

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS
SUPERIORES DE MONTERREY

CAMPUS MONTERREY

DIVISIÓN DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA
PROGRAMA DE GRADUADOS EN INGENIERÍA



**TECNOLÓGICO
DE MONTERREY®**

ANÁLISIS DEL MODO DE VIBRAR DE LA CAJA
DE VELOCIDADES DE UNA TRANSMISIÓN AUTOMOTRIZ

TESIS

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS
CON ESPECIALIDAD EN
SISTEMAS DE MANUFACTURA

POR

ABELARDO ESTRADA GÓMEZ

MONTERREY, N. L. ENERO 2004

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS
SUPERIORES DE MONTERREY

CAMPUS MONTERREY

DIVISIÓN DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA

PROGRAMA DE GRADUADOS EN INGENIERÍA

Los miembros del comité de tesis recomendamos que el presente anteproyecto de tesis presentado por el Ing. Abelardo Estrada Gómez sea aceptado como requisito parcial para obtener el grado académico de Maestro en Ciencias con especialidad en:

SISTEMAS DE MANUFACTURA

Comité de tesis:

Dr. Noel León Rovira

Asesor

M.C. Jesús Mejía Mendoza

Sinodal

Dr. Raúl Rodríguez Miranda

Sinodal

APROBADO

Dr. Federico Viramontes Brown

Director del Programa de Graduados en Ingeniería y Arquitectura

ENERO DE 2004

Dedicatoria

A Dios por darme esa familia tan maravillosa que siempre me apoyó y estuvo presente en todo momento, en especial a ti Mami y Papi, por ustedes soy lo que soy y he logrado lo que tengo, a mi hermano Cesar y mis hermanas Araceli, Belinda y Janeth por creer en mí y en mis sueños, a mis sobrinos Bely, Juan Pablin, Rodolfito y mi chiquitina Camila, por ser mis niños a quien amo, y a ti, gracias por ser mi luz.

Agradecimientos

Le agradezco a mi asesor el Dr. Noel León, por haberme apoyado y darme la confianza para la realización de este proyecto tan importante de mi vida, sin sus sabios consejos no lo hubiese logrado.

A Jesús Mejía, por haber enriquecido esta investigación con sus comentarios y sugerencias, me fueron muy útiles.

Al Dr. Raúl Rodríguez por el tiempo dedicado a este proyecto y por haberme dado sus comentarios que me guiaron por buen camino.

A todos mis compañeros y amigos por su apoyo y confianza, a Lizbeth y Jorge por los momentos de alegría y apoyarme en los momentos difíciles, gracias por todo. A Nacho, Poncho, Carlos, Reyes, Erick, Paola y Gustavo por ser más que compañeros, buenos amigos.

Resumen

Se realiza una simulación y análisis del primer modo de vibrar en la caja de velocidades de una transmisión automotriz, basada en los paquetes de simulación PATRAN-NASTRAN, y determinación de los parámetros que tienen un efecto significativo en el primer modo de vibrar, mediante un diseño de experimentos.

Se realiza una analogía de la caja de velocidades con una viga hueca empotrada en un extremo, dicho modelo se resuelve en el software Tk Solver, el cual incluye los parámetros mencionados.

Se analiza la influencia de dos materiales diferentes, Aluminio, el cual indica que la influencia de estos dos materiales es la misma en el primer modo de vibrar, esto debido a la razón de cambio de la rigidez, la cual es semejante.

Partiendo de la analogía de la viga hueca empotrada y resultados de PATRAN-NASTRAN, se determina que la influencia de la longitud y del ancho de la caja son inversamente proporcionales al primer modo de vibrar, y que el alto y el espesor de la caja son directamente proporcionales al primer modo de vibrar.

Se analiza la influencia de algunos refuerzos, generalmente llamados costillas, los cuales constituyen a incrementar la frecuencia característica de los modos de vibrar, incluyendo al primer modo de vibrar que es el más importante en este caso. Los parámetros de estas costillas y su posición respecto a la estructura general de la caja dependen de los parámetros alto, ancho, largo y espesor de las cajas.

Índice general

Dedicatoria	i
Agradecimientos	ii
Resumen	iii
Índice general	iv
Índice de figuras	vi
Índice de tablas	viii
Índice de gráficas	ix
Capítulo 1 Introducción	1
1.1 Las transmisiones automotrices	2
1.1.1 Tipos de transmisiones automotrices	3
1.1.2 Importancia de las transmisiones automotrices	6
1.1.3 La caja de velocidades	6
1.1.4 Futuro de las transmisiones automotrices	6
1.2 PATRAN NASTRAN	8
1.3 Planteamiento del problema	9
1.4 Hipótesis	9
1.5 Objetivos y alcances	10
1.6 Metodología	10
Capítulo 2 Fundamentos Teóricos	12
2.1 Introducción	12
2.2 Obtención de una ecuación diferencial para el análisis del modelo matemático	13
2.3 Frecuencia natural de vibración	15
2.4 Vibraciones de vigas uniformes	18
2.5 Modos normales de vibración	25
2.6 Modos normales de vigas uniformes	27

Índice general (Continuación)

Capitulo 3 Modelo Matemático	29
3.1 Obtención del modelo matemático	29
3.2 Vibración de bending	32
3.3 Vibración longitudinal	44
3.4 Vibración torsional	46
Capitulo 4 Modelo de la caja de velocidades en PATRAN NASTRAN	52
4.1 Modelación de la caja en paquete CAD	52
4.2 Método para exportar modelos CAD a PATRAN	53
4.3 Parámetros para resolver el modelo en PATRAN NASTRAN	55
4.4 Análisis del modelo en NASTRAN	60
4.5 Lectura de resultados en PATRAN	64
4.6 Análisis previos del modelo de la caja en PATRAN	
Capitulo 5 Diseño de experimentos	65
5.1 Identificar variables del diseño de experimentos	65
5.2 Determinación del tipo de diseño de experimentos	61
5.3 Diseño de experimentos en PATRAN NASTRAN vibración de bending	63
5.4 Diseño de experimentos en PATRAN NASTRAN vibración longitudinal	68
5.5 Diseño de experimentos en PATRAN NASTRAN vibración de bending considerando el tamaño de las costillas	76
5.6 Análisis del espesor de la caja	80
Conclusiones	85
Trabajos Futuros	87
Anexo 1	88
Anexo 2	91
Bibliografía	94

Índice de figuras

1.1	Diferentes disposiciones en la ubicación del motor y del sistema de transmisión	2
1.2	Distancia recorrida en las llantas	5
1.3	Metodología	11
2.1	Función periódica, mostrando el periodo T y la amplitud x_0	12
2.2	El sistema fundamental de un solo grado de libertad	14
2.3	Vibración libre sin amortiguamiento, partiendo de un desplazamiento inicial	16
2.4	Ilustrando las ecuaciones diferenciales de una viga a flexión	19
2.5	Un cuarto de onda cosenoidal como configuración de Rayleigh para el caso de un voladizo	23
2.6	Los dos primeros modos naturales del movimiento de un voladizo sometido a flexión	23
2.7	La elástica normal de una barra con sus extremos empotrados	24
2.8	Curva elástica normal de una barra con ambos extremos libres	25
2.9	Sistema de dos grados de libertad sin amortiguamiento	26
2.10	Modos normales del sistema mostrado en la figura 2.9	27
3.1	Viga hueca empotrada en un extremo y libre en el otro	31
3.2	Sección transversal de la viga	31
3.3	Primer modo de una viga a flexión y a cortante, empotrada en un extremo y libre en el otro	32
3.4	Ventana del modelo en Tk Solver	35
3.5	Ventana en Tk Solver para solución de modelo para aluminio	40
3.6	Deformación longitudinal de una viga	45
3.7	Deformación torsional de una viga	47
3.8	Modelo matemático en Tk Solver para vibración torsional	48
4.1	Modelo CAD de la caja de velocidades, donde se muestra largo, ancho, alto espesor, y alto de las bridas	52
4.2	Modelo CAD de la caja de velocidades donde se muestra la cantidad de costillas laterales y longitudinales a lo ancho y a lo alto	53

Índice de figuras (Continuación)

4.3	Ventana de importación	54
4.4	Barra de menús, para selección de método de conversión de superficies a sólidos	55
4.5	Modelo de caja en PATRAN	55
4.6	Condiciones para crear malla	56
4.7	Campos a llenar para introducir propiedades de materiales	57
4.8	Condiciones para asignar propiedades de materiales	58
4.9	Parámetros para condiciones de carga (empotramiento)	59
4.10	Casos de carga y condiciones	60
4.11	Condiciones para realizar análisis	61
4.12	Condiciones para realizar análisis	62
4.13	Acceso a archivo de resultados	63
4.14	Resultados del modo de vibrar de bending	63
5.1	Gráfica de pareto de efectos	68
5.2	Gráfica de probabilidad normal de efectos	68
5.3	Gráfica de interacción de los efectos para cada relación	69
5.4	Efectos principales para vibración de bending	70
5.5	Gráfica de resultados de optimización	71
5.6	Primer modo de vibrar de bending	72
5.7	Primer modo de vibrar longitudinal	74
5.8	Primer modo de vibrar torsional	76
5.9	Pareto de los efectos	78
5.10	Efectos principales para vibración de bending	78
5.11	Valores necesarios para maximizar frecuencia	79
5.12	Primer modo de vibrar con costillas de dimensiones mayores	80
5.13	Primer modo de vibrar para espesor de pared de 10 mm	81
5.14	Primer modo de vibrar para espesores de pared en paredes laterales de 5 mm y paredes superior e inferior de 10 mm	82
5.15	Primer modo de vibrar para espesor de pared en paredes superior e inferior de 5mm y paredes laterales de 10 mm	83

Índice de Tablas

5.1	Relaciones y factores para primer diseño de experimentos	65
5.2	Corridas para el diseño de experimentos	66
5.3	Resultados obtenidos para vibración de bending	67
5.4	Resultados para vibración de bending y longitudinal	73
5.5	Resultados para vibración de bending y torsional	75
5.6	Relaciones considerando dimensiones de las costillas	76
5.7	Corridas para diseño de experimentos	77
5.8	Resultados para segundo diseño de experimentos	77
5.9	Resultados para diferentes espesores de pared de la caja	81
5.10	Resultados para diferentes espesores de pared en pared en paredes superior e inferior	82
5.11	Resultados para diferentes espesores de pared en paredes laterales	83

Índice de Gráficas

3.1	Frecuencia de bending de acero y aluminio vs. Longitud	36
3.2	Frecuencia de bending de acero y aluminio vs. ancho	36
3.3	Frecuencia de bending de acero y aluminio vs. altura	37
3.4	Frecuencia de bending de acero y aluminio vs. espesor tb	38
3.5	Frecuencia de bending de acero y aluminio vs. Espesor th	38
3.6	Frecuencia de bending de acero y aluminio vs. espesor de pared th y tb	39
3.7	Frecuencia de bending vs. longitud	41
3.8	Relación b/L vs. frecuencia de bending	41
3.9	Relación h/L vs. frecuencia de bending	42
3.10	Relación tb/L vs. frecuencia de bending	43
3.11	Relación th/L vs. frecuencia de bending	43
3.12	Frecuencia de bending vs. Espesor de pared	44
3.13	Longitud Vs. frecuencia longitudinal	46
3.14	Longitud Vs. frecuencia torsional	49
3.15	Relación b/L vs. frecuencia torsional	49
3.16	Alto vs. Frecuencia torsional	50
3.17	Relación th/L vs. frecuencia torsional	51
3.18	Espesor de pared tb = th vs. frecuencia torsional	51

Capítulo 1. Introducción

El progreso del transporte ha estado siempre estrechamente vinculado con el avance de la civilización, desde siempre el hombre a tratado de recorrer distancias en el mínimo tiempo posible además de transportar cosas con el mínimo esfuerzo, uno de los medios de transporte mas utilizado ha sido el automóvil, el resultado de esa evolución se manifiesta en la manufactura de un medio de transporte masivo eficiente, confiable y costeable. El automóvil de hoy es una maquina complicada que comprende numerosos aparatos mecánicos, eléctricos y electrónicos, que utilizan muchos principios científicos.

El automóvil puede dividirse en dos distintas secciones conocidas como la carrocería y el chasis. La carrocería le da al vehículo una apariencia final y su propósito es dar comodidad y protección a sus pasajeros. La función del chasis es la de soportar los componentes principales del vehículo: motor, ruedas, ejes, transmisión, suspensión.

Una transmisión es un conjunto de mecanismos que transforman la potencia de un motor a diferentes velocidades. La transmisión automotriz, como cualquier otro mecanismo, tiene su modo natural de vibrar y éste depende de los materiales que la componen, el arreglo de sus componentes, además de su geometría. Cada uno de los modos de vibrar posee una manera particular de movimiento y al movimiento que solo varía una coordenada, se le denomina *modo principal de vibrar*. La frecuencia mas baja a la cual ocurre este fenómeno se le denomina primer modo, la siguiente frecuencia a la cual ocurre otro modo de vibrar se le denomina segundo modo y así sucesivamente. Por lo tanto es importante conocer la frecuencia a la cual ocurre el primer modo de vibrar en la transmisión, ya que de esta frecuencia depende la velocidad máxima a la cual el vehículo puede caminar.

1.1 Las transmisiones automotrices

Para que el automóvil se mueva, es necesario transmitir el movimiento y la fuerza producida por el motor a las ruedas del mismo. Esta transmisión se realiza por medio de una serie de mecanismos, cuya finalidad fundamental es adaptar la marcha del vehículo a las incidencias del camino a recorrer, teniendo en cuenta la carga.

Existen tres grupos en los cuales se puede clasificar a las transmisiones:

- Transmisión Manual
- Transmisión Automática
- Transmisión Automatizada

Esta clasificación es la más común y utilizada en los automóviles, aunque su función principal es la misma, la diferencia existente en ellas depende en gran medida de la caja de velocidades. Y como se menciona en el *Manual del automóvil 1999 Reparación y mantenimiento. Electricidad accesorios y transmisión*, existen diferentes arreglos de transmisión, según las disposiciones más habituales del motor y del eje de transmisión.

Entre ellas se distinguen y como lo muestra la Fig. 1.1:

- Motor longitudinal delantero y tracción trasera
- Motor longitudinal delantero y tracción delantera
- Motor transversal delantero y tracción delantera
- Motor trasero y tracción trasera
- Motor delantero y tracción a los dos ejes

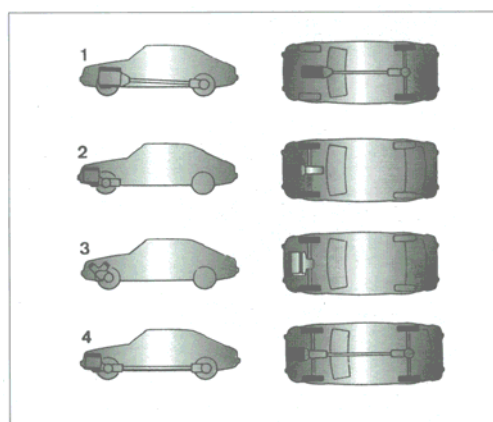


Fig. 1.1 Diferentes disposiciones en la ubicación del motor y el sistema de transmisión

1.1.1 Tipos de transmisiones automotrices

Las más comerciales y conocidas son la Transmisión Manual y la Transmisión Automática, las cuales han continuado su evolución derivando en combinaciones para todos los gustos. En la actualidad ya se conocen vehículos con transmisión automática que emulan el comportamiento de la transmisión manual e igualmente transmisiones manuales que emulan algunas características de las automáticas.

Transmisión Manual.

En este tipo de transmisión el par producido por el motor es transmitido hacia el embrague, quien es el encargado de transmitir o interrumpir el movimiento del motor a través del cigüeñal, el accionamiento se realiza mediante un pedal por el conductor desde el interior del vehículo. Cuando el pedal está sin pisar, el movimiento de giro se transmite íntegramente y se dice que está embragado; cuando es accionado totalmente, el desacople es completo y se dice entonces que está desembragado.

Las características que ha de reunir el sistema de embrague son:

- Resistencia mecánica: para transmitir todo el par motor a las ruedas.
- Resistencia térmica: para poder absorber el calor generado por la fricción.
- Progresividad y elasticidad: para que su movimiento se transmita sin brusquedad ni tirones.
- Adherencia: para que no pueda patinar y pierda fuerza de transmisión.
- Rapidez de maniobra: que permita embragar y desembragar con facilidad.

Existen varios tipos de embragues, el más utilizado es el de fricción, aunque podemos encontrar automóviles que incorporen sistemas electromagnéticos o hidráulicos [1].

Una vez que se ha logrado transmitir el par del motor al embrague, el siguiente paso es transmitir el movimiento a la caja de velocidades, la cual es la encargada de modificar el número de revoluciones en las ruedas, e invertir el sentido de giro cuando lo requieran las necesidades de circulación.

Como el par motor y las revoluciones de este se transmiten a las ruedas originando en ellas una fuerza de impulsión, capaz de vencer la resistencia del vehículo al movimiento, la potencia transmitida en todo momento deberá ser igual al par resistente en las ruedas y la velocidad de estas.

Si no se dispusiera de la caja de velocidades, el número de revoluciones del motor se transmitirá íntegramente en las ruedas, con lo que el par desarrollado por el motor debería ser igual al par resistente en las ruedas. Por tanto habría que aumentar la potencia del motor, en cualquier circunstancia de marcha, como lo hiciera el par resistente, contando para ello con un motor de una potencia tal, que fuera capaz de absorber los diferentes regímenes de carga que se originarán.

Como no se dispone de motores que cubran la anterior circunstancia, se dispone de la caja de cambios de velocidades, con el fin de obtener el par motor necesario en las diferentes condiciones de marcha, aumentando el par de salida en detrimento del número de revoluciones en las ruedas.

Con las cajas de velocidades se logra mantener, dentro de unas condiciones favorables, la potencia desarrollada por el motor, actúan por lo tanto como un transformador de velocidades y convertidor mecánico de par.

Una vez que la potencia del motor es transformada, esta potencia es cedida al diferencial quien es el mecanismo encargado de transmitirla a las ruedas, el diferencial esta formado básicamente de dos sistemas: un grupo cónico es el encargado de reducir, transmitir y convertir el movimiento que recibe de la caja de cambios. El diferencial tiene como misión adoptar un giro independiente a las ruedas, según el recorrido que efectúe cada una de ellas.

La función del mecanismo diferencial es la de permitir el giro a diferentes velocidades de cada una de las ruedas motrices. Esto es necesario, tal como podemos ver en la Fig. 1.2,

por el hecho de recorrer mas distancia la rueda exterior (A) que la interior (B) en aquellos casos en que el automóvil no siga la trayectoria recta.

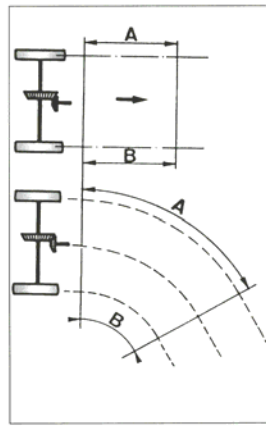


Fig. 1.2 Distancia recorrida en las llantas

Transmisión Automática

La transmisión automática se caracteriza porque las distintas relaciones de cambio son seleccionadas en función de la velocidad del vehículo y del régimen del motor, sin que el conductor intervenga en la elección de la relación requerida en cada momento, ni realice ninguna operación.

Los cambios automáticos descargan el conductor de atención cuando conduce el automóvil, por lo que hace al automóvil mas seguro y cómodo. Los cambios sin escalones utilizados en los automóviles, pueden ser principalmente de dos tipos:

- mecánicos
- hidráulicos.

En el primer caso, casi todos están constituidos por una correa envolvente de eslabones de acero articulado y en las transmisiones hidráulicas utilizadas son del tipo hidrodinámicas, es decir, que emplean aceite a elevadas velocidades pero con presiones relativamente bajas.

1.1.2 Importancia de las transmisiones automotrices

El tipo de mecanismos de la transmisión, arreglo entre ellos y materiales, determinan el modo de vibrar de la transmisión, desde un punto de vista tradicional, al motor siempre se le ha dado mayor importancia, quizá porque, desde tiempos muy antiguos, el motor ha sido siempre la causa de mayor preocupación de los conductores por su mayor facilidad para averiarse. Por el contrario, la transmisión se ha mostrado siempre robusta y fiable, y aunque también puede tener sus averías, la realidad es que, de siempre, ha dado menos quebraderos de cabeza que el motor. Sin embargo, ello no hemos de considerarlo como un demérito de la importancia que la transmisión evidentemente tiene y de su capacidad para ser algo más que una reunión de mecanismos que colaboran al motor [2]. La transmisión es importante porque es quien transmite la potencia del motor hacia las ruedas y al mismo tiempo que permite al vehículo variar su velocidad.

1.1.3 La caja de velocidades

El tipo de caja de velocidades depende del tipo de transmisión, es decir en términos generales la caja de velocidades de una transmisión manual es del tipo de engranes, y el de una transmisión automática es del tipo hidráulica. La caja de velocidades al igual que la transmisión, tiene sus modos de vibrar, los cuales tienen una importancia relativamente grande en la frecuencia del modo de vibrar de la transmisión, ya que éste mecanismo es de los principales en la transmisión.

1.1.4 Futuro de las transmisiones automotrices

La Transmisión Manual, es por muchos venerada debido a su sencillez, bajo mantenimiento y por que permite al conductor decidir en momento exacto en el que requiere un cambio de relación de engranaje, efecto muy importante para aquellos que adoran la conducción deportiva. Por el contrario, la Transmisión Automática presenta otras ventajas, como es olvidarse del molesto pedal de embrague. La evolución de la

Transmisión Automotriz ha permitido la incorporación de un sistema que aprovecha el ya existente sistema de control electrónico, permitiendo de forma opcional los cambios ascendentes o descendentes según la voluntad del conductor, tal como lo haría si el vehículo fuera estuviera equipado con Transmisión Manual, también a voluntad puede seleccionar la posición para el funcionamiento como una Transmisión Automática convencional [3].

Los vehículos de Transmisión Manual no han escapado a los avances de la tecnología, aunque en esencia la transmisión en si no ha tenido cambios significativos, el embrague es ahora controlado por computadora que determinara con exactitud la aplicación del mismo al momento de mover la palanca de cambios, justificando de esta forma la desaparición del pedal de embrague. Algunos modelos incluso han reemplazado la conexión mecánica del varillaje de la transmisión por un conjunto de motores eléctricos y sus respectivos cableados. En algunos casos también se han instalado palancas de mando cerca del volante para hacer los cambios de manera muy similar a los sistemas existentes en los vehículos de Formula 1.

¿Cual de estos sistemas se impondrá sobre el otro?, aun es pronto para decirlo, si bien estos inventos no son nuevos, tampoco han sido incorporados a los vehículos en el volumen que se esperaba, actualmente las Transmisiones Automáticas con emulación de Transmisión Manual solo se están utilizando en vehículos de alto costo, también debemos recordar que se están introduciendo vehículos con Trasmisiones Continuas Variables (CVT por sus siglas en inglés) que también significan una novedad y que puede definir la competitividad de los diferentes productos. Por ahora todo parece que debemos esperar algo mas para verlos como opcional en todos los segmentos de vehículos. Es muy posible que por razones de menor costo, los sistemas de Transmisión Manual con emulación de Transmisión Automática se presenten en vehículos económicos.

Para completar el panorama, las nuevas Transmisiones Continuas Variables, llamadas así por no tener definidas las relaciones de engranaje ahora pueden emular tanto a las

Transmisiones Automáticas como a las Trasmisiones Manuales, ¿cual será entonces la tendencia en el futuro?, aun es pronto para decirlo ya que la guerra entre fabricantes en masa de los diferentes productos ahora es que comienza, es decir, tendrán que hacer valer las ventajas y costos de cada una hasta que se establezca la balanza.

1.2 PATRAN NASTRAN

En ingeniería se tienen que resolver problemas y podemos utilizar varias técnicas y métodos para encontrar una solución, el método de elemento finito ha llegado a ser una herramienta muy poderosa para la solución de problemas en ingeniería, las aplicaciones van desde el análisis de deformaciones y esfuerzos en automóviles, aviones, edificios, análisis de vibraciones mecánicas hasta campos de flujo de calor y de fluidos. Con los avances de la tecnología de computadoras y de los sistemas CAD y CAE (por sus siglas en inglés Computer Aided Design y Computer Aided Engineer), pueden modelarse problemas complejos con relativa facilidad. En una computadora pueden probarse varias configuraciones alternas antes de construir un prototipo.

En este método de análisis, una región compleja que define un continuo se discretiza en formas geométricas simples llamadas elementos finitos. Las propiedades del material y las relaciones gobernantes, son consideradas sobre esos elementos y expresadas en términos de valores desconocidos en los bordes del elemento. Un proceso de ensamble, cuando se consideran debidamente las cargas y restricciones, da lugar a un conjunto de ecuaciones. La solución de esas ecuaciones nos da el comportamiento aproximado del continuo [4].

Este método presenta ventajas sobre el método tradicional de prueba y error, ya que es posible modelar situaciones muy complejas que experimentalmente sería muy costoso llevar a cabo [5].

Existe en la actualidad varias compañías que ofrecen software de elemento finito, IDEAS, ANSYS, ABAQUS, CADRE Pro, DESIGNSPACE, dentro de ellos existen

PATRAN y NASTRAN de la compañía MSC. PATRAN tiene una interacción gráfica amigable con el usuario, pero el método de resolución de ecuaciones no es muy eficiente, por otro lado NASTRAN, cuenta con métodos numéricos muy eficientes para resolver las ecuaciones matemáticas, pero no cuenta con una amigable interacción con el usuario, debido a esto MSC decidió unir las ventajas competitivas de cada uno y ahora tenemos una interacción gráfica entre el usuario y la computadora con una resolución de ecuaciones eficiente.

1.3 Planteamiento del problema

La caja de velocidades de la transmisión del automóvil está sometida a excitaciones originadas por los componentes con la que esta relacionada, las condiciones de operación, y las condiciones del camino, si alguna de estas fuentes de excitación presenta alguna frecuencia que coincida con una de las frecuencias naturales de la caja de velocidades, ésta estaría en resonancia, la cual no es conveniente debido a su característica particular de amplitudes de vibración grandes, por lo tanto es necesario conocer las diferentes frecuencias naturales o modos de vibración de la caja para evitar las condiciones de resonancia. En consecuencia la frecuencia a la cual ocurre el primer modo de vibrar en la caja de velocidades es importante, porque es la que limita la velocidad máxima del vehículo.

1.4 Hipótesis

Es posible establecer una metodología estructurada, mediante la cual sea posible identificar la influencia de los diferentes parámetros de una caja de velocidades de una transmisión en sus modos de vibrar, con vista a controlar el resultado de los diseños y así disminuir el tiempo de análisis y rediseño de las transmisiones automotrices para lograr los valores requeridos de dichos modos de vibrar

1.5 Objetivos y alcances

Simulación y análisis del primer modo de vibrar de la caja de velocidades de una transmisión, basado en los paquetes de software PATRAN-NASTRAN, y mediante un diseño de experimentos determinar los parámetros que tienen un efecto significativo en el modo de vibrar de ésta y con dichos parámetros establecer una optimización de la frecuencia del primer modo de vibrar.

1.6 Metodología

Ésta consta de 4 pasos principales,

- Identificación de Parámetros
- Modelo Matemático
- Análisis en PATRAN NASTRAN
- Diseño de experimentos

La secuencia de esta metodología se presenta en la Fig. 1.3. Se inicia con fundamentos teóricos de vibraciones, se identifican los parámetros importantes para la frecuencia del primer modo de vibrar y en base a esto se obtiene un modelo matemático, el cual se resuelve con el Software Tk Solver. Una vez que se tienen los parámetros se realiza un modelo de la caja en Proengineer, dicho modelo se importa a PATRAN y se obtiene los resultados de la frecuencia del primer modo de vibrar en NASTRAN, con estos resultados se realiza un Diseño de experimentos apoyándose del software MINITAB 14 y finalmente se optimizan éstos resultados.

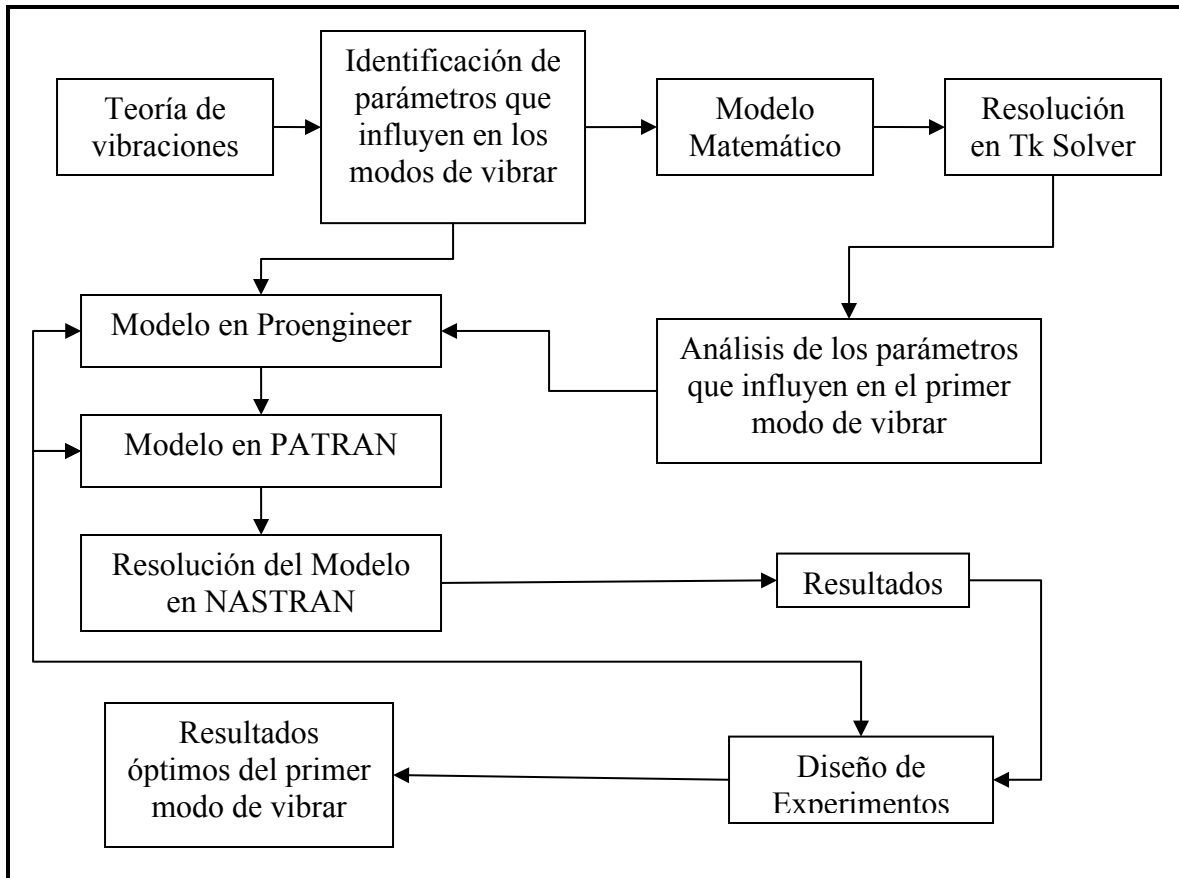


Fig. 1.3 Metodología

Capítulo 2 Fundamentos teóricos

2.1 Introducción

Una vibración se puede decir que es un movimiento periódico, es decir, que se repite con las mismas características después de un determinado tiempo, llamado *periodo de vibración*. Al más sencillo de estos movimientos se le conoce como movimiento armónico simple; en el cual la relación existente entre la amplitud y el tiempo, puede expresarse por:

$$x = x_0 \text{sen} \omega t \quad (2.1)$$

Si se grafica esta función, como lo muestra la gráfica 2.1, este movimiento representa las pequeñas oscilaciones de un péndulo simple. El valor máximo del desplazamiento es X_0 llamado amplitud de la vibración.

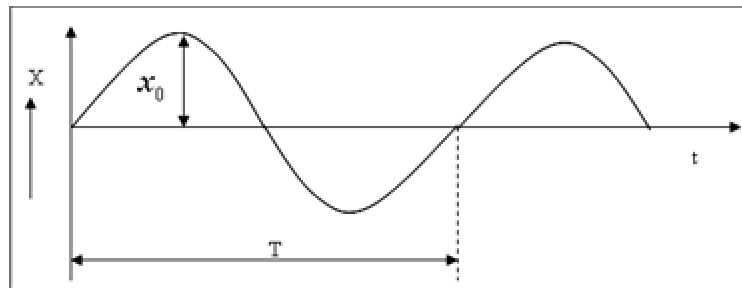


Fig. 2.1 Función periódica, mostrando el periodo T y la amplitud x_0 .

El término T , se le conoce como periodo y generalmente se mide en segundos, y al recíproco del periodo se le conoce como frecuencia, $f = 1/T$, que es la *frecuencia de vibración*. Medida en ciclos por segundo (Hz).

Al término ω , se le conoce frecuencia circular y se mide en radianes sobre segundo. La relación entre frecuencia de vibración f y el periodo T , se determina por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.2)$$

y como f es el recíproco de T

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (2.3)$$

En un movimiento armónico en el cual el desplazamiento esté dado por $x = x_0 \text{sen } \omega t$, la velocidad se obtiene derivando del desplazamiento con respecto al tiempo.

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = x_0 \omega \cos \omega t \quad (2.4)$$

de forma que la velocidad resulta también armónica con un valor máximo, partiendo de esto, la aceleración será:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -x_0 \omega^2 \text{sen } \omega t \quad (2.5)$$

y es también armónica con un valor máximo $\omega^2 x_0$.

2.2 Obtención de una ecuación diferencial para el análisis de modelo mecánico.

Considere una masa m , suspendida de un techo rígido por medio de un resorte, como se muestra en la Fig. 2.2. La rigidez del resorte está dada por su constante de resorte denotada por la letra k . Entre la masa y la pared existe un amortiguador. Se supone que éste no transmite fuerza alguna a la masa, siempre y cuando esté en reposo; pero, tan pronto como se mueva la masa, la “fuerza de amortiguamiento” del mecanismo es $c\dot{x}$ o $c \frac{dx}{dt}$, es decir, proporcional a la velocidad y en dirección opuesta. La magnitud c se conoce como la *constante de amortiguamiento*.

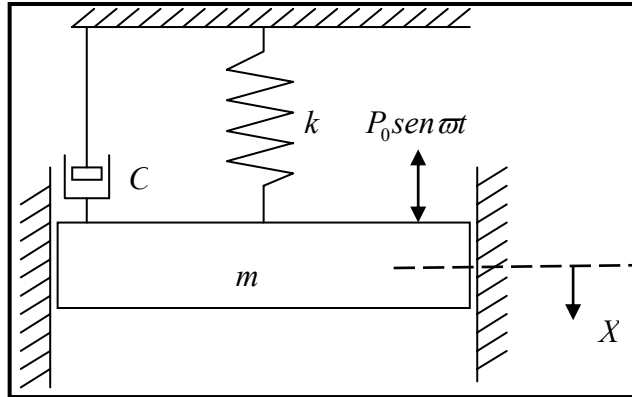


Fig. 2.2 El sistema fundamental de un solo grado de libertad.

Sea $P_0 \text{sen } \omega t$ una fuerza exterior alterna actuando sobre una masa, originada por algún mecanismo. Y se requiere calcular el movimiento de la masa m debido a esta fuerza exterior. Es decir si consideramos que x es la distancia entre cualquier posición instantánea de la masa durante su movimiento y su posición de equilibrio, tendremos que obtener x en función del tiempo. La ecuación del movimiento que se deriva para obtener este movimiento es la expresión matemática de la segunda ley de Newton.

$$\text{Fuerza} = \text{masa} \times \text{aceleración}$$

Se consideran positivas a las fuerzas que actúan sobre la masa hacia abajo y negativas cuando se ejercen hacia arriba. La fuerza del resorte es de magnitud kx , cuando no hay alargamiento la esta fuerza es cero y la fuerza del resorte para cualquier otro valor de x (en centímetros) será kx (en kilogramos), considerando que el resorte sigue la ley de proporcionalidad de Hooke entre la fuerza y deformación.

El signo de la fuerza del resorte es negativo, puesto que el resorte tira hacia arriba de la masa, cuando el desplazamiento es hacia abajo, o bien la fuerza del resorte es negativa, cuando x es positiva. Así pues, la fuerza del resorte esta expresada por $-kx$.

La fuerza de amortiguamiento que actúa sobre la masa también es negativa, siendo su valor $-c\dot{x}$, ya que está dirigida contra la velocidad \dot{x} ; actúa hacia arriba (negativa), mientras que \dot{x} esta dirigida hacia abajo (positiva). Las tres fuerzas que actúan sobre la masa hacia abajo son [6]:

$$-kx - c\dot{x} + P_0 \text{Sen } \omega t \quad (2.6)$$

De la segunda ley de Newton se obtiene:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + P_0 \text{Sen } \omega t \quad (2.7)$$

$$\text{o} \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \text{Sen } \omega t \quad (2.8)$$

Esta ecuación es conocida como la *ecuación diferencial del movimiento de un sistema con un solo grado de libertad*. En donde el primer término de la ecuación es la fuerza de inercia, el segundo término la fuerza de amortiguamiento, el tercer término es la fuerza del resorte y el cuarto término es la fuerza exterior.

2.3 Frecuencia natural de vibración

Antes de desarrollar la solución de la ecuación general, es útil considerar primero los casos más sencillos. Si no hay ninguna fuerza exterior aplicada $P_0 \text{ sen } \omega t$ ni amortiguamiento ($c = 0$), la expresión se reduce a [6]:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.9)$$

$$\text{o} \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m} x \quad (2.10)$$

en lenguaje común:

La forma mas general en que se puede escribir la solución es:

$$x = C_1 \sin t \sqrt{\frac{k}{m}} + C_2 \cos t \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.11)$$

Donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

Interpretemos ahora físicamente la (2.11). Las constantes C_1 y C_2 tienen cualquier valor que queramos asignarles. Pero el problema en si no se ha planteado por completo. El resultado esta dado por la ecuación (2.11) describe todos los movimientos que son capaces de lograr el sistema de masa y resorte. Entre otros, está el caso para el cual $C_1 = C_2 = 0$, dando $X = 0$, lo que significa que la masa permanece perennemente en reposo.

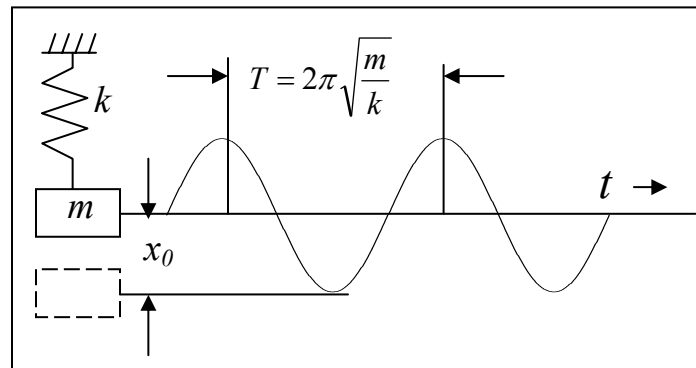


Figura. 2.3 Vibración libre sin amortiguamiento, partiendo de un desplazamiento inicial.

Especificaremos ahora en forma definitiva que la masa se ha desplazado de su posición de equilibrio a $x = x_0$, y después se ha liberado sin velocidad inicial. Midiendo el tiempo, desde el instante en que se libera, las dos condiciones iniciales son:

$$\text{en } t = 0, \quad x = x_0 \quad \text{y} \quad \dot{x} = 0 \quad (2.12)$$

Sustituyendo la primera condición en la (2.11), obtenemos:

$$x_0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 \quad \text{o} \quad C_2 = x_0 \quad (2.13)$$

Para la segunda condición deberemos derivar primero la ecuación (2.11), obteniendo después:

$$0 = C_1 \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 1 - C_2 \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 0 \quad \text{o} \quad C_1 = 0 \quad (2.14)$$

Sustituyendo estos resultados en la (2.11), lograremos la solución específica:

$$x = x_0 \cos t \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.15)$$

Esto representa una *vibración sin amortiguamiento*, un ciclo de la cual ocurre cuando $t\sqrt{k/m}$ varía a través de 360° o 2π radianes (Figura 2.3). Denominando T al tiempo por ciclo o periodo, tendremos:

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot T = 2\pi \quad \text{o} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2.16)$$

Es usual denominar a $\sqrt{k/m}$ por ϖ_n llamada *frecuencia circular natural*. El valor $\sqrt{k/m} = \varpi_n$ es la velocidad angular del vector rotativo que representa el movimiento vibratorio.

El recíproco de T o *frecuencia natural* f_n es:

$$f_n = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\varpi_n}{2\pi} \quad (2.17)$$

Que esta medida en ciclos por segundo. Debido a la ausencia de la fuerza aplicada $P_0 \sin \omega t$ a esta vibración se le llama *vibración libre*.

2.4 Vibraciones de vigas uniformes

En los diferentes tratados sobre resistencia de materiales, la ecuación diferencial de una viga sometida a flexión y solicitada por una carga estática, está normalmente dada de la siguiente forma [6]:

$$M = EI \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (2.18)$$

$$q = \frac{d^2 M}{dx^2} \quad (2.19)$$

agrupando

$$q = \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \quad (2.20)$$

Donde q es la carga uniforme distribuida por unidad de longitud y M es el momento flector. Si la sección transversal de la viga es constante a lo largo de toda su longitud, el factor EI es independiente de x y la ecuación se simplifica en

$$q = EI \frac{d^4 y}{dx^4} \quad (2.21)$$

Los diferentes diagramas de una viga sobre dos soportes solicitada por diferentes cargas uniformemente distribuidas se muestran en la Fig. 2.4, pero las ecuaciones (2.20) y (2.21) son válidas en general en otras condiciones de sustentación, a saber, en los voladizos.

Así pues, la ecuación diferencial de la barra en vibración con sección transversal uniforme es [6]:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -\mu_1 \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (2.22)$$

donde μ_1 es la masa de la viga por unidad de longitud. Suponiendo una vibración libre sostenida con una frecuencia ω , se tiene:

$$y(x, t) = y(x) \text{sen} \omega t \quad (2.23)$$

que da la forma:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = \mu_1 \omega^2 y \quad (2.24)$$

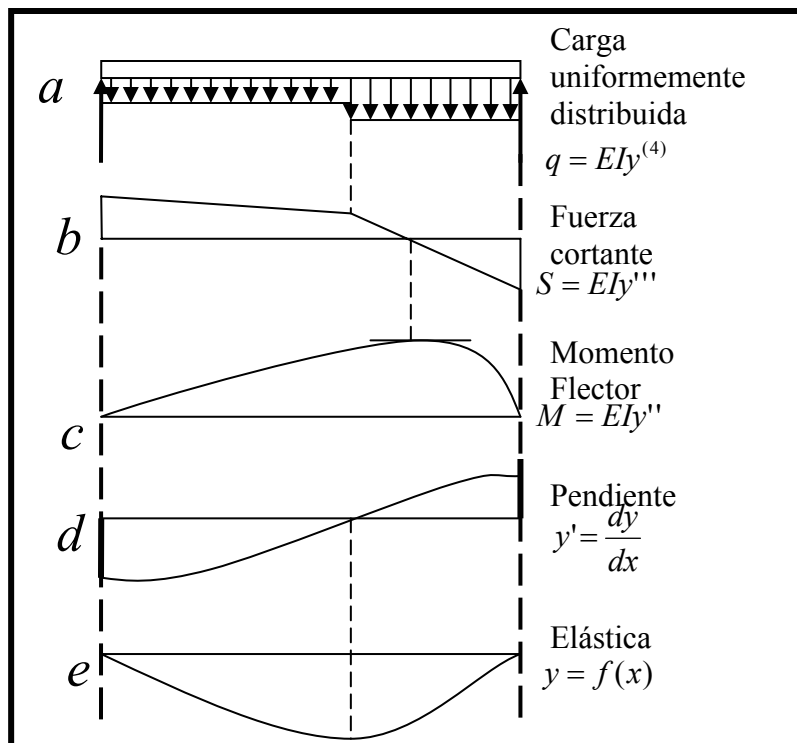


Figura 2.4. Ilustrando las ecuaciones diferenciales de una viga en flexión.

El primer miembro es la expresión elástica de la carga (Ec. 2.21), mientras que el lado derecho es el valor máximo de la carga de inercia. De aquí se ve que la característica física de cualquier “curva elástica normal” de una viga es que, el diagrama de carga q deberá tener la misma configuración que el diagrama de deformación. Cualquier carga capaz de originar una curva de deformación similar a la curva de carga, podrá considerarse como la carga de inercia durante la vibración; la frecuencia natural aparece solamente en el factor numérico $\mu_1 \omega^2$ que relaciona a las dos.

Las funciones que satisfacen la (2.24) deberán tener la propiedad de que, tras una cuarta diferenciación, volverá a asumir su forma original multiplicada por la constante positiva $\mu_1 \omega^2 / EI$. Podemos recordar cuatro funciones con esta propiedad, a saber.

$$e^{ax}, \quad e^{-ax}, \quad \text{sen} ax, \quad \text{y} \quad \text{cos} ax$$

donde el coeficiente a se escogerá de tal suerte que:

$$a = \sqrt[4]{\frac{\mu_1 \omega^2}{EI}} \quad (2.25)$$

Así pues, la solución general de la ecuación (2.24) que contiene cuatro constantes de integración puede escribirse como:

$$y(x) = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + C_3 \text{sen} ax + C_4 \text{cos} ax \quad (2.26)$$

Esta expresión determina la forma de las diferentes “curvas elásticas normales”. Las cuatro constantes de integración C se calculan por las condiciones de sus extremos. A cada extremo de la viga le corresponden dos de estas condiciones, totalizando de esta manera con sus dos extremos las cuatro condiciones requeridas. Estas son:

Extremo libremente sustentando: $y = 0$, $y'' = 0$ (deformación y momento flector nulo)

Extremo libre: $y'' = 0$, $y''' = 0$ (fuerza cortante y momento flector nulo)

Extremo empotrado: $y = 0$, $y' = 0$ (deformación y pendiente nula)

Esto resulta claro, considerando el significado físico de las diferentes derivadas, como se muestra en la Fig. 4. En cualquier caso específico, las cuatro condiciones de los extremos sustituidos en la (2.26) proporcionan cuatro ecuaciones algebraicas homogéneas de las cuatro C . Igualando a cero el determinante de este sistema, se obtiene una ecuación en a , que con la (2.25) es la ecuación de la frecuencia. Este procedimiento se ha llevado a cabo con las diferentes clases de viga (viga sobre dos soportes, voladizo o viga “libre”, doblemente empotrada, etc.), pero es preferible en este caso obtener soluciones aproximadas utilizando el método de Rayleigh. Solo para el caso de una viga libremente apoyada podrá reconocerse su solución exacta en forma sencilla con la (2.26). Las condiciones de los extremos son en este caso:

$$x = 0, y = y'' = 0 \quad \text{y} \quad x = l, y = y'' = 0$$

Vemos de inmediato que la forma de una onda senoidal satisface estas condiciones, mientras que las funciones cosenos o las funciones de e las violan. De esta manera, una viga sobre dos soportes, la (2.26) se simplifica a

$$y(x) = C \operatorname{sen} ax$$

de manera que las curvas elásticas normales de una viga uniforme sobre dos soportes, son las mismas que las de una cuerda, pero sus frecuencias son diferentes. Estas se obtienen haciendo que el argumento del seno sea igual a π veces un número entero o

$$al = l^3 \sqrt{\frac{\mu_1 \omega^2}{EI}} = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

de manera que

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu_1}}, \quad \omega_2 = \frac{4\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu_1}}, \quad \dots, \quad \omega_3 = \frac{9\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu_1}} \quad (2.27)$$

Mientras que las frecuencias naturales sucesivas de la cuerda aumentan según 1, 2, 3, 4, etc., en el caso de una viga sobre dos soportes aumentan según 1, 4, 9, 16, etc.

Se ha visto que la configuración natural de una viga uniforme, el diagrama de carga de inercia es análogo al diagrama de deformación, puesto que la carga de inercia en cada punto es $\mu_1 dx \omega^2 y$, proporcional a su vez a la deformación y . Así pues, a cada forma natural le corresponde una curva de carga natural $\mu_1 \omega^2 y$.

Suponiendo la energía potencial total de la viga como:

$$Pot = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx \quad (2.28)$$

Calculemos ahora la frecuencia fundamental de un voladizo o viga con un extremo empotrado y el otro libre. Tendremos que seleccionar para la elástica una curva (Fig. 2.5) horizontal en $x = 0$ y con momento flector y'' o curvatura nula en el extremo l . Un cuarto de onda de la curvatura del coseno satisface estas condiciones:

$$y = y_0 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right) \quad (2.29)$$

Como esta expresión no puede coincidir con la configuración de la (2.26) al valorar las cuatro C, la (2.29) no corresponde a la configuración exacta de la curva normal. Sustituyendo esta expresión en la (2.23) y considerando

$$Cin = \frac{1}{2} \mu_1 \omega^2 \int_0^l y^2 dx \quad (2.30)$$

$$Pot = \frac{\pi^4 EI}{64 l^3} y_0^2$$

obtenemos:

$$Cin = \mu_1 \omega^2 y_0^2 l \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{\pi} \right)$$

Igualando estas dos expresiones, la frecuencia resulta

$$\omega = \frac{\pi^2}{8\sqrt{\frac{3}{4} - \frac{2}{\pi}}} \sqrt{\frac{EI}{\mu_1 l^4}} = \frac{3.66}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu_1}} \quad (2.31)$$

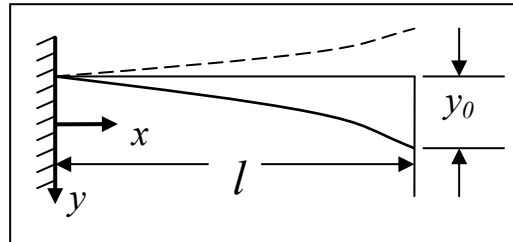


Figura 2.5 Un cuarto de onda cosenoidal como configuración de Rayleigh para el caso de un voladizo.

La Fig. 2.6, muestra su configuración exacta, conjuntamente con la del segundo modo.

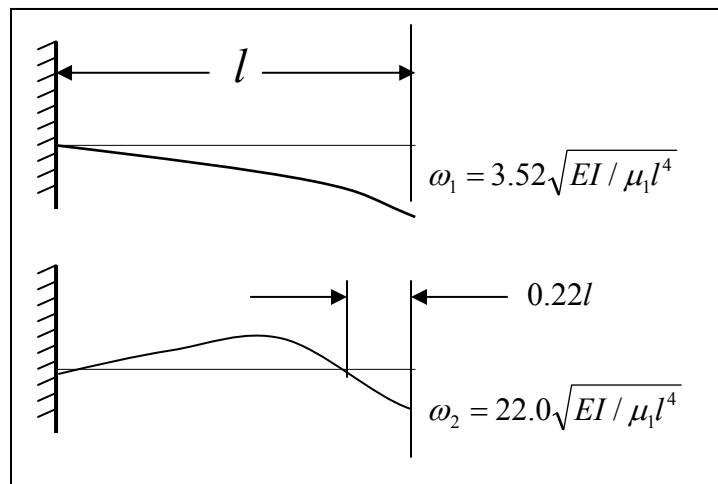


Figura 2.6 Los dos primeros modos naturales del movimiento de un voladizo sometido a flexión.

La elástica normal de una viga empotrada en sus extremos (una barra “con ambos extremos fijos”), deberá tener una configuración simétrica y horizontal en sus extremos (Fig. 2.7).

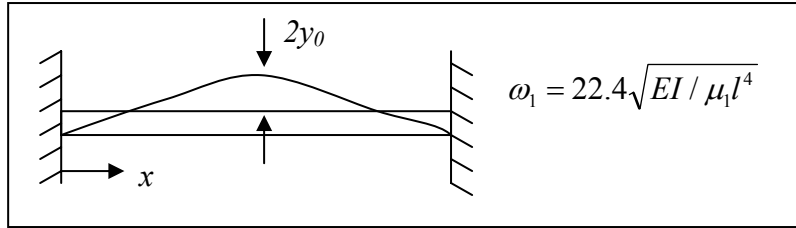


Figura 2.7 La elástica normal de una barra con sus extremos empotrados.

Una onda completa de la cosenoide desplazada hacia arriba en una magnitud y_0 es una curva simple que satisface los siguientes requisitos:

$$y = y_0 \left[1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right]$$

Sucesivamente obtenemos:

$$Pot = \frac{EI}{2} y_0^2 \frac{16\pi^4}{l^4} \frac{l}{2}$$

$$Cin = \frac{\mu_1}{2} y_0^2 \omega^2 l \left[1 + \frac{1}{2} \right]$$

$$\omega = \frac{4\pi^2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{EI}{\mu_1 l^4}} = \frac{22.7}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu_1}} \quad (2.32)$$

mientras que la solución exacta es 22.4, o sea, 1.3% menor que 22.7.

Finalmente, consideramos la barra “libremente” apoyada, es decir, una barra libremente sustentada por una o más cuerdas, o bien, flotando sobre un líquido. El modo más simple de vibración (Fig. 2.8) deberá tener dos nodos careciendo totalmente de la curvatura y'' en cualquiera de sus extremos. Esta configuración puede obtenerse convenientemente a manera de una media onda de la curvatura del coseno, desplazada verticalmente una pequeña magnitud a :

$$y = y_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} - a$$

La magnitud a del desplazamiento vertical es sumamente importante ya que determina la posición de los dos nodos. Cuando $a = 0$, éstos se encuentran en los extremos de la viga; y cuando $a = y_0$, se situarán en el centro. El valor real de a entre 0 y y_0 , puede obtenerse del hecho de que su momentum vertical total deber ser cero, ya que no se tiene la presencia de ninguna fuerza exterior alterna actuando sobre la viga. Al pasar la viga por su posición de equilibrio, los extremos tienen velocidades ωy hacia arriba. Puesto que la viga es uniforme, es decir, como todas las partículas dx tienen la misma masa, los valores ωy son también proporcionales al momentum. El momentum total será cero, si las áreas por encima y por debajo de la línea central de la figura 2.8 son iguales o si

$$0 = \int_0^l y dx = y_0 \int_0^l \frac{\pi x}{l} dx - \int_0^l a dx = \frac{2}{\pi} y_0 l - al$$

$$a = \frac{2y_0}{\pi}$$

de manera que

Con esta expresión, que determina la configuración de la vibración, obtenemos:

$$Pot = \frac{\pi^4}{4} \frac{EI y_0^2}{l^3}$$

$$Cin = \mu_1 \omega^2 y_0^2 l \left[\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \right]$$

$$\omega = \frac{\pi^2}{2 \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \right)}} \sqrt{\frac{EI}{\mu_1 l^4}} = \frac{22.72}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu_1}}$$

(2.33)

El resultado exacto es el mismo que el de la barra empotrada, a saber, 22.4, que es el 1% menor que 22.72.

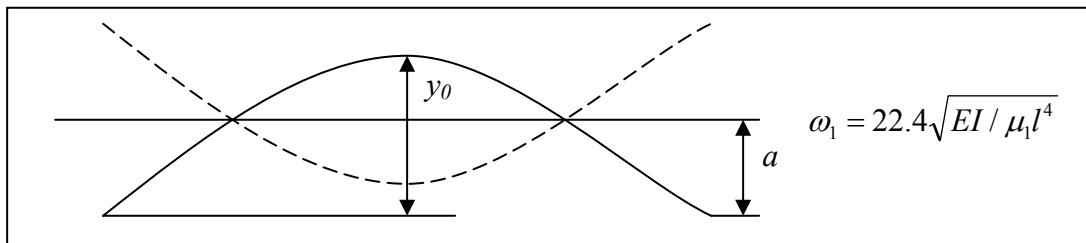


Figura 2.8 Curva elástica normal de una barra con ambos extremos libres.

2.5 Modos Normales de Vibración

Se considera un sistema sin amortiguamiento como se muestra en la Fig. 2.9 Usando coordenadas x_1 y x_2 , las ecuaciones diferenciales que describen su movimiento son:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -k(x_1 - x_2) - kx_1 \\ 2m\ddot{x}_2 &= k(x_1 - x_2) - kx_2 \end{aligned} \quad (2.34)$$

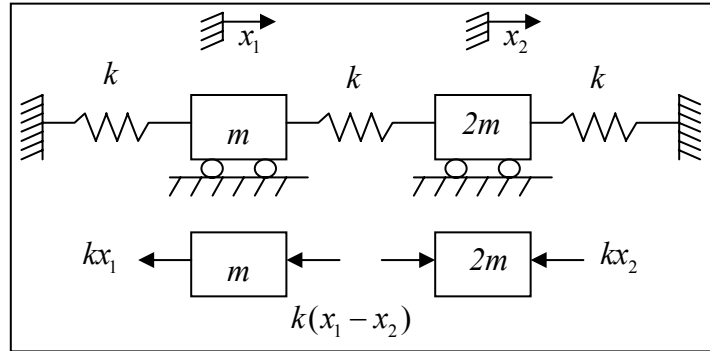


Figura 2.9 Sistema de dos grados de libertad sin amortiguamiento

Ahora se define un modo normal de oscilación en el cual la masa está en movimiento armónico de la misma frecuencia, pasando simultáneamente a través de la posición de equilibrio. Para dicho movimiento, se puede decir que:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 e^{i\omega t} \\ x_2 &= A_2 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Sustituyendo en las ecuaciones diferenciales obtenemos:

$$\begin{aligned} (2k - \omega^2 m)A_1 - kA_2 &= 0 \\ -kA_1 + (2k - 2\omega^2 m)A_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

las cuales se satisfacen para cualquier A_1 y A_2 , y si el siguiente determinante es cero

$$\begin{vmatrix} (2k - \omega^2 m) & -k \\ -k & (2k - 2\omega^2 m) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.37)$$

Considerando $\omega^2 = \lambda$, el mismo determinante se convierte en la *ecuación característica*

$$\lambda^2 - \left(3\frac{k}{m}\right)\lambda + \frac{3}{2}\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \quad (2.38)$$

Las dos raíces de esta ecuación son:

$$\lambda_1 = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{3} \right) \frac{k}{m} = 0.634 \frac{k}{m}$$

y

$$\lambda_2 = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{3} \right) \frac{k}{m} = 2.366 \frac{k}{m}$$

y las frecuencias naturales del sistema son [7]:

$$\omega_1 = \lambda_1^{1/2} = \sqrt{0.634 \frac{k}{m}}$$

(2.39)

$$\omega_2 = \lambda_2^{1/2} = \sqrt{2.366 \frac{k}{m}}$$

Para el modo de vibrar correspondiente al segundo modo normal. Se pueden mostrar los dos modos gráficamente, como en la Fig. 2.10. En el primer modo normal, las dos masas se mueven en fase; en el segundo modo normal, las masas se mueven en sentidos contrarios, o están fuera de fase, con cada otra.

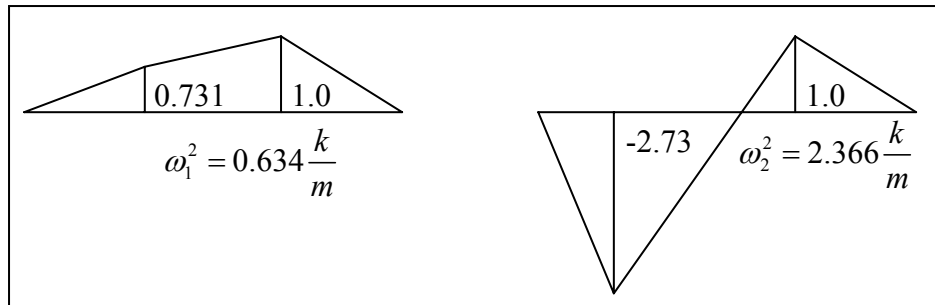


Figura 2.10. Modos normales del sistema mostrado en la Fig. 2.9

2.6 Modos normales de Vigas Uniformes

Asumamos que la vibración libre de una viga uniforme está determinada por la ecuación diferencial de Euler.

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (2.40)$$

Para determinar el modo normal de vibración, la solución es en la forma [7]:

$$y(x, t) = \phi_n(x)e^{i\omega_n t} \quad (2.41)$$

la cual sustituimos dentro de la ecuación (2.40), para obtener la ecuación:

$$\frac{d^4 \phi_n(x)}{dx^4} - \beta_n^4 \phi_n(x) = 0 \quad (2.42)$$

Donde:

$\phi_n(x)$ = Función característica que describe la deflexión del n modo.

m = masa, densidad por unidad de longitud.

$$\beta_n^4 = m\omega_n^2 / EI$$

$\omega_n = (\beta_n l)^2 \sqrt{EI / ml^4}$ = Frecuencia natural del n modo.

La función característica $\phi_n(x)$ y la frecuencia del modo normal ω_n dependen de las condiciones de frontera.

Capítulo 3 Modelo Matemático

3.1 Obtención del modelo matemático

Para obtener un modelo matemático que permita analizar el modo de vibrar de una caja de velocidades, es necesario simplificar la caja. Dicha simplificación permitirá tener una aproximación de los modos de vibrar y de la influencia de cada uno de los parámetros en dichos modos. La ecuación fundamental de la frecuencia natural de vibración está dada por la ecuación (3.1) [7].

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.1)$$

Donde:

ω_n = Frecuencia natural del sistema

k = Rigidez

m = Masa del sistema

Se puede observar que los parámetros principales son, la rigidez y la masa; la rigidez está determinada por las propiedades geométricas y mecánicas, condiciones de frontera y carga; la masa depende de la densidad y del volumen del material.

La forma en que se puede realizar una simplificación sencilla es la de una viga empotrada en un extremo, la ecuación que rige este caso está dada por: [7].

$$f = \frac{B_i^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} \quad (3.2)$$

donde:

B_i = Coeficiente característico dependiente del número de modo de vibrar, (1.875 para el primer modo).

E = Modulo de elasticidad del material de la viga.

I = Momento de área de la sección transversal de la viga

m = Masa de la viga

l = Longitud de la viga

Para una viga sólida de ancho “ b ” y alto “ h ” el momento de área I esta dado por [8]:

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (3.3)$$

La masa “ m ” esta definida por:

$$m = b * h * l * \delta \quad (3.4)$$

Donde δ es la densidad del material.

Sustituyendo (3.3) y (3.4) en (3.2) obtenemos:

$$f = \frac{B_i^2}{2\pi} \sqrt{\frac{Eh^2}{12\delta l^4}} \quad (3.5)$$

Para los modos de vibrar en este tipo de viga, la influencia del espesor b , es nula, quiere decir que no importa que tan grande sea este valor, la frecuencia del modo de vibrar es la misma.

Este primer análisis que se considero es una simplificación muy elemental pero si notamos una similitud mas acertada es el de una viga hueca empotrada en un extremo, como se muestra en la figura 3.1, y de sección transversal como lo muestra la figura 3.2.

Ésta viga permite tener un modelo matemático que relativamente sea fácil de resolver y que permita determinar la influencia de los parámetros en los modos de vibrar.

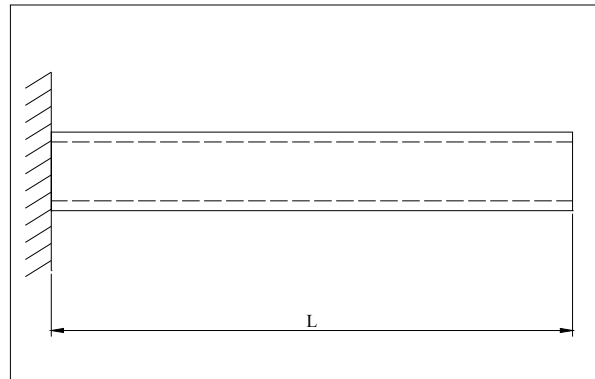


Figura 3.1 Viga hueca empotrada en un extremo y libre en otro.

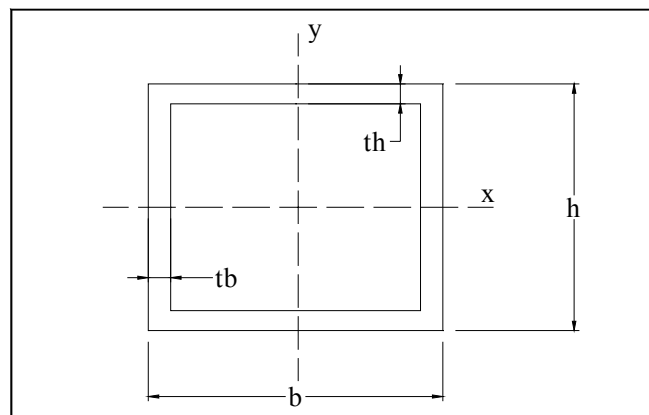


Figura 3.2 Sección transversal de la viga

Para el análisis de este fenómeno, es importante determinar los parámetros que influyen en el primer modo de vibrar, estos parámetros se pueden dividir en dos grupos principales:

1. Parámetros debido a las propiedades mecánicas (modulo de elasticidad, densidad y la razón de Poisson).
2. Parámetros debido a las propiedades geométricas (ancho, alto, longitud, espesor de pared).

Además de estas consideraciones, también se nota que en la viga existen tres tipos de vibraciones, y que para cada tipo de vibración existen sus modos de vibrar, estos modos se analizan por separado para vibración en Bending, Torsional y Longitudinal.

3.2 Vibración de Bending

En la vibración de Bending también conocida como transversal o de flexión, “las vigas pueden deformarse perpendicular al eje de la viga por flexión o por cortante, como se muestra en la figura 3.3 La deformación a flexión ordinariamente domina la deformación de vigas delgadas. La deformación en cortante puede ser importante en vigas cortas o en modos altos de vigas delgadas” [8].

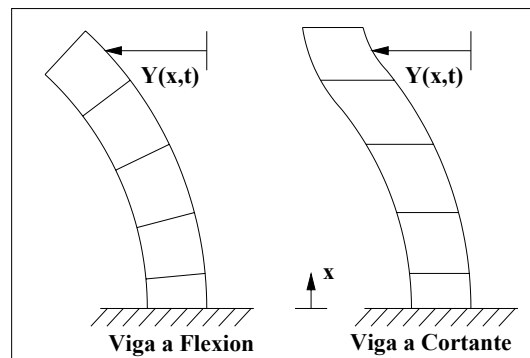


Fig. 3.3 Primer modo de una viga a flexión y a cortante, empotrada en un extremo y libre en el otro.

Teniendo en cuenta estas condiciones y para modos de vibrar de una viga hueca empotrada en un extremo, y de sección transversal como se muestra en la figura 3.2, se tiene la siguiente ecuación [8]:

$$f_i = \frac{\lambda_i}{2\pi L} \sqrt{\frac{KG}{\mu}} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.6)$$

Donde:

$i = 1, 2, 3, \dots$ es el número de modo de vibrar.

$$\lambda_i = \frac{(2i-1)\pi}{2}; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.7)$$

$$K = \frac{10(1+\nu)(1+3m^2)}{F(m,n)} \quad (3.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F(m,n) = 12 + 72m + 150m^2 + 90m^3 \\ \nu(11 + 66m + 135m^2 + 90m^3) \\ + 10n^2 [(3+\nu)m + 3m^2] \end{array} \right\} \quad (3.9)$$

$$m = \frac{bt_h}{ht_b} \quad (3.10)$$

$$n = \frac{b}{h} \quad (3.11)$$

Y recordando
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.12)$$

Para secciones transversales diferentes en la ecuación 3.8, verificar anexo 1 y 2.

Considerando la ecuación (3.6), se realiza un análisis de la influencia del material, se analizan dos materiales de diferentes propiedades mecánicas, Aluminio

$$(E = 69,000 \frac{N}{mm^2}, \delta = 2.77 \times 10^{-6} \frac{Kg}{mm^3}, \nu = 0.3) \quad \text{y} \quad \text{Acero} \quad (E = 207,000 \frac{N}{mm^2},$$

$$\delta = 7.85 \times 10^{-6} \frac{Kg}{mm^3}, \nu = 0.3).$$

Para realizar el análisis, es necesario tener unidades congruentes, para este caso se considera las unidades del material en milímetro, kilogramo, segundo. Si se tienen las unidades del modulo de elasticidad en N/mm², substituyendo las unidades de Newton, queda: (kg m /seg²)/mm², y para que las unidades sean congruentes, se realiza la conversión de unidades:

$$1 \text{ Newton} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \cancel{\text{m}}}{\text{seg}^2} \cdot \frac{1000 \text{ mm}}{1 \cancel{\text{m}}} = \frac{1000 \text{ kg} \cdot \text{mm}}{\text{seg}^2}$$

En las unidades de la densidad, tenemos kg/mm³, por lo tanto no es necesario realizar conversión de unidades.

Para las propiedades mecánicas del acero, se tiene:

$$E = 207\,000 \text{ N/mm}^2$$

$$\delta = 7.85 \times 10^{-6} \text{ Kg/mm}^3$$

Y para el aluminio:

$$E = 69\,000 \text{ N/mm}^2$$

$$\delta = 2.77 \times 10^{-6} \text{ Kg/mm}^3$$

Teniendo en cuenta esto, y realizando la conversión en el modulo de elasticidad, se tiene:

$$E_{\text{Acero}} = 207\,000\,000 \frac{\text{kg} \cdot \text{mm}}{\text{seg}^2 \cdot \text{mm}^2}$$

$$E_{\text{Aluminio}} = 69\,000\,000 \frac{\text{kg} \cdot \text{mm}}{\text{seg}^2 \cdot \text{mm}^2}$$

Estas ecuaciones se analizan en Tk Solver, y se grafican las frecuencias del primer modo de vibrar Fig. 3.4.

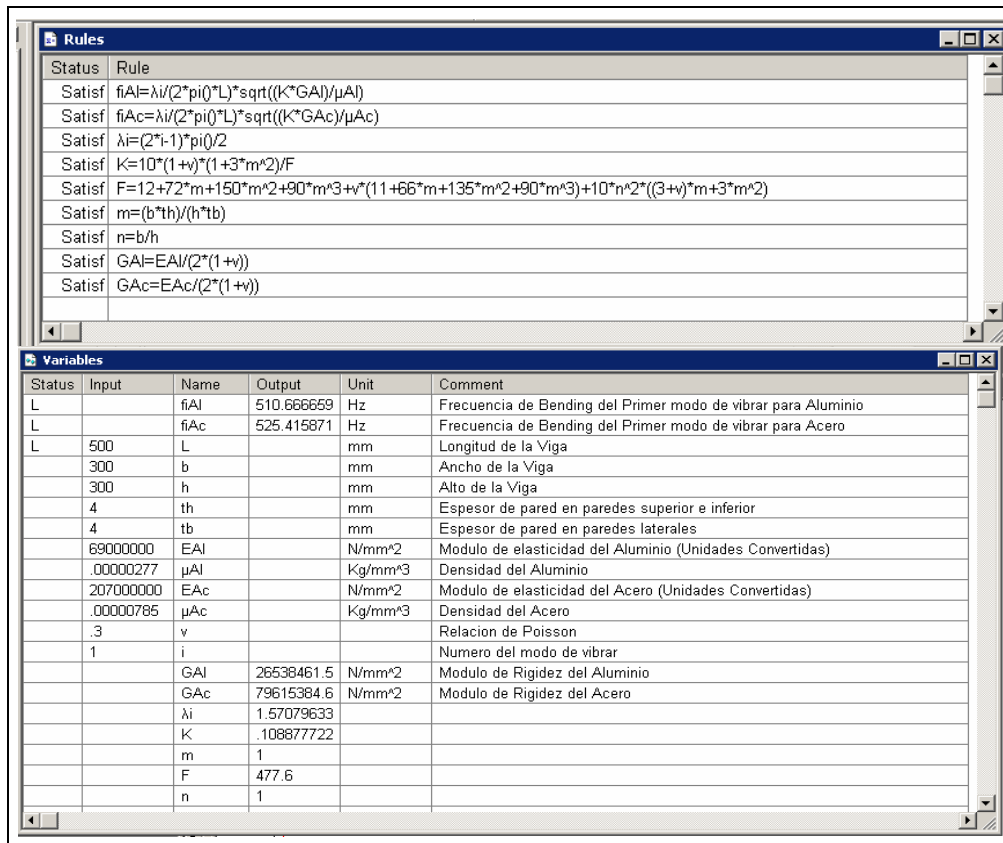
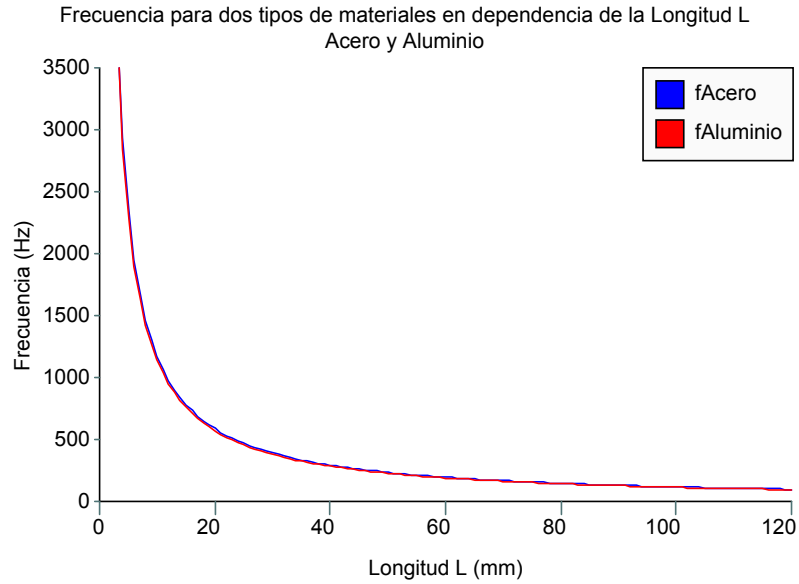


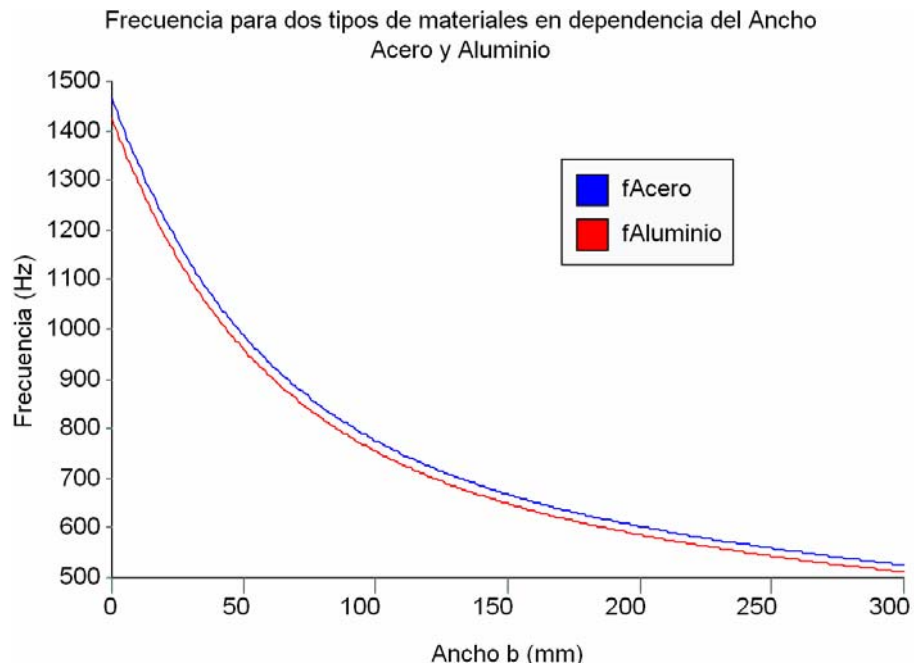
Fig. 3.4 Ventanas del modelo en Tk Solver

El primer análisis se realiza considerando la influencia del material en relación con la longitud de la viga. La gráfica 3.1 muestra esta relación, la gráfica en azul es la frecuencia del primer modo de vibrar para el Acero y la roja para el Aluminio. Se nota que la frecuencia es prácticamente la misma, es decir, la influencia relativa del material es mínima para estos dos materiales en particular.



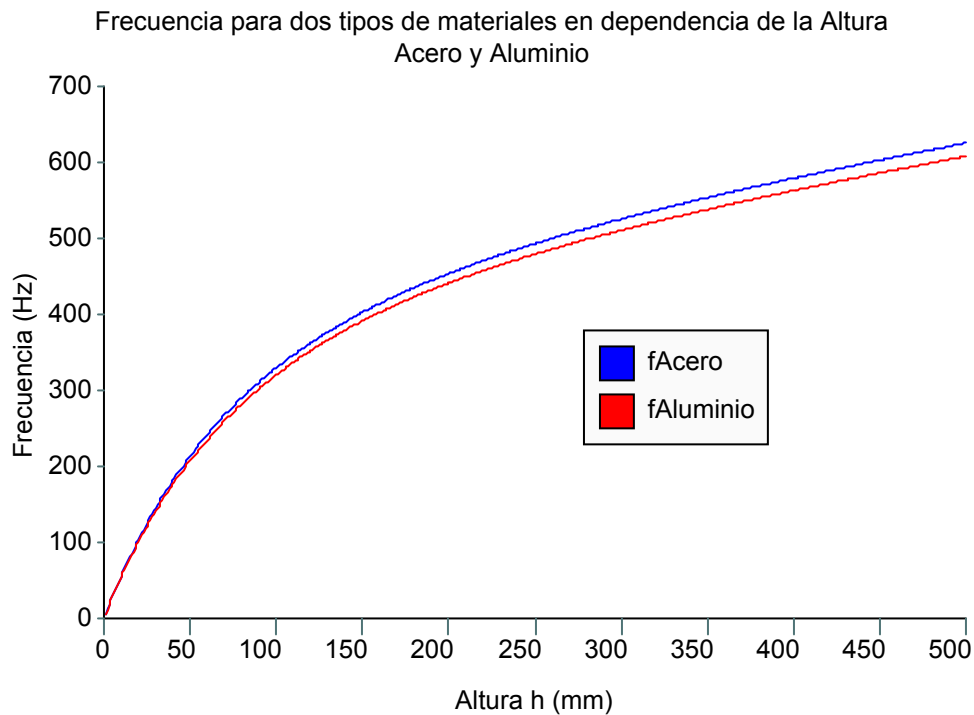
Gráfica 3.1 Frecuencia de Bending de Acero y Aluminio vs. Longitud

Un análisis similar se realiza con el ancho de la viga, la gráfica 3.2 muestra la relación existente para estas condiciones.



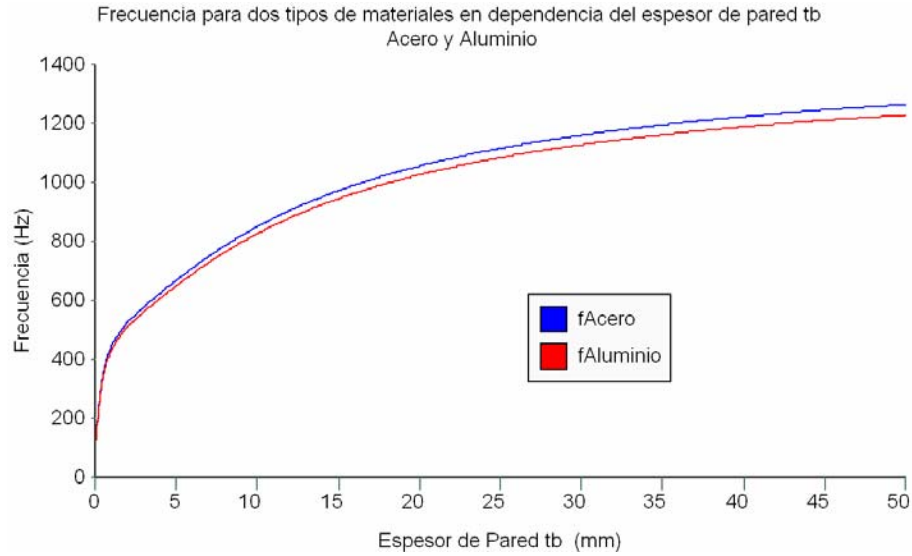
Gráfica 3.2 Frecuencia de Bending de Acero y Aluminio Vs. Ancho

La gráfica 3.3 muestra las frecuencias del acero y del aluminio en relación a la altura “h” de la viga, en este caso la frecuencia de la viga de acero es mayor que la del aluminio, y existe una relación proporcional de la altura “h” con la frecuencia.

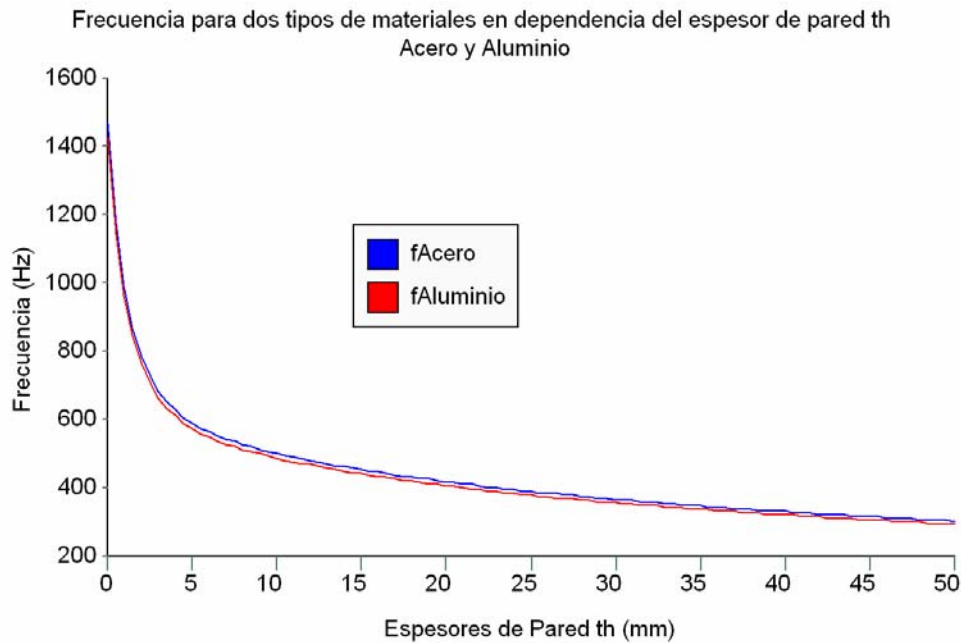


Gráfica 3.3 Frecuencia de Bending de Acero y Aluminio Vs. Altura

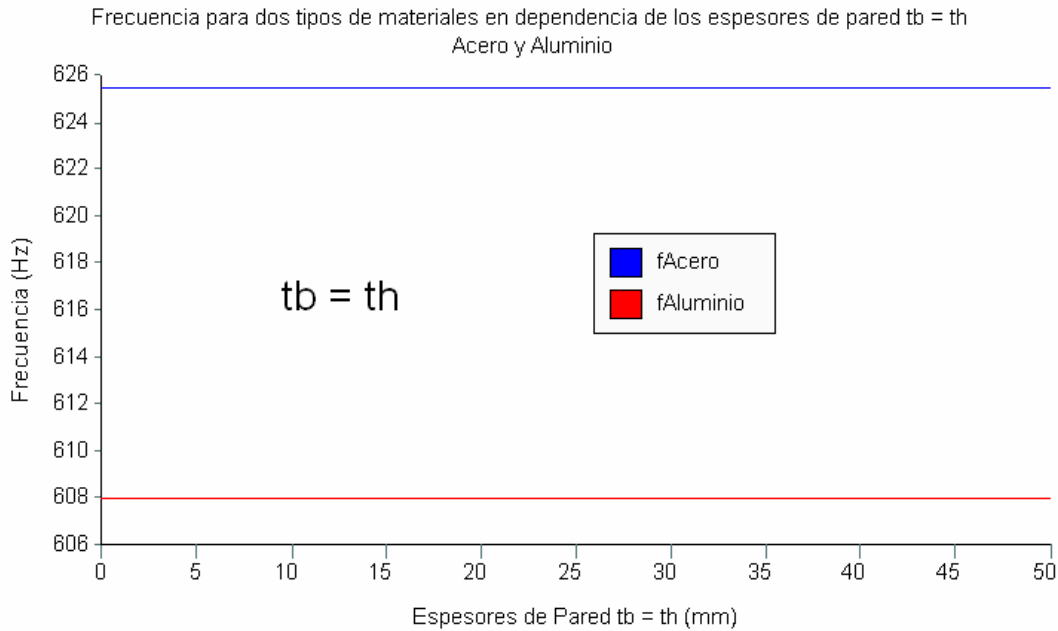
Se grafica la influencia de los espesores de pared, en este caso se dividen en dos diferentes espesores de pared: t_b que es el espesor de pared en las paredes laterales, y t_h que es el espesor de pared en las paredes superior e inferior (Fig. 3.2). La gráfica 3.4 muestra el espesor t_b .

Gráfica 3.4 Frecuencia de Bending de Acero y Aluminio Vs. Espesor t_b

La gráfica 3.5 muestra la relación de la frecuencia con el espesor de pared t_h , ésta gráfica muestra que hay una relación inversa con el espesor t_h y la frecuencia, al contrario que el espesor t_b .

Gráfica 3.5 Frecuencia de Bending de Acero y Aluminio Vs. Espesor t_h

Notando esto, se realiza un análisis, para espesor de pared iguales ($t_b = t_h$), aquí se nota que las frecuencias son las mismas y que si los espesores de pared son iguales, la frecuencia permanece constante. La grafica 3.6 muestra estos resultados.



Gráfica 3.6 Frecuencia de Bending de Acero y Aluminio Vs. Espesores de pared t_h y t_b

Una vez que se analiza la influencia del material en el primer modo de vibrar en la frecuencia de Bending, se analizan por separado los parámetros de geometría (longitud, alto, ancho, espesores de pared). Las variables serán relacionadas entre si tomando como base la longitud, esto con el fin de obtener resultados generales y que no estén en un rango determinado de dimensiones. Considerando que la variación de la frecuencia con respecto al material es pequeña, los análisis se realizan con Aluminio. El primer análisis se realiza considerando la influencia de la longitud, en este caso no se toma en cuenta alguna relación, ya que es el parámetro que consideraremos como base para los demás análisis. La Fig. 3.5 muestra la ventana en Tk Solver para este análisis.

The screenshot displays the Tk Solver interface with three main sections:

- Rules:** A table listing constraints and their corresponding mathematical expressions.

Status	Rule
Satisf	$f_i = \lambda_i / (2 \cdot \pi \cdot L) \cdot \sqrt{(K \cdot G) / \mu}$
Satisf	$\lambda_i = (2 \cdot i - 1) \cdot \pi / 2$
Satisf	$K = 10 \cdot (1 + \nu) \cdot (1 + 3 \cdot m^2) / F$
Satisf	$F = 12 + 72 \cdot m + 150 \cdot m^2 + 90 \cdot m^3 + \nu \cdot (11 + 66 \cdot m + 135 \cdot m^2 + 90 \cdot m^3) + 10 \cdot n^2 \cdot ((3 + \nu) \cdot m + 3 \cdot m^2)$
Satisf	$m = (b \cdot t_h) / (h \cdot t_b)$
Satisf	$n = b / h$
- Variables:** A table listing input and output variables for the model.

Status	Input	Name	Output	Unit	Comment
L		f _i	510.666659	Hz	Frecuencia de Bending del primer modo de vibrar
L	500	L		mm	Longitud de la viga
	300	b		mm	Ancho de la viga
	300	h		mm	Alto de la viga
	4	t _h		mm	Espesor de pared en paredes superior e inferior
	4	t _b		mm	Espesor de pared en paredes laterales
	69000000	E		N/mm ²	Modulo de Elasticidad del Aluminio (Unidades Convertidas)
	.00000277	μ		Kg/mm ³	Densidad del Aluminio
	.3	ν			Relacion de Poisson
	1	i			Numero del modo de vibrar
		G	26538461.5	N/mm ²	Modulo de rigidez
		λ _i	1.57079633		
		K	.108877722		
		m	1		
		F	477.6		
		n	1		
- MathLook:** A section displaying the mathematical formulas used in the model.

$$f_i = \frac{\lambda_i}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{K \cdot G}{\mu}} \qquad n = \frac{b}{h}$$

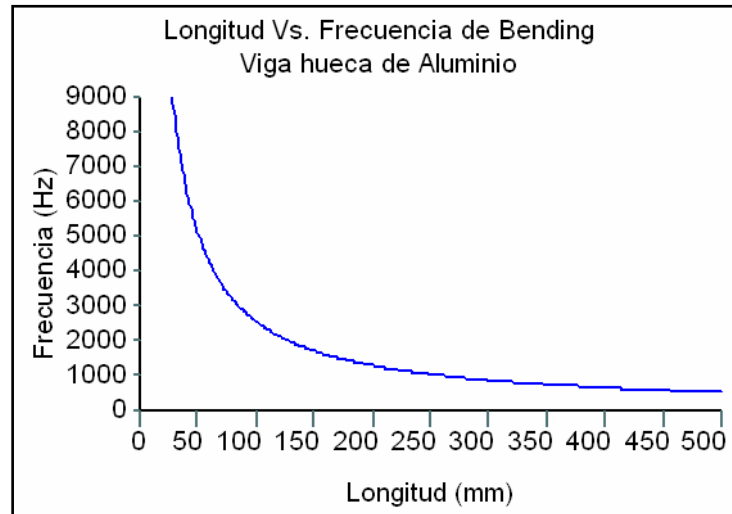
$$\lambda_i = \frac{(2 \cdot i - 1) \cdot \pi}{2} \qquad m = b \cdot t_h / h \cdot t_b$$

$$K = \frac{10 \cdot (1 + \nu) \cdot [1 + 3 \cdot m^2]}{F} \qquad G = E / (2 \cdot (1 + \nu))$$

$$F = 12 + 72 \cdot m + 150 \cdot m^2 + 90 \cdot m^3 + \nu \cdot [11 + 66 \cdot m + 135 \cdot m^2 + 90 \cdot m^3] + 10 \cdot n^2 \cdot [(3 + \nu) \cdot m + 3 \cdot m^2]$$

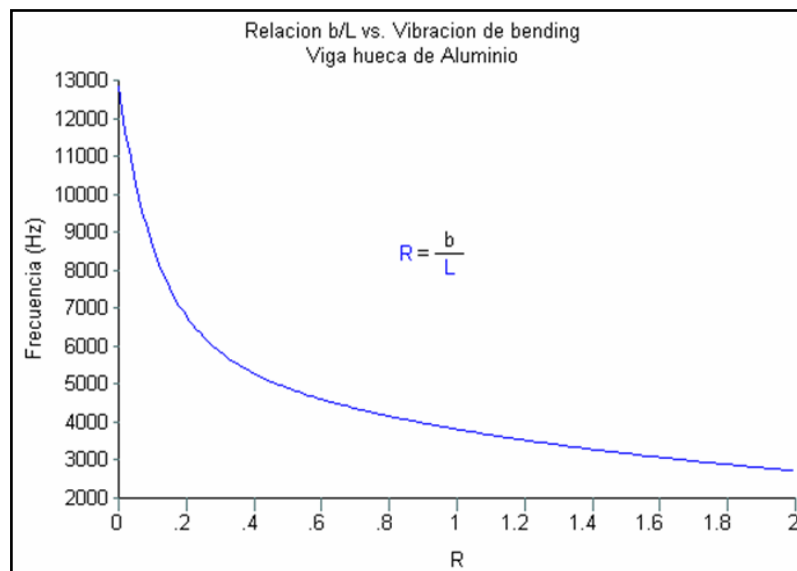
Fig. 3.5 Ventana en Tk Solver para solución de modelo para aluminio

La gráfica 3.7 muestra la frecuencia vs. la longitud. Se nota que hay una relación inversa entre la longitud y la frecuencia, y por lo tanto entre mayor es la longitud, la frecuencia disminuye. Es notable que la influencia de la longitud es considerable, ya que para incrementos pequeños de longitud, se tienen incrementos grandes en la disminución de la frecuencia.



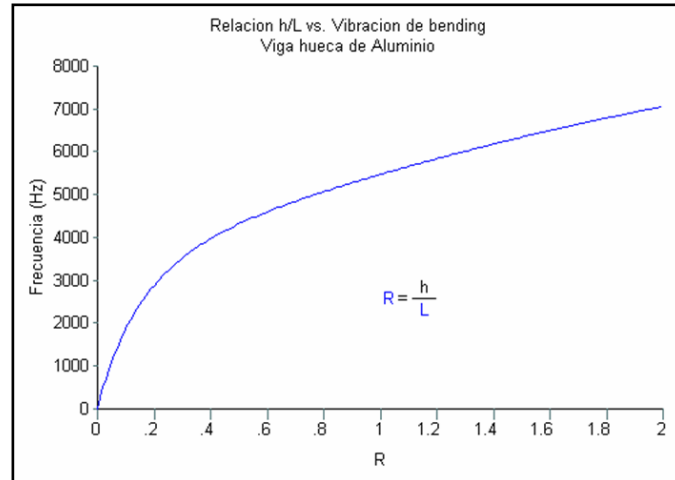
Gráfica 3.7 Frecuencia de bending vs. Longitud

La gráfica 3.8 muestra la relación ancho “b” y “L” vs. frecuencia, se nota que existe una relación inversa entre el ancho y la frecuencia. Esto indica que a mayor espesor “b” la frecuencia disminuye, esto es parecido a la longitud, solo que en este caso la variación de cambio es menor que en la longitud.



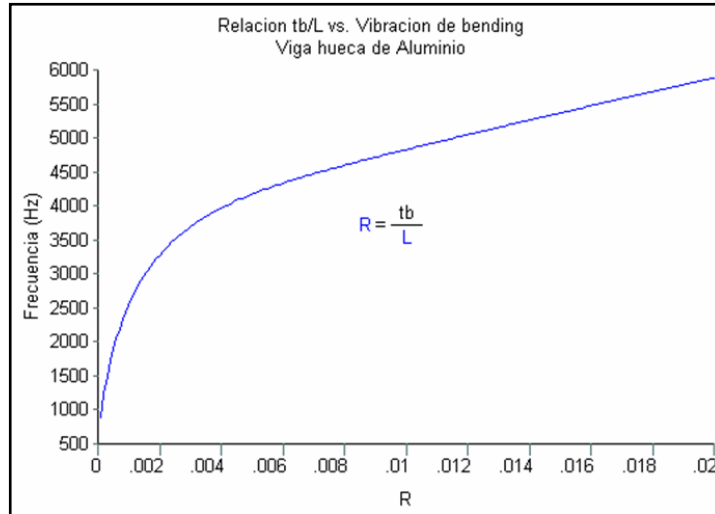
Gráfica 3.8 Relación b/L vs. Frecuencia de bending.

La gráfica 3.9 muestra la influencia del alto de la viga en la frecuencia del primer modo. Se nota que existe una relación proporcional positiva y que a mayor altura de la viga, la frecuencia aumenta.



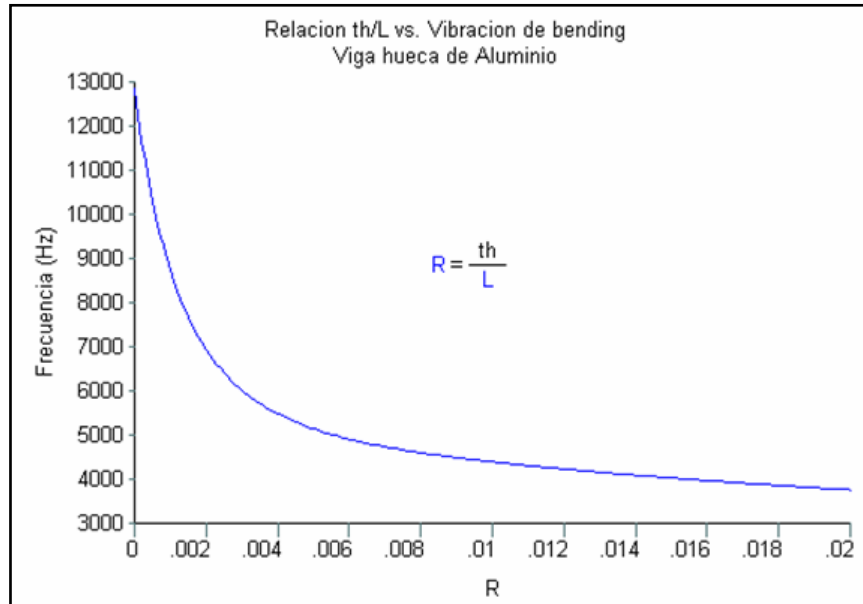
Gráfica 3.9 Relación h/L vs. frecuencia de bending.

Se realiza un análisis de la influencia del espesor de pared, tanto en paredes superior e inferior, la gráfica 3.10 muestra la influencia de la relación entre el espesor en las paredes laterales “tb” y la longitud vs. La frecuencia. Se nota que existe una relación proporcional positiva entre la frecuencia y el espesor “tb”, en consecuencia, la frecuencia aumenta al aumentar el espesor. La razón de cambio en relación al espesor es grande para espesores pequeños, y a medida que éste aumenta la relación se vuelve lineal, lo que quiere decir que en espesores pequeños la razón de cambio es mayor que en espesores grandes.



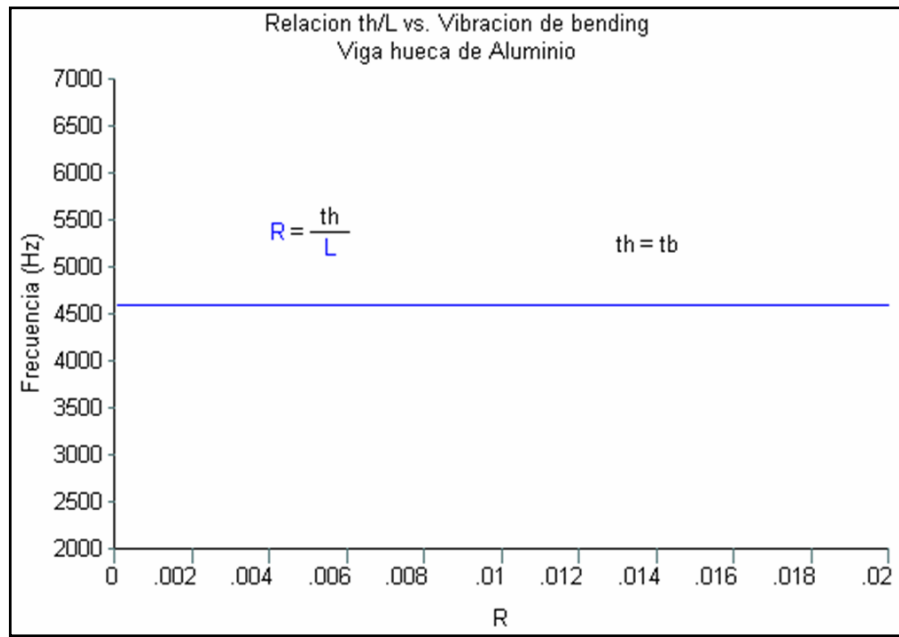
Gráfica 3.10 Relación tb/L vs. frecuencia de bending

La gráfica 3.11 muestra la relación entre el espesor de paredes superior e inferior “th” y la longitud vs. la frecuencia, se nota que al aumentar éste espesor la frecuencia disminuye, aunque la razón de cambio es pequeña en comparación con la influencia del espesor tb.



Gráfica 3.11 Relación th/L vs. frecuencia de bending.

Notando que para los espesores de pared es diferente la frecuencia, se realiza una grafica que muestre el cambio de la frecuencia cuando los espesores son iguales, y se nota que para este caso, la frecuencia no cambia, la gráfica 3.12 muestra este resultado.



Gráfica 3.12 Frecuencia de Bending Vs. Espesores de pared

3.3 Vibración longitudinal

La vibración longitudinal se produce de alargamientos y contracciones de la viga a lo largo de su propio eje, como se muestra en la figura 3.6.

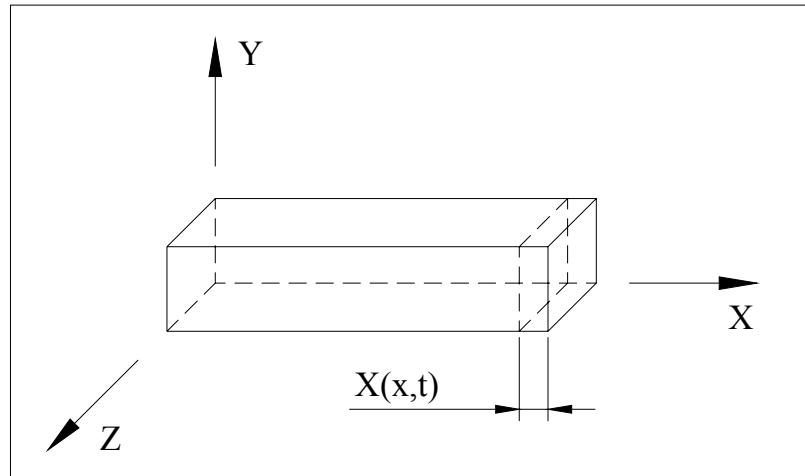


Figura 3.6 Deformación longitudinal de una viga.

Bajo estas condiciones las ecuaciones que rigen la frecuencia longitudinal de los modos de vibrar de una viga hueca empotrada en un extremo son [8]:

$$f_i = \frac{\lambda_i}{2\pi L} \sqrt{\frac{E}{\delta}}; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.13)$$

Donde:

$$\lambda_i = \frac{(2i-1)\pi}{2}; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.14)$$

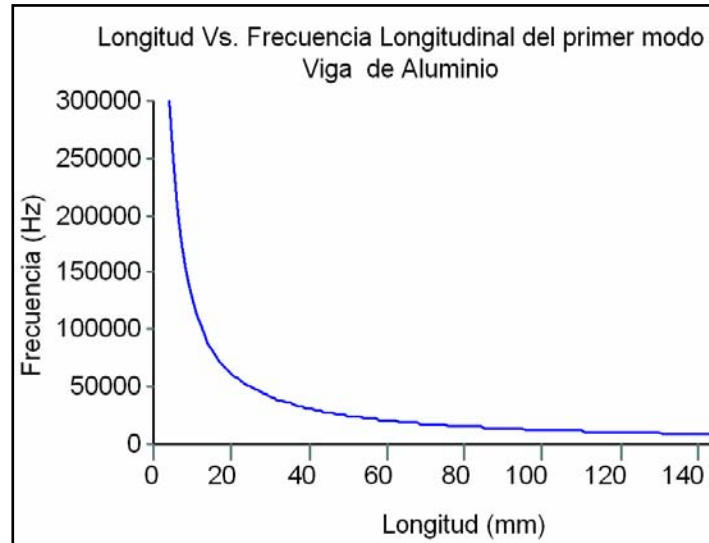
L = Longitud de la viga

E = Modulo de elasticidad del material de la viga

δ = La densidad del material de la viga.

En esta ecuación se puede notar que los parámetros que influyen son solo 3, y que dos de ellos dependen del material y el parámetro restante es la longitud, por lo tanto, la sección transversal de la viga no tiene influencia para este tipo de vibraciones es decir la sección transversal puede ser redonda, cuadrada, cuadrada hueca, triangular, etc. y la frecuencia será la misma.

Se grafica esta ecuación y se nota que existe una relación proporcional negativa entre la frecuencia y la longitud, es decir al aumentar la longitud la frecuencia disminuye, como se muestra en la gráfica 3.13. En este caso no se tuvo que relacionar los parámetros ya que solo se grafica la longitud.



Gráfica 3.13 Longitud vs. frecuencia longitudinal.

3.4 Vibración torsional

La vibración torsional es el resultado de la torsión local de una viga sobre su propio eje. Como se muestra en la Figura 3.7.

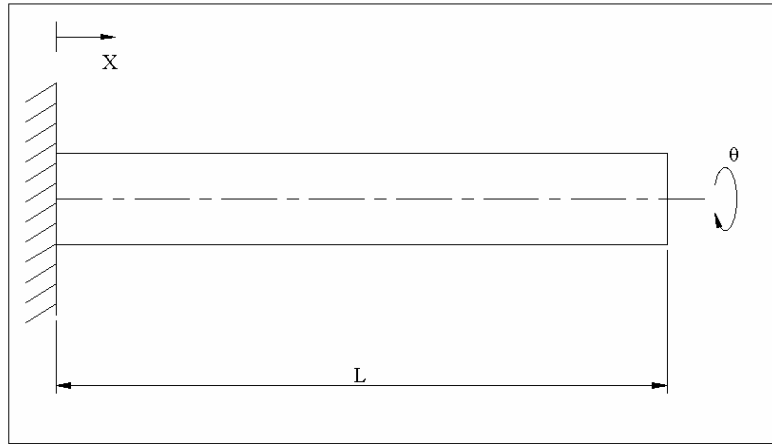


Figura 3.7 Deformación torsional de una viga.

La ecuación que determina la vibración torsional de una viga hueca empotrada en un extremo esta dada por [8] :

$$f_i = \frac{\lambda_i}{2\pi L} \sqrt{\frac{CG}{\mu I_p}} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.15)$$

Donde:

$$\lambda_i = \frac{(2i-1)\pi}{2}; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.16)$$

L = Longitud de la viga

C = es una constante torsional, que depende de la sección transversal, y para una viga hueca de sección transversal como se muestra en la figura 3.2.

$$C = \frac{2t_b t_h (b - t_b)^2 (h - t_h)^2}{bt_b + ht_h - t_b^2 - t_h^2} \quad (3.17)$$

G = Modulo de Rigidez del material de la viga (Ecuación 3.12)

μ = Densidad del material de la viga

I_p = Momento de área de la sección transversal.

$$I_p = \frac{t_b h^3}{6} + \frac{t_b b h^2}{2} \quad (3.18)$$

Se analiza esta ecuación en Tk Solver, la Fig. 3.8, muestran el modelo matemático.

Se grafican los diferentes parámetros que influyen en los modos de vibrar, longitud, alto, ancho, espesores de pared, al igual que en los demás casos, solo se varían las condiciones geométricas, es decir, las propiedades mecánicas del material no se analizan.

La gráfica 3.14 muestra la influencia de la longitud en la frecuencia torsional, al igual que en los demás casos de vibraciones, se nota que existe una relación inversa entre la frecuencia y la longitud. Asimismo en el caso de análisis de longitud, no se relaciona con otro parámetro.

The screenshot shows the Tk Solver interface with three main windows:

- Rules:**

Status	Rule
Satisfied	$f_i = \frac{\lambda_i}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{c \cdot G}{\mu \cdot I_{px}}}$
Satisfied	$\lambda_i = \frac{(2 \cdot i - 1) \cdot \pi}{2}$
Satisfied	$c = \frac{2 \cdot tb \cdot th \cdot (b - tb)^2 \cdot (h - th)^2}{b \cdot tb + h \cdot th \cdot tb^2 \cdot th^2}$
Satisfied	$I_{px} = \frac{tb \cdot h^3}{6} + \frac{tb \cdot b \cdot h^2}{2}$
Satisfied	$G = E / (2 \cdot (1 + \nu))$
- Variables:**

Status	Input	Name	Output	Unit	Comment
	1547	f_i		Hz	Frecuencia Torsional del primer modo de vibrar
	500	L		mm	Longitud de la viga
	300	b		mm	Ancho de la Viga
	300	h		mm	Alto de la viga
	4	tb		mm	Espesor de viga en paredes laterales
	4	th		mm	Espesor de viga en paredes superior e inferior
	69000000	E		N/mm ²	Modulo de elasticidad del material de la viga (Unidades Convertidas)
		μ	0.00323536	kg/mm ³	Densidad del material de la viga
	3	ν			Relacion de Poisson
	5	i			Numero de Modo de vibrar
		G	26538461.5	N/mm ²	Modulo de Rigidez (Unidades Convertidas)
		I_{px}	72000000	mm ⁴	Momento de area de la seccion transversal
		λ_i	14.1371669		
		c	103737344		
- MathLook:**

$$f_i = \frac{\lambda_i}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{c \cdot G}{\mu \cdot I_{px}}}$$

$$\lambda_i = \frac{(2 \cdot i - 1) \cdot \pi}{2}$$

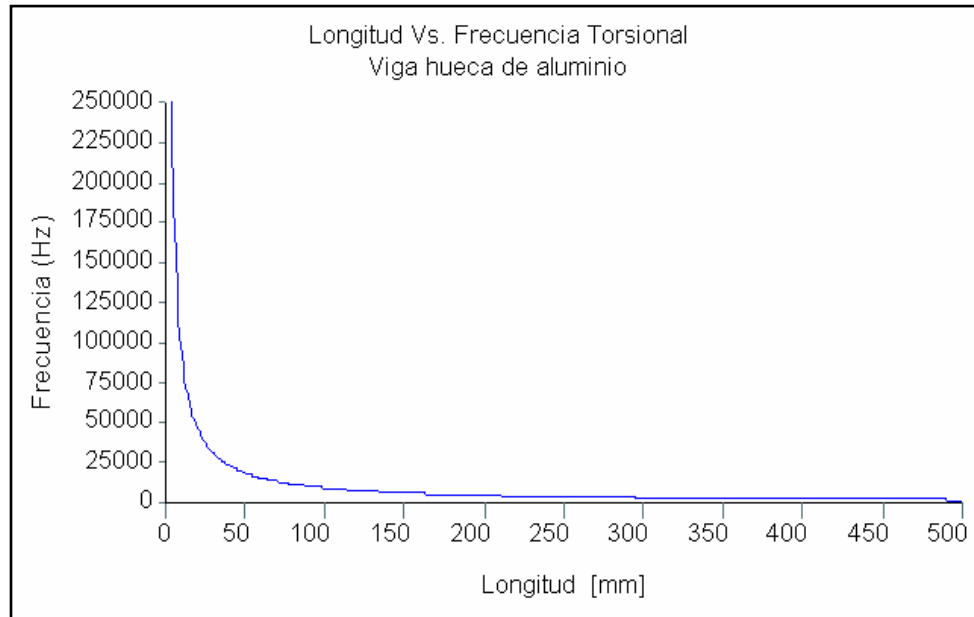
$$c = \frac{2 \cdot tb \cdot th \cdot (b - tb)^2 \cdot (h - th)^2}{b \cdot tb + h \cdot th \cdot tb^2 \cdot th^2}$$

$$I_{px} = \frac{tb \cdot h^3}{6} + \frac{tb \cdot b \cdot h^2}{2}$$

$$m = b \cdot th / h \cdot tb$$

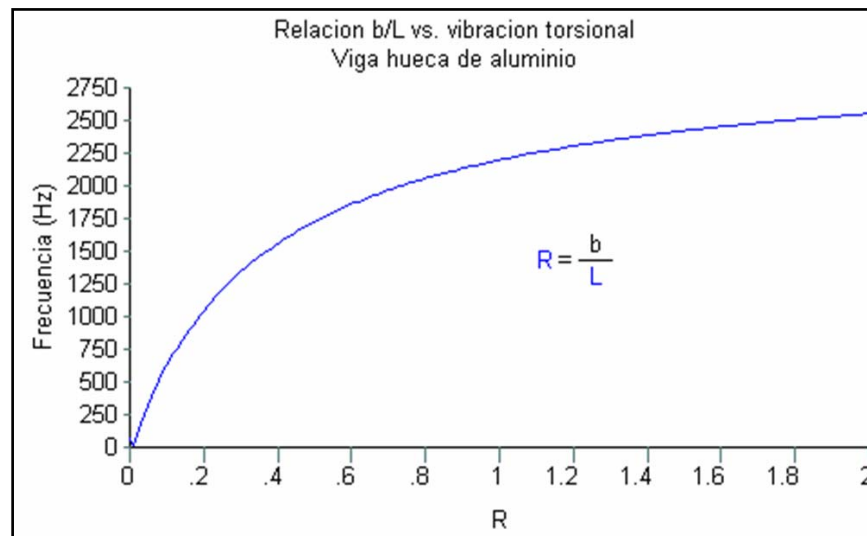
$$G = E / (2 \cdot (1 + \nu))$$

Fig. 3.8 Modelo matemático en Tk Solver para vibración torsional

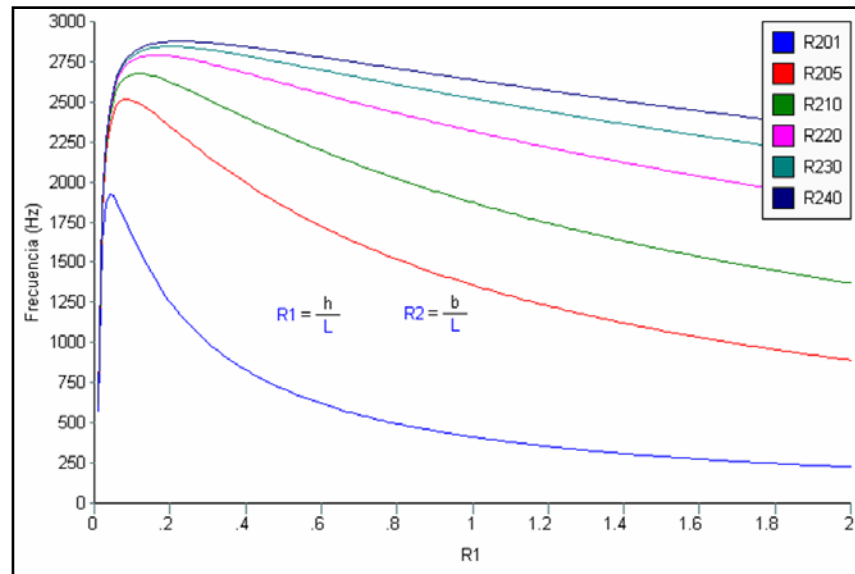


Gráfica 3.14 Longitud vs. frecuencia torsional.

La gráfica 3.15 muestra la influencia del ancho de la viga, existe una relación directa entre frecuencia y la relación b/L , es decir al aumentar el ancho, aumenta la frecuencia del primer modo de vibrar.

Gráfica 3.15 Relación b/L vs. frecuencia torsional

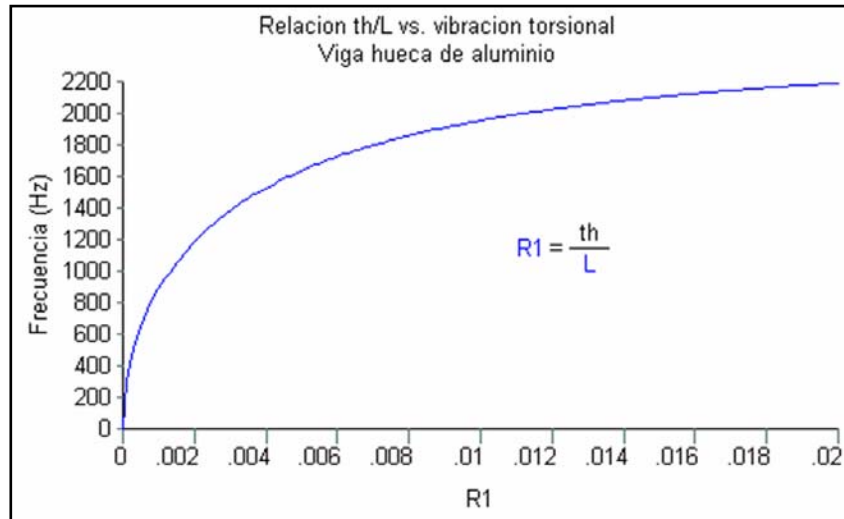
La gráfica 3.16 muestra la influencia del alto de la viga, se nota que existe un punto en el que tiene un máximo, ya que después de este, la frecuencia del primer modo disminuye.



Gráfica 3.16 Alto vs. Frecuencia torsional.

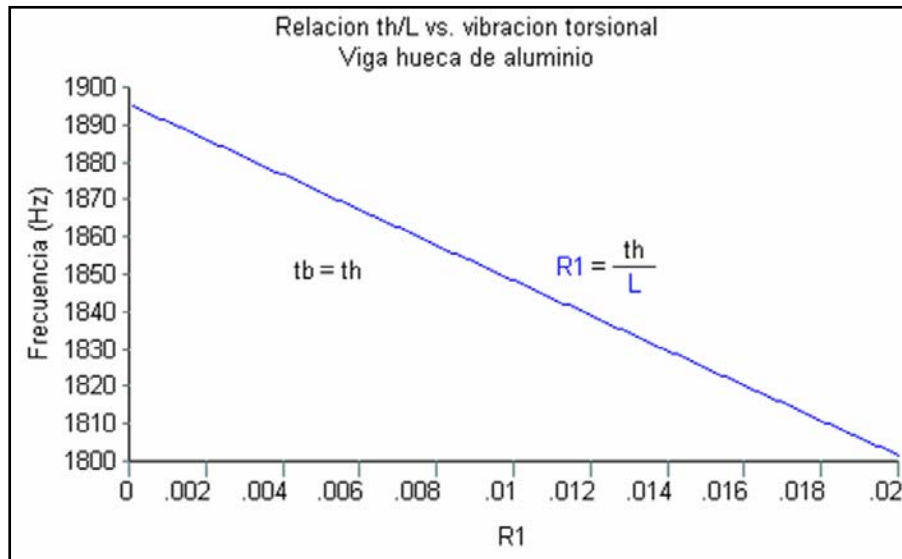
Se grafican los valores para diferentes relaciones del ancho contra la longitud, en donde R201 es el valor de $R2 = 0.1$, R205 es el valor de $R2 = 0.5$, R210 es el valor de $R2 = 1.0$, R220 es el valor de $R2 = 2.0$, R230 es el valor de $R2 = 3.0$ y R240 es el valor de $R2 = 4.0$, se nota que a mayor sea la relación entre el espesor y la longitud, el máximo de la frecuencia aumenta y a cuando empieza a disminuir es menor la razón de cambio, lo que quiere decir que a mayor ancho de la viga, la frecuencia torsional aumenta.

La gráfica 3.17 muestra la influencia del espesor de pared t_h , existe una relación proporcional entre la frecuencia torsional y el espesor t_h .



Gráfica 3.17 Relación th/L vs. frecuencia torsional.

Teniendo en cuenta la influencia de los espesores de pared, se grafica una alternativa donde los espesores de pared sean iguales, estos resultados se muestran en la gráfica 3.18, para este caso en particular se observa que entre mayor sean los espesores de pared, la frecuencia disminuye.

Gráfica 3.18 Espesores de Pared $tb = th$ vs. Frecuencia torsional

Capítulo 4 Modelo de la caja de velocidades en PATRAN NASTRAN

En este capítulo se describe el método para importar el modelo CAD realizado en PROENGINEER al modelo que será analizado en PATRAN-NASTRAN. Además se muestra los pasos a seguir para realizar un análisis de modos de vibrar.

4.1 Modelación de la caja en paquete CAD

El modelo CAD de la caja se realiza en Proengineer, como variables de la geometría, se tienen: longitud, ancho, alto, espesor de pared, espesor y alto de bridas, como lo muestra la Fig. 4.1. Y espesor, alto y cantidad de costillas tanto laterales como transversales, como lo muestra la Fig. 4.2.

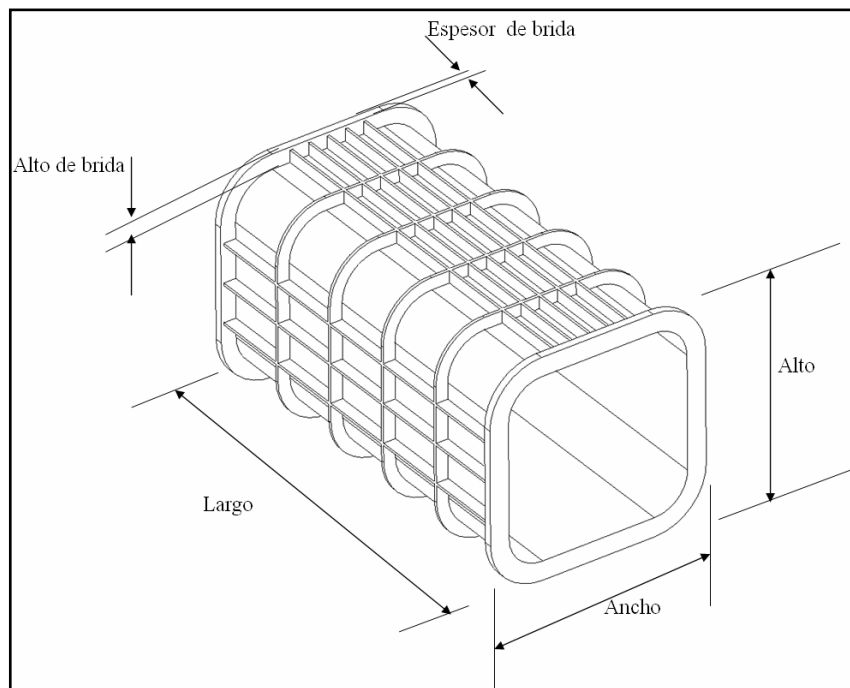


Figura 4.1 Modelo CAD de la caja de velocidades, donde se muestra largo, ancho, alto, espesor y alto de bridas

Este modelo se encuentra parametrizado, ya que si se requiere una cantidad de costillas ya sean laterales o longitudinales, automáticamente se colocan simétricamente a lo largo o ancho de la caja.

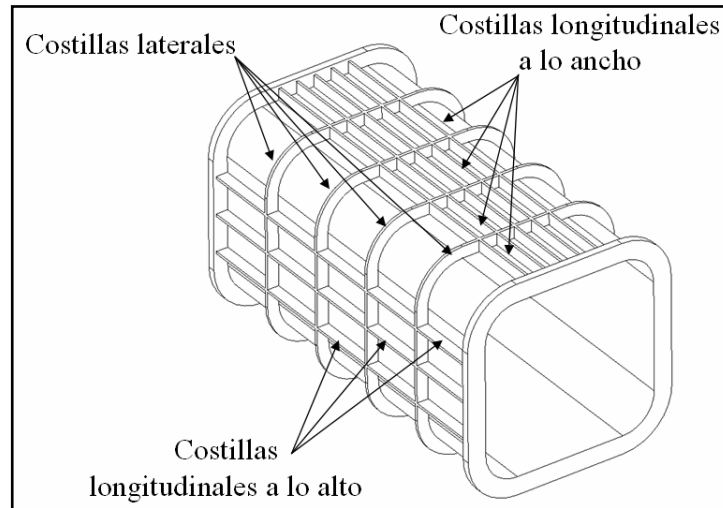


Figura 4.2 Modelo CAD de la caja de velocidades donde se muestra la cantidad de costillas laterales y longitudinales a lo ancho y a lo alto.

4.2 Método para exportar modelos en CAD a PATRAN

Una vez que se tiene generado el modelo CAD, es necesario exportarlo a PATRAN, para ello existen varios métodos, el utilizado en este caso es mediante grabar el modelo como una geometría IGES, los pasos para importar la geometría mediante éste método son:

- 1.- Grabar modelo CAD como geometría IGES
- 2.- Generar un nuevo modelo en PATRAN
- 3.- Importar Geometría en PATRAN

1.- Grabar modelo CAD como geometría IGES: En la mayoría de los paquetes CAD existe la opción de exportar geometrías mediante IGES. En Proengineer, la forma de hacerlo es mediante grabar una copia (save as), y seleccionar la opción IGES, Proengineer provee la opción de grabar IGES como sólidos o como superficies, es preferible hacerlo como superficies ya que si se graba como sólidos en muchas ocasiones se tiene conflictos cuando se importa en PATRAN.

2. Generar un nuevo modelo en PATRAN: PATRAN es un software que genera varios archivos en el directorio de trabajo, estos archivos dependen del tipo de análisis que se vaya a generar. Por omisión toma como directorio de trabajo la carpeta donde se encuentra instalado. Generalmente se requiere tener un directorio de trabajo diferente, la forma de cambiar de directorio de trabajo es:

- a) Generar la carpeta que deseamos como directorio.
- b) Correr PATRAN desde la carpeta creada en MS DOS. Por ejemplo, si tenemos la carpeta <<ejercicio>> en el disco duro C, la forma de correr PATRAN es:

```
C:\ejercicio>patran
```

- c) En PATRAN crear un archivo nuevo, desde File – New ó CTRL + N, y escribir el nombre del archivo.

3.- Importar Geometría en PATRAN: Una vez que se tiene generado el archivo, el siguiente paso es importar la geometría. En File, seleccionar la opción Import..., se despliega una ventana con varias opciones de importación, como lo muestra la Fig. 4.3, escoger la opción IGES, y seleccionar el archivo generado desde el archivo CAD, cabe mencionar que este archivo no es necesario que este en el directorio de trabajo.

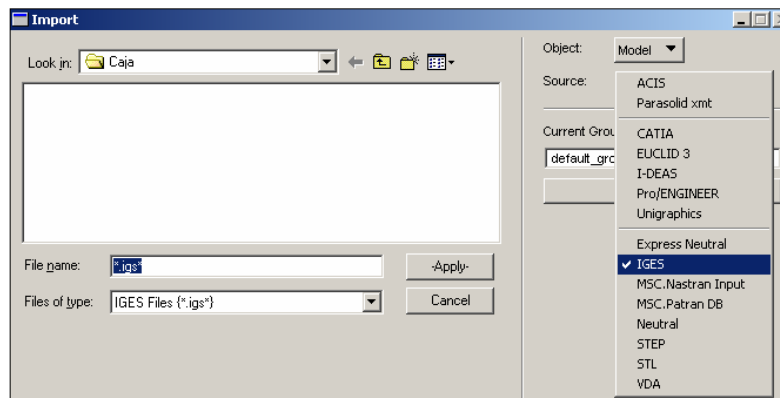


Figura 4.3 Ventana de importación.

Una vez seleccionado el archivo, se presenta una ventana con la información del archivo que se importó, entonces seleccionar OK. Ya que se tiene la geometría, esta se encuentra como superficies, y para el análisis, se requiere tener el modelo como sólido. Para convertir las superficies a sólidos se selecciona la barra de herramientas Geometry, y en

el lado derecho se despliega una barra de menús, y ahí debemos escoger las opciones como se muestran en la Fig. 4.4

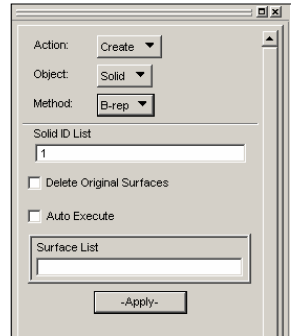


Figura 4.4. Barra de menús, para selección de método de conversión de superficies a sólidos.

Después se deben seleccionar las superficies a convertir, y seleccionar Apply.

Y con esto, se tiene una geometría sólida, que después podrá ser analizada. Fig. 4.5.

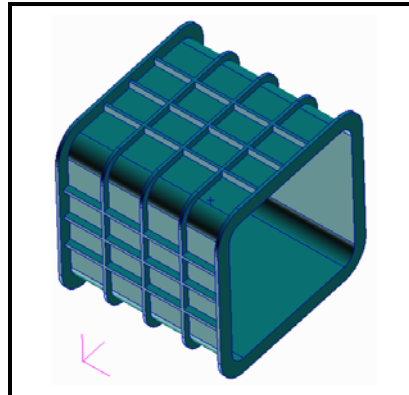


Figura 4.5 Modelo de caja en PATRAN

4.3 Parámetros para resolver el modelo en PATRAN NASTRAN

Una vez que se tiene el modelo como sólido en PATRAN, se procede a prepararlo para su análisis en NASTRAN, los pasos son:

1. Crear malla.
2. Definir material(es)
3. Definir propiedad(es).

4. Definir condiciones de frontera.
5. Definir casos de carga.

1. Crear malla: Existen dos métodos para crear mallas: a) Malla automática y b) Malla mapeada. La malla automática es utilizada cuando la geometría ya existe en un sistema CAD y ésta se puede transferir a PATRAN como un sólido. La malla mapeada se utiliza cuando la geometría no se puede transferir como sólido, o bien, se logra la geometría sólida pero no se puede realizar la malla automáticamente, esto debido a la complejidad de la geometría.

En este caso se utilizó el primer método, esto debido a que ya se tiene el modelo CAD. Para generar la malla, en PATRAN se selecciona la barra de herramientas Elements, automáticamente se despliega una barra donde se indica el tipo de elementos que se va a utilizar, para este caso se utilizan elementos Tet 10. Las condiciones para utilizar estos elementos son las que se indican en la Fig. 4.6.

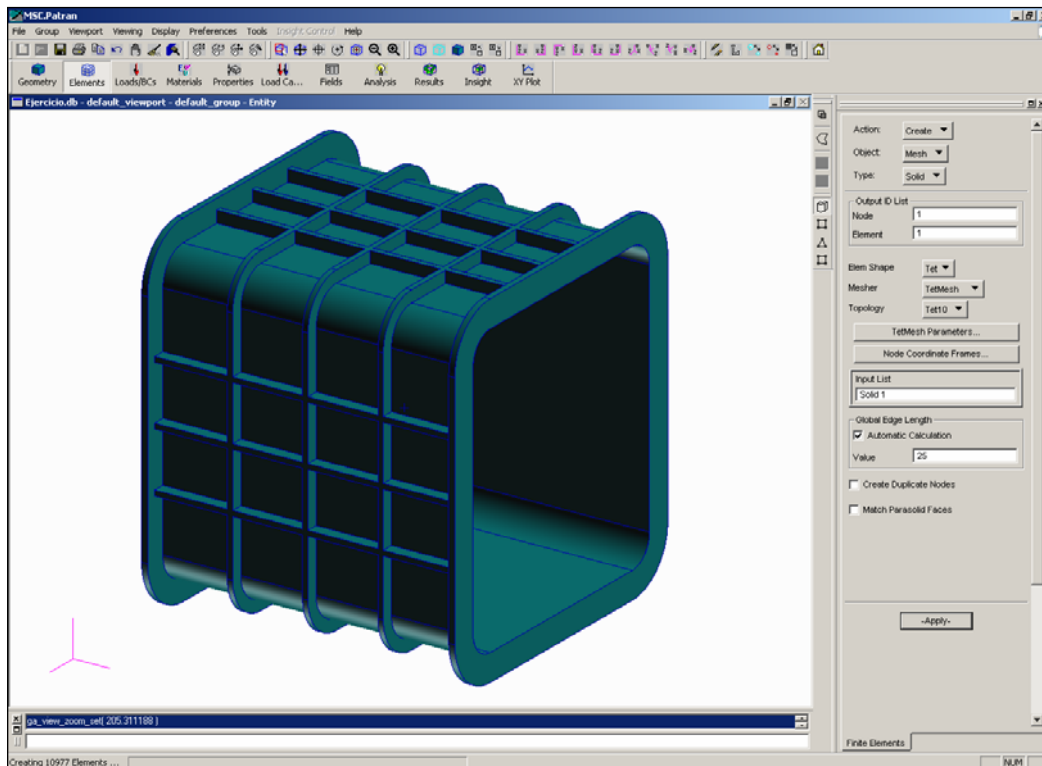


Figura 4.6 Condiciones para crear malla.

2. Definir material(es): Para un análisis de modos de vibrar es necesario generar propiedades mecánicas del material a utilizar, estas propiedades mecánicas deben ser: Modulo de Elasticidad, Densidad y Relación de Poisson. Para ello en PATRAN, hay que generar los materiales, se selecciona la barra de herramientas Materials, automáticamente se despliega una barra donde los datos serán introducidos, como se muestra en la Fig. 4.7.

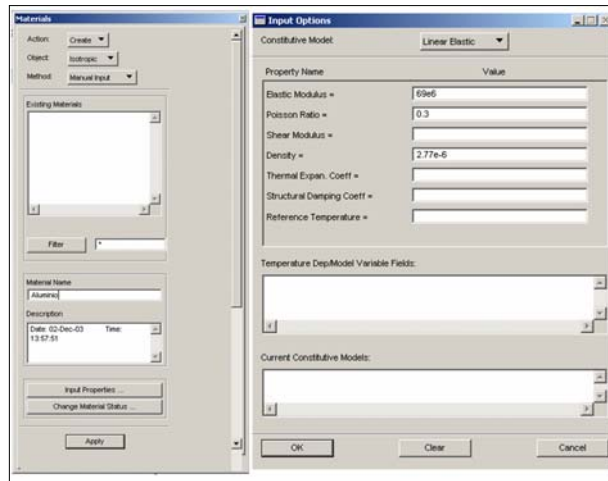


Figura 4.7 Campos a llenar para introducir propiedades de materiales.

3. Definir propiedad(es): Una vez que se tienen seleccionados los materiales, estas propiedades deberán ser asignadas a los elementos que se crearon en la malla, es decir se pueden asignar diferentes propiedades a un modelo. Para asignar las propiedades se selecciona la barra de herramientas Properties, automáticamente se despliega una barra de menús, donde se escogen las condiciones de las propiedades a asignar, en este caso y debido al modelo se asignaran propiedades a los elementos Tet 10, para ello se escogen las condiciones como se muestran en la Fig. 4.8.

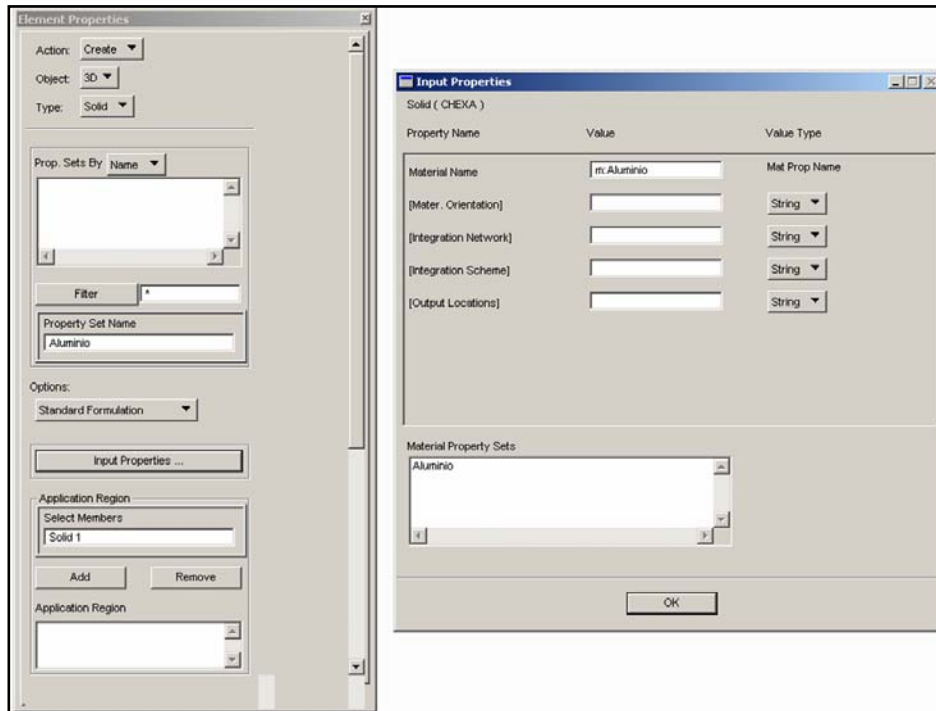


Figura 4.8 Condiciones para asignar propiedades de materiales.

4. Definir condiciones de frontera: Una vez que se han asignado las propiedades y se ha generado una malla, se asignan las condiciones de frontera, estas pueden ser aplicables para empotramientos o para asignar condiciones de vibración de Bending, Longitudinal o Torsional. Se selecciona la barra de herramientas Loads/BCs (Cargas y condiciones de frontera), automáticamente se despliega otra barra de menús, que es donde se introduce el nombre de la carga o condiciones de frontera, las condiciones aplicables a este caso y los nodos a aplicar. El procedimiento para un empotramiento rígido, que no permita a los nodos ningún tipo de movimiento es: Crear un desplazamiento del tipo Nodal, los datos para traslación son $\langle 0., 0., 0. \rangle$, que indican cero desplazamiento en los ejes x , y y z . Para la rotación se tiene el mismo caso, es decir $\langle 0., 0., 0. \rangle$, que indica 0 rotación en los ejes x , y y z Fig. 4.9.

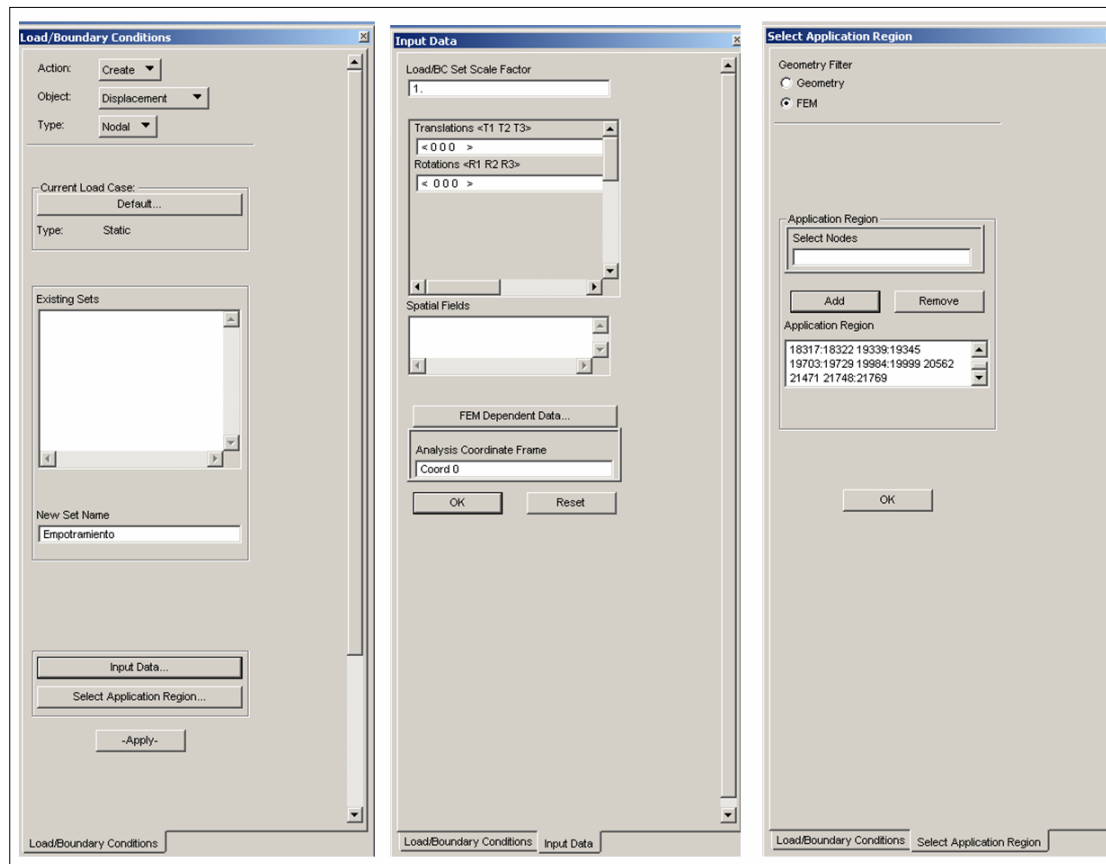


Figura 4.9 Parámetros para condiciones de carga (empotramiento).

Para las condiciones Bending, Longitudinal y Torsional, se toman como referencia unidades cartesianas x y z , y se designa en dirección “ z ” al ancho, en dirección “ y ” a la altura y en dirección “ x ” a la longitud de la caja, esto para asignar las condiciones ya mencionadas, para vibración de Bending, se restringe que solo tenga desplazamiento en y es decir a lo alto de la viga, se asignar propiedades axisimetricas, en Traslación $\langle 0, \quad, 0 \rangle$ y para rotación $\langle \quad, 0, \quad \rangle$, lo que significa que solo se permite traslación en la dirección y es decir cero desplazamiento en x y z , y por lo tanto rotación cero en el eje y y rotación libre en los ejes x y z . Para la vibración Longitudinal se aplican las condiciones de traslación $\langle \quad, 0, 0 \rangle$ y rotación $\langle 0, \quad, \quad \rangle$, lo que significa traslación libre en la dirección x y cero traslación en las direcciones y y z y por lo tanto cero rotación en el eje x , y rotación libre en los ejes y y z . Para la vibración torsional se tiene para traslación $\langle 0, \quad, \quad \rangle$ y rotación $\langle \quad, 0, 0 \rangle$, lo que significa traslación cero en el eje x y traslación libre en los ejes y y z , y rotación libre en el eje x y cero rotación en los ejes y y z .

Definir casos de carga. En PATRAN se pueden analizar al mismo tiempo varias condiciones, ya sea de frontera o de carga, en este caso se puede hacer un solo análisis para vibración de Bending, Longitudinal y Torsional. Se selecciona la barra de herramientas Load Cases, automáticamente se despliega una barra de menús, como se muestra en la Fig. 4.10. Y se seleccionan los casos de carga (Load/Bcs) que se requieran para este caso.

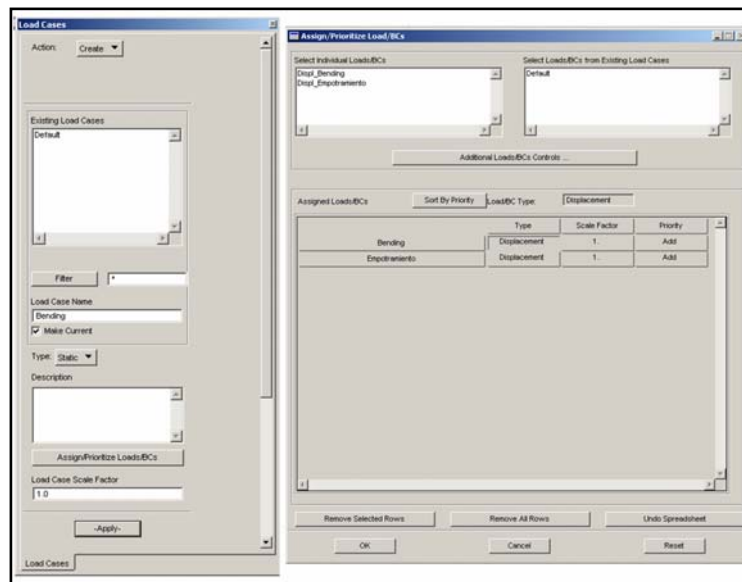


Figura 4.10 Casos de Carga y condiciones.

4.4 Análisis del modelo en NASTRAN: Una vez que se tiene el modelo, con elementos, materiales, propiedades y condiciones de carga, ya puede ser analizado, se selecciona la barra de menús Analysis, automáticamente se despliega una barra de menús donde se seleccionan las condiciones para analizar los modos de vibrar.

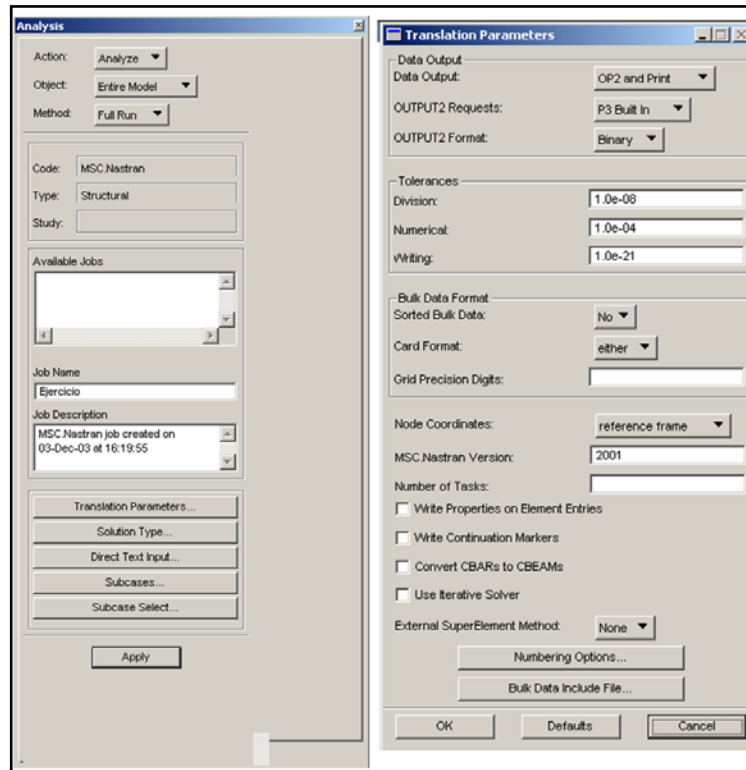


Figura 4.11 Condiciones para realizar análisis.

Se tienen que seleccionar varios campos los cuales deberán ser llenados como lo indican las Fig. 4.11 y 4.12. En la Fig. 4.11 para el campo Translation Parameters... los datos importantes a seleccionar son la salida (Data Output), que se selecciona OP2, y en caso de tener una versión diferente de NASTRAN, también se cambia en el campo MSC Nastran Versión, el tipo de solución (Solution Type), se refiere al tipo de análisis que se va a realizar, en este caso es de modos normales (NORMAL MODES), Fig. 4.12, y finalmente se seleccionan los casos a analizar.

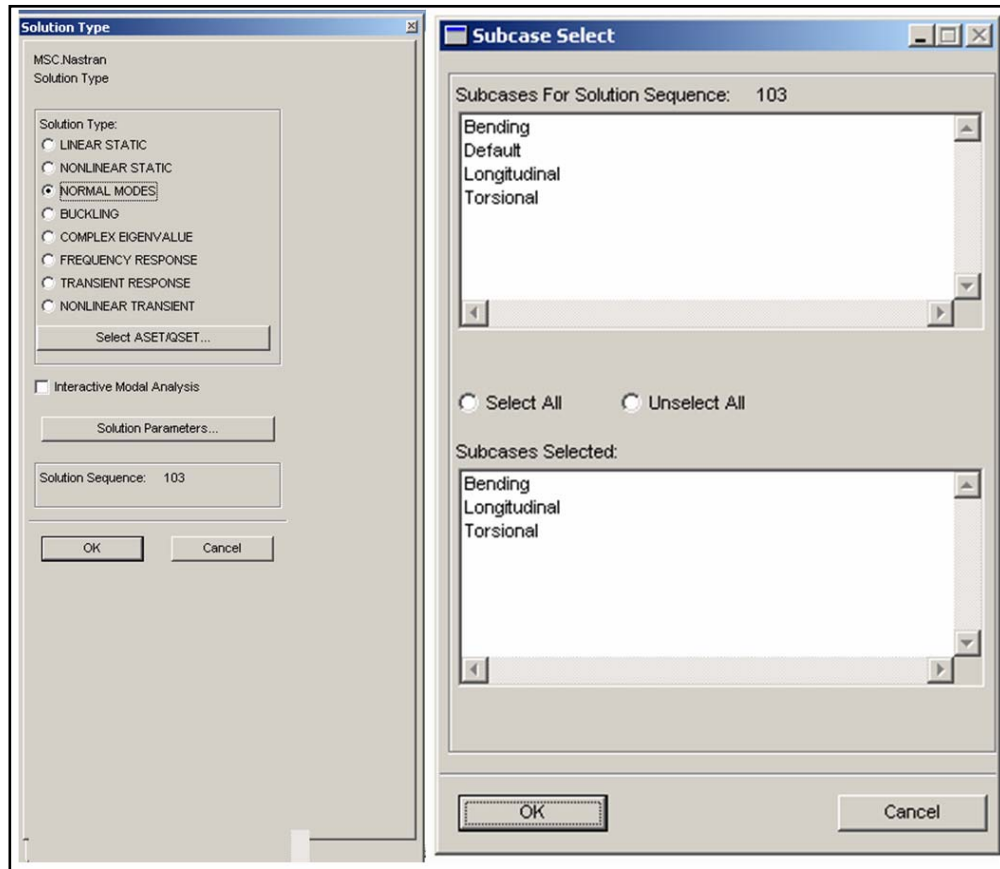


Figura 4.12 Condiciones para realizar análisis.

4.5 Lectura de resultados en PATRAN: una vez que se ha resuelto el modelo en NASTRAN, el siguiente paso es analizar los resultados, estos los tenemos que importar del archivo de salida que genero NASTRAN (.OP2), en la barra de menús Analysis, y en el campo action se selecciona Acces Results y después se selecciona el campo Select Results File, como se muestra en la Fig. 4.13. Ya que se ha leído el archivo de resultados se activa la barra Results, y se selecciona el numero del modo que se quiere visualizar, como lo muestra la Fig. 4.14

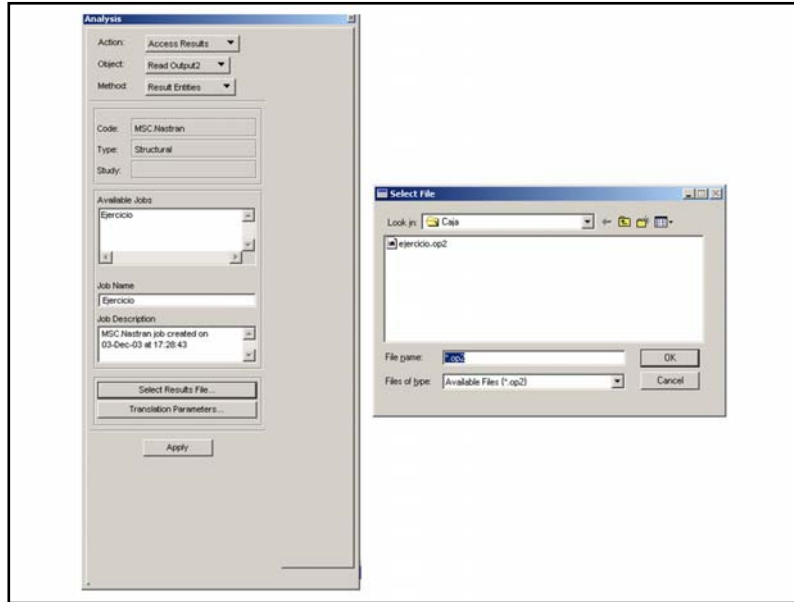


Figura 4.13 Acceso a archivo de resultados

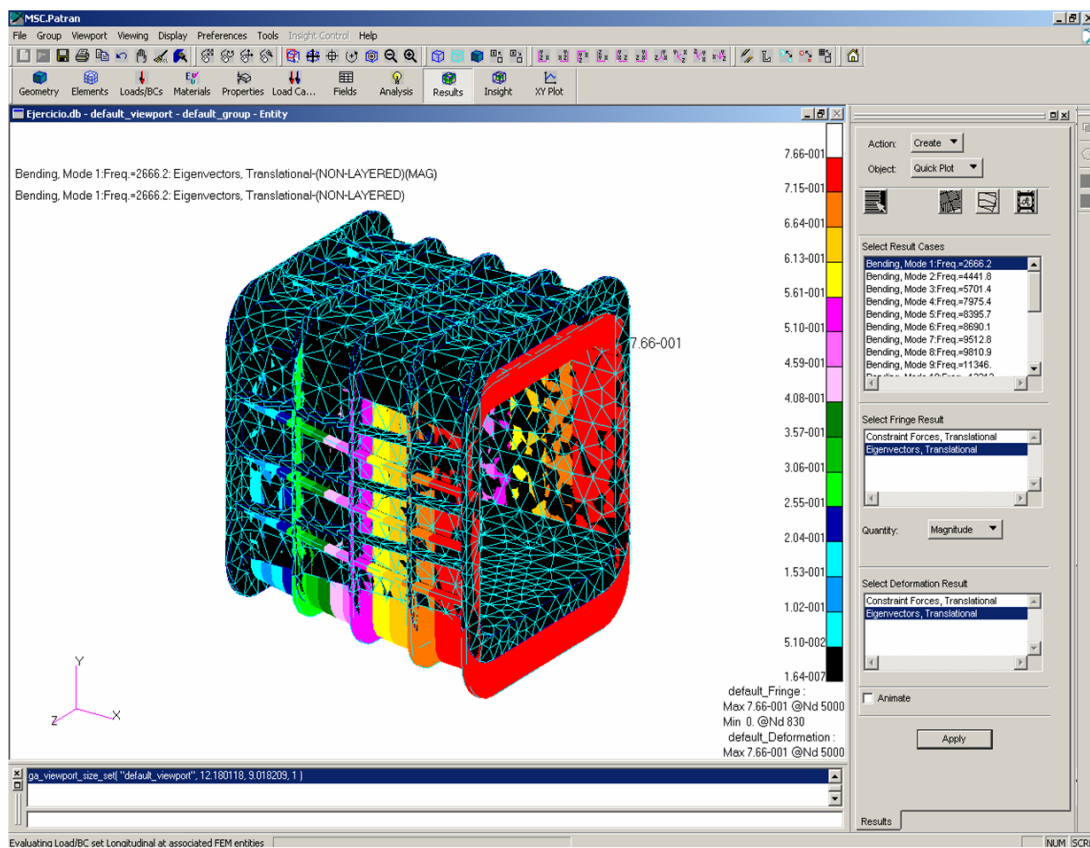


Figura 4.14 Resultados del modo de vibrar de Bending

4.6 Análisis previos del modelo de la caja en PATRAN

Se realiza un análisis preliminar de la viga empotrada en un extremo, para las condiciones de bending, este análisis se realiza dividiendo la viga en partes, es decir, analizar las paredes por separado.

Esta se torna interesante porque se nota que para esta vibración la influencia de las paredes a lo alto es mucho mayor que la influencia de las paredes superior e inferior.

Esto quiere decir que si se aumenta la rigidez en las paredes laterales, la influencia en la frecuencia se reflejara mucho más. Por lo tanto es preferible aumentar la rigidez en estas partes de la caja. Es importante mencionar que esto es solo un análisis preliminar, por lo que no se puede generalizar.

Capítulo 5 Diseño de experimentos

5.1 Identificar variables del diseño de experimentos:

De acuerdo a las variables que se analizaron en el capítulo anterior, se realiza un diseño de experimentos que permita identificar las que son significativas en el primer modo de vibrar de la caja, este diseño se realiza para vibración de bending, longitudinal y torsional, las variables están relacionadas entre si tomando como base la longitud, esto con el fin de obtener resultados generales y que no estén en un rango determinado de dimensiones. La tabla 5.1 Muestra las variables y las relaciones entre ellas, se muestra el límite inferior y el límite superior de las relaciones, además se consideran 3 tipos de costillas.

Relaciones y Factores	Límite Inferior	Límite Superior
Largo / Alto de la caja	1	2
Largo / Ancho de la caja	1	2
Largo / Radio	10	30
Largo / Espesor de la caja	100	150
Largo/ Alto de la brida	15	20
Largo / Espesor de brida	30	50
Número de Costillas Longitudinales en lo alto de la Caja	0	3
Número de Costillas Longitudinales en lo ancho de la Caja	0	5
Número de Costillas Laterales	0	4

Tabla 5.1 Relaciones y Factores para primer diseño de experimentos.

Se toma como base un largo de la caja de 500 mm y costillas estándar de 16 mm de alto y 4 mm de espesor. Esto considerando como base las dimensiones generales de la caja de velocidades TR3650 de TREMEC.

5.2 Determinación del tipo de diseño de experimentos

Para el primero se realiza un diseño de experimentos del tipo $2^{(9-4)}$, con la finalidad de generar solo 32 corridas, este Diseño se realiza en MINITAB versión 14.

Corrida	Largo / Alto	Largo / Ancho	Largo / Radio	Largo / Espesor	Largo / Alto Brida	Largo / Espesor Brida	Numero de Costillas Long Alto	Numero de Costillas Long Ancho	Numero de Costillas Laterales
1	1	1	10	100	15	30	0	0	4
2	2	1	10	100	20	30	3	5	0
3	1	2	10	100	20	50	0	5	0
4	2	2	10	100	15	50	3	0	4
5	1	1	30	100	20	50	3	0	0
6	2	1	30	100	15	50	0	5	4
7	1	2	30	100	15	30	3	5	4
8	2	2	30	100	20	30	0	0	0
9	1	1	10	150	15	50	3	5	0
10	2	1	10	150	20	50	0	0	4
11	1	2	10	150	20	30	3	0	4
12	2	2	10	150	15	30	0	5	0
13	1	1	30	150	20	30	0	5	4
14	2	1	30	150	15	30	3	0	0
15	1	2	30	150	15	50	0	0	0
16	2	2	30	150	20	50	3	5	4
17	1	1	10	100	15	30	0	0	0
18	2	1	10	100	20	30	3	5	4
19	1	2	10	100	20	50	0	5	4
20	2	2	10	100	15	50	3	0	0
21	1	1	30	100	20	50	3	0	4
22	2	1	30	100	15	50	0	5	0
23	1	2	30	100	15	30	3	5	0
24	2	2	30	100	20	30	0	0	4
25	1	1	10	150	15	50	3	5	4
26	2	1	10	150	20	50	0	0	0
27	1	2	10	150	20	30	3	0	0
28	2	2	10	150	15	30	0	5	4
29	1	1	30	150	20	30	0	5	0
30	2	1	30	150	15	30	3	0	4
31	1	2	30	150	15	50	0	0	4
32	2	2	30	150	20	50	3	5	0

Tabla 5.2 Corridas para diseño de experimentos.

El diseño que se genera se muestra en la Tabla 5.2 el cual es generado solo para vibración de bending.

5.3 Diseño de experimentos en PATRAN NASTRAN vibración de Bending

Se realizan los análisis en PATRAN y se resuelven en NASTRAN, se generan los archivos IGES en PROENGINEER y se importan a PATRAN, se aplican condiciones de Bending para analizar el primer modo de vibrar, la Tabla 5.3, muestra los resultados de las 32 corridas, los resultados de la frecuencia están en Hz. El material que se considera para el análisis es Aluminio ($E = 69,000 \frac{N}{mm^2}$, $\delta = 2.77 \times 10^{-6} \frac{Kg}{mm^3}$, $\nu = 0.3$)

Corrida	Frecuencia de Bending	Corrida	Frecuencia de Bending	Corrida	Frecuencia de Bending	Corrida	Frecuencia de Bending
1	1219	9	1308	17	1251	25	1263
2	1332	10	1277	18	1299	26	1334
3	1402	11	1205	19	1357	27	1245
4	1317	12	1195	20	1355	28	1164
5	1398	13	1209	21	1352	29	1251
6	1322	14	1172	22	1361	30	1139
7	1245	15	1275	23	1275	31	1223
8	1305	16	1325	24	1265	32	1373

Tabla 5.3 Resultados obtenidos para vibración de Bending

La Fig. 5.1 muestra la grafica de Pareto con los principales efectos de las variables, el cual muestra que los principales factores que influyen es la relación entre largo y espesor de brida, largo y espesor de la caja tanto en paredes laterales como paredes superior e inferior, largo y alto de la brida, numero de costillas laterales, numero de costillas longitudinales a lo ancho y numero de costillas longitudinales a lo alto.

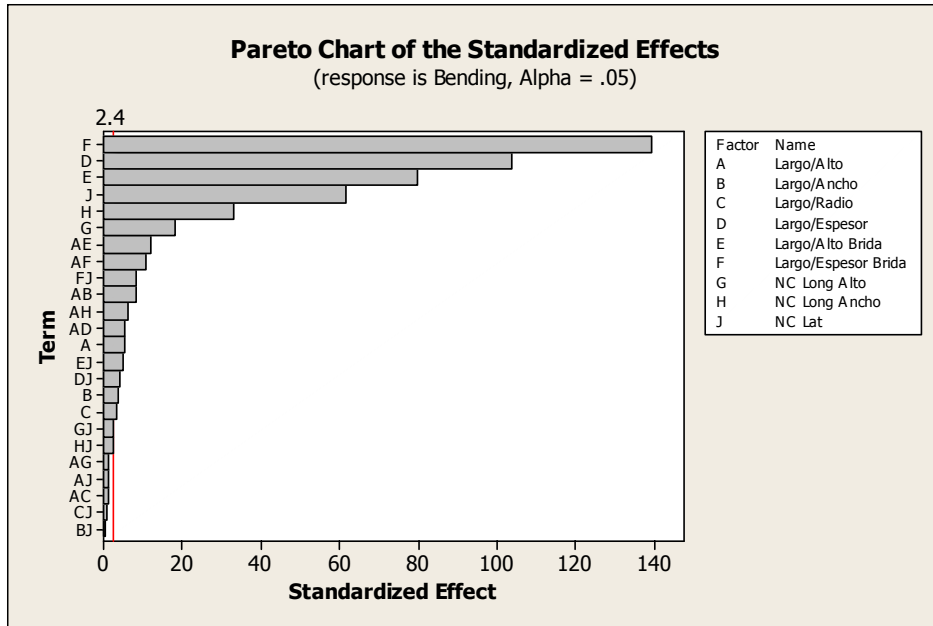


Figura 5.1 Gráfica de Pareto de efectos

La Fig. 5.2 muestra la grafica de probabilidad normal de los efectos, la cual muestra los mismos resultados que la Fig. 5.1.

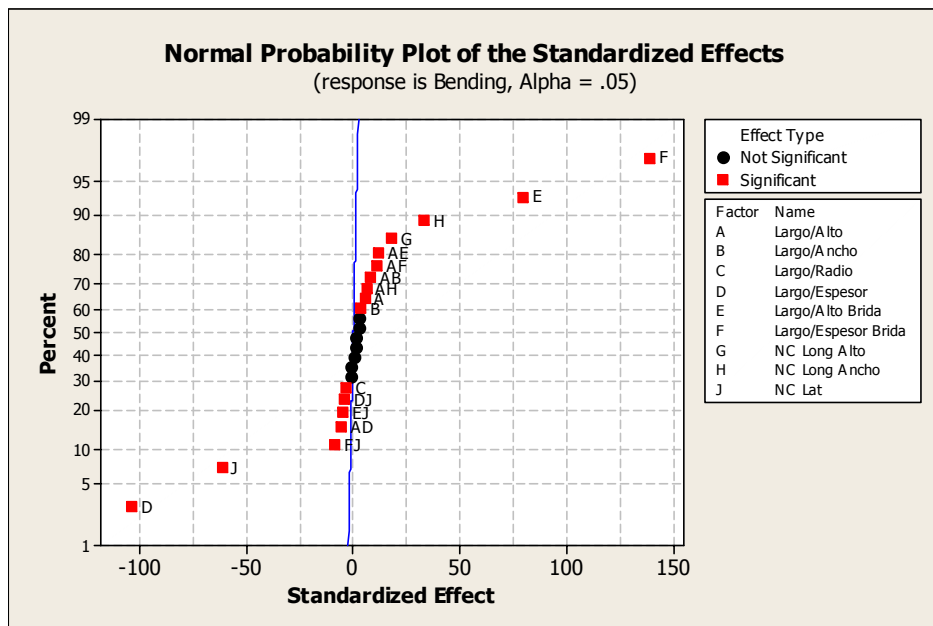


Figura 5.2 Gráfica de probabilidad normal de efectos.

En la Fig. 5.3 se muestra la grafica de la interacción entre todas las variables, la cual muestra la combinación de todas las variables y su efecto en la frecuencia del primer modo de vibrar.

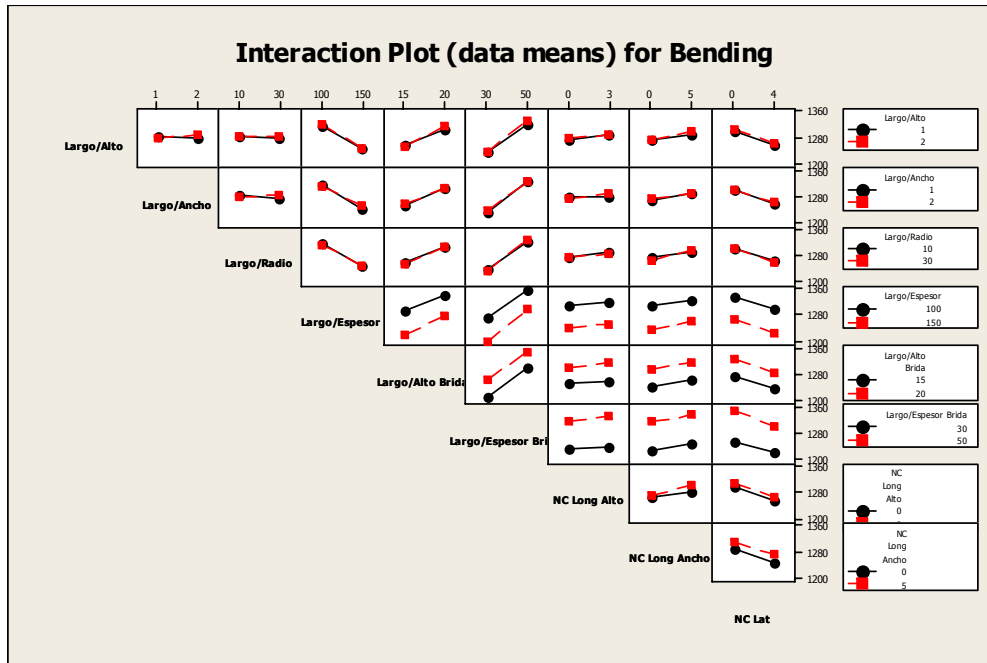


Figura 5.3 Gráfica de la interacción de los efectos para cada relación.

Finalmente se muestra en la Fig. 5.4 los efectos principales y la influencia de estos en la frecuencia del primer modo de vibrar, esta gráfica muestra que en la relación del largo y espesor, es mejor si se tiene una relación pequeña, es decir que el espesor de la caja sea mayor. En la relación largo alto de la brida, se prefiere que la relación sea mayor, lo que quiere decir que el alto de la brida sea pequeño; lo mismo sucede con la relación largo y espesor de brida, que entre menor sea el alto es preferible. El número de costillas longitudinales a lo alto, no tiene gran impacto en el modo de vibrar, aunque el resultado muestra que si es preferible tener un numero mayor de costillas longitudinales a lo alto. Las costillas longitudinales a lo ancho tienen un poco más de efecto en la frecuencia, y es preferible tenerlas, ya que se tiene un valor mayor con el efecto de estas. Y finalmente el número de costillas laterales también es muy significativo, solo que en este caso, es preferible no tenerlas, ya que a mayor número de costillas la frecuencia disminuye considerablemente.

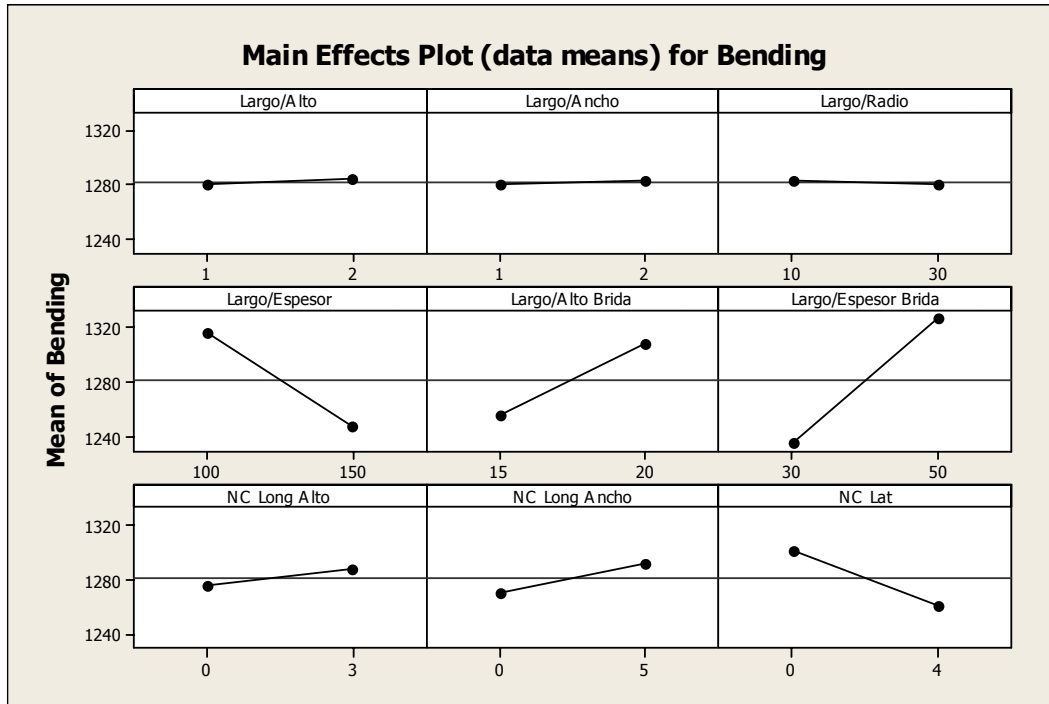


Figura 5.4 Efectos Principales para vibración de Bending.

En base los resultados obtenidos se realiza una optimización para obtener las dimensiones de la caja que aumenten la frecuencia del primer modo de vibrar. Lo que se busca es maximizar la frecuencia del primer modo, en MINITAB, se realiza esta optimización esperando valores máximos en un rango de 1300 y 1500 Hz. La Fig. 5.5 muestra los resultados para estas condiciones, la cual muestra que el máximo de frecuencia que se puede alcanzar es de 1443 Hz. Si se considera el peor caso que es la corrida numero 30 con una frecuencia de 1139 Hz y el mejor caso que es la corrida numero 3 con una frecuencia de 1402 Hz., se muestra que con las condiciones optimas se puede aumentar la frecuencia desde un 3% hasta un 21%.

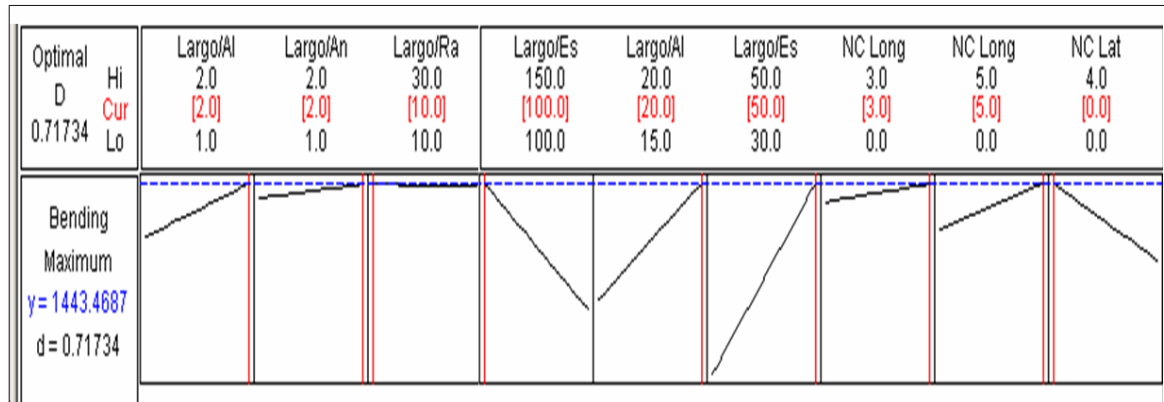


Figura 5.5 Gráfica de resultados para optimización.

Con estos resultados se realiza el análisis del primer modo de vibrar de bending, y considerando el largo estándar de 500 mm, las dimensiones de la caja serán: largo 500 mm, alto 250 mm, ancho 250 mm, radio 50 mm, espesor de la caja 5 mm, alto de la brida 25 mm, espesor de la brida 10 mm, el numero de costillas longitudinales a lo alto 3, numero de costillas longitudinales a lo ancho 5, y cero costillas laterales, con estas condiciones se espera que la frecuencia que se obtenga sea de 1443 Hz. La Fig. 5.6 muestra el resultado en PATRAN para el primer modo de vibrar de bending el cual es de 1413 Hz., en comparación con 1443 pronosticado por MINITAB, lo que significa un 2 % de variación.

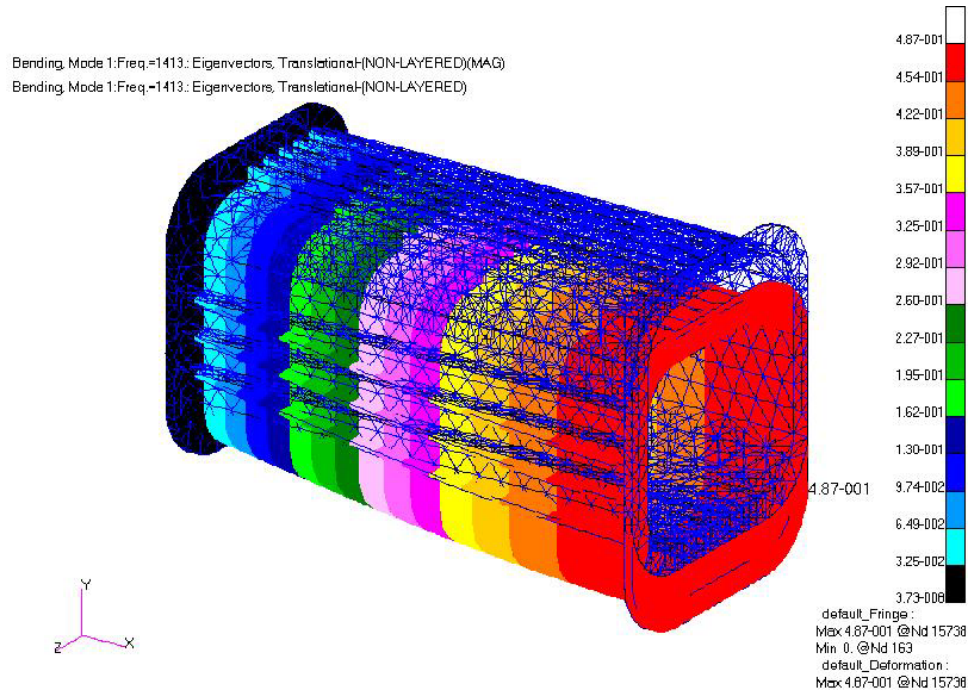


Figura 5.6 Primer modo de vibrar de Bending

5.4 Diseño de experimentos en PATRAN NASTRAN para vibración longitudinal

Para verificar los efectos de los parámetros en la vibración longitudinal se pretende realizar un segundo diseño de experimentos, para ello se consideró el mismo tipo de diseño, es decir se realizan las mismas condiciones y las variantes ahora solo son las condiciones para vibración longitudinal. Se realizan las corridas y se nota que existe una relación directamente proporcional en los valores, la Tabla 5.4 muestra los valores para las 32 corridas, muestra los valores para vibración de Bending, vibración Longitudinal y relación entre ellos, la relación es una simple división entre ellas. Se divide el valor de la longitudinal entre el valor de la frecuencia de bending, estos resultados se muestran interesantes ya que existe una variación pequeña en la relación.

Modo	Frecuencia de Bending	Frecuencia Longitudinal	Relación	Modo	Frecuencia de Bending	Frecuencia Longitudinal	Relación
1	1219	2259	1.853	17	1251	2324	1.858
2	1332	2477	1.860	18	1299	2410	1.855
3	1402	2614	1.864	19	1357	2525	1.861
4	1317	2446	1.857	20	1355	2524	1.863
5	1398	2604	1.863	21	1352	2512	1.858
6	1322	2455	1.857	22	1361	2535	1.863
7	1245	2311	1.856	23	1275	2371	1.860
8	1305	2427	1.860	24	1265	2346	1.855
9	1308	2436	1.862	25	1263	2343	1.855
10	1277	2365	1.852	26	1334	2483	1.861
11	1205	2233	1.853	27	1245	2318	1.862
12	1195	2220	1.858	28	1164	2156	1.852
13	1209	2239	1.852	29	1251	2326	1.859
14	1172	2177	1.858	30	1139	2106	1.849
15	1275	2373	1.861	31	1223	2269	1.855
16	1325	2461	1.857	32	1373	2558	1.863

Tabla 5.4 Resultados para vibración de bending y longitudinal

Esto muestra que si se optimiza la caja para vibración de bending, como existe una relación directamente proporcional, también se optimiza la caja para vibración longitudinal, para demostrar esto se realiza el análisis para vibración longitudinal, teniendo en cuenta un factor promedio de 1.858, y tomando el valor óptimo esperado para vibración de bending que es de 1443 Hz. se espera una frecuencia del primer modo de vibrar longitudinal de 2681 Hz. Se realiza el análisis en PATRAN NASTRAN con las mismas dimensiones que en la optimización de vibración de bending. La Fig. 5.7 muestra estos resultados. El resultado que se obtiene es de 2633 Hz. que comparado con lo pronosticado tiene una variación del 1.7%, por lo que se concluye que si se optimiza para vibración de bending, también se optimiza la vibración longitudinal.

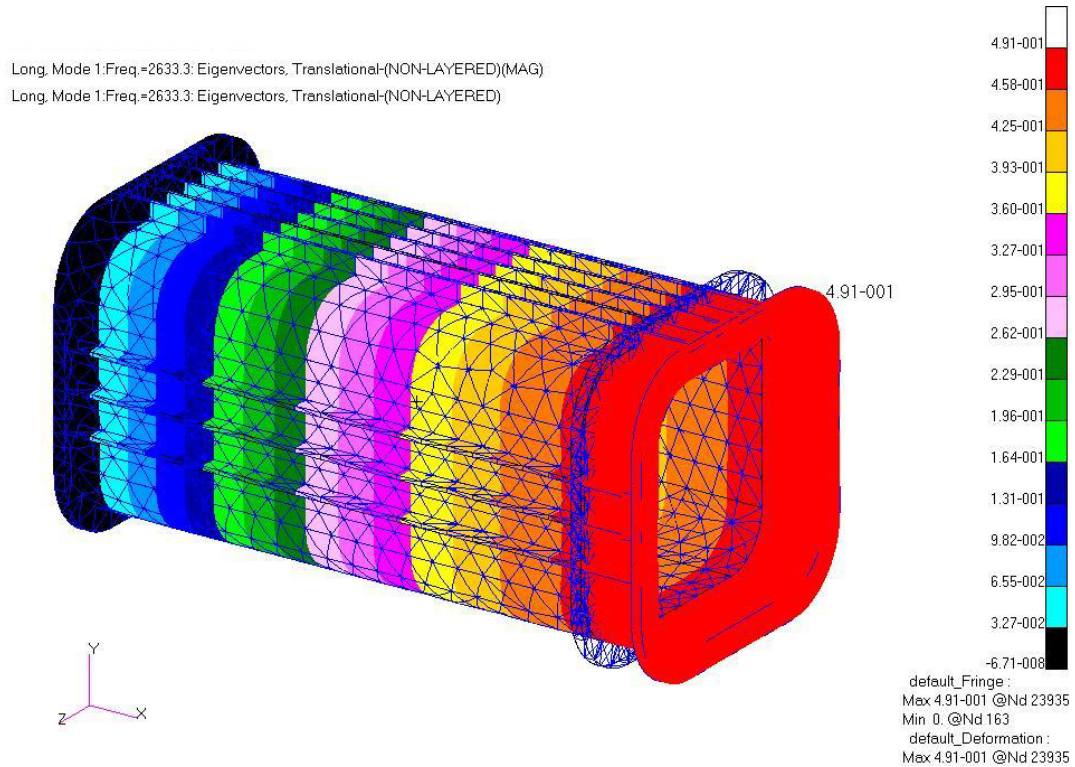


Figura 5.7 Primer modo de vibrar Longitudinal

Se pretende realizar un diseño parecido al de bending, aunque en este caso para vibración torsional, con base en lo obtenido en los casos anteriores se nota que existe también una relación directamente proporcional, al igual que para vibración longitudinal, aunque en este caso, el valor de la relación es diferente, la tabla 5.5, muestra los valores para vibración de bending y vibración torsional y la relación entre ellos, la relación es una simple división entre los valores.

Modo	Frecuencia de Bending	Frecuencia Torsional	Relación	Modo	Frecuencia de Bending	Frecuencia Torsional	Relación
1	1219	1192	0.978	17	1251	1232	0.985
2	1332	1330	0.998	18	1299	1271	0.978
3	1402	1390	0.991	19	1357	1325	0.976
4	1317	1290	0.979	20	1355	1327	0.979
5	1398	1363	0.975	21	1352	1327	0.982
6	1322	1308	0.989	22	1361	1325	0.974
7	1245	1232	0.990	23	1275	1237	0.970
8	1305	1291	0.989	24	1265	1235	0.976
9	1308	1288	0.985	25	1263	1217	0.964
10	1277	1236	0.968	26	1334	1313	0.984
11	1205	1188	0.986	27	1245	1210	0.972
12	1195	1151	0.963	28	1164	1135	0.975
13	1209	1195	0.988	29	1251	1234	0.986
14	1172	1138	0.971	30	1139	1098	0.964
15	1275	1234	0.968	31	1223	1199	0.980
16	1325	1301	0.982	32	1373	1335	0.972

Tabla 5.5 Resultados para vibración de Bending y Torsional

También se optimiza la caja para vibración torsional, para demostrar esto se realiza el análisis, teniendo en cuenta un factor promedio de 0.979, y tomando el valor óptimo esperado para vibración de Bending que es de 1443 Hz. se espera una frecuencia torsional de 1412 Hz. La Fig. 5.8 muestra los resultados para el primer modo de vibrar torsional.

El resultado que se obtiene es de 1393 Hz. que comparado con lo pronosticado de 1412 Hz. tiene una variación del 1.3%, por lo que se concluye que si se optimiza para vibración de Bending, por lo tanto se optimiza para vibración torsional.

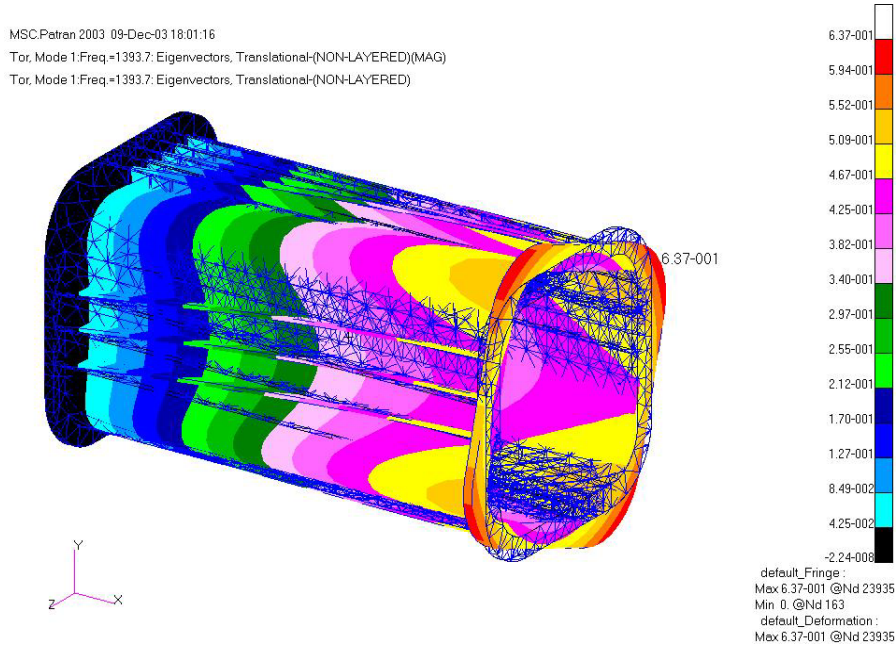


Figura 5.8 Primer modo de vibrar torsional

5.5 Diseño de experimentos en PATRAN NASTRAN para vibración de bending considerando el tamaño de las costillas

Se realiza un diseño de experimentos que permita visualizar el efecto de las dimensiones de las costillas, estos parámetros también se encuentran en función de la longitud, con la finalidad de seguir con la misma relación del primer diseño. Las relaciones para este diseño se muestran en la Tabla 5.6, cabe mencionar que debido a que las costillas laterales tienen un efecto negativo y que es preferible no tenerlas, estas no se consideran en este diseño.

Relaciones y Factores	Limite Inferior	Limite Superior
Largo / Espesor costillas longitudinales a lo alto	80	150
Largo / Espesor costillas longitudinales a lo ancho	80	150
Largo / Alto de costillas longitudinales a lo alto	25	50
Largo / Alto de costillas longitudinales a lo ancho	25	50

Tabla 5.6 Relaciones considerando dimensiones de las costillas

Además de esto se consideran la cantidad de costillas longitudinales en lo alto y en lo ancho, esto con el propósito de tener el mismo modelo para el diseño de experimentos.

Para este caso en particular, se fijan las condiciones óptimas obtenidas en la vibración de Bending, solo se varían las dimensiones de las costillas, se realiza un experimento del tipo 2^{4-1} con la finalidad de generar solo 8 corridas.

El diseño a realizar es el que se muestra en la Tabla 5.7.

Corrida	Largo / Esp. a lo alto	Largo / Esp. a lo ancho	Largo / Alto costillas alto	Largo / Alto costillas ancho
1	80	80	25	25
2	150	80	25	50
3	80	150	25	50
4	150	150	25	25
5	80	80	50	50
6	150	80	50	25
7	80	150	50	25
8	150	150	50	50

Tabla 5.7 Corridas para diseño de experimentos.

Con estas condiciones la tabla 5.8 muestra los resultados obtenidos en PATRAN NASTRAN.

Corrida	Resultado	Corrida	Resultado
1	1428	5	1412
2	1413	6	1420
3	1415	7	1414
4	1414	8	1402

Tabla 5.8 Resultados para diseño segundo de experimentos.

Con estos resultados, se realiza el análisis en MINITAB, la Fig. 5.9 muestra la gráfica de Pareto con los principales efectos de las variables, el cual muestra que ninguno de los factores analizados tienen un efecto significativo para los modos de vibrar. La Fig. 5.10

muestra los efectos principales y la influencia de estos en la frecuencia del primer modo de vibrar, se nota que en todos los casos, es preferible tener una relación pequeña entre el largo y los diferentes parámetros analizados, lo que se traduce a que entre mayor sean el alto y el espesor de las costillas, la frecuencia del primer modo aumenta.

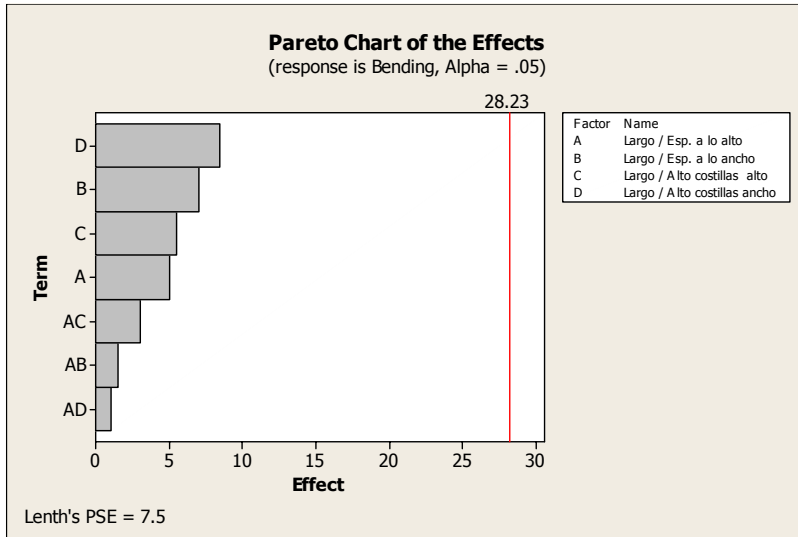


Figura 5.9 Pareto de los efectos.

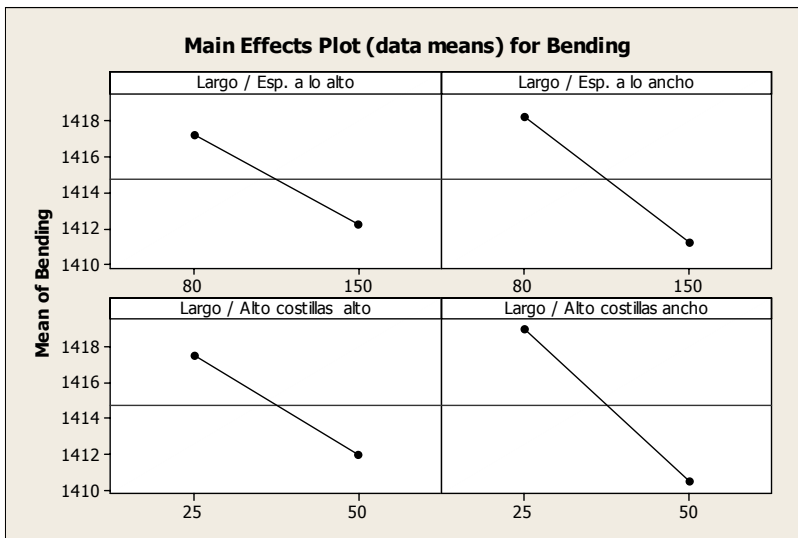


Figura 5.10 Efectos Principales para vibración de Bending.

Analizando estas gráficas, es notable que para aumentar la frecuencia del primer modo es preferible tener relaciones pequeñas entre el largo y los diferentes parámetros, lo que significa que es preferible tener costillas de mayor tamaño, y considerando que si se optimiza para la vibración de bending, también se optimiza para vibración longitudinal y vibración torsional, por lo tanto se concluye que estos valores también son validos para los otros tipos de vibraciones.

Se pretende realizar una optimización de estos valores, solo que en este caso no es posible, ya que la corrida numero 1, es la que tiene las costillas más grandes, y por ende la que dio el resultado más alto en la frecuencia. La Fig. 5.11 muestra los valores propuestos por MINITAB para maximizar la frecuencia.

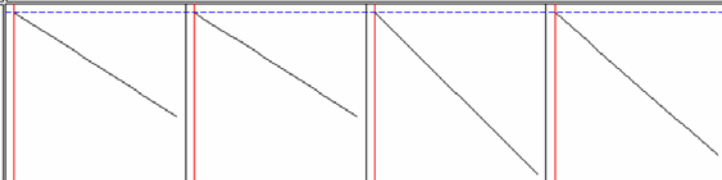
Optimal D 0.28000	Hi Cur Lo	Largo / 150.0 [80.0] 80.0	Largo / 150.0 [80.0] 80.0	Largo / 50.0 [25.0] 25.0	Largo / 50.0 [25.0] 25.0
Bending Maximum $y = 1428.0$ $d = 0.28000$					

Figura 5.11 Valores necesarios para maximizar la frecuencia

La Fig. 5.12, muestra la corrida 1, del análisis realizado para la frecuencia de Bending, la frecuencia mostrada es de 1428 Hz.

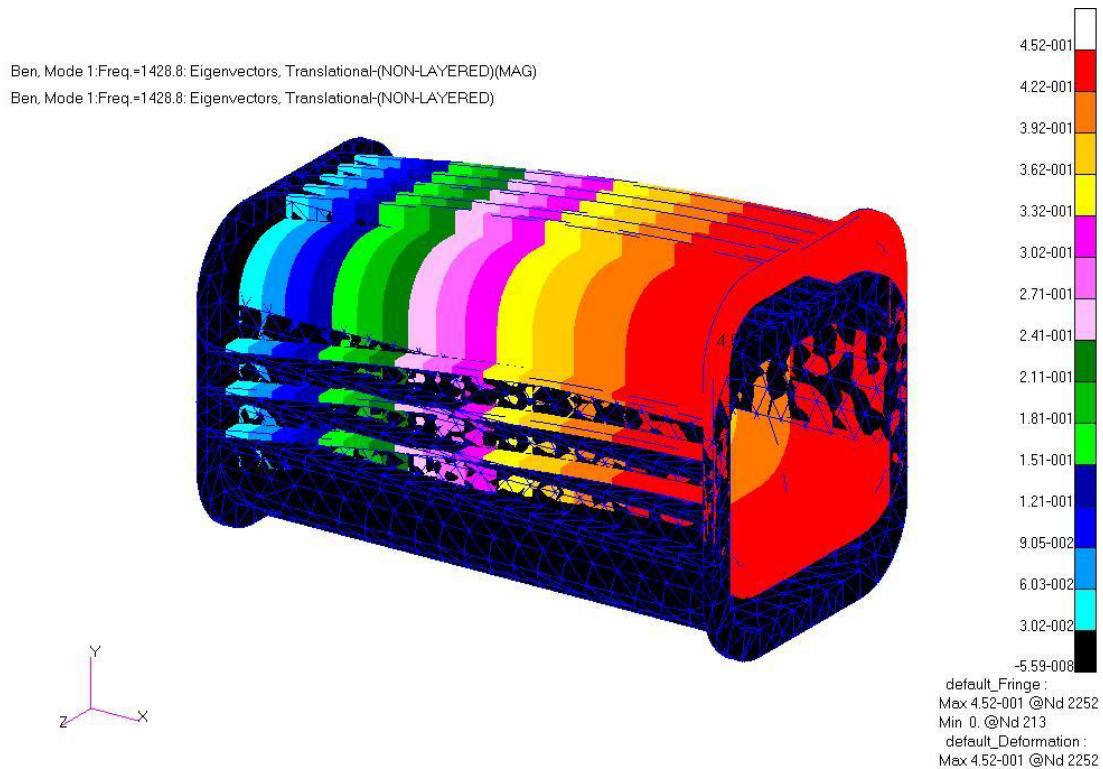


Figura 5.12 Primer modo de vibrar con costillas de dimensiones mayores

Considerando el valor óptimo obtenido en vibración de bending, que es de 1413 Hz. y el valor máximo con costillas que es de 1428 Hz. se nota que el aumento en la frecuencia no es significativo, el aumento es solo del 1.05%, aunque esto ya se había notado en la figura 5.9, se puede decir que la influencia de las costillas es pequeño, aunque aun así, estas ayudan a aumentar la frecuencia, esto es considerando solo la optimización de las costillas, ya que si notamos que la corrida 8 del primer diseño, con una frecuencia de 1305 Hz. que es la de dimensiones semejantes y sin ningún tipo de costillas y esta la comparamos con la frecuencia de 1428 Hz obtenida en la caja optimizada, se nota que las costillas ayudan a aumentar la frecuencia hasta en un 8.6 %.

5.6 Análisis del espesor de la caja.

Debido a que en el diseño de experimentos no se visualiza de manera clara la influencia del espesor de pared, se realizan análisis específicos donde solo se varía éste, para este análisis se consideran las siguientes dimensiones: largo 500 mm, alto 250 mm,

ancho 250 mm, radio 50 mm, alto de la brida 25 mm, espesor de la brida 10 mm, el numero de costillas longitudinales a lo alto 3, numero de costillas longitudinales a lo ancho 5, y cero costillas laterales, se varia el espesor del material, considerando que en estas dimensiones y un espesor de 5 mm, como el de la figura 5.6 que fue de 1413, se varia el espesor para 3 mm, 8 y 10 mm, la tabla 5.9 muestra los resultados.

Espesor en mm	Frecuencia en Hz
3	1363
5	1413
8	1434
10	1447

Tabla 5.9 Resultados para diferentes espesores de pared de la caja.

La figura 5.13 muestra el resultado para la caja con un espesor de 10 mm.

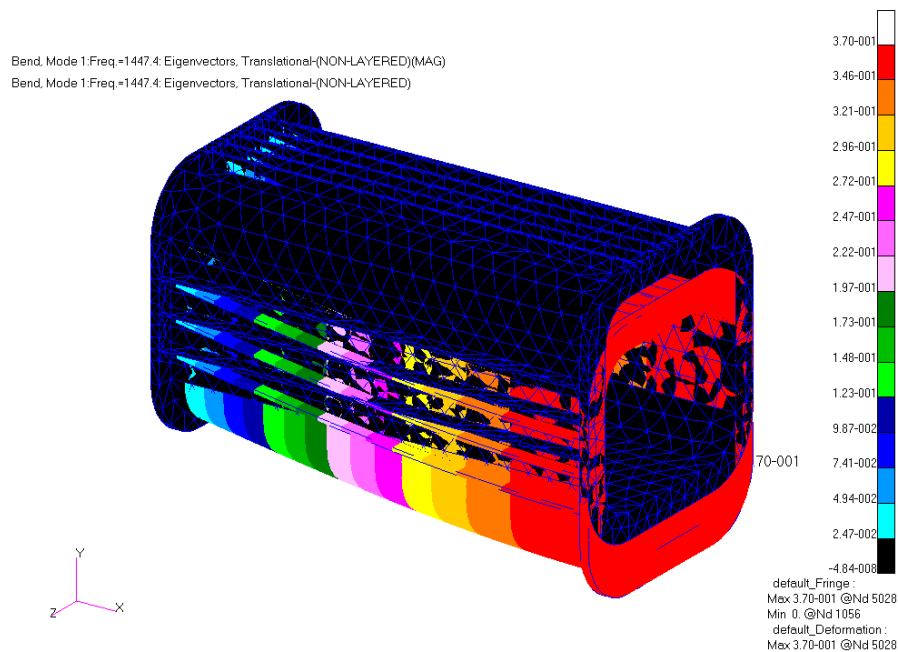


Figura 5.13 Primer modo de vibrar para espesor de pared de 10 mm.

De igual forma se realiza un análisis para determinar la influencia del espesor de pared en paredes laterales y paredes superior e inferior, para el análisis de pared superior e inferior se fija un espesor de 5 mm en paredes laterales. La tabla 5.10 muestra estos resultados.

Espesor de pared laterales de 5 mm	
Espesor de pared en paredes superior e inferior (mm)	Frecuencia en Hz
3	1367
5	1413
10	1429
15	1437

Tabla 5.10 Resultados para diferentes espesores de pared en paredes superior e inferior.

La figura 5.14 presenta el resultado para espesor de pared superior e inferior de 10 mm y espesor de paredes laterales de 5 mm.

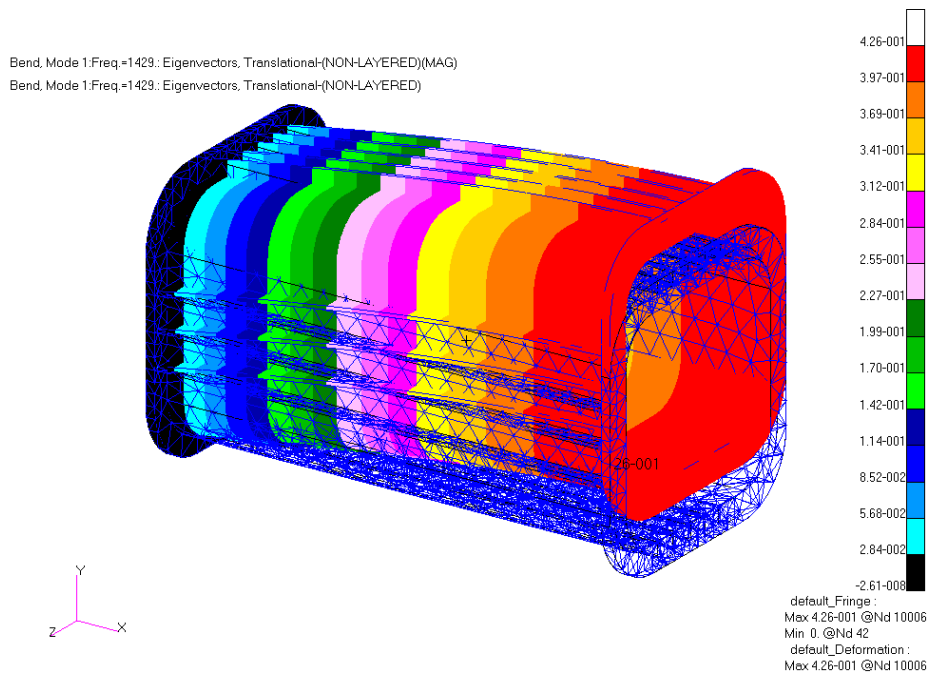


Figura 5.14 Primer modo de vibrar para espesor de pared en paredes laterales de 5 mm y paredes superior e inferior de 10mm.

De igual manera, se analiza por separado la influencia del espesor de pared en paredes laterales, se fija un espesor de pared en paredes superior e inferior de 5 mm, y se varia el espesor de pared en paredes laterales, la tabla 5.11 muestra estos resultados.

Espesor de pared en paredes superior e inferior de 5 mm.	
Espesor de pared en paredes laterales (mm)	Frecuencia en Hz
3	1370
5	1413
10	1417
15	1434

Tabla 5.11 Resultados para diferentes espesores de pared en paredes laterales

La figura 5.15 muestra el resultado para un espesor de pared en paredes superior e inferior de 5 mm y paredes laterales de 10mm.

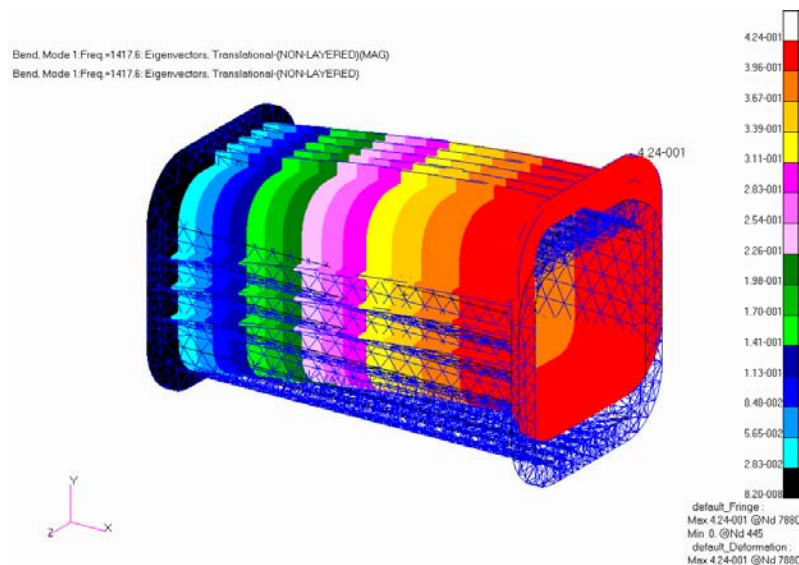


Figura 5.15 Primer modo de vibrar para espesor de pared en paredes superior e inferior de 5 mm y paredes laterales de 10mm.

Como lo muestran estos resultados, la influencia del espesor es directamente proporcional en la frecuencia del primer modo, es decir a mayor sea el espesor, mayor es la frecuencia, cabe señalar que de igual forma la influencia del espesor de pared tanto lateral como superior e inferior, es directamente proporcional.

Conclusiones

Como lo muestra el modelo matemático del capítulo 3 el cambio de material de Acero a Aluminio o viceversa no influye de manera considerable en el primer modo de vibrar, esto debido a que la rigidez aumenta o disminuye en dependencia del módulo de elasticidad y de la densidad, y la relación existente entre ellas es en la misma proporción para estos dos materiales en particular.

Considerando una semejanza de una viga hueca con la caja de velocidades, nos damos cuenta que el largo de la caja disminuye considerablemente el primer modo de vibrar, por ello se prefiere que la caja sea corta tanto como sea posible, para así aumentar la frecuencia del primer modo, además el alto de la caja influye más que el ancho de esta, es decir, es preferible que la caja sea más alta que ancha.

Considerando los análisis del diseño de experimentos se nota que es preferible que el espesor de la caja sea mayor, y que el alto y espesor de la brida sean pequeños.

Los refuerzos generalmente llamados costillas contribuyen de una manera proporcional en el primer modo de vibrar de la caja y pueden aumentar la frecuencia hasta en un 8.6%.

Se nota que el número de costillas longitudinales a lo alto no tienen gran impacto en el modo de vibrar, aunque es preferible considerarlas ya que aumentan la frecuencia del primer modo de vibrar.

Las costillas longitudinales a lo ancho tienen un efecto mayor en la frecuencia, y es preferible considerarlas ya que en relación a las costillas longitudinales a lo alto, aumentan la frecuencia del primer modo en mayor proporción, es decir es preferible tener costillas longitudinales a lo ancho que costillas longitudinales a lo alto.

La influencia del número de costillas laterales es significativo, aunque influyen de manera negativa, por lo que es preferible no considerarlas.

Se puede predecir la frecuencia longitudinal y torsional del primer modo de vibrar teniendo la frecuencia de bending, ya que la frecuencia longitudinal es 1.858 veces mayor que la frecuencia de bending y la torsional es 0.979 veces la frecuencia de bending.

La rigidez de la caja es independiente del tipo de vibración, ya que existe una relación que es directamente proporcional en los tres tipos de vibraciones.

Trabajos futuros

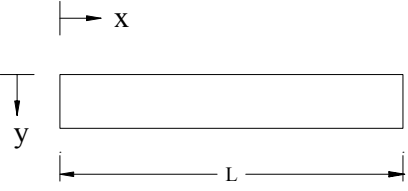
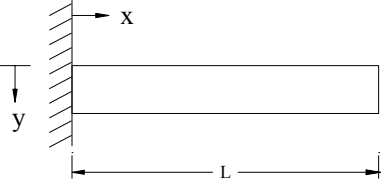
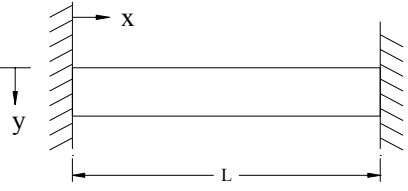
Encontrar el modelo matemático para el caso de una viga hueca con costillas y encontrar similitud con lo obtenido en PATRAN.

Crear un modelo simplificado del tren motriz, considerando masas e inercias concentradas en un punto y verificar la influencia de éstas.

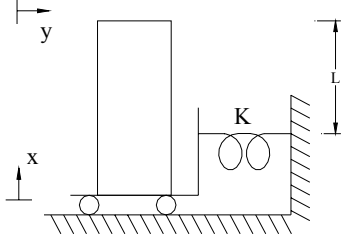
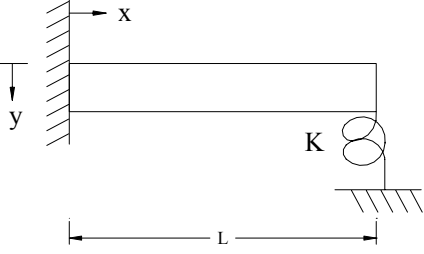
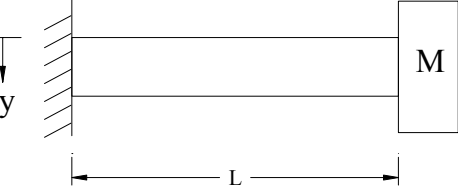
Realizar un análisis en paquetes que simulen a la caja de manera dinámica como lo es ADAMS y comparar los resultados obtenidos en PATRAN NASTRAN.

Anexo 1. Frecuencia natural para vigas uniformes [8].

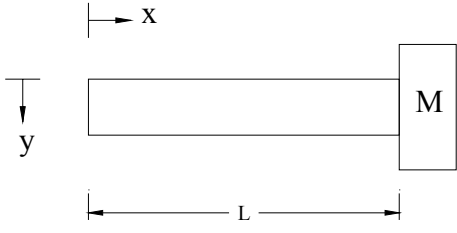
k = Constante del resorte; x = coordenada a lo largo de la viga; y = coordenada en dirección de la vibración; \tilde{y} = Modo normal para deformación en la dirección y ; A = Área de la sección transversal; G = Modulo de rigidez $\{G = E/[2(1+\nu)]\}$, donde E es el modulo de elasticidad del material, ν = Relación de Poisson}; K = Coeficiente del cortante (Anexo 2)

Frecuencia Natural (Hertz), $f_i = \frac{\lambda_i}{2\pi L} \sqrt{\frac{KG}{\mu}}$; $i = 1,2,3,\dots$		
Descripción	λ_i Coeficiente trascendental para λ	Modo Normal, $\tilde{y}_i\left(\frac{x}{L}\right)$
1. Libre – Libre 	$i\pi$; $i = 1,2,3,\dots$	$\cos \frac{i\pi x}{L}$; $i = 1,2,3,\dots$
2. Empotrado - Libre 	$\frac{(2i-1)\pi}{2}$; $i = 1,2,3,\dots$	$\text{sen} \frac{\pi(2i-1)x}{2L}$; $i = 1,2,3,\dots$
3. Empotrado – Empotrado 	$i\pi$; $i = 1,2,3,\dots$	$\text{sen} \frac{i\pi x}{L}$; $i = 1,2,3,\dots$

Anexo 1. Frecuencia natural para vigas uniformes (Continuación).

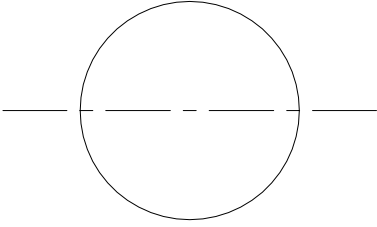
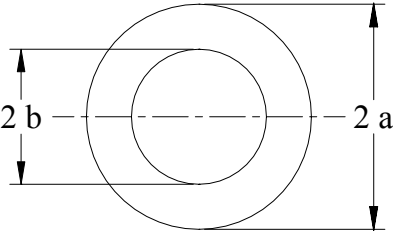
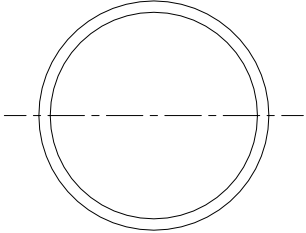
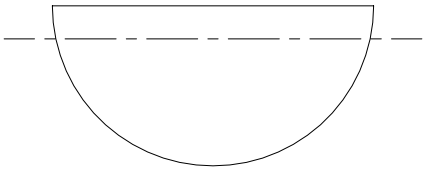
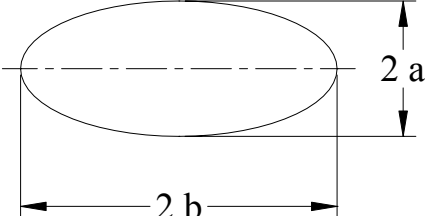
<p>4. Resorte – Libre</p> 	$\tan \lambda = \left(\frac{kL}{KAG} \right) \frac{1}{\lambda}$	$\cot \lambda_i \cos \frac{\lambda_i x}{L} + \operatorname{sen} \frac{\lambda_i x}{L}$ $i = 1, 2, 3, \dots$
<p>5. Empotrada – Resorte</p> 	$\cot \lambda = - \left(\frac{kL}{KAG} \right) \frac{1}{\lambda}$	$\operatorname{sen} \frac{\lambda_i x}{L}; \quad i = 1, 2, 3, \dots$
<p>6. Empotrada – Masa</p> 	$\cot \lambda = \left(\frac{M}{\mu AL} \right) \lambda$	$\operatorname{sen} \frac{\lambda_i x}{L}; \quad i = 1, 2, 3, \dots$

Anexo 1. Frecuencia natural para vigas uniformes (Continuación).

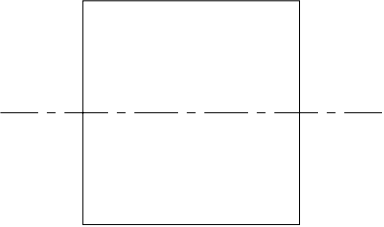
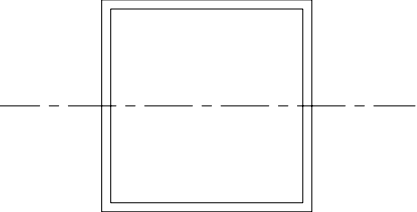
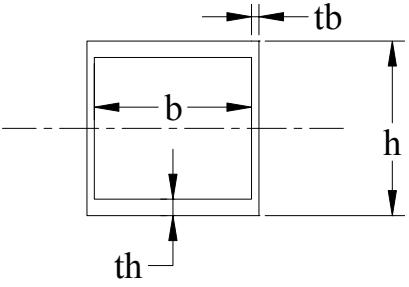
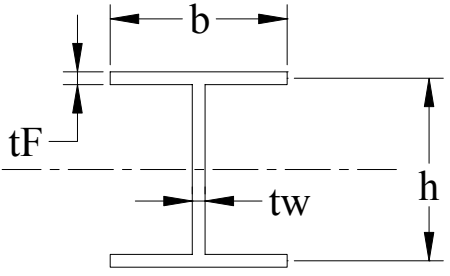
<p>7. Libre – Masa</p> 	$\tan \lambda = -\left(\frac{M}{\mu AL}\right)\lambda$	$\cos \frac{\lambda_i x}{L}; \quad i = 1, 2, 3, \dots$
--	--	--

Anexo 2 Coeficientes de cortante.

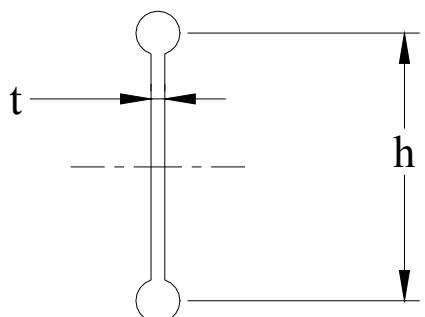
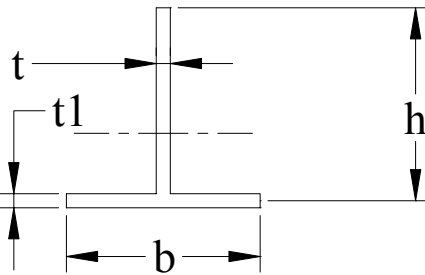
Notación: ν = Relación de Poisson, $-----$ Eje perpendicular aplicado a la carga de cortante.

Sección	Coeficiente a cortante K
1. Circulo 	$\frac{6(1 + \nu)}{7 + 6\nu}$
2. Circulo hueco 	$\frac{6(1 + \nu)(1 + m^2)^2}{(7 + 6\nu)(1 + m^2)^2 + (20 + 12\nu)m^2}$ <p>Donde: $m = \frac{b}{a}$</p>
3. Circulo hueco de pared delgada 	$\frac{2(1 + \nu)}{4 + 3\nu}$
4. Semicírculo 	$\frac{1 + \nu}{1.305 + 1.273\nu}$
5. Elipse 	$\frac{12(1 + \nu)a^2(3a^2 + b^2)}{(40 + 37\nu)a^4 + (16 + 10\nu)a^2b^2 + \nu b^4}$

Anexo 2. Coeficientes de cortante (Continuación)

<p>6. Rectángulo</p> 	$\frac{10(1 + \nu)}{12 + 11\nu}$
<p>7. Cuadrado de Pared delgada</p> 	$\frac{20(1 + \nu)}{48 + 39\nu}$
<p>8. Caja de pared delgada</p> 	$\frac{10(1 + \nu)(1 + 3m^2)}{F(m, n)}$ <p>Donde :</p> $F(m, n) = 12 + 72m + 150m^2 + 90m^3$ $+ \nu(11 + 66m + 135m^2 + 90m^3)$ $+ 10n^2[(3 + \nu)m + 3m^2],$ $m = \frac{b * th}{h * tb} \quad n = \frac{b}{h}$
<p>9. Sección I de pared delgada</p> 	$\frac{10(1 + \nu)(1 + 3m)^2}{F(m, n)}$ <p>Donde :</p> $F(m, n) = 12 + 72m + 150m^2 + 90m^3$ $+ \nu(11 + 66m + 135m^2 + 90m^3)$ $+ 30n^2(m + m^2) + 5\nu n^2(8m + 9m^2),$ $m = \frac{2b * tF}{h * tw} \quad n = \frac{b}{h}$

Anexo 2. Coeficientes de cortante (Continuación)

<p>10. Palo y círculos</p> 	$\frac{10(1 + \nu)(1 + 3m)^2}{(12 + 72m + 150m^2 + 90m^3) + \nu(11 + 66m + 135m^2 + 90m^3)}$ <p>Donde:</p> $m = \frac{2A_s}{h * t}, \quad A_s = \text{Area de un círculo}$
<p>11. Sección T de pared delgada</p> 	$\frac{10(1 + \nu)(1 + 4m)^2}{F(m, n)}$ <p>Donde:</p> $F(m, n) = 12 + 96m + 276m^2 + 192m^3 + \nu(11 + 88m + 248m^2 + 216m^3) + 30n^2(m + m^2) + 10\nu n^2(4m + 5m^2 + m^3)$ $m = \frac{b * t1}{h * t} \quad n = \frac{b}{h}$

Bibliografía:

- [1] Manual del automóvil 1999. *Reparación y mantenimiento. Electricidad accesorios y transmisión*. Cultural, S.A. Madrid, España
- [2] De Castro, Oriol. 1993. *Enciclopedia del camión*. Embrague cambio transmisión. Grupo editorial CEAC, S.A., Barcelona, España
- [3] Revista Todo Auto 2003. *Cual es el futuro de las transmisiones automotrices*. Caracas, Venezuela.
http://www.todoauto.com.ve/1_doc/1_consejos_novedades/transmisiones.htm
- [4] Chandrupatla, Tirupathi R., Belegundu, Ashok D. 1999. *Introducción al estudio del elemento finito en ingeniería*. PRENTICE HALL. México.
- [5] Guerrero, Martha. Valderrábano, Sergio. Campos, Rolando. Isasi, Miren. 1999. *Aplicación del método de elemento finito al análisis nodal*. FIME, UANL, México.
- [6] Hartog, J.P. Den. 1992. *Mecánica de las vibraciones*. Compañía editorial Continental, S.A. México.
- [7] Thomson, William T. 1972. *Theory of vibration with applications*. Prentice Hall. United States of America.
- [8] Blevis, Robert D. 1984. *Formulas for natural frequency and mode shape*. Robert E. Krieger Publishing Company. Florida, Estados Unidos.