Para otros metales como las aleaciones de acero y las aleaciones de aluminio, no existe un esfuerzo de fluencia claramente definido en la gráfica esfuerzo deformación uniaxial. Para estos materiales se tiene un suave declive de la pendiente de la curva de esfuerzo deformación (Figura 13). Para propósitos de análisis se puede suponer un esfuerzo de fluencia para dicha curva, ubicado en la zona de transición entre el comportamiento elástico y el comportamiento inelástico.

⁴⁷ Figura propia, adaptada de la figura original, Bažant, Z., P. et al. Op cit. "Figure 1.1 Uniaxial stress-strain diagrams: a) mild steel" P. 4

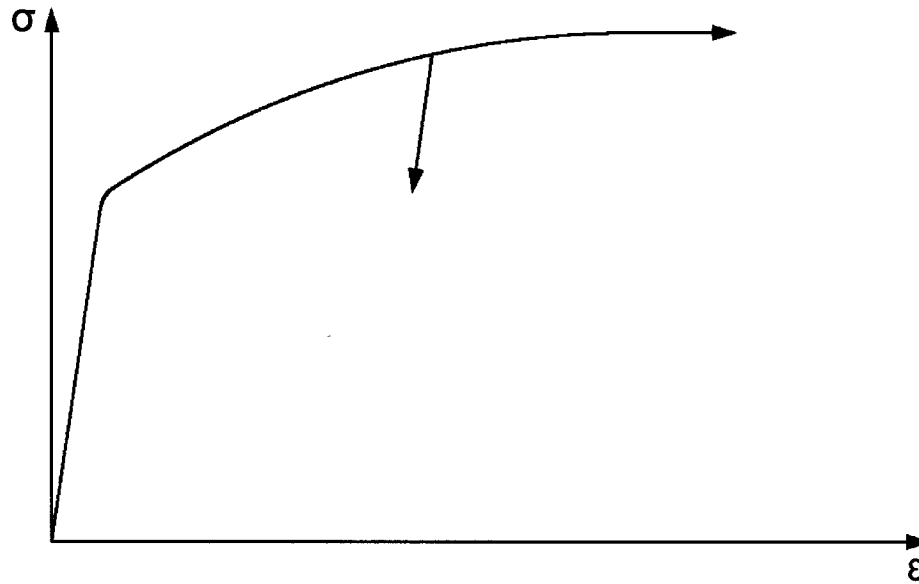


Figura 13. Aleación de acero (*alloy steel*)⁴⁸

Para facilitar el análisis plástico de estructuras se hace una idealización: se asume que la meseta es perfectamente horizontal y plana, sin incluir el incremento de la curva (endurecimiento del material) antes de la falla. Esto se conoce como un material elástico-perfectamente plástico (o, perfectamente plástico). Este caso se describe en la Figura 14.

⁴⁸ Figura propia, adaptada de la figura original, Bažant, Z., P. et al. *Ibíd.* "Figure 1.1 Uniaxial stress-strain diagrams: b) alloy steel" P. 4

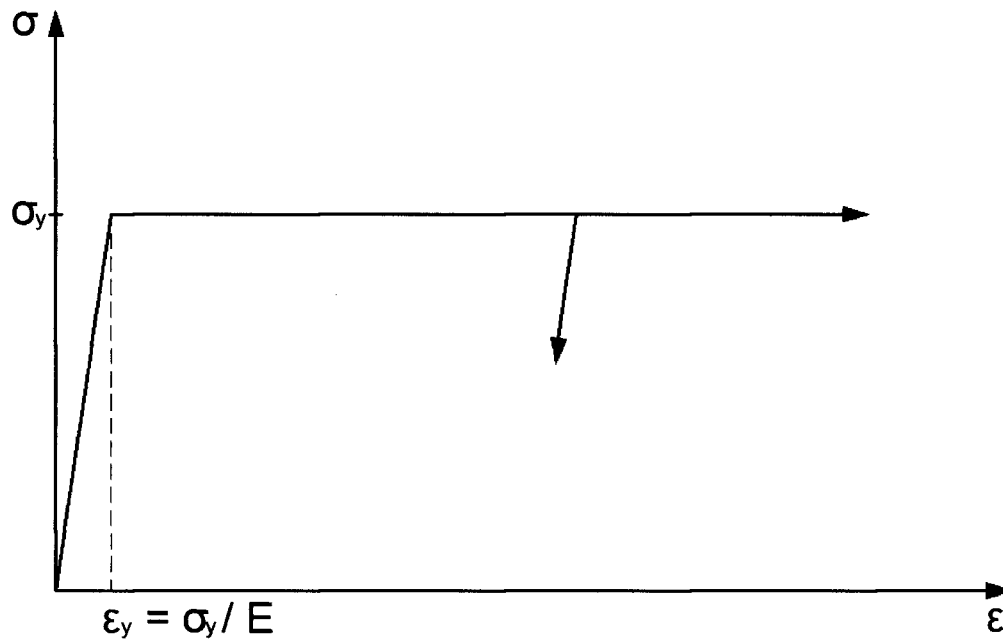


Figura 14. Material elástico – perfectamente plástico.⁴⁹

El fenómeno de fluencia ocurre cuando se llega al valor de σ_y^+ , σ_y^- , donde el signo positivo (+) indica tensión y el signo negativo (-) denota compresión. Usualmente ambos valores tienen la misma magnitud, es decir que $\sigma_y^+ = \sigma_y^- = \sigma_y$

Esto lleva a la condición de esfuerzos plásticamente admisibles la cual dice que:

$$-\sigma_y \leq \sigma \leq \sigma_y \quad (2.1)$$

Esto es que un esfuerzo es plásticamente admisible cuando cae dentro del rango delimitado por los valores $-\sigma_y$ y $+\sigma_y$, lo cual corresponde al rango elástico. Con ello se puede decir que un material alcanza el estado de fluencia cuando:

$$|\sigma| - \sigma_y = 0 \quad (2.2)$$

⁴⁹ Figura propia, adaptada de la figura original, Bažant, Z., P. et al. Ibíd. "Figure 1.1 Uniaxial stress-strain diagrams: c) elastic-perfectly plastic material model" P. 4

Esta expresión se conoce como la condición de fluencia.

Las deformaciones plásticas suelen ser varias veces mayores que las deformaciones elásticas, y en ese caso el comportamiento del material puede simplificarse aún más como un material rígido – perfectamente plástico, omitiendo el rango elástico (Figura 15).

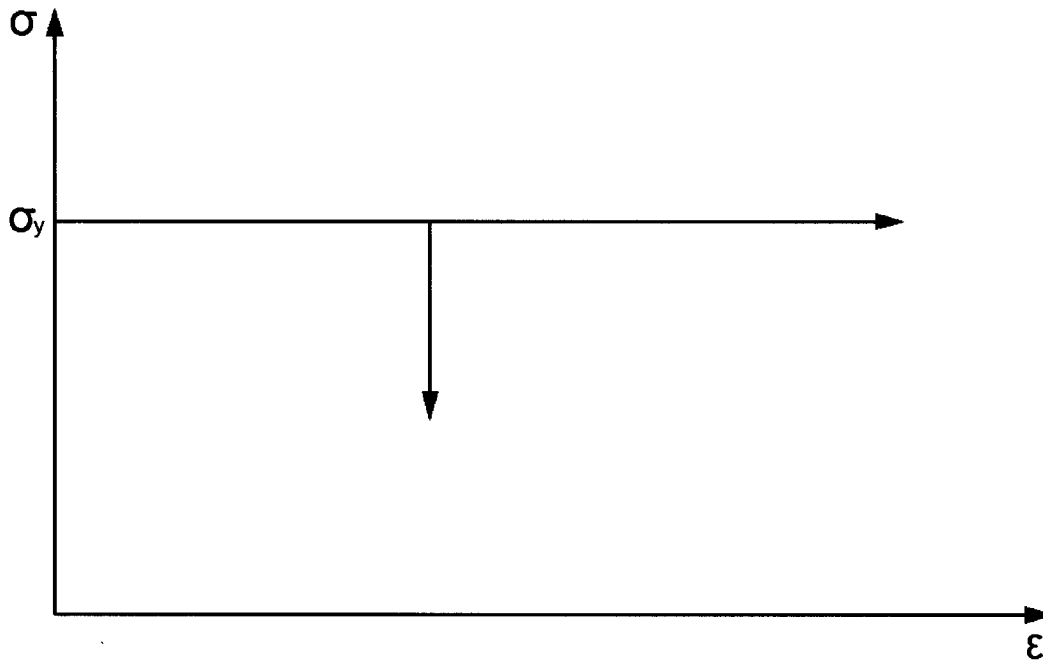


Figura 15. Material rígido – perfectamente plástico.⁵⁰

Estas simplificaciones, tanto para el material elástico – perfectamente plástico como el material rígido – perfectamente plástico, podrían parecer alejadas del comportamiento real, el cual incluye cierto aumento en la pendiente de la curva después del límite elástico (Figura 12). Sin embargo, los resultados de calcular la carga de colapso con dichas simplificaciones, son bastante buenos. Se aproximan en muy buena medida a la carga real de colapso, analizada de estructuras físicas reales⁵¹. La razón para esto es que durante el colapso, las secciones transversales críticas se ubican en las deformaciones plásticas, que

⁵⁰ Figura propia, adaptada de la figura original, Bažant, Z., P. et al, *Ibíd.* "Figure 1.1 Uniaxial stress-strain diagrams: d) rigid-perfectly plastic material model" P. 4

⁵¹ Bažant, Z., P. et al. *Ibíd.* P. 4

son varias veces mayores a las deformaciones elásticas. De ahí que resulta el esfuerzo de fluencia es una buena aproximación al esfuerzo real.

Anteriormente se mencionó que el efecto de endurecimiento (*hardening*) se refleja en los incrementos de la curva de deformación. Esto representa un aumento en la rigidez del material debido al reacomodo microscópico del material. El acero es un material susceptible a dicho fenómeno; en dicho material este fenómeno se conoce como endurecimiento por deformación (*strain hardening*), o endurecimiento por trabajo (*work hardening*). Otro fenómeno es el de suavización (*softening*) donde la rigidez del material va disminuyendo y por ende, la pendiente de la curva de deformación también disminuye. Los materiales frágiles que presentan suavización son⁵² el concreto, las rocas, la mampostería, el hielo, la cerámica y los materiales compuestos (*composites*).

La principal característica de un material plástico es la irreversibilidad de las deformaciones; en el caso de las deformaciones elásticas, una vez que ocurre la descarga, el elemento deformado recupera sus dimensiones originales mientras que en las deformaciones plásticas, el elemento no recupera la forma original y las deformaciones son permanentes. En el contexto de la teoría de deformaciones pequeñas, se tiene la descomposición aditiva

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (2.3)$$

donde la deformación total, ε , es la suma de la deformación elástica (reversible), ε_e , y la deformación plástica (irreversible), ε_p . La deformación elástica se relaciona al nivel de esfuerzos por medio de la Ley de Hooke

$$\sigma = E\varepsilon_e \quad (2.4)$$

donde E es el módulo de elasticidad de Young. Combinando las dos ecuaciones anteriores se llega a la expresión

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p) = E\varepsilon - E\varepsilon_p \quad (2.5)$$

Durante el proceso de carga elástica el trabajo mecánico efectuado en el material se convierte en energía elástica almacenada. Durante la descarga elástica dicha energía almacenada es liberada del

⁵² ídem.

material. Durante la fluencia plástica parte de este trabajo se disipa irreversiblemente en los procesos plásticos que ocurren dentro del material. Usualmente se disipan como calor. Para un material perfectamente elastoplástico la razón de disipación por unidad de volumen (también llamada densidad de disipación de trabajo) es el producto del esfuerzo y la razón de deformación plástica.

Bajo esfuerzo uniaxial, el esfuerzo durante la fluencia plástica puede tomar uno de dos valores: puede ser $\sigma = \sigma_y$ y entonces la razón de deformación plástica $\dot{\epsilon}_p$ será positiva, mientras que por el otro lado, el esfuerzo puede ser $\sigma = -\sigma_y$ y en este caso la razón de deformación plástica $\dot{\epsilon}_p$ tendrá valor negativo. En cualquiera de los dos casos se observará que la deformación elástica permanece constante debido a la Ley de Hooke $\sigma = E\epsilon$.

Consecuentemente se observa que $\dot{\epsilon}_p = \dot{\epsilon}$ y que la razón de disipación por unidad de volumen es

$$\mathcal{D} = \sigma \dot{\epsilon}_p = \sigma_y |\dot{\epsilon}_p| \quad (2.6)$$

Se observa que la parte derecha de la anterior ecuación (2.6) sólo depende de la razón de disipación plástica $\dot{\epsilon}_p$ y de un parámetro material constante, el cual es σ_y . De ahí que la densidad de disipación de trabajo, sea función únicamente de la razón de deformación plástica, es decir que

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\dot{\epsilon}_p) \quad (2.7)$$

Ahora es posible hacer una observación importante. Supóngase que, en un momento dado, el material entra en fluencia bajo esfuerzo uniaxial. Sea σ_s cualquier esfuerzo plásticamente admisible, esto es que satisfaga la condición $|\sigma_s| \leq \sigma_y$ (pero totalmente independiente de la razón de deformación plástica real $\dot{\epsilon}_p$), entonces se tiene que

$$\sigma_s \dot{\epsilon}_p \leq |\sigma_s| |\dot{\epsilon}_p| \leq \sigma_y |\dot{\epsilon}_p| = \mathcal{D}(\dot{\epsilon}_p) \quad (2.8)$$

Consecuentemente, el esfuerzo real σ requerido para inducir una razón de deformación plástica dada $\dot{\epsilon}_p$ maximiza el producto $\sigma_s \dot{\epsilon}_p$ de entre todos los valores de esfuerzos σ_s plásticamente admisibles⁵³:

$$\mathcal{D}(\dot{\epsilon}_p) = \sigma \dot{\epsilon}_p = \max_{\sigma_s \in \bar{\epsilon}} (\sigma_s \dot{\epsilon}_p) \quad (2.9)$$

donde $\bar{\epsilon} = [-\sigma_y, \sigma_y]$ es el conjunto de todos los estados de esfuerzos plásticamente admisibles. Es decir, que el intervalo abierto $\epsilon = (-\sigma_y, \sigma_y)$ es el dominio elástico del espacio de esfuerzos. La anterior expresión es un caso especial del Postulado de Máxima Disipación Plástica, el cual se explicará detalladamente más adelante.

En el siguiente capítulo se abordan con mayor detalle los conceptos de los elementos plásticos (barras y articulaciones) que dan origen al mecanismo cinemático de colapso.

⁵³ Bažant, Z., P. et al. *Ibíd.* P. 6

Capítulo 3.

Barras plásticas y articulaciones plásticas.

3.1 Fluencia plástica en barras.

Los diagramas de esfuerzo-deformación comentados en el capítulo anterior describen el comportamiento de un cuerpo sólido al nivel de un punto material. Para comprender el comportamiento de estructuras esqueléticas, como las armaduras, las vigas y los marcos, es necesario conocer las relaciones entre las fuerzas internas relevantes y las deformaciones generalizadas correspondientes. Para el caso de una armadura (estructura compuesta de barras), el comportamiento de un elemento está gobernado por la fuerza axial S , la cual depende del cambio de longitud (denotada como l) de la barra. Dicho cambio de longitud se define como la extensión total e . El concepto de la deformación unitaria ε está ligado a la extensión e .

En el rango elástico, la relación esfuerzo-deformación queda regida por la Ley de Hooke $\sigma = E\varepsilon$, la cual al combinarse con las relaciones $\sigma = S/A$, $\varepsilon = e/l$, resulta en la ecuación

$$S = \frac{EA}{l}e \quad (3.1)$$

donde A es el área de la sección transversal y l es la longitud del elemento tipo barra. Cuando el esfuerzo alcanza el límite de fluencia, σ_y , la barra entra en fluencia y el esfuerzo no puede aumentar más allá de dicho valor límite. Es por esto que la fuerza axial permanece constante y tiene el valor de $\sigma_y = S_y / A$, donde S_y se conoce fuerza axial plástica. Estas consideraciones también son aplicables para el caso de compresión (recordando que la tensión tiene signo positivo y la compresión tiene signo negativo). El diagrama fuerza axial – extensión (S - e) sólo difiere del diagrama esfuerzo – deformación (σ - ε) en las escalas de los ejes (Figura 16).

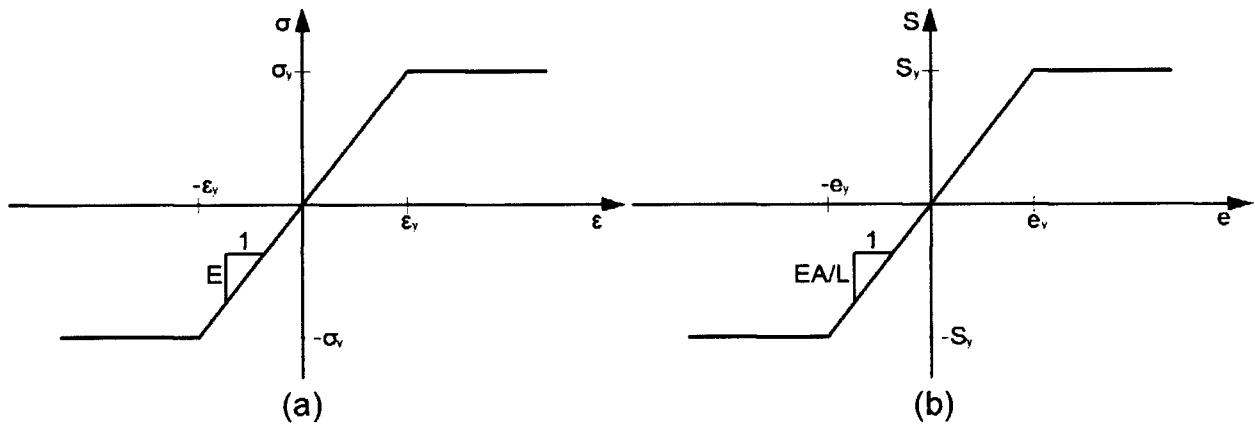


Figura 16. Diagramas de fuerza axial⁵⁴. a) Diagrama esfuerzo – deformación $\sigma - \epsilon$ para un material elástico perfectamente plástico b) Diagrama correspondiente fuerza – extensión $S - e$

Según lo expuesto en el capítulo anterior la densidad de disipación de trabajo (para esfuerzo uniaxial) se calcula a partir del producto del esfuerzo σ , y la razón de deformación plástica $\dot{\epsilon}_p$. Dicha expresión posteriormente se plantea en términos de la razón de extensión plástica \dot{e}_p . Esto se desarrolla de manera más clara en la siguiente expresión (obsérvese que la integral se calcula respecto al volumen V).

$$D_{\text{int}} = \int_V \mathcal{D} dV = \int_V \sigma \dot{\epsilon}_p dV = V \sigma \dot{\epsilon}_p = Al \sigma \frac{\dot{e}_p}{l} = A \sigma \dot{e}_p = S \dot{e}_p \quad (3.2)$$

Como se explicó en el capítulo anterior la razón de disipación en una barra en fluencia puede expresarse como

$$D_{\text{int}} = S \dot{e}_p = S_y |\dot{e}_p| \quad (3.3)$$

Esta última ecuación es un ejemplo del postulado de máxima disipación, aplicado a las barras en fluencia.

⁵⁴ Figura propia, adaptada de la figura original, Bažant, Z., P. et al. Ibíd. "Figure 2.1" P. 10

3.2 Articulaciones plásticas y el momento plástico.

Para comprender la formación del mecanismo que lleva al colapso de una estructura es necesario presentar y explicar los conceptos de la articulación plástica y del momento plástico.

En el caso de una viga con una serie de cargas perpendiculares al eje longitudinal, la falla estará controlada por la flexión. Se asume que las secciones transversales de la viga permanecen planas durante la flexión y además permanecen normales al eje central de la deformada de la viga. Con estas suposiciones es posible encontrar la relación entre el momento flector y la curvatura del eje central de la deformada de la viga. Las suposiciones enunciadas son válidas para la flexión elástica e inelástica, siempre y cuando la viga tenga la longitud suficiente (esto es que la longitud sea por lo menos diez veces la dimensión de la sección transversal⁵⁵).

La relación deformación-curvatura se define como

$$\varepsilon = zk \quad (3.4)$$

Dónde:

ε = deformación unitaria.

z = coordenada del peralte de la viga, medido desde el eje central.

k = curvatura de la viga. Esto es $k = 1/\rho$, dónde ρ es el radio de curvatura.

Para explicar el comportamiento de una viga rectangular sujeta a flexión pura se hace referencia a la Figura 17.

⁵⁵ Bažant, Z., P. et al. *Ibíd.* P. 10

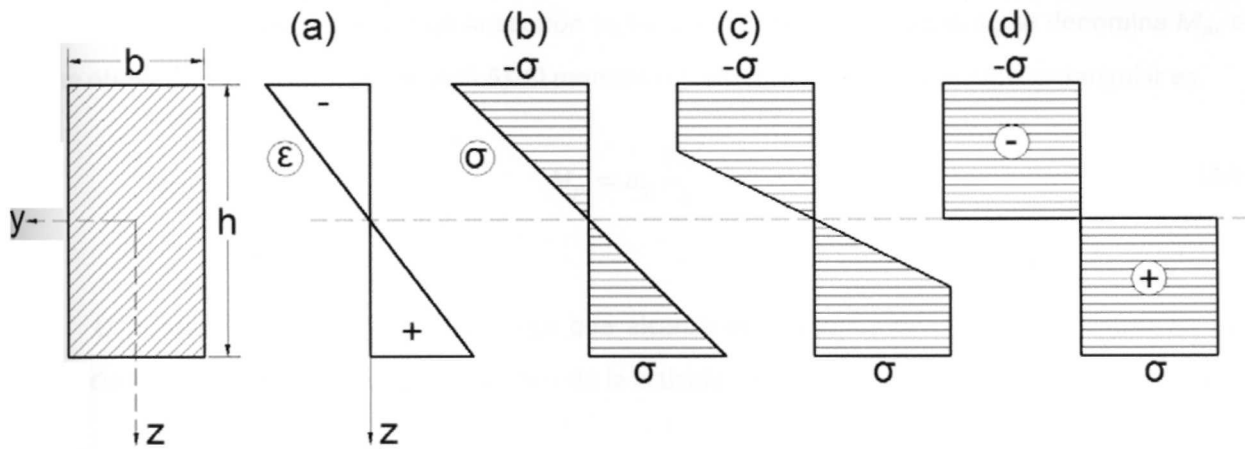


Figura 17. Sección transversal rectangular bajo flexión pura.⁵⁶

Para este caso se tiene que:

- Distribución de deformaciones: El signo negativo (-) indica compresión y el signo positivo denota tensión (+).
- Estado de esfuerzos en el límite elástico; las fibras más alejadas han alcanzado la fluencia σ_y .
- Esfuerzos en el estado elastoplástico; el resto de la sección comienza a plastificarse sin aumentar más allá del esfuerzo de fluencia σ_y .
- Esfuerzos en el estado límite plástico; la sección está completamente plastificada.

El momento flector M queda definido por la expresión

$$M = \int_A z\sigma(z) dA \quad (3.5)$$

donde $\sigma(z)$ es el esfuerzo normal, el cual es una función de la coordenada z .

⁵⁶ Figura propia, adaptada de la figura original, Bazant, Z., P. et al. Ibíd. "Figure 2.1 Rectangular cross section under pure bending" P. 10

El momento flector en el que la sección se ha plastificado completamente se denomina M_p , el cual se obtiene de la integral anterior (3.5). El momento plástico M_p para una sección rectangular es

$$M_p = \sigma_y \frac{bh^2}{4} \quad (3.6)$$

El punto de la estructura bajo carga que alcanza el momento plástico, se convierte en una articulación plástica. Para explicar el concepto de la articulación plástica considérese la viga de la Figura 18.

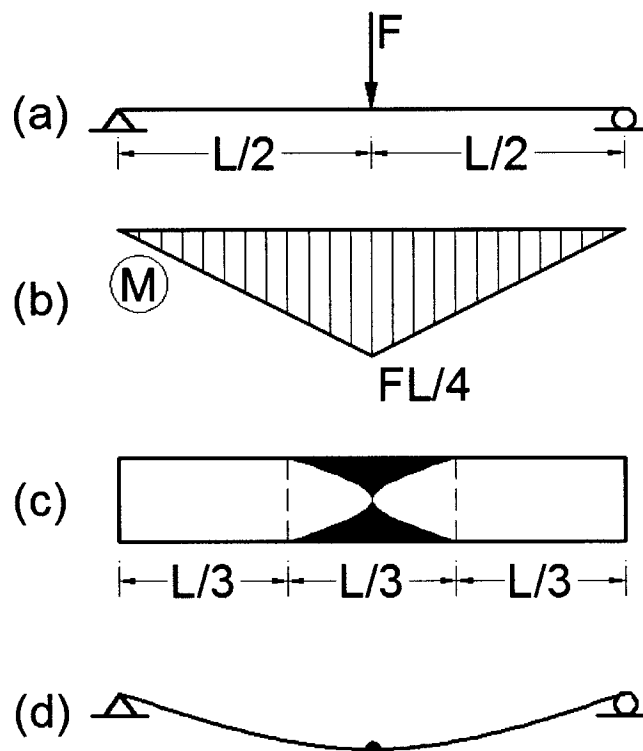


Figura 18. Viga con carga concentrada al centro del claro.⁵⁷

Una carga puntual F es aplicada al centro del claro de la viga simplemente apoyada (a). De acuerdo al diagrama de momento (b), es al centro del claro donde se desarrolla el máximo momento provocado por la carga F . Mientras parte de la sección transversal al centro del claro se mantenga

⁵⁷ Figura propia, adaptada de la figura original, Bažant, Z., P. et al. *Ibíd.* "Figure 2.4 Rectangular cross section under pure bending" P. 13

parcialmente elástica (no completamente plastificada), la viga no presentara grandes deformaciones. En el instante en el cual la sección transversal se plastifica completamente, es cuando aparece un cambio repentino en la respuesta de la viga. En vista de que la curvatura en dicho punto puede aumentar enormemente, matemáticamente de manera infinita, se forma el equivalente de una articulación (c), la cual se denomina articulación plástica o articulación de fluencia.

Para propósitos de análisis estructural, la articulación plástica se idealiza como una sección transversal con curvatura infinita, y rodeada de material en estado elástico. Un incremento infinito de curvatura en esta sección transversal es el equivalente a una rotación finita que provocará el colapso de la viga (d).

La carga de colapso para la viga simplemente apoyada está definida por la condición

$$M_{max} = \frac{F_c}{2} \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{F_c L}{4} = M_p \quad (3.6)$$

por lo que la carga de colapso es

$$F_c = \frac{4M_p}{L} \quad (3.7)$$

Este cálculo de la carga de colapso para la viga simplemente apoyada (que es una estructura estáticamente determinada) parece trivial pero es un proceso mucho más elaborado y complejo para estructuras estáticamente indeterminadas como es el caso de marcos. La relación entre la formación de la articulación plástica y la carga de colapso, es determinar el número y configuración de articulaciones plásticas que generaran un mecanismo cinemático de colapso, y calcular la carga (o multiplicador de carga) que provoca la formación de dicho mecanismo de colapso.

Se debe observar que el concepto de la articulación plástica no requiere grandes rotaciones plásticas. Durante el colapso la carga permanece constante y las deformaciones elásticas no cambian.

De ahí que todos los componentes estructurales cuya sección no se ha plastificado completamente, se comportarán como cuerpos rígidos.⁵⁸

Como ya se mencionó, la articulación plástica idealizada concentra en una sección transversal todas las deformaciones plásticas, y el resto del material se comportará como cuerpo rígido (Figura 19).

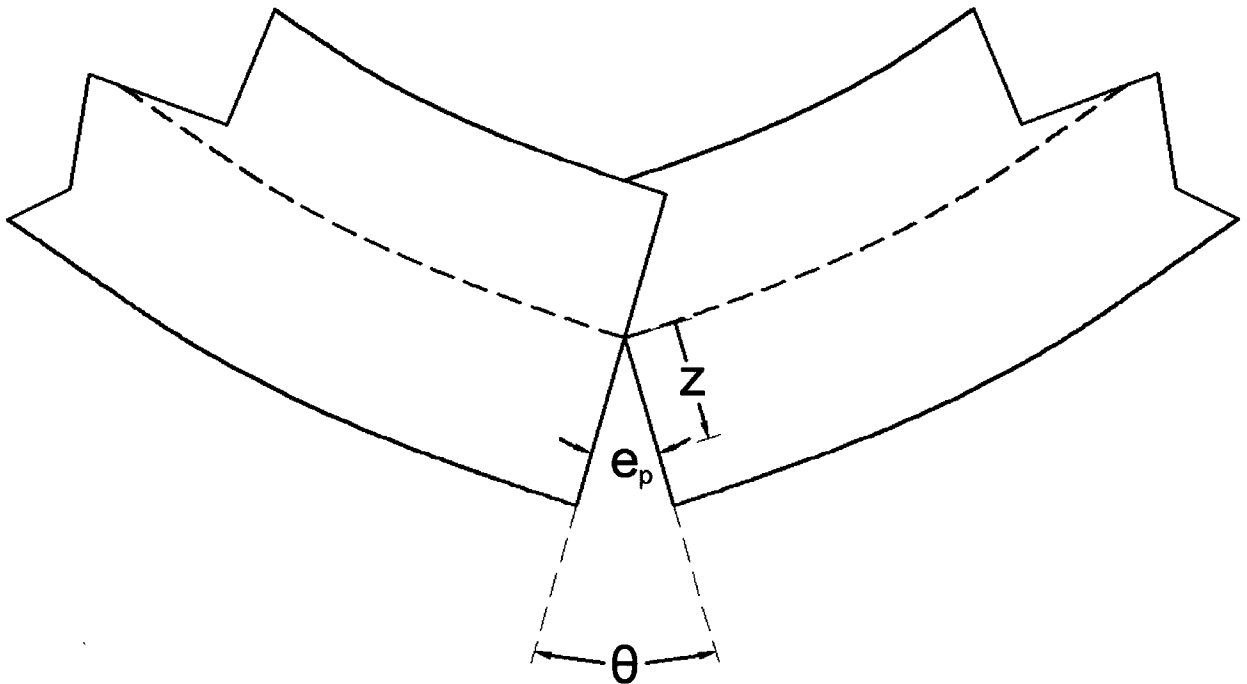


Figura 19. Idealización de una articulación plástica.⁵⁹

La suposición de concentrar en una sola sección transversal todas las deformaciones plásticas, se justifica por el hecho de que la longitud y forma exactas de la zona plastificada tienen un efecto muy pequeño en la respuesta global de toda la estructura.

⁵⁸ Bažant, Z., P. et al. *Ibíd.* P. 14

⁵⁹ Figura propia, adaptada de la figura original, Bažant, Z., P. et al. *Ibíd.* "Figure 2.5 Idealized Plastic Hinge" P. 15

En la Figura 19 se tiene que la deformación plástica ha sido substituida por una rotación θ , que representa la articulación idealizada. A partir de consideraciones cinemáticas se tiene que la extensión plástica e_p en punto arbitrario de la sección transversal puede expresarse por la relación lineal

$$e_p(z) = \theta z \quad (3.8)$$

El trabajo disipado por una articulación plástica se define por la integral de volumen

$$D_{\text{int}} = \int_V \sigma \dot{\epsilon}_p dV \quad (3.9)$$

la cual puede evaluarse como la integral sobre la sección transversal completamente plastificada

$$D_{\text{int}} = \int_A \sigma(z) \dot{\epsilon}_p(z) dA \quad (3.10)$$

Esto es posible ya que la extensión $\dot{\epsilon}_p$ corresponde a la deformación plástica en la coordenada z integrada respecto a la longitud de la articulación plástica. Sustituyendo la extensión por la rotación se tendrá que⁶⁰

$$D_{\text{int}} = \int_A \sigma(z) \dot{\theta} z dA = \dot{\theta} \int_A \sigma(z) z dA = M \dot{\theta} \quad (3.11)$$

Retomando la expresión (2.9) para la disipación por volumen

$$\mathcal{D} = \sigma \dot{\epsilon}_p = \sigma_p |\dot{\epsilon}_p| \quad (3.12)$$

y la expresión para razón de disipación para un elemento barra en fluencia

$$D_{\text{int}} = S \dot{\epsilon}_p = S_p |\dot{\epsilon}_p| \quad (3.13)$$

por analogía, la disipación en una articulación plástica puede definirse por la ecuación

$$D_{\text{int}} = M \dot{\theta} = M_p |\dot{\theta}| \quad (3.14)$$

siempre y cuando la magnitud del momento plástico no dependa del signo de la curvatura (tensión a lo largo de la cara inferior y compresión a lo largo de la cara superior, y viceversa). Esto se puede comprobar si el esfuerzo de fluencia en compresión es igual en magnitud al esfuerzo de fluencia en tensión. Los fundamentos del análisis de estado límite se explican en el siguiente capítulo.

⁶⁰ Bažant, Z., P. et al. *Ibíd.* P. 15

Capítulo 4.

Análisis de estado límite.

4.1 Diferencia entre análisis incremental y Análisis de estado límite.

El análisis incremental registra la evolución o historia de la respuesta de una estructura ante una carga incremental hasta el punto de colapso. Si bien la historia de respuesta de una estructura puede ser objeto de estudio, cuando sólo se desea calcular la capacidad de carga o resistencia de una estructura, el enfoque debe ser la última etapa de la historia de respuesta: el colapso plástico.

El estado de la estructura en éste límite, el del colapso, es el objeto de estudio del análisis del estado límite. Dicho estado puede estudiarse sin analizar toda la historia de respuesta de la estructura. Esto es la base del análisis de estado límite (o análisis límite).

4.2 Bases del análisis de estado límite.

La base del análisis del estado límite son dos enfoques o métodos, los cuales derivan en dos teoremas. Estos enfoques son el estático y el cinemático, y a partir de ellos se formulan los teoremas de la cota inferior y de la cota superior, respectivamente.

En el enfoque estático se buscan estados con fuerzas (en armaduras) o esfuerzos (en vigas y marcos) que sean estáticamente admisibles. Para el enfoque cinemático se busca la formación de mecanismos de colapso potenciales. El mecanismo se forma cuando aparecen suficientes articulaciones

plásticas (en vigas y marcos), o elementos barra en fluencia (en las armaduras), como para provocar inestabilidad en la estructura y por ende, el colapso de la misma.

Una observación pertinente para el caso de las vigas y marcos sería que el efecto de las fuerzas normales y cortantes en la formación de las articulaciones plásticas es despreciable. El error producido por esta simplificación es usualmente pequeño⁶¹. Se considera que la articulación plástica se forma cuando se alcanza el momento del límite plástico.

El análisis de estado límite considera las siguientes suposiciones o hipótesis:

- Para todas las articulaciones plásticas, en la gráfica esfuerzo-deformación debe existir una meseta horizontal de cedencia.
- Todas las articulaciones plásticas deben ubicarse simultáneamente en la meseta de cedencia (o por lo menos en algún punto del proceso de carga).
- Todos las deformaciones deben ser lo suficientemente pequeñas, antes del colapso.

4.3 El multiplicador de colapso μ .

Para enunciar los teoremas se deben definir algunos términos. Primeramente se asume que todos los componentes del conjunto de fuerzas aplicadas a una estructura cambian proporcionalmente respecto a cierto parámetro de carga, denotado por μ . Este caso especial suele denominarse carga

⁶¹ Bažant, Z., P. et al. *Ibíd.* P. 47

proporcional, puesto que la variación es directamente proporcional a un parámetro dado, que en este caso es μ .⁶²

La carga proporcional en notación matricial está dada por:

$$\mathbf{f} = \mu \bar{\mathbf{f}} \quad (4.1)$$

Dónde:

\mathbf{f} = vector de cargas aplicadas que varían con respecto al tiempo.

μ = parámetro de carga o multiplicador de carga.

$\bar{\mathbf{f}}$ = vector fijo de cargas de referencia.

Para el colapso se tiene que $\mu = \mu_c$ donde μ_c es el multiplicador de carga del límite plástico (o bien el multiplicador plástico de la carga límite).

El multiplicador μ_c puede considerarse como el factor de seguridad sólo si el vector de cargas de referencia representa las cargas de servicio (o bien, representa las cargas de diseño). Por el otro lado si las cargas de referencia son unitarias entonces es más apropiado denominar al multiplicador μ_c como la carga de colapso.

4.4 Condición de admisibilidad plástica.

La condición de admisibilidad plástica plantea que un esfuerzo es plásticamente admisible cuando este cae en el rango de esfuerzos delimitado σ_y , ya sea en tensión (+) o en compresión (-).

$$-\sigma_y \leq \sigma \leq \sigma_y \quad (4.2)$$

⁶² Bažant, Z., P. et al. Ibíd. P. 23

El estado de esfuerzos de una estructura queda caracterizado por el campo de esfuerzos, esto es, la distribución espacial de esfuerzos. El campo de esfuerzos será plásticamente admisible si el esfuerzo en cualquier punto de la estructura es plásticamente admisible. Para el modelo idealizado de una armadura el campo de esfuerzos en cada barra es uniaxial y homogéneo.

Esta condición puede plantearse en términos de fuerzas para el caso de una armadura de n elementos como

$$-S_{y,i} \leq S_i \leq S_{y,i} \quad S_{y,i} = \sigma_y A_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.3)$$

En notación matricial estas condiciones pueden escribirse como

$$-s_y \leq s \leq s_y \quad (4.4)$$

Donde s es el vector de fuerzas axiales y s_y es el vector de fuerzas axiales plásticas.

Para el caso de vigas y marcos que se componen de n elementos, la admisibilidad plástica se plantea en términos del momento plástico (esto es despreciando los efectos de las fuerzas axiales y cortantes):

$$-M_{p,i} \leq M \leq M_{p,i} \quad M_{p,i} = \sigma_y W_{c,i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.5)$$

donde M_i es el momento en la sección i y $M_{p,i}$ es el momento plástico en la sección transversal i . Se observa que la expresión para marcos y vigas tiene la misma forma que la expresión del caso de armaduras. De ahí que se puede tomar la expresión

$$-s_y \leq s \leq s_y \quad (4.6)$$

con la particularidad de que para el caso de marcos y vigas, el vector s ahora contiene los momentos flectores en todas las secciones críticas y el vector s_y contiene los momentos plásticos de dichas secciones. En general, el vector s se denominará el vector de fuerzas internas y s_y el vector de capacidades plásticas. Si las desigualdades en la expresión han de cumplirse, en el sentido estricto se tendrá que:

$$-s_y < s < s_y \quad (4.7)$$

4.5 Estado de admisibilidad estática.

El estado estáticamente admisible de una estructura es cualquier campo de esfuerzos plásticamente admisibles, que está en equilibrio con un múltiplo dado de la carga de referencia que satisfaga las condiciones de fluencia. El multiplicador de carga correspondiente, esto es μ_s , es conocido como el multiplicador de carga estáticamente admisible. De manera más resumida, un estado estáticamente admisible está descrito por un vector de fuerzas internas s y por un multiplicador de carga μ_s que satisfaga las condiciones de admisibilidad plástica y las condiciones de equilibrio⁶³

$$\mathbf{B}^T \mathbf{s} = \mu_s \bar{\mathbf{f}} \quad (4.8)$$

Donde \mathbf{B}^T es la matriz estática y $\bar{\mathbf{f}}$ es el vector de cargas de referencia.

4.6 Estado de admisibilidad cinemática.

El estado cinemáticamente admisible se define como cualquier mecanismo de colapso potencial para el cual la potencia externa es positiva. El multiplicador μ_k correspondiente, conocido como el multiplicador cinemáticamente admisible, se calcula a partir de la igualdad de trabajo. Un mecanismo de colapso potencial puede especificarse a partir de la razón de extensión (plástica) de una armadura, o bien, por la razón de rotación en las secciones críticas de una viga o marco. En una descripción unificada, las deformaciones generalizadas forman el vector \mathbf{e} , el cual contendrá las extensiones de barra o las rotaciones de secciones críticas. Siguiendo esta notación, un estado cinemáticamente admisible queda descrito por el vector de razones de desplazamientos $\dot{\mathbf{d}}$ y por el vector de razones de deformaciones generalizadas $\dot{\mathbf{e}}$ de la siguiente manera⁶⁴:

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{B} \dot{\mathbf{d}} \quad (4.9)$$

y

$$\bar{\mathbf{f}}^T \dot{\mathbf{d}} > 0 \quad (4.10)$$

La parte izquierda de la última expresión es el trabajo externo provisto por el vector de cargas de referencia $\bar{\mathbf{f}}$ y puede expresarse como

⁶³ Bažant, Z., P. et al. *Ibid.* P. 54

⁶⁴ *Ídem.*

$$\dot{W}_{ext} = \mathbf{f}^T \dot{\mathbf{d}} = \mu_k \bar{\mathbf{f}}^T \dot{\mathbf{d}} \quad (4.11)$$

Debe observarse que la relación del vector de deformaciones \mathbf{e} es trabajo-conjugada (*work-conjugate*) con el vector de fuerzas internas \mathbf{s} . Esto es, que cada deformación está relacionada con una fuerza axial o con un momento flector.

Retomando las ecuaciones 3.2 y 3.3, la razón de disipación se calcula al sumar las contribuciones de todas las barras de una armadura. Esto se expresa como:

$$D_{int} = \sum_i S_i \dot{e}_i = \sum_i S_{y,i} |\dot{e}_i| \quad (4.12)$$

Para el caso de un marco o una viga, la razón de disipación se obtiene de la suma de las contribuciones de las secciones transversales críticas (articulaciones en fluencia potenciales). Lo cual se enuncia en la expresión

$$D_{int} = \sum_i M_i \dot{\theta}_i = \sum_i M_{p,i} |\dot{\theta}_i| \quad (4.13)$$

Las anteriores expresiones se pueden reescribir de manera general en una notación matricial unificada como

$$D_{int} = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{s}_y^T |\dot{\mathbf{e}}| \quad (4.14)$$

Debe notarse que los corchetes (| |) en la ecuación anterior indican valor absoluto y no una norma matricial. El valor absoluto se aplica a cada argumento vectorial de $\dot{\mathbf{e}}$. Recordando la expresión anterior para la razón del trabajo externo (o potencia) es

$$\dot{W}_{ext} = \mu_k \bar{\mathbf{f}}^T \dot{\mathbf{d}} \quad (4.15)$$

Ahora es posible aplicar la igualdad de potencia (*power*) y despejar el multiplicador cinemático de colapso μ_k . Si la igualdad de potencia es

$$\dot{W}_{ext} = D_{int} \quad (4.16)$$

entonces el multiplicador se obtiene de la ecuación

$$\mu_k = \frac{\mathbf{s}_y^T |\dot{\mathbf{e}}|}{\bar{\mathbf{f}}^T \dot{\mathbf{d}}} \quad (4.17)$$

Con estas herramientas ahora es posible plantear un teorema general. El siguiente teorema se plantea en términos de la suma de las contribuciones las fuerzas axiales en las barras de una armadura.

Debe aclararse que si bien se plantea en términos de los elementos de una armadura, las consideraciones son las mismas para el caso de marcos y vigas.

4.7 Planteamiento del Teorema General.

Si \mathbf{s}_s es un vector plásticamente admisible de fuerzas internas, esto es, un vector que satisface las condiciones⁶⁵

$$-s_y \leq s_s \leq s_y \quad (4.18)$$

y $\dot{\mathbf{e}}$ es un arreglo de razones de deformaciones plásticas generalizadas, entonces

$$\mathbf{s}_s^T \dot{\mathbf{e}} \leq D_{int}(\dot{\mathbf{e}}) \quad (4.19)$$

Donde

$$D_{int}(\dot{\mathbf{e}}) = \mathbf{s}_y^T |\dot{\mathbf{e}}| \quad (4.20)$$

es la razón de disipación producida por $\dot{\mathbf{e}}$.

La esencia de este teorema radica en que al conocer el vector $\dot{\mathbf{e}}$ para el mecanismo de colapso, el vector de fuerzas internas \mathbf{s} asociado a dicho mecanismo maximiza el producto escalar $\mathbf{s}^T \dot{\mathbf{e}}$ para todos los vectores plásticamente admisibles. Esto se deduce del hecho de que debe cumplirse la expresión

$$\mathbf{s}^T \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{s}_y^T |\dot{\mathbf{e}}| = D_{int}(\dot{\mathbf{e}}) \quad (4.21)$$

De ahí que este postulado se le conozca como el postulado de la máxima disipación plástica, el cual se define matemáticamente por la expresión

$$D_{int}(\dot{\mathbf{e}}) = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{e}} = \max_{\mathbf{s}_s \in \bar{\mathbf{e}}} \mathbf{s}_s^T \dot{\mathbf{e}} \quad (4.22)$$

donde $\bar{\mathbf{e}} = [-\sigma_y, \sigma_y]$ es el conjunto de todos los estados de esfuerzos plásticamente admisibles.

⁶⁵ Bažant, Z., P. et al. Ibíd. Pp. 55-56

Este postulado se explica verbalmente a continuación.

4.8 Postulado de la Máxima Disipación Plástica.

*Para una serie de razones de deformación plástica generalizadas, las fuerzas internas reales maximizan la razón de disipación plástica de entre todas las fuerzas internas plásticamente admisibles.*⁶⁶

Con esto se procede a derivar los teoremas básicos del análisis de estado límite. Estos dos teoremas toman en consideración dos estados.

- Un estado estáticamente admisible arbitrario está dado por μ_s y s_s de tal manera que

$$\mathbf{B}^T \mathbf{s}_s = \mu_s \bar{\mathbf{f}} \quad \text{y} \quad -s_y \leq s_s \leq s_y \quad (4.23)$$

- Un estado cinemáticamente admisible arbitrario está dado por $\dot{\mathbf{d}}_k$ y $\dot{\mathbf{e}}_k$ de tal manera que

$$\dot{\mathbf{e}}_k = \mathbf{B} \dot{\mathbf{d}}_k \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{f}}^T \dot{\mathbf{d}}_k > 0 \quad (4.24)$$

para los cuales el multiplicador cinemáticamente admisible se evalúa con la expresión

$$\mu_k = \frac{D_{int}(\dot{\mathbf{e}})}{\bar{\mathbf{f}}^T \dot{\mathbf{d}}_k} \quad (4.25)$$

Puesto que las fuerzas internas s_s son plásticamente admisibles, al aplicar el postulado de máxima disipación plástica a s_s y a $\dot{\mathbf{e}}_k$ se obtiene que

$$\mathbf{s}_s^T \dot{\mathbf{e}}_k \leq D_{int}(\dot{\mathbf{e}}_k) \quad (4.26)$$

La parte derecha de esta ecuación puede plantearse como

$$D_{int}(\dot{\mathbf{e}}_k) = \mu_k \bar{\mathbf{f}}^T \dot{\mathbf{d}}_k \quad (4.27)$$

Igualmente la parte izquierda de la ecuación puede modificarse con las relaciones antes mencionadas como se muestra a continuación:

$$\mathbf{s}_s^T \dot{\mathbf{e}}_k = \mathbf{s}_s^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{d}}_k = (\mathbf{B}^T \mathbf{s}_s)^T \dot{\mathbf{d}}_k = \mu_s \bar{\mathbf{f}}^T \dot{\mathbf{d}}_k \quad (4.28)$$

⁶⁶ Bažant, Z., P. et al. *Ibíd.* P. 56. Traducción propia.

Con ello la ecuación modificada queda

$$\mu_s \bar{\mathbf{f}}^T \dot{\mathbf{d}}_k \leq \mu_k \bar{\mathbf{f}}^T \dot{\mathbf{d}}_k \quad (4.29)$$

Simplificando el producto escalar (que es positivo) presente en ambos lados de la ecuación, la expresión se reduce a

$$\mu_s \leq \mu_k \quad (4.30)$$

Este importante resultado constituye la base del siguiente teorema.

4.9 Teorema Fundamental del Análisis del Estado Límite.

*Este teorema indica que cualquier multiplicador estáticamente admisible es menor a cualquier multiplicador cinemáticamente admisible.*⁶⁷

El estado límite plástico (correspondiente al estado de colapso incipiente) queda definido como el estado de equilibrio estático para el cual existen razones de desplazamiento no despreciables, aun si la carga permanece constante. Por definición el estado límite plástico es tanto estática como cinemáticamente admisible, por lo que se puede plantear que

$$\mu_s \leq \mu_c \leq \mu_k \quad (4.31)$$

donde μ_c es el factor de seguridad (o multiplicador de colapso si el vector de fuerzas de referencia es unitario). Esto resulta en dos importantes corolarios los cuales se presentan más adelante.

4.10 Teorema de la Cota Inferior.

*El factor de seguridad es el máximo multiplicador estáticamente admisible.*⁶⁸

⁶⁷ Bažant, Z., P. et al. Ibíd. P. 57. Traducción propia.

⁶⁸ Ídem. Traducción propia.

4.11 Teorema de la Cota Superior.

El factor de seguridad es el mínimo multiplicador cinemáticamente admisible.⁶⁹

Estos teoremas se refieren al hecho de que el multiplicador estáticamente admisible constituye la cota inferior del factor de seguridad, y de la misma manera el multiplicador cinemáticamente admisible corresponde a la cota superior del factor de seguridad. Estos teoremas también se conocen como el teorema estático y el teorema cinemático, respectivamente. De manera alternativa los teoremas se pueden plantear de la siguiente manera.

4.12 Teorema de la Cota Superior (replanteado).

Una estructura sujeta a carga colapsará si existe un mecanismo de falla para el cual la razón de disipación es menor que el trabajo externo provisto por la carga aplicada.⁷⁰

4.13 Teorema de la Cota Inferior (replanteado).

Una estructura sujeta a carga no colapsará si el estado de esfuerzos está dentro del dominio elástico además de estar en equilibrio con las cargas aplicadas.⁷¹

En la última formulación del teorema de la cota inferior (o teorema estático), se requiere que el estado de esfuerzos esté ubicado en el interior del dominio elástico, esto es que las condiciones de admisibilidad plástica se satisfagan estrictamente como desigualdades. Esto se observa en la ecuación

⁶⁹ Bažant, Z., P. et al. *Ibíd.* P. 57. Traducción propia

⁷⁰ *Ídem.* Traducción propia

⁷¹ *Ídem.* Traducción propia

$$-s_y < s < s_y \quad (4.32)$$

Solamente así es posible garantizar que la estructura no colapsará. En el colapso incipiente, para el estado de esfuerzos plásticamente admisible, alguna de las condiciones se satisface con un signo de igualdad. El cambio se aprecia en la expresión

$$-s_y \leq s \leq s_y \quad (4.33)$$

Desde un punto de vista más pragmático, es indiferente si la frontera del dominio elástico se considera una zona segura o no.

4.14 Corolarios de los Teoremas del Análisis de Estado Límite.

Un corolario importante del teorema de la cota inferior es que la carga de colapso no puede ser menor cuando se aumenta la resistencia de cualquier parte de la estructura. De hecho, la distribución de momentos flectores permanecerá estáticamente admisible para la estructura modificada en la cual, el valor del momento plástico ha sido incrementado para una o varias secciones transversales. Como consecuencia, la capacidad para tomar cargas de la estructura modificada deber ser por lo menos tan alta como en la estructura sin modificar.⁷²

Del teorema de la cota superior se desprende el corolario de que la carga de colapso no puede aumentar como resultado de reducir la resistencia de alguna de las partes de la estructura. Esta conclusión se deduce del hecho de que, el mecanismo correspondiente al estado de colapso producirá en la estructura modificada un trabajo interno que es menor o igual a aquel de la estructura sin modificar. Por lo tanto, la carga de colapso calculada por la cota superior para la estructura debilitada no puede exceder la carga de colapso de la estructura original.⁷³

En el siguiente capítulo se aborda la formulación matemática de la solución al problema de minimización.

⁷² Chakrabarty, J. Op cit. P. 230

⁷³ ídem.

Capítulo 5.

Formulación Matemática de la Solución por el Teorema de la cota superior.

En este capítulo se procederá a desarrollar el planteamiento matemático para el cálculo de la carga de colapso por medio del Teorema de la Cota Superior. Se hará uso de las bases y fundamentos planteados en los capítulos anteriores los cuales corresponden al marco teórico del presente trabajo.

5.1 Disipación plástica de un elemento.

Partiendo de la ecuación de igualdad de potencia (anteriormente mencionada como ecuación 4.16), se tiene que

$$\dot{W}_{ext} = D_{int} \quad (5.1)$$

dónde:

\dot{W}_{ext} = potencia externa.

D_{int} = disipación plástica.

La disipación plástica (lado derecho de la ecuación 5.1) se obtiene de la expresión

$$D_{int} = \int_V \sigma \dot{\epsilon}_p dV \quad (5.2)$$

dónde:

$\dot{\epsilon}_p$ = razón (velocidad) de deformación plástica.

σ = esfuerzo.

V = volumen del elemento e .

Esta ecuación se integra a lo largo de toda la estructura. La anterior integral se construye sobre el volumen, en un espacio discreto, a partir de la sumatoria

$$D_{int} = \sum_e \int_{V^e} \sigma \varepsilon_p dV \quad (5.3)$$

donde V^e es el volumen del elemento e .

La disipación plástica para cada elemento e se formula en términos del momento, de tal manera que⁷⁴

$$D_{int}^e = \int_{l^e} \int_{A^e} \sigma(z) \dot{\theta} z dA dx = \int_{l^e} \int_{A^e} \sigma(z) z dA \dot{\theta} dx = \int_{l^e} M^e \dot{\theta} dx \quad (5.4)$$

dónde:

$\sigma(z)$ = esfuerzo a una distancia z del eje neutro del elemento e .

$\dot{\theta}$ = razón del ángulo de rotación del elemento sujeto a flexión.

M^e = momento en el elemento e .

l^e = longitud del elemento e .

A^e = área de la sección transversal del elemento e .

La anterior expresión (5.4), puede plantearse en términos de la curvatura por medio de la relación⁷⁵

⁷⁴ Pons Fedelich, R. *The evaluation of upper and lower bounds of the plastic limit state of frame structures using the upper bound theorem*. Tesina de Especialidad. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona. Universidad Politécnica de Cataluña. España, 2003. P. 21

⁷⁵ Gere, James M. *Mechanics of Materials*. Sexta edición. Estados Unidos. Thomson. 2004. P. 597

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \dot{\theta} \quad (5.5)$$

donde

κ = curvatura.

ρ = radio de curvatura.

θ = ángulo de rotación.

Un cambio adicional de variable sería el plantear la ecuación que relaciona el desplazamiento normal v , con la curvatura. Esta relación se define como⁷⁶

$$\kappa = \dot{\theta} = \frac{d^2 v^e}{dx^2} \quad (5.6)$$

Tomando el cambio de variable de la expresión anterior (5.6), la disipación en términos de la curvatura es⁷⁷

$$D_{int}^e = \int_{l^e} M^e \dot{\theta} dx = \int_{l^e} M_p^e |\dot{\theta}| dx = \int_{l^e} M_p^e \left| \frac{d^2 v^e}{dx^2} \right| dx \quad (5.7)$$

dónde:

v = es el desplazamiento vertical (grado de libertad).

M_p^e = momento plástico del elemento e .

Para el presente trabajo de investigación, se considera que el colapso ocurre cuando se alcanza el momento plástico, y por lo tanto la integral (5.7) puede simplificarse si el momento flector M tiene el valor constante de M_p , bajo la premisa del comportamiento rígido-plástico.

Usando notación matricial y a partir de las funciones de forma \mathbf{N} se llega a la siguiente relación

$$\frac{d^2 v^e}{dx^2}(x) = \frac{d^2 \mathbf{N}^T}{dx^2}(x) \mathbf{v}^e = \mathbf{B}^T(x) \mathbf{v}^e \quad (5.8)$$

⁷⁶ ídem.

⁷⁷ Pons F., R. Op cit. P. 22

dónde:

$$\mathbf{B}(x) = \begin{bmatrix} \frac{d^2 N_1}{dx^2}(x) \\ \frac{d^2 N_2}{dx^2}(x) \\ \frac{d^2 N_3}{dx^2}(x) \\ \frac{d^2 N_4}{dx^2}(x) \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$\mathbf{v}^e = \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}^e \quad (5.10)$$

de modo que la disipación plástica de un elemento queda dada por

$$D_{int}^e = M_p^e \int_{i^e} |\mathbf{B}^T(x)\mathbf{v}^e| dx \quad (5.11)$$

Obsérvese que se supone que todos los elementos están completamente plastificados; el momento plástico M_p es una constante y es por esto que sale de la integral. Además se requiere una disipación positiva, y por ello los valores deben ser absolutos. Para trabajar con valores absolutos se recurre a la raíz cuadrada del producto $\mathbf{B}^T(x)\mathbf{v}^e$ elevado al cuadrado.

$$D_{int}^e = M_p^e \int_{i^e} \sqrt{(\mathbf{B}^T(x)\mathbf{v}^e)^2} dx \quad (5.12)$$

Para encontrar la disipación de toda la estructura se suman las contribuciones de todos los elementos de la malla. Esto es

$$D_{int} = \sum_{i^e} M_p^e \int_{i^e} \sqrt{(\mathbf{B}^T(x)\mathbf{v}^e)^2} dx \quad (5.13)$$

5.2 Potencia externa.

La potencia que resulta del trabajo externo realizado por las cargas externas en un elemento e es la sumatoria de las contribuciones de las cargas puntuales F , de las cargas distribuidas (o tracciones) t y de los momentos flectores M .⁷⁸

$$\dot{W}_{ext}^e = \int_{i^e} t^e(x)v(x) dS + \sum_i^n F_i^e v(x_i) + \sum_i^k M_i^e \theta(x_i) \quad (5.14)$$

dónde:

$t(x)$ = cargas distribuidas.

F_i = cargas puntuales actuando en los puntos (x_i) .

M_i = momentos aplicados en los puntos (x_i) .

v = razón del desplazamiento, o velocidad.

$\dot{\theta}$ = razón de la rotación, o velocidad angular.

Considerando carga proporcional y al parámetro μ_k como el multiplicador proporcional, la expresión anterior se representa matricialmente con la forma⁷⁹

$$\begin{aligned} \dot{W}_{ext}^e &= \mu_k \left[\left(\hat{\mathbf{F}}_1^{tT} + \hat{\mathbf{F}}_1^{F^T} + \hat{\mathbf{F}}_1^{M^T} \right)^e \left(\hat{\mathbf{F}}_2^{tT} + \hat{\mathbf{F}}_2^{F^T} + \hat{\mathbf{F}}_2^{M^T} \right)^e \right] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^e \\ \mathbf{v}_2^e \end{bmatrix} \\ &= \mu_k \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_1^{eT} & \hat{\mathbf{F}}_2^{eT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^e \\ \mathbf{v}_2^e \end{bmatrix} = \mu_k \hat{\mathbf{f}}^{eT} \mathbf{v}^e = \mu_k \hat{W}_{ext} \end{aligned} \quad (5.15)$$

dónde:

$\hat{\mathbf{F}}_i^j$ = cargas externas nodales.

\mathbf{v}_i = grados de libertad nodales, los cuales son las velocidades $(v_i, \dot{\theta}_i)$.

⁷⁸ Pons F., R. Ibíd. P. 22 En esta fuente bibliográfica los términos potencia y trabajo llegan a usarse de manera más o menos intercambiable. Sin embargo, cuando se hable de una igualdad con la disipación plástica, el término más apropiado es potencia.

⁷⁹ ídem.

\widehat{W}_{ext} = potencia en función del vector de fuerzas de referencia $\widehat{\mathbf{F}}$

Por lo tanto la potencia externa total en la estructura queda definida por la sumatoria de las contribuciones de todos los elementos. Esto es que

$$W_{ext} = \mu_k \sum_e \widehat{W}_{ext}^e = \mu_k \widehat{W}_{ext} \quad (5.16)$$

donde las variables a determinar son el multiplicador μ_k y los grados de libertad (v_i, θ_i) .

5.3 Planteamiento del problema de optimización.

Si se combina la ecuación de igualdad de potencia

$$\dot{W}_{ext} = D_{int} \quad (5.17)$$

con la ecuación

$$\dot{W}_{ext} = \mu_k \widehat{W}_{ext} \quad (5.18)$$

El multiplicador queda definido por la expresión

$$\mu_k = \frac{D_{int}}{\widehat{W}_{ext}} \quad (5.19)$$

El problema de optimización consiste en encontrar el mínimo multiplicador μ_k , dentro del espacio reducido de velocidades X_H , tal que

$$\mu_k = \min_{\mathbf{v} \in X_H} \frac{D_{int}}{\widehat{W}_{ext}}(\mathbf{v}) \quad (5.20)$$

Dicha expresión se puede simplificar a

$$\mu_k = \min_{\mathbf{v} \in X_H} D_{int}(\mathbf{v}) \quad (5.21)$$

sujeto a la restricción

$$\widehat{W}_{ext}(\mathbf{v}) = 1 \quad (5.22)$$

Para armar la matriz de rigidez de un elemento se usará un método que emplee el equilibrio nodal y la compatibilidad de desplazamientos.

Para encontrar el valor mínimo se emplea el método de multiplicadores de Lagrange, donde el multiplicador de Lagrange⁸⁰ corresponde a μ_k . Aplicando la condición anteriormente planteada se tiene la expresión⁸¹

$$\widehat{D}_{int}(\mu_k, \mathbf{v}) = D_{int}(\mathbf{v}) - \mu_k(\hat{\mathbf{f}}^T \mathbf{v} - 1) = 0 \quad (5.23)$$

Derivando respecto a μ_k se llega a⁸²

$$\frac{\partial \widehat{D}_{int}}{\partial \mu_k}(\mu_k, \mathbf{v}) = \hat{\mathbf{f}}^T \mathbf{v} - 1 = 0 \quad (5.24)$$

Si se deriva respecto a \mathbf{v} , entonces queda la expresión

$$\frac{\partial \widehat{D}_{int}}{\partial \mathbf{v}}(\mu_k, \mathbf{v}) = \frac{\partial D_{int}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{v}) - \mu_k \hat{\mathbf{f}} = 0 \quad (5.25)$$

Por lo tanto la expresión del sistema no lineal a resolver es

$$\frac{\partial \widehat{D}_{int}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{v}) = \mu_k \hat{\mathbf{f}} \quad (5.26)$$

La solución de la expresión anterior dará el multiplicador de carga y los grados de libertad nodales.

La matriz de rigidez de un elemento se plantea como

⁸⁰ Cordero C., R. A. Op cit. Pp. 61-62.

⁸¹ Pons F., R. Op cit. P. 24

⁸² Cordero C., R. A. Op cit. P. 61.

$$\frac{\partial D_{int}^e}{\partial \mathbf{v}^e}(\mathbf{v}^e) = M_p^e \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}^e} \int_{l^e} \sqrt{(\mathbf{B}^T(x)\mathbf{v}^e)^2} dx \quad (5.27)$$

La obtención de la derivada con respecto a \mathbf{v} se detalla a continuación⁸³.

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_{int}^e}{\partial \mathbf{v}^e}(\mathbf{v}^e) &= M_p^e \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}^e} \int_{l^e} \sqrt{(\mathbf{B}^T(x)\mathbf{v}^e)^2} dx = \\ &M_p^e \int_{l^e} \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{B}^T(x)\mathbf{v}^e)^2}} \mathbf{B}(x)\mathbf{B}^T(x)\mathbf{v}^e dx = \\ &M_p^e \int_{l^e} \left(\frac{1}{\sqrt{(\mathbf{B}^T(x)\mathbf{v}^e)^2}} \mathbf{B}(x)\mathbf{B}^T(x) dx \right) \mathbf{v}^e = \mathbf{k}^e(\mathbf{v}^e)\mathbf{v}^e \end{aligned} \quad (5.28)$$

Por lo tanto la simplificación de la derivación da la expresión

$$\frac{\partial D_{int}^e}{\partial \mathbf{v}^e}(\mathbf{v}^e) = M_p^e \int_{l^e} \left(\frac{1}{\sqrt{(\mathbf{B}^T(x)\mathbf{v}^e)^2}} \mathbf{B}(x)\mathbf{B}^T(x) dx \right) \mathbf{v}^e = \mathbf{k}^e(\mathbf{v}^e)\mathbf{v}^e \quad (5.29)$$

Donde $\mathbf{k}^e(\mathbf{v}^e)$ es la matriz de rigidez local del elemento e ., se define por la expresión⁸⁴

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^e(\mathbf{v}^e) &= M_p^e \int_{l^e} \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{B}^T(x)\mathbf{v}^e)^2}} \mathbf{B}(x)\mathbf{B}^T(x) dx \\ \mathbf{k}^e(\mathbf{v}^e) &= M_p^e \int_{l^e} \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{B}^T(x)\mathbf{v}^e)^2}} \begin{bmatrix} \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} & \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} & \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} & \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} \\ \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} & \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} & \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} & \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} \\ \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} & \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} & \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} & \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} \\ \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} & \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} & \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} & \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} \end{bmatrix} (x) dx \end{aligned} \quad (5.31)$$

⁸³ Pons F., R. Op cit. P. 25

⁸⁴ ídem.

Para resolver la anterior integral (5.30) se debe emplear un método de integración numérica.

$$\mathbf{k}^e(\mathbf{v}^e) = \sum_i^n C_i \frac{M_p^e l^e}{2\sqrt{\varepsilon^2 + (\mathbf{B}^T(x_i)\mathbf{v}^e)^2}} \mathbf{B}(x_i)\mathbf{B}^T(x_i) \quad (5.32)$$

donde:

ε = parámetro de control de errores, que evita la división sobre cero.⁸⁵ Debe ser un valor pequeño. El valor usado en el presente trabajo fue = 0.5×10^{-9}

C_i = factor de peso, cuyo valor depende del método de integración numérica que se emplee.

x_i = puntos de integración, cuyos valores están delimitados por el rango de valores $x \in [0, l^e]$.

n = número de puntos de integración (o muestreo).

Una vez ensamblada la matriz de rigidez de la estructura, el sistema no lineal queda expresado por las ecuaciones:

$$\mathbf{K}(\mathbf{v})\mathbf{v} = \mu_k \hat{\mathbf{f}} \quad (5.33)$$

$$\hat{\mathbf{f}}^T \mathbf{v} = 1 \quad (5.34)$$

Para resolver las ecuaciones del sistema anteriormente descrito, primero se divide la primera ecuación sobre μ_k

$$\mathbf{K}(\mathbf{v}) \frac{\mathbf{v}}{\mu_k} = \hat{\mathbf{f}} \quad (5.35)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{v})\mathbf{v}_o = \hat{\mathbf{f}} \quad (5.36)$$

Usando un método numérico se encuentra el valor de \mathbf{v}_o . Consecuentemente los desplazamientos quedan dados por

$$\mathbf{v}^e = \mu_k \mathbf{v}_o \quad (5.37)$$

Haciendo una sustitución en la restricción se tiene que

$$\hat{\mathbf{f}}^T \mathbf{v} = \mu_k \hat{\mathbf{f}}^T \mathbf{v}_o = 1 \quad (5.38)$$

⁸⁵ Pons F., R. Ibíd. P. 25

Con esta última expresión es posible determinar la cota superior del multiplicador proporcional de la carga de colapso, la cual se evalúa como

$$\mu_k = \frac{1}{\hat{\mathbf{f}}^T \mathbf{v}_o} \quad (5.39)$$

Ahora es posible proceder a una formulación más detallada las funciones de interpolación. En el siguiente capítulo se presenta tales funciones, así como el método de integración numérica a emplear para la resolución de la ecuación 5.30.

Capítulo 6.

Funciones de interpolación y método de integración numérica.

6.1 Formulación de las funciones de interpolación.

En el presente trabajo, el tipo de estructuras a analizar son marcos, los cuales pueden visualizarse como un arreglo de vigas. El análisis de vigas es un problema de elementos lineales a flexión, por lo que los elementos isoparamétricos a emplear requieren de continuidad tipo C^1 . Este requisito de continuidad C^1 implica que además de la deflexión vertical v , la rotación o pendiente θ entre los elementos también debe ser continua en los puntos de unión de los elementos.⁸⁶

Para discretizar la estructura se emplean elementos unidimensionales (o elementos barra), los cuales son elementos lineales (Figura 20) de dos nodos, con dos grados de libertad, v_i , θ_i .

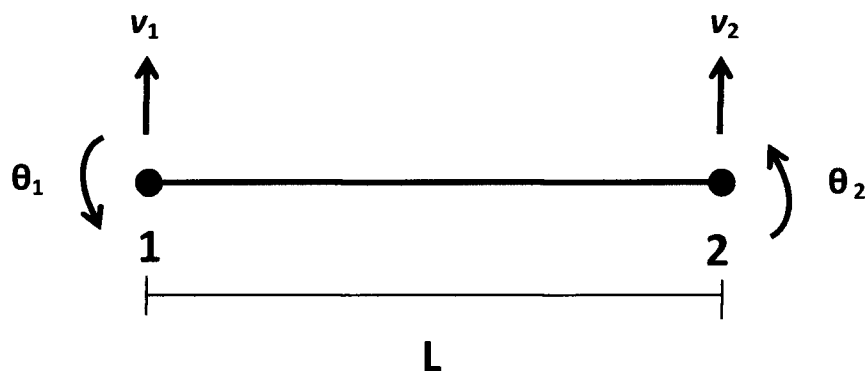


Figura 20. Elemento isoparamétrico sujeto flexión y corte.⁸⁷

⁸⁶ Chandrupatla, Tirupathi R. et al. *Introducción al Estudio del Elemento Finito en Ingeniería*. Segunda Edición. Estados Unidos. Pearson Prentice Hall. 199 P. 242

⁸⁷ Figura propia, adaptada de la figura original, Gallegos Cázares, Sergio. *Análisis de Sólidos y Estructural mediante el Método de Elementos Finitos*. México. Limusa. 2008. "Figura 3.43. Elemento tipo viga plana." P. 127

Para formular las funciones de interpolación del elemento unidimensional se recurre a un polinomio cúbico. Dicho polinomio representará la deflexión en una viga. El eje local x se considera longitudinal al elemento barra. Los otros dos ejes (y, z), son los ejes principales de la sección transversal. Debe observarse que las cargas actúan en la dirección de los ejes principales. La expresión resultante es⁸⁸

$$v(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (6.1)$$

La derivada de v , la cual corresponde a la pendiente θ , se define como:

$$\theta = v'(x) = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2 \quad (6.2)$$

Aplicando las condiciones de frontera $x = 0, x = L$, se tendrá que:

$$v(0) = v_1 \quad (6.3)$$

$$v'(0) = \theta_1 \quad (6.4)$$

$$v(L) = v_2 \quad (6.5)$$

$$v'(L) = \theta_2 \quad (6.6)$$

Sustituyendo estas condiciones en las ecuaciones para v y v' se obtiene:

$$v_1 = a_1 \quad (6.7)$$

$$\theta_1 = a_2 \quad (6.8)$$

$$v_2 = a_1 + a_2L + a_3L^2 + a_4L^3 \quad (6.9)$$

$$\theta_2 = a_2 + 2a_3L + 3a_4L^2 \quad (6.10)$$

Este sistema de ecuaciones se puede representar en formato matricial de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad (6.11)$$

$$\{\bar{v}_a^e\} = \mathbf{A}\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}\{\bar{v}_a^e\} \quad (6.12)$$

De esta forma, se obtendrá la interpolación lineal como:

$$\begin{aligned} v(x) &= [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3]\mathbf{a} = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3]\mathbf{A}^{-1}\{\bar{v}_a^e\} \\ &= [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]\{\bar{v}_a^e\} = \mathbf{N}\{\bar{v}_a^e\} \end{aligned} \quad (6.13)$$

⁸⁸ Gallegos C., S. Ibíd. P. 128

Con esto el polinomio cúbico que describe la deflexión de la viga, queda planteada en términos de las funciones de forma⁸⁹:

$$v(x) = N_1(x)v_1 + N_2(x)\theta_1 + N_3(x)v_2 + N_4(x)\theta_2 \quad (6.14)$$

Las funciones de forma N_i son aproximaciones del espacio natural de los elementos isoparamétricos al espacio real de los elementos (Figura 21). Como se mencionó anteriormente, se requiere que los elementos cumplan con la continuidad del tipo C^1 y las funciones de forma que cumplen con ese requisito son los polinomios de Hermite.

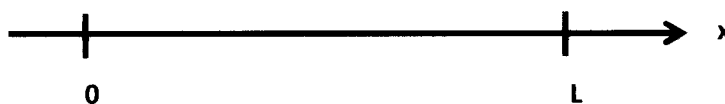


Figura 21. Espacio real de un elemento isoparamétrico unidimensional.

Las funciones de forma de Hermite en el sistema de coordenadas cartesianas (también llamado espacio real) se definen a continuación⁹⁰.

$$N_1 = 1 - 3\left(\frac{x}{l^e}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l^e}\right)^3 \quad (6.15)$$

$$N_2 = x\left(1 - \frac{x}{l^e}\right)^2 \quad (6.16)$$

$$N_3 = 3\left(\frac{x}{l^e}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l^e}\right)^3 \quad (6.17)$$

$$N_4 = (x - l^e)\left(1 - \frac{x}{l^e}\right)^2 \quad (6.18)$$

⁸⁹ Pons F., R. Op cit. P. 20

⁹⁰ Gallegos C., S. Op cit. Pp. 128-129

6.2 Formulación del vector \mathbf{B} y cálculo del producto $\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{B}^T(\mathbf{x})$.

El vector \mathbf{B} queda definido por la segunda derivada de las funciones de forma N empleadas. Anteriormente mencionó que dicho vector quedaba definido matricialmente de la siguiente forma.

En términos de la variable x

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{d^2 N_1}{dx^2}(x) \\ \frac{d^2 N_2}{dx^2}(x) \\ \frac{d^2 N_3}{dx^2}(x) \\ \frac{d^2 N_4}{dx^2}(x) \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

La obtención de las segundas derivadas se describe en las siguientes expresiones:

$$N_1 = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (6.20)$$

$$\frac{dN_1}{dx} = \frac{6x^2}{L^3} - \frac{6x}{L^2} \quad (6.21)$$

$$\frac{d^2 N_1}{dx^2} = \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \quad (6.22)$$

$$N_2 = L \left[\frac{x}{L} - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right] \quad (6.23)$$

$$\frac{dN_2}{dx} = \frac{3x^2 - 4Lx + L^2}{L^2} \quad (6.24)$$

$$\frac{d^2 N_2}{dx^2} = \frac{2(3x - 2L)}{L^2} \quad (6.25)$$

$$N_3 = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (6.26)$$

$$\frac{dN_3}{dx} = \frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3} \quad (6.27)$$

$$\frac{d^2 N_3}{dx^2} = \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad (6.28)$$

$$N_4 = L \left[-\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right] \quad (6.29)$$

$$\frac{dN_4}{dx} = \frac{x(3x - 2L)}{L^2} \quad (6.30)$$

$$\frac{d^2 N_4}{dx^2} = \frac{2(3x - L)}{L^2} \quad (6.31)$$

El vector \mathbf{B} queda definido como

$$\mathbf{B}(x) = \begin{bmatrix} \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \\ 2(3x - 2L) \\ L^2 \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ 2(3x - L) \\ L^2 \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

El siguiente paso es la obtención del producto $\mathbf{B}(x)\mathbf{B}^T(x)$, el cual se desarrolla a continuación

$$\mathbf{B}(x)\mathbf{B}^T(x) = \begin{bmatrix} \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \\ 2(3x - 2L) \\ L^2 \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ 2(3x - L) \\ L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} & \frac{2(3x - 2L)}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{2(3x - L)}{L^2} \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{36(2x - L)^2}{L^6} & \frac{12(2x - L)(3x - 2L)}{L^5} & \frac{-36(2x - L)^2}{L^6} & \frac{12(2x - L)(3x - L)}{L^5} \\ \frac{12(2x - L)(3x - 2L)}{L^5} & \frac{4(3x - 2L)^2}{L^4} & \frac{-12(2x - L)(3x - 2L)}{L^5} & \frac{4(3x - 2L)(3x - L)}{L^4} \\ \frac{-36(2x - L)^2}{L^6} & \frac{-12(2x - L)(3x - 2L)}{L^5} & \frac{36(2x - L)^2}{L^6} & \frac{-12(2x - L)(3x - L)}{L^5} \\ \frac{12(2x - L)(3x - L)}{L^5} & \frac{4(3x - 2L)(3x - L)}{L^4} & \frac{-12(2x - L)(3x - L)}{L^5} & \frac{4(3x - L)^2}{L^4} \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

$$= \frac{4}{L^4} \begin{bmatrix} \frac{9(2x-L)^2}{L^2} & \frac{3(2x-L)(3x-2L)}{L} & \frac{-9(2x-L)^2}{L^2} & \frac{3(2x-L)(3x-L)}{L} \\ \frac{3(2x-L)(3x-2L)}{L} & (3x-2L)^2 & \frac{-3(2x-L)(3x-2L)}{L} & (3x-2L)(3x-L) \\ \frac{-9(2x-L)^2}{L^2} & \frac{-3(2x-L)(3x-2L)}{L} & \frac{9(2x-L)^2}{L^2} & \frac{-3(2x-L)(3x-L)}{L} \\ \frac{3(2x-L)(3x-L)}{L} & (3x-2L)(3x-L) & \frac{-3(2x-L)(3x-L)}{L} & (3x-L)^2 \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

$$= \frac{12}{L^4} \begin{bmatrix} \frac{3(2x-L)^2}{L} & \frac{(2x-L)(3x-2L)}{L} & \frac{-3(2x-L)^2}{L^2} & \frac{(2x-L)(3x-L)}{L} \\ \frac{(2x-L)(3x-2L)}{L} & \frac{(3x-2L)^2}{3} & \frac{-(2x-L)(3x-2L)}{L} & \frac{(3x-2L)(3x-L)}{3} \\ \frac{-3(2x-L)^2}{L^2} & \frac{-(2x-L)(3x-2L)}{L} & \frac{3(2x-L)^2}{L^2} & \frac{-(2x-L)(3x-L)}{L} \\ \frac{(2x-L)(3x-L)}{L} & \frac{(3x-2L)(3x-L)}{3} & \frac{-(2x-L)(3x-L)}{L} & \frac{(3x-L)^2}{3} \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

6.3 Integración numérica y cuadratura Gaussiana.

Anteriormente se mencionó que la expresión de la matriz de rigidez del elemento e requería de integración numérica. El método a emplear será la cuadratura Gaussiana. La ecuación a evaluar se reproduce a continuación.

$$\mathbf{k}^e(\mathbf{v}^e) = \sum_i^{ngauss} C_i \frac{M_p^e l^e}{2\sqrt{\varepsilon^2 + (\mathbf{B}^T(x_i)\mathbf{v}^e)^2}} \mathbf{B}(x_i)\mathbf{B}^T(x_i) \quad (6.37)$$

dónde:

\mathbf{k}^e = Matriz de rigidez de un elemento e .

\mathbf{v}^e = grados de libertad nodales del elemento e .

M_p^e = momento plástico del elemento e .

l^e = longitud del elemento e .

C_i = factor de peso de Gauss.

x_i = Puntos (o posiciones) de integración o de muestreo.

ε = parámetro de control para evitar error por la división sobre cero; este parámetro toma un valor pequeño, del orden de 10^{-9} .

\mathbf{B} = vector con las segundas derivadas de las funciones de forma con respecto a x en espacio real o respecto a ξ en espacio natural (el cual no se usa en la presente tesis).

Para explicar la metodología de la integración numérica de una función considere el siguiente problema⁹¹:

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \quad (6.38)$$

El método a emplear es el de la cuadratura gaussiana, el cual ha sido utilizado extensivamente en elementos finitos. La integral mencionada se aproxima con n puntos

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \dots + C_n f(x_n) \quad (6.39)$$

Donde C_1, C_2, \dots, C_n , son los pesos o factores de Gauss y x_1, x_2, \dots, x_n son los puntos de muestreo o puntos de Gauss. La idea principal detrás del método de la cuadratura gaussiana es seleccionar n puntos de muestreo y n pesos de manera que la aproximación proporcione la respuesta exacta para el polinomio $f(x)$, el cual puede ser de un grado tan elevado como se desee⁹². En otras palabras, la idea es que si la fórmula de integración de los n puntos es exacta para todos los polinomios de hasta un grado tan alto como sea posible, entonces la fórmula funcionará bien, aún si f no es un polinomio.

Para el presente problema en particular se evaluará la curvatura empleando dos puntos. Considere la fórmula de aproximación con $n = 2$, como se muestra enseguida.

$$I = \int_{-1}^1 f(x) d\xi \approx C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) \quad (6.40)$$

⁹¹ Chandrupatla, T. R. et al. Op cit. P. 215

⁹² Chandrupatla, T. R. et al. Ibíd. Pp. 216-217

De los cuatro parámetros a emplear C_1 , C_2 , x_1 , x_2 , se puede expresar que la anterior expresión sea exacta para el polinomio cúbico

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (6.41)$$

Para calcular el valor de los parámetros se busca que el error sea igual a cero, de tal manera que

$$Error = \left[\int_{-1}^1 (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) dx \right] - [C_1f(x_1) + C_2f(x_2)] = 0 \quad (6.42)$$

Para que esto se cumpla se tienen las ecuaciones no lineales⁹³

$$C_1 + C_2 = 2 \quad (6.43)$$

$$C_1x_1 + C_2x_2 = 0 \quad (6.44)$$

$$C_1x_1^2 + C_2x_2^2 = \frac{2}{3} \quad (6.45)$$

$$C_1x_1^3 + C_2x_2^3 = 0 \quad (6.46)$$

La única solución a estas ecuaciones es

$$C_1 = C_2 = 1 \quad (6.47)$$

$$-x_1 = x_2 = 1/\sqrt{3} = 0.5773502691 \quad (6.48)$$

Se observa que una cuadratura gaussiana de n puntos proporcionará una respuesta exacta si f es un polinomio de orden $(2n-1)$ o menor.

⁹³ Chandrupatla, T. R. et al. Ibíd. P. 217

En la literatura existen tabulados los diversos valores de las posiciones de evaluación y sus respectivos factores de peso. Para el presente trabajo de investigación se considerarán los esquemas de 2 y 3 puntos de integración. Los valores para dichos esquemas se muestran en la siguiente tabla.

n	x_i	C_i
2	$\pm 1/\sqrt{3}$	1.0
3	0	8/9
	$\pm\sqrt{3/5}$	5/9

Tabla 1. Esquemas de integración para n = 2 y n = 3 puntos de integración.⁹⁴

6.4 Cambio de intervalo de la cuadratura Gaussiana.

Como se explicó en la sección anterior (6.3), en la cuadratura Gaussiana, la integral se evalúa numéricamente desde -1 a 1, y en vista de que la integral

$$\mathbf{k}^e(\mathbf{v}^e) = M_p^e \int_{i^e} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + (\mathbf{B}^T(x)\mathbf{v}^e)^2}} \mathbf{B}(x)\mathbf{B}^T(x) dx \quad (6.49)$$

se evalúa con respecto a la longitud del elemento tipo barra, se requiere hacer un cambio en el intervalo de integración.

Si el intervalo a integrar está definido por los límites $[a, b]$, antes de aplicar la cuadratura Gaussiana se debe cambiar el intervalo a los límites $[-1, 1]$ ⁹⁵. Dicho cambio se efectúa de la siguiente manera:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{b+a}{2}\right) dx \quad (6.50)$$

⁹⁴ Tabla propia, adaptada de la tabla original, Gallegos C., S. Op cit. "Tabla 5.1 Posición y peso de diversos esquemas de integración gaussiana." P. 185

⁹⁵ Gallegos C., S. Ibíd. Pp}. 186

Después de aplicar la cuadratura Gaussiana, la aproximación de la integral a evaluar queda como

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n C_i f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{b+a}{2}\right) \quad (6.51)$$

donde los valores de los puntos de integración x_i y los factores de peso C_i quedan dados por los esquemas de integración mencionados en la Tabla 1.

Planteado de una forma más directa y explícita, los puntos de integración se modifican con la expresión⁹⁶:

$$\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x_i \quad (6.52)$$

y los pesos se calculan mediante:

$$\frac{b-a}{2}C_i \quad (6.53)$$

En el caso de la integral 6.51, el intervalo de integración es $[0, l]$. Para $n = 2$ puntos de integración, el cambio de intervalo queda modificado de la siguiente manera:

$$\int_0^l f(x) dx \approx \frac{l-0}{2} \sum_{i=1}^{n=2} C_i f\left(\frac{l-0}{2}x_i + \frac{l+0}{2}\right) = \frac{l}{2} \sum_{i=1}^{n=2} C_i f\left(\frac{l}{2}x_i + \frac{l}{2}\right) \quad (6.54)$$

y retomando los valores de la Tabla 1, los factores de peso y puntos de integración serán

$$C_1 = C_2 = 1.0 \quad (6.55)$$

$$x_1 = -1/\sqrt{3} \quad (6.56)$$

$$x_2 = 1/\sqrt{3} \quad (6.57)$$

La expresión completa para la integración con 2 puntos es

⁹⁶ Ídem.

$$\int_0^l f(x) dx \approx \frac{l}{2} \sum_{i=1}^{n=2} C_i f\left(\frac{l}{2}x_i + \frac{l}{2}\right) = \frac{l}{2} \left[1 \cdot f\left(-\frac{l}{2\sqrt{3}} + \frac{l}{2}\right) + 1 \cdot f\left(\frac{l}{2\sqrt{3}} + \frac{l}{2}\right) \right] \quad (6.58)$$

Para el caso de $n = 3$ puntos de integración, el cambio de intervalo es

$$\int_0^l f(x) dx \approx \frac{l}{2} \sum_{i=1}^{n=3} C_i f\left(\frac{l}{2}x_i + \frac{l}{2}\right) \quad (6.59)$$

donde los puntos de integración y los factores de peso (especificados en la Tabla 1) son

$$C_1 = C_3 = 5/9 \quad (6.60)$$

$$C_2 = 8/9 \quad (6.61)$$

$$x_1 = -\sqrt{3}/5 \quad (6.62)$$

$$x_2 = 0 \quad (6.63)$$

$$x_3 = \sqrt{3}/5 \quad (6.64)$$

Con estos valores, la expresión completa para la integración Gaussiana con 3 puntos queda definida como

$$\int_0^l f(x) dx \approx \frac{l}{2} \sum_{i=1}^{n=3} C_i f\left(\frac{l}{2}x_i + \frac{l}{2}\right) = \frac{l}{2} \left[\frac{5}{9} \cdot f\left(-\frac{l\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} + \frac{l}{2}\right) + \frac{8}{9} \cdot f\left(0 + \frac{l}{2}\right) + \frac{5}{9} \cdot f\left(\frac{l\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} + \frac{l}{2}\right) \right] \quad (6.65)$$

6.5 Evaluación de la cuadratura Gaussiana con 2 puntos de integración.

Según las expresiones de la sección anterior (6.4), es posible plantear la expresión de la evaluación de la integral 6.71 para dos puntos de integración. Dicha expresión es:

$$\mathbf{k}^e(\mathbf{v}^e) = \frac{l^e}{2} \left[\frac{M_p^e \mathbf{B}(x_1) \mathbf{B}^T(x_1)}{\sqrt{\varepsilon^2 + (\mathbf{B}^T(x_1) \mathbf{v}^e)^2}} + \frac{M_p^e \mathbf{B}(x_2) \mathbf{B}^T(x_2)}{\sqrt{\varepsilon^2 + (\mathbf{B}^T(x_2) \mathbf{v}^e)^2}} \right] \quad (6.66)$$

dónde:

$$x_1 = -\frac{l^e}{2\sqrt{3}} + \frac{l^e}{2} \quad (6.67)$$

$$x_2 = \frac{l^e}{2\sqrt{3}} + \frac{l^e}{2} \quad (6.68)$$

6.6 Evaluación de la cuadratura Gaussiana con 3 puntos de integración.

La evaluación de la integral 6.71 para 3 puntos de integración queda definida como:

$$\mathbf{k}^e(\mathbf{v}^e) = \frac{l^e}{2} \left[\frac{5M_p^e \mathbf{B}(x_1) \mathbf{B}^T(x_1)}{9\sqrt{\varepsilon^2 + (\mathbf{B}^T(x_1) \mathbf{v}^e)^2}} + \frac{8M_p^e \mathbf{B}(x_2) \mathbf{B}^T(x_2)}{9\sqrt{\varepsilon^2 + (\mathbf{B}^T(x_2) \mathbf{v}^e)^2}} + \frac{5M_p^e \mathbf{B}(x_3) \mathbf{B}^T(x_3)}{9\sqrt{\varepsilon^2 + (\mathbf{B}^T(x_3) \mathbf{v}^e)^2}} \right] \quad (6.69)$$

dónde:

$$x_1 = -\frac{l^e \sqrt{3}}{2\sqrt{5}} + \frac{l^e}{2} \quad (6.70)$$

$$x_2 = \frac{l^e}{2} \quad (6.71)$$

$$x_3 = \frac{l^e \sqrt{3}}{2\sqrt{5}} + \frac{l^e}{2} \quad (6.72)$$

Para el presente trabajo, se empleará la cuadratura Gaussiana evaluando 3 puntos de integración, ya que se espera una mayor exactitud que con 2 puntos. Más adelante también se hará una comparación entre ambos esquemas de integración (2 y 3 puntos), a fin de corroborar la anterior suposición respecto a la exactitud.

El siguiente capítulo explica los métodos de solución para el problema no lineal plasmado en la ecuación 5.39.

Capítulo 7.

Métodos de solución para sistemas no lineales.

Para obtener la solución al problema de la obtención de la carga y mecanismo colapso se emplearán dos métodos numéricos iterativos para la obtención de raíces, y posteriormente se compararán las soluciones. En este capítulo se exponen los algoritmos para obtener la carga de colapso.

La forma general del sistema no lineal a resolver, puede ejemplificarse por la siguiente ecuación⁹⁷ para una barra sujeta a fuerzas axiales (la forma puede aplicarse a un elemento sujeto a flexión).

$$\mathbf{K}_t \Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{R} + (\mathbf{R} - \mathbf{F}) = \Delta \mathbf{R} + (\lambda \bar{\mathbf{R}} - \mathbf{F}) \quad (7.1)$$

dónde:

\mathbf{K}_t = la matriz de rigidez tangencial.

$\Delta \mathbf{r}$ = incremento de desplazamientos.

\mathbf{F} = vector de fuerzas internas

$\bar{\mathbf{R}}$ = Distribución de carga respecto a toda la estructura.

$\Delta \mathbf{R}$ = Diferencia entre fuerzas internas \mathbf{F} y cargas \mathbf{R} .

λ = coeficiente de proporcionalidad de la carga, como un forma incremental de las condiciones de equilibrio.

⁹⁷ Bittnar, Zdeněk, Šejnoha, Jiří. Numerical Methods in Structural Mechanics. Primera edición. Estados Unidos / Reino Unido Publicado por ASCE Press y co-publicado por Thomas Telford Publications. 1996. P 335

7.1 Solución por el método de secante.

El método de la secante (SEC) pertenece a los métodos abiertos para la obtención de la raíz de una ecuación. Los métodos abiertos, a diferencia de los métodos cerrados, no requieren de un intervalo definido por límites superior e inferior.⁹⁸ De ahí que en algunos casos, los métodos abiertos pueden divergir, es decir, que se alejan de la raíz real⁹⁹. Sin embargo, cuando los métodos abiertos si convergen en la solución, lo hacen de manera más rápida que los métodos cerrados.¹⁰⁰ La desventaja de la falta de convergencia puede contrarrestarse si se tiene una buena aproximación inicial de la raíz. El método de la secante obtiene su nombre del hecho que en cualquier etapa, la siguiente iteración puede obtenerse al dibujar una línea secante a través de los dos puntos de iteración más recientes. El algoritmo para el método de la secante se describe a continuación.

7.2 Algoritmo de la Cota Superior por el Método de la Secante

1. Calcular los desplazamientos elásticos \mathbf{v}_e empleando análisis elástico (empleando una matriz de rigidez elástica \mathbf{K}_e y el vector de fuerzas aplicadas \mathbf{F}).

$$\mathbf{K}_e \mathbf{v}_e = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{v}_e = [\mathbf{K}_e]^{-1} \mathbf{F}$$

2. Inicializar los valores de la tolerancia (tol), de los errores ($error_v$, $error_{\mu k}$, $error_R$), del contador de iteraciones (n_{iter}), del vector desplazamientos plásticos \mathbf{v}_p y del multiplicador plástico de la iteración anterior (μ_k^{pre}).

$$error_v = 2 \times tol; \quad error_{\mu k} = 2 \times tol; \quad error_R = 2 \times tol;$$

$$n_{iter} = 0; \quad \mu_k^{pre} = 1.0 \quad tol = 0.5 \times 10^{-5}$$

$$max_{iter} = 300 \quad \mathbf{v}_p = \mathbf{v}_e$$

⁹⁸ Chapra, Steven C., et al. *Numerical Methods for Engineers: with software and Programming Applications*. Cuarta edición. Estados Unidos. McGraw Hill. 2003. P. 133

⁹⁹ Chapra, Steven C., et al. *Ibíd.* P. 134

¹⁰⁰ *Idem.*

3. Si ($error_v > tol$, ó $error_{\mu_k} > tol$, ó $error_R > tol$ y $n_{iter} < max_{iter}$) entonces

a. Actualizar valores:

$$n_{iter} = n_{iter} + 1 ; \quad \mu_k^{pre} = \mu_k ; \quad \mathbf{v}_p^{pre} = \mathbf{v}_p$$

b. Calcular el multiplicador de colapso.

$$\mu_k = \frac{1}{\mathbf{F}^T \mathbf{v}_p^{pre}}$$

c. Calcular el vector de los desplazamientos normalizados por el multiplicador de colapso.

$$\mathbf{v}_{pn}^{pre} = \mu_k \mathbf{v}_p^{pre}$$

d. Calcular la matriz de rigidez plástica en función del vector de los desplazamientos normalizados.

$$\mathbf{K}_p(\mathbf{v}_{pn}^{pre})$$

e. Calcular el vector de las fuerzas internas \mathbf{T} .

$$\mathbf{T} = \mathbf{K}_p(\mathbf{v}_{pn}^{pre}) \cdot \mathbf{v}_p$$

f. Resolver la ecuación de equilibrio y calcular desplazamientos plásticos.

$$\mathbf{K}_p(\mathbf{v}_{pn}^{pre}) \mathbf{v}_p = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{v}_p = [\mathbf{K}_p(\mathbf{v}_{pn}^{pre})]^{-1} \mathbf{F}$$

g. Calcular errores.

$$error_v = \frac{\|\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_p^{pre}\|}{\|\mathbf{v}_p\|}$$

$$error_{\mu_k} = \frac{\|\mu_k - \mu_k^{pre}\|}{\|\mu_k\|}$$

$$error_R = \frac{\|\mathbf{F} - \mathbf{T}\|}{\|\mathbf{F}\|}$$

h. Ciclar al punto 3.

4. Si ($error_v < tol$, $error_{\mu_k} < tol$, $error_R < tol$, y $n_{iter} > max_{iter}$) entonces reportar el mensaje "La solución no converge"
 5. Reportar el multiplicador de colapso μ_k y el mecanismo de colapso como datos de salida.
-

A continuación se presentan comentarios sobre aspectos relevantes del algoritmo.

Paso 1. Antes de efectuar el análisis de estado límite se efectuará un análisis elástico para obtener una buena aproximación inicial del vector de desplazamientos¹⁰¹. Para el vector de fuerzas aplicadas \mathbf{F} se formula la matriz de rigidez elástica \mathbf{K}_e , y con ella posteriormente se calcula el vector de desplazamientos \mathbf{v}_e . Nótese que el subíndice e denota que es un análisis elástico, el cual se emplea para reducir la posibilidad de los problemas de convergencia, propios de los métodos abiertos.

El problema descrito matricialmente por la expresión¹⁰²

$$\mathbf{K}_e \mathbf{v}_e = \mathbf{F} \quad (7.2)$$

Puede resolverse como un sistema de ecuaciones lineales siguiendo los métodos descritos en la literatura existente. La solución a dicha ecuación de equilibrio es la descrita por la ecuación

$$\mathbf{v}_e = [\mathbf{K}_e]^{-1} \mathbf{F} \quad (7.3)$$

Paso 2. Para iniciar el análisis de estado límite como tal, se requiere inicializar y definir los parámetros de control. En vista de que el método de solución es un proceso iterativo, las iteraciones o ciclos estarán controlados por la medición del error, y por un número máximo de iteraciones. El error se mide contra ciertos valores límites, los cuales son:

¹⁰¹ Cordero C., R. A. Op cit. P. 105

¹⁰² Ídem.

- El error en el vector de desplazamientos, $error_v$,
- El error en el multiplicador de colapso, $error_{\mu_k}$
- El error en el residual de fuerzas, $error_R$

Estos parámetros dependen del valor de tolerancia provisto por el usuario del programa de análisis de estado límite. Dicho valor de tolerancia ingresado por el usuario se almacena en tol , y puede ser tan pequeño (0.1, 0.01, 0.001, etc.) como sea práctico en términos de memoria computacional. Los otros parámetros a inicializar son el contador del número de iteraciones, n_{iter} , y el multiplicador de colapso μ_k .

Paso 3. El análisis de estado límite se efectuará siempre y cuando los errores sean iguales o menores a la tolerancia determinada por el usuario, y además cuando también se tenga un número de iteraciones n_{iter} menor al límite máximo de iteraciones max_{iter} , también establecido por el usuario. Al inicio de cada ciclo se actualiza el contador ($n_{iter} = n_{iter} + 1$) y además se actualizan las variables μ_k^{pre} , \mathbf{v}_p^{pre} , las cuales contienen los valores de la iteración anterior. Es importante que, únicamente para la primera iteración μ_k^{pre} tiene el valor de cero (0), y el vector \mathbf{v}_p^{pre} es igual al vector de los desplazamientos elásticos \mathbf{v}_e .

El multiplicador de colapso se calcula como el inverso del producto del vector de fuerzas externas \mathbf{F} y del vector de desplazamientos de la iteración anterior \mathbf{v}_p^{pre} . Esto es, que el multiplicador queda dado por la siguiente expresión (Ver ecuación 5.39):

$$\mu_k = \frac{1}{\mathbf{F}^T \mathbf{v}_p^{pre}} \quad (7.4)$$

Con este valor del multiplicador de colapso se normaliza el vector de desplazamientos plásticos, obteniendo un vector de desplazamientos plásticos normalizados \mathbf{v}_{pn} . La normalización se obtiene con la multiplicación del escalar μ_k por el vector \mathbf{v}_{pn} :

$$\mathbf{v}_{pn}^{pre} = \mu_k \mathbf{v}_p^{pre} \quad (7.5)$$

De la expresión 5.30 para la matriz de rigidez plástica desarrollada en el capítulo 5, se tiene que la rigidez es una función del vector de desplazamientos \mathbf{v} , por lo que dicha matriz debe actualizarse en cada iteración con el último valor de desplazamientos plásticos normalizados. La función para la matriz de un elemento e es

$$\mathbf{k}^e(\mathbf{v}^e) = \sum_i^{ngauss} C_i \frac{M_p^{e l^e}}{\sqrt{\varepsilon^2 + (\mathbf{B}^T(x_i)\mathbf{v}^e)^2}} \mathbf{B}(x_i)\mathbf{B}^T(x_i) \quad (5.32)$$

y la matriz global (ensamblada para toda la estructura) queda definida matricialmente por

$$\mathbf{K}_p(\mathbf{v}_{pn}^{pre}) \quad (7.6)$$

Con la matriz de rigidez plástica \mathbf{K}_p se emplea para el cálculo del vector de fuerzas internas \mathbf{T} . Esto es que

$$\mathbf{T} = \mathbf{K}_p(\mathbf{v}_{pn}^{pre})\mathbf{v}_p \quad (7.7)$$

Con una expresión de forma similar, la matriz de rigidez plástica \mathbf{K}_p se emplea para calcular el vector de desplazamientos \mathbf{v}_p , de una manera equivalente al sistema de ecuaciones lineales descritas y resueltas en el paso 1. El sistema de ecuaciones queda dado por

$$\mathbf{K}_p(\mathbf{v}_{pn}^{pre})\mathbf{v}_p = \mathbf{F} \quad (7.8)$$

y la solución es

$$\mathbf{v}_p = [\mathbf{K}_p(\mathbf{v}_{pn}^{pre})]^{-1}\mathbf{F} \quad (7.9)$$

Al final de cada iteración del análisis de estado límite se debe calcular el error, entendido este como la discrepancia (o diferencia) entre los valores calculados en el ciclo anterior y los valores obtenidos en el ciclo actual. Los errores son los siguientes:

- Error en el vector de desplazamientos dado por

$$error_v = \frac{\|\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_p^{pre}\|}{\|\mathbf{v}_p\|} \quad (7.10)$$

- Error en el valor del multiplicador de colapso dado por

$$error_{\mu_k} = \frac{\|\mu_k - \mu_k^{pre}\|}{\|\mu_k\|} \quad (7.11)$$

- Error en el Residual de fuerzas dado por

$$error_R = \frac{\|\mathbf{F} - \mathbf{T}\|}{\|\mathbf{F}\|} \quad (7.12)$$

Estos valores deben compararse con las tolerancias establecidas en el paso 2 y una vez que las diferencias sean menores se continua con el paso siguiente, de lo contrario el cálculo iterativa deberá continuar hasta que se reduzcan las discrepancias, o bien que se alcance el límite máximo de iteraciones.

Paso 4. Por tratarse de un método numérico abierto, se debe considerar la posibilidad de que en algunos casos existan problemas de convergencia, y por lo tanto se debe interrumpir el proceso de cálculo.

Paso 5. El último paso simplemente consiste en reportar el multiplicador de colapso como dato de salida, junto con el mecanismo de colapso y los desplazamientos traslacionales y rotacionales. Todos estos datos de salida se pueden visualizar con un paquete computacional de Post-Procesamiento.

7.3 Solución por el método de Quasi-Newton Raphson.

Si gráficamente para el método de la secante la última iteración se trazaba una línea secante, para el método de Newton Raphson (NR) se traza una línea tangente en el punto de la última iteración¹⁰³. El método de NR es de los más empleados para la determinación de raíces¹⁰⁴. Aunque el método de NR suele ser muy eficiente también sufre de casos donde hay problemas de divergencia; un caso es cuando existen múltiples raíces. Para mejorar la convergencia se requiere de una buena aproximación inicial; las buenas aproximaciones se pueden plantear si se cuenta con un buen conocimiento del problema físico a resolver¹⁰⁵. Para el presente caso de un sistema no lineal, se empleará una versión modificada del método clásico de Newton-Raphson. El método de Quasi-Newton Raphson (QNR) se basa en el ensamble aproximado de la matriz de rigidez tangencial¹⁰⁶, la cual se calcula con la información recolectada en el proceso de corrección iterativa¹⁰⁷. El algoritmo que describe esta solución se presenta a continuación.

7.4 Algoritmo de la Cota Superior por el Método de Quasi-Newton Raphson

1. Calcular los desplazamientos elásticos \mathbf{v}_e empleando análisis elástico (empleando una matriz de rigidez elástica \mathbf{K}_e y el vector de fuerzas aplicadas \mathbf{F}).

$$\mathbf{K}_e \mathbf{v}_e = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{v}_e = [\mathbf{K}_e]^{-1} \mathbf{F}$$

2. Inicializar los valores de la tolerancia (tol), de los errores ($error_v$, $error_{\mu_k}$, $error_R$), del contador de iteraciones (n_{iter}), del vector desplazamientos plásticos \mathbf{v}_p y del multiplicador plástico de la iteración anterior (μ_k^{pre}).

$$error_v = 2 \times tol; \quad error_{\mu_k} = 2 \times tol; \quad error_R = 2 \times tol;$$

$$n_{iter} = 0; \quad \mu_k^{pre} = 1.0 \quad tol = 0.5 \times 10^{-5}$$

$$max_{iter} = 300 \quad \mathbf{v}_p = \mathbf{v}_e$$

¹⁰³ Antia, H. M. *Numerical Methods for Scientists and Engineers*. Basel, Suiza Birkhäuser. 2002. P. 294

¹⁰⁴ Chapra, Steven C., et al. Op cit. P. 139

¹⁰⁵ Chapra, Steven C., et al. Op cit. P. 143

¹⁰⁶ Bittnar, Z., et al. Op cit. P. 344

¹⁰⁷ Cordero C., R. A. Op cit. Pp. 105-106.

3. Si ($error_v > tol$, ó $error_{\mu k} > tol$, ó $error_R > tol$ y $n_{iter} < max_{iter}$) entonces

a. Actualizar contador.

$$n_{iter} = n_{iter} + 1$$

b. Normalizar vector de desplazamientos.

$$\mathbf{v}_{pn} = \frac{\mathbf{v}_p}{\mathbf{F}^T \mathbf{v}_p}$$

c. Calcular la matriz de rigidez plástica en función del vector de los desplazamientos normalizados.

$$\mathbf{K}_p(\mathbf{v}_{pn})$$

d. Actualizar vector de desplazamientos del paso anterior \mathbf{v}_{pn}^{pre} .

$$\mathbf{v}_{pn}^{pre} = \mathbf{v}_{pn}$$

e. Calcular el vector de las fuerzas internas \mathbf{T} .

$$\mathbf{T} = \mathbf{K}_p(\mathbf{v}_{pn})\mathbf{v}_p$$

f. Calcular el multiplicador de colapso.

$$\mu_k = \mathbf{T}\mathbf{v}_{pn}$$

g. Obtener el residual de fuerzas $\Delta\mathbf{F}$.

$$\Delta\mathbf{F} = \mu_k \mathbf{F} - \mathbf{T}$$

h. Resolver la ecuación de equilibrio y calcular desplazamientos plásticos.

$$\mathbf{K}_p(\mathbf{v}_{pn})\Delta\mathbf{v}_p = \Delta\mathbf{F}$$

$$\Delta\mathbf{v}_p = [\mathbf{K}_p(\mathbf{v}_{pn})]^{-1} \Delta\mathbf{F}$$

i. Actualizar valor de desplazamientos plásticos.

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_p + \Delta\mathbf{v}_p$$

j. Normalizar el vector desplazamientos actualizado en el inciso i).

$$\mathbf{v}_{pn} = \frac{\mathbf{v}_p}{\mathbf{F}^T \mathbf{v}_p}$$

k. Calcular errores.

$$error_v = \frac{\|\mathbf{v}_{pn} - \mathbf{v}_{pn}^{pre}\|}{\|\mathbf{v}_p\|}$$

$$error_{\mu_k} = \frac{\|\mu_k - \mu_k^{pre}\|}{\|\mu_k\|}$$

$$error_R = \frac{\|\Delta \mathbf{F}\|}{\|\mathbf{F}\|}$$

- I. Ciclar al punto 3.
4. Si ($error_v < tol$, $error_{\mu_k} < tol$, $error_R < tol$, y $n_{iter} > max_{iter}$) entonces reportar el mensaje "La solución no converge"
 5. Reportar el multiplicador de colapso μ_k y el mecanismo de colapso como datos de salida.
-

Los pasos 1, 2, 4 y 5 de este algoritmo son en esencia los mismos que en el caso de la solución del método de la secante, por lo que los comentarios anteriormente dados para dichos pasos, son válidos tanto para el método de la secante, como el método por QNR. La diferencia radica en el enfoque de metodología del análisis de estado límite, el cual se describe en el paso 3, el cual se comenta a continuación.

Paso 3. Después actualizar el contador de iteraciones al inicio de cada ciclo, el vector desplazamientos plásticos se normaliza por el producto de los vectores de la fuerzas externas \mathbf{F} y del vector de desplazamientos del paso anterior (para la primera iteración se toman los desplazamientos elásticos). La normalización se calcula como

$$\mathbf{v}_{pn} = \frac{\mathbf{v}_p}{\mathbf{F}^T \mathbf{v}_p} \quad (7.13)$$

La matriz de rigidez \mathbf{K} se formula y ensambla en base al vector normalizado de desplazamientos plásticos \mathbf{v}_{pn} . Posteriormente con la matriz \mathbf{K} se calcula el vector de fuerzas internas \mathbf{T} . Una importante deferencia de este método con el anterior, es que el multiplicador de colapso se calcula con el vector de fuerzas internas \mathbf{T} . El multiplicador se obtiene de la expresión

$$\mu_k = \mathbf{T}\mathbf{v}_{pn} \quad (7.14)$$

Con el valor del multiplicador μ_k se prosigue a escalar el vector de fuerzas externas \mathbf{K} , y con dicho valor se puede obtener el valor del residual¹⁰⁸, denotado como $\Delta\mathbf{F}$. Este residual se calcula como

$$\Delta\mathbf{F} = \mu_k\mathbf{F} - \mathbf{T} \quad (7.15)$$

Con el residual se resuelve la ecuación de equilibrio, con la notaria diferencia de que la solución será un vector de incrementos de desplazamientos $\Delta\mathbf{v}_p$ en lugar del vector de desplazamientos \mathbf{v}_p , como fue el caso del método de la secante (véase ecuaciones 7.7 y 7.8). La diferencia se puede apreciar en las siguientes expresiones:

$$\mathbf{K}_p(\mathbf{v}_{pn})\Delta\mathbf{v}_p = \Delta\mathbf{F} \quad (7.16)$$

$$\Delta\mathbf{v}_p = [\mathbf{K}_p(\mathbf{v}_{pn})]^{-1}\Delta\mathbf{F} \quad (7.17)$$

El incremento se suma al vector de desplazamientos

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_p + \Delta\mathbf{v}_p \quad (7.18)$$

y posteriormente se normaliza, para poder calcular el error con respecto al valor del paso anterior.

Con estos dos enfoques es posible obtener el valor del mecanismo de colapso y comparar la respuesta dichos métodos. Estos métodos serán empleados en el siguiente capítulo dónde se analizan un número de ejemplos de estructuras.

¹⁰⁸ Cordero C., R. A. Ibíd. P. 65

Capítulo 8.

Ejemplos de Aplicación del Análisis de Estado Límite.

8.1 Consideraciones de análisis y propiedades físicas.

En éste capítulo se analizan varios casos de estructuras de acero, empleando el programa de Análisis Límite. En cada caso se presenta un diagrama que describe la configuración de la estructura, además las cargas aplicadas. Además del diagrama con la geometría original de la estructura, se traza la “deformada” de la estructura en el momento del colapso incipiente. La deformada es una descripción de la configuración estructural del mecanismo cinemático de colapso, el cual queda descrito por cierto número de articulaciones plásticas. Las articulaciones plásticas esperadas (según la solución analítica) se indican en el diagrama por medio de un círculo negro (●).

El programa de Análisis de Estado Límite genera dos tipos de resultados: resultados gráficos y resultados numéricos. Los resultados gráficos consisten en desplazamientos, distribuciones de esfuerzos, distribuciones de fuerzas, flujos de fuerzas, entre otros. Los resultados gráficos que son de interés especial para el presente trabajo son los desplazamientos, ya que estos muestran el mecanismo de colapso de las estructuras analizadas. Los desplazamientos pueden clasificarse como traslaciones (en dirección de ejes x , y) o bien pueden ser rotaciones (alrededor del eje z). Los desplazamientos que visualmente describen la ubicación de las articulaciones plásticas, son las rotaciones alrededor del eje z . Los resultados de tipo numérico que genera el programa son los valores de todas las variables relevantes anteriormente descritas a lo largo del presente trabajo. El valor que más interesa para este proyecto es el del multiplicador de colapso μ_k el cual representa la carga de colapso de la estructura analizada.

Los resultados arrojados por el programa se comparan con las soluciones analíticas, las cuales se describen a detalle en las fuentes bibliográficas consultadas. El proceso de obtención de la solución

analítica de la carga de colapso requiere evaluar todos los mecanismos (o combinación de mecanismos) de colapso posibles y encontrar la opción que corresponda a la menor carga de colapso que cumpla con el requisito de admisibilidad cinemática. Si se desea conocer a detalle el procedimiento analítico para el cálculo de la carga de colapso, se sugiere consultar la bibliografía de la que se obtuvieron los presentes casos. En este trabajo sólo se presenta y evalúa, de manera breve y concisa, la expresión (ecuación) que describe el valor de la carga de colapso μ_k .

Las unidades a emplear en el programa de análisis deben ser consistentes. El sistema de unidades empleado en el presente trabajo de investigación es el sistema inglés (o imperial). La selección se basa en que la fuente de consulta empleada para los perfiles de acero es el manual AISC (*American Institute of Steel Construction*). Las unidades son las siguientes:

Longitud: pulgadas (in)

Fuerza: kilo-libras (kip)

Esfuerzos: kilo-libras por pulgada cuadrada (ksi)

Los ejemplos mostrados a continuación utilizan secciones tipo W y el mismo tipo de acero para todos los casos analizados. El tipo de acero a emplear es A992 Grado 50, cuyo esfuerzo de fluencia es $F_y=50$ ksi y un módulo de elasticidad $E = 29,000$ ksi.

El presente proyecto de análisis se enfoca a estructuras bidimensionales, por lo que se asume que, para todos los elementos estructurales mostrados, la flexión ocurre alrededor del eje "fuerte" de la sección del perfil empleado (eje X-X de la Figura 22).

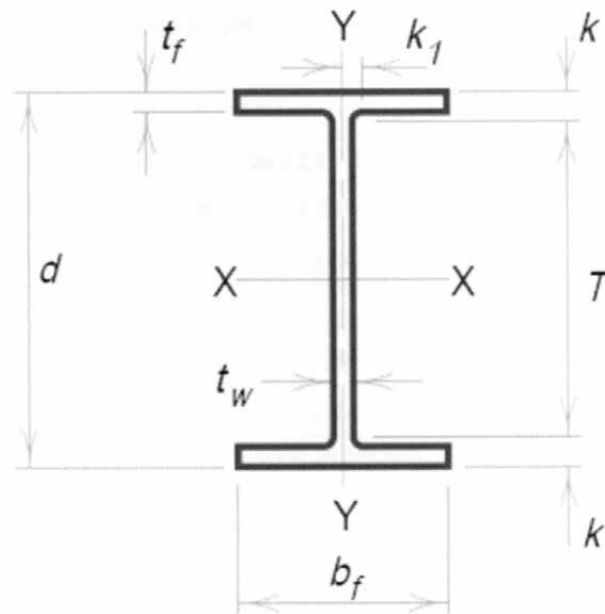


Figura 22. Sección tipo W.¹⁰⁹

La obtención del momento plástico M_p de una sección dada, queda expresada por la ecuación¹¹⁰

$$M_p = F_y Z_x \quad (8.1)$$

Los elementos de las estructuras mostradas a continuación se eligieron en base al valor del momento plástico. Esa propiedad fue el parámetro principal para elegir la sección, y se ignoró si las dimensiones de las tres secciones empleadas impiden la conexión de las mismas. En un contexto físico deben revisarse las dimensiones del patín y del alma, pero para el propósito académico del presente proyecto no se realizará dicha revisión.

¹⁰⁹ Imagen adaptada de la imagen original en American Institute of Steel Construction (AISC). *Steel Construction Manual*. Edición 13. Estados Unidos. AISC Inc. 2005

¹¹⁰ Salmon, Charles G. et al *Steel Structures: Design and Behavior, Emphasizing Load and Resistance Factor Design*. Quinta edición. Estados Unidos. Pearson Prentice Hall. 2009. P. 326

Las propiedades de las secciones empleadas y sus propiedades se muestran en la siguiente tabla:

Sección	W21X62	W12X136	W14X159	W21X166
$X M_p$	M_p	$1.5M_p$	$2M_p$	$3M_p$
$M_p, \text{kip-in}$	7,200	10,800	14,350	21,600
Z_x, in^3	144	216	287	432
A, in^2	18.3	39.9	46.7	48.8
I_x, in^4	1,330	1,240	1,900	4,280

Tabla 2. Propiedades de secciones tipo W.¹¹¹

8.2 Paquete computacional de Pre- y Post-Procesamiento: GiD.

GiD es un pre y postprocesador genérico, de fácil adaptabilidad y acoplamiento con los programas de análisis que usualmente se usan para la simulación numérica en las áreas de ciencia e ingeniería¹¹². GiD tiene un módulo de preprocesamiento cuya función es ingresar los datos del problema a resolver así como los parámetros para obtener la solución. El preprocesamiento comprende la generación del modelo geométrico, el mallado del mismo, la selección del tipo de análisis, el ingreso de las propiedades físicas del modelo y demás parámetros de análisis. El postprocesamiento abarca todos los aspectos relacionados con la visualización de resultados obtenidos en el módulo de análisis. Los resultados son visuales y numéricos, tales como el modelo geométrico deformado, una escala de desplazamientos y/o fuerzas (o esfuerzos) en el modelo, vectores de esfuerzos principales, etc.

El módulo de análisis a emplear es el programa de análisis de estado límite desarrollado en el presente trabajo. El programa desarrollado en el lenguaje computacional de Fortran, tiene dos versiones: una versión con el método de la secante (SEC), y otra versión con el método de Quasi-Newton Raphson (QNR).

¹¹¹ American Institute of Steel Construction (AISC). *Steel Construction Manual*. Edición 13. Estados Unidos. AISC Inc. 2005

¹¹² "GiD. The personal pre and post processor", GiD © 2006 CIMNE, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, 2006, Barcelona, España. Disponible en: <http://www.gidhome.com/>

8.3 Casos de estudio.

1. Viga doblemente empotrada ($L = 288 \text{ in}$)¹¹³

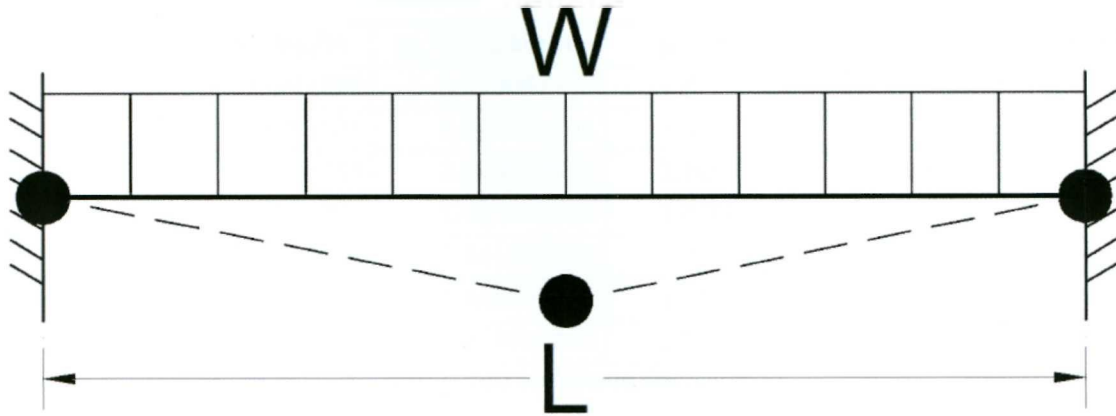


Figura 23. Viga doblemente empotrada, con mecanismo de colapso sobreimpuesto.¹¹⁴

Solución analítica:

$$W = \frac{16M_p}{L^2} = \frac{16(7200)}{288^2} = 1.389 \text{ kip/in} \quad (8.2)$$

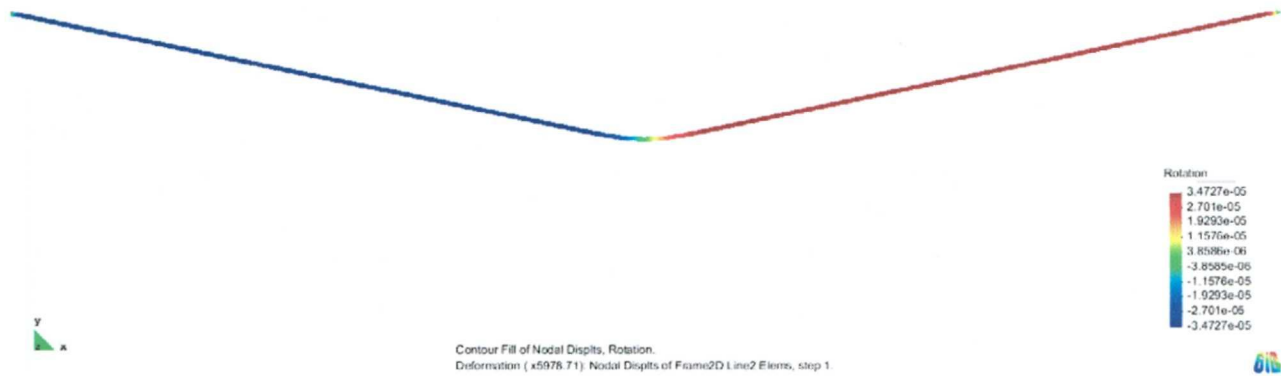


Figura 24. Mecanismo de colapso de viga doblemente empotrada.¹¹⁵

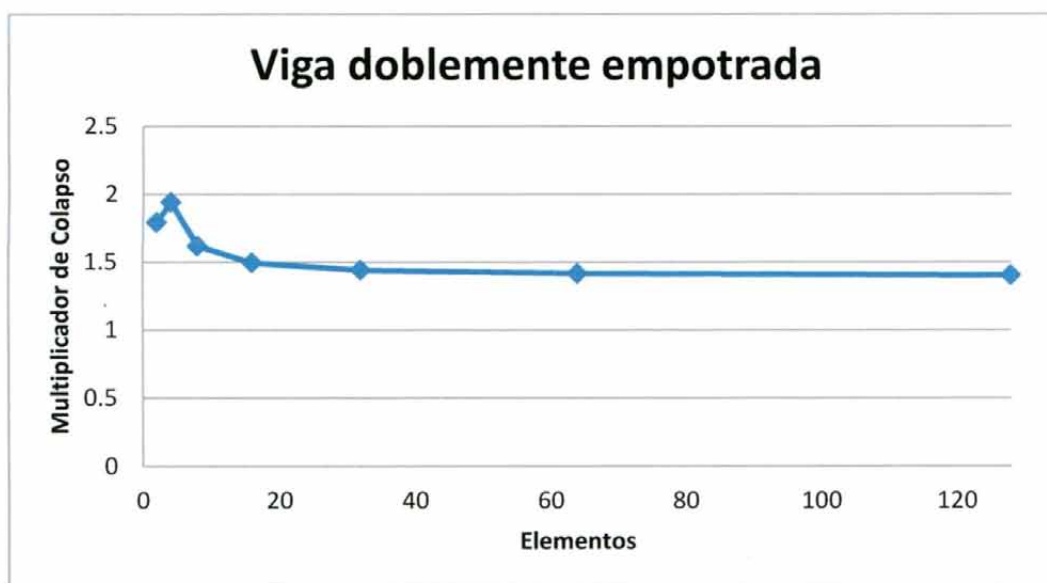
¹¹³ Pons F., R. Op cit. P. 32

¹¹⁴ Figura propia.

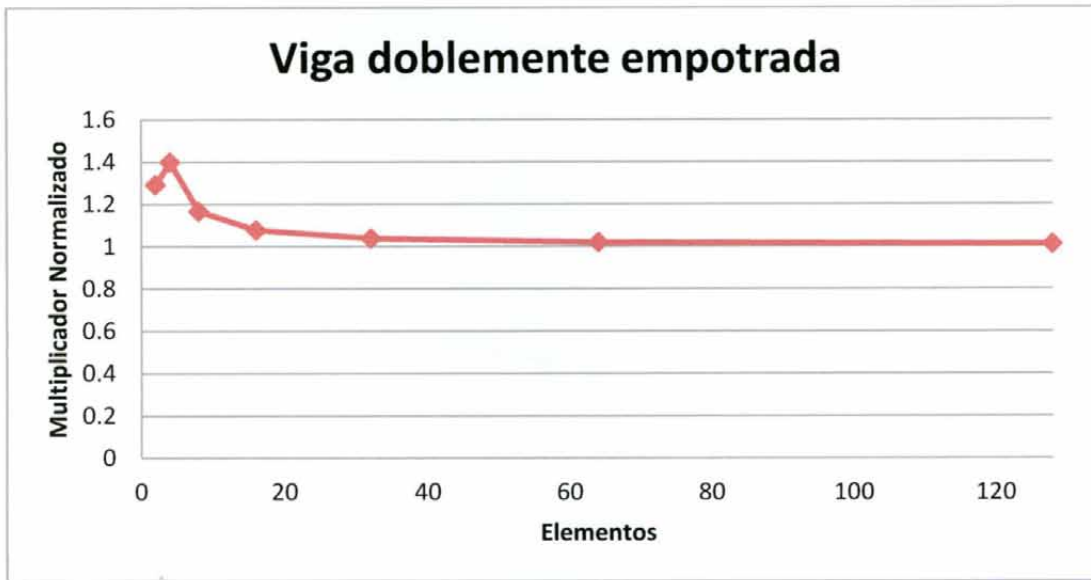
¹¹⁵ Imagen generada con Post-Procesador GiD®

Caso # 1	Viga doblemente empotrada				
	Multiplicador de colapso μ_k por solución numérica		Multiplicador μ_k normalizado por solución analítica μ		Solución Analítica
	μ_k (QNR), kip/in	μ_k (SEC), kip/in	μ_k (QNR)	μ_k (SEC)	
Número de Elementos					μ , kip/in
2	1.793047753	1.793047753	1.290994382	1.290994382	1.3889
4	1.942051601	1.942051601	1.398277153	1.398277153	
8	1.619538933	1.619538933	1.166068032	1.166068032	
16	1.495578072	1.495578502	1.076816212	1.076816521	
32	1.441878852	1.441878967	1.038152774	1.038152856	
64	1.4162151	1.416215301	1.019674872	1.019675017	
128	1.403624058	1.403624561	1.010609322	1.010609684	

Tabla 3. Viga doblemente empotrada.



Gráfica 1. Multiplicador de colapso de viga doblemente empotrada.



Gráfica 2. Multiplicador normalizado de viga doblemente empotrada.

2. Viga simplemente apoyada ($L = 288 \text{ in}$)¹¹⁶

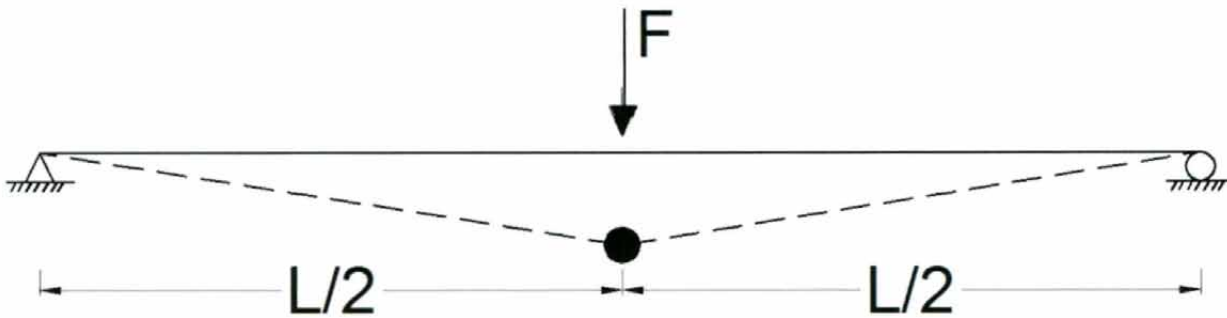


Figura 25. Viga simplemente apoyada, con mecanismo de colapso sobreimpuesto.¹¹⁷

Solución analítica:

$$F = \frac{4M_p}{L} = \frac{4(7200)}{288} = 100 \text{ kip} \tag{8.3}$$

¹¹⁶ Bazant, Z., P. et al. Op cit. P. 13

¹¹⁷ Imagen propia.

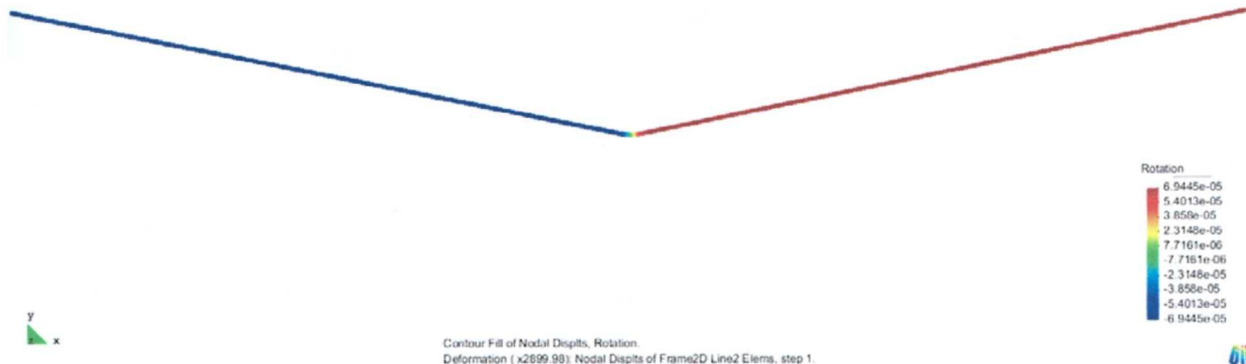
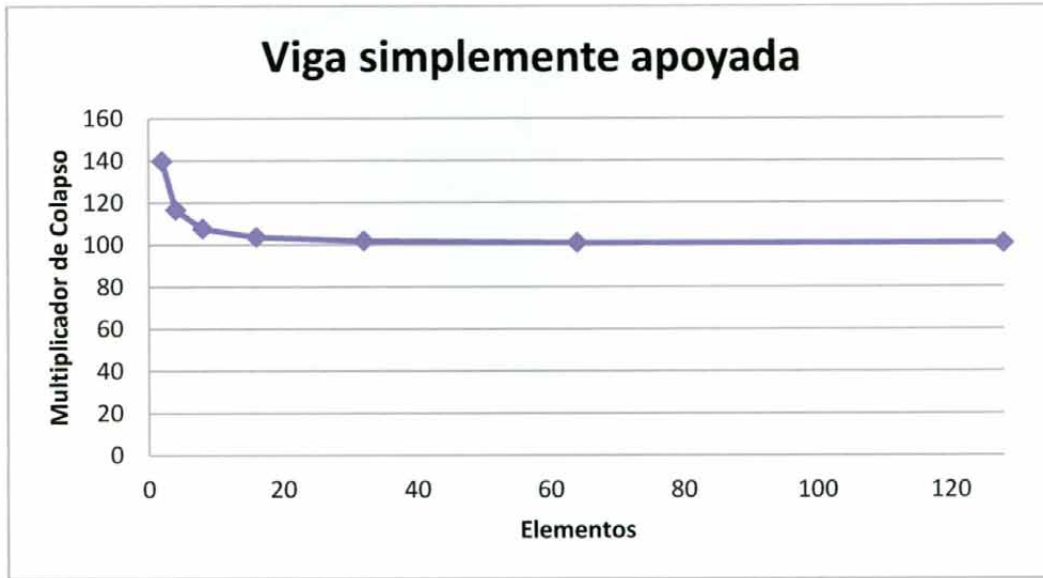


Figura 26. Mecanismo de colapso de viga simplemente apoyada.¹¹⁸

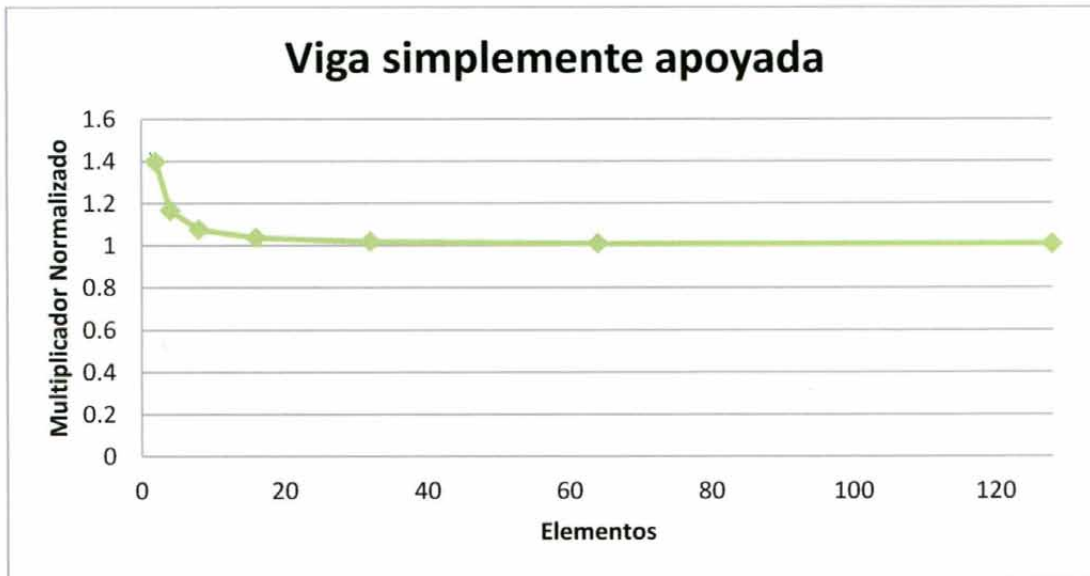
Caso # 2	Viga simplemente apoyada				
	Multiplicador de colapso μ_k por solución numérica		Multiplicador μ_k normalizado por solución analítica μ		Solución Analítica
	μ_k (QNR), kip	μ_k (SEC), kip	μ_k (QNR)	μ_k (SEC)	
Número de Elementos					μ , kip
2	139.8277269	139.8277269	1.398277269	1.398277269	100
4	116.6068067	116.6068066	1.166068067	1.166068066	
8	107.6667986	107.6667983	1.076667986	1.076667983	
16	103.6918692	103.6918728	1.036918692	1.036918728	
32	101.8141807	101.8141502	1.018141807	1.018141502	
64	100.9561935	100.9549809	1.009561935	1.009549809	
128	100.7080002	100.6978185	1.007080002	1.006978185	

Tabla 4. Viga simplemente apoyada.

¹¹⁸ Imagen generada con Post-Procesador GiD®



Gráfica 3. Multiplicador de colapso de viga simplemente apoyada.



Gráfica 4. Multiplicador normalizado de viga simplemente apoyada.

3. Portal sencillo (L = 180 in).¹¹⁹

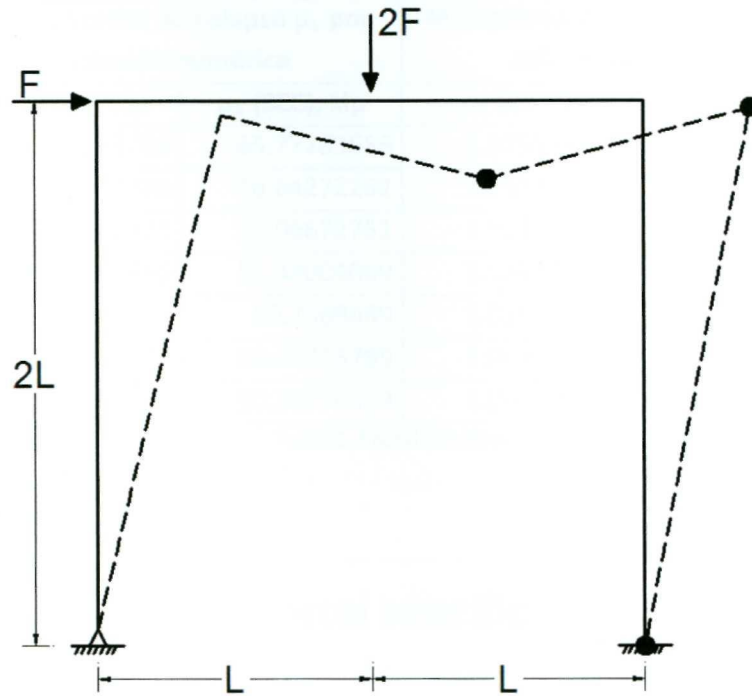


Figura 27. Portal sencillo, con mecanismo de colapso sobreimpuesto.¹²⁰

Solución analítica:

$$F = \frac{1.25M_p}{L} = \frac{1.25(7200)}{180} = 50 \text{ kip} \tag{8.4}$$

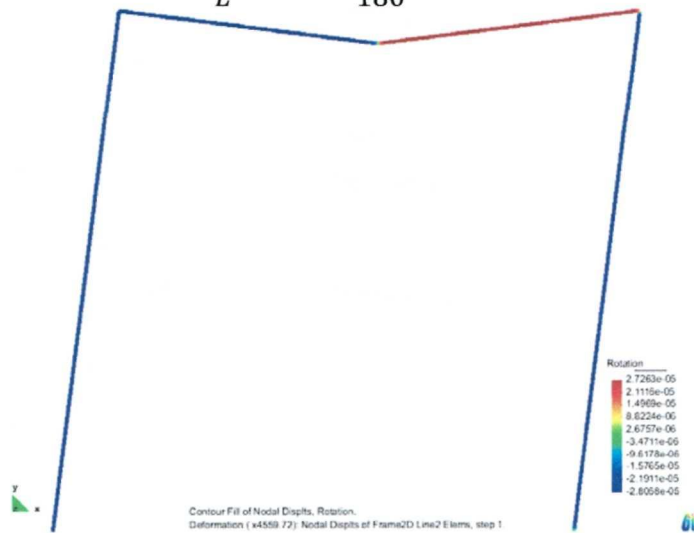


Figura 28. Mecanismo de colapso de portal sencillo.¹²¹

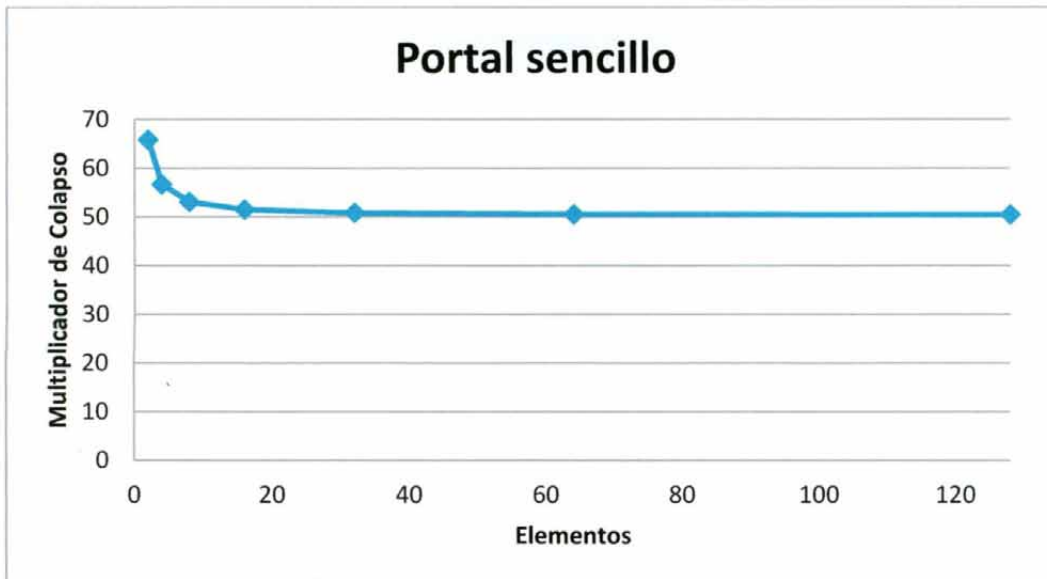
¹¹⁹ Bažant, Z., P. et al. Ibíd. P.48

¹²⁰ Figura propia.

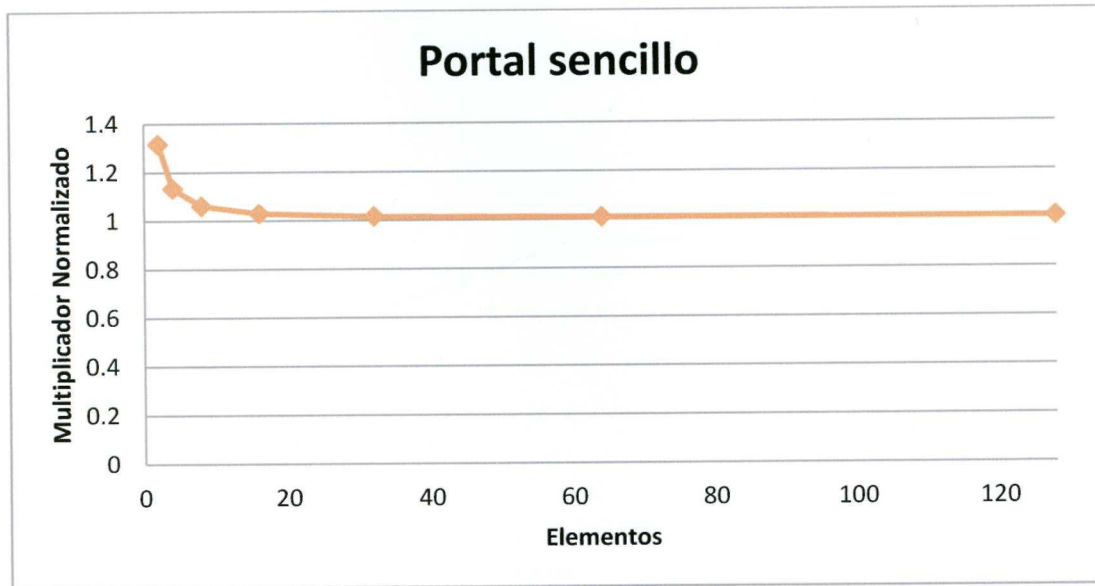
¹²¹ Imagen generada con Post-Procesador GiD®

Caso # 3	Portal sencillo				Solución Analítica
	Multiplicador de colapso μ_k por solución numérica		Multiplicador μ_k normalizado por solución analítica μ		
	μ_k (QNR), kip	μ_k (SEC), kip	μ_k (QNR)	μ_k (SEC)	
Número de Elementos					μ , kip
2	65.77763768	65.77763686	1.315552754	1.315552737	50
4	56.64272286	56.64272262	1.132854457	1.132854452	
8	53.06672621	53.06672751	1.061334524	1.06133455	
16	51.48003605	51.48004069	1.029600721	1.029600814	
32	50.76694864	50.7669449	1.015338973	1.015338898	
64	50.48266679	50.48253799	1.009653336	1.00965076	
128	50.37025318	50.36770563	1.007405064	1.007354113	

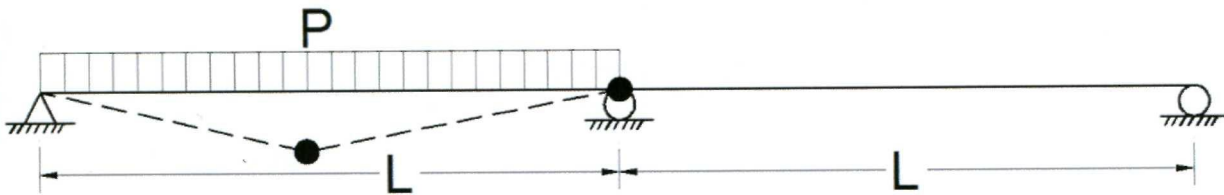
Tabla 5. Portal sencillo.



Gráfica 5. Multiplicador de colapso de portal sencillo.



Gráfica 6. Multiplicador normalizado de portal sencillo.

4. Viga continua.¹²²Figura 29. Viga continua, con mecanismo de colapso sobreimpuesto.¹²³

Solución analítica:

$$P = 11.66 \frac{M_p}{L^2} = 11.66 \frac{7200}{(420)^2} = 0.47 \frac{\text{kip}}{\text{in}} \quad (8.5)$$

¹²² Bažant, Z., P. et al. Ibíd. P. 63¹²³ Figura propia.

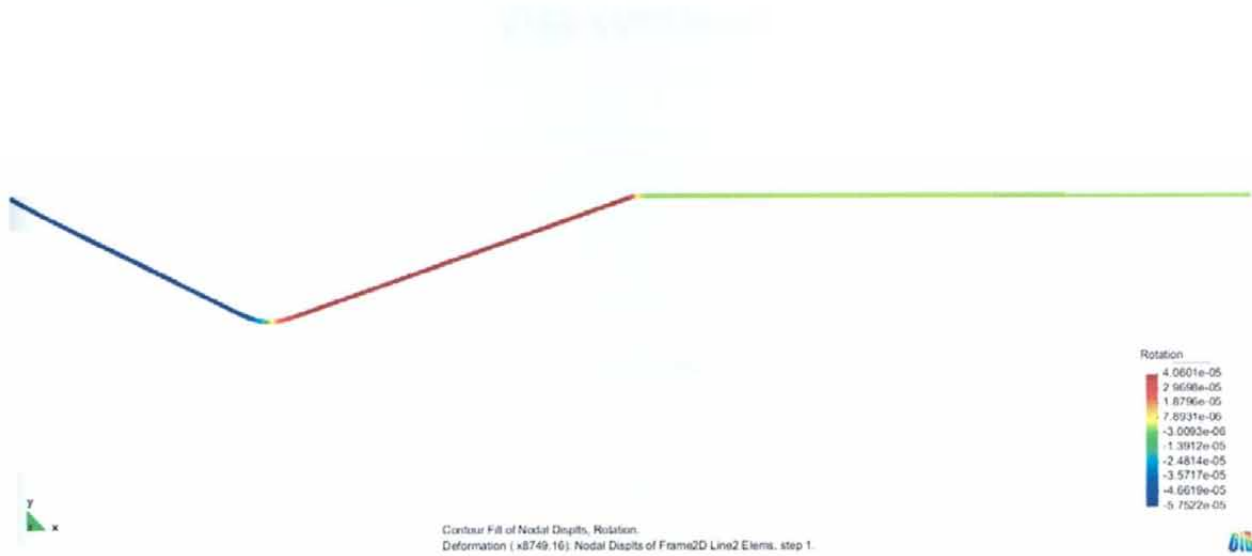
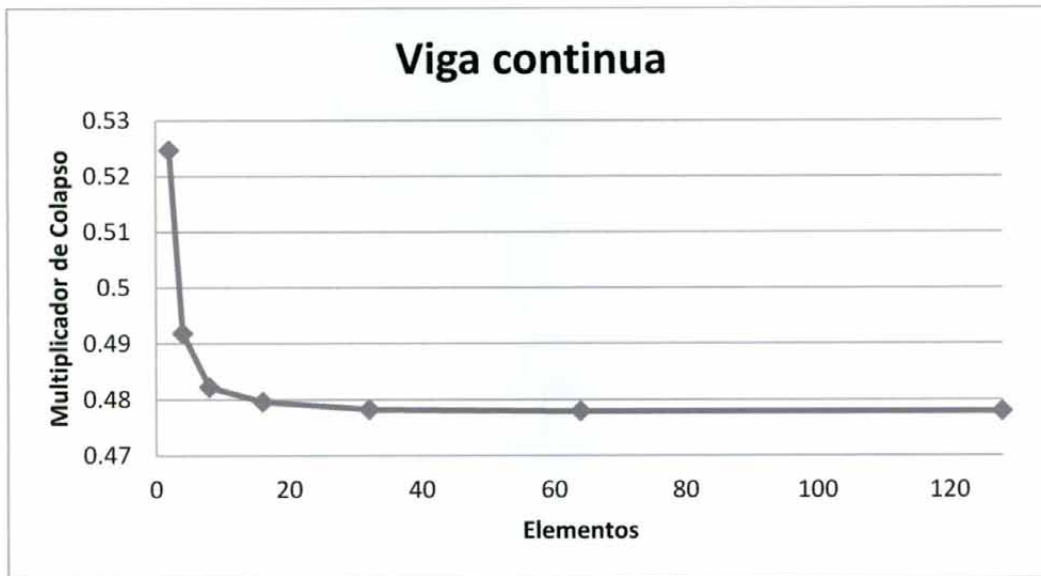


Figura 30. Mecanismo de colapso de viga continua.¹²⁴

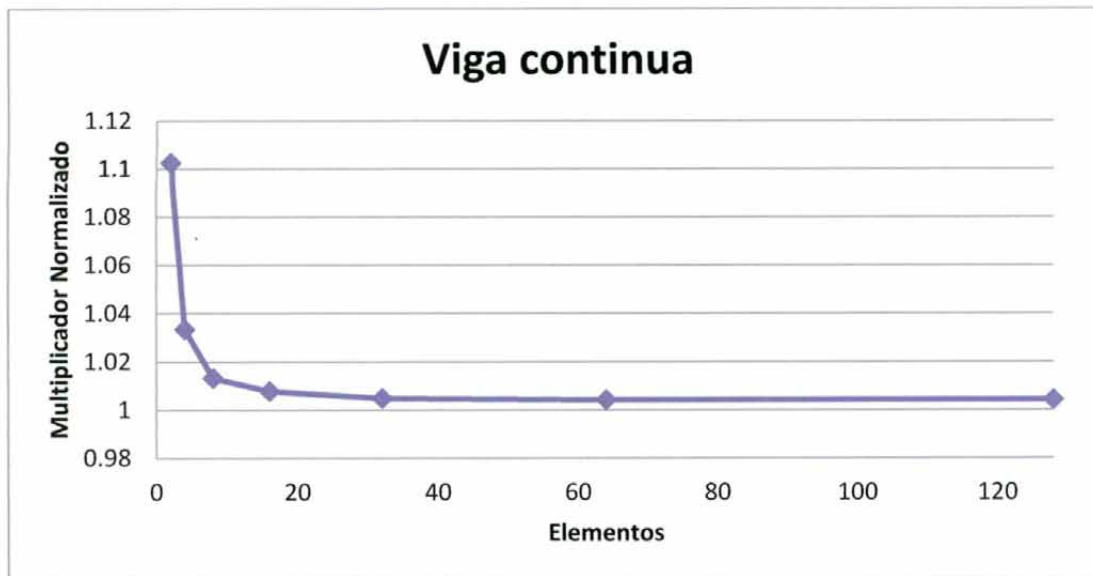
Caso # 4	Viga continua				
	Multiplicador de colapso μ_k por solución numérica		Multiplicador μ_k normalizado por solución analítica μ		Solución Analítica μ , kip/in
	μ_k (QNR), kip/in	μ_k (SEC), kip/in	μ_k (QNR)	μ_k (SEC)	
Número de Elementos					
2	0.524681797	0.524681797	1.102461751	1.102461752	0.4759
4	0.491807233	0.491807233	1.033385696	1.033385696	
8	0.482233262	0.482233516	1.013268862	1.013269394	
16	0.479631942	0.479632165	1.007802967	1.007803433	
32	0.478244547	0.478244936	1.00488777	1.004888587	
64	0.477925249	0.477925676	1.004216862	1.004217758	
128	0.477912167	0.477912678	1.004189374	1.004190447	

Tabla 6. Viga continua.

¹²⁴ Imagen generada con Post-Procesador GiD®



Gráfica 7. Multiplicador de colapso de viga continua.



Gráfica 8. Multiplicador normalizado de viga continua.

5. Portal doble vertical ($L=180$ in).¹²⁵

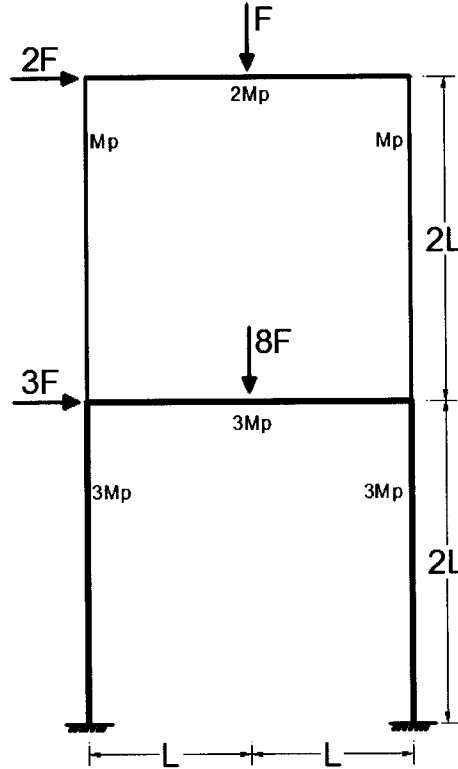


Figura 31. Portal doble vertical.¹²⁶

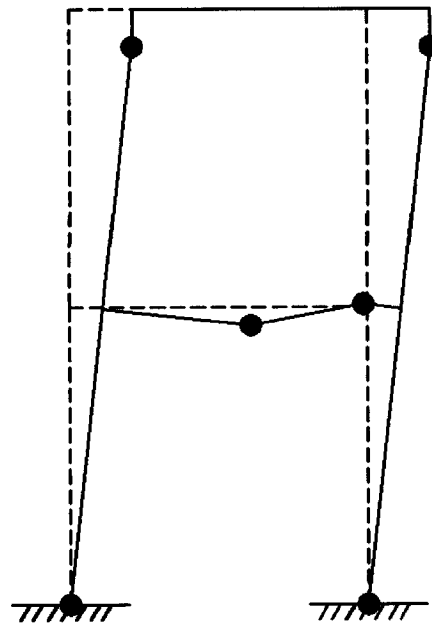


Figura 32. Mecanismo de colapso de portal doble vertical, con geometría original sobreimpuesta.¹²⁷

¹²⁵ Bažant, Z., P. et al. Ibíd. P. 69

¹²⁶ Figura propia

¹²⁷ Figura propia

Solución analítica:

$$F = \frac{10 M_p}{11 L} = 0.909 \frac{M_p}{L} = 0.909 \frac{7200}{180} = 36.4 \text{ kip} \tag{8.6}$$

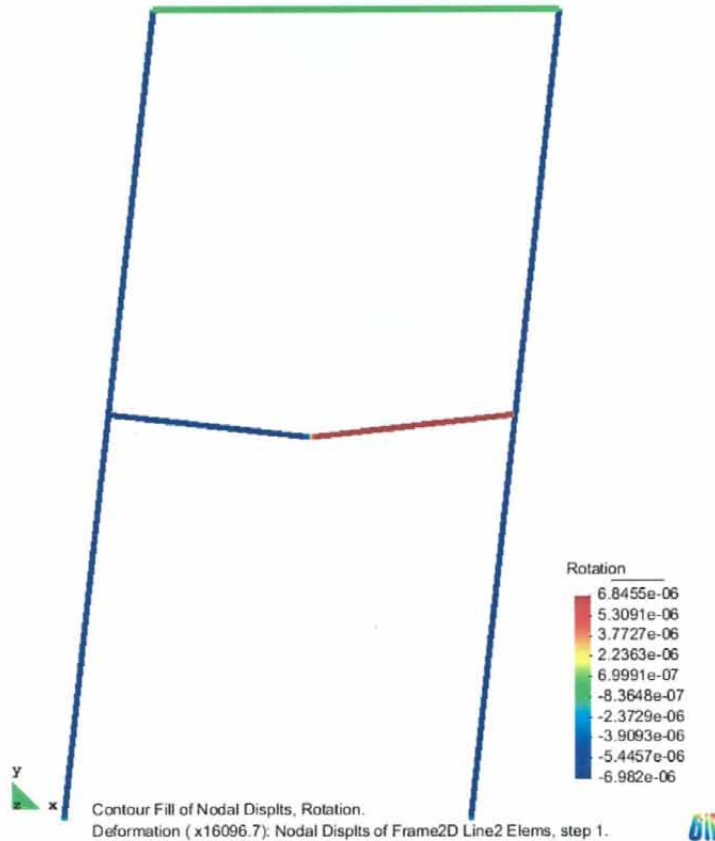
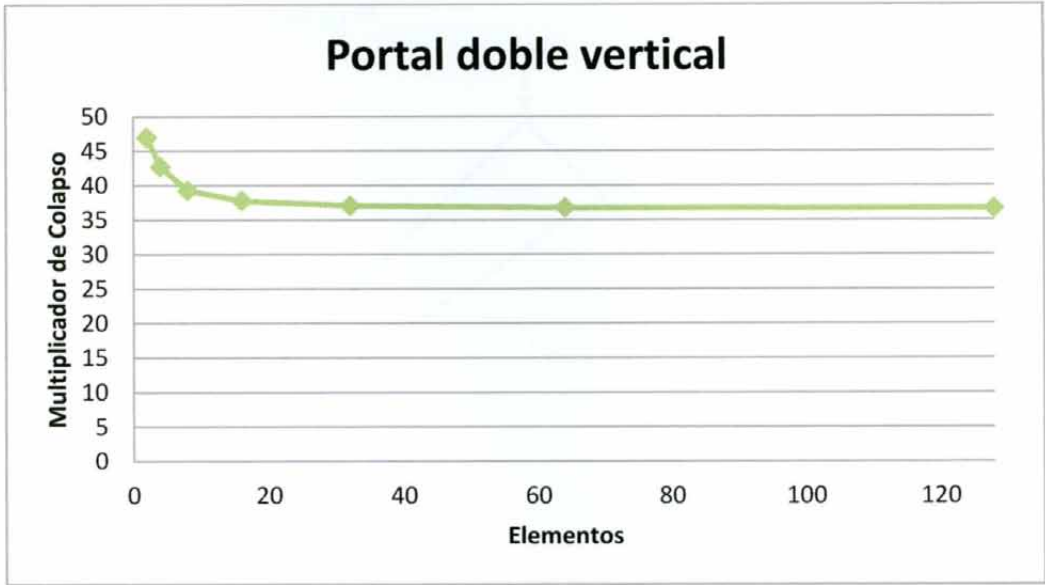


Figura 33. Mecanismo de colapso de portal doble vertical.¹²⁸

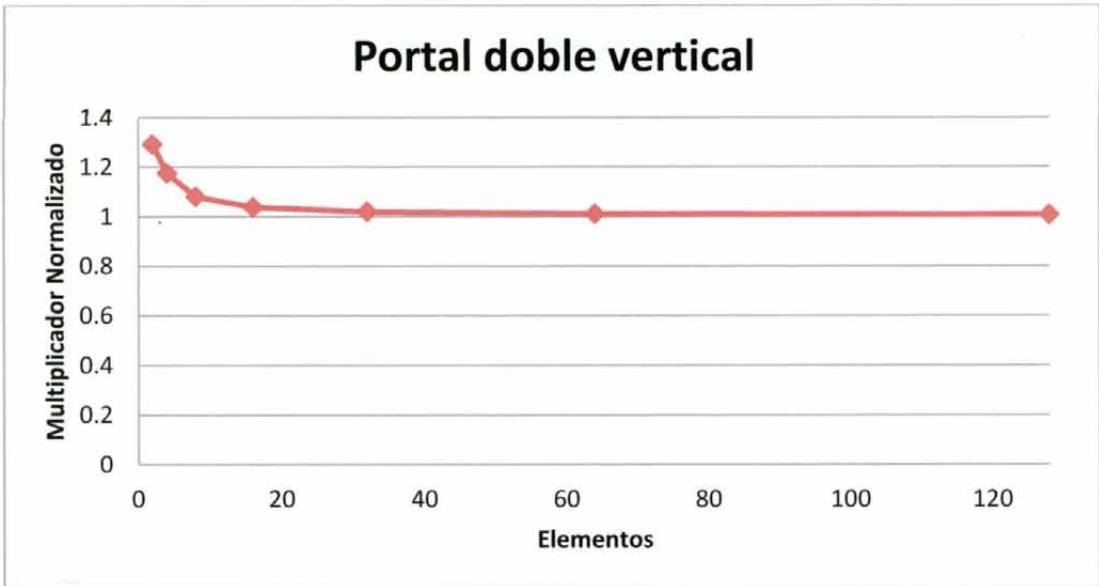
Caso # 5	Portal doble vertical				
	Multiplicador de colapso μ_k por solución numérica		Multiplicador μ_k normalizado por solución analítica μ		Solución Analítica μ , kip
	μ_k (QNR), kip	μ_k (SEC), kip	μ_k (QNR)	μ_k (SEC)	
Número de Elementos					
2	46.96939925	46.96939925	1.291658479	1.291658479	36.3636
4	42.72498669	42.72498665	1.174937134	1.174937133	
8	39.28847932	39.28847975	1.080433181	1.080433193	
16	37.77021711	37.77022031	1.038680971	1.038681059	
32	37.06892015	37.06892668	1.019395304	1.019395484	
64	36.76571597	36.76566466	1.011057189	1.011055778	
128	36.64337136	36.64373431	1.007692713	1.007702694	

Tabla 7. Portal doble vertical.

¹²⁸ Imagen generada con Post-Procesador GiD®



Gráfica 9. Multiplicador de colapso de portal doble vertical.



Gráfica 10. Multiplicador normalizado de portal doble vertical.

6. Portal a dos aguas (L=240 in)¹²⁹

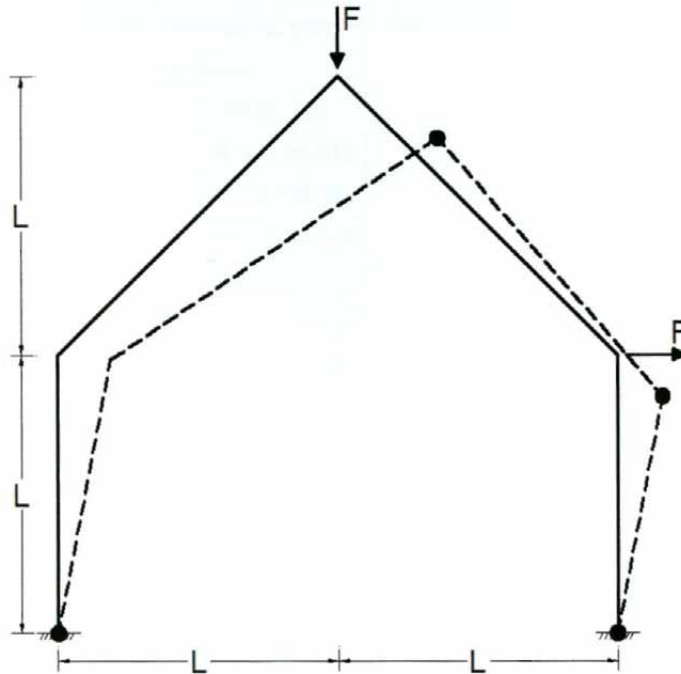


Figura 34. Portal a dos aguas, con mecanismo de colapso sobreimpuesto.¹³⁰

Solución analítica:

$$F = 2.5 \frac{M_p}{L} = 2.5 \frac{7200}{240} = 75 \text{ kip} \tag{8.7}$$

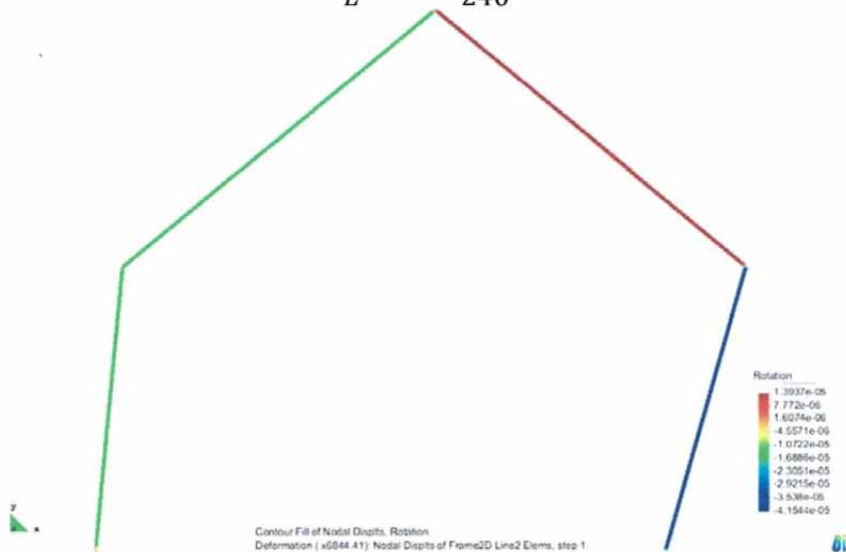


Figura 35. Mecanismo de colapso de portal a dos aguas.¹³¹

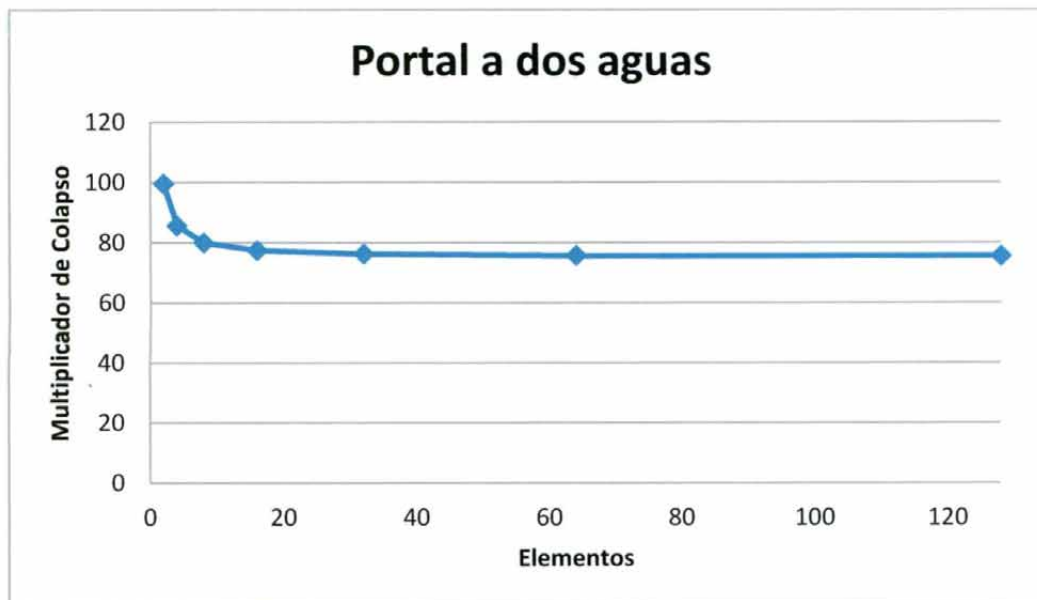
¹²⁹ Bažant, Z., P. et al. *Ibíd.* P. 71

¹³⁰ Imagen propia.

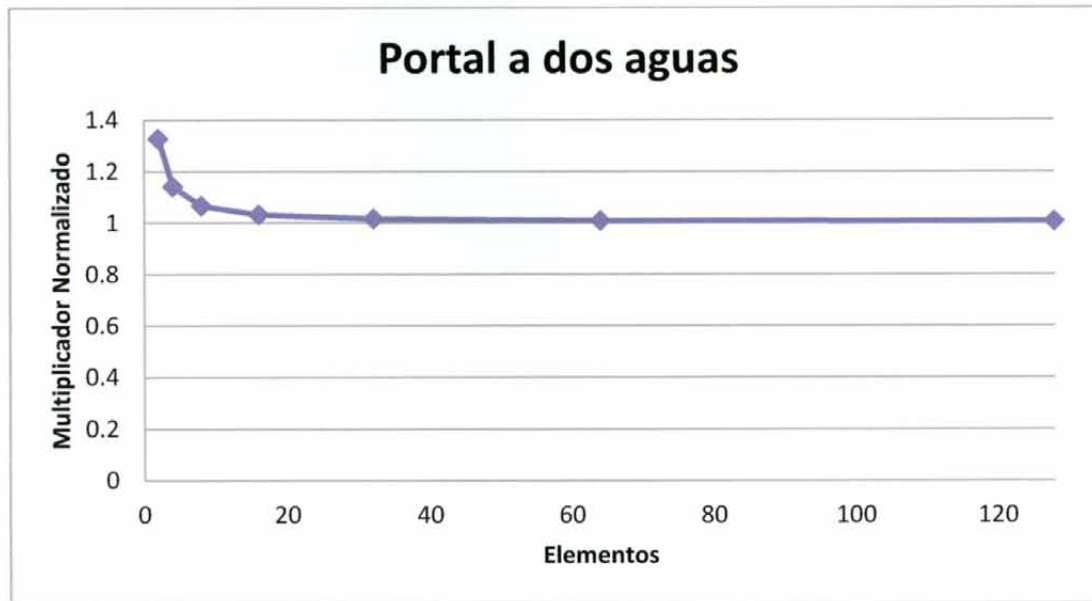
¹³¹ Imagen generada con Post-Procesador GiD®

Caso # 6	Portal a dos aguas				Solución Analítica
	Multiplicador de colapso μ_k por solución numérica		Multiplicador μ_k normalizado por solución analítica μ		
	μ_k (QNR), kip	μ_k (SEC), kip	μ_k (QNR)	μ_k (SEC)	
Número de Elementos					μ , kip
2	99.5210643	99.52106442	1.326947524	1.326947526	75
4	85.65056796	85.65056785	1.142007573	1.142007571	
8	79.99500491	79.99500462	1.066600065	1.066600062	
16	77.44412272	77.44412536	1.032588303	1.032588338	
32	76.23163364	76.23157739	1.016421782	1.016421032	
64	75.68177498	75.68195376	1.009090333	1.009092717	
128	75.50302725	75.51318702	1.00670703	1.006842494	

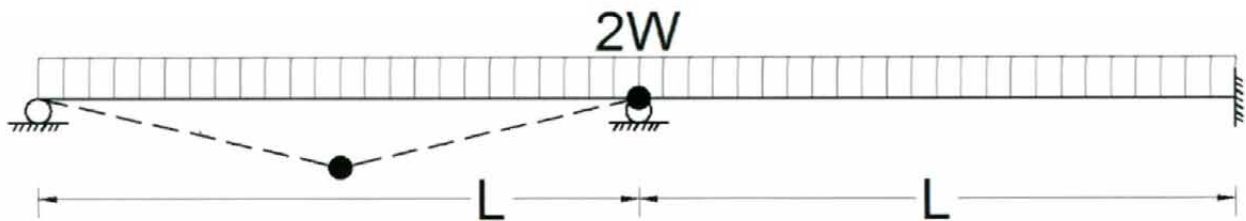
Tabla 8. Portal a dos aguas.



Gráfica 11. Multiplicador de colapso de portal a dos aguas.



Gráfica 12. Multiplicador normalizado de portal a dos aguas.

7. Viga continua y empotrada ($L=360 \text{ in}$)¹³²Figura 36. Viga continua y empotrada, con mecanismo de colapso sobreimpuesto.¹³³

Solución analítica:

$$WL = 2(3 + 2\sqrt{2})M_p \cong 11.65M_p \quad (8.8)$$

$$W = 11.65 \frac{M_p}{L} = 11.65 \left(\frac{7200}{360} \right) = 233 \text{ kip} \left(\frac{1}{2 \times 360 \text{ in}} \right) = 0.323 \text{ kip/in} \quad (8.9)$$

¹³² Chakrabarty, J. Op cit. P. 233.¹³³ Figura propia.

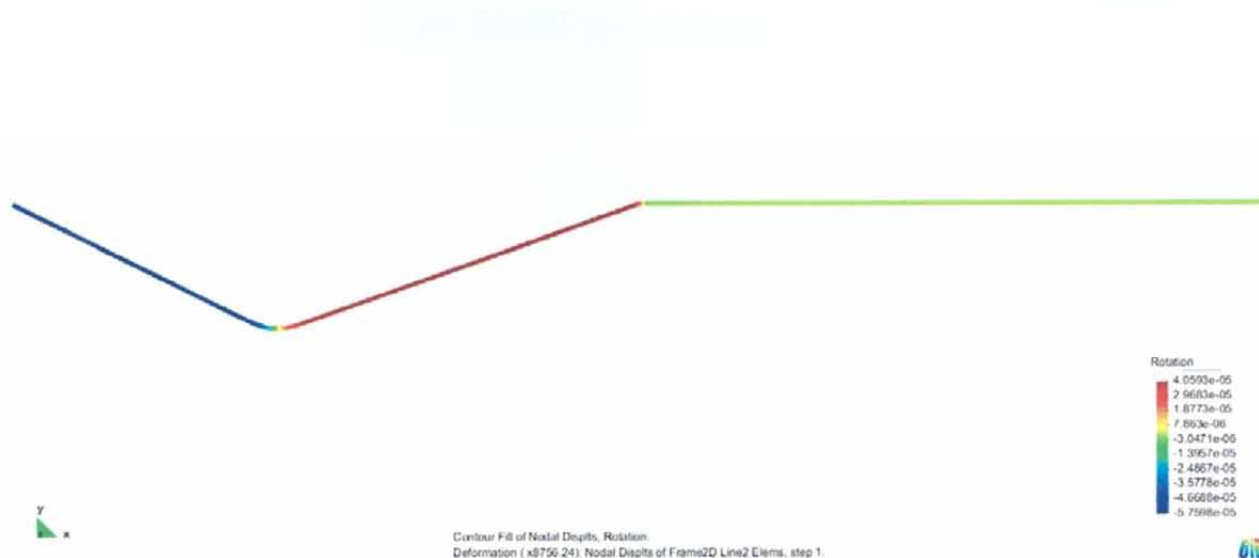
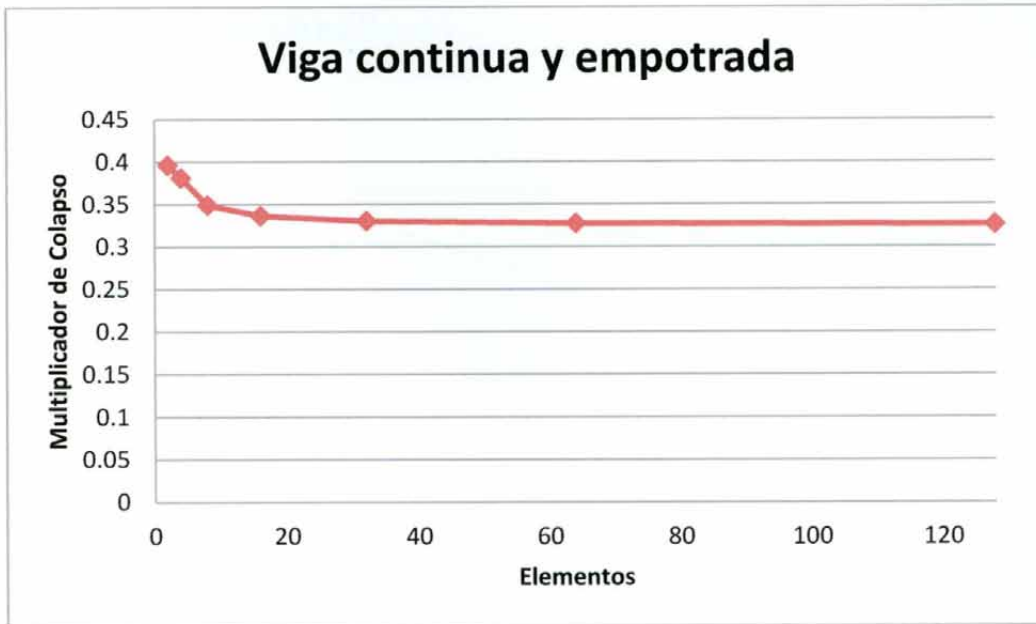


Figura 37. Mecanismo de colapso de viga continua y empotrada.¹³⁴

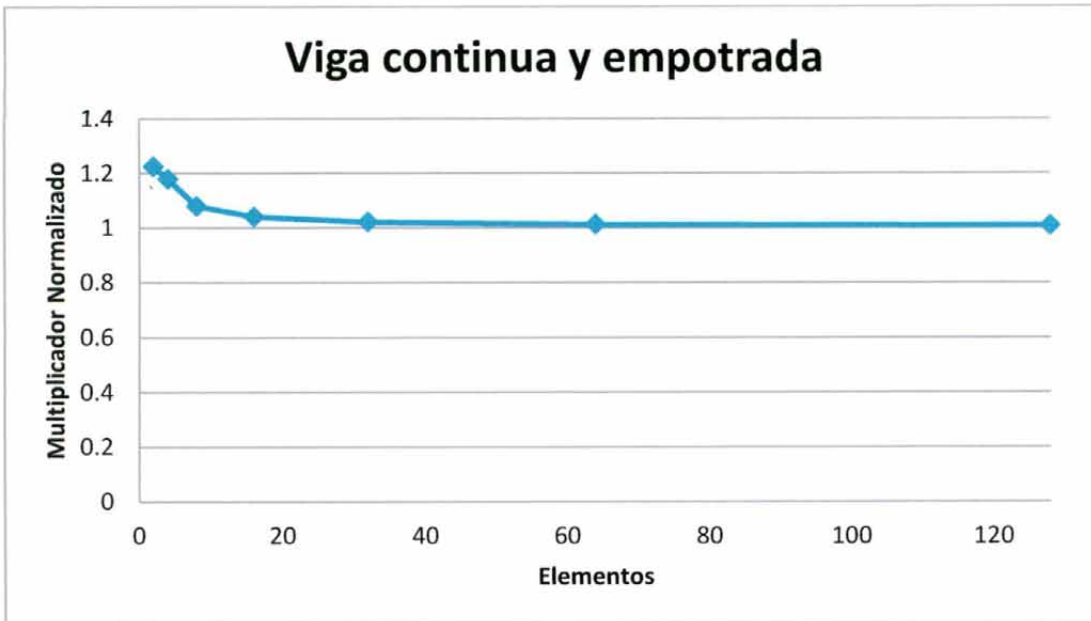
Caso # 7	Viga continua y empotrada				
	Multiplicador de colapso μ_k por solución numérica		Multiplicador μ_k normalizado por solución analítica μ		Solución Analítica μ , kip/in
	μ_k (QNR), kip/in	μ_k (SEC), kip/in	μ_k (QNR)	μ_k (SEC)	
Número de Elementos					
2	0.396096178	0.396096179	1.225039727	1.225039728	0.3233
4	0.380989727	0.380989968	1.178318742	1.17831949	
8	0.349013242	0.349013502	1.079422399	1.079423201	
16	0.336476089	0.336476194	1.040647699	1.040648023	
32	0.330290267	0.330290265	1.021516288	1.021516285	
64	0.327331337	0.327331455	1.01236496	1.012365326	
128	0.325923129	0.325923416	1.008009676	1.008010564	

Tabla 9. Viga continua y empotrada.

¹³⁴ Imagen generada con Post-Procesador GiD®



Gráfica 13. Multiplicador de colapso de viga continua y empotrada.



Gráfica 14. Multiplicador normalizado de viga continua y empotrada.

8. Portal rectangular (L=120 in)¹³⁵

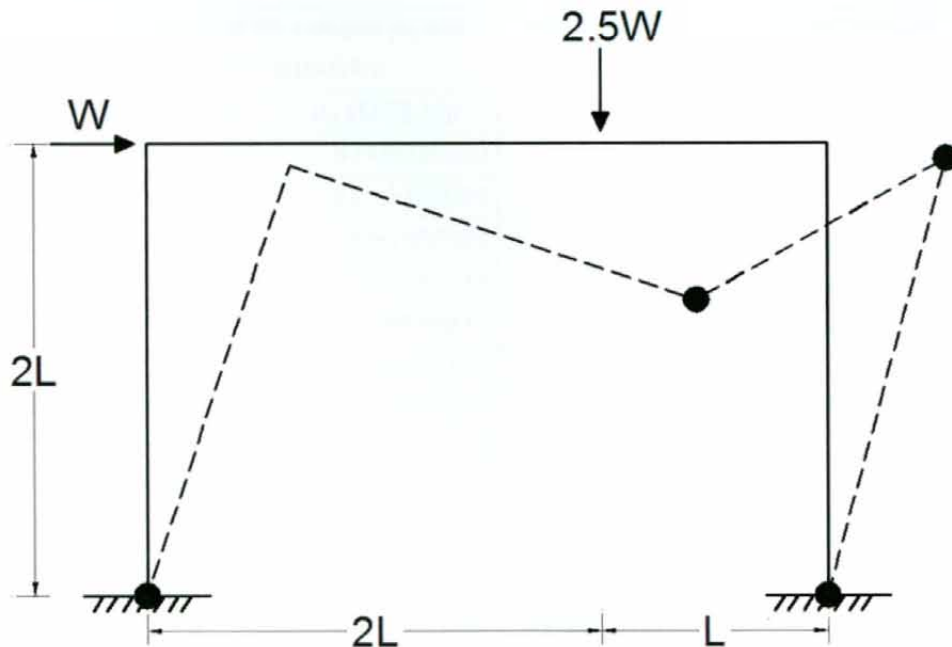


Figura 38. Portal rectangular, con mecanismo de colapso sobreimpuesto.¹³⁶

Solución analítica:

$$WL = M_p \tag{8.10}$$

$$W = \frac{M_p}{L} = \frac{7200}{120} = 60 \text{ kip} \tag{8.11}$$

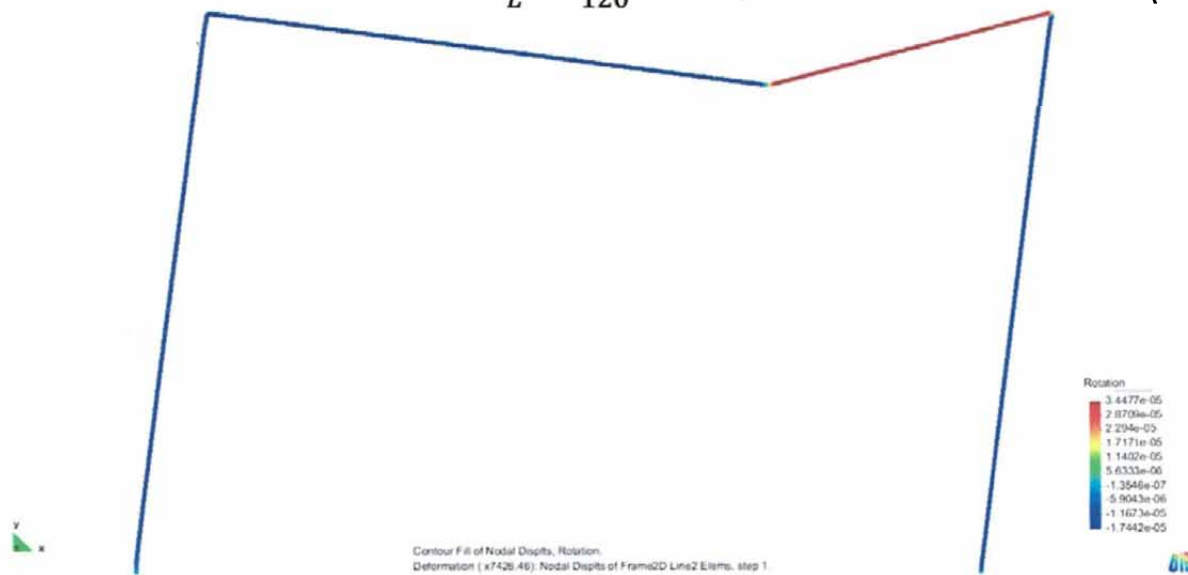


Figura 39. Mecanismo de colapso de portal rectangular.¹³⁷

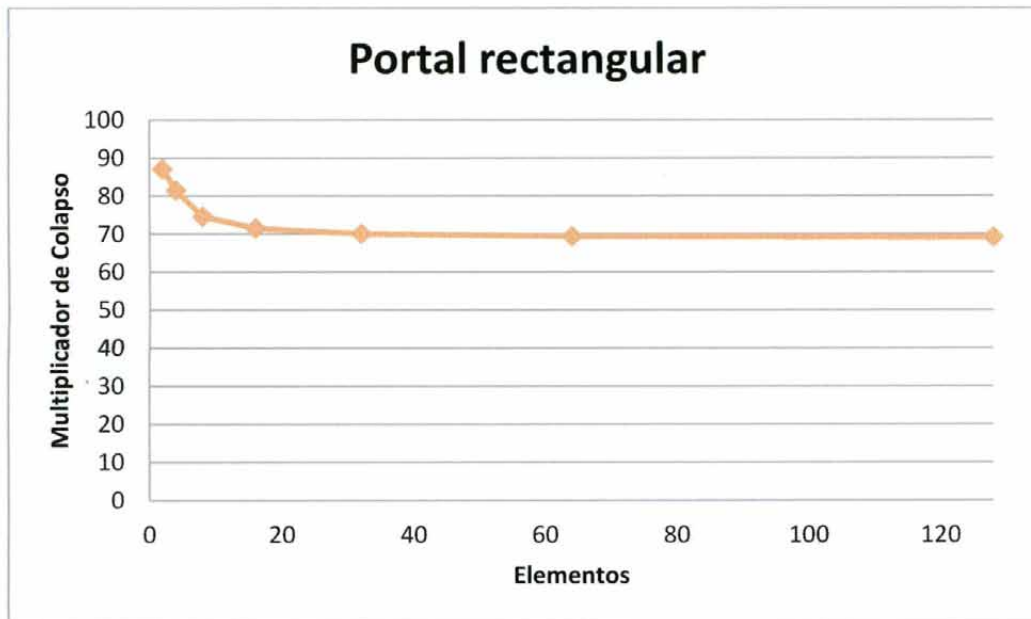
¹³⁵ Chakrabarty, J. Ibíd. .P. 252

¹³⁶ Imagen Propia

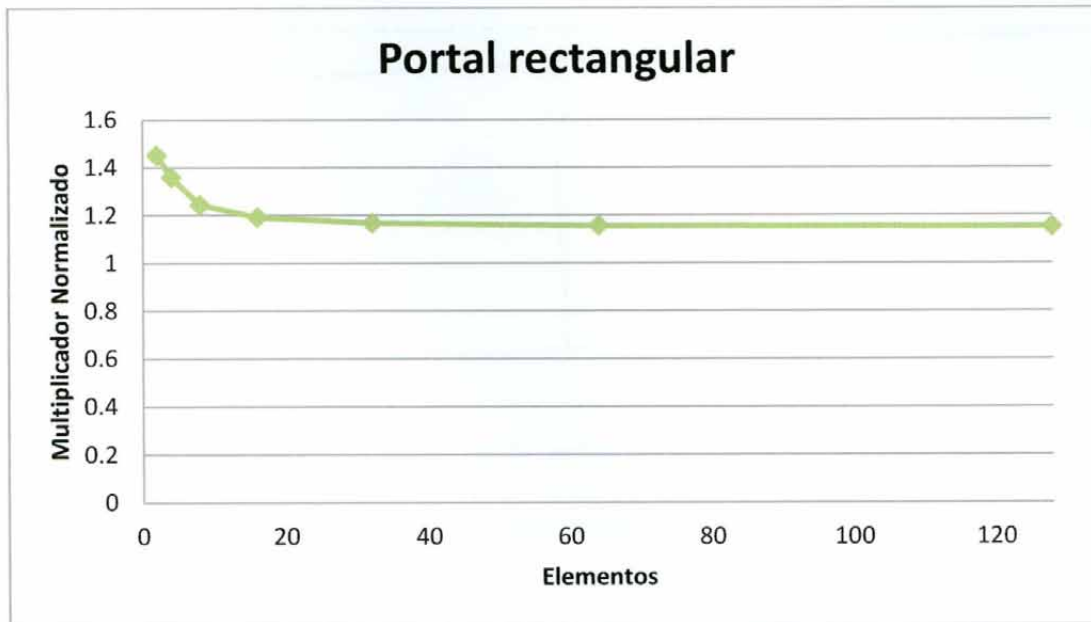
¹³⁷ Imagen generada con Post-Procesador GiD®

Caso # 8	Portal rectangular				
	Multiplicador de colapso μ_k por solución numérica		Multiplicador μ_k normalizado por solución analítica μ		Solución Analítica
	μ_k (QNR), kip	μ_k (SEC), kip	μ_k (QNR)	μ_k (SEC)	
Número de Elementos					μ , kip
2	87.08020382	87.08020382	1.45133673	1.45133673	60
4	81.51385047	81.51385094	1.358564175	1.358564182	
8	74.61693834	74.61693904	1.243615639	1.243615651	
16	71.53737847	71.53737745	1.192289641	1.192289624	
32	70.09932987	70.09934675	1.168322165	1.168322446	
64	69.41432189	69.41466174	1.156905365	1.156911029	
128	69.11769096	69.11807157	1.151961516	1.15196786	

Tabla 10. Portal rectangular.



Gráfica 15. Multiplicador de colapso de portal rectangular.



Gráfica 16. Multiplicador normalizado de portal rectangular.

9. Viga Vierendeel (L=240 in)¹³⁸

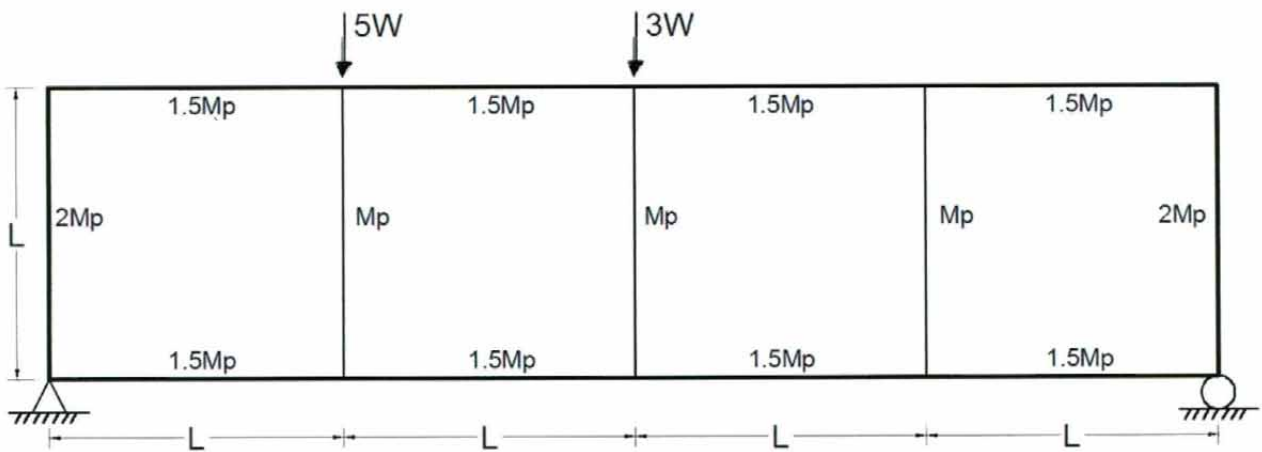


Figura 40. Viga Vierendeel.¹³⁹

¹³⁸ Massonnet et al. **Plastic Analysis and Design**. Bélgica. Blaisdell Publishing Company. 1964. P. 116

¹³⁹ Imagen propia.

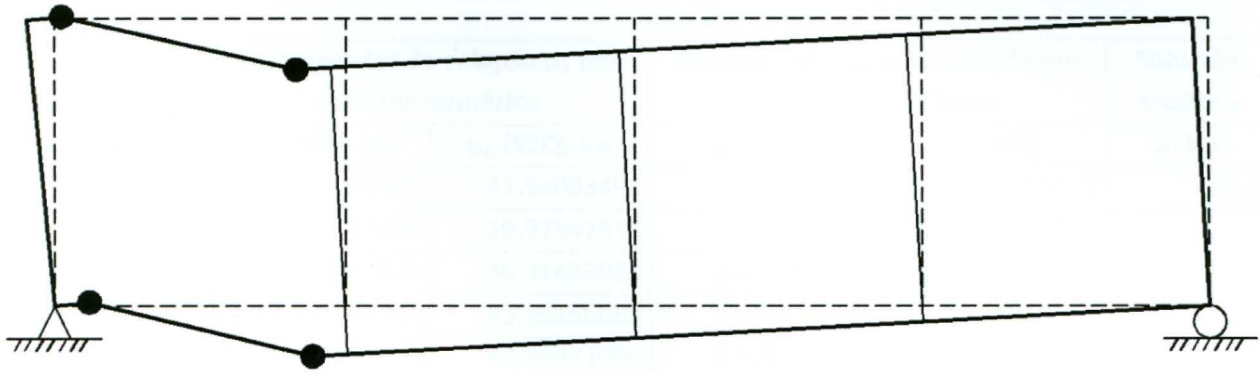


Figura 41. Mecanismo de colapso de viga Vierendeel, con geometría original sobreimpuesta.¹⁴⁰

Solución analítica:

$$W = 1.14 \frac{M_p}{L} = 1.14 \left(\frac{7200}{240} \right) = 34.2 \text{ kip} \tag{8.12}$$

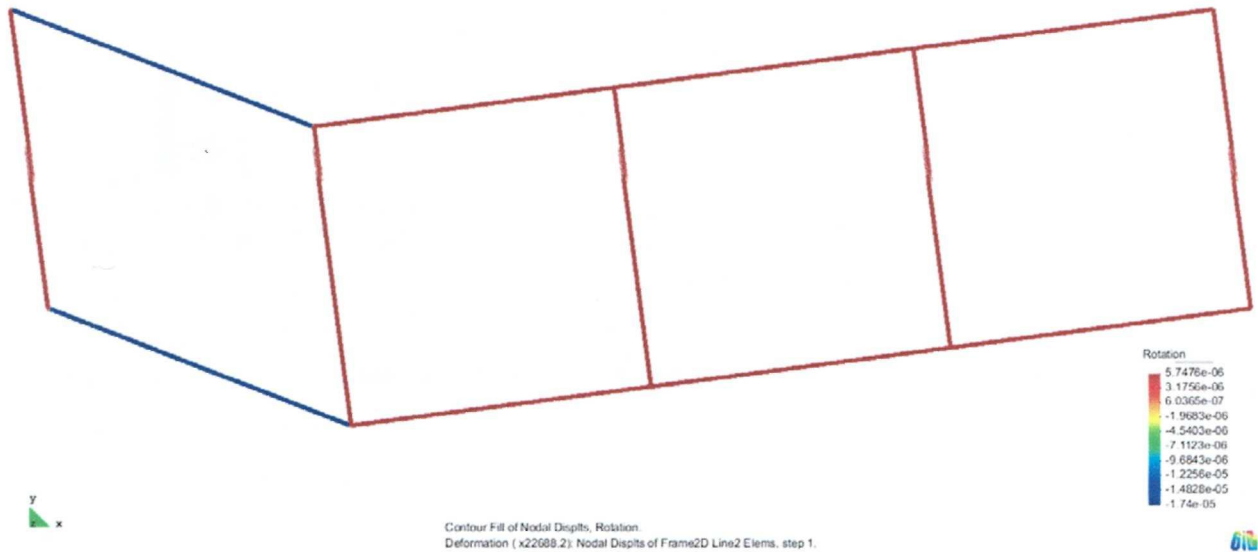


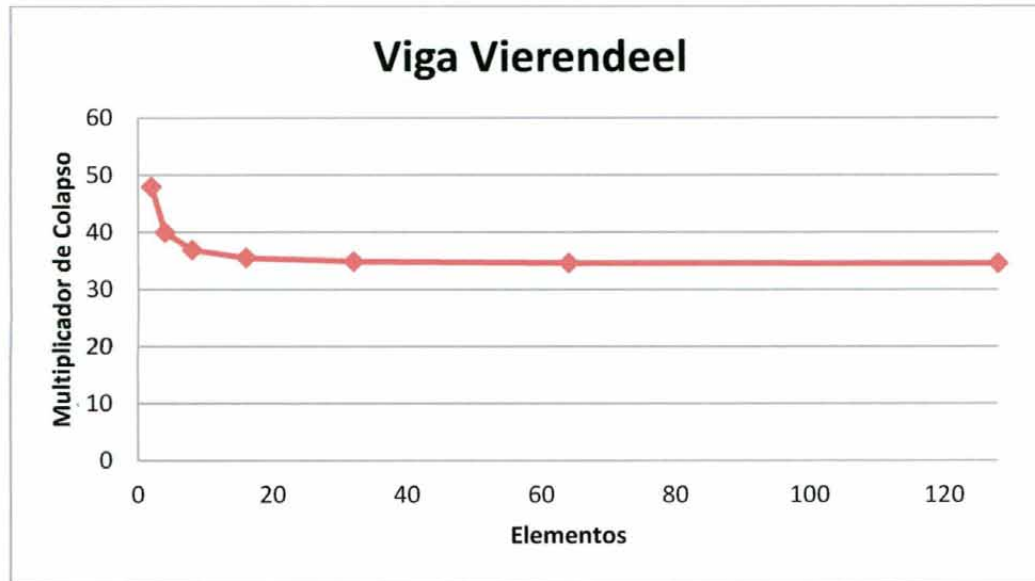
Figura 42. Mecanismo de colapso de portal rectangular.¹⁴¹

¹⁴⁰ Figura propia.

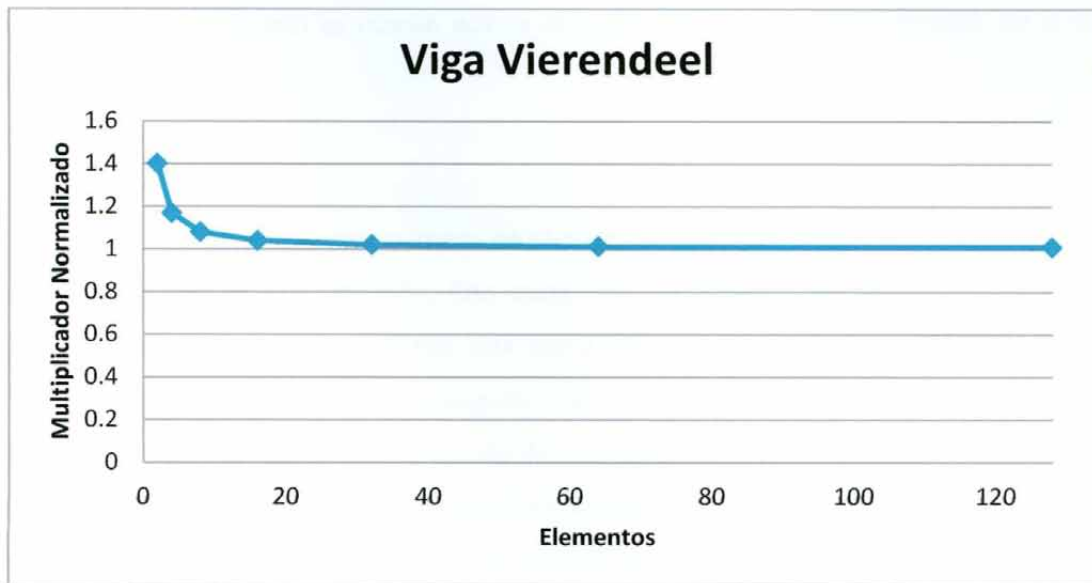
¹⁴¹ Imagen generada con Post-Procesador GiD®

Caso # 9	Viga Vierendeel				Solución Analítica
	Multiplicador de colapso μ_k por solución numérica		Multiplicador μ_k normalizado por solución analítica μ		
	μ_k (QNR), kip	μ_k (SEC), kip	μ_k (QNR)	μ_k (SEC)	
2	47.94093491	47.94093491	1.401781722	1.401781723	34.2
4	39.97947656	39.97947655	1.168990543	1.168990542	
8	36.91433075	36.91433083	1.079366396	1.079366399	
16	35.5515008	35.55150063	1.039517567	1.039517562	
32	34.90772272	34.90771006	1.020693647	1.020693277	
64	34.61332667	34.61334454	1.012085575	1.012086098	
128	34.52622393	34.52593275	1.009538712	1.009530197	

Tabla 11. Viga Vierendeel.



Gráfica 17. Multiplicador de colapso de viga Vierendeel.



Gráfica 18. Multiplicador normalizado de viga Vierendeel.

8.4 Interpretación de resultados.

Se observa que en general la solución numérica μ_k para el multiplicador tiende a coincidir con la solución analítica μ . En los nueve casos analizados, el mecanismo de colapso generado por el programa coincide con el mecanismo de colapso esperado (de la bibliografía consultada). Los resultados presentan una buena precisión, de acuerdo a las soluciones analíticas obtenidas de la literatura sobre el tema.

En cuanto a la convergencia, se observó que cuanto más refinada (con mayor número de elementos) sea la malla, mejor es la precisión del resultado numérico para el multiplicador de colapso. Debe notarse que, con excepción del primer caso (la viga doblemente empotrada), conforme se incrementa el número de elementos, aumenta la convergencia entre el resultado calculado numéricamente y la solución analítica. El único caso donde esto no ocurrió fue en el caso anteriormente mencionado, donde la solución con 2 elementos y 4 elementos, arrojaron una convergencia de 1.79 y 1.94, respectivamente. Para el resto de incrementos de dicho problema, el comportamiento fue el mismo que el resto de los demás casos analizados. Está anomalía pudo deberse a que 2 elementos para ese caso, no fue suficiente para lograr una solución adecuada; en general se observa que para mallas

gruesas (con pocos elementos) es común que la solución numérica tienda a diverger de la solución analítica.

Los resultados para el mayor número de elementos (128) por componente estructural (viga o columna) tuvieron una buena precisión. Con excepción del octavo caso (el portal rectangular) la convergencia fue de 1.01 o menor, donde una convergencia 1.00 implica una coincidencia total de valores. El caso particular del portal rectangular fue notorio ya que fue el único ejemplo analizado donde la convergencia fue mayor a 1.01, siendo de 1.15 para 128 elementos. El valor de 1.15 indicaría un 15 % de error con respecto a la solución analítica, lo cual es sí es un error relativamente grande para una solución numérica. En este caso, como en el resto de los casos analizados, el mecanismo de colapso calculado numéricamente coincide con el mecanismo de la solución numérica. De ahí se puede deducir que el mecanismo de colapso calculado es un mecanismo diferente (pero muy cercano) al que se obtiene de la solución analítica. Para determinar con mayor certeza cuál es el "mecanismo real" de colapso, habría que buscar una tercera vía, como una solución numérica por medio de la cota inferior, o método estático, el cual es diferente del enfoque de la cota superior o método cinemático (que fue el método empleado en la presente tesis).

Otra observación que surge del análisis de los resultados, es que los métodos de la secante y de Quasi-Newton Raphson logran una convergencia similar. No se observa una diferencia significativa entre estos métodos, y por lo tanto se puede decir que ambos son válidos para el cálculo de la carga de colapso.

Una última observación es que el programa computacional de análisis de estado límite desarrollado para este trabajo de investigación, fue capaz de analizar correctamente el noveno caso, el de la viga tipo Vierendeel. Históricamente, el análisis de este tipo de estructura ha sido complejo y fuertemente discutido entre los expertos en ingeniería estructural¹⁴². La viga Vierendeel no sólo posee un alto nivel de indeterminación estática, sino que es un problema muy complejo, cuyo análisis (tanto en el rango elástico como en el dominio plástico) no es fácil de obtener. Que el programa aquí

¹⁴² Kurrer, K. E. Op cit. P. 590

desarrollado haya sido capaz de lograr una convergencia de 1.0095 para 128 elementos, demuestra que la implementación lograda para la solución por la cota superior, puede aplicarse otros a problemas estructurales altamente hiperestáticos y complejos. Una última nota histórica sobre la viga Vierendeel, es que cuando hizo su aparición a finales del siglo XIX, el material inicialmente empleado fue el acero estructural (el material analizado en la actual tesis), y conforme se logró el progreso en el análisis de dicho problema estructural, el concreto reforzado pasó a ser el material preferente para vigas del tipo Vierendeel¹⁴³.

8.5 Comparación de la convergencia con 2 y 3 puntos de integración Gaussiana.

En los nueve casos analizados en la sección 8.3 se empleó la integración con 3 puntos de integración Gaussiana. Para la presente sección se hará una comparación de los resultados que se obtienen con 2 puntos y 3 puntos de integración. El método numérico a emplear será el método de la secante, recordando que los resultados de dicho método son muy parecidos a los del método de Quasi-Newton Raphson. El caso a emplear para la comparación es el de la viga simplemente apoyada (Caso 2).

Para calcular el error se emplea la ecuación

$$\%Error = \left(\frac{\mu_k}{\mu} - 1 \right) \times 100\% \quad (8.13)$$

La expresión para la integración con 2 puntos es:

$$\mathbf{k}^e(\mathbf{v}^e) = \frac{l^e}{2} \left[\frac{M_p^e \mathbf{B}(x_1) \mathbf{B}^T(x_1)}{\sqrt{\varepsilon^2 + (\mathbf{B}^T(x_1) \mathbf{v}^e)^2}} + \frac{M_p^e \mathbf{B}(x_2) \mathbf{B}^T(x_2)}{\sqrt{\varepsilon^2 + (\mathbf{B}^T(x_2) \mathbf{v}^e)^2}} \right] \quad (6.66)$$

dónde:

$$x_1 = -\frac{l^e}{2\sqrt{3}} + \frac{l^e}{2} \quad (6.67)$$

¹⁴³ Kurrer, K. E. *Ibíd.* Pp. 528-531

$$x_2 = \frac{l^e}{2\sqrt{3}} + \frac{l^e}{2} \quad (6.68)$$

La expresión para la integración con 3 puntos es:

$$\mathbf{k}^e(\mathbf{v}^e) = \frac{l^e}{2} \left[\frac{5M_p^e \mathbf{B}(x_1) \mathbf{B}^T(x_1)}{9\sqrt{\varepsilon^2 + (\mathbf{B}^T(x_1) \mathbf{v}^e)^2}} + \frac{8M_p^e \mathbf{B}(x_2) \mathbf{B}^T(x_2)}{9\sqrt{\varepsilon^2 + (\mathbf{B}^T(x_2) \mathbf{v}^e)^2}} + \frac{5M_p^e \mathbf{B}(x_3) \mathbf{B}^T(x_3)}{9\sqrt{\varepsilon^2 + (\mathbf{B}^T(x_3) \mathbf{v}^e)^2}} \right] \quad (6.69)$$

dónde:

$$x_1 = -\frac{l^e \sqrt{3}}{2\sqrt{5}} + \frac{l^e}{2} \quad (6.70)$$

$$x_2 = \frac{l^e}{2} \quad (6.71)$$

$$x_3 = \frac{l^e \sqrt{3}}{2\sqrt{5}} + \frac{l^e}{2} \quad (6.72)$$

Los resultados de los dos esquemas de integración empleados son los mostrados en la siguiente tabla.

Caso # 1. Viga simplemente apoyada					
Número de elementos	Multiplicador μ_k , kips		% de Error de μ_k respecto a Solución Analítica μ		
	2 Puntos de Integración	3 Puntos de Integración	2 Puntos de Integración	3 Puntos de Integración	Solución Analítica, kips
2	126.7949192	139.8277269	26.79	39.83	100
4	111.814603	116.6068066	11.81	16.61	
8	105.5778038	107.6667983	5.58	7.67	
16	102.7133035	103.6918728	2.71	3.69	
32	101.3521056	101.8141502	1.35	1.81	
64	100.7986166	100.9549809	0.80	0.95	
128	100.6721161	100.6978185	0.67	0.70	

Tabla 12. Comparación de esquemas de integración Gaussiana (2 y 3 puntos).

Se observa que los errores tienden a ser menores en la integración con 2 puntos. La diferencia entre el porcentaje de error al emplear 2 puntos y el usar 3 puntos, tiende a hacerse menor conforme se refina la malla. Con ello se puede deducir que la convergencia es relativamente mejor en la integración con 2 puntos que con 3 puntos. La mejoría no afecta demasiado los resultados, por lo que ambos

esquemas de integración numérica son aceptables, reconociendo que la precisión en el uso de dos puntos de integración es un poco mejor en mallas gruesas (con pocos elementos).

Con base en los resultados analizados y comentados en este capítulo es posible hacer una serie de conclusiones, con las cuales se cierra el presente trabajo de investigación. Los hallazgos, aportaciones y comentarios finales se abordan en el siguiente y último capítulo.

Capítulo 9.

Conclusiones.

Al inicio del presente trabajo de investigación se planteó el objetivo principal de elaborar un programa computacional capaz de calcular la carga de colapso; además se estableció el objetivo secundario de mostrar gráficamente el mecanismo de colapso asociado a la carga de colapso. Ambos objetivos se han alcanzado con una buena precisión.

La precisión se observó en la convergencia entre la solución numérica generada por el programa y la solución analítica (obtenida de la bibliografía consultada). Se analizaron nueve casos de estructuras en dos dimensiones, tanto vigas como marcos, y para ocho casos la convergencia fue de 1.01 o menor, donde el valor de 1.00 implica una concordancia total entre el valor calculado y el valor esperado. Solamente para un caso (un portal rectangular) se observó un porcentaje de error del 15 % (o convergencia de 1.15), lo cual es indicativo de que el mecanismo de colapso calculado numéricamente es muy similar (sin ser idéntico) al mecanismo esperado. La tendencia convergente de los valores de la solución numérica y los valores de la solución analítica, indican que el programa es capaz de calcular la carga de colapso.

El programa generado en el presente trabajo tiene la capacidad de calcular correctamente el mecanismo de colapso. Para obtener numéricamente el mecanismo de colapso, el programa calcula el menor multiplicador de colapso cinemáticamente admisible (de entre todos los mecanismo posibles). El programa calculó los mecanismos de problemas relativamente sencillos (como la viga doblemente empotrada y la viga simplemente apoyada), así como problemas con mayor indeterminación estática (como el portal a dos aguas y el portal vertical de dos niveles). Debe hacerse mención especial de que el programa generó el mecanismo de colapso correcto para una viga tipo Vierendeel, que no sólo es un problema hiperestático, sino que también es un problema estructuralmente complejo.

Otro aspecto que se esperaba lograr era que el programa de análisis de estado límite fuera computacionalmente económico, frente a las soluciones más costosas del análisis incremental. El análisis incremental (que es la tendencia actual en el software de ingeniería estructural) se basa en un proceso iterativo de incrementos sucesivos de la magnitud de una carga (o relación de cargas), aplicada a una estructura que se desea analizar. El programa aquí generado, que también es de naturaleza iterativa, logra generar una solución sin modificar de manera alguna la magnitud de las cargas aplicadas a la estructura. De hecho, la solución se obtiene de aplicar cargas que son unitarias con respecto a una carga desconocida que provoque el colapso estructural. El enfoque del presente trabajo fue el del análisis de estado límite, el cual evita el mayor número de cálculos iterativos del análisis incremental para llegar a un mismo resultado.

La solución analítica al problema del cálculo de la carga de colapso, empleado ya sea el enfoque estático derivado del teorema de la cota inferior o bien, por el método cinemático que surge del teorema de la cota superior, requiere intuición, inspección y comparación de posibles respuestas por parte del calculista estructural. Conforme aumenta el grado de indeterminación estática del problema a resolver, el número de posibles respuestas a inspeccionar y analizar también aumenta. Ya que el programa generado se basa en la resolución de un problema de minimización, se evita la necesidad de evaluar todas las respuestas posibles, convergiendo directamente en la solución correcta. El programa tiene el potencial de calcular la carga y el mecanismo de colapso para problemas estructurales donde la solución analítica puede ser prácticamente imposible de obtener (sin la ayuda de una computadora).

Otro aspecto computacional que el presente trabajo de investigación buscaba explorar era la eficiencia de dos métodos numéricos para llegar a la solución del cálculo la carga de colapso. Los métodos empleados fueron el método de secante y el método de Quasi-Newton Raphson, los cuales corresponden al grupo de métodos numéricos clasificados como abiertos. Una desventaja de los métodos abiertos es que pueden tener problemas para converger en la solución. Este problema se puede evitar con una buena aproximación inicial. Para el presente trabajo se emplearon como aproximación inicial, los resultados del análisis elástico para calcular un vector inicial de desplazamientos. Esto generó buenos resultados en ambos métodos, a tal grado que llegaron al mismo resultado final sin demostrar una mayor ventaja o superioridad de alguno de los dos métodos

empleados. De esto se deduce que ambos métodos numéricos son igualmente válidos para el cálculo de la carga de colapso.

Así como se compararon los dos métodos numéricos en la obtención de la solución, se comparó la precisión entre dos esquemas de integración Gaussiana, siendo estos la integración por dos y tres puntos. Se observó que para mallas gruesas (con pocos elementos) la integración por dos puntos presentaba una mejor convergencia que al emplear tres puntos de integración. Sin embargo, conforme se refinaba la malla (aumentando el número de elementos) la diferencia del porcentaje de error entre los dos esquemas de integración tendía a disminuir. De ahí que para un alto número de elementos, la integración Gaussiana genera buenos resultados, ya sea por dos tres puntos de muestreo.

El programa aquí generado presenta varias oportunidades para futuros trabajos de investigación. En el actual trabajo se simplificó la contribución axial en los problemas de marcos, por lo que una opción de mejora sería el incluir la interacción carga axial – momento flector. Otro aspecto a incluir serían los efectos de segundo orden, tales como los esfuerzos secundarios y el efecto de la geometría deformada. El actual programa se formuló de acuerdo al teorema de la cota superior, dejando como viable el incorporar un módulo de solución enfocado al teorema de la cota inferior (o método estático). Si se llegase a incluir ambos teoremas entonces es posible agregar un control de error a través de la evaluación de la brecha (*gap*) entre resultados obtenidos por los dos teoremas; dicha evaluación de la brecha podría conducir a un refinamiento adaptativo, o más inteligente. Finalmente, un trabajo más exhaustivo y profundo sobre el programa (correspondiente más a una tesis de doctorado que de maestría) puede llevar a comportamientos más complejos como el análisis tipo *shakedown* en dos dimensiones, o incluso llevar el análisis de estado límite a la tercera dimensión.

La aportación individual del actual trabajo de investigación fue la implementación computacional de una solución estrictamente cinemática para el cálculo de la carga de colapso y su mecanismo asociado. Si bien, los teoremas existen desde hace aproximadamente 50 años, el enfoque del análisis de estado límite en aplicaciones de software es una implementación relativamente reciente. Y es en ese esfuerzo reciente, donde está el valor de la implementación aquí lograda. El objetivo final de

ese esfuerzo es lograr soluciones más eficientes y con una mayor capacidad para analizar problemas estructurales complejos.

En conclusión, el presente trabajo ha cumplido con su cometido y presenta varias oportunidades para continuar con el desarrollo de metodologías para el cálculo de resistencia última de las estructuras por medio del análisis de estado limite. Sin embargo, el refinamiento de procesos computacionales de cálculo no es sustituto para el conocimiento bien fundamentado de la mecánica estructural. El buen uso de las aplicaciones de la mecánica computacional (como el programa aquí generado) es brindar una herramienta de apoyo para la toma de decisiones del ingeniero estructural, quien carga con la responsabilidad de garantizar la seguridad de las estructuras. Como se mencionó en la introducción de la presente tesis, una manera de garantizar la seguridad estructural es predecir cuál es la carga que provoca el colapso de la estructura sujeta a cargas (sean muertas, vivas o accidentales), y es para esa necesidad que fue formulado el presente programa computacional de análisis de estado limite.

Bibliografía.

- Cordero Cuevas, Raymundo Antonio. *Limit State Analysis: Adaptive Finite Element Upper and Lower Bound Approach to the Evaluation of the Limit Load of Von Misses Rigid-Plastic Material Body in Plane Stress*. Reino Unido. University of Wales Swansea. School of Engineering. 2005.
- Pons Fedelich, Rafel. *The evaluation of upper and lower bounds of the plastic limit state of frame structures using the upper bound theorem*. España. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona. Universidad Politécnica de Cataluña. 2003.
- Kurrer, Karl-Eugene. *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*. Berlín, Alemania. Ernst & Sohn. 2008.
- Blockley, David. *Bridges: the science and art of the world's most inspiring structures*. Reino Unido. Oxford University Press. 2010.
- Bažant, Zdeněk, P., Jirásek, Milan. *Inelastic Analysis of Structures*. Suiza. Wiley. 2001.
- Chakrabarty, J. *Theory of Plasticity*. Estados Unidos. McGraw Hill. 1988.
- Chen, W. F., Sohal, I. S. *Plastic Design and Second-Order Analysis of Steel Frames*. Primera edición. Estados Unidos. Springer Verlag. 1995.
- Gallegos Cázares, Sergio. *Análisis de Sólidos y Estructural mediante el Método de Elementos Finitos*. México. Limusa. 2008.
- Maçonnet, C. E., Save, M. A. *Plastic Analysis and Design: Volume One, Beams and Frames*. Primera edición en inglés. Bélgica. Blaisdell Publishing Company. 1966.
- American Institute of Steel Construction (AISC). *Steel Construction Manual*. Edición 13. Estados Unidos. AISC Inc. 2005
- Bittnar, Zdeněk, Šejnoha, Jiří. *Numerical Methods in Structural Mechanics*. Primera edición. Estados Unidos / Reino Unido. Publicado por ASCE Press y co-publicado por Thomas Telford Publications. 1996.
- Chapra, Steven. C., Canale, Raymond. P. *Numerical Methods for Engineers*. Cuarta edición. Estados Unidos. McGraw Hill. 2003
- Antia, H. M. *Numerical Methods for Scientists and Engineers*. Segunda edición. Basel, Suiza Birkhäuser. 2002.
- Salmon, Charles G., Johnson, John E., Malhas, Faris A., *Steel Structures: Design and Behavior, Emphasizing Load and Resistance Factor Design*. Quinta edición. Estados Unidos. Pearson Prentice Hall. 2009.

- Prof. Javier Bonnet. Swansea University: School of Engineering. Disponible en:
<http://www.swan.ac.uk/staff/academic/engineering/bonetjavier/>
- "GID. The personal pre and post processor", GID © 2006 CIMNE, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, 2006, Barcelona, España. Disponible en:
<http://www.gidhome.com/>

Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey



30002007498777

<http://biblioteca.mty.itesm.mx>