INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS

SUPERIORES DE MONTERREY

UNIVERSIDAD VIRTUAL

EL DESARROLLO DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO EN EL ESTUDIANTE DEL CURSO DE MATEMÁTICAS I DE BACHILLERATO, MEDIANTE EL USO DEL TEXTO ÁLGEBRA INTERACTIVA

T E S I S

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL

PARA OPTAR AL TÍTULO DE

MAESTRA EN EDUCACIÓN CON

ESPECIALIDAD EN DESARROLLO COGNITIVO

Autora:

MA. DEL SOCORRO PALAZUELOS BARRANCO

Asesora: Dra. Mónica Porres Hernández

MÉXICO, D.F. MAYO DE 1999

INSTITUTO TECNOLOGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY

UNIVERSIDAD VIRTUAL

CAMPUS HIDALGO

027

ACTA DE EXAMEN Y AUTORIZACION DE LA EXPEDICION DE GRADO ACADEMICO

Los suscritos, miembros del jurado calificador del examen de grado sustentado hoy por Ma. del Socorro Palazuelos Barranco en opción al grado académico de

Maestra en Educación, especialidad en Desarrollo Cognitivo

hacemos constar que el sustentante resultó aprobada por unanimidad.

Dra. Mónica Pórres Hernández

Mtra. Margarita Toro Palacios

Mtra. Norma Patricia Aristi Rodríguez

Hago constar que el sustentante, de acuerdo con documentos contenidos en su expediente, ha cumplido con los requisitos de graduación, establecidos en el Reglamento Académico de los programas de graduados de la Universidad Virtual.

Lic. Ma. Lizbet Melo Morales
Director de Servicios Escolares

Expídase el grado académico mencionado, con fecha

Ing. Carlos Cruz Limón
Rector de la Universidad Virtual

Ing. Jesús Rodríguez Guerrero
Director General del Campus

Pachuca, Hgo., a 27 de mayo de 1999.

RECONOCIMIENTOS

Con profundo agradecimiento a las autoridades de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, que me permitieron realizar la Maestría en Educación, brindándome la oportunidad de ingresar a la Institución que va a la vanguardia en el Sistema Educativo Mexicano.

Un agradecimiento muy sincero para las autoridades y personal docente de la Universidad Virtual, del Sistema Tecnológico de Monterrey, que nos permiten acceder a gran distancia a una Educación de Calidad.

Agradezco de manera muy especial a la Dra. Mónica Porres Hernández, asesora de la tesis, su valiosa y desinteresada ayuda para realización de este trabajo. Mónica, recibe mi agradecimiento eterno por tus enseñanzas, paciencia, sugerencias y comentarios.

DEDICATORIA

Con amor para mi esposo
Álvaro, por el gran apoyo y
comprensión que me brindó para la
realización de este proyecto.

A mis hijas, a quienes adoro y
para quienes no existen las palabras
para expresarles mi agradecimiento,
por su valiosa ayuda, comprensión y
paciencia.

Con todo mi cariño para mi
Madre.

EL DESARROLLO DEL APRENDIZAJE
SIGNIFICATIVO EN EL ESTUDIANTE DEL CURSO
DE MATEMÁTICAS I DE BACHILLERATO, MEDIANTE EL USO DEL TEXTO
ÁLGEBRA INTERACTIVA.
Mayo de 1999

MA. DEL SOCORRO PALAZUELOS BARRANCO
INGENIERO INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

Dirigida por: Dra. Mónica Porres Hernández

RESUMEN

El presente trabajo propone el uso de un libro de texto denominado "Álgebra Interactiva", para el curso de Matemáticas I, con el objetivo de que el alumno aprenda dicha disciplina de manera significativa

Una de las causa principales que genera la propuesta de este estudio es la de poder coadyuvar a mejorar los procesos de aprendizaje de los estudiantes en esta área, a través de un texto que trata los temas de manera sencilla y general, motivando a los alumnos a transferir sus conocimientos a la solución de problemas, tanto matemáticos como de otras materias con las que ésta se relaciona.

Otra causa es la de promover, a través de las actividades, que los estudiantes desarrollen habilidades como el autoestudio, autoaprendizaje, creatividad y retención de contenidos así como también que adquieran actitudes y la practiquen los valores.

Posteriormente se analizan aspectos relacionados con la enseñanza y didáctica de las matemáticas, los diferentes tipos de aprendizaje: significativo, por descubrimiento, colaborativo, la teoría del Constructivismo así como también la experiencia adquirida a través de la práctica docente de la autora..

Este estudio tiene como producto, el prototipo denominado Álgebra Interactiva, en el cual se contemplan en cada módulo los objetivos informativos y formativos, el desarrollo del tema, proponiéndose actividades en donde además de adquirir conocimientos, se desarrollen habilidades y refuerzan actitudes y valores.

Finalmente , la autora hace una serie de recomendaciones que inciden en la mejora del quehacer académico en el área de matemáticas, incidiendo en la participación activa y colaborativa de los alumnos con la intención de lograr un aprendizaje relevante y significativo.

ÍNDICE GENERAL

PRESENTACIÓN i
RECONOCIMIENTOS ii
DEDICATORIA iii
RESUMEN iv
ÍNDICE GENERAL vi
ÍNDICE DE FIGURAS viii

INTRODUCCIÓN 1

CAPÍTULO 1

1. DIAGNÓSTICO 3
1.1 DIAGNÓSTICO PUNTUAL 3
1.1.1 La escuela 3
1.1.2 Perfil de los alumnos 3
1.1.3 Perfil del profesor 4
1.1.4 Ventajas para el alumno que cursa esta materia 4
1.1.5 Requisitos necesarios para cursar la materia 5
1.1.6 Materias con las que se relaciona este curso dentro del mapa curricular del bachillerato universitario 5
1.1.7 Impacto de esta materia en los ámbitos profesional, social y personal de los alumnos 6
1.2 PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA 6
1.2.1 Antecedentes 6
1.3 IDENTIFICACIÓN DE LA NECESIDAD 8
1.4 SELECCIÓN DE UNA NECESIDAD 8
1.5 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA 8
1.5.1 Enunciado del problema 9
1.5.2 Delimitación 9
1.5.3 Justificación 9
1.6 OBJETIVOS Y METAS DEL PROYECTO 10
1.7 ESTRATEGIA GENERAL 10
1.8 LIMITACIONES 11

CAPÍTULO 2

2. MARCO TEÓRICO Y CONCEPTUAL 12
2.1 TIPOS DE APRENDIZAJE 12
2.1.1 Aprendizaje conductual 12
2.1.2 Aprendizaje cognoscitivista 13
2.1.3 Aprendizaje a través del descubrimiento 15
2.1.4 Aprendizaje significativo 16
2.1.5 Aprendizaje cooperativo 17
2.1.6 Constructivismo 18
2.2 DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS 20

CAPÍTULO 3

3. DISEÑO DE LA SOLUCIÓN 22
3.1 ANTECEDENTES 22
3.2 DESCRIPCIÓN DE LA SOLUCIÓN 22
3.3 DESARROLLO DE LA SOLUCIÓN 24
3.4 RESULTADOS 196

CAPÍTULO 4

4.CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES 197
4.1 CONCLUSIONES 197
4.1.1 Práctica docente 197
4.1.2 Libro de texto "Álgebra para Siempre" 198
4.2 RECOMENDACIONES 199

ANEXOS

Anexo A Programa oficial de matemáticas I (álgebra) 200
Anexo B Componentes del aprendizaje para el alumno 203
Anexo C Relaciones psicosociales en el aula 204
Anexo D Objetivos como estrategia de enseñanza 205
Anexo E Efectos del aprendizaje cooperativo 206
Anexo F Materiales instruccionales utilizados 207
Anexo G Cuestionario para estudiantes 208

BIBLIOGRAFÍA 209

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA 211

VITAE 212

INDICE DE FIGURAS

1. Estadísticas de aprovechamiento curso de Matemáticas I.....5

INTRODUCCIÓN

La educación es un factor muy importante para el desarrollo social y económico de los países, se ha considerado que es la llave de acceso al próximo siglo y gira principalmente en torno a preparar a los estudiantes para enfrentarlos a situaciones reales en una sociedad que demanda acciones concretas. Dicha preparación implica cambios en la forma de enseñar, cambios en las estrategias y métodos de enseñanza, cambios que conlleven **la participación activa de los estudiantes** en el proceso enseñanza-aprendizaje.

Es un hecho innegable que en todas las partes del mundo a los alumnos no les gusta la materia de Matemáticas, fenómeno que se ve reflejado en los elevados índices de reprobación en dicha asignatura. Educadores y psicólogos han observado el bajo rendimiento intelectual de los alumnos en ésta materia desde el nivel básico hasta el superior. En este estudio de investigación-acción el cual se realizó en la Escuela Preparatoria Número Cuatro dependiente de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, se ha llegado a la conclusión de que gran parte de este fenómeno reside en la forma de aprender de los estudiantes, que provoca aprendizajes memorísticos y repetitivos y no un aprendizaje significativo, que el alumno sea capaz de transferir a otros contextos.

En América Latina se empieza a trabajar en un cambio en la Educación, el Secretario Ejecutivo de la Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL), Gert Rosenthal hace algunas reflexiones sobre la educación: diciendo que pasa a ser un factor fundamental para el desarrollo de las aptitudes y destrezas, y de la capacidad de innovación y la creatividad, que son indispensables para lograr altos niveles de competitividad, dado que el conocimiento se convierte en el elemento central del nuevo paradigma productivo; desempeña un papel igualmente relevante en materia de integración, solidaridad y movilidad social.

En nuestro país, también se han realizado eventos tendientes a mejorar la educación, tal es el caso del Foro de Consulta Popular sobre la Educación Media Superior y Superior para la integración del Plan Nacional de Desarrollo 1995-2000, en el que el Maestro José Doger Corte presentó un ensayo sobre "Vinculación Universitaria con las necesidades de los sectores social y productivo", en el que menciona que los cambios que se promuevan en la

educación son que las universidades deben tener expresamente clarificada su misión, sustentadas en su concepción sobre el saber, el hacer y el ser; misión comprometida con la sociedad y su bienestar, en donde la calidad es su mayor atributo. Una misión que se compromete con la formación del profesionista que el país necesita, agentes de cambio de la sociedad, e incidir más en la formación del individuo.

Jesús Urzúa Macías en "Educación media superior y superior en sus distintas modalidades", hace una reflexión sobre el nuevo paradigma educativo, el cual está orientado al desarrollo de habilidades del pensamiento, mediante la creación de un contexto en donde se propicie que los estudiantes **construyan sus propios conocimientos**, trabajando de manera colaborativa, obteniendo como resultado el que todos los estudiantes aprendan a pensar.

Los argumentos anteriormente expuestos demandan cambios en la forma de actuar de los estudiantes, por tal razón y ante tal problemática se propone como alternativa de solución, un libro que coadyuvará a lograr un aprendizaje significativo. El cual no está centrado en la enseñanza sino en el aprendizaje del alumno y que requiere de él un papel preponderantemente activo. Esto implica un cambio cultural, pasando de la memorización a la comprensión, de la incorporación de información a la discriminación de ésta. El desarrollar habilidades del pensamiento permitirá a los alumnos un mejor procesamiento de información; lo cual posibilitará el desarrollo de esquemas que faciliten el almacenamiento, la recuperación, el uso apropiado de los conocimientos así como la transferencia de los mismos a otros contextos.

El texto posibilita la actividad constructivista del alumno, con lo cual éste aprenderá de manera significativa, desarrollará habilidades como la de autoestudio, la creatividad, retención de contenidos, reforzará actitudes y practicará los valores. Haciendo posible que tanto el profesor como el alumno tengan una participación más activa, que permitirá que se cumpla el logro de los objetivos.

CAPÍTULO 1

1. DIAGNÓSTICO

En este capítulo se presenta el análisis de la situación del curso de Matemáticas I (álgebra), se identifican algunas características respecto al curso, al profesor y a los alumnos, se define la problemática del proyecto así como sus metas y objetivos, se plantea la estrategia general y las limitaciones que origina el presente trabajo.

1.1 DIAGNÓSTICO PUNTUAL

Las variables que se consideran en este curso son las siguientes:

1.1.1 La escuela:

Se encuentra enclavada en un barrio humilde situado al norte de la ciudad capital, denominado "Barrio el Lobo", es la más joven de las escuelas dependientes de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, su arquitectura es moderna y tiene 20 aulas, cuatro laboratorios (física, química, biología e idiomas), biblioteca, salón de usos múltiples, canchas deportivas, área administrativa, áreas verdes, cafetería y sanitarios. Teniendo los servicios de agua, luz, teléfono, fax, internet y transporte universitario para el alumnado.

1.1.2 Perfil de los alumnos:

La edad promedio del alumno que ingresa a esta escuela es de quince años, la mayoría son de escasos recursos económicos, sin embargo también asisten alumnos de clase media, su nivel académico de ingreso es diferente, teniendo mejor nivel los que provienen de escuelas secundarias privadas y públicas de la ciudad de Pachuca. Gran parte del alumnado que asiste al turno matutino, se dedican únicamente a estudiar, es decir, son estudiantes de tiempo completo, sin embargo, en el turno vespertino muchos de ellos estudian y trabajan.

La población escolar es flotante, ya que un número considerable de estudiantes no viven en la ciudad y viajan todos los días para asistir a la escuela. La ocupación de sus padres enumerada en orden de importancia es la siguiente: comerciantes ambulantes, comerciantes establecidos, empleados, campesinos, obreros, mineros y profesionistas.[1]

1.1.3 Perfil del profesor

La Academia de Matemáticas está integrada por 11 profesores, su edad promedio es de treinta y ocho años, predomina el sexo masculino ya que solamente hay dos profesoras. Su formación es en ingeniería, de ellos ocho son ingenieros industriales egresados de la misma institución, los tres restantes salieron del Instituto Tecnológico de Pachuca, de estos últimos uno es ingeniero industrial y dos son ingenieros mecánicos. Siete están dedicados exclusivamente a impartir diferentes cursos de matemáticas en la escuela Preparatoria no. 4, los restantes imparten clase y trabajan en la industria. El 100% tiene cursos de didáctica general, tres cuentan con el diplomado en Lingüística avanzada del Español y uno tiene diplomado en arte. La mayoría practica algún deporte y según manifestaron no les gusta leer, sólo consultan libros de matemáticas para actualizarse, únicamente dos de ellos manifestaron su gusto por l a lectura. Como diversión les gusta salir al campo con sus familias, ver programas deportivos en la televisión, o ver películas rentadas en su casa.[2]

1.1.4 Ventajas para el alumno que cursa esta materia:

La principal ventaja radica en el hecho de que esta es una materia fundamental que sirve de sustento a los cursos posteriores de matemáticas, así como también el poder transferir los conocimientos aprendidos a situaciones reales.

---

[1] Fuente: Investigación educativa denominada El perfil del alumno insumo que ingresa a la Preparatoria no. 4, que se encuentra en documentos oficiales.

[2] Fuente: Investigación el perfil del docente del área de matemáticas.

1.1.5 Requisitos necesarios para cursar la materia:

Se requiere estar inscrito en el bachillerato, tener su certificado de secundaria. En general el requisito mínimo que los estudiantes deben saber es el manejar operaciones fundamentales aritméticas.

1.1.6 Materias con la que se relaciona este curso dentro del mapa curricular del bachillerato universitario:

Se relaciona en forma vertical con Trigonometría, Geometría Analítica, Estadística, Cálculo Diferencial y Cálculo Integral y en forma horizontal con el área de ciencias fisicas tales como Mecánica, Acústica y Óptica, Calor y Electromagnetismo.

La materia de álgebra se cursaba en el segundo semestre de bachillerato en el plan de estudios que estuvo vigente hasta junio de 1997, teniendo como antecedente la materia Básico de Matemáticas que correspondía al primer semestre. Después de la revisión curricular en julio de 1997, en donde la curricula se convirtió en flexible, la materia de álgebra se ubicó en el primer semestre, con cinco horas semanarias.

A continuación se muestra la siguiente tabla, correspondiente a los últimos cursos impartidos de álgebra en la Escuela Preparatoria Número Cuatro dependiente de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

Tabla 1. Estadística del curso de Álgebra

Semestre	% de aprobados	Número de alumnos	Promedio
enero-junio 1997	70.45	102	6.8
agosto-diciembre 1997	77.33	486	8.2
enero-junio 1998	66.25	96	7.3
agosto-diciembre 1998	62.23	520	7.0

Fuente: División de Nivel Medio Superior y Superior

De lo anterior se concluye que el promedio de calificaciones en los últimos cuatro semestres es de 7.32, en tanto que el promedio del porcentaje de aprobados es 69.06.

1.1.7 Impacto de esta materia en los ámbitos profesional, social y personal de los alumnos:

La materia tiene un impacto sobre el alumno en el ámbito profesional, en virtud de tener una aplicación práctica en situaciones reales, así como el hecho de poder utilizar una computadora como herramienta en la solución de problemas o al presentar sus exámenes. Desde el punto de vista social, ésta materia le brinda la oportunidad de interactuar con sus compañeros e intercambiar experiencias, ya que el trabajo en equipos colaborativos tiene efectos en el rendimiento académico de los participantes así como en las relaciones socioafectivas que se establecen entre ellos. Desde el enfoque personal, el alumno aprende a reconocer la importancia del álgebra en el desarrollo tecnológico actual.

1.2 PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

1.2.1. Antecedentes

Teniendo en cuenta que el índice de reprobación en la materia de matemáticas en las escuelas preparatorias dependientes e incorporadas a la UAEH es el 40% aproximadamente, los funcionarios universitarios solicitaron al Subnodo de Matemáticas que se realizara una investigación del porqué de este hecho. Dicha investigación denominada El porqué los alumnos reprueban matemáticas, se llevó al cabo por profesores de la materia asesorados por personal de la Coordinación de Investigación de la UAEH. Esta investigación se llevo a efecto utilizando entrevistas y cuestionarios.

Los resultados obtenidos de dichos trabajos y que daban respuesta a lo anterior, los cuales se encuentran plasmados en documentos oficiales, fueron los siguientes: Que los conocimientos con los que ingresaban los alumnos a la preparatoria eran deficientes, además estos no eran homogéneos, ya que el mejor nivel lo presentaban los alumnos provenientes de las escuelas secundarias privadas de la ciudad de Pachuca, ocupando el segundo lugar los egresados de las escuelas oficiales tales como generales, técnicas, telesecundarias de la misma ciudad, señalando que en el tercer lugar estaban situados los alumnos que habían

concluido sus estudios en escuelas de zonas rurales. Señalaron que estos resultados fueron obtenidos al aplicar el mismo examen de diagnóstico a los alumnos que ingresaban al bachillerato, detectándose además que los alumnos de las zonas suburbanas obtenían los promedios más bajos, los cuales no correspondían a las calificaciones en matemáticas presentadas en sus certificados.

Otro punto importante que fue señalado, es el hecho de que los alumnos que no aprobaban la materia de matemáticas, no asistían a las clases en forma regular, esto se debía a que gran parte del alumnado viaja todos los días para asistir a la escuela, algunos lo hacen de municipios cercanos a la ciudad capital, sin embargo otros viajan desde localidades pertenecientes al Estado de México, razón por la cual muchas veces no llegan a tiempo a las primeras clases, que generalmente son de matemáticas.

Se observó también que en los índices de reprobación influían los maestros del área, de manera determinante, ya que en las entrevistas realizados a los alumnos, éstos manifestaron que algunos de los profesores no explicaban, que se molestaban si se les hacía cuestionamientos, que en la clase solucionaban ejemplos sencillos, pero que en los exámenes aumentaba el grado de dificultad de los mismos o bien se preguntaban temas que no habían sido contemplados durante el curso. También comentaron el hecho de que eran conocedores de que sus profesores sabían matemáticas, sin embargo no explicaban de una manera adecuada. Señalaron también que las clases les parecían monótonas y aburridas. Asimismo, apuntaron que la forma en la cual eran evaluados resultaba injusta, ya que algunos profesores se concretaban a calificar el resultado, pero no verificaban el procedimiento seguido para llegar a éste.

Al entrevistar a los profesores estos manifestaron el hecho ya reiterado de los conocimientos previos deficientes con los que ingresan los alumnos al bachillerato, señalando que los alumnos no quieren estudiar y que aprenden en el aula, pero que después no realizan tareas para consolidar lo aprendido, de tal manera que vuelven a retomar el tema hasta la próxima sesión, en la que ya se olvidó lo aprendido. Comentando que también incrementaban las estadísticas de reprobación, lo numeroso de los grupos con los que trabajaban, todo esto aunado al temor que gran parte del alumnado siente por la materia.

1.3 IDENTIFICACIÓN DE LA NECESIDAD

En el contexto de estudio se tiene como situación actual la siguiente: Los alumnos que ingresan a la preparatoria No. 4 dependiente de la UAEH tienen conocimientos previos deficientes, pasivos, mecanicistas, que realizan operaciones sin comprenderlas y que por lo tanto son incapaces de resolver problemas de aplicación, teniéndose una cantidad importante de alumnos reprobados, considerando que quienes logran pasar, lo hacen con conocimientos deficientes. En cuanto al profesorado se puede afirmar que necesita preparación tanto en el aspecto didáctico como en el área de la disciplina que imparte, detectándose además que no utilizan materiales instruccionales acordes a la tecnología educativa actual. Respecto a las sesiones de matemáticas se observa que el profesor es el único actor en el proceso enseñanza - aprendizaje, ya que no diseña actividades para que el alumno participe. El libro de texto utilizado en la actualidad, es de edición atrasada, voluminoso, sin sustentos teóricos y pocas aplicaciones prácticas.

1.4 SELECCIÓN DE UNA NECESIDAD

De las necesidades anteriores surge como prioridad en este proyecto de trabajo que los alumnos cuenten con un libro de texto sencillo, interesante, con aplicaciones prácticas que les permita construir sus propios conocimientos, fundamentalmente con los esquemas que ya poseen, logrando aprendizajes significativos que podrán transferir a la solución de problemas tanto académicos como de la vida cotidiana, así como también desarrollando habilidades tales como el autoestudio, reforzando además actitudes y practicando los valores.

1.5 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Teniendo como punto de inicio las necesidades identificadas, se tiene entonces que la definición del problema se podría expresar en los siguientes términos:

- ¿Qué hacer para que el estudiante que cursa la materia de álgebra tenga un aprendizaje significativo?

- ¿De qué manera el uso de un texto sencillo, con aplicaciones prácticas, que desarrolle habilidades, refuerce actitudes y promueva valores, coadyuvará a que el estudiante aprenda a través de actividades de autoestudio y colaborativas?

1.5.1 Enunciado del problema

El propósito de este estudio es elaborar un libro de texto denominado "Álgebra para Siempre" que propicie que los alumnos alcancen un aprendizaje significativo que puedan transferir a la solución de problemas, desarrollando además habilidades como el autoestudio, reforzando actitudes y valores a través de actividades colaborativas.

1.5 .2 Delimitación

La problemática se ubica en el área de Matemáticas en el curso de Algebra que se imparte en los primeros semestres, turnos matutino y vespertino de la escuela Preparatoria Número Cuatro, dependiente de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, que se encuentra ubicada en la Avenida Guadalupe S/N, colonia Guadalupe, en la Ciudad de Pachuca Hidalgo siendo su duración de un semestre.

1. 5.3 Justificación

La importancia de elegir la materia de Álgebra en este trabajo de tesis, radica en el hecho de que ella sirve como sustento para los cursos siguientes de matemáticas contemplados en el mapa curricular del bachillerato universitario. Además en esta materia el estudiante relaciona conceptos matemáticos con problemas reales, lo cual lo motiva a seguir estudiando, debido a que siente que los conocimientos aprendidos tienen aplicaciones concretas.

Por otra parte el libro de texto eminentemente tradicionalista que se lleva actualmente en todas las escuelas preparatorias dependientes e incorporadas a la Universidad

Autónoma del estado de Hidalgo, sólo permite que el estudiante adquiera conocimientos, careciendo en forma determinante de estrategias que permitan reforzar actitudes y valores, así como desarrollar habilidades, que son consideradas ampliamente en la misión de sistemas educativos que van a la vanguardia.

1.6 OBJETIVOS Y METAS DEL PROYECTO

Al proponer el prototipo "Álgebra para Siempre" los objetivos que se pretenden son:

1. Lograr que los alumnos aprendan significativamente, para poder transferir dichos conocimientos a la solución de problemas.
2. Desarrollar habilidades como el autoestudio.
3. Reforzar actitudes tales como la tolerancia y cultura de trabajo, a través de actividades colaborativas.
4. Generar una participación activa de los alumnos mediante actividades individuales y trabajo colaborativo, tanto en el contexto de trabajo como en actividades extraclase.

La meta del proyecto es:

Elaborar un prototipo que consiste en un Libro de texto para el Alumno, el cual ha sido concebido como un complemento para la enseñanza de la materia Matemáticas I, y cuyo propósito es promover en el alumno el autoestudio, debido a que en él se reúnen las condiciones que permiten el logro de un aprendizaje significativo.

1.7 ESTRATEGIA GENERAL

El prototipo está diseñado de acuerdo a los siguientes pasos:

- Análisis del curso.
- Observaciones y encuestas (Investigación-acción)
- Preparación del prototipo

1.8 LIMITACIONES

Las principales limitaciones consisten en:

- Como los alumnos no tienen el hábito de realizar actividades como las propuestas, tal vez el libro no sea aprovechado en su totalidad.
- Que por la profundidad de sus contenidos únicamente será utilizado en el nivel medio superior.

CAPÍTULO 2

2. MARCO TEÓRICO Y CONCEPTUAL

Para establecer la relación entre lo expuesto anteriormente, en este capítulo la autora hace una fundamentación basada en el pensamiento de teóricos y estudiosos tanto en el campo del aprendizaje como en el de la didáctica, se consideran estos aspectos en virtud de que son esenciales en el desarrollo de esquemas cognitivos así como también en el desarrollo de habilidades, refuerzo de actitudes y práctica de valores.

2.1 TIPOS DE APRENDIZAJE

El aprendizaje implica siempre un cambio en la persona que está aprendiendo y se define como un proceso interno que se manifiesta en cambios de conducta que son observables. (Woolfolk, 1990).

El aprendizaje no tan sólo se da en un salón de clases, sino que ocurre en forma constante todos los días, no tan sólo se aprende lo correcto y no siempre implica conocimientos o habilidades, las actitudes y valores también pueden ser aprendidas.

2.1.1. Aprendizaje conductual

Dentro del enfoque conductista del aprendizaje, los teóricos que abordan esta postura, sostienen que el aprendizaje es un cambio en la conducta, en la forma como actúa una persona ante una situación particular. Los psicólogos conductistas representantes de esta corriente son: J. B. Watson, Edward Thorndike y B.F. Skinner, quienes se han dedicado casi en forma exclusiva al estudio de las conductas observables y los cambios conductuales.

Tanto Thorndike como Skinner tuvieron un papel muy importante en el desarrollo del conocimiento operante, el trabajo inicial de Thornidike en 1913 fue con gatos encerrados en una caja, que para alcanzar el alimento que se encontraba en el exterior, tenían que abrir un cerrojo, dentro de los movimientos que hacían para salir, eventualmente

ejecutaban el correcto, después de realizar el proceso varias veces los gatos aprendieron a realizar fácilmente el movimiento apropiado. De estos experimentos decidió que una ley importante del aprendizaje era la ley del efecto, sentando las bases del condicionamiento operante, que es el aprendizaje en el que la conducta voluntaria es fortalecida o debilitada por sus consecuencias o antecedentes. Sin embargo, se piensa que quien realmente desarrolló este concepto fue Skinner en 1953, que comenzó con el condicionamiento clásico, el cual describe cómo pueden aparearse las conductas existentes con estímulos nuevos, pero no cómo se adquieren nuevas conductas. Muchas conductas no son simples respuestas ante los estímulos, sino acciones deliberadas.

2.1.2 Aprendizaje Cognoscitivista

La investigación sobre las estructuras y procesos cognitivos realizadas entre las décadas de los setenta y ochenta, ayudó de manera determinante a forjar el marco conceptual del enfoque cognitivo contemporáneo. Todo esto sustentado **en teorías de la información, la psicoligüística, la simulación por computadora y la inteligencia artificial,** lo cual condujo a nuevas conceptualizaciones acerca de la representación y naturaleza del conocimiento y fenómenos como la memoria y la solución de problemas.

El psicólogo suizo Jean Piaget desarrolló un modelo que describe cómo los humanos le dan sentido a su mundo **reuniendo y organizando** la información. Su teoría reitera las etapas por las que una persona debe pasar para desarrollar los procesos de pensamiento que realiza un adulto. De acuerdo con él, varias formas de pensamiento que son sencillas para el adulto, no lo son para los niños. (Piaget, 1970). En el enfoque de Piaget, cada persona percibe y estructura la realidad de acuerdo con sus procesos de pensamiento. Por ello intentó identificar un número limitado de procesos mentales para cada etapa de la vida, siendo esta parte de su teoría fuertemente objetada. Desde este enfoque una de las influencias más importantes sobre los procesos de pensamiento y el desarrollo cognitivo es la maduración, la aparición de los cambios biológicos que están genéticamente determinados en cada individuo. Otra influencia sobre los procesos de pensamiento es la actividad, ya que con la maduración física, se mejora la capacidad de actuar en el medio y aprender. El desarrollo cognitivo también es influido por la transmisión

social, es decir, lo que se aprende de los demás, sin ella se tendría que inventar el conocimiento que ya ofrece la cultura.

Piaget, concluyó que todas las especies heredan tendencias básicas o funciones invariantes, la primera es hacia la organización, proceso en el cual se ordena la información en categorías mentales y la segunda es hacia la adaptación, que es el ajuste del medio. De acuerdo con su teoría cada persona nace con tendencia a organizar sus procesos de pensamiento en estructuras psicológicas llamadas esquemas, que son los elementos básicos de construcción del pensamiento, siendo también pensamientos organizados que permiten realizar representaciones mentales. Considera también cambios adaptativos, ya que las personas además de organizar las estructuras psicológicas heredan la tendencia de adaptarse al medio, siendo los procesos básicos de adaptación, la **asimilación** y la **acomodación**. La primera tiene lugar cuando se ajusta la información nueva a los esquemas ya existentes, es decir, tratar de entender algo nuevo relacionándolo con lo que ya se sabe, en tanto que la acomodación se presenta cuando el individuo debe cambiar, alterar o crear sus esquemas para responder a una nueva situación. Las personas se adaptan a ambientes cada vez más complejos, usando los esquemas existentes, modificando los mismos cuando se necesita algo nuevo, de hecho se requieren ambos procesos la mayor parte del tiempo. De acuerdo con Piaget, la organización, la asimilación y la acomodación pueden considerarse como un acto de equilibrio. En su teoría, los cambios de pensamiento suceden gracias al proceso de equilibrio, siendo éste la búsqueda del balance mental entre los esquemas cognoscitivos y la información del medio. Las cuatro etapas de desarrollo cognitivo plateadas por él son: **sensorio-motriz**, **preoperacional**, **operaciones concretas** y **operaciones formales**, creyó que todas las personas pasan por las cuatro etapas en el mismo orden, etapas que se asocian a edades específicas, sin embargo la edad de un estudiante no es una garantía de que sabe lo que piensa en cada situación, es decir, el tener 17 años no significa que se ha alcanzado la etapa de las operaciones formales (Ashton, 1978).

La influencia que tuvo la teoría de Piaget sobre la psicología del desarrollo y la educación ha sido importante, sin embargo ha sido criticada, ya que algunos psicólogos han objetado la existencia de cuatro etapas en forma separada, no obstante están de acuerdo en que los niños pasan realmente por los cambios que Piaget describió (Gelman y Baillargeon,1983).

Por su parte Vygotsky sugiere que el desarrollo cognitivo del individuo depende de las personas que están a su alrededor. Propone que el desarrollo cognitivo se presenta durante la interacción del niño con los adultos o con niños mayores, desempeñando estas personas el papel de guías, proporcionándole información y apoyo necesario para su desarrollo intelectual. De acuerdo Lev Vygotsky, en cierto punto del desarrollo se presentan algunos problemas que los niños están a punto de poder resolver, en esta fase el niño es capaz de realizar una tarea si se le proporciona el apoyo y la ayuda necesaria, esta etapa es conocida como zona de desarrollo proximal, la cual es análoga con la competencia de Hunt, ya que ambos conceptos sugieren que los alumnos deberán colocarse en situaciones en las que tienen que alcanzar a comprender, pero que la ayuda del maestro o de otros compañeros es determinante (Wersch,1985). Davydov, en 1995, encontró algunas implicaciones básicas para la educación en las ideas de Vygotsky, las cuales son: la educación se da con el propósito de desarrollar la personalidad de los niños, la personalidad humana está unida a su potencial creativo y la educación debe estar diseñada para descubrir y desarrollar este potencial en cada individuo, los maestros guían las actividades de los estudiantes, los métodos más importantes para el aprendizaje son aquellos en los que hay relación entre el desarrollo individual y las necesidades de cada etapa.

2.1.3 Aprendizaje a través del descubrimiento

El psicólogo cognoscitivista Jerome Bruner hace contribuciones al aprendizaje a través del descubrimiento. Propone que los maestros deben proporcionar a los alumnos situaciones problema que los estimulen a **descubrir por sí mismos** la estructura del material de la asignatura, siendo esta estructura las ideas fundamentales, es decir, la información esencial. Bruner cree que el aprendizaje dentro del aula se presenta de manera inductiva, esto es, pasar de los detalles y ejemplos hacia la formulación de un principio general. También sugiere el descubrimiento en acción, en donde una estrategia inductiva requiere de un pensamiento inductivo. En el aprendizaje por descubrimiento el maestro organiza la clase de manera que los estudiantes aprendan a través de su participación activa, es decir, los estudiantes trabajan por su parte para descubrir principios básicos. El aprendizaje por descubrimiento también puede ser guiado. " El descubrimiento o

redescubrimiento de las relaciones es frecuentemente considerada entre las maneras más efectivas para que los estudiantes aprendan matemáticas" Dreyfus (1991).

2.1.4 Aprendizaje significativo

Ausubel en la década de los años 70 marca el derrotero en la psicología educativa. Involucra la adquisición de significados nuevos, considera al alumno como un procesador activo de la información. La memorización no es considerada como aprendizaje significativo, ya que el material aprendido de memoria no se relaciona con los conocimientos previos, desafortunadamente, a pesar de la ineficiencia del aprendizaje memorístico, muchos de los nuevos conocimientos no parecen sustentarse en algo más (Ausubel,1977). Se propone un modelo de enseñanza por exposición para promover el aprendizaje significativo, en donde exposición significa explicación, o presentación de hechos o ideas. Desde este enfoque el profesor presenta el material en forma completa, cuidadosamente organizada y secuenciada, mostrando primero los conceptos más amplios hasta los más específicos, recibiendo los estudiantes el material más relevante de la manera más eficiente. Aprendizaje significativo no es sinónimo del aprendizaje del material significativo. Ausubel no está de acuerdo con Bruner en que la gente aprende organizando la información en jerarquías, llamando al concepto general subsunsor, ya que todos los conceptos están supeditados a él. Además sostiene que el aprendizaje debe progresar de manera deductiva, es decir, de lo general a lo específico, llamando a este método regla-ejemplo.

El aprendizaje significativo por recepción es importante en la educación. Éste ocurre cuando hay una adecuación entre los esquemas del estudiante y el material por aprender, dicha adecuación requiere de un organizador anticipado, el cual funciona como una afirmación introductoria, esto es, un concepto de alto nivel lo suficientemente amplio para introducir y resumir el material siguiente. La función de los organizadores anticipados es dar apoyo a la nueva información sirviendo de puente conceptual entre el nuevo material y el conocimiento actual del estudiante (Faw y Waller,1976). En general los organizadores anticipados pueden ser comparativos o explicativos. Se puede concluir que en la medida en que los estudiantes intenten relacionar la información nueva con los conocimientos previos y darle sentido para poder ser empleada en cuestionamientos posteriores, se estará generando

aprendizaje significativo. Este tipo de aprendizaje es muy eficiente debido a que al estudiante le resulta muy útil aplicar conceptos que pueden ser recordados fácilmente en situaciones específicas.

2.1.5 Aprendizaje Cooperativo

Cooperación consiste en trabajar juntos por objetivos comunes, el trabajo colaborativo permite que se tenga un mejor rendimiento académico y que se refuercen la cultura de trabajo y el respeto hacia el grupo. Esta opción permite a los estudiantes mejorar las estrategias de razonamiento así como solucionar problemas, con ello los alumnos generalmente se sienten motivados y se preocupan por el resto del grupo. Ellos son responsables tanto de su aprendizaje como el de sus compañeros de equipo, de tal manera que el éxito de uno ayuda a otros a ser también exitosos. De acuerdo con Enesco y del Olmo(1992), una situación escolar individualista es aquella en la que no hay ninguna relación entre los objetivos que persiguen cada uno de los alumnos, pues sus metas son independientes. En contraste, una situación cooperativa se tiene cuando los alumnos establecen metas que son benéficas para sí mismos y para los demás miembros del grupo, buscando así mismo maximizar tanto su aprendizaje como el de los otros. El equipo trabaja junto hasta que todos los miembros del mismo han entendido la actividad con éxito. Destacando que las relaciones entre ellos pueden constituir relaciones en cuyo seno tienen lugar aspectos tales como la socialización, control de impulsos agresivos, tolerancia hacia los diferentes puntos de vista, siendo uno de los más importantes el mejoramiento del rendimiento académico. (Coll y Colomina, 1990).

Para Echeita (1995) el aprendizaje cooperativo implica procesos cognitivos, motivacionales y afectivo relacionales. En los grupos donde se manifiesta el aprendizaje cooperativo se presentan los siguientes beneficios: interdependencia positiva, valoración estudiantil, miembros heterogéneos, liderazgo compartido, responsabilidad por los demás, desarrollo de habilidades sociales, profesor que observa e interviene. Resaltando que la interacción entre los compañeros del grupo permite a los estudiantes obtener beneficios que están fuera de su alcance cuando trabajan solos, ya que de dicha acción posibilita el aprendizaje de habilidades, actitudes, valores e información específica que el adulto es

incapaz de proporcionar al niño o al joven. Otro beneficio obtenido en el aprendizaje cooperativo, es el hecho de permitir que los estudiantes pasen al plano de la reflexión metacognitiva sobre sus proceso y productos de trabajo.

2.1.6 Constructivismo

Si bien es ampliamente reconocido que la aplicación de las diferentes corrientes psicológicas han permitido explicar fenómenos educativos e intervenir en ellos, también es cierto que influyen en estos procesos otras ciencias humanas y sociales. Los enfoques sociológicos y antropológicos proporcionan influencias culturales en el desarrollo del individuo y en los procesos educativos y socializadores.

La postura constructivista se alimenta de las aportaciones de las diferentes teorías psicológicas asociadas con la psicología cognitiva, tales como: el enfoque piagetiano, teoría de esquemas cognitivos, teoría ausbeliana de la asimilación y el aprendizaje significativo así como de la psicología cultural vigotskiana. No obstante que los autores de las mismas las sitúan en ángulos diferentes, comparten el principio de la importancia de la actividad constructiva del alumno en el aprendizaje escolar. El constructivismo postula la existencia y prevalencia de procesos activos en la construccción del conocimiento, habla de un sujeto cognitivo aportante que con su labor constructiva rebasa lo que le ofrece su entorno. Rigo Lemini (1992), explica la génesis del comportamiento y el aprendizaje, resaltando los mecanismos de influencia sociocultural de Vigostsky, socioafectivos de Wallon o intelectuales y endógenos de Piaget.

Carretero(1993) argumenta que el constructivismo es básicamente la idea que mantiene que el individuo tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos, no es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la interacción entre esos dos factores. En consecuencia, según la posición constructivista, el conocimiento no es una copia fiel de la realidad, sino una construcción del ser humano. ¿Con qué instrumentos realiza la persona dicha construcción?. Fundamentalmente con los esquemas que ya posee, es decir, con lo que ya construyó en su relación con el medio que lo rodea. Dicho proceso de construcción depende de dos aspectos

fundamentales: de los conocimientos previos o representación que se tenga de la nueva información o de la actividad o tarea a resolver así como de la actividad externa o interna que el aprendiz realice al respecto.

Ausubel postula que el aprendizaje implica una reestructuración activa de las percepciones, ideas, conceptos y esquemas que el aprendiz posee en su estructura cognitiva. Pudiendo caracterizar a su postura como constructivista (aprendizaje no es una simple asimilación pasiva de información literal, el sujeto la transforma y estructura) e interaccionista (los materiales de estudio y la información exterior se interrelacionan e interactúan con los esquemas de conocimiento previo y las características personales del aprendiz) (Díaz Barriga, 1989).

La concepción constructivista del aprendizaje escolar se sustenta en el hecho de que la educación que se imparte en las instituciones educativas promueve los procesos de crecimiento personal del alumno en el marco de la cultura del grupo al que pertenece. Dichos aprendizajes no serían satisfactorios si no se proporciona una ayuda, esto es, promover la participación del alumno en actividades deliberadas e intencionales, planificadas y sistemáticas, que logren propiciar en el alumno una actividad mental constructiva (Coll, 1988). Se puede analizar la construcción del conocimiento desde dos vertientes que son: los procesos psicológicos implicados en el aprendizaje y los mecanismos de influencia educativa susceptibles de promover, guiar y orientar dicho aprendizaje.

La postura constructivista rechaza la idea del alumno como un mero receptor o reproductor de los saberes culturales, así como tampoco se acepta la concepción de que el desarrollo es la simple acumulación de aprendizajes específicos. La finalidad última de la intervención pedagógica es desarrollar en el alumno la capacidad de realizar aprendizajes significativos por sí solo, es decir, enseñar a pensar y actuar sobre contenidos significativos y contextuados. Coll(1990).

La concepción constructivista gira en torno a tres ideas fundamentales que son:

- El alumno es el responsable último de su propio proceso de aprendizaje. Es quien construye los saberes de su grupo cultural.
- La actividad mental constructiva del alumno se aplica a contenidos que poseen ya un grado considerable de elaboración, esto es el alumno no tiene en todo momento que descubrir todo el conocimiento.

- La función del docente es engarzar los procesos de construcción del alumno con el saber colectivo culturalmente organizado.

  La autora anteriormente no utilizaba esta postura, pero ahora trata de que los alumnos construyan sus propios conocimientos al propiciar la relación de los conocimientos anteriores con los nuevos.

2.2 DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

El estudio de la didáctica es necesario para que la enseñanza sea más eficiente, más ajustada a la naturaleza y a las posibilidades del educando y de la sociedad. Puede decirse además que es el conjunto de técnicas destinado a dirigir la enseñanza mediante principios y procedimientos aplicables a todas las disciplinas, para que el aprendizaje de las mismas se lleve al cabo con mayor eficiencia.

La didáctica es ciencia y arte de enseñar. Es ciencia en cuanto investiga y experimenta nuevas técnicas de enseñanza, es arte cuando establece normas de acción o sugiere formas de comportamiento didáctico basándose en los datos científicos y empíricos de la educación; esto sucede porque la didáctica no puede separar la teoría de la práctica.

De una manera más explícita, puede decirse que la didáctica está representada por un conjunto de técnicas a través de las cuales se realiza la enseñanza.

La didáctica de las matemáticas estudia las actividades didácticas, es decir, las actividades que tienen como objetivo la enseñanza, evidentemente en lo que ellas tienen de específico para las matemáticas. (Guy Brousseau, 1986)

El objeto de estudio en didáctica es el saber matemático. El saber constituido se presenta bajo formas diversas, por ejemplo bajo la forma de preguntas y respuestas, también se presenta en forma axiomática, que es una presentación clásica en matemáticas.

Peltier (1993) sostiene que " La Didáctica de las Matemáticas considerada como ciencia estudia los procesos de transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos, particularmente en situaciones escolares. Y su objetivo principal es intervenir en el sistema educativo en forma benéfica, es decir, proponer condiciones para que el funcionamiento del sistema didáctico asegure en el estudiante la constitución de un saber que evolucione y que resuelva problemas".

La Didáctica de las Matemáticas otorga al estudiante un papel fundamental en el que considera que el trabajo intelectual del alumno debe por momentos ser comparable a las actividades científicas. Saber matemáticas no es solamente aprender definiciones y teoremas, para reconocer la ocasión de utilizarlas y aplicarlas; se sabe bien que hacer matemáticas implica que el alumno se ocupe de problemas, pero a veces se olvida que resolver un problema no es más que parte del trabajo; encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrarles solución. Para lograr esto es necesario que el alumno despliegue una actividad científica en la que él actúe, formule, pruebe, construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que los intercambie con sus compañeros. La idea central es que el alumno aprenda significativamente, siendo el profesor el que promueva la adquisición de conocimientos en forma comprensiva, pensante y funcional.

CAPÍTULO 3

3. DISEÑO DE LA SOLUCIÓN

En este apartado se mencionan los antecedentes de la investigación efectuada por la autora, la descripción del prototipo, el desarrollo del mismo y los resultados.

3.1 ANTECEDENTES

El método de investigación utilizado por la que escribe pertenece a la investigación cualitativa la cual es reconocida como técnica de investigación científica.

Se utilizó este método en virtud de que es el idóneo para investigar problemas prácticos cotidianos en lugar de problemas teóricos definidos por investigadores puros.

Se analizaron acciones humanas y situaciones sociales experimentadas por la autora y sus alumnos, interpretando lo ocurrido desde el punto de vista de los participantes, para ello se utilizaron como instrumentos la observación directa, entrevistas y encuestas.

La autora a través de la observación de los alumnos dentro del aula se pudo percatar que la mayoría de los alumnos no utilizan el libro de texto oficial para la materia de álgebra durante la clase, que cuando lo consultaban era porque les dejaban alguna tarea específica. A través de un cuestionario aplicado a un grupo numeroso de alumnos, y en el que uno de los cuestionamientos hacia referencia al uso de su libro, la mayoría contestó que no lo utilizaban porque éste tenía mucha teoría, que los temas estaban expuestos de manera no clara, que ellos no entendían y que muchas veces se confundían, que preferían estudiar para el examen en las notas tomadas durante la clase.

3.2 DESCRIPCIÓN DE LA SOLUCIÓN

El prototipo elaborado pretende ser el libro de texto y que cubre los temas elementales de álgebra que los alumnos requieren para los cursos posteriores de matemáticas, ingeniería, comercio, estadística o ciencias naturales.

Se denominó "Álgebra para Siempre", porque se desea que el alumno se apropie del conocimiento, a través de la interacción con el profesor, el material y con sus compañeros de clase. En la portada se muestra la Ecuación de Diofanto, quien se considera el Padre del Álgebra. Los temas en cada módulo son tratados de una manera interesante, ya que en él se relaciona de manera substancial la nueva información con los conocimientos previos, además, ella está organizada y secuenciada de manera no arbitraria, lo cual coadyuva a lograr que el alumno aprenda de manera **significativa,** el objeto de estudio, se ha procurado también darle una presentación atractiva para motivar al estudiante.

Cada módulo contiene los objetivos informativos y formativos, el desarrollo del tema, actividades de autoestudio, ejercicios para resolver de manera individual, actividades colaborativas y actividades complementarias. Al final se presentan las soluciones para las diversas actividades y la bibliografía complementaria que el alumno puede consultar.

También fue utilizado un código de colores, en donde se resaltan con **rojo** definiciones importantes, con **amarillo** se marcan las conclusiones, las fórmulas importantes están encuadradas en **rojo.** Para las actividades de autoestudio se utilizó el **verde**, **azul** para los ejercicios de manera individual, **morado** para las actividades colaborativas, **granate** para las actividades complementarias, utilizando los mismos colores en la solución de dichas actividades. Fueron utilizadas figuras para atraer la atención de los alumnos y determinar los diferentes tipos de actividad.

La descripción de términos es la siguiente:

1. Objetivos de Aprendizaje:

Su característica más importante es que pueden orientar al alumno a lo largo del proceso.

a. **Objetivos Informativos**. Se redactan en términos de lo que alumno debe aprender; indicándole qué debe hacer, cómo lo va a hacer y hasta donde debe cumplir.

b. **Objetivos Formativos**. Estos objetivos se refieren a:

- La formación intelectual del alumno: por ejemplo desarrollo del pensamiento crítico, desarrollo de la creatividad, etcétera.
- La formación humana del alumno: que es el trabajo en equipo, que tenga cultura de trabajo, etcétera.
- La formación profesional del alumno: implica que tenga la capacidad de tomar decisiones, emprendedor, entre otros.

2. Actividades de Aprendizaje:

En este apartado el profesor diseñará las actividades y describirá detalladamente las acciones que debe ejecutar el alumno para cumplir con los objetivos de aprendizaje propuestos. La descripción de cada actividad debe responder al qué, cómo y hasta donde debe de actuar el alumno.

a. **Actividades de Autoestudio:** Actividades previas que el alumno realiza extraclase. Entre este tipo de actividades se puede mencionar la lectura de un texto, consultar algún libro, solucionar ejercicios, elaborar un reporte, investigar utilizando Internet o hacer un ejercicio de autoevaluación. Esto servirá de sustento para aprender significativamente los nuevos conocimientos.

b. **Ejercicios de manera Individual:** Este tipo de actividades la realizan los alumnos en el salón de clases, en ellas el alumno tiene sus propios objetivos, él percibe que la consecución de sus objetivos depende de su propia capacidad y esfuerzo.

c. **Actividades cooperativas:** Los alumnos trabajan juntos para lograr metas compartidas, interactúan entre ellos a través de grupos de trabajo, en los cuales cada miembro del mismo siente responsabilidad por los compañeros, el liderazgo es compartido. Las actividades colaborativas tienen efectos favorables tanto en el rendimiento académico como en las relaciones socioafectivas.

d. **Actividades Complementarias:** Aquellas actividades extraclase que realizan los alumnos, que servirán para consolidar lo aprendido, sirviendo para relacionar los conocimientos aprendidos con los nuevos.

3.3 DESARROLLO DE LA SOLUCIÓN

A continuación se presenta el Libro de Texto "Álgebra para Siempre" para el curso de Matemáticas I (álgebra).

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

Algebra para Siempre

Ma. Del Socorro Palazuelos

INTRODUCCIÓN

Teniendo en cuenta que he venido haciendo de la docencia mi actividad principal durante veintisiete años y con base en la experiencia adquirida al impartir la materia de matemáticas en los diversos cursos de nivel bachillerato, he elaborado este texto para cubrir los temas elementales de álgebra, que los alumnos requieren para los cursos posteriores de matemáticas.

Este trabajo no pretende ser una obra original, "descubriendo" los principios fundamentales matemáticos que ya existen y que muchos autores presentan en sus obras, sino que ha sido concebido como un complemento para el aprendizaje de la materia de álgebra, y su propósito es promover que el alumno *aprenda a aprender*, por lo que en él se reúnen las condiciones que permiten el logro de un aprendizaje relevante y significativo, ya que la nueva información se relaciona de manera no arbitraria y substancial con los conocimientos y experiencias previas, además de presentar el contenido estructurado y organizado. Por la sencillez con la que se manejan los temas el estudiante se sentirá motivado hacia el aprendizaje del álgebra, ya que será su aprendizaje un proceso gradual en el que se consideran varias etapas del mismo.

La idea central del texto es que el alumno aprenda y comprenda el saber procedimental, y lo haga de la manera más significativamente posible, razón por la cual en él se promueve intencionalmente que la adquisición de los procedimientos sea en forma comprensiva, pensante, funcional y generalizable a otros y variados contextos.

El texto posibilita el aprendizaje cooperativo, ya que el alumno no aprende en solitario, sino que, al contrario, la actividad estructurante del sujeto estará mediada por la influencia de los otros. De tal manera que se establece la interacción entre el alumno y el material, así como las interacciones entre el

alumno y las personas que lo rodean. Con el uso de este texto los alumnos trabajan juntos para lograr metas compartidas elevándose el rendimiento académico, también se mejoran las relaciones socioafectivas, incrementándose el respeto mutuo, la solidaridad y la tolerancia hacia puntos de vista diferentes.

En él incorporo mi sentir sobre la importancia de la enseñanza y mejor aún del aprendizaje en el proceso educativo y mi mayor deseo es entregar a los estudiantes que cursan el primer semestre de bachillerato un libro fácil de entender.

Ma. del Socorro Palazuelos Barranco.

Álgebra para Siempre

Contenido

Módulo I Números reales. 33

1.1 Subconjunto de los números reales. 34

1.2 Operaciones con números reales. 40

1.2.1 Leyes de los signos. 40
1.2.1.1 Suma o adición. 40
1.2.1.2 Resta o diferencia. 41
1.2.1.3 Multiplicación. 41
1.2.1.4 División. 42

1.3 Axiomas de los números reales. 44

1.3.1 Cerradura. 44
1.3.2 Conmutativa. 45
1.3.3 Asociativa. 45
1.3.4 Distributiva. 46
1.3.5 Identidad. 47
1.3.6 Inversa. 48

1.4 Propiedades de la igualdad. 50

1.4.1 Reflexiva. 50
1.4.2 Simétrica. 51
1.4.3 Transitiva. 51
1.4.4 Sustitución. 51
1.4.5 Aditiva. 52
1.4.6 Multiplicativa. 52
1.4.7 Teoremas 54

1.5 Operaciones con los números enteros. 55

1.5.1 Jerarquía en las operaciones aritméticas fundamentales. 55

1.6 Números racionales. 57

1.6.1 Fracciones propias e impropias. 57
1.6.2 Fracciones equivalentes. 60
1.6.3 Reglas de divisibilidad. 60

Módulo II Expresiones algebraicas. 68

2.1 Valor numérico. 71

2.2 Grado de un polinomio. 73

2.3 Lenguaje algebraico. 75

2.4 Leyes de los exponentes. 77

2.5 Operaciones con expresiones algebraicas. 89

2.5.1 Suma y resta de expresiones algebraicas. 89

2.5.2 Multiplicación de expresiones algebraicas. 93

2.5.2.1 Monomio por monomio. 94
2.5.2.2 Monomio por polinomio. 95
2.5.2.3 Polinomio por polinomio. 95

2.5.3 División de expresiones algebraicas. 98

2.5.3.1 Monomio entre monomio. 99
2.5.3.2 Polinomio entre monomio. 99

2.5.3.3 Polinomio entre polinomio. 101

2.6 Productos notables. 105

2.6.1 Binomio al cuadrado. 105
2.6.2 Producto de binomios conjugados. 108
2.6.3 Binomio al cubo. 110
2.6.4 Producto de binomios con un término común. 112

2.7 Desarrollo del binomio de Newton $(a+b)^n$, donde $n \in$ N. 116

Módulo III Factorización de expresiones algebraicas. 126

3.1 Factores 127

3.2 Factor común. 128

3.3 Agrupación de términos. 132

3.4 Diferencia de cuadrados. 134

3.5 Suma o diferencia de cubos. 136

3.6 Trinomio de cuadrado perfecto. 139

3.7 Trinomio de la forma x^2+bx+c. 142

3.8 Trinomio de la forma ax^2+bx+c. 146

Módulo IV Fracciones algebraicas. 153

4.1 Propiedades de las fracciones algebraicas. 154

4.2 Signos de la fracción y sus términos. 155

4.3 Suma y diferencia de fracciones algebraicas. 159

4.4 Multiplicación y división de fracciones algebraicas. 164

Módulo V Identidad y ecuación. 171

5.1 Ecuaciones de primer grado con una variable. 172

5.2 Solución de problemas. 176

5.3 Desigualdades de primer grado con una variable. 177

5.4 Ecuaciones de segundo grado con una variable. 179

5.4.1 Solución de una ecuación cuadrática por factorización. 182
5.4.2 Método para formar un trinomio cuadrado perfecto. 183
5.4.3 Fórmula general para la solución de una ecuación cuadrática. 185
5.4.4 Problemas de aplicación con cuadráticas. 188

Glosario 192

Bibliografía 195

Módulo 1

Números reales

Objetivos informativos.

Al finalizar la unidad el alumno:

Identificará a todos los subconjuntos de los números reales, reconociendo las características de cada uno de ellos.
Aplicará los axiomas y propiedades de los números reales en la ejecución de operaciones básicas.

Objetivos formativos.

Al finalizar el módulo el alumno:

Valorará la importancia del trabajo en equipo, desarrollando así la cultura del trabajo.
Aprenderá a defender sus puntos de vista y actuará con respeto hacia las opiniones ajenas.
Actuará con responsabilidad tanto en las actividades de autoestudio como en el trabajo colaborativo.

1. Números Reales

En este capítulo conocerás todo lo relativo a los números reales, que son esenciales para el estudio del álgebra.

En álgebra es esencial manejar los símbolos con objeto de cambiar o reducir expresiones algebraicas y resolver ecuaciones, debido a que muchos de estos símbolos representan números reales, es importante revisar brevemente el sistema de estos y algunas de sus propiedades fundamentales, propiedades que proporcionan reglas básicas para manejar la simbología algebraica.

El sistema de números reales es el que manejas en tu vida rutinaria cuando utilizas números para contar, números negativos, el cero, cualquier número representado por la relación a/b cuando b es diferente de cero, el número π, entre otros.

Si observamos, la vida cotidiana de cualquier persona está regida por números, estos se presentan en los precios, los horarios, la temperatura, las cantidades de artículos adquiridos, los tiempos de duración de las actividades, etcétera, y todos estos números son reales, representando a este conjunto la letra R.

Por lo tanto, en general cualquiera de los números que hayas empleado en tus cursos anteriores pertenecían a los números reales, excepto quizá por algunos, como las raíces cuadradas de números negativos tal como $\sqrt{-8}$

Para un mejor entendimiento de los números reales, es necesario mencionar a los conjuntos, los cuales podemos definir como una colección o agregado de ideas u objetos de cualquier especie, siempre y cuando estén tan claros y definidos para decidir si pertenecen o no al conjunto. Los conjuntos se designan con letras mayúsculas y sus elementos se escriben dentro de un par de llaves con letras minúsculas y separados con una coma. Entonces se puede indicar que *A* es un conjunto y que *a* es un elemento que pertenece a dicho conjunto, lo anterior se simboliza $\mathbf{a \in A}$

Se tiene que los elementos de un conjunto forma a su vez parte de otro conjunto llamado total, por ejemplo, el conjunto V= { a, e, ix, o, u } forman parte del conjunto total A= {abecedario}, entonces se afirma que el conjunto V es un subconjunto de A, lo cual se representa **V C A**

1.1 Subconjuntos de los números reales.

El conjunto de los números reales tiene varios subconjuntos, entre ellos podemos mencionar los conjuntos de números: dígitos, naturales **(N)**, enteros no negativos **(W)**, enteros **(Z)**, racionales **(Q)** e irracionales **(I)**.

Un subconjunto de los números reales es el conjunto de los **números naturales**, designando con la letra **N**={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ...}, también llamado el conjunto de los **números positivos,** los números naturales tienen a su vez otros subconjuntos como los dígitos (excepto el {0}), los números pares, los impares y los números primos. El elemento *cero* de los números dígitos **no** se considera Número Natural.

Los **números naturales** es un conjunto infinito de números **enteros positivos** exceptuando al **cero.**

Un subconjunto de los números naturales muy importante en los procesos aritméticos porque se usa para la simplificación de fracciones mediante la descomposición única en factores de un número natural, es el conjunto de los **números primos**, que se define como:

Números primos: son aquellos números que sólo son divisibles entre sí mismos y la unidad y se designan con la letra **P**.

El conjunto de los números primos es un conjunto infinito, es decir, no es posible determinar el número exacto de elementos que lo conforman. El primer primo y único par es el dos.

$$P = \{2,3,5,7,...\}$$

Los números naturales que no son primos forman el subconjunto de **números compuestos**; por ejemplo: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, ... (se pueden descomponer como producto de números primos).

Estos números dan lugar al teorema fundamental de aritmética, que se define como:

Todo número compuesto puede ser expresado como un producto único de factores primos independientemente del orden en que se escriban."

$$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$$

El conjunto de los **números enteros negativos** está conformado por los elementos siguientes:

{-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, -11, -12, ...}

El **conjunto de los números enteros no negativos es la unión del** elemento cero y el conjunto de los números enteros positivos, se tiene el conjunto

W= {0, 1, 2, 3, 4, ... }

Análogamente, la **unión** del elemento **cero** y el conjunto de los **números enteros negativos** da como resultado el conjunto de los **números enteros no positivos**

{..., -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0}

Si se unen los conjuntos de los números enteros negativos con el elemento cero y los números enteros positivos, se forma el **conjunto de los números enteros**, que se designa con la letra **Z**; esto es,

Z= {... -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...}

Teniendo en cuenta lo anterior se observa que el conjunto de los números naturales está contenido en el conjunto de los números enteros; es decir, los números naturales son un subconjunto de los números enteros. Esto se simboliza como **N C Z (N es subconjunto de Z).**

En el conjunto de los números enteros se encuentra el subconjunto de los **números pares** 2, -4, 6, 8, -10, -12... cuya característica es que son divisibles entre el número 2, es decir, tienen al 2 como factor ejemplo: 2= 2(1), -4=2(-2), 6= 2(3), 8= 2(4), -10= 2(-5), -12=2(-6). Los números pares positivos tienen la forma **2n**, donde **n** representa un número entero.

Asimismo, en el conjunto de los números enteros se encuentra el subconjunto de los **números impares** (positivos o negativos), cuya característica fundamental es que son una unidad mayor (o menor) que algún número par; por ejemplo: 3=2+1, 5=6-1, 7=6+1. Cualquier número impar tiene la forma **2n + 1** ó **2n – 1**, donde **n** representa un número entero.

En muchas ocasiones nos encontramos en la vida cotidiana que necesitamos utilizar números diferentes a los anteriores, y así hablamos de la mitad de una manzana, la cuarta parte de un pastel, es decir, de números que se representan mediante una fracción. A este conjunto de fracciones les llamamos números racionales, los cuales se representan por la letra **Q** y los definimos como aquellos que pueden representarse como la división de dos números enteros

Por lo tanto, las fracciones son necesarias para describir cantidades numéricas, ya sea de porcentajes, de razones entre cantidades, etc. Para ello se usa el conjunto de los números enteros para formar fracciones. A este conjunto de fracciones se le llama conjunto de **números racionales**, el cual se designa con la letra **Q**; se define como:

Números racionales: aquellos que pueden representarse como la división de dos números enteros o cuya expansión decimal es infinita y periódica.

Q={a/b tales que a y b son enteros, con b diferente de 0 }

En las fracciones siempre el denominador debe ser diferente de cero; de lo contrario se tendría una división que no tiene sentido, no está definida. Asimismo, **todo número entero es un número racional** ya que 3 es igual a 3/1 y 5 es igual a 5/1, esto incluye al elemento cero, el cual se puede escribir como 0/1, por lo que el conjunto de los números enteros es un subconjunto del conjunto de los números racionales, denotado en forma simbólica como: **Z C Q.**

Existen otros números que no son muy utilizados en la vida cotidiana tal es el caso de 1.4142136... que corresponde a la $\sqrt{2}$, el cual no se puede escribir como el cociente de dos cantidades, a este tipo de números corresponden los **números irracionales** y se designan con la letra **I.** Y se definen como:

Números irracionales: aquellos números que no pueden representarse como la división de dos números o que tienen una expansión decimal infinita y no periódica.

Existen más expresiones que son números irracionales, por ejemplo, $\sqrt{3}$ =1.732050808..., e=2.7182818..., etcétera.

Es importante destacar que **ningún** elemento del conjunto de los números racionales puede ser elemento del conjunto de los números irracionales y viceversa; es decir, ambos conjuntos son ajenos o distintos.

Teniendo en cuenta los conceptos anteriores se puede concluir que:

***Los números reales son la unión de los números racionales e irracionales y se representan con la letra* R.**

En resumen, se tienen los siguientes conjuntos de números y subconjuntos que se acaban de describir en la siguiente tabla:

Conjunto de Números Reales

Símbolo	Sistema de números	Descripción	Ejemplos
N	Números naturales	Números para contar	1, 2, 3, 4...
Z	Enteros	Conjunto de números naturales, sus negativos y el cero	-2, -1, 0, 1, 2...
Q	Racionales	Cualquier número que pueda representarse como *a/b* en donde *a* y *b* son enteros y *b* es diferente de cero	-4, -3/5, 0, 1, 2/5,
I	Irracionales	Aquellos números que tienen representaciones decimales infinitas no periódicas.	$\pi, \sqrt{2}$
R	Reales	Conjunto de todos los números racionales e irracionales.	$4.4, \sqrt{3}, \pi$

Actividades de autoestudio 1.1

Antes de solucionar los siguientes ejercicios que se te proponen, es necesario que vuelvas a leer todo lo relativo a los números reales. Analiza cuidadosamente cada una de las clasificaciones del conjunto de los números reales y haz un mapa conceptual en donde agrupes todos los conocimientos aprendidos.

Ejercicios para resolver de manera individual 1.1

1. Del conjunto A= {-2, 2/3, $\sqrt{3}$, 0.5, 6, 3/4, 8, $\sqrt{-2}$ }, clasifica cada elemento como N= naturales, Z= enteros, Q= racionales, I= irracionales, R= reales.

2. Del conjunto B= {-0.3333..., 1.25, -5, 3π/2, $\sqrt{5}$, 0, -$\sqrt{9}$, 2, $\sqrt{-5}$ }, escribe todos los elementos que pertenezcan a cada uno de los conjuntos **N, Z, Q,I,**

Actividades cooperativas 1.1

Integrarse equipos de tres a cinco alumnos. Ya en equipo resolver los siguientes ejercicios intercambiando opiniones; todo esto, para consolidar lo aprendido y fomentar la cultura de trabajo colaborativo.

1. Del conjunto C= {-7/9, 8, √-16, 0.76, 4, -π/5, 0.215, √81, $\sqrt[3]{-27}$}, ordenen cada elemento en las siguientes clasificaciones: N, Z, Q, I, R.

2. Del conjunto D= {11/9, 25, -4π, √5, 30/4, -√100, 2.067, $\sqrt[5]{-32}$, 9/3}, escriban todos los elementos que pertenezcan a cada uno de los conjuntos N, Z, Q, I, R.

3. Del conjunto E= {-5, 1.05, -10, -√6/2, $\sqrt[5]{-32}$, 2, -4(3/4)}, escriban todos los elementos que pertenezcan a cada uno de los conjuntos N, Z, Q, I, R.

4. Si D= { dígitos }, P= { primos }, I= { impares }, N= { naturales }, W= { enteros no negativos }, Z= { enteros }, Q= { racionales }, I= { irracionales }, analicen las siguientes afirmaciones y palomeen aquellas que presenten proposiciones verdaderas.

$D \in N$ (✓), $D \in P$ ( ), $N \in W$ ( ), $W \in Q$ ( ), $I \in Q$ ( ),
$Z \in Q$ ( ), $Z \in R$ ( ), $I \in Q$ ( ), $Q \cup N = Q$ ( ), $N \cap P = P$ ( ),
$N \cup Z = N$ ( ), $W - \{0\} = N$ ( ), $P \in N$ ( ), $Q - Z = N$ ( ),
$Q \cup I = R$ ( ), $N \cap W = \{0\}$( ), $\{0\} \in N$ ( ), $N \in R$ ( ).

Actividades complementarias 1.1

1. Del conjunto A= $\{-7, 3/2, \sqrt{-64}, 81.6, 0, \pi, \sqrt{3}, \sqrt[3]{-27}\}$, clasifica cada elemento como N, Z, Q, I, R.

2. Indica cuáles de los siguientes números del conjunto B=$\{2, -7/5, 4, 1.5, 0, \sqrt[5]{32}\}$, pertenecen a los números racionales.

3. De las siguientes proposiciones, señala cuáles son verdaderas.

a) $-3 \in N$	b) $5/6 \in Q$	c) $6/2\pi \in Z$	d) $5.3 \in Z$	e) $\sqrt{64} \in I$
f) $0 \in N$	g) $0.1 \in Q$	h) $-7\sqrt{5} \in R$	i) $12.9 \in Q$	j) $4/9 \in N$

4. Si D= { dígitos }, P= { primos }, I= { impares }, N= { naturales }, W= { enteros no negativos }, Z= { enteros }, Q= { racionales }, I= { irracionales }, analiza las siguientes afirmaciones y califícalas como verdaderas (V).

a) $N \in Z$	b) $P \in N$	c) $W \in N$	d) $Q \cup Z = Q$	e) $N \cap Z = Z$
f) $N \cup Z = Z$	g) $W \cap \{0\} = \{0\}$	h) $Q \cap I = R$		

5. Califica como verdadero o falso los siguientes enunciados.

a) Todos los números enteros son racionales.
b) algunos números enteros son naturales.
c) Ningún número natural es racional.
d) No todos los números enteros son naturales.
e) Todos los números primos son reales.
f) Algunos números racionales son enteros.

1.2 Operaciones básicas con números reales.

Una vez definido el concepto y clasificación de los números reales, efectuaremos las operaciones fundamentales con ellos. Dichas operaciones son suma, resta, producto y división, en donde también se indicarán sus elementos, propiedades y aplicaciones.

1.2.1 Leyes de los signos.

1.2.1.1 Suma o Adición

Los elementos que intervienen en la operación llamada suma se llaman sumandos y al resultado se le denomina suma o total.

En la adición se pueden presentar los siguientes casos:

a) Suma de números positivos: al sumar números **positivos** el resultado es **positivo** y el resultado se obtiene sumando los números.

Ejemplo:

(+5) + (+4)= +9

b) La suma de un número **positivo** con un **negativo** puede dar un número **negativo** o **positivo**, dependiendo del signo del número mayor; el resultado se obtiene restando los números.

Ejemplo:

(+13) + (-8)= +5, (-15) + (+9)= -6

c) La suma de dos números **negativos** es **negativa** y el resultado se obtiene sumando los números.

Ejemplo:
(-6) + (-12)= -18.

En resumen, en la adición el comportamiento de los signos es el siguiente:

Signos	Operaciones
(+) + (+) = +	(los números se **suman**)
(+) + (-) = + o -	(los números se **restan**)
(-) + (+) = + o -	(los números se **restan**)
(-) + (-) = -	(los números se **suman**)

1.2.1.2 Resta o Diferencia

La operación diferencia o resta se realizará mediante la operación suma entre dos números reales, a la resta se le define mediante la suma de un negativo. De tal manera que: a – b = a + (- b)

Ejemplos:

a) (+16) - (+7) = (+16) - 7 = +9.
b) (+23) - (-5) = (23) + 5 = +28.
c) (-31) - (+14) = (-31) -14 = -45.
d) (-18) - (-25) = (-18) + 25 = +7.

CONCLUSIÓN
Un signo negativo antes de un número, o fuera de un paréntesis, cambia el signo del (de los) número (s).

En resumen, en la resta el comportamiento de los signos es el siguiente:

- (+) = -
- (-) = +

1.2.1.3 Multiplicación de operaciones básicas.

En la operación llamada multiplicación, los elementos que intervienen se conocen como **multiplicando, multiplicador** y al resultado se le denomina **producto**. La multiplicación se puede efectuar con dos o más elementos, los cuales se llaman **factores**; los factores pueden ser positivos o negativos.

Las reglas de los signos en la multiplicación se expresan de la siguiente manera:

a) El producto de dos números con **signos iguales** es un número **positivo.**
b) El producto de dos números con **signos diferentes** es un número **negativo.**

Ejemplos:

a) (+2) x (+5) = +10.
b) (+27) x (-2) = -54.
c) (- 6) x (+8) = -48.
d) (-7) x (-10) = +70.

En resumen, en la multiplicación el comportamiento de los signos es el siguiente:

(+) x (+) = +
(+) x (-) = -
(-) x (+) = -
(-) x (-) = +

Empezaremos a usar la notación : a x b = ab = (a) (b) para denotar el producto.

1.2.1.4 División

La operación llamada división también se denomina cociente y los elementos que en ella intervienen son: dividendo, divisor, cociente y residuo.

Las leyes de los signos para la división de dos números reales son las mismas que rigen a la multiplicación; esto es:

1. El cociente de dos números con **signos iguales** es un número **positivo.**
2. El cociente de dos números con **signos diferentes** es un número **negativo.**

a) (+36) / (+12) = +3.
b) (+6.4) / (-0.4) = -16.
c) (-18) / (+3/4) = -24.
d) (-2.5) / (-0.5) = +5.

En resumen, en la división el comportamiento de los signos es el siguiente:

(+) / (+) = +
(+) / (-) = -
(-) / (+) = -
(-) / (-) = +

Actividades de autoestudio 1.2

Después de haber analizado todo lo concerniente a las leyes de los signos utilizadas en las operaciones básicas, qué concluyes en lo referente al signo del resultado cuando:

a) Se suman dos números positivos
b) Se suman dos números negativos
c) Se suman un número positivo y otro negativo
d) Se multiplican dos números positivos
e) Se multiplican dos números negativos
f) Se multiplican un positivo y un negativo.
g) Se dividen dos números positivos
h) Se dividen dos números negativos
i) Se dividen un positivo entre un negativo.
j) Se dividen un negativo entre un positivo

Ejercicios para resolver de manera individual 1.2

Realiza las siguientes operaciones, usando las leyes de los signos.

1. (+67) + (-45)=
2. (-43) + (+18)=
3. (-54) + (-17)=
4. (-4) + (-15) + (-3)=
5. (7) - (-2)=
6. (-67) - (+15) + (+9)=

7. (-43) - (-98) - (+5)=
8. (+14) + (-34) - (+11)=
9. -(-14-75) + 12=
10. (+44) - (-45) + (+75)=
11. (-3) (38 - 17) + 34=
12. (45) (4 - 7) - 64=
13. (66 - 88) +(-3 -87)=
14. (-8 - 75) (+32 - 9) + 117 - 12=
15. (-6 + 84) (13) + 15=
16. -24 / 3=
17. -36/ -24=
18. (-16 + 7) /-13=
19. (-4) (10 + 7) /-8=
20. [(42 -36) (-2)] / (-6 + 18)=
21. [(-5) (16-21) + 17] / (1 - 8)=
22. {(-2) [(13-7) + 5]} / [6-(-16)]=
23. (5.3 - 2.7)- (-1.4 + 2.3)=
24. (17.8 + 42.1) (-11.5 - 0.4)=
25. (-23.2 - 1.6) / -0.8=

1.3 Axiomas de los números reales.

Los números reales tienen una serie de propiedades, también llamados **axiomas**, que les dan una serie de características que tal vez ya conocemos y que muchas veces nos son familiares, y que son verdaderas reglas operacionales. A continuación se revisarán algunas de estas propiedades: cerradura, conmutativa, asociativa, distributiva, identidad, inversa.

1.3.1 Cerradura.

Para cualquier par de números reales a, b que pertenezcan al conjunto de números reales, si se les suma o se les multiplica, el resultado es otro número real. Los números reales son cerrados para la suma y la multiplicación.

Si a, b $\in$ R, entonces a + b $\in$ R, a x b $\in$ R

Ejemplos:

1. Si a es un número real y b es otro número real, la suma de a + b= c, en donde *c* es otro número real

2. Si 3 es impar y 5 es impar, entonces 3+5=8 no es impar, 3 x 5=15 es impar, por lo tanto, la característica de ser impar no es cerrada en la operación de la suma; pero sí lo es en la operación de multiplicación.

3. Si $\frac{1}{3}$ es racional y $\frac{2}{5}$ es racional, entonces $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{5+6}{15}=\frac{11}{15}$ es racional ,

   Y para que cualquier pareja de números racionales se cumple que la suma y el producto de racionales sigue siendo un número racional; por lo tanto, el conjunto de los números racionales es cerrado bajo las operaciones de suma y producto.

1.3.2 Conmutativa.

Para cualquier par de números reales tales que a y b pertenezcan al conjunto de los números reales, al sumarlos o multiplicarlos, el resultado no depende del orden en que se efectúen estas operaciones; esto no es aplicable para la resta y la división, entonces se tiene que:

Si $a, b \in R$, entonces $a + b = b + a$, $a \times b = b \times a$.

La propiedad conmutativa nos es familiar cuando la expresamos de la siguiente manera:

"el orden de los sumandos no altera la suma" y
"el orden de los factores no altera el producto"

Ejemplos.

7 + 2 = 2 + 7	2 (x) = x(2)
3 x 5 = 5 x 3	(2 x 6) 3 = 3 (6 x 2)

1.3.3 Asociativa.

Para cualquier conjunto de números a,b, c que pertenezcan a los reales, el resultado de sumarlos o multiplicarlos, es independiente de la manera en cómo se agrupen.

Si a, b, c $\in$ R, $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

La propiedad nos dice que se pueden hacer sumas parciales o productos parciales dentro de la operación, agrupando dos de los números reales en el orden que se desee, realizando la operación indicada dentro del

paréntesis y volver a realizar la operación restante con el tercer número real, y el resultado no se altera.

Ejemplos.

1. Al efectuar la operación 22 + 32 + 72, por la propiedad se puede realizar como: (22 + 32) + 72= (54) + 72 = 126 o bien 22 + (32 + 72) = 22 + (104) = 126

2. La operación 5. 8 . 6 con la propiedad, se tiene: (6 . 8) . 5 = (48) . 5 = 240 o bien 6 . (8 . 5) = 6 . (40) = 240

1.3.4 Distributiva.

Para cualquier conjunto de números a,b, c que pertenezcan a los reales, el producto de uno de ello por la suma de los otros, se obtiene también mediante la suma de los productos parciales realizados entre el primer número y cada uno de los sumandos.

Si a, b, c, d $\in$ R, a. (b + c - d) = (a . b) + (a . c) - (a . d)

La propiedad nos dice que si un número real multiplica a otros números reales que aparezcan como sumandos dentro de un paréntesis, entonces éste multiplica a todos y cada uno de los sumandos.

Ejemplos

1. La operación 4 (3- 5+ 8) = 24

(4 x 3) – (4 x 5) + (4 x 8) = 24

12 – 20 + 32 = 24

2. La operación (8 + 6) (7 - 12), se puede realizar de la siguiente manera, aplicando la propiedad distributiva en dos ocasiones:

Solución.

$(8 + 6)\ (7 - 12) = -70$ → operación dada
$(8+6)\ (7) - (8 + 6)\ (12) = -70$ → propiedad distributiva.
$[(8 \times 7) + (6 \times 7)] - [(8 \times 12) + (6 \times 12)] = -70$ → propiedad distributiva.
$56 + 42 - 96 + 72 = -70$ → propiedad cerradura.

CONCLUSIÓN
Tanto en la suma como en la multiplicación, la conmutividad y la asociatividad permiten cambiar el orden a voluntad y colocar o eliminar los paréntesis como se desee, sin embargo, esto no es aplicable para la suma o la resta.

1.3.5 Identidad.

Esta propiedad llamada también de los elementos neutros se expresa de la siguiente manera:

En la suma, para cualquier número que pertenezca a l conjunto de números reales existe el cero que también pertenece a **R**, teniendo que:

$$a + 0 = a$$

En la multiplicación, existe el uno como elemento idéntico (neutro) único teniendo que:

$$a \times 1 = a$$

La propiedad nos dice que cualquier número real al sumarse con cero o al multiplicarse por la unidad, da el mismo número real; esto es, ambos elementos dejan inalterable el número real.

Ejemplos.

***0* es la identidad aditiva**	***1* es la identidad multiplicativa.**
$-5 + 0 = -5$	$4 \times 1 = 4$
$142 + 0 = 142$	$8 \times \frac{a}{a} = 8$
$5/4 + 0 = 5/4$	$4536 \times 1 = 4536$

1.3.6 Inversa.

En la suma, que pertenezca al conjunto de números reales, existe un número real **(-a)** tal que:

$$a + (-a) = 0$$

A **(-a)** se le conoce como el **inverso aditivo del número real a.** El inverso aditivo del inverso aditivo de un número real cualquiera, es el mismo número real.

En la multiplicación, para cualquier número a, **diferente de cero,** existe otro número real único **(1/a)** tal que:

$$a(1/a) = 1$$

El número real **(1/a)** es el **inverso multiplicativo** del número real a. El inverso multiplicativo de cualquier fracción de la forma (a/b) es igual a (b/a).

Ejemplos.

Inverso aditivo	***Inverso multiplicativo***
$(-15) + 15 = 0$	$6 \times \frac{1}{6} = 1$
$54 + (-54) = 0$	$\frac{5}{4} x \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{5}{4} x \frac{4}{5} = 1$
$(-587) + 587 = 0$	$-23 \times -\frac{1}{23} = 1$

Todas estas propiedades son aparentemente demasiado evidentes, pero son muy importantes en la operacionalización con números reales, con lo cual podemos concluir que:
Todo conjunto de números que cumpla con las seis propiedades que se acaban de enunciar recibe el nombre de campo. El conjunto de los números reales forman un campo.

Actividades de autoestudio 1.3

Vuelve a leer con mucha atención el tema: *Axiomas de los números reales.* Posteriormente, reúnete con un compañero y elaboren un resumen en donde indiquen cada uno de los axiomas de los números reales y citen tres ejemplos que ustedes construyan.

Ejercicios para resolver de manera individual 1.3

1. Indica el axioma ilustrado.

a) $3(x + y) = 3x + 3y$
b) $7 + (-7) = 0$
c) $5(xy) = (5x)(y)$
d) $(7x)y = 7(xy)$
e) $45 + 0 = 45$
f) $a(b + c) = (b + c)a$
g) $(x + y)(a + b) = (x + y)a + (x + y)b$
h) $abc + abd = (ab)(c + d)$

2. Aplica la propiedad indicada para que se cumpla la proposición.

a) conmutativa	$(7)(x + y) =$
b) asociativa	$5 + (a - b) =$
c) distributiva	$(-7a)(b + c)$
d) neutro aditivo	$4/9 + \quad =$
e) inverso multiplicativo	$(-47)(\quad) =$
f) cerradura	$(-13)(78) =$
g) idéntico aditivo	$7c^2 + (\quad) =$
k) idéntico multiplicativo	$(-27/4)(\quad) =$
l) inverso aditivo	$(-4/65) + (\quad) =$

Actividades cooperativas 1.3

Integrar equipos de dos a tres alumnos. Escriban el axioma utilizado en cada uno de los procesos siguientes, intercambiando opiniones; todo esto, para consolidar lo aprendido y fomentar la cultura de trabajo en equipo.

a) (2 +6) + (2.3 + 5)=[(2 +6) +2.3] + 5
=[2.3 + (2 +6)] + 5
=[(2.3 + 2) +6] + 5
=(2.3 + 2) + (6 + 5)

b) x [(a + b) + c= x [c + (a + b)]
= xc+x (a+ b)
= xc + xa + xb
= xc + (xa+ xb)
= (xa+ xb) +xc

1.4 Propiedades de la igualdad.

A continuación expondremos las propiedades: *reflexiva, simétrica, transitiva, sustitución, aditiva, multiplicativa.*

1.4.1 Reflexiva.

Esta propiedad indica que todo número real es igual a sí mismo, es decir, todo número es idéntico a sí mismo.

Para todo a $\in$ R, se tiene que a = a

Ejemplos.

28/9 = 28/9 -5.67=-5.67 (c + d)= (c + d) 11=11

1.4.2 Simétrica.

La propiedad simétrica de la igualdad, afirma que en una igualdad de números que pertenezcan al conjunto de los números reales, el primer elemento es igual al segundo, de la misma manera que el segundo es igual al primero.

Si a, b $\in$ R y si a = b entonces b = a

Ejemplos

1. Si 5(6-2) = 20 entonces 20 = 5(6-2)
2. Si 8 (2+3)= 16 + 24 entonces 16 + 24= 8(2+3)

1.4.3 Transitiva.

Si se tienen tres números a, b y c, que pertenezcan al conjunto de números reales; si el primero es igual al segundo, y por otra parte el segundo es igual al tercero, entonces el primero es igual al tercero.

Si a, b, c $\in$ R. si a = b y b = c, entonces a = c

Ejemplos.

Análogamente, para ejemplos de tipo algebraico se tiene:

1. Si $5(x^2) = 80$ y $(y + 40) = 80$ entonces $5(x^2) = (y + 40)$
2. Si $(x + y) = 21r$ y $(x + y) = 65$ entonces $21r = 65$

1.4.4 Sustitución.

Si a, b $\in$ R y si a = b, entonces a puede ser sustituida por b (o viceversa) en cualquier expresión o proposición

Ejemplos.

1. Si x+18=3 y y + (x - 4) = 2 entonces y + (-19) = 2
2. Si 3a-5b= 12 y b=-2a+ 3 entonces 3a-5 (-2a+ 3)= 12

1.4.5 Aditiva.

La propiedad aditiva hace posible sumar a los dos miembros de la igualdad un mismo número (ya sea positivo o negativo) sin que la igualdad se altere.

Si a, b, c, d $\in$ R y si a = b y c = c entonces a + c = b + c

Ejemplos.

1. Si $-x - 12 = 203$	entonces	$(-x - 12) + 8 = (203) + 8$
2. Si $(2w - y) + 3x = 7r - 5$	entonces	$[(2w-y)+3x]+2 = [7r-5]+2$
3. Si $11x = 13$ y $2y = -21z$	entonces	$11x + 2y = 13 - 21z$

1.4.6 Multiplicativa.

Esta propiedad permite multiplicar los dos miembros de la igualdad por un mismo número real y ésta no se altera.

Si a, b, c, d $\in$ R, si a = b, c $\neq$ 0, entonces a . c = b . c

Ejemplos.

1. Si $32 - 3j = 15 - 6j$	entonces	$(-7)(32 - 3j) = (-7)(15 - 6j)$
2. Si $53x^2 = 22$	entonces	$(-16)(53x^2) = (-16)(22)$
3. Si $\sqrt{x} = 42j$ y $-14 = 5y$	entonces	$(\sqrt{x})(y - 14) = (42j)(5y)$

Actividades de autoestudio 1.4

Una vez que has leído el tema: *Propiedades de la igualdad,* elabora un resumen en el que incluyas las principales propiedades de la igualdad.

Ejercicios para resolver de manera individual 1.1

Indica las propiedades de campo y de igualdad que se utilizan en la solución de las siguientes ecuaciones.

1. Encuentra el valor de x:

8x - 20= 4 ecuación dada
8x -20 + (20) = 4 + (20)
8x + [-20 +20)] = 4 + (20)
8x + 0 = 4 + (20)
8x = 4+ (20)
8x = 24
(1/8)(8x) = (1/8)(24)
1x = (1/8)(24)
x = (1/8)(24)
x = 3

Actividades cooperativas **1.4**

Integrar equipos de tres a cinco alumnos. Hallen el valor de la variable indicada, usando las propiedades de campo y de igualdad, intercambiando opiniones; todo esto, para consolidar lo aprendido y fomentar la cultura de trabajo en equipo.

1. 13x - 6 = 8
2. 11 = 12 + 9x
3. 7(6x + 1) = 16
4. 5 (2x - 11) = 5/9
5. $\frac{12x+32}{10}=21$
6. $\frac{22}{6}=12x+19$

1.4.7 Teoremas.

A partir de las propiedades anteriores se derivan los siguientes teoremas. Si a, b, c, d son números que pertenecen al conjunto de los números reales, y son diferentes de cero, entonces:

1. Si $a + b = c + b$ entonces $a = c$ (ley de la cancelación de la suma)
2. Si $(a)(b) = (c)(b)$ entonces $a = c$ $(b \neq 0)$ (ley de la cancelación de la multiplicación)
3. Si $(a)(b) = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$
4. Si $a = b$ entonces $-a = -b$
5. Si $a = b$ entonces $1/a = 1/b$
6. Si $-x = a$ entonces $x = -a$
7. Si $\frac{a}{x} = b$ entonces $x = \frac{a}{b}$ (siempre y cuando $x \neq 0$)
8. Si $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$ entonces $\frac{x}{a} = \frac{c}{b}$ y por lo tanto $x = \frac{ac}{b}$
9. Si $b \neq 0$, entonces $a = (a)\left(\frac{1}{b}\right)$
10. Si $a \neq 0$, $b \neq 0$, entonces $\frac{1}{ab} = \left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}\right)$
11. Si $a \neq 0$, $c \neq 0$ y $ax = b\left(\frac{d}{c}\right)$ entonces $x = \left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{d}{c}\right)$ o $x = b\left(\frac{d}{ac}\right)$
12. Si $c \neq 0$, entonces $a - \frac{b}{c} = \frac{ac-b}{c}$
13. Si $c \neq 0$, entonces $\frac{a}{a} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$
14. Si $c \neq 0$, $b \neq 0$, entonces $\frac{a}{c} + \frac{d}{b} = \frac{ab + cd}{cb}$
15. Si $d \neq 0$, $e \neq 0$, entonces $\left(\frac{a}{1}\right)\left(\frac{b}{d}\right)\left(\frac{c}{e}\right) = \left(\frac{ab}{d}\right)\left(\frac{c}{e}\right) = \left(\frac{b}{d}\right)\left(\frac{ac}{e}\right)$

1.5 Operaciones con números enteros.

1.5.1 Jerarquía en las operaciones aritméticas fundamentales

Para realizar las operaciones fundamentales con el conjunto de números reales, es necesario decidir cuál operación efectuar en primer término y cuál posteriormente, es decir, hay que jerarquizar los cálculos.

En algunas ocasiones al realizar la operación no resulta claro si se debe sumar primero y después multiplicar o primero multiplicar y después sumar, ya que al utilizar una calculadora, ambas opciones dan resultados diferentes. Por esta razón se utiliza una jerarquía entre la operaciones aritméticas, dicha jerarquización define el orden en que deben efectuarse dichas operaciones y la cual queda de la siguiente manera:

1	Eliminar paréntesis, conociendo su valor.
2	Realizar las potencias, incluyendo los radicales.
3	Realizar las multiplicaciones o divisiones, según vayan apareciendo en la operación, de izquierda a derecha.
4	Realizar las sumas o diferencias, según vayan apareciendo en la operación de izquierda a derecha.

Ejemplos.

1. Obtener el resultado de la siguiente expresión:

$$25 + (5 \times 3) - (4)^2$$

Solución

$= 25 + 15 - 16$
$= 40 - 16$
$= 24$

2. Obtener el resultado de la siguiente expresión:

$$[12 - (5 + 9/3)] \, 15/3$$

Solución.

$= [12 - (5 + 3)] \, 5$
$=[12 - 8] \, 5$
$= (4)(5)$
$= 20$

Actividades de autoestudio 1.5

Vuelve a leer el tema: *Operaciones con números enteros,* y redacta un resumen que indique las jerarquías con las operaciones aritméticas fundamentales y busca en otros libros más ejemplos.

Ejercicios para resolver de manera individual 1.5

Encuentra el resultado de las siguientes expresiones usando las prioridades de las operaciones aritméticas.

1. $(38 - 16)^4 /(22 - 6)=$
2. $(24 - 3)^3 + (6/9) =$
3. $(18 - 6)^3/[(15 - 8) - 2^3]$
4. $[(18 - 24)/(3 + 3^5)]\ 10=$

Actividades cooperativas 1.5

Integrar equipos de dos a tres alumnos. Encuentren el resultado de las siguientes expresiones usando la jerarquía de las operaciones aritméticas, intercambiando opiniones; todo esto, para consolidar lo aprendido y fomentar la cultura de trabajo en equipo.

1. $39/3 - 4 + (8 . 5 - 20)^2/ 10- 5=$
2. $33 - 12 . (20 - 14)^2/8 + (10/2 - 3)^3+ 11$
3. $(28/4 +2)^2/(9 - 7)^2 . 3 + 10/5 - 6 =$
4. $(- 9)^2 - (7 - 4)^3/(2 + 6 - 4) + 27/3 =$
5. $(5 - 6/3)^2 - (5 - 9)^2 /2 + 8/4 - 3 - 12=$

1.6 Números racionales.

Un número racional o fracción expresa una o varias partes iguales tomadas de la unidad.

Por ejemplo $\frac{3}{4}$ se lee como "tres cuartos". Esto significa que de una unidad que fue dividida en cuatro partes iguales, se han tomado tres.

Los elementos que intervienen en una fracción son:

- El **numerador:** éste indica cuántas partes se toman de la unidad. Es el número colocado en la parte superior de la fracción.
- El **denominador**: éste indica en cuántas partes iguales se ha dividido la unidad principal. Es el número colocado en la parte inferior de la fracción.

1.6.1 Fracciones propias e impropias.

Las fracciones **propias son menores** que la **unidad** debido a que el numerador es menor que el denominador.

Ejemplos de fracciones propias.

3/7, 14/19, 6/28

Una fracción puede convertirse en un número decimal, realizando simplemente la división indicada; por ejemplo, la fracción anterior, 3/4, es igual a 0.75.

```
      0.75
4 | 3.0
     20
      0
```

Asimismo, los números decimales no enteros pueden convertirse en fracciones propias, transformando el número en una fracción decimal, la cual debe simplificarse.

Ejemplo:

0.12 se transforma en 12/100 que simplificando es 3/25

Las fracciones **impropias son mayores** que la **unidad** debido a que el numerador es mayor que el denominador.

Ejemplos de fracciones impropias son:

8/2, 5/3, 6/4.

Los **números mixtos** constan de una parte entera y de una parte fraccionaria

Ejemplos:

2 4/7, 9 1/5, 3 8/11.

Los números mixtos se pueden convertir en fracciones impropias, multiplicando el denominador por la parte entera y sumándolo al numerador.

Ejemplos:

2 4/7 = 18/7
9 1/5 = 46/5

Actividades de autoestudio 1.6.1

Busca en otros libros de álgebra la definición de los siguientes términos:
Número racional, fracción, fracción propia, fracción impropia, número mixto.

Ejercicios para resolver de manera individual 1.6.1

1. Obtén el valor con 2 decimales y di cuáles fracciones son propias o impropias.

7/9 =
16/8=
21/40 =
57/25 =
3/3 =

2. Transforma los siguientes números mixtos en fracciones impropias

7 3/6=	4 3/8 =	9 7/9=
18 2/5 =	1 4/7 =	13 11/15 =

3. Convierte los siguientes números en lo que se indica

4 en novenos:
3 en medios:
1/2 en octavos:
5/3 en doceavos:
14 en séptimos:

4. Realiza las siguientes operaciones con números mixtos y da el resultado en forma de fracción impropia

6 2/4 + 2 4/6 =
7 2/4 + 8 6/8=
3 6/3 - 6 5/9 =
5/4 + 2 1/4=
8 1/11 - 1/5=

Actividades cooperativas 1.6.1

Integrar equipos de dos a tres alumnos. Resuelvan los siguientes ejercicios, intercambiando opiniones; todo esto, para consolidar lo aprendido y fomentar la cultura de trabajo en equipo.

1. Obtengan el valor con 2 decimales y mencionen cuáles fracciones son propias o impropias.

a) 234 b) 42/76 c) 132/264 d) 15/145 e) 175/35

2. Transformen los siguientes números mixtos en fracciones impropias.

a) 6 63/24 b) 25 1/26 c) 27 65/6 d) 3 3/5 e) 12 7/8 f)14 11/3

3. Conviertan los siguientes números en lo que se indica.

a) 5 en cuartos b) 135 en quintos

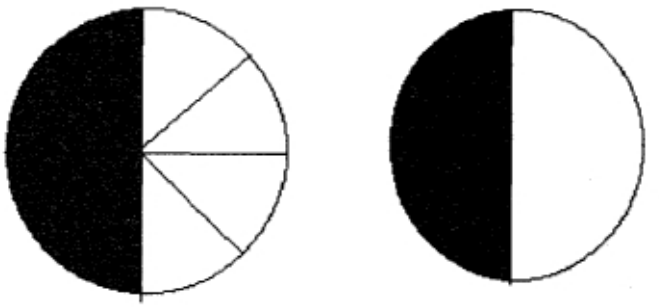
c) 3/12 en cuartos
d) 5/4 en veintavos
e) 8 en medios
f) 4/16 en cuartos

4. Realicen las siguientes operaciones con números mixtos y da el resultado en forma de fracción impropia.

a) 13 2/5 - 5 3/6
d)15/4 - 2 l/3 =
b) 12 2/6 - 3/6 =
e) 23 1/2 + 5/2 =
c) 2 1/4 + 8 1/6 =
f) 5 2/5 - 2 2/5 + 3 2/5

1.6.2 Fracciones equivalentes.

Son utilizadas para la simplificación de operaciones con números racionales, son fracciones más pequeñas que facilitan la realización de operaciones. Por ejemplo la fracción 4/8 se expresa como la fracción ½ que es más pequeña y resulta ser equivalente.



4/8 = 1/2

1.6.3 Reglas de divisibilidad.

A continuación se presentarán los criterios de divisibilidad más utlizados:

	Criterio	Ejemplos
Divisibilidad entre 2	Un número es divisible entre 2 si termina en cero o en número par.	36, 24, 340
Divisibilidad entre 3	Un número es divisible entre 3 si la suma de las cifras que lo forman es un múltiplo de 3.	9, 27, 300, 912

Divisibilidad entre 4	Un número es divisible entre 4 si las últimas 2 cifras que lo forman son ceros o son un múltiplo de 4.	20, 1500, 1416, 1280.
Divisibilidad entre 5	Un número es divisible entre 5 si la última cifra es cero o cinco.	25, 125, 200, 1575, 1082745
Divisibilidad entre 6	Un número es divisible entre 6 si lo es entre 2 y entre 3; o sea, si termina en cero o en cifra par y además la suma de sus cifras es un múltiplo de 3.	18, 3510, 2304
Divisibilidad entre 7	La regla para comprobar si un número es divisible entre 7 es complicada y larga; así, es preferible realizar la división para averiguar si lo es.	49, 560, 63000
Divisibilidad entre 8	Un número es divisible entre 8 si las tres últimas cifras son ceros o bien forman un múltiplo de 8.	3000, 4125, 3016
Divisibilidad entre 9	Un número es divisible entre 9 si la suma de sus cifras es un múltiplo de 9	54369, 123453
Divisibilidad entre 10	Un número es divisible entre 10 cuando la última cifra termina en cero.	2450, 1800, 300, 1000000
Divisibilidad entre 11	Un número es divisible entre 11 cuando al sumar las cifras que ocupan los lugares impares y restarle la suma de las cifras que ocupan los lugares pares, se obtiene cero o un múltiplo de 11.	13497, 59081

Actividades de autoestudio 1.6.3

Lee con atención el apartado correspondiente a ***divisibilidad*** .

Ejercicios para resolver de manera individual 1.6.3

De acuerdo con los criterios de divisibilidad, ¿entre qué números son divisibles las siguientes cifras? Da la argumentación correspondiente.

1. El número 456

2. El número 428

3. El número 275

4. El número 1134

5. El número 6754

Actividades cooperativas 1.6.3

Integrar equipos de dos a tres alumnos. Digan entre qué números son divisibles las siguientes cifras, háganlo intercambiando opiniones; todo esto, para consolidar lo aprendido y fomentar la cultura de trabajo en equipo. Asimismo, argumenten sus respuestas y realicen la operación de división correspondiente.

1. El número 2400 es divisible entre:

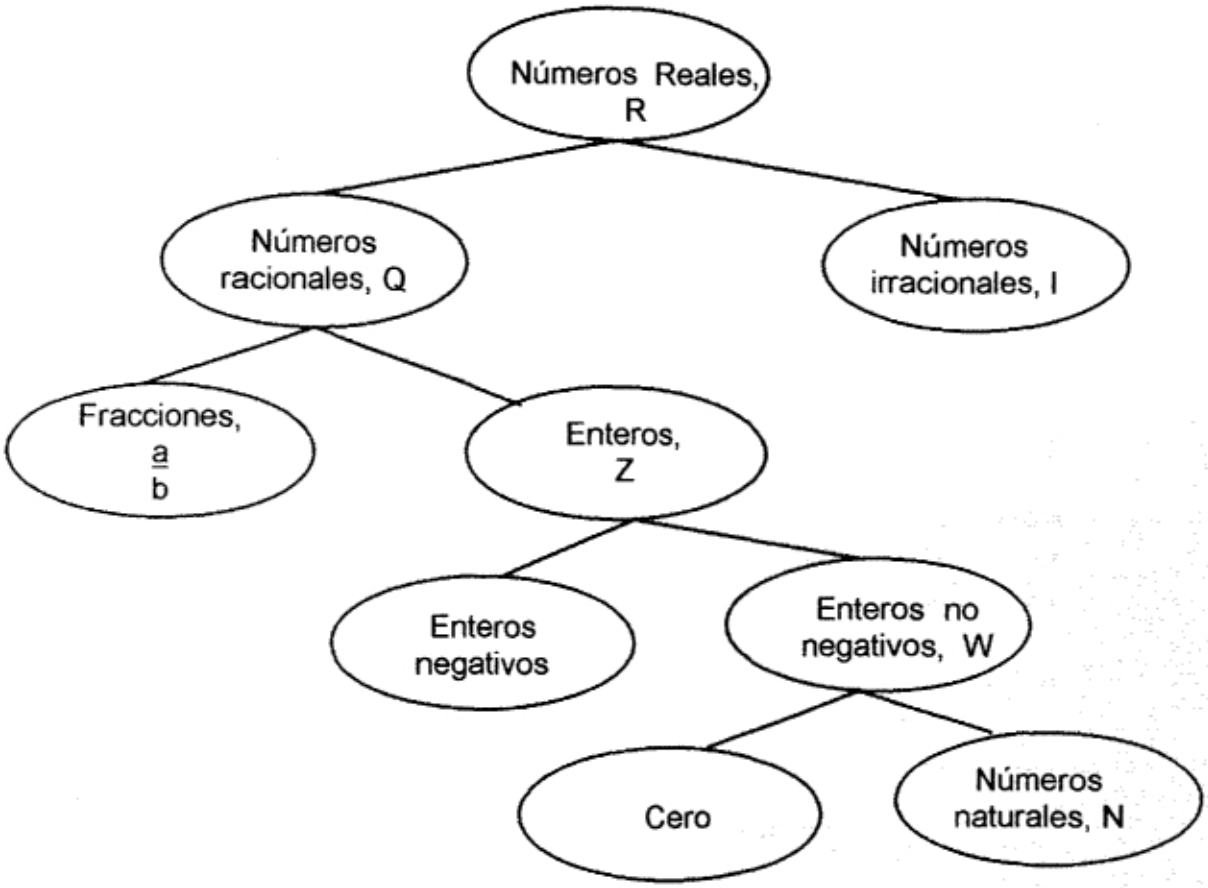
2. El número 2400 es divisible entre:

3. Descompón los siguientes números como producto de números primos.

a) 18129=
b) 1647=

Soluciones a los Ejercicios correspondientes al Módulo 1

Actividades de autoestudio 1.1



Ejercicios para resolver de manera individual 1.1

1.

$-2 \in Z, Q, R$ $\quad 2/3 \in Q, R$ $\quad \sqrt{3} \in I, R$ $\quad 0.5 \in Q, R$

$6 \in N, Z, Q, R$ $\quad 3/4 \in Q, R$ $\quad 8 \in N, Z, Q, R$ $\quad \sqrt{-2} \in R.$

2.

Elementos que pertenecen a N: 2.
Elementos que pertenecen a Z: -5, 0, $-\sqrt{9}$, 2.
Elementos que pertenecen a Q: -5, 0, $-\sqrt{9}$, 2.125, -0.3333...
Elementos que pertenecen a I: $3\pi/2$, $\sqrt{5}$.
Elementos que pertenecen a R: -0.3333..., 1.25, -5, $3\pi/2$, $\sqrt{5}$, 0, $-\sqrt{9}$, 2.
Además, el elemento que no pertenece a $R=\sqrt{-5}$

Actividades de autoestudio 1.2

a) queda positivo b) queda negativo c) se restan y predomina el signo del mayor
d) queda positivo e) queda positivo f) queda negativo
g) queda positivo h) queda positivo i) queda negativo
j) queda negativo

Ejercicios para resolver de manera individual 1.2

1.	22	2.	–25	3.	–71	4.	–22	5.	9
6.	–73	7.	50	8.	–31	9.	101	10.	164
11.	–29	12.	–199	13.	–112	14.	–1804	15.	1029
16.	–8	17.	1.5	18.	0.692	19.	8.5	20.	–1
21.	–6	22.	-0.31	23.	1.7	24.	48	25.	3.1

Actividades de autoestudio 1.3

AXIOMAS DE LOS NÚMEROS REALES

Para todo a, b, c, d $\in$ R, $b \neq 0$, $d \neq 0$, se cumplen:

Cerradura	$a + b \in R$,	$a . b \in R$
Conmutativa	$a + b = b + a$,	$a . b = b . a$
Asociativa	$a + (b + c) = (a + b) + c$,	$a . (b . c) = (a . b) . c$
Distributiva	$a . (b + c - d) = (a . b) + (a . c) - (a . d)$	
Identidad	$a + 0 = 0$	$a . 1 = a$
Inversa	$a + (-a) = 0$,	$a . (1/a) = 1$ con $a \neq 0$

Ejercicios para resolver de manera individual 1.3

1.

a) distributiva	b) cerradura	c)asociativa	d)asociativa
e) identidad	f) conmutativa	g)distributiva	h) distributiva

2.

a) $(x+y)7$
b) $(5+a) -b$
c) $-7ab - 7ac$
d) $4/9 + 0 = 4/9$
e) $(-47)(-1/47)= 1$
f) -1014
g) $7c^2 + 0 = 7c^2$
h) $(-27/4)(1) = -27/4$
i) $(-4/65) + (4/65) = 0$

Actividades de autoestudio 1.4

Para todo a, b, c, d $\in$ R, b $\neq$ 0, d $\neq$ 0, se cumplen:

Reflexiva	a = a		
Simétrica	a = b	entonces	b = a
Transitiva	a = b y b = c	entonces	a = c
Sustitución	a = b y b = c + d	entonces	a = c + d
Aditiva	a = b, c = d	entonces	a + c = b + d
Multiplicativa	a = b, c = d	entonces	a . c = b . d

Ejercicios para resolver de manera individual 1.4

1. Encuentra el valor de x:

$8x - 20= 4$	ecuación dada
$8x -20 + (20) = 4 + (20)$	aditiva
$8x + [-20 +20)] = 4 + (20)$	asociativa
$8x + 0 = 4 + (20)$	inverso aditivo
$8x = 4+ (20)$	idéntico aditivo
$8x = 24$	cerradura
$(1/8)(8x) = (1/8)(24)$	multiplicativa
$1x = (1/8)(24)$	inverso multiplicativo
$x = (1/8)(24)$	idéntico multiplicativo
$x = 3$	cerradura

Actividades de autoestudio 1.5

Eliminar paréntesis, conociendo su valor. Realizar las potencias, incluyendo los radicales. Realizar las multiplicaciones o divisiones, según vayan apareciendo en la operación, de izquierda a derecha. Realizar las sumas o diferencias, según vayan apareciendo en la operación de izquierda a derecha.

Ejercicios para resolver de manera individual 1.5

1. 14641 2. 9261.666 3. –1368 4. –0.243

Ejercicios para resolver de manera individual 1.6.1

1.

7/9 = 0.77 (propia)	16/8= 2.00 (impropia)	21/40 = 0.52 (propia)
57/25 = 2.28 (impropia)	3/3 = 1.00 (unidad)	

2.

7 3/6= 45/6	4 3/8 = 35/8	9 7/9= 88/9
18 2/5 = 92/5	1 4/7 = 11/7	13 11/15 = 206/15

3.

4 en novenos: 36/9	3 en medios: 6/2	1/2 en octavos: 4/8
5/3 en doceavos: 20/12	14 en séptimos: 98/7	

4.

6 2/4 + 2 4/6 = 78/4	7 2/4 + 8 6/8= 130/8	6/3 - 6 5/9 = -14/9
5/4 + 2 1/4= 14/4	8 1/11 - 1/5= 394/55	

Ejercicios para resolver de manera individual 1.6.3

1. Entre 2 porque termina en par; entre 3 porque la suma de sus cifras es múltiplo de 3; entre 4 porque sus dos últimas cifras es múltiplo de 4.
2. Entre 2 porque termina en par; entre 4 porque sus dos últimas cifras es múltiplo de 4.
3. Entre 5 porque la última cifra es 5
4. Entre 2 porque termina en par; entre 3 porque la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
5. Entre 2 porque termina en par

Bibliografía Complementaria

Barnett Raymnod (1990). *Álgebra y Trigonometría.* México: McGraw-Hill.

Fuenlabrada de la Vega Trucíos, Samuel (1994). *Matemáticas I: aritmética y álgebra*. México: McGraw-Hill.

Martínez Aguilera, Miguel Angel (1996). *Matemáticas 1: aritmética y álgebra.* México: McGraw-Hill.

Martínez, Sevilla e Ibarra. (1997). *Álgebra elemental.* México: JUST IN TIME PRESS, S.A. DE C.V.

Murphy Johnson y Steffensen (1994). *Álgebra y Trigonometría con aplicaciones.* México: Trillas.

Sir Issac Newton

Módulo 2

Expresiones algebraicas

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

Triángulo de Pascal

Objetivos informativos.

Al finalizar el módulo, el alumno:

Identificará las principales características del lenguaje algebraico, diferenciando del aritmético.

Identificará las leyes que rigen el lenguaje algebraico y las aplicará en la solución de diversas operaciones algebraicas.

Objetivos formativos.

Adquirirá el hábito de la responsabilidad en el trabajo en equipo.

Actuará con respeto y tolerancia hacia el resto del grupo.

2. Expresiones Algebraicas

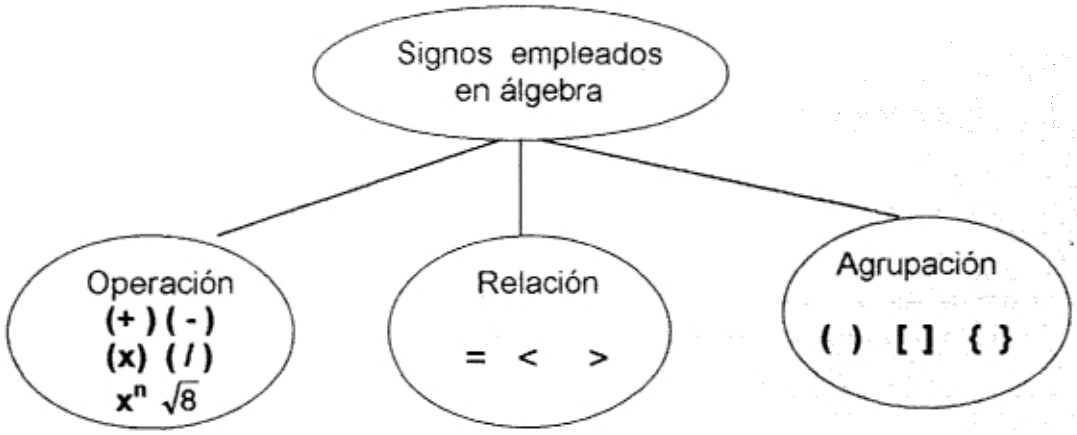
En este capítulo se tratará todo lo concerniente al lenguaje algebraico. El concepto de cantidad en álgebra es mucho más amplio que en aritmética, en álgebra las cantidades se representan por medio de letras, con lo cual se logra la generalización; la letra puede representar un sinnúmero de valores.

Ahora procederemos a definir Álgebra:

Álgebra es la rama de las matemáticas que estudia la cantidad del modo más general posible.

El álgebra utiliza símbolos para representar cantidades, estos son números y letras, los primeros representan cantidades conocidas y perfectamente definidas y las segundas representan toda clase de cantidades ya sea conocidas o desconocidas. Se expresan con las primeras letras del alfabeto, las cantidades conocidas y con las últimas, cantidades desconocidas.

Los signos empleados en álgebra son de tres tipos:



Expresión algebraica es la representación de un símbolo algebraico o de una o más operaciones algebraicas.

Las expresiones algebraicas constan de: signos, coeficientes, variables (la parte literal) y exponentes.

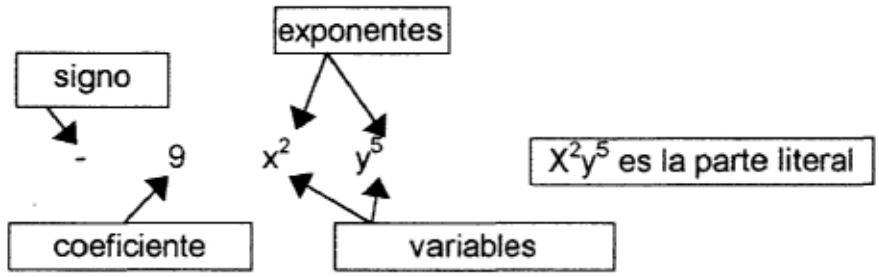
Coeficiente es el número colocado antes de la variable que nos indica el número de veces que ésta es tomada como sumando.

Así en la expresión 3a, 3 es el coeficiente e indica lo siguiente: 3a= a + a + a.

Exponente es el número pequeño colocado arriba y a la derecha de un número o variable llamada base, indica el número de veces que ésta es tomada como factor.

De tal manera que a^3 significa a x a x a.

En el siguiente ejemplo se ilustra los elementos que intervienen en una expresión algebraica.



Término es una expresión algebraica que consta de un sólo símbolo o de varios símbolos **no separados entre sí por el signo más (+) o menos (-).**

Por ejemplo: 5x, 2xy, $7a^2b^3c^4$ son términos.

Las expresiones algebraicas que constan de un solo término se llaman **monomios**; las de dos términos, **binomios**; las de tres términos, **trinomios**, etc. En general, todas las expresiones algebraicas se denominan **polinomios**.

Ejemplos de monomios: 7x, $15x^3y^2$, $-3/4xyz^3$, $(2x -y)^3$, $-5/4\ ab^2$

Ejemplos de binomios: (a – b), (2xy + 3x), $(4x^3 + 5y^2)$, $(2xy^3 - 3/4x^2y^3)$, $(a^2 - b^2)$

Ejemplos de trinomios: $a^2 - 2ab + b^2$, $x^3 + 2X^2 - 3x$, $5xy^2 + 3x^3 - 4$

2.1 Valor numérico.

Valor numérico de una expresión algebraica es el resultado que se obtiene de sustituir las letras por valores numéricos dados y efectuar después las operaciones indicadas.

Este proceso es muy utilizado en matemáticas y en otras materias con las que ésta se relaciona, por ejemplo en física calculas fuerzas a partir del producto de la masa por la aceleración F= m x a de tal manera que si se necesita calcular la fuerza para mover una masa de 15 kilogramos con una aceleración de 9.81 m/s^2, necesitas sustituir los valores en la fórmula anterior con ello el resultado será el valor de la fuerza y al mismo tiempo el valor numérico de una expresión algebraica.

Ejemplo.

Si a=1, b=2, hallar el valor numérico de la expresión

$$\sqrt{8\,ab} = \sqrt{(8)(1)(2)} = 4$$

Valor numérico de expresiones simples: este resultado se encuentra simplemente con sustituir los valores otorgados a las variables en un monomio.

Ejemplo

Encontrar el valor numérico de la expresión: $\frac{4a^2b^3}{5\,cd}$

cuando a= ½ b=1/3 c=2 d=3

$$\frac{4a^2b^3}{5\,cd} = \frac{4(1/2)^2\,(1/3)^3}{5(2)(3)}$$

$$= \frac{4(1/4)(1/27)}{30}$$

$$= 1/810$$

Valor numérico de una expresión compuesta: es el que se encuentra al sustituir determinados valores en un polinomio.

Ejemplo:
Si a=5 b=3 c= 2 d=4, calcular $a^2 - 5ab + 3c^2d$

$$\begin{aligned} a^2 - 5ab + 3c^2d &= (5)^2 - 5(5)(3) + 3(2)^2(4) \\ &= 25 - 5(5)(3) + 3(4)(4) \\ &= 25 - 75 + 48 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Actividades de autoestudio 2.1

Calcular el valor numérico para las siguientes expresiones algebraicas

1. $x^2y - 1$ cuando $x = -2$, $y = 1/2$

2. $\dfrac{-(-x+2y)^3}{(x-2y)^2}$ cuando $x = 2/3$, y $5/4$.

3. $(2m + 3n + 4p)(8p + 6n - 4m)(9n + 20p)$ cuando $m=1/2$ $n=2/3$ $p=1/4$

4. $(b-m)(c-n)+4a^2$ cuando $m=1/2$ $n=2/3$ $a=1$ $b=2$ $c=3$

5. $5(x-y)^3 - 3x$ cuando $x = 1/2$, $y=-1$

Ejercicios para resolver de manera individual 2.1

Halla el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas:

1. $(x^3 - y) + (x\,y)(2x - 3y)$, si $x=7$, $y= -8$.

2. $3(x^2 - y) - (x - y) + 4y$, si $x = -3$, $y = -12$.

Actividades cooperativas 2.1

Integrar equipos de dos alumnos. Hallen el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas, intercambiando opiniones; todo esto, para consolidar lo aprendido y fomentar la cultura de trabajo en equipo.

1. $12x^3y^2 - 2x^2y^3$ si $x = -6$, $y = 1/2$
2. $(3x + y)^2/(x + 10y)^2$ si $x = -5$, $y = -6/4$
3. $[x \cdot 12y - (6x \cdot y^3)] + 3(y^2 + 7x)$ si $x = -4$, $y = 6$
4. $(y - x)^2 - (-y + x)^3$ si $x = 1/2$, $y = 3/4$
5. $(1 - a^2)(1 + a^3) + a^2 - 7$ si $a = -4/3$

2.2 Grado de un polinomio.

El grado de una variable en una expresión algebraica es el **exponente** al que se encuentra elevada.

El grado de un término puede ser:

El **grado absoluto** de un término es la suma de los exponentes de sus factores literales.

De tal manera que 5a es de primer grado porque el exponente de la literal es 1, el término abc es de tercer grado porque es la suma de los exponentes de los tres factores literales da 3 y $5a^4b^2$ es de sexto grado porque la suma de los exponentes de la parte literal es 6.

El **grado de un término con relación a una letra** es el exponente de dicha letra.

Así en el término bx^3 es de primer grado con relación a b y es de tercer grado con relación a x.

El grado de un polinomio puede ser absoluto y con relación a una letra.

El **grado absoluto de un polinomio** es el grado de su término de mayor grado.

Por ejemplo en el polinomio: $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x$ el grado absoluto es de cuarto porque cuatro es el exponente mayor de la expresión.

El **grado de un polinomio con relación a una letra** es el mayor exponente de dicha letra en el polinomio.

Por ejemplo, en la expresión $a^6 + a^4x^2 + a^2x^4$ es de sexto grado con relación a "a" y de cuarto con relación a "x"

Para consolidar lo anterior se presentan el siguiente ejemplo:

Obtener el grado del siguiente polinomio: $6x^2y - 3x^2y^2 + 9x^3y^2 - 24$

Solución:

- Se obtiene el grado de cada término y resulta que:

  el grado de $6x^2y$ es 3.

  el grado de $3x^2y^2$ es 4.

  el grado de $9x^3y^2$ es 5.

  el grado de 24 es 0.

- Se comparan los resultados y se determina el mayor para obtener el grado absoluto del polinomio.

  Para este ejemplo, el polinomio es de quinto grado

2.3 Lenguaje algebraico.

Con las cantidades algebraicas, representadas por letras, pueden hacerse las mismas operaciones que con el conjunto de números Reales, una parte fundamental de la ciencia de las incógnitas y que representa dificultades en el alumno, es el hecho de transformar el lenguaje coloquial en una expresión algebraica, teniendo con ello la posibilidad de simplificar procesos y solucionar problemas de la vida cotidiana por medio de un modelo matemático simbólico que permita manejar los conceptos de una manera simple.

A continuación se ofrecen algunos ejemplos en donde se aprecia la transformación del lenguaje natural al lenguaje algebraico:

Un número cualquiera:	a
La suma de dos números:	a + b
La mitad de un número:	a/2
La diferencia de dos números:	a-b
El producto de dos números:	Ab
El cociente de dos números:	a/b
El promedio de dos números:	(a + b)/2
El triple de la suma de tres números:	3(a+b+m)
La suma del cuadrado de un número más el cubo de otro:	m^2+n^3
El triple de un número más el doble de otro:	3m + 2n
Número consecutivo de a	a+1
Tenía $9 y gasté x. Ahora tengo:	9 – x
X lápices cuestan $25. Cada uno tiene un precio de:	25/x
Recibo $x, después $a, gasto $m. ¿Cuánto me queda?:	(x+a) - m

Actividades de autoestudio 2.3

Vuelve a leer el tema de *Lenguaje algebraico* y contesta Verdadero o Falso, en las siguientes afirmaciones, según sea el caso.

1. Se pueden transformar expresiones del lenguaje algebraico al lenguaje natural .....
2. Cualquier situación de la vida cotidiana se puede expresar por medio de letras .....
3. Sólo se deben utilizar las letras x *y* y.....
4. El lenguaje algebraico es exclusivo de las matemáticas.....
5. Se puede utilizar cualquier letra que de preferencia tenga alguna relación.....

Ejercicios para resolver de manera individual 2.3

I. Escribe la expresión algebraica correspondiente.

1. La suma de dos números al cubo
2. El cuadrado de la diferencia de dos números entre la suma de los mismos
3. Un binomio a la cuarta potencia
4. El cociente de la diferencia de dos números entre el producto de los mismos números
5. El duplo de un número entre el triple de otro
6. El doble de la diferencia de dos números
7. El cociente de un numero entre la suma del mismo número más otro
8. El cociente de la diferencia de dos números entre el cuadrado de la suma de los mismos números.
9. La suma del duplo de a con el triple de b y la mitad de c
10. ¿Cuál será la superficie de un cuadrado de x metros por lado?

II. Escribe en lenguaje común las siguientes expresiones algebraicas.

1. $2x^2y$
2. $x^2/2+ 3yx$
3. $5(2x +y^2)^3$
4. $(xy)^2/2z$
5. $(a + 5b)^2 -(3a + b)^3$
6. $2a/b^2$
7. $(2a - b^3)^4$
8. $5a^2 - 5b^2$
9. $3ab - 8b^2$
10. $4(x^2-3) + 15y$

Actividades cooperativas 2.3

Integrar equipos de tres a cinco alumnos. Transformen al lenguaje algebraico las siguientes propuestas dadas en lenguaje común. Se recomienda el uso de las variables x, y, z. Hagan lo anterior, intercambiando opiniones y actuando con respeto y tolerancia hacia el resto del grupo; todo esto, como refuerzo del tema contemplado en este apartado.

1. Un número disminuido en 5.

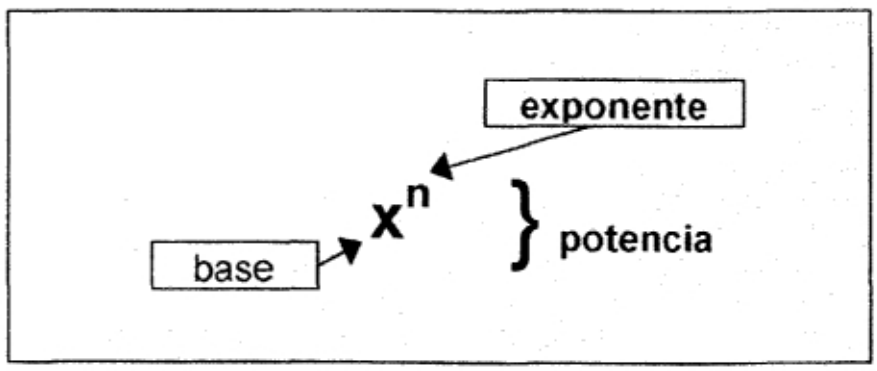
2. El doble de un número equivale al triple de otro.
3. Un número excede en 17 a otro.
4. La edad de Joanna excede en 8 años a la de Ricardo.
5. La diferencia de dos números excede en 9 a la de un tercer número.
6. La suma de dos números equivale al doble de su diferencia.
7. La semidiferencia de dos números es igual al triple de la suma de los mismos números.
8. La edad de Fernando es menor en 3 años que la de Liliana.
9. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual al doble de la medida de un ángulo recto.
10. El perímetro de un cuadrado es igual a 24 centímetros.
11. El área de un rectángulo es igual a la semisuma de dos de sus lados desiguales.
12. El perímetro de un rectángulo es igual a 36 centímetros.
13. La diferencia del triple de la suma de dos números menos el doble del producto de ambos es igual a 139.
14. Un quinto del volumen de un cubo es igual a la suma de sus áreas de las caras laterales.
15. La mitad del volumen de un paralelepípedo de base cuadrada es igual a la suma de las 4 áreas laterales más el doble de la suma de las áreas de la base y la tapa.

2.4 Leyes de los exponentes.

Como recodarás,

el **exponente** es el número o letra pequeño colocado en la parte superior derecha de una cantidad llamada **base** y nos indica el número de veces que la base se toma como factor, *ésta definición sólo es válida para exponentes enteros positivos*

$x^n = x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$ **donde x aparece como factor *n* veces, con $n \in N$ y $x \in R$.**



Primera ley

Cuando se multiplican dos potencias de la misma base, el resultado es la misma base y su exponente es la suma de los exponentes de las potencias que intervienen.

$$1.\ a^m a^n = a^{m+n}$$

Ejemplo: $5^2 \times 5^3 = (5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5) = 5^{(2+3)} = 5^5$

Más ejemplos.

1. $4^2\ 4^3 = 4^{2+3}$

Solución.

$= 4^5$

$= 1024$

2. $(-3)^3(-3)^4 = (-3)^{3+4}$

Solución.

$=(-3)^7$

$=(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3).$

$= -2187$

Con expresiones algebraicas:

3. $b^5b^4 = b^{5+4}$

Solución.

$=b^9$

4. $(8a)^2\ (8a)^3 = (8a)^{2+3}$

Solución.

$= (8a)^5$

La expresión x^n se le llama potencia.

Ejemplo: En la expresión 5^3 **5** es la base, **3** el exponente.

☞ *No es necesario escribir el exponente igual a uno.*

Es común encontrar expresiones algebraicas de la forma: $-21a^2b^3c^5$ que constan de varios elementos, en donde el signo menos corresponde a toda la expresión (no es de ninguno de los factores, sino de toda la expresión), 21 es el coeficiente y las variables (letras) a, b y c son las bases y los números a los que se encuentran elevadas, los exponentes.

$$-\ 21a^2b^3c^5 = -21\ a\,.\,a\,.\,b\,.\,b\,.\,b\,.\,c\,.\,c\,.\,c\,.\,c\,.\,c$$

A continuación se presentan algunas consideraciones generales relativas a la operacionalización de potencias, para lo cual se tiene que "n" es un exponente entero, "a" es la base; a y n pertenecen al conjunto de los reales.

1. $a^n = a \times a \times a \times \ldots a$ n factores de a

2. Para n= 0 a diferente de 0 $a^0 = 1$

3. Para "n" negativo: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Para operar adecuadamente estas potencias debemos conocer ciertas leyes, las cuales estudiaremos a continuación. Consideremos para todos los casos a y b como las bases y que sean diferentes de cero; además a, b $\in$ R (son números reales). m y n serán los exponentes, donde m, n $\in$ R.

$= (8a)\ (8a)\ (8a)\ (8a)\ (8a)$

$= 32768a^5$

Segunda ley
Cuando se dividen dos potencias de la misma base, la base se conserva y se restan los exponentes.

$$2.\quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejemplo

$$\frac{7^5}{7^2} = \frac{7\,.\,7\,.\,7\,.\,\cancel{7\,.\,7}}{\cancel{7\,.\,7}} = \underline{7\,.\,7\,.\,7} = 7^3$$

Por lo tanto, se tiene que $\frac{7^5}{7^2} = 7^3$ donde se observa que la potencia de 7^3 proviene de restar los exponentes del numerador y denominador (5 - 2 = 3).

Más ejemplos

$$\frac{3^2}{3^4} = 3^{2-4}$$

$$= 3^{-2}$$

Ahora bien, si escribimos la fracción como un producto de factores:

$$\frac{3^2}{3^4} = \frac{3\cdot 3}{3\,.\,3\,.\,3\,.\,3}$$

$$= \frac{1}{3\,.\,3}$$

$$= \frac{1}{3^2}$$

Tercera ley.

Cuando elevamos una potencia a otra potencia, la base se conserva y los exponentes se multiplican.

$$3.\ (a^m)^n = a^{mn}$$

Ejemplos.

1. $(4^2)^3=4^{2\cdot 3}$

Solución.

$=4^6$

$= 4096$

2. $(5^5)^2 =5^{5\cdot 2}$

Solución.

$=5^{10}$

$= 9765625$

3. $(3^2)^3=(3^2)(3^2)(3^2)$

Solución.

$=3^{2+2+2}$

$=3^6$

Cuarta ley.
Cuando un exponente afecta a una multiplicación; cada uno de los factores, llamados bases, es afectado por el exponente.

$$4.\ (ab)^n = a^n b^n$$

Ejemplos.

1. $(2.4)^2=2^2 . 4^2$

Solución.

$=4 \cdot 16$

$=64.$

Si multiplicamos lo que se encuentra en el paréntesis:

$(2.4)^2=(8)^2$

$= 64$ se obtiene el mismo resultado.

Quinta ley.

Al tener el producto de dos potencias elevadas a un exponente, dicho exponente multiplica a cada uno de los exponentes de las bases.

$$\mathbf{6.}\ (a^n \cdot b^m)^p = a^{n.p}b^{m.p}$$

Ejemplos:

1. $(2^3 \cdot 3^2)^4 = (2^3)^4(3^2)^4$

$= 2^{12}3^8$

$= 26873856$

2. $(5 \cdot x \cdot y)^3 = 5^3x^3y^3=125x^3y^3.$

3. $(3a\ b^3)^4= 3^4a^4b^{12}=81a^4b^{12}$

4. $(13a^2)^3= (13)^3(13a^2)^3=13^3a^6$

Sexta ley.

Cuando se tiene una fracción elevada a un exponente, dicho exponente afecta tanto al numerador como al denominador.

6. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ siempre y cuando $b \neq 0$

Ejemplos

1. $\left(\frac{2}{3}\right)^2$

Solución.

$= \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$

$= \frac{(2)^2}{(3)^2}$

$= \frac{4}{9}$

2. $\left(\frac{4b^3}{2c}\right)^3 = \left(\frac{4b^3}{2c}\right)\left(\frac{4b^3}{2c}\right)\left(\frac{4b^3}{2c}\right)$

Solución.

$= \frac{4^3 b^9}{2^3 c^3}$

$= \frac{64b^9}{8c^3}$

Séptima ley

Una cantidad elevada a un exponente fraccionario equivale a extraer una raíz, en donde el numerador es la potencia que afecta a la base y denominador será el índice de la raíz .

$$7.\ b^{m/n} = (b^m)^{1/n} = (b^{1/n})^m = \sqrt[n]{b^m}$$

Ejemplos.

1. $4^{1/2} = \sqrt{4}$ por la definición, se puede indicar un exponente fraccionario como una raíz.

Solución.

☞ Recuerda que la raíz, cuadrada no se escribe $\sqrt[2]{4}$ ya que se puede omitir el índice 2 del radical.

= 2 ya que la raíz cuadrada positiva de cuatro es dos.

2. $-(4)^{1/2} = -\sqrt{4}$

Solución.

$=-2$

3. $8^{1/3} = \sqrt[3]{8}$

Solución.

$=2$ ya que la raíz cúbica de ocho es dos.

Podemos indicar esto de la forma siguiente:

$8^{1/3} = \sqrt[3]{8}$

$= \sqrt[3]{2.2.2}$

$= \sqrt[3]{2^3}$ indicamos el índice del radical como exponente fraccionario.

$= 2^{3/3}$

$= 2^{3/3}$

$= 2$

Octava ley
Cuando el exponente fraccionario es negativo, éste es igual a la unidad sobre la misma potencia pero positiva.

$$b^{-m/n} = \frac{1}{b^{m/n}}$$

Se debe recordar lo siguiente:

$(-4)^{1/2} = \sqrt{-4}$ **no** tiene solución; esto es, **en los números reales no existen raíces de números negativos, cuando la raíz es par.**

Las raíces nones, de números negativos si existen, ejemplo:

$(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8}$

Solución.

$= \sqrt[3]{(-2)(-2)(-2)}$

$= \sqrt[3]{-2^3}$

$= -2$

Actividades de autoestudio 2.4

- Investiga tres o más situaciones de la vida cotidiana en las cuales se vean involucradas potencias, es decir, en donde aparezca un número *x* como factor *n* veces.
- Realiza un resumen de las leyes de los exponentes en donde incluyas las consideraciones de los mismos.

Ejercicios para resolver de manera individual 2.4

1. $(3^5)^3=$
2. $[(1/8)^3]^2=$
3. $(6^3)^5=$
4. $[(-5)^2]^3=$
5. $(y^4)^2=$
6. $[(c)^3]^3=$
7. $(2^3 . 3^3 . 5^2)^3=$
8. $(a^4 . b^3)^3=$
9. $(-3x^2y^4 . 3xy^3)^4=$

Actividades cooperativas 2.4

Para las actividades I y II:
Integrar equipos de tres a cinco alumnos. Realicen los ejercicios correspondientes de manera cooperativa, no olviden respetar las opiniones de sus compañeros; todo esto, como refuerzo del tema contemplado en este apartado y fomentar la tolerancia.

I. Elaboren un cuadro comparativo en donde resalten las principales semejanzas y las diferencias entre las leyes de los exponentes. Construyan un ejemplo para comprobar cada ley

II. Resuelvan los siguientes ejercicios:

1. $(3^4)(3^2) =$
2. $(4)^5 (4)^3 =$
3. $(5b)^4 (5b)^4 =$
4. $(m)^4 (m)^3 (m) =$
5. $(7/6x)^3 (7/6x)^2 =$
6. $(5x7)^3 = (\_\_)^3 . (7)^3 =$
7. $(4 . 3a)^4 = (\_\_)^4 . (\_\_)^4 =$
8. $(-3a^2 . b)^5 =$
9. $(a^3 \cdot b^3 \cdot c)^2 =$
10. $(8a^7 \cdot 4 b^2)^3 =$
11. $(-6b^3 . 7c^5 . 4a)^3 =$
12. $\left(\frac{5x^3y^2}{4xy^4}\right)^3 =$
13. $\left(\frac{3b^5c}{6c^3b}\right)^4 =$
14. $\left(\frac{7lm^5}{2ml^3}\right) =$
15. $\left(\frac{4s^5b^3}{5t^4}\right)^2 =$
16. $\left(-\frac{b^2c}{3bc}\right)^5 =$

III. Para esta actividad, reúnete con un compañero de clase y establezcan una metodología para resolver cualquier tipo de operación con exponentes. Básate en varios ejemplos; con objeto de consolidar su aprendizaje.

Actividades complementarias 2.4

Simplifica usando las leyes de los exponentes, y expresa las respuestas usando sólo exponentes positivos.

1. $(3a^5)(2a^{-3}) =$
2. $\frac{6x^{-2}}{8x^{-5}} =$
3. $(2a^{-3}b^2)^{-2} =$

4. $\left(\frac{a^3}{b^5}\right)^{-2} =$

5. $\frac{4x^{-3}y^{-5}}{6x^{-4}y^3} =$

6. $\left(\frac{m^{-3}m^3}{n^{-2}}\right)^{-2} =$

7. $\left[\left(\frac{12x^{-3}}{8y^4}\right)^{-1}\right]^{-2} =$

8. $(x + y)^{-3}$

9. $\left[\left(\frac{4a^2}{2b^5}\right)^2\right]^{-1} =$

10. $\left(\frac{x^{-3}}{y^4y^{-4}}\right)^{-3} =$

11. $\frac{6m^{-2}n^3}{15m^{-1}n^{-2}} =$

Resumen de las leyes de los exponentes

Leyes	Consideraciones
$a^m a^n = a^{m+n}$ $(a^m)^n = a^{mn}$ $(ab)^n = a^n b^n$ $(a^n \cdot b^m)^p = a^{n.p}\, b^{m.p}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ siempre y cuando $b \neq 0$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ siempre y cuando $a \neq 0$ $b^{m/n} = (b^m)^{1/n}$ $b^{-m/n} = \frac{1}{b^{m/n}}$	$a^0 = 1$ $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ $b^{1/n} = \sqrt[n]{b}$

2.5 Operaciones con Expresiones Algebraicas.

En este apartado se contemplarán las operaciones fundamentales tales como adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con expresiones algebraicas, esto es, con monomios, binomios, trinomios y polinomios.

2.5.1 Suma y resta de expresiones algebraicas.

Para efectuar la suma y la resta algebraicas, es necesario considerar que éstas sólo se pueden efectuar con términos semejantes y por ello procedemos a definir dicho término.

Términos semejantes *son aquellas expresiones que tienen las* ***mismas literales con los mismos exponentes***, difieren solamente en sus coeficientes numéricos.

Para una mejor comprensión del concepto de términos semejantes, utilizaremos la siguiente analogía: en la conservación de las especies, se unen parejas con las mismas características, es decir, se unen perros con perros, leones con leones, gatos con gatos. Si se observa cada pareja pertenece a la misma especie, esto es, tienen características comunes. En álgebra sucede algo semejante, sólo se pueden sumar o restar las "x" con las "x", las "y^2" con las "y^2". Esto es,

sólo se pueden sumar y restar términos semejantes y a esta operación se le denomina **reducción de términos semejantes**.

Ejemplos de términos semejantes:

$5yx^3$, $-11yx^3$, $17yx^3$

m^2n, $29\,m^2n$, $-32m^2n$

$-a^2b^2$, $5a^2b^2$, $14a^2b^2$

La **adición** es una operación que tiene por objeto **reunir** dos o más expresiones algebraicas (sumandos) en una sola expresión algebraica (suma).

Como regla general para sumar en álgebra:

♦ Se escriben dos o más expresiones algebraicas unas a continuación de otras con sus propios signos. ♦ Se reducen términos semejantes.

Cuando se suman *monomios* se procede de la siguiente manera:

Sea sumar 5a, 6b, 8c;

1. Escribimos las cantidades una a continuación de otra, separándolas con sus propios signos.	5a + 6b + 8c
2.Aplicado la propiedad conmutativa, el resultado puede ser también	6b + 5a + 8c

Si sumamos $3a^2b$, $4ab^2$, a^2b, $7ab^2$, $6b^3$

Para efectuar la adición se tendrá:

1. Escribimos las cantidades una a continuación de otra, separándolas con sus propios signos.	$3a^2b + 4ab^2 + a^2b + 7ab^2 + 6b^3$
2. Al reducir términos quedará:	$4a^2b + 11\ ab^2 + 6b^3$

☛ *Cuando algún sumando es negativo, se incluye un paréntesis para indicar la suma.*

Ejemplo: Sumar 7a, -8b, -15a, 9b, -4c, 8

1. Escribimos las cantidades una a continuación de otra, separándolas con sus propios signos, *sin olvidar que los sumandos negativos se ponen entre paréntesis.*	7a + (-8b)+ (-15a) + 9b+ (-4c) + 8
2. Se realiza la operación, aplicando las leyes de signos para eliminar paréntesis.	7a - 8b -15a + 9b -4c + 8
3. Al reducir términos semejantes queda:	-8a + b – 4c + 8

Cuando se suman *polinomios* la suma suele indicarse incluyendo los sumandos dentro de paréntesis, así:

(a - b), (2a + 3b – c), (-4a +5b)

Para sumar lo anterior se tiene:

1. Escribimos las cantidades una a continuación de otra, separándolas con sus propios signos.	$(a - b) + (2a + 3b - c) + (-4a + 5b)$
2. Se aplica la ley de los signos para eliminar paréntesis.	$a - b + 2a + 3b - c - 4a + 5b$
3. Se reducen términos semejantes	$-a + 7b - c$

Sumar $(5a^3 + 8b - 7c^2)$ con $(6a^3 - 9b - c^2)$

Eliminamos paréntesis	$5a^3 + 8b - 7c^2 + 6a^3 - 9b - c^2$
Aplicamos la propiedad conmutativa	$5a^3 + 6a^3 + 8b - 9b - 7c^2 - c^2$
Reducimos términos semejantes.	$(11)a^3 + (-1)b - 8c^2$
Aplicamos la regla de los signos	$11a^3 - b - 8c^2$

☞ *En la práctica suelen colocarse los polinomios unos debajo de los otros de tal manera que los términos semejantes queden en columna.*

Cuando se **resta**, se efectúa una operación que tiene por objeto, dada una suma de dos sumandos (minuendo) y (sustraendo), hallar otro sumando llamado resta o diferencia.

Si "a" es el minuendo y "b" el sustraendo, la resta o diferencia es "a – b".

Como regla general para restar:

Se escribe el minuendo con sus propios signos, a continuación el sustraendo con signos cambiados, procediéndose a reducir términos semejantes si los hay.

☛ *En el caso de la resta, se considera que el signo que precede al paréntesis afecta a cada uno de los términos, o sea, se aplica la propiedad distributiva de los números reales; o bien se multiplica por menos uno a todos los términos del sustraendo.*

Ejemplos.

☛ *Se acostumbra escribir el resultado indicando las variables en orden alfabético. Si hay números sin variables (llamados términos independientes) se dejan al último. En el caso de que se tenga la misma variable elevada a diferentes potencias, se escribe en forma decreciente, con respecto a la potencia.*

1. Resta $(8x^2 - 3x + 6) - (5x^3 + 2x - 1)=$

Aplicamos la propiedad distributiva al signo	$8x^2 - 3x + 6 - 5x^2 - 2x + 1$
Aplicamos la propiedad conmutativa	$8X^2 - 5x^2 - 3x - 2x + 6 + 1$
Reducimos términos semejantes	$3x^2 - 5x + 7$
El resultado está ordenado en forma decreciente con respecto a la potencia.	$7 - 5x + 3x^2$

☛ *Cuando tengamos varios paréntesis, debemos quitarlos de dentro hacia afuera, teniendo cuidado con los signos al aplicar la propiedad distributiva.*

Actividades de autoestudio 2.5.1

- En media cuartilla escribe algunas ideas y definiciones que consideres importantes acerca de este tema.
- Vuelve a leer el tema: *Propiedades de campo de los números reales* y haz un breve resumen de cada una de ellas, ya que te serán muy útiles para que puedas resolver los siguientes ejercicios.

Ejercicios para resolver de manera individual 2.5.1

Efectúa las siguientes operaciones.

1. $x - (a - 5x) + (12x - a)=$
2. $xy + 4y^2 - (4xy - 5y^2) + (2x^2 - 12xy)=$

3. Efectúa la siguiente operación quitando los paréntesis adecuadamente.

$$-(2p - 3q) - [5p - (3q - 8p)] =$$

Actividades cooperativas 2.5.1

Reúnete con un compañero y efectúen la operación indicada, simplificando el resultado. Todo esto para consolidar lo aprendido en este apartado.

1. $(x^3-7x + 2) - (5x^4+4x^3-6x+3)$
2. $(14x^4 - 16x^3 + 7x^2) + (5x^3 - 2x^2 + 8)$
3. $(a-b)+(b-c)+(c+d)+(a-c)+(c-d)+(d-a)+(a-d)$
4. $(p+q+r) + (-2p-6q+3r) + (p+5q-8r)$
5. $(15m^3-9n^3+6m^2n-8mn^2)-(14mn^2-21m^2n+15m^3-18)$
6. $(x^3-x^2+6) - (5x^2-4x+6)$
7. $4x-3y+z-(2x+5z-6)$
8. $(7x^7+5x^5-23x^3+51x+36) - (x^8-x^6+3x^4-5x^2-9)$

2.5.2 Multiplicación de expresiones algebraicas.

La **multiplicación** es una operación que tiene por objeto, dadas dos cantidades llamadas **multiplicando** y **multiplicador**, hallar una tercera cantidad llamada **producto**.

El multiplicando y el multiplicador son llamados **factores** del producto.

La multiplicación de expresiones algebraicas implica el uso intensivo de la propiedad distributiva para números reales, así como de otras propiedades para los mismos.

☞ *Para recordar...*

- **El orden de los factores no altera el producto**. Así, el producto *ab* puede escribirse *ba*. Esta es la **ley conmutativa** de la multiplicación.
- **Los factores de un producto pueden agruparse de cualquier modo**. Así en el producto *abcd* tenemos: *abcd=a x (bcd) = (ab) x (cd)= (abc) x d.* Esta es la **Ley asociativa** de la multiplicación.
- **Ley de los signos**.
  Se distinguen dos casos:
  Signo del producto de dos factores. En este caso la regla es: ***Signos iguales dan + y signos diferentes dan –***
  Signo del producto de más de dos factores. En este caso la regla es:
  a) ***El signo del producto de varios factores es + cuando tiene un número par de factores negativos o ninguno.***
  b) ***El signo del producto de varios factores es – cuando tiene un número impar de factores negativos.***
- **Ley de los exponentes.** Para multiplicar potencias de la misma base se escribe la misma base y se le pone por exponente la suma de los exponentes de los factores. $a^m a^n = a^{m+n}$
- **Ley de los coeficientes.** El coeficiente de producto de dos factores es el producto de los coeficientes de los factores.

Casos de la multiplicación
Distinguiremos tres casos:
1) Multiplicación de monomios.
2)Multiplicación de un monomio por un polinomio.
3)Multiplicación de polinomios.

2.5.2.1 Monomio por monomio.

Para efectuar la multiplicación de dos monomios se multiplican los coeficientes y a continuación se escriben las letras de los factores en orden alfabético, poniéndole a cada letra un exponente igual a la suma de los exponentes que tenga en los factores. El signo del producto vendrá dado por la ley de los signos.

1. Multiplica $3a^2b^3c$ por $2a^3b^2c^4d$.

Aplicamos la propiedad conmutativa.	$= (3a^2b^3c)\ (2a^3b^2c^4d)$
Efectuamos la multiplicación	$= (3x\ 2)\ a^2a^3b^3b^2cc^4d.$
Aplicamos la ley de los exponentes.	$= 20\ a^5b^5c^5d$

☞ *El grado del producto de dos monomios es igual a la suma de los grados de los dos monomios que son factores*

2.5.2.2 Monomio por polinomio.

Sea el producto (a + b) c
Multiplicar (a + b) por *c* equivale a tomar la suma (a + b) como sumando *c* veces; luego:
(a+b)c= (a+b) + (a+b) + (a+b)...*c* veces
= (a + a + a... c veces) + (b +b + b...c veces)
= ac + bc propiedad distributiva

Sea el producto (a - b) c.
Tenemos: (a – b)c= (a – b) + (a – b) + (a – b)... c veces
=(a + a + a...c veces) –(b + b + b... c veces)
= ac – bc

Podemos así, concluir lo siguiente:

Multiplicamos el monomio por cada uno de los términos del polinomio, teniendo muy en cuenta en cada caso, la regla de los signos, y se separan los productos parciales con sus propios signos. Esta es la Ley distributiva de la multiplicación. Para efectuar operaciones con exponentes literales procedemos como hasta ahora, sólo hay que llevar a cabo la suma algebraica en los exponentes.

2.5.2.3 Polinomio por polinomio.

Para **multiplicar dos polinomios** se **multiplican todos los términos del multiplicando por cada uno de los términos de multiplicador**, teniendo en cuenta la **Ley de los signos**, y posteriormente se reducen los términos semejantes.

☛ *Para facilitar la reducción de los términos semejantes del polinomio producto, es conveniente, ordenar los polinomios multiplicando y multiplicador según el orden creciente o decreciente de las potencias de la misma variable y disponer en columnas los términos semejantes que se han de sumar algebraicamente.*

Ejemplo.

1. Multiplicar (a-4) por (3+a)

☞ *Los dos factores deben ordenarse con relación a una misma letra.*

$$\begin{array}{r} a - 4 \\ a + 3 \\ \hline a(a) - 4(a) \\ + 3(a) - 3(4) \\ \hline a^2 - a - 12 \end{array}$$

Actividades de autoestudio 2.5.2

1) $\left(\frac{1}{2}a^2\right)\left(\frac{4}{5}a^3b\right) =$

2) $\left(-\frac{3}{8}a^m b^n\right)\left(\frac{4}{5}a^{2m}b^n\right) =$

3) $\left(\frac{2}{11}a^x + b^{x-3}c^2\right)\left(\frac{-44}{7}a^{x-3}b^2\right) =$

Ejercicios para resolver de manera individual 2.5.2

Obtén los siguientes productos, simplificando el resultado

1. $(x^2 + xy + y^2)(x-y)$

2. $(a^2+b^2+2ab)(a+b)$
3. $(x^3 - 3x^2 + 1)(x+3)$
4. $(m^4 + m^2n^2 + n^4)(m^2 - n^2)$
5. $(a^3 - a + a^2)(a - 1)$
6. $(x^3 - 2x^2 + 3x - 1)(2x + 3)$
7. $(2 + a^2 - 2a - a^3)(a+1)$
8. $(a^2 + a + 1)(a^2 - a - 1)$
9. $(3x^3 - a^3 + 2ax^2)(2a^2 - x^2 - 3ax)$
10. $(x^3+2x^2 - x)(x^2-2x+5)$

Actividades cooperativas 2.5.2

Reúnete con un compañero y realicen los siguientes productos para consolidar lo aprendido, teniendo una actitud positiva y respetuosa hacia las opiniones ajenas.

1. $(8x^5y^2z^8)(17\ yz^2)=$
2. $(-22\ x^2 + 14x)\ (6x^2 - 11x + 8x^5)=$
3. $(27abc - 32a^5\ b^4\ c)\ (2ab^3c + 4bc^7 - a^6 + 5)=$
4. $[3(4x - 5y)]\ [5(2x + 3y)] =$
5. $(15x^n - 8x^{3n} - 5)\ (5x^3 - 12x - 17)=$
6. $2x - 3\{x + 2[x - (x+5)] + 1\} =$
7. $\left(3m^{3/4}\right)\left(4m^{1/4} - 2m^8\right) =$
8. $\left(5\sqrt{x} + 2\right)\left(2\sqrt{x-3}\right) =$
9. $(7x-3)(4+2x)=$
10. $(a^x - a^{x+1} + a^{x+2})(a+1) =$
11. $\left(\frac{3}{5}x^3y^4\right)\left(\frac{5}{6}a^2by^5\right) =$
12. $(3nm^2)(15n^7m^8)$
13. $(5a - 7b)(a + 3b) =$
14. $(-a+b)\ (-4b + 8\ a)=$
15. $(4x^2 - 2x + 5)\ (6x^2 - 3x + 3)$
16. $(x+y)(x-y)$
17. $(x-2)(x^2 + 2x + 4)$
18. $(a^2 + 2ab + b^2)\ (a+ b)$
19. $(6m+ 4n - 5)(6m+4n+5)$
20. $(3x^3 + 4)(2x-7)$

2.5.3 *División de expresiones algebraicas.*

La **división** es una operación que tiene por objeto, dado el producto de dos factores (**dividendo**)y uno de los factores (**divisor**), hallar el otro factor (**cociente**).
De esta definición deducimos **que el cociente multiplicado por el divisor, reproduce el dividendo.**

Así, la operación de dividir $6a^2$ entre 3a, que se indica $6a^2 : 3a$ ó $\frac{6a^2}{3a}$, consiste en hallar una cantidad que multiplicada por 3a dé $6a^2$. Esa cantidad (cociente es 2a).

☞ ***Anotaciones importantes.***

- **Ley de los signos:** La ley de los signos en la división es la misma que en la multiplicación:

  Signos iguales dan + y signos diferentes dan –

- **Ley de los exponentes:** Para dividir potencias de la misma base se deja la misma base y se le pone de exponente la diferencia entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor.

  $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{siempre y cuando } a \neq 0$$

  Ejemplo de la ley de los exponentes:

  $$\frac{a^5b^2c^3}{a^4bc} = a^{5-4}b^{2-1}c^{3-1} = abc^2$$

- **Ley de los coeficientes:** El coeficiente del cociente es el cociente de dividir el coeficiente del dividendo entre el coeficiente del divisor.

  Ejemplo de las ley de los coeficientes:

  $$\frac{15a^3b^2}{5a^2b} = 3ab$$

Casos de la división:

- ☞ División de monomios.
- ☞ División de un polinomio por un monomio.
- ☞ División de dos polinomios

2.5.3.1 Monomio entre monomio.

Se **divide** el **coeficiente del dividendo entre el coeficiente del divisor** y a continuación se **escriben en orden alfabético las letras**, poniéndole a cada letra un **exponente igual a la diferencia entre el exponente** que tiene en **el dividendo** y el **exponente** en el **divisor.** El **signo lo da la Ley de los signos**.

Ejemplos.

1. Dividir $(4a^6b^5c^4)$ entre $(2a^3b^4c^2)$

Solución

$$\frac{(4a^6b^5c^4)}{(2a^3b^4c^2)} = 2a^3bc^2$$

2. Dividir $(-8a^7b^{12}c^3)$ entre (ab^5c).

Solución

$$\frac{(-8a^7b^{12}c^3)}{(ab^5c)} = -8a^6b^7c^2$$

2.5.3.2 Polinomio entre monomio.

Se **divide cada uno de los términos del polinomio por el monomio** divisor separando los cocientes parciales con sus propios signos.

Ejemplos.

1. Dividir $(15a^4b^2 + 10a^3b^5 - 20a^2b^3)$ entre $(5ab)$

Solución

$$\frac{15a^4b^2 + 10a^3b^5 - 20\,a^2b^3}{5ab} =$$

$$\frac{15a^4b^2}{5ab} + \frac{10a^3b^5}{5ab} - \frac{20\,a^2b^3}{5ab} =$$

$$3a^3b + 2a^2b^4 - 4ab^2$$

2. Dividir $(21x^3y^2z - 5x^2y^3z^3 + 8x^2y^4z)$ entre $(3x^2y^2)$

Solución.

$$\frac{21x^3y^2z - 5x^2y^3z^3 + 8x^2y^4z}{3x^2y^2} =$$

$$\frac{21x^3y^2z}{3x^2y^2} - \frac{5x^2y^3z^3}{3x^2y^2} + \frac{8x^2y^4z}{3x^2y^2}$$

$$= 7xz - 5/3\ yz^3 + 8/3\ y^2z$$

3. Divide $(12xy^2z - 5x^2y^3z + 8x^3z^2)$ entre $(4x^3yz^3)$.

Solución.

$$\frac{12xy^2z - 5x^2y^3z + 8x^3z^2}{4x^3yz^3} =$$

$$\frac{12xy^2z}{4x^3yz^3} - \frac{5x^2y^3z}{4x^3yz^3} + \frac{8x^3z^2}{4x^3yz^3}$$

$$= \frac{3y^{2-1}}{x^{3-1}z^{3-1}} - \frac{5y^{3-1}}{4x^{3-2}z^{3-1}} + \frac{2x^{3-3}}{yz^{3-2}} = \frac{3y}{x^2z^2} - \frac{5y^2}{4xz^2} + \frac{2}{yz}$$

2.5.3.3 Polinomio entre polinomio.

Para efectuar la división de un polinomio entre otro polinomio procederemos de la misma manera que la división con números reales y el procedimiento es el siguiente:

- Se ordenan el dividendo y el divisor con relación a una misma letra.
- Se divide el primer término del dividendo entre el primero del divisor y tendremos el primer término del cociente.
- Este primer término del cociente se multiplica por todo el divisor y el producto se resta del dividendo: para lo cual se le cambia el signo, escribiendo cada término debajo de su semejante.

☛ Nota:

- **Si algún término de este producto no tiene término semejante en el dividendo se escribe en el lugar que le corresponda de acuerdo con la ordenación del dividendo y el divisor.**

- Se divide el primer término del resto entre el primer término del divisor y tendremos el segundo término del cociente.
- Este segundo término del cociente se multiplica por todo el divisor y el producto se resta del dividendo, cambiando los signos.
- Se divide el primer término del segundo resto entre el primero del divisor y se efectúan las operaciones anteriores; y así sucesivamente hasta que el residuo sea cero.

Ejemplos

1. Divide $(6x^5 - x^4 - 22x^3 + 23x - 41x + 36)$ entre $(3x^3 - 5x^2 + 4x - 7)$.

Solución.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2-3x-5 \\
\hline
3x^3 - 5x^2 + 4x - 7 & 6x^5 - x^4 - 22x^3 + 23x^2 - 41x + 36 \\
 & \underline{-6x^5 + 10x^4 - 8x^3 + 14x^2} \\
 & \quad 9x^4 - 30x^3 + 37x^2 \\
 & \quad \underline{-9x^4 + 15x^3 - 12x^2 + 21x} \\
 & \qquad -15x^3 + 25x^2 - 20x \\
 & \qquad \underline{15x^3 - 25x^2 + 20x - 35} \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

2. Divide $(8a^4 - 8a^2 - 7)$ entre $(2a^2 - 3)$.

Solución.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x - 4 \\
\hline
x + 2 & 3x^2 + 2x - 8 \\
 & \underline{-3x^2 - 6x} \\
 & \quad -4x^2 - 8 \\
 & \quad \underline{-4x^2 - 8} \\
 & \qquad 0
\end{array}
$$

3. Divide $(6x^4 - 15x^2 + 19x - 4)$ entre $(2x^2 + 4x - 1)$.

En este ejemplo no está completo el polinomio dividendo, por lo cual se debe e dejar el espacio correspondiente al término faltante o escribirlo como $0°x^3$.

Solución.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2 - 6x + 5 \\
\hline
2x^2 + 4x - 1 & 6x^4 + 0x^3 - 15x^2 + 19x - 4 \\
 & \underline{-6x^4 - 12x^3 + 3x^2} \\
 & \quad -12x^3 - 12x^2 + 19x \\
 & \quad \underline{12x^3 + 24x^2 - 6x} \\
 & \qquad 12x^2 + 13x - 4 \\
 & \qquad \underline{-12x^2 - 24x + 6} \\
 & \qquad\qquad -11x + 2
\end{array}
$$

el resultado es: $\dfrac{6x^4 + 0x^3 - 15x^2 + 19x - 4}{2x^2 + 4x - 1} = 3x^2 - 6x + \dfrac{-11x + 2}{2x^2 + 4x - 1}$

Actividades de autoestudio 2.5.3

Dividir:

1) a^4-a^2-2a-1 entre a^2+a+1
2) $m^5-5m^4n+20m^2n^3-16mn^4$ entre $m^2-2mn-8n^2$
3) $x^6+6x^3-2x^5-7x^2-4x+6$ entre x^4-3x^2+2
4) $a^5-a^4+10-27a+7a^2$ entre a^2+5-a
5) x^5+y^5 entre $x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4$

Ejercicios para resolver de manera individual 2.5.3

Obtén el resultado de las siguientes divisiones.

1. Divide $(10r^4s^7)$ entre $(5r^2s^5)$.

$$\frac{10r^4s^7}{5r^2s^5}=$$

2. Divide $(8x^3+14x^2y-5xy^2+7y^3)$ entre $(4x^2y)$

$$\frac{8x^3+14x^2y-5xy^2+7y^3}{4x^2y}=$$

3. Divide $(7b - 7 + 3b^2)$ entre $(3b - 2)$.

Obtenemos el polinomio dividendo y colocamos los datos para efectuar la división:

$$3b-2 \,\overline{|\; 3b^2 + 7b - 7}$$

4. Divide $(8x^2 + 14xy - 15y^2)$ entre $(4x - 3y)$.

$$4x - 3y \,\overline{|\; 8x^2 + 14xy - 15y^2}$$

5. Divide $(2x^2 + 3xy - 2y^2 - 2x + 6y - 4)$ entre $(x+2y - 2)$

$$x+ 2y - 2 \overline{\big)\, 2x^2 + 3xy - 2y^2 - 2x + 6y - 4}$$

Actividades cooperativas 2.5.3

En equipo de tres a cinco alumnos realicen las siguientes actividades, cuyo objetivo es reforzar y consolidar el tema contemplado.

I. Realicen un cuadro comparativo en donde resalten las principales semejanzas y diferencias entre la multiplicación y división algebraicas, con la división y multiplicación aritméticas. Obtengan sus propias conclusiones.

II. Resuelvan las siguientes operaciones.

1. Dividir $(8x^4y^3z^2)$ entre $(-4x^2y^3z)$
2. Dividir $(15a^2b^2 - 8ab + 1)$ entre $(3ab - 1)$
3. Dividir $(3 + 7y^2 - 22y)$ entre $(3 - y)$
4. Dividir $(6x^3 + 17x^2 + 27x + 20)$ entre $(3x + 4)$
5. Dividir $(2x^2 + xy - 6y^2)$ entre $(x - 2y)$
6. Dividir $(a^5 - 4a^4 + 3a^3 + 3a^2 - 3a + 2)$ entre $(a^2 - a - 2)$
7. Dividir $(2a^4 - a^3b - 6a^2b^2 + 7ab^3 - 2b^4)$ entre $(a^2 + ab - 2b^2)$
8. Dividir $(3x^2 - 2x - 4)$ entre $(5x - 3)$
9. Dividir $(8a^5 - 3a^2 - 1)$ entre $(4a^2 + a - 1)$
10. Dividir $(5x^4 - 10x - 1)$ entre $(x^3 - x^2 + x - 2)$
11. Dividir $(4y^5 - 27y^3 + 15y^2 + 5)$ entre $(2y^4 - 3y^2 - 1)$
12. Dividir $(2 - 5a^2 + a^3 - 4a)$ entre $(a + l)$.
13. Dividir $(8x^2 - 14x + 3)$ entre $(2x - 3)$.
14. Dividir $(6x^2 - 11x + 30)$ entre $(3x - 5)$
15. Dividir $(2x^5 - 14x^3 + 8x^2 + 7)$ entre $(x + 3)$
16. Dividir $(10x^3 - 8)$ entre $(5x^2 - 2)$
17. Dividir $(7y^2 - 22y + 3)$ entre $(3 - y)$
18. Dividir $(7x^7 - 5x^5 + 3x^3 - x + 1)$ entre $(7x + 1)$
19. Dividir $(2x^4+3x^3-x-5)$ entre $(x + 2)$
20. Dividir $(6x^2-30+9x^3)$ entre $(3x - 4)$
21. Dividir $(2x^3-4x^2+6x+3)$ entre $(x - ½)$

2.6 Productos Notables.

Se llama **productos notables** a ciertos productos que **cumplen reglas fijas** y cuyo resultado puede ser escrito por simple reconocimiento, es decir, sin verificar la multiplicación.

El primer producto que se contempla no es exactamente un producto notable, se trata de la **propiedad distributiva** mencionada con anterioridad, la cual se presenta frecuentemente, por esta razón la consideramos nuevamente.

$a(b + c) = ab + ac$ *propiedad distributiva.*

Ejemplos.

1. Multiplica $18x(5x^2y - 12)$.

Solución.

Con la propiedad distributiva:

$18x(5x^2y - 12) = 18x(5x^2y) + 18x(-12)$
$= 5 \,.\, 18xx^2y - 18 \,.\, 12x$ ley de los exponentes
$= 90x^3y - 216x$

Ejercicios para resolver de manera individual 2.6

1. $(-3xy^2)(4x^3y + 2x - 5y^3) =$
2. $(7ab - 9a^2b^4 + 5a^3)(12a^4b^5) =$
3. $(-5/8a^2b^4)(4a^3b^7 - 8ab^3 + 8/5ab) =$
4. $(7/6xy + 3/8x^2y^2 - 2x^5)(12x^3y^4) =$
5. $(1/2mn^3)(4m - 6n + 1) =$

2.6.1 Binomio al cuadrado (cuadrado de la suma de dos cantidades)

Elevar al cuadrado $a + b$ equivale a multiplicar este binomio por sí mismo y tendremos, siendo el resultado de este producto un **Trinomio Cuadrado Perfecto**

$$(a + b)^2 = (a + b)\,(a + b)$$

Realizamos la multiplicación y tenemos:

$$\begin{array}{r} a + b \\ \times \quad a + b \\ \hline a^2 + ab \\ ab + b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

$$(a + b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

Lo anterior se expresa como:

Un **binomio al cuadrado** es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primer término por el segundo término, más el cuadrado del segundo término.

De la misma manera, se tiene que:

$$(a - b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

☞ *Observa que los términos que están al cuadrado siempre son positivos.*

Ejemplo.

Desarrollar $(x + 4)^2$

Cuadrado del primero	x^2
Doble producto del primero por el segundo	$2(4x)=8x$
Cuadrado del segundo	$4^2=16$
Trinomio cuadrado perfecto (Resultado)	$= x^2+8x+16$

☞ *Estas operaciones deben hacerse mentalmente y el producto escribirse directamente.*

☞ ***Para recordar...***

Cuadrado de un monomio Para elevar un monomio al cuadrado se eleva su coeficiente al cuadrado y se multiplica el exponente de cada letra por 2. Ejemplo: Sea el monomio $4ab^2$ Decimos que: $(4ab^2)^2= 16a^2b^4$

Actividades de autoestudio 2.6.1

Vuelve a leer el tema *productos notables*. Si tienes alguna duda, consúltala con tu profesor.

Actividades cooperativas 2.6.1

Reúnete con un compañero y desarrollen los siguientes binomios al cuadrado, todo esto, con el propósito de que consoliden lo visto en este apartado y se beneficien del aprendizaje del trabajo colaborativo.

1. $(2x-3)^2 =$
2. $(2x^2 + 4x)^2 =$
3. $(1/2x + 4)^2 =$
4. $(m + 3)^2 =$
5. $(3a^3+8b^4)^2 =$
6. $(4m^5+5n^6)^2 =$
7. $(x^{a+1}-y^{x-2})^2 =$
8. $(2x - 3y)^2 =$
9. $(7x+11)^2 =$
10. $(8x^2y-9m^3)^2 =$

2.6.2 Producto de binomios conjugados.

Sea el producto (a + b) (a – b)

Si hacemos la multiplicación:

$$\begin{array}{l} \quad\;\; a + b \\ \quad\;\; \underline{a - b} \\ \quad\;\; a^2+ab \\ \quad\;\; \underline{-ab-b^2} \\ a^2 \quad -b^2 \end{array}$$

De lo anterior obtenemos que:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Lo anterior se expresa como:

El **producto de dos binomios conjugados** es igual a una diferencia de cuadrados, esto es, el cuadrado del minuendo, menos el cuadrado del sustraendo.

☞ ***El signo negativo de la diferencia de cuadrados corresponde al término que esté restando en los dos binomios conjugados.***

Ejemplos.

Obtén los siguientes productos aplicando el producto notable.

1. $(2x^2 + 3y^3)(2x^2 - 3y^3)=$

Elevamos la cantidad que siempre tiene signo positivo al cuadrado. (Normalmente es el primer término del binomio)	$(2x^2)^2 = 4x^4$
Elevamos al cuadrado la cantidad que lleva en algún producto un signo negativo (normalmente el segundo término del binomio).	$(3y^3)^2 = 9y^6$
Obtenemos el resultado	$4x^4 - 9y^6$

Actividades de autoestudio 2.6.2

Busca en otros libros el tema de: *producto de binomios conjugados.* Y resuelve varios productos de este tipo para comprobar que $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Posteriormente elabora con tus propias palabras la regla para resolver por simple inspección un producto de binomios conjugados.

Ejercicios para resolver de manera individual 2.6.2

1. $(2x - 3y^2)(2x + 3y^2) =$
2. $(-x^2 - 4y^2)(-4y^2 + x^2) =$
3. $(-5x^3y^4 - 8y^2z^4)(5x^3y^4 - 8y^2z^4)$

4. $(x + y + 2)(x + y - 2)=$
5. $(2a-b-c)(2a-b+c)=$
6. $(2x + y - z)(2x - y + z)=$

Actividades cooperativas 2.6.2

Reúnete con un compañero y desarrollen los siguientes binomios conjugados, todo esto, con el propósito de que consoliden lo visto en este apartado y fomentar la cultura del trabajo colaborativo.

1. $(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 5x - 6)=$
2. $(n^2 + 2n + 1)(n^2 - 2n - 1)=$
3. $(y^2 - 3y)(y^2 + 3y)=$
4. $(2a - 1)(1 + 2a)=$
5. $(4xy - 9wz)(9wz + 4xy) =$

2.6.3 Binomio al cubo.

Elevemos $(a + b)$ al cubo.

Tendremos: $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)^2 (a + b) = (a^2+2ab+b^2)(a + b)$

Si efectuamos esta multiplicación, tendremos:

$$\begin{array}{l} a^2 + 2ab + b^2 \\ \underline{a + b \qquad\qquad} \\ a^3 + \quad 2a^2b + \quad ab^2 \\ \underline{\qquad\quad a^2b + 2ab^2 + b^3} \\ a^3 + \quad 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

De lo anterior se deduce que:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Esto es:

El **cubo de la suma** de dos cantidades es igual al cubo de la primera cantidad más el triple del cuadrado de la primera por la segunda, más el triple de la primera por el cuadrado de la segunda, más el cubo de la segunda.

Elevemos *a* - *b* al cubo.

Tendremos: $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b) = (a-b)^2(a-b) = (a^2-2ab+b^2)(a-b)$.

Si efectuamos esta multiplicación, tendremos:

$$\begin{array}{l} a^2 - 2ab + b^2 \\ \underline{a - b \qquad\qquad} \\ a^3 - \ 2a^2b + \ ab^2 \\ \underline{\qquad - a^2b + 2ab^2 - b^3} \\ a^3 - \ 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{array}$$

Por lo tanto

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Ejemplos.

1. Realiza $(2a^2 + 5bc)^3 =$

$$\begin{aligned}(2a^2 + 5bc)^3 &= (2a^2)^3 + 3(2a^2)^2(5bc) + 3(2a^2)(5bc)^2 + (5bc)^3 \\ &= 8a^6 + 3(4a^4)(5bc) + 3(2a^2)(25b^2c^2) + 125c^3 \\ &= 8a^6 + 60a^4bc + 150a^2b^2c^2 + 125c^3\end{aligned}$$

2. Realiza $(-a-b)^3 =$

Podemos emplear la propiedad distributiva por la izquierda y nos queda:

$(-a-b)^3 = (-1(a+b))^3$ por la ley de los exponentes.
$= (-1)^3(a+b)^3$ como $(-1)^3 = -1$
$= -(a+b)^3$ desarrollamos el binomio al cubo.
$= -(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$ por la propiedad distributiva.
$= -a^3-3a^2b-3ab^2-b^3$

Actividades cooperativas 2.6.3.

Reúnete con un compañero y desarrollen los siguientes binomios al cubo, todo esto, con el propósito de que consoliden lo visto en este apartado y fomentar la cultura del trabajo colaborativo.

1. $(x - 2)^3 =$
2. $(m + 3)^3 =$
3. $(1 - 3y)^3 =$
4. $(3x + 2x^2)^3 =$
5. $(1/3m^4n^3 - 3mn^2)^3 =$
6. $(1/2\ n + 6)^3 =$
7. $(2a + x)^3 =$
8. $(11 - ab)^3 =$
9. $(1 - b)^3 =$
10. $(2x + 1)^3 =$

2.6.4 Producto de binomios con un término común.

Observemos estas tres multiplicaciones,

$$\begin{array}{l} x + a \\ \underline{x + b \qquad\qquad} \\ x^2 + ax \\ \underline{\quad bx + ab \qquad} \\ x^2 + ax + bx + ab \end{array} \qquad \begin{array}{l} x+2 \\ \underline{x+3 \qquad} \\ x^2 + 2x \\ \underline{\quad 3x + 6 \quad} \\ x^2 + 5x + 6 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x - 2 \\ \underline{x+5 \qquad} \\ x^2 - 2x \\ \underline{\quad 5x - 10} \\ x^2 + 3x - 10 \end{array}$$

En los tres ejemplos se cumplen las siguientes reglas:

1. El primer término del producto es el producto de los primeros términos de los binomios.
2. El coeficiente del segundo término del producto es la suma algebraica de los segundos términos de los binomios y en este término la ***x*** está elevada a un exponente que es la mitad del que tiene esta letra en el primer término del producto.
3. El tercer término del producto es el producto de los segundos términos de los binomios.

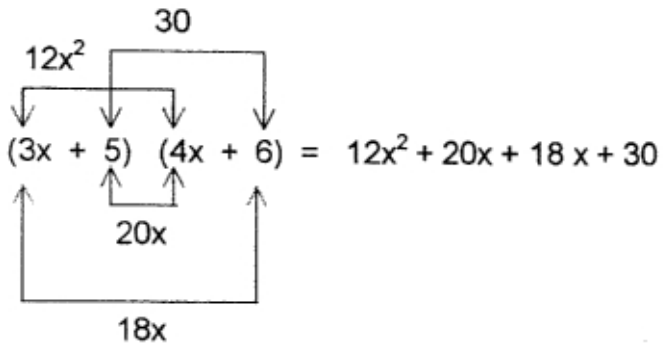
Así

$$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab$$

Producto de dos binomios de la forma (mx + a) (nx + b)

El producto de dos binomios de esta forma, en los cuales los términos en *x* tienen distintos coeficientes, puede hallarse fácilmente siguiendo los pasos que se indican en el esquema.

Hallar el producto (3x + 5) (4x + 6):



Ejemplos.

1. (x + 2) (x - 3)=

Solución.

El primer término del producto es el producto de los primeros términos del binomio.	x^2
El coeficiente del segundo término del producto es la suma algebraica de los segundos términos de los binomios y en este término la *x* está elevada a un exponente que es la mitad del que tiene esta letra en el primer término del producto.	–1x= -x
El tercer término del producto es el producto de los segundos términos de los binomios.	(2) (-3) = -6
Finalmente el producto queda:	x^2 –x-6

2. (x - 5) (x - 2)=

Solución.

Suma:	(-5) + (-2) = -7
Producto:	(-5) (-2) = 10
Por lo tanto:	(x - 5) (x - 2)= x^2 - 7x + 10

3. $(2x + 5)(3x - 4)=$

Solución.

El primer y último término del trinomio resultante se obtienen multiplicando:	$(2x)(3x) = 6x^2$ y $(5)(-4) = -20$.
Para encontrar el término central hagamos la operación visualmente: Suma algebraica	$(2x + 5)$ $(3x - 4)$ $15x$ $-8x$ $7x$
Resultado:	$(2x + 5)(3x - 4) = 6x^2\ 7x - 20$

Resumen de los productos notables

Productos notables.

1. $(a+ b)^2= a^2+ 2ab + b^2$
2. $(a -b)^2= a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a + b)(a- b) = a^2 - b^2$
4. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2+ b^3$
5. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6. $(a + b)(a^2 - ab + b^2)= a^3 + b^3$
7. $(a - b)(a^2 + ab + b^2)= a^3 - b^3$
8. $(x + a)(x + b) =x^2 + (a + b)x + ab$
9. $(ax +b)(cx + d)= acx^2 + (ad +bc)x + bd$

Actividades de autoestudio 2.6.4

Haz una lista con los productos notables que se dieron a conocer en este módulo.

Ejercicios para resolver de manera individual 2.6.4

Resuelve los siguientes productos notables.

1. $(-4x + 16)(-4x - 5) =$
2. $(5x + 7y^3)(7y^3 - 4x) =$
3. $(x^2 - 12)(x^2 + 11) =$
4. $(6x^3y + 4)(-6 + 6x^3y) =$
5. $(x + y + 1)(x - y - 1) =$
6. $(a + b)(a - b)(a^2 - b^2) =$
7. $(x^2 - 1)(x^2 + 3) =$
8. $(a^2b^2 - 1)(a^2b^2 + 7) =$
9. $(ab + 5)(ab - 6) =$
10. $(a + 1)(a - 2) =$

ACTIVIDADES COOPERATIVAS 2.6.4

En equipo de 2 a tres personas, resuelvan los siguientes usando los productos notables y respetando la opinión de sus compañeros. Lo anterior, les ayudará a consolidar sus conocimientos adquiridos en este módulo y fomentar la tolerancia.

1. $(3x^2 + 8y^2z^3)^2 =$
2. $(7a^2b - 5ab^3c)^2 =$
3. $(3x^{3a}y - 8x)^2 =$
4. $(5p + 7q^3)(7q^3 - 5p) =$
5. $(3n^x + 5n^{y-1})(3m^x - 5n^{y-1}) =$
6. $(x^3y^5 + 6z^5)^3 =$
7. $(n + 3)(n + 5) =$
8. $(5a + x)^3 =$
9. $(7x^3 + 6x^4)^2 =$
10. $(c^2 - 11)(c^2 + 11) =$

Actividades complementarias 2.6.4

I. Investiga en otros libros de álgebra el tema relacionado con *cocientes notables* y haz un resumen de los más importantes.

II. Escribe el nombre de cada uno de los siguientes productos notables, el nombre del polinomio resultante

1. $(3ab^2 + 5b^3)^2$
2. $(2ay + 5b)(2ay + 3b)$
3. $(8a + 5)^3$
4. $(3 - 5y)^2$
5. $a^2 + ab + b^2)(a - b)$
6. $(4xy^3 + 5y^2)(5y^2 - 3xy)$
7. $(1 - a)(1 + a + a^2)$

III Realiza los siguientes productos aplicando los productos notables.

1. $5uv^2(2u^3v^5 - 3uv^2w) =$
2. $(2a^{x-3} + 5ab^{3y+1})^2 =$
3. $(12ab^3 + 5b^2c)(5b^2c - 12ab^3) =$
4. $(3v^{2a} + 4w^{2a})^3 =$
5. $(7 + 5x^2y)(49 - 35x^2y + 25x^4y^2) =$
6. $(m - 2)(m + 5) =$
7. $(5x + 2y)(8x - 3y)$
8. $(3x^m - 5y)(4x^m - 8y)$
9. $(d^x - 3b^y)(7a^x + 5b^y) =$

2.7 Desarrollo del binomio de newton: $(a + b)^n$ donde $n \in N$.

En temas anteriores hemos aprendido a resolver binomios elevados a una potencia entera y positiva, por ejemplo:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

Pero que sucedería si quisiéramos conocer el desarrollo del siguiente binomio:

$(a+b)^4$, entonces podemos aprovechar lo que ya se sabe y ese binomio lo descomponemos de la siguiente manera:

$$(a + b)^4 = (a + b)^3 (a + b)^1 = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a + b)$$

efectuando la operación se tiene que:

$$\begin{array}{l} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ \underline{a+b} \\ a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 \\ \underline{\quad a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + B^4} \\ a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + B^4 \end{array}$$

Entonces, $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Si observas lo anterior te darás cuenta que estos desarrollos cumplen reglas fijas, las cuales son:

1. Todos los desarrollos tienen un término más que el exponente del binomio.
2. El exponente del primer término es el exponente del binomio y disminuye 1 en cada término siguiente.
3. El segundo término del binomio aparece en el segundo término con exponente 1 y en cada término siguiente aumenta 1.
4. El coeficiente del primer término es 1; en el segundo término, el coeficiente es el exponente del binomio
5. El coeficiente de cualquier término se obtiene multiplicando el coeficiente del término anterior por el exponente de "a" del mismo término anterior y dividiendo este producto por el exponente de "b" en ese mismo término aumentando 1.
6. El último término del desarrollo es el segundo término del binomio con la potencia del binomio.

☞ Nota: *Cuando uno de los términos del binomio tiene el signo negativo, se intercalan los signos + - + - + en la solución.*

Estos pasos originan la ley del binomio, se representan con la siguiente fórmula:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}a^{n-4}b^4 + \ldots + b^n$$

Esta fórmula descubierta por Newton nos permite elevar un binomio a una potencia cualquiera, directamente, sin tener que hallar las potencias anteriores.

Ejemplos:

1. $(x + y)^4 = x^4 + 4x^{4-1}y + \frac{4(4-1)}{1.2}x^{4-2}y^2 + \frac{4(4-1)(4-2)}{1.2.3}x^{4-3}y^3 + \frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{1.2.3.4}x^{4-4}y^4$

$x^4 + 4x^3y + \frac{4(3)}{2}x^2y^2 + \frac{4(3)(2)}{6}xy^3 + \frac{4(3)(2)(1)}{24}x^0y^4$

$\mathbf{x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4}$

2. $(c - d)^5 = x^5 - 5x^{5-1}y + \frac{5(5-1)}{1.2}x^{5-2}y^2 - \frac{5(5-1)(5-2)}{1.2.3}x^{5-3}y^3 + \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{1.2.3.4}x^{5-4}y^4$

$- \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}{1.2.3.4.5}x^{5-5}y^5$

$\mathbf{= x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5}$

3. $(m + n)^6 = m^6\ 6m^{6-1}n + \frac{6(6-1)}{1.2}m^{6-2}n^2 + \frac{6(6-1)(6-2)}{1.2.3}m^{6-3}n^3 + \frac{6(6-1)(6-2)(6-3)}{1.2.3.4}m^{6-4}n^4$

$+ \frac{6(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)}{1.2.3.4.5}m^{6-5}n^5 + \frac{6(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)(6-5)}{1.2.3.4.5.6}m^{6-6}n^6$

$\mathbf{= m^6 + 6m^5n + 15m^4n^2 + 20m^3n^3 + 15m^2n^4\ 6mn^5 + n^6}$

Otro proceso para realizar un binomio a la enésima potencia es el **Triángulo de Pascal**, éste nos indica los coeficientes de los términos del desarrollo.

Se empieza siempre con 1 y cada número posterior al 1 se obtiene sumando en la fila anterior el primer número con el segundo; el segundo con el tercero; el tercero con el cuarto; etc. y se termina con 1.

El Triángulo de Pascal es el siguiente:

n =0	1
n = 1	1 1
n = 2	1 2 1
n = 3	1 3 3 1
n = 4	1 4 6 4 1
n = 5	1 5 10 10 5 1
n = 6	1 6 15 20 15 6 1
n = 7	1 7 21 35 35 21 7 1

Los coeficientes del desarrollo del binomio $(a - b)4^4$ son los números que están en la fila horizontal en que después del 1 está el 4, o sea 1, 4, 6, 4, 1.

Asimismo, cuando se hacen desarrollos utilizando el Triángulo de Pascal se de debe recordar que:

El primer término tendrá la potencia del binomio y disminuye en 1 cada vez. El segundo término del binomio aparece en el segundo término y aumenta en 1 cada vez, hasta terminar con la potencia del binomio. Cuando uno de los términos del binomio tiene el signo negativo, se intercalan los signos + - + - + en la solución.

Ejemplo:

1. $(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3 y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

$(2m - 3n)^4 = (2m)^4 - 4(2m)^3(3n) + 6(2m)^2(3n)^2 - 4(2m)(3n)^3 + (3n)^4$

$= 16m^4 - 96m^3 n + 216m^2n^2 - 216mn^3 + 81n^4$

2. $(w + 5)^6 = w^6 + 6w^5(5) + 15w^4 (5)^2 + 20w^3(5)^3 + 15w^2(5)^4 + 6w(5)^5 + (5)^6$

$= w^6 + 30w^5 + 375w^4 + 2500w^3 + 9375w^2 + 18750w + 15625$

Actividades de autoestudio 2.7

Desarrolla los binomios usando el Binomio de Newton y el Triángulo de Pascal.

1. $(x^2 + 3y^2)^4 =$
2. $(2x^2 - 3y^3)^4 =$
3. $(x^3 + 2y^2)^5 =$
4. $(2x - 5y)^5 =$

Actividades cooperativas 2.7

Desarrolla los siguientes binomios usando el binomio de Newton.

1. $(3w + z^2)^4 =$
2. $(x^2 + 5y)^4 =$
3. $(2x^3 - 3y^2)^4 =$
4. $(a + 2b^3)^4 =$
5. $(3x^2 + 5y)^5 =$
6. $(x^{1/2} + y^{1/2})^4 =$
7. $(2x - 5)^6 =$
8. $(3 - x^2)^4 =$
9. $(2x^3 - 3y^3)^5 =$
10. $(2a + 3b^2)^7 =$

Actividades complementarias 2.7

Desarrolla los binomios usando el Binomio de Newton y el Triángulo de Pascal.

1. $(c + x)^4 =$
2. $(2x - 5y)^3 =$
3. $(2m + 3n)^5 =$
4. $(x - 10y)^7 =$

Soluciones a los Ejercicios correspondientes al Módulo 2

Actividades de autoestudio 2.1

1) 1 2) 11/6 3) 176 4) 15/2 5) 123/8

Ejercicios para resolver de manera individual 2.1

1) –1777 2) 6

Actividades de autoestudio 2.3

1) V 2) V 3) F 4) F 5) V

Ejercicios para resolver de manera individual 2.3

I

1) $(a+b)^3$ 2) $\frac{(a-b)^2}{(a+b)}$ 3) $(a+b)^4$ 4) $\frac{(a-b)}{ab}$

5) 2a/3b 6) 2(a – b) 7) $\frac{a}{a+b}$ 8) $\frac{(a-b)}{(a+b)^2}$

9) 2a+3b+ (c/2) 10) $A= x^2$

II

1. Duplo del producto de un número al cuadrado por otro.
2. La mitad del cuadrado de un número más el triple del producto del mismo número por otro.
3. Cinco veces la suma cúbica del doble de un número más el cuadrado de otro.
4. El cociente del producto de dos números al cuadrado entre el duplo de un tercer número.
5. La diferencia, de la suma cuadrada de un número más el quintuple de otro número; menos, la suma cúbica del triple del primer número más el segundo número.
6. El cociente del duplo de un número entre el cuadrado de otro.

7. Diferencia del duplo de un número, menos el cubo de otro. Dicha diferencia elevada a la cuarta potencia.
8. Diferencia del quintuple del cuadrado un número y el quintuple del cuadrado de otro.
9. Diferencia del triple producto de dos números y ocho veces el cuadrado del segundo.
10. La suma, de la diferencia de un número al cuadrado menos tres; más, quince veces otro número.

Actividades de autoestudio 2.4

Leyes

$a^m a^n = a^{m+n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$(ab)^n = a^n b^n$

$(a^n \cdot b^m)^p = a^{n.p}\, b^{m.p}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ siempre y cuando $b \neq 0$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ siempre y cuando $a \neq 0$

$b^{m/n} = (b^m)^{1/n}$

$b^{-m/n} = \frac{1}{b^{m/n}}$

Consideraciones

$a^0 = 1$

$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$

$b^{1/n} = \sqrt[n]{b}$

Ejercicios para resolver de manera individual 2.4

1) 3^{15} 2) $(1/8)^6$ 3) 6^{15} 4) $(25)^3$
5) y^8 6) c^9 7) $(2)^9(3)^9(5)^6$ 8) $a^{12}b^9$
9) $6561x^{12}y^{28}$

Ejercicios para resolver de manera individual 2.5.1

1) $7x$ 2) $2x^2 + 15xy + y^2$ 3) $-11p$

Actividades de autoestudio 2.5.2

1) $2/5\, a^4b$ 2) $6/10\, a^{3m}b^{2m}$ 3) $-88/77\, a^{2x-3}$

Ejercicios para resolver de manera individual 2.5.2

1) $x^2+x^2y-xy-y^3$
2) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
3) x^4+9x^2+x+3
4) m^6-n^6
5) a^4-2a^6+a
6) $2x^4+7x^3+12x^2+7x-3$
7) a^4-2a^2+2
8) a^4-a^2-2a-1
9) $2a^5+3a^4x+5a^3x^2-9ax^4-3x^5$
10) x^5+12x^2-5x

Actividades de autoestudio 2.5.3

1) a^2-a+1
2) $m^3-3m^2n+2mn^2$
3) x^2-2x+3
4) a^3-5a+2
5) $x+y$

Ejercicios para resolver de manera individual 2.5.3

1) $2r^2s^2$
2) $2x/y +7/2y +5y/4x + 7y^2/4x^2$
3) (b+3) residuo 1
4) $2x–2y$ residuo $9y^2$
5) $2x+3y-2$

Ejercicios para resolver de manera individual 2.6

1. $–12x^4y^3-6x^2y^2+15xy^5$
2. $84a^5b^6-108a^6b^9+60a^7b^5$
3. $–5/2a^5b^{11}+5a^3b^7-a^3b^5$
4. $14x^4y^5+9/2x^5y^6-24x^8y^4$
5. $2m^2n^3-3n^4m+1/2mn^3$

Ejercicios para resolver de manera individual 2.6.2

1. $4x^2-9y^4$
2. $16y^4-x^4$
3. $–25x^6y^8$
4. $x^2+2xy+y^2-4$
5. $4a^2-4ab+b^2-c^2$
6. $4x^2-(y^2-2yz+z^2)$

Actividades de autoestudio 2.6.4

Productos notables

1. $(a+ b)^2= a^2+ 2ab + b^2$
2. $(a -b)^2= a^2 - 2ab + b^2$

3. $(a + b)(a- b) = a^2 - b^2$
4. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6. $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
7. $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
8. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
9. $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$

Actividades de autoestudio 2.7

1) $x^8 + 12x^6y^2 + 54x^4y^4 + 108x^2y^6 + 81y^8$
2) $16x^8 - 96x^6y^3 + 216x^4y^6 - 216x^2y^9 + 81y^{12}$
3) $x^{15} + 10x^{12}y^2 + 40x^9y^4 + 80x^6y^6 + 80x^3y^8 + 32y^{10}$
4) $32x^5 - 400x^5y + 2000x^3y^2 - 5000x^2y^3 + 6250xy^4 - 3125y^5$

Bibliografía Complementaria

Baldor, Aurelio (1984). *Álgebra*. México: Publicaciones Cultural, S.A. de C.V.

Fuenlabrada de la Vega Trucíos, Samuel (1994). *Matemáticas I: aritmética y álgebra*. México: McGraw-Hill.

Leithold, Louis (1994). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. México: Harla.

Lovaglia, Florence M (1972). *Álgebra*. México: Harla.

Martínez, Sevilla e Ibarra. (1997). *Álgebra elemental*. México: JUST IN TIME PRESS, S.A. DE C.V.

Murphy Johnson y Steffensen (1994). *Álgebra y Trigonometría con aplicaciones*. México: Trillas.

Swokowski, Earl (1988). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Iberoamérica.

Módulo 3

Factorización de fracciones algebraicas

Objetivos informativos.
Al finalizar el módulo, el alumno:
Reconocerá la factorización como el proceso inverso de la multiplicación de factores.
Estará capacitado para identificar el proceso de factorización.
Reconocerá los diversos casos de factorización, con base en sus características.

Objetivos formativos.
Al finalizar el módulo, el alumno:
Desarrollará su creatividad al aplicar la factorización a la solución de diversos problemas.
Aprenderá a ser honesto con sus compañeros de equipo.

3. Factorización de expresiones algebraicas

Factorización ¿Qué significa? En el apartado anterior se explicó todo lo concerniente a la multiplicación, incluyendo productos notables, en este módulo vamos a contemplar una operación inversa llamada ***factorización***, en la que los elementos que intervienen se llaman ***factores.***

3.1 Factores

Si un número está escrito como el producto de otro, entonces cada número en el producto se denomina **factor** del número original. Similarmente, si una expresión algebraica está escrita como el producto de otras expresiones, entonces cada expresión algebraica se denomina factor de la expresión algebraica original.

Se llaman **factores o divisores** de una expresión algebraica a las expresiones algebraicas que multiplicadas entre sí dan como producto la primera expresión

Así, multiplicando a por a + b tenemos:

$$a(a + b) = a^2 + ab$$

a y $a + b$, que multiplicadas entre sí dan como producto $a^2 + ab$, son factores o divisores de $a^2 + ab$.

De la misma manera $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$, tenemos que:
$x + 2$ y $x + 3$ son factores de $x^2 + 5x + 6$.

Factorizar o factorar una expresión algebraica es convertirla en el producto indicado de sus factores.

Factorar un monomio.
Los factores de un monomio se pueden hallar por simple inspección.

Así, los factores de 15ab son 3, 5, a y b. por lo tanto:

$$15ab = 3 \cdot 5ab$$

Factorar un polinomio.
No todo polinomio se puede descomponer en dos o más factores distintos de 1, pues del mismo modo que, en Aritmética, hay números primos que sólo son divisibles por ellos mismos y por 1, hay expresiones algebraicas que sólo son divisibles por ellas mismas y por 1, y que por lo tanto no son el producto de otras expresiones algebraicas. Así, $a + b$ no puede descomponerse en dos factores distintos de 1 porque sólo es divisible por $a + b$ y por 1.

A continuación estudiaremos la manera de descomponer polinomios en dos o más factores distintos de 1.

Casos de factorización

- Factorización de polinomios que tengan un factor común.
- Factorización de polinomios por agrupación de términos.
- Factorización de diferencia de cuadrados
- Factorización de una suma o diferencia de cubos.
- Factorización de un trinomio cuadrado perfecto.
- Factorización de polinomios de la forma $x^2 - bx - c$
- Factorización de trinomios de la forma $ax^2 - bx - c$
- Factorizaciones sucesivas.

3.2 Factor común.

Características del caso:

- No tiene límite de términos
- Todos los términos tienen en común una letra o un número o ambas cosas.

Proceso:
- Se toma el factor común como coeficiente del paréntesis; dentro del paréntesis.
- Se escriben los cocientes de dividir el polinomio entre el factor común.

Ejemplo:

Factorar $x^3 + 2x^2 - 5x$

Todos los términos del polinomio contienen "x", por lo tanto es el factor común, y el que divide al polinomio.
$\mathbf{x(x^2 + 2x - 5)}$

Factor común monomio.

1. Descomponer en factores $a^2 + 2a$.
a^2 y 2a contienen el factor común *a*. Escribimos el factor común *a*, como coeficiente de un paréntesis; dentro del paréntesis escribimos los cocientes de dividir $a^2 : a = a$ y $2a : a = 2$ y tendremos que: $a^2+2a= a(a+2)$.

2. Descomponer $10b - 30\,ab^2$.
Los coeficientes 10y 30 tienen los factores comunes 2, 5 y 10. Tomamos **10** porque siempre se saca el **mayor factor común.** De las letras el único factor común es *b* porque está en los dos términos de la expresión dada y la tomamos con su menor exponente *b*.
El factor común es *10b*. Lo escribimos como coeficiente de un paréntesis y dentro ponemos los cocientes de dividir $10b : 10\,b=1$ y $-30\,a\,b^2 : 10\,b = -3ab$ y tenemos: $10b-30ab^2= 10b(1-3ab)$.

Factor común polinomio.

1. Descomponer $x(a + b) + m(a + b)$.

Los dos términos de esta expresión tienen de factor común el binomio (a + b). Escribo (a + b) como coeficiente de un paréntesis y dentro del paréntesis se escriben los cocientes de dividir los dos términos de la expresión dada entre el factor común (a + b), o sea:

$\frac{x(a+b)}{(a+b)} = x$ y $\frac{m(a+b)}{(a+b)} = m$ y tendremos:

$x\,(a + b) + m\,(a + b)= (a + b)\,(x + m)$.

Ejemplos.

Factorar: $9m^2 - 18m^3 =$ $\mathbf{9m^{10}(1 - 2m)}$

Factorar: $20a^3b^2 + 15a^2b^3 - 30ab^4 = \mathbf{5ab^2(4a^2 + 3ab - 6b^2)}$

Factorar: $16x^3y^2 - 8x^2y + 24x^4y^2 + 40x^2y^3 = \mathbf{8x^2y(2xy - 1 + 3x^2y + 5y^2)}$

Actividades de autoestudio 3.2

Factoriza por factor común cada una de las expresiones siguientes:

1. a^2+ab
2. $b + b^2$
3. $x^2 + x$
4. $8m^2-12mn$
5. $24a^2xy-36x^2y^4$
6. a^3+a^2+a
7. $x-x^2+x^3-x^4$
8. $a^6-3a^4+8a^3-4a^2$
9. $3a^2b+6ab-5a^3b^2+8a^2bx+4ab^2m$
10. $a^{20}-a^{16}+a^{12}-a^8+a^4-a^2$

Ejercicios para resolver de manera individual 3.2

Factoriza por factor común cada una de las expresiones siguientes:

1. $4x^2-8x+2$
2. $15y^3-20y^2-5y$
3. $a^3-a^2x+ax^2$
4. $x^3+x^5-x^7$
5. $14x^2y^2-28x^3+56x^4$

Actividades cooperativas 3.2

Reúnete con uno o dos compañeros y factoricen por factor común las siguientes expresiones algebraicas, lo cual les servirá para reforzar lo visto en este apartado y fomentará en ustedes la cultura de trabajo en equipo.

1. $3x-18$
2. $40m^3n^3x^3+204n^5x^2-30m^2n^4x^3$
3. $84x^3y^3-108x^4y^5-420x^6y^2$
4. $2/3x^3y^3-4/9x^2-5/6x^4y^2$
5. $10a(a-7)^2-2(5a^2-3)(a-7)$
6. $a^3b^2-a^2b^2$
7. $3/2a^4-7/8a^3-5/4a^2$
8. $15x^2+75x^4+50x^6$
9. $5x(a+2)-16(a+2)$
10. $(b+3)^3+b(b+3)^2-(2b+6)(b+3)$

Actividades complementarias 3.2

Investiga en otras fuentes el tema: *Máximo común divisor* y pon especial interés en los apartados: Factor común, M.C.D. de monomios, M.C.D. de polinomios por descomposición en factores.
Estudiar este tema te será muy útil para la factorización.
Investiga a qué se refiere la PRUEBA GENERAL DE LOS FACTORES.

3.3 Agrupación de términos.

Cuando los términos de un polinomio no contienen la misma literal en todos ellos, pero si se repiten en dos o más términos se agrupan los términos donde si se repite (n) literal (es) y se **factorizan por ese término o factor común.**

(1) Descomponer ax + bx + ay +by.

Los dos primeros términos tienen el factor común *x* y los dos últimos el factor común *y*. Agrupamos los dos primeros términos en un paréntesis y los dos últimos en otro, precedido del signo + porque el tercer término tiene el signo + y tenemos:

$$\begin{aligned} ax + bx + ay + by &= (ax + bx) + (ay + by) \\ &= x(a + b) + y(a + b) \\ &= (a + b)(x + y) \end{aligned}$$

La agrupación puede hacerse generalmente de más de un modo con tal de que los dos términos que se agrupan tengan algún factor común, y siempre que las cantidades que quedan dentro del paréntesis después de sacar el factor común e cada grupo, sean exactamente iguales. Si esto no es posible lograrlo con la expresión dada no se puede descomponer por este método.

Así, en el ejemplo anterior podemos agrupar el 1° y 3er. Términos que tienen el factor común *a* y el 2° y 4to. Que tienen el factor común *b* y tendremos:

$$\begin{aligned} ax + bx + ay + by &= (ax + ay) + (bx + by) \\ &= a(x + y) + b(x + y) \\ &= (x + y)(a + b). \end{aligned}$$

Utilizamos la propiedad asociativa

(2) Factorizar $3m^2 - 6mn + 4m - 8n$.
Los dos primeros términos tienen el factor común *3m* y los dos últimos el factor común *4*. Agrupando, tenemos:

$$\begin{aligned} 3m^2 - 6mn + 4m - 8n &= (3m^2 - 6mn) + (4m - 8n) \\ &= 3m(m - 2n) + 4(m - 2n) \\ &= (m - 2n)(3m + 4). \end{aligned}$$

Ejemplos.

1) 6bm + 2 + 2m + 6b

agrupando los términos en (**m**) en un paréntesis y los restantes en otro paréntesis

(6bm + 2m) + (6b + 2)

En el primer paréntesis el factor común es la letra **m** y el **2**, y el segundo paréntesis el **2,** por lo tanto se colocan fuera del paréntesis los factores comunes y se divide cada termino por su factor común.

2m(3b + 1) + 2(3b +1)

Observe que ahora el polinomio tiene de factor común a los términos del paréntesis por lo tanto volvemos a factorizar de la misma manera.

(3b + 1) (2m + 2)

2) 6ax - 18ay -8bx + 24by

En este polinomio podemos agrupar términos que contiene a, b, x o por y,, hagamos por **x** y por **y.**

(6ax - 8bx) + (24by - 18ay)

los factores comunes son **(2x)** y **(6y)**

2x(3a - 4b) + 6y(4b - 3a)

En cada paréntesis los términos son iguales pero los signos no por lo tanto podemos factorizar el signo del segundo paréntesis.

2x(3a - 4b) - 6y(3a - 4b)

teniendo ahora como factor común a (3a - 4b) factorizando quedando como resultado

(3a - 4b) (2x - 6y).

Ejercicios para resolver de manera individual 3.3

1. $a^2+ab+ax+bx$
2. $ax-2bx-2ay+4by$
3. $3m-2n-2nx^4+3mx^4$
4. $4a^3-1-a^2+4a$
5. $3abx^2-2y^2-2x^2+3aby^2$

Actividades cooperativas 3.3

Integrar equipos de dos a tres alumnos. Factoricen las siguientes expresiones por agrupación de términos, háganlo intercambiando opiniones; todo esto, para consolidar lo aprendido y fomentar la cultura de trabajo en equipo. Asimismo, argumenten sus respuestas.

1. $ac-ad-bc+bd=$
2. $28-16x+14x^2-8x^3=$
3. $ay^2+15-5ay-3y=$
4. $a^2-b-a+ab=$
5. $40+15x-24x^2-9x^3=$
6. $18a^3+12a^2+15a+10=$
7. $20xy+15yz+4xw+3wz=$
8. $1+ab-a-b=$

3.4 Diferencia de cuadrados.

En los productos notables, comprobamos que la suma de dos cantidades multiplicadas por su diferencia es igual al cuadrado del minuendo menos el cuadrado del sustraendo, o sea, $(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$; de manera contraria tenemos que:

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b)}$$

Así podemos enunciar lo siguiente:

Se extrae la raíz cuadrada al minuendo y al sustraendo y se multiplica la suma de estas raíces cuadradas por la diferencia entre la raíz del minuendo y la raíz del sustraendo.

(1) Factorar $1 - a^2$
La raíz cuadrada de 1 es 1; la raíz cuadrada de a^2 es a. Multiplico la suma de estas raíces (1 + a) por la diferencia (1 – a) y tendremos:

$$1 - a^2 = (1 + a)(1 - a).$$

(2) Factorar $25x^2 - 49$

raíz de $25x^2 = 5x$; raíz de 49 es 7, por lo tanto:

$25x^2 - 49 = (5x + 7)(5x - 7)$

(3) Factorar $64a^4 - 36b^4$

raíz cuadrada de $64a^2 = 8a^2$; raíz cuadrada de $36b^4$ es $6b^2$, por lo tanto:

$64a^4 - 36b^4 = (8a^2 + 6b^2)(8a^2 - 6b^2)$

☞ **Nota:** *Para comprobar el resultado obtenido, realiza el producto de los binomios conjugados obtenidos y deberás llegar a la* ***diferencia de cuadrados*** *propuesta.*

Ejercicios para resolver de manera individual 3.4

Analiza las siguientes expresiones algebraicas y factoriza.

1. $X^2 - Y^2$
2. $a^2 - 4$
3. $9 - b^2$
4. $1 - 4m^2$
5. $4x^2 - 81y^4$

6. $361X^{14} - 1$

7. $\frac{X^2}{100} - \frac{Y^2Z^4}{81}$

8. $4x^{2n} - \frac{1}{9}$

9. $x^4 - y^4$

10. $100m^2n^4 - 4x^8$

Actividades cooperativas 3.4

Integrar equipos de dos a tres alumnos. Factoricen las siguientes diferencias de cuadrados, háganlo intercambiando opiniones; todo esto, para consolidar lo aprendido y fomentar la cultura de trabajo en equipo. Asimismo, argumenten sus respuestas.

1. $121a^2b^4-144a^4b^2$
2. $9x^2-16y^4$
3. $\frac{1}{9}b^2 - \frac{121}{36}b^2$
4. $4a^2-25$
5. x^4-y^2
6. $(x+3y)^2-4z^2$
7. $16x^2y^2-(a-x^2)^2$
8. $(a+b)^2-4(a-b^2)^2$
9. $x^4y^6-x^2y^4$

3.5 Suma o diferencia de cubos.

En el apartado correspondiente a productos notables, se obtuvieron los resultados como los siguientes:

$(a+b)(a^2-ab+b)=a^3+b^3$ (1)

$(a-b)(a^2+ab+b)=a^3-b^3$ (2)

La fórmula (1) nos dice que:

Regla 1
La suma de dos cubos perfectos se descompone en dos factores:

1° La suma de sus raíces cúbicas.
2° El cuadrado de la primera raíz **menos** el producto de las dos raíces, más el cuadrado de la segunda raíz.

La fórmula (2) nos dice que:

Regla 2
La diferencia de dos cubos perfectos se descompone en dos factores:

1° La diferencia de sus raíces cúbicas.
2°El cuadrado de la primera raíz, **más** el producto de sus dos raíces, más el cuadrado de la segunda raíz.

Factorar una suma o una diferencia de cubos perfectos.

(1) Factorar $x^3 + 1$
La raíz cúbica de $x^3 = x$; la raíz cúbica de $1 = 1$.
Según la regla 1:
$x^3 + 1 = (x + 1)[x^2 - x(1) + 1^2] = (x + 1)(x^2 - x + 1)$

(2) Factorar $a^3 - 8$
La raíz cúbica de $a^3 = a$; la raíz cúbica de $8 = 2$.
Según la regla 2:
$a^3 - 8 = (a - 2)[a^2 + 2(a) + 2^2] = (a - 2)(a^2 + 2a + 4)$

Ejemplos.

1) $8a^3 + 27b^6$

las raíces de $8a^3 = 2a$; de $27b^6 = 3b^2$

$8a^3 + 27b^6 = (2a + 3b^2)(4a^2 - 6ab^2 + 9b^4)$

donde en el segundo paréntesis $(2a)^2 = 4a^2$; el producto de las raíces es $2a(3b^2) = 6ab^2$ y el cuadrado de $(3b^2)^2 = 9b^4$

2) $64m^9 + 125n^3$

las raíces de los términos son $4m^3$ y 5n por lo tanto:

$64m^9 + 15n^3 = (4m^3 + 5n)(16m^6 - 20m^3n + 25n^2)$

donde en el primer paréntesis están la suma de las raíces cubicas de los dos términos al cubo, y en el segundo paréntesis están colocados el cuadrado de la primera raíz $(4m^3)^2 = 16m^6$; el producto de las raíces $4m^3(5n) = 20m^3$ n mas el cuadrado de la segunda raíz $(5n)^2 = 25n^2$.

3) $a^3 + (a + 1)^3$

se obtienen las raíces cubicas de los dos términos a factorizar y son la raíz de a^3 a y la raíz de $(a+ 1)^3$ por lo tanto

$$a^3+(a+1)^3 = (a + a + 1)(a^2 - a(a+1) + (a+1)^2)$$

$$= (2a +1)(a^2 - a^2 -a + a^2 + 2a +1)$$

$$= (2a + 1)(a^2 +a +1)$$

en el primer paréntesis la suma de las raíces y en segundo paréntesis el cuadrado de la primer raíz a^2; el producto de las raíces a(a + 1) y el cuadrado de la segunda raíz $(a + 1)^2$, se realizan operaciones y se simplifica

Actividades cooperativas 3.5

Integren equipos de dos personas y factoricen cada una de las sumas y diferencias de cubos, intercambiando opiniones, todo esto para consolidar lo aprendido y desarrollar la cultura de trabajo.

1. $343a^3-512z^3$
2. $1-(2+y)^3$
3. $8y^3+64(x+1)^3$
4. $1000a^3b^3+512z^3$
5. $(x+y)^3-(x-y)^3$
6. $8x^3+216z^3$
7. $(a+b)^3+1$
8. $8(x+1)^3-216(2x-1)^3$
9. $8(a+b)^3-216(a-2b)^3$
10. $(x+y)^3+(x-y)^3$

Actividades complementarias 3.5

Factorizar cada una de las sumas o diferencias de cubos:

1. $8-z^3$

2. $8x^3+343y^3$

3. $216x^3-512y^3$

4. $125(x-4)^3+8(y+2)^3=$

5. $1 - 8x^3=$

3.6 Trinomio cuadrado perfecto.

Antes de factorizar un trinomio debemos comprobar si es **trinomio cuadrado perfecto**, esto se comprobará si el trinomio cumple las siguientes características:

En el Trinomio Cuadrado Perfecto:

- El primer y tercer término deben tener **raíz cuadrada exacta**, así también deben tener **signo positivo**.
- Una vez comprobado esto, al obtener las raíces cuadradas de los términos primero y tercero, **el segundo término debe ser igual al doble del producto de las raíces.**
- Si todo esto se cumple, **la factorización de un trinomio cuadrado perfecto es igual a la raíz cuadrada del primer y tercer término separadas por el signo del segundo término de trinomio y este binomio se eleva al cuadrado**.

Después de lo anterior y recordando lo visto en los productos notables, tenemos que:

$$(a+b)^2= a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2= a^2 - 2ab+b^2$$

En las expresiones anteriores se puede apreciar que al lado derecho se tienen trinomios cuadrados perfectos, ya que son el cuadrado de una expresión, en este caso el trinomio cumple exactamente con lo expresado anteriormente.

De lo anterior concluimos que si una expresión algebraica es un trinomio cuadrado perfecto, entonces lo podemos factorizar como un binomio elevado al cuadrado.

(1) Factorar $x^4 + x^2y^2 + y^4$

Veamos si este trinomio es cuadrado perfecto.

La raíz cuadrada del primer término	$x^4 = x^2$
La raíz cuadrada del segundo	$y^4 = y^2$
Y el doble producto de estas raíces es:	$2x^2y^2$

Luego, este trinomio no es cuadrado perfecto.

Para que sea cuadrado perfecto hay que lograr que el segundo término x^2y^2 se convierta en $2x^2y^2$, lo cual se consigue sumándole x^2y^2, pero para que el trinomio no varíe hay que restarle la misma cantidad que se suma, x^2y^2, y tendremos:

$$\begin{array}{l} x^4 + x^2y^2 + y^4 \\ \quad + x^2y^2 \qquad -x^2y^2 \\ \hline x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2 \end{array}$$

(factorando el trinomio cuadrado perfecto)= $(x^2+y^2)^2 - x^2y^2$
(factorando la diferencia de cuadrados) $= (x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$

Ejemplos.

1) $4x^2 - 12x + 9$

Las raíz de $4x^2$	$2x$
Las raíz de 9	3
El doble del producto de las raíces es	$2(2x)\,3 = 12x$

Por lo tanto es cuadrado perfecto, factorizando $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$

2) $m^2 + 8m + 16$

Obtenemos la raíz de m^2	m
Obtenemos la raíz de 16	4
El doble del producto de las raíces es	2(m) 4=8m

Por lo tanto es un trinomio cuadrado perfecto, factorizando $m^2 + 8m + 16 = (m + 4)^2$

3) $16q^4 - 24q^2 m + 9m^2$

Obtenemos la raíz $16q^4$	$4q^2$
Obtenemos la raíz $9m^2$	3m
El doble del producto de las raíces es	$2(q^2)\ 3m = 24q^2 m$

Por lo tanto es un trinomio cuadrado perfecto.

Factorizando. $16q^4 - 24q^2 m + 9m^2 = (4q^2 - 3m)^2$

Actividades de autoestudio 3.6

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $1+14mn+49m^2n^2$

2. $4a^2-12ab^2+9b^4$

3. $m^4 + m^2n^2 + n^4$

4. $a^4+8a^2b+16b^2$

5. $t^4 + 6t^2r + 9r^2$

Ejercicios para resolver de manera individual 3.6

Factoriza las siguientes expresiones:

1. $16m^4 + 24m^2n^2 + 9n^4$

2. $36x^4 + 84x^2y^2 + 49y^4$

3. $X^4 - 2x^2 + 1$

4. $x^8 + 8x^4y^4 + 16y^8$

5. $144 - 72n^6 + 9n^{12}$

Actividades complementarias 3.6

Factoriza cada una de las expresiones siguientes. En caso de que la expresión no sea un trinomio cuadrado perfecto indícalo y lo conviertes.

1. $4a^2 - 16ab^2 + 16b^4$
2. $121a^2b^4 + 100c^2 - 220ab^2c$.
3. $9 - 6(a-1) + (a-1)^2$
4. $13x^3 + 4x^2 + 9x^4$
5. $16x^4 + 64x^6 + 64x^8$
6. $\frac{9}{4}b^2 - 5b^2 + \frac{25}{9}c^4$
7. $m^{12} + 10m^6 + 25$
8. $(a+b) + 20(a+b)(a-b) + 100(a-b)$
9. $\frac{4}{25}x^6 - \frac{16}{15}x^5 + \frac{16}{9}x^4$
10. $9(a-2b)^2 - 36(a-2b) + 36(2a+3b)^2$

3.7 Trinomio de la forma x^2+bx+c

Los trinomios de la forma

$$\boxed{x^2 + bx + c}$$

son trinomios tales como:

$$x^2 + 5x + 6, \qquad m^2 + 5m - 14$$
$$a^2 - 2a - 15, \qquad y^2 - 8y + 15$$

que cumplen las siguientes condiciones:

1. El coeficiente del primer término es 1.
2. El primer término es una letra cualquiera elevada al cuadrado.
3. El segundo término tiene la misma letra que el primero con exponente 1 y su coeficiente es una cantidad cualquiera, positiva o negativa.
4. El tercer término es independiente de la letra que aparece en el 1° y 2° términos y es una cantidad cualquiera, positiva o negativa.

Regla práctica para factorar un trinomio de la forma
$x^2 + bx + c$

(1) El trinomio se descompone en dos factores binomios cuyo primer término es *x*, o sea la raíz cuadrada del primer término del trinomio.
(2) En el primer factor, después de *x* se escribe el signo del segundo término del trinomio, y en el segundo factor, después de *x* se escribe el signo que resulta de multiplicar el signo del 2° término del trinomio por el signo del tercer término del trinomio.
(3) Si los dos factores binomios tienen en el medio **signos iguales** se buscan dos números cuya suma sea el valor absoluto del segundo término del trinomio y cuyo producto sea el valor absoluto del tercer término del trinomio. Estos números son los segundos términos de los binomios.
(4) Si los dos factores binomios tienen en el medio **signos diferentes** se buscan dos números cuya diferencia sea el valor absoluto del segundo término del trinomio y cuyo producto sea el valor absoluto del tercer término del trinomio. El **mayor** de estos números es el segundo término del primer binomio, y el menor, el segundo término del segundo binomio.

Esta regla práctica muy sencilla en su aplicación se aclarará con los siguientes ejemplos:

1. Factorar $x^2 + 5x + 6$

El trinomio se descompone en dos binomios cuyo primer término es la raíz cuadrada de x^2 o sea x:

$$x^2 + 5x + 6 = (x \quad)(x \quad)$$

En el primer binomio después de *x* se pone el signo + porque el segundo término del trinomio *5x* tiene signo +. En el segundo binomio, después de *x*, se escribe el signo que resulta de multiplicar el signo de *+5x* por el signo de *+6* y se tiene que + por + da + o sea:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + \quad)(x + \quad)$$

Ahora, como en los binomios tenemos *signos iguales*, buscamos dos números que cuya suma sea 5 y cuyo producto sea 6. Estos números son 2 y 3, luego:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

2. Factorar $x^2 + 6x - 216$

$$x^2 + 6x - 216 = (x + \quad)(x - \quad)$$

Necesitamos dos números cuya diferencia sea 6 y cuyo producto sea 216.
Estos números no se ven fácilmente. Para hallarlos, descomponemos en los factores primos el tercer término:

216	2
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

Ahora, formamos con estos factores primos dos productos.

Por tanteo, variando los factores de cada producto, obtendremos los dos números que buscamos. Así:

2 x 2 x 2 = 8	3 x 3 x 3= 27	27 – 8=19, no nos sirven
2 x 2 x 2 x 3=24	3x 3= 9	24 – 9=15, no nos sirven
2 x 2 x 3= 12	2 x 3 x3=18	18 – 12=6, sirven.

18 y 12 son los números que buscamos porque su diferencia es 6 y su producto necesariamente es 216 ya que para obtener estos números hemos empleado todos los factores que obtuvimos en la descomposición de 216. Por lo tanto:

$$x^2+6x-216= (x+18)(x-12).$$

Más ejemplos...

1) $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$

la raíz de x^2 es X, será el primer término de los binomios el signo del primer paréntesis es + signo de (x) y el signo en el segundo paréntesis (+) (-) = -; por lo tanto los segundos términos serán **dos números que restados dan 1 y multiplicados 6,** estos son tres y dos, el numero mayor siempre se coloca en el primer paréntesis.

2) $x^2 - 20x - 300 = (x - 30)(x + 10)$

Raíz de x^2 es x, es el primer término de los binomios de los paréntesis, los signos serán primero (-) signo del segundo término y (-)(-) = + en el segundo binomio, al ser signos diferentes se buscan dos números que restados sean igual a 20 y multiplicados 300, por lo tanto descomponemos el 300 en sus números primos y hacemos combinaciones con estos números primos, para encontrar los dos números buscados.

300 2	300 = 2(2) 3(5) 5
150 2	combinaciones
75 3	2 (150)
25 5	4 (75)
25 5	12 (25)
1	5 (60)
	10 (30) Esta es la combinación de números buscados.

3) $t^2 + 13t + 40 = (t + 8)(t + 5)$

La raíz de t^2 = t, es el primer término de los binomios, los signos son + en primer binomio y (+) (+) = + en el segundo, si son signos iguales los números buscados al sumar deben ser igual a 13, son 8 y 5.

Actividades de autoestudio 3.7

1) x^2+5x+6

2) $a^2-12a-28$
3) $y^2+11+24$
4) $x^2-12x+32$
5) y^6+20y^3-21

Ejercicios para resolver de manera individual 3.7

Factoriza cada una de las expresiones siguientes

1) $9n^2+18mn-72m^2$
2) $m^2+13m-48$
3) x^4+2x^2-440
4) $(a+1)^2-15(a+1)-100$
5) $49x^4+70x^2+16$

Actividades cooperativas 3.7

Reúnete con un compañero y vuelvan a leer el tema: *Trinomio de la forma* x^2+bx+c y con sus propias palabras escriban las conclusiones a las que llegan, con el propósito de que resuelvan cualquier caso de este tipo, que se les presente.

3.8 Trinomio de la forma ax^2+bx+c

Los trinomios de la forma:

$$ax^2+bx+c$$

Se diferencian de los del caso anterior (x^2+bx+c) en que **el primer término tiene un coeficiente diferente de 1.**

Ejemplos de trinomios de esta forma son:

$$2x^2 + 11x + 5$$

$$3a^2 + 7a - 6$$

$$10n^2 - n - 2$$

Reglas para la descomposición en factores de un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

(1) Factorar $6x^2 - 7x - 3$.

Multipliquemos el trinomio por el coeficiente de la x^2 que es 6 y dejando indicado el producto de 6 por 7x se tiene:

$$36\,x^2 - 6(7)x - 18$$

Ahora, podemos escribir el trinomio de la siguiente forma:

$$(6x)^2 - 7(6x) - 18$$

Descomponemos este trinomio, como en el caso anterior, en dos binomios, en donde el primer término de cada factor sea la raíz cuadrada del primer término del trinomio, esto es 6x :

$$(6x \qquad)\ (6x \qquad)$$

Posteriormente, se buscan dos números cuya diferencia sea 7 y cuyo producto sea 18, teniendo entonces:

$$(6x - 9)\,(6x+2)$$

Cuidado, este no es nuestro resultado ya que la expresión original se multiplicó por 6, de tal manera que se tendrá que dividir entre 6 el resultado anterior.

$$\frac{(6x - 9)\,(6x+2)}{6}$$

Como observarás ninguno de los monomios es divisible entre 6, pero descomponemos 6 en sus factores 2 y 3, dividiendo ahora:

$$\frac{(6x - 9)}{(3)} \quad \frac{(6x+2)}{(2)}$$

Con lo anterior obtenemos el siguiente resultado:

$$6x^2 - 7x - 3 = (2x-3)(3x+1)$$

Actividades cooperativas 3.8

Reúnete con dos o tres compañeros y factoricen las siguientes expresiones algebraicas. No olviden respetar las opiniones de los miembros de su equipo. Lo anterior les permitirá adquirir rapidez y efectividad al factorizar los trinomios de la forma ax^2+bx-c, al tiempo que obtendrán la habilidad de trabajar en forma colaborativa.

1. $16x^2-2x-5$
2. $150a^2-55a+4$
3. $128z^2+8z-15$
4. $3x^2-13x-30$
5. $4m^2+m-33$
6. $5x^2+16x+13$
7. $3m^2+19m-14$
8. $15a^2+a-6$
9. $6y^2-31y+35$
10. $14a^2-19a-40$

Actividades complementarias 3.8

Factoriza cada una de las expresiones siguientes:

1. $5dy-10d+4ey-8e$
2. $16+16ab+4a^2y^2$
3. $4a^2-b^2$

4. $125x^2-x^5$
5. $2a^2+7a+3$
6. x^3+1
7. $8xy+27xy^7$
8. x^3+2x^2-x-2
9. $100-(16x^2+y^6-8xy^3)$

Formas de factorización:

1. Factor común.	$ax+ay+az=a(x+y+z)$
2. Agrupación de términos.	$ax+ay+bx+by= a(x+y)+b(x+y)$ $= (x+y)(a+b)$
3. Diferencia de cuadrados.	$a^2-b^2= (a-b)(a+b)$
4. Suma de cubos.	$a^3+b^3= (a+b)(a^2-ab+b^2)$
5. Diferencia de cubos.	$a^3-b^3= (a-b)(a^2+ab+b^2)$
6. Trinomio de cuadrado perfecto.	$a^2+2ab+b^2= (a+b)^2$
7. Trinomio de la forma x^2+bx+c. (dos números que sumados y multiplicados)	$x^2+bx+c= (x+n)(x+m)$, donde $n+m=b$ y $nm=c$
8. Trinomio de la forma ax^2+bx+c.	$ax^2+bx+c=(dx+m)(ex-n)$, donde $de=a$, $dn+me=b$, $mn=c$

Soluciones a los Ejercicios correspondientes al Módulo 3

Actividades de autoestudio 3.2

1) $a(a+b)$ 2) $b(1+b)$ 3) $x(x+1)$
4) $4m(2m-3n)$ 5) $12xy^2(2a^2-3xy^2)$ 6) $a(a^2+a+1)$
7) $x(1-x+x^2-x^3)$ 8) $a^2(a^4-3a^2+8a-4)$ 9) $ab(3a+6-5a^2b+8ax+4bm)$
10) $a^2(a^{18}-a^{14}+a^{10}-a^6+a^2-1)$

Ejercicios para resolver de manera individual 3.2

1) $2(2x^2-4x-1)$ 2) $5y(3y^2+4y-1)$ 3) $a(a^2-ax+x^2)$
4) $x^3(1+x^2-x^4)$ 5) $14x^2(y^2-2x+4x^2)$

Ejercicios para resolver de manera individual 3.3

1) $(a+b)(a+x)$ 2) $(x-2y)(a-2b)$ 3) $(1+x^4)(3m-2n)$
4) $(a^2+1)(4a-1)$ 5) $(3ab-2)(x^2+y^2)$

Ejercicios para resolver de manera individual 3.4

1) $(x+y)(x-y)$ 2) $(a+2)(a-2)$ 3) $(3+b)(3-b)$
4) $(1+2m)(1-2m)$ 5) $(2x+9y^2)(2x-9y^2)$ 6) $(19xy^2+1)(19xy^2-1)$
7) $(x/10+yz^2/9)(x/10-yz^2/9)$ 8) $(2x^n+1/3)(2x^n-1/3)$ 9) $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)$
10) $(10mn^2+1/4x^4)(10mn^2+1/4x^4)$

Actividades de autoestudio 3.6

1) $(1+7mn)^2$ 2) $(2a-3b^2)^2$ 3) $(m^2+n)^2$
4) $(a^2+4a)^2$ 5) $(t^2+3r)^2$

Ejercicios para resolver de manera individual 3.6

1) $(4m^2+3n^2)^2$ 2) $(6x^2+7y^2)^2$ 3) $(x^2-1)^2$
4) $(x^2+4)^2$ 5) $(12-3n^6)^2$

Actividades de autoestudio 3.7

1) $(x+2)(x+3)$ 2) $(a-14)(a+2)$ 3) $(y+8)(y+3)$
4) $(x-8)(x-4)$ 5) $(y^3+20)(y-1)(y^2+y+1)$

Ejercicios para resolver de manera individual 3.7

1) $9(n-4m)(n-2m)$ 2) $(m+16)(m-3)$ 3) $(x^2+22)(x^2-20)$
4) $[(a+1)-20][(a-1)+5]$ 5) $49(x^2+8/7)(x^2+2/7)$

Bibliografía Complementaria

Baldor, Aurelio (1984). *Álgebra.* México: Publicaciones Cultural, S.A. de C.V.

Fuenlabrada de la Vega Trucíos, Samuel (1994). *Matemáticas I: aritmética y álgebra.* México: McGraw-Hill.

Leithold, Louis (1994). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. México: Harla.

Lovaglia, Florence M (1972). *Álgebra.* México: Harla.

Murphy Johnson y Steffensen (1994). *Álgebra y Trigonometría con aplicaciones.* México: Trillas

Swokowski, Earl (1988). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* México: Iberoamérica.

Módulo 4

Fracciones algebraicas

Objetivos informativos.
Al finalizar el módulo, el alumno:
Identificará una fracción algebraica y la distinguirá de una fracción entera.
Aplicará sus conocimientossobre fracciones a la simplificación de fracciones algebraicas.
Realizará operaciones básicas con las fracciones algebraicas.

Objetivos formativos.
Al finalizar el módulo, el alumno:
Aprenderá a trabajar en forma ordenada y limpia al realizar operaciones con fracciones algebraicas.
Adquirirá la cultura del trabajo colaborativo.
Adquirirá el hábito de ser responsible.

4. Fracciones Algebraicas.

En este módulo, se contemplará todo lo relativo a las fracciones algebraicas, las cuales son una extensión de las aritméticas, diferenciándose de ellas en que la fracción aritmética es un cociente de enteros, en tanto que la fracción algebraica es:

Fracción algebraica: es el cociente indicado de dos expresiones algebraicas.

Así, a/b es una fracción algebraica porque es el cociente indicado de la expresión *a* (dividendo) entre la expresión *b* (divisor).

El dividendo *a* se llama **numerador** de la fracción algebraica, y el divisor *b*, **denominador**. El numerador y el denominador son los términos de la fracción.

Expresión algebraica entera, es la que no tiene denominador literal, y puede considerarse como una fracción de denominador 1

Ejemplo:
x+y, a , m-n, a/2, 2b/5, a/1, (x +y)/1.

Al igual que en la aritmética, una expresión **algebraica mixta** está formada por una parte entera y otra fraccionaria. Ejemplo: $a+\frac{b}{c}$

4.1 Propiedades básicas de las fracciones algebraicas.

Las propiedades básicas que rigen el manejo de las fracciones aritméticas son las mismas para las fracciones algebraicas, son de vital importancia y se enuncian de la siguiente manera:

1. Si en una fracción algebraica, se multiplican el numerador y el denominador por una misma cantidad diferente de cero la fracción no se altera porque resulta una equivalente.
2. Si en una fracción algebraica, se dividen el numerador y el denominador por una misma cantidad diferente de cero la fracción no se altera porque resulta una equivalente.

4.2 Signos de la fracción y sus términos.

En toda fracción algebraica se deben considerar tres signos:

- El del numerador
- El del denominador
- El de la fracción como tal.

El signo de la fracción puede ser positivo o negativo y va escrito delante de la raya de la fracción, si no aparece ningún signo, queda establecido que este es positivo.

En a fracción a/b el signo de la fracción es positivo, lo que significa que tanto el numerador como el denominador tienen signo positivo.

En la fracción $\frac{-a}{b}$

el signo de la fracción es negativo, porque el signo del numerador es negativo y el del denominador es positivo .

En las fracciones pueden hacerse cambios en los signos sin que la fracción se altere.

1) Si se cambia el signo del numerador y el del denominador, la fracción no altera.
2) Si se cambia el signo del numerador y el signo de la fracción, la fracción no se altera.
3) Si se cambia el signo del denominador y el de la fracción, la fracción no se altera.

Los cambios antes mencionados se ilustran mejor con los siguientes ejemplos:

Sea la siguiente fracción $\frac{a}{b} = m$

1) $\frac{-a}{-b} = m$

2) $\frac{-a}{b} = -m$

$\frac{a}{-b} = -m$

3)

Si el numerador o el denominador de una fracción son polinomios, entonces cambiar el signo de una expresión algebraica significa cambiar el signo a cada uno de los términos del polinomio, por ejemplo:

$$\frac{2x^3 - 4x^2 - 16}{3x^4 - 2x + 16} = \frac{-2x^3 + 4x^2 + 16}{-3x^4 + 2x - 16}$$

(se cambió el signo al numerador y al denominador para no alterar la fracción)

Si el numerador o el denominador están compuestos de varios factores, se puede cambiar el signo a un número par de factores, sin que se altere la fracción.

Por ejemplo:

$$\frac{(x+y)\,(2a-4b)}{(p-q)\,(r+2s)} = \frac{(-x-y)\,(2a-4b)}{(-p+q)\,(r+2s)}$$

Si se cambia el signo de un número impar de factores, entonces a la fracción como tal también se le cambia de signo. Por ejemplo:

$$\frac{(x+y)\,(2a-4b)}{(p-q)\,(r+2s)} = \frac{(-x-y)\,(2a-4b)}{(p-q)\,(r+2s)}$$

Al aplicar lo anterior podemos **reducir** fracciones algebraicas

Reducir una fracción algebraica es cambiar la forma original de una fracción a otra, sin cambiar su valor.

Esto se logra a través de:

- Simplificación de fracciones.
- Reducción de fracciones a un común denominador.
- Reducción fracciones algebraicas a forma mixta, y viceversa.

Simplificar una fracción algebraica es encontrar una fracción equivalente, tal que sus términos sean primos entre sí, cuando los términos son primos entre sí, la fracción está reducida a su mínima expresión.

Por ejemplo la fracción $\frac{9a^2b^4}{12a^3b^2c^3}$

simplificada queda: $\frac{3b^2}{4ac^3}$

Se puede simplificar fracciones cuyos términos sean polinomios y para esto se sigue la siguiente regla:

1. Se descomponen en factores los polinomios.
2. Se simplifican los factores comunes que pertenezcan al numerador y al denominador.

Ejemplo: $\frac{2a^2}{4a^2-4ab}$

1) Factorizando el denominador se tiene:

$$\frac{2a^2}{4a(a-b)} = \frac{a}{2\,(a-b)}$$

En *aritmética* era necesario escribir fracciones con un común denominador, con el objeto de poder sumarlas o restarlas. Con las fracciones algebraicas tendremos que saber encontrar el común denominador de dos o más fracciones algebraicas, y no sólo eso sino que por lo regular necesitaremos que el común denominador sea el menor posible. A este menor común denominador se le conoce como **mínimo común múltiplo (mcm)** de las fracciones.

Para reducir fracciones al mínimo común denominador, se sigue la siguiente regla (que es idéntica a la empleada en aritmética).

1. Se simplifican las fracciones dadas.
2. Se halla el mínimo común múltiplo de los denominadores (que será el denominador común)
3. Para hallar los numeradores, se divide el mcm de los denominadores entre cada denominador y el cociente se multiplica por el numerador respectivo.

Ejemplo:

Reducir $2/a$, $3/(2a^2)$ y $5/(4x^2)$

1. Encontramos el mcm de los denominadores	$4a^2x^2$
2. Dividimos $4a^2x^2$ entre los tres denominadores y lo multiplicamos por su numerador correspondiente.	$\frac{8ax^2}{4a^2x^2}$, $\frac{6x^2}{4a^2x^2}$, $\frac{5a^2}{4a^2x^2}$

Actividades complementarias 4.2

1. Lee con mucha atención el tema de fracciones algebraicas, y antes de pasar a los siguientes ejercicios, deberás dar un repaso acerca del mínimo común múltiplo. Posteriormente, elabora un resumen con las propiedades de las fracciones algebraicas más importantes.

2. Simplifica cada una de las fracciones siguientes

1. $\frac{2a^2+a-3}{a^2+a-2}$ 2. $\frac{m^3-2m^2n-mn+n^3}{m^3-mn^2}$ 3. $\frac{25a^2+20a+4}{5a^2-3a-2}$

4. $\frac{a^3+27}{2a^2+12a+18}$ 5. $\frac{x^3+x^2-4x-4}{x^2+3x+2}$

1. $x-1+\frac{x-1}{x+1}$ 2. $a-5-\frac{3a}{a-2}$ 3. $1-x+\frac{2x}{x+2}$

4.3 Suma y Diferencia de fracciones algebraicas.

Las operaciones de suma y diferencia de las fracciones algebraicas las realizaremos aplicando las propiedades básicas de las fracciones. Para ello aplicaremos la regla general para sumar fracciones, que es la siguiente:

1. Simplificar las fracciones, si esto es posible.
2. Si son de distinto denominador, obtenemos el mínimo común denominador.
3. Se efectúan las operaciones indicadas.
4. Sumar los numeradores de las fracciones, dividiendo esta suma por el denominador común.
5. Reducir términos semejantes.
6. Simplificar el resultado.

Es entonces conveniente recordar que:

$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$, $b \neq 0$ $\quad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$, $b \neq 0$ (mismo denominador)

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ $\quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$, $b,d \neq 0$ (denominador diferente)

No debe sorprendernos el hecho de que las reglas anteriores sean las mismas para sumar y restar fracciones algebraicas, ya que éstas son una "extensión" de las primeras. En las reglas anteriores las literales pueden ser expresiones cualesquiera.

Ejemplos.

Obtén cada una de las siguientes sumas de fracciones algebraicas.

1. $\frac{a-b}{2x}+\frac{2a+b}{2x}=$

Solución.

Los términos de la suma $\frac{a-b}{2x}+\frac{2a+b}{2x}$ tienen el mismo denominador, por lo que:

$$\frac{a-b}{2x}+\frac{2a+b}{2x}=\frac{(a-b)+(2a+b)}{2x}$$ *reducimos términos semejantes.*

$$=\frac{3a}{2x}$$

Por lo tanto:

$$\frac{a-b}{2x}+\frac{2a+b}{2x}=\frac{3a}{2x}$$

2. $\frac{a+3b}{ab}+\frac{2a-3b}{ab}+\frac{3}{a}=$

En este ejemplo los denominadores son diferentes, por lo que reducimos cada término a una fracción que tenga el mismo denominador. La tercera fracción se multiplica por b y resulta:

$$\frac{3}{a} \times \frac{b}{b}=\frac{3b}{ab}$$

Entonces, se tiene:

$$\frac{a+3b}{ab}+\frac{2a-3b}{ab}+\frac{3}{a}=\frac{a+3b}{ab}+\frac{2a-3b}{ab}+\frac{3b}{ab}$$ *aplicamos la regla sobre la suma con el mismo denominador*

$$=\frac{(a+3b)+(2a-3b)+(3b)}{ab}$$

reducimos términos semejantes.

$$=\frac{3a+3b}{ab}$$

factorizamos el numerador.

$$= \frac{3(a+b)}{ab}$$

Para efectuar la diferencia de fracciones algebraicas, se sigue la siguiente regla general:

1. Simplicar las fracciones, si esto es posible.
2. Si tuvieran diferente denominador, reducirlas al mínimo común denominador.
3. Efectuar las multiplicaciones indicadas.
4. Restar los numeradores y dividir el resultado por el denominador común.
5. Se reducen términos semejantes.
6. Simplificar el resultado.

Hallar el resultado de la siguiente diferencia:

$$\frac{3a^2-5a+1}{a^2-9} - \frac{3a^2-6a+4}{a^2-9} =$$

Como los términos de la diferencia de fracciones tienen el mismo denominador, entonces procedemos a aplicar directamente la resta.

$$\frac{3a^2-5a+1}{a^2-9} - \frac{3a^2-6a+4}{a^2-9} = \frac{(3a^2-5a+1)-(3a^2-6a+4)}{a^2-9}$$ *eliminamos los paréntesis.*

$$= \frac{3a^2-5a+1-3a^2-6a+4}{a^2-9}$$ *reducimos términos semejantes y factorizamos el denominador.*

simplificamos la fracción. $= \dfrac{a-3}{(a-3)(a+3)}$.

Por lo tanto:

$$\frac{3a^2-5a+1}{a^2-9} - \frac{3a^2-6a+4}{a^2-9} = \frac{1}{a+3}.$$

2. $\dfrac{1}{x^2+5x-6} - \dfrac{1}{x^2-1} =$

Los denominadores son diferentes, por lo que procedemos a encontrar su mcm. Factorizamos:

$x^2+5x-6=(x+6)(x-1)$, $x^2-1=(x-1)(x+1)$.

Por lo tanto, el mcm es igual a $(x+6)(x-1)(x+1)$.

Ahora, escribimos cada fracción en términos de su factorización.

$$\frac{1}{x^2+5x-6} - \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x+6)(x-1)} - \frac{1}{(x-1)(x+1)}.$$

escribimos cada fracción en términos del mcm y sumamos.

$$= \frac{(x+1) - (x+6}{(x+6)(x-1)(x+1)}.$$

quitamos paréntesis.

$$= \frac{x+1-x-6}{(x+6)(x-1)(x+1)}.$$

reducimos términos semejantes.

$$= \frac{-5}{(x+6)(x-1)(x+1)}.$$

$$\frac{1}{x^2+5x-6} - \frac{1}{x^2} = \frac{-5}{(x+6)(x-1)(x+1)}.$$

Actividades de autoestudio 4.3

Vuelve a leer el tema: *fracciones algebraicas* y recuerda las principales propiedades. Da un repaso al tema de fracciones aritméticas para recordar las principales operaciones.

Actividades cooperativas 4.3

Reúnete con un compañero y realicen las operaciones indicadas respetando la opinión de tu compañero, todo esto para reforzar su aprendizaje y fomentar en ustedes la cultura del trabajo en equipo.

1. $\frac{5a}{a-1} + \frac{8-a}{a^2-1} =$

2. $\frac{2}{a^2-11a+30} + \frac{5}{a-6} + \frac{1}{a-5} =$

3. $\frac{a^2+4ab}{a^3+b^3} + \frac{1}{a+b} - \frac{a}{a^2-ab+b^2} =$

4. $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2-1} - \frac{3}{x+1} =$

5. $\frac{m+1}{2(m-1)} - \frac{m-1}{2(m+1)} + \frac{-2m+1}{m^2-1} =$

6. $1+\frac{2x}{x-2}+\frac{3x}{x+2}-\frac{6x^2-2x-3}{x^2-4}=$

7. $\frac{m^2+m-6}{m^2+3m}+\frac{m^2-3m+9}{m^3+27}-\frac{m+3}{m^2-9}=$

8. $3+x+\frac{3x^2-2x}{x-1}=$

Actividades complementarias 4.3

Calcula las siguientes operaciones con fracciones algebraicas.

1. $\frac{m-2}{m-1}+\frac{m+3}{m+2}+\frac{m+1}{m-3}=$

2. $(a-b)+\frac{4}{c-1}=$

3. $\frac{4}{x^2-x}+\frac{3}{1-x^2}=$

4. $\frac{x+2}{y-x}-\frac{y-2}{y+x}=$

5. $\frac{a+2}{a^2-5a-14}-\frac{a}{a^2-9a+14}=$

4.4. Multiplicación y división de fracciones algebraicas.

En este apartado, estudiaremos, en primer término, el procedimiento para

realizar la **multiplicación de fracciones algebraicas**; proceso que está regido por la siguiente regla general:

1. Descomponemos en factores los términos de las fracciones que se van a multiplicar.
2. Simplificamos, suprimiendo factores comunes en numerador y denominador.
3. Multiplicamos entre sí las expresiones que queden en los numeradores, después de simplificar, este producto se divide por las expresiones resultantes en el denominador.

Ejemplos:

$$\frac{2a}{3b^3} \times \frac{3b^2}{4c} \times \frac{c^2}{2a^2} = \frac{2 \times 3 \times a \times b^2 \times c^2}{3 \times 4 \times 2 \times a^2 \times b^3 \times c} = \frac{c}{4ab}$$

$$\left(\frac{3x-3}{2x+4}\right)\left(\frac{x^2+4x-4}{x^2-x}\right) = \frac{3(x-1)(x+2)(x+2)}{2(x+2)x(x-1)} = \frac{3x+6}{2x}$$

Ahora procederemos a realizar la **división de fracciones algebraicas,** procedimiento que está regido por la siguiente regla:

Se multiplica el dividendo por el divisor invertido, es decir, se debe multiplicar el dividendo por el recíproco del divisor.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

donde b, c, d son diferentes de cero

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

☞ Estas reglas coinciden con aquellas que rigen a las fracciones aritméticas.

Ejemplos:

$$\frac{4a^2}{3b^2} \div \frac{2ax}{9b^3} = \frac{(4a^2)(9b^3)}{(3b^2)(2ax)} = \frac{6ab}{x}$$

$$\frac{x^2+4x}{8} \div \frac{x^2-16}{4} = \frac{(x^2+4x)(4)}{8(x^2-16)} = \frac{x(x+4)4}{8(x-4)(x+4)} = \frac{x}{2x-8}$$

Actividades de autoestudio 4.4

Realiza las siguientes operaciones:

1) $\frac{5a^2}{7b^3} \cdot \frac{4b^2}{5c^3} \cdot \frac{35c}{2a^4} =$

2) $\frac{(x+1)^2}{x^2+2x-3} \cdot \frac{4x+12}{x^2-1} =$

3) $\frac{m^2}{n^2} \cdot (mn^2 - \frac{n^2}{m^2}) =$

4) $\frac{x-y}{m+n} \cdot \frac{m^2+n^3}{x^3-y^3} =$

5) $\frac{36a^3b^3m}{5n} \div \frac{24a^4m^2b}{15n^3} =$

6) $\frac{m^3+n^3}{(m+n)^3} \div \frac{(m^3+n^3)^2}{(m+n)^4} =$

Ejercicios para resolver de manera individual 4.4

1) $\dfrac{3x}{x^2-7x+12} \div \dfrac{2x^3}{x^2-x-12} =$

2) $\dfrac{x^2-14x-15}{x^2-4x-45} : \dfrac{x^2-12x-45}{x^2-6x-27} =$

3) $a+\dfrac{1}{a+2} \div 1+\dfrac{3}{a^2-4} =$

Soluciones a los Ejercicios correspondientes al Módulo 4

Actividades de autoestudio 4.4

1) $\frac{10}{a^2bc^2}$

2) $\frac{4(x+1)}{(x-1)^2}$

3) $m^3 - 1$

4) $\frac{m^2-mn+n^2}{x^2+xy+y^2}$

5) $\frac{9bn^2}{2am}$

6) $\frac{1}{m^2-mn+n^2}$

Ejercicios para resolver de manera individual 4.4

1) $\frac{3(x+3)}{2(x-3)x^2}$

2) $\frac{x+1}{x+5}$

3) $\frac{(a+1)(a-2)}{a-1}$

Bibliografía Complementaria

Barnett Raymnod (1990). *Álgebra y Trigonometría.* México: McGraw-Hill.

Fleming, Walter y Dale Varberg (1991). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* México : PRENTICE – HALL.

Leithold, Louis (1994). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* México: Harla.

Lovaglia, Florence M (1972). *Álgebra.* México: Harla.

Martínez, Gallardo Víctor, Francisco G. Sevilla y Víctor Ibarra Mercado. (1997). *Álgebra elemental.* México: JUST IN TIME PRESS, S.A. DE C.V.

Murphy Johnson y Steffensen (1994). *Álgebra y Trigonometría con aplicaciones.* México: Trillas.

Swokowski, Earl (1988). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* México: Iberoamérica.

Módulo 5

Identidad y ecuación

Objetivos informativos.
Al finalizar el módulo, el alumno:
Conocerá las definiciones de identidad y ecuación.
Resolverá ecuaciones de primer grado con una variable.
Resolvera desigualdades.
Diferenciará una ecuación cuadrática de las de primer grado analizando el exponente de la incógnita.
Analizará las características de cada método de solución, aplicando estos conocimientos para encontrar raíces de ecuaciones de segundo grado.
Aplicará sus conocimientos a la solución de problemas prácticos, analizando las situaciones presentadas.

Objetivos formativos.
Al finalizar el módulo, el alumno:
Adquirirá el hábito de ser ordenado y limpio en sus trabajos.
Sabrá defender sus puntos de vista al tiempo de ser respetuoso y tolerante.
Será honesto con él mismo y con sus compañeros.

5. Identidad y ecuación.

En este módulo estudiaremos a las identidades y ecuaciones, este tema es muy importante debido a que nos permite aplicar los conocimientos aprendidos y resolver problemas tanto escolares como del contexto que nos rodea.

Es muy frecuente encontrar en matemáticas expresiones algebraicas separadas por un signo de igualdad o de desigualdad, cuando esto sucede, estaremos en presencia, ya sea de una identidad, de una ecuación o bien de una desigualdad. Ahora procederemos a definir varios conceptos:

Igualdad es la expresión en la que dos cantidades tienen el mismo valor.

$3 = 2 + 1$ $\qquad$ $6(X^2 - 2) = 6x^2 - 12$

Identidad es una igualdad que se verifica para cualquier valor que se asigne a la variable.

Ejemplo:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$

Ecuación es la proposición en la que existen una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas y que sólo se verifica para algunos valores de la variable.

Ejemplo:

$$x + 2 = 9$$

El valor de verdad de la ecuación depende del valor de la variable x. Si se puede sustituir la variable por un número que haga verdadera la ecuación, a ese número se le llama solución o raíz de la ecuación. La resolución de una ecuación consiste en determinar todas las soluciones o raíces de la ecuación.

Las ecuaciones, tal como $x + 2 = 9$, que son verdaderas para algunas situaciones de la variable, cuando $x = 7$, reciben el nombre de **ecuaciones condicionales.**

A una ecuación del tipo $x + 2 = x - 2$, la cual no tiene niguna solución, se le denomina **contradicción.**

A dos ecuaciones que tienen exactamente las mismas soluciones se les llama **equivalentes**, ejemplos de éstas son:

$$x + 3 = 5 \qquad y \qquad x = 2$$

Miembro: se llama primer miembro de una ecuación o de una identidad a la expresión que está a la izquierda del signo de igualdad y segundo miembro al que está a la derecha.

$$3x+3 \quad = \quad 5$$

primer miembro segundo miembro

Resolver una ecuación es hallar sus raíces o soluciones, es decir, encontrar el valor de las incógnitas que satisfacen la ecuación.

5.1 ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA VARIABLE.

Ecuación de primer grado es aquella en que, después de efectuadas todas las reducciones posibles, el exponente de la incógnita es uno.

Los principios relativos que rigen a las ecuaciones son los siguientes:

El valor de la **incógnita en una ecuación**, no se altera cuando:

1. Se suma , o se resta, un mismo número a cada uno de sus miembros.

2. Cuando se multiplica cada uno de sus miembros por un mismo número finito y diferente de cero, o se dividen ambos entre un mismo divisor , también finito y diferente de cero.

Otras definiciones que se deben tomar en cuenta para encontrar el valor de la incógnita en una ecuación de primer grado son:

Transposición de términos: puede suprimirse un término en un miembro cualquiera de una ecuación, siempre y cuando agreguemos su simétrico en el otro miembro; esto equivale a afirmar que puede pasarse un término de un miembro a otro cambiando su signo.

Intercambio de miembros: en toda igualdad se pueden intercambiar los miembros, generalmente se toma como primer miembro de una ecuación el que contiene la incógnita.

Ejemplo:

$19=3n-2$ es igual que: $3n-2=19$

Cambio de signos: a cualquier ecuación se le puede cambiar el signo a cada uno de sus términos, esto equivale a multiplicar sus dos miembros por -1.

Ejemplo:

$-7x+8=-48$ equivale a $7x-8=48$

Todas las definiciones antes mencionadas se puden expresar de la siguiente manera:

Si un número está **sumando** en un miembro, entonces aparece **restando** en el otro miembro de la ecuación.
Si un número está **restando** en un miembro, entonces aparece **sumando** en el otro miembro de la ecuación.
Si un número está **multiplicando** en un miembro, aparece **dividiendo** en el otro miembro de la ecuación.
Si un número está **dividiendo** en un miembro, aparece **multiplicando** en el otro miembro de la ecuación.

1. Encontrar la solución de la ecuación $3x + 3 = 18$

Solución.

$3x + 3 = 18$
$3x + 3 - 3 = 18 - 3$
$3x + 0 = 18 - 3$
$3x = 18 - 3$
$3x = 15$
$(1/3)\ 3x = (1/3)\ 15$
$1x = (1/3)\ 15$
$x = (1/3)\ 15$
$x=5$

☞ *Se puede comprobar dicha solución sustituyendo el valor de la variable en la ecuación original y debe resultar una igualdad*

Se sustituye $x = 5$ en la ecuación

$3x + 3 = 18$
$3\ (5) + 3 = 18$
$15 + 3 = 18$
$18 = 18$

Ejemplos:

a) $x + 25 = 48$
$x + 25 - 25 = 48 - 25$
$x = 48-25$
$x=23$

b) $x-32=54$
$x - 32 + 32 = 54 + 32$
$x = 54 + 32$
$x = 86$

Ejemplo.

Resolver la siguiente ecuación.

1. $4(2x + 5) = 5x - 7$

$4(2x + 5) = 5x - 7$
$8x + 20 = 5x - 7$
$8x - 5x = 20 - 7$
$3x = -27$
$x = -27/3$
$x = -9$

Actividades complementarias 5.1

Hallar el valor de la variable que satisface a la ecuación de primer grado.

1. $-3(5-8x) = (4+x)7$

2. $\frac{x+2}{9} - \frac{x-8}{3} = -4$

3. $(x - 1) = 7(2 - 5x) + 2$

4 $\frac{5x}{6} + 3x = 23$

5. $\frac{3 - 8y}{3} - \frac{7-y}{2} = \frac{y}{3}$

5. 2 Solución de problemas.

Las ecuaciones de primer grado con una incógnita se utilizan en la solución de problemas. La notación algebraica tan clara y concisa, facilita la resolución de los mismos.

Los problemas de aplicación por lo general se expresan con palabras, no mediante símbolos matemáticos. En la resolución algebraica de tales problemas interviene el siguiente procedimiento:

- Las palabras del problema deben traducirse a símbolos, que se usan para escribir una ecuación algebraica que describa el problema.
- Se resuelve la ecuación resultante.

Ejemplos.

1. Rocío es la hermana mayor de Felipe y se llevan 9 años de edad. Si la suma de sus edades es de 31 años. Qué edad tiene cada uno de ellos.

Solución:

Edad de Felipe: x
Edad de Rocío: $x + 9$
Suma de las edades: 31
Entonces la ecuación resulta

$x+x+9=31$	se suman los términos semejantes
$2x + 9= 31$	
$2x= 31 - 9$	suma algebraica
$2x= 22$	despejamos
$x = 22/2$	simplificamos
$x=11$	

Por lo tanto, la edad de Felipe es de 11 años y la edad de Rocío es 9 + 11 = 20 años.

2. La suma de tres números enteros consecutivos es 27 ¿ Cuáles son los números?.
Solución.

Como las condiciones del problema se refieren al número menor, entonces:

Número menor: x
Segundo número: $x + 1$
Tercer número: $x+ 2$
Suma de los números: 27
Entonces, la ecuación que resulta es:

$x + x + 1 + x + 2 = 27$
$3x = 27 - 3$
$3x = 24$ despejamos
$x = 24/3$ simplificamos
$x = 8$

Por lo tanto, el número menor es 8, el segundo 9 y el tercero 10.

Actividades de autoestudio 5.2

1. La suma de dos números es 106 y el mayor excede al menor en 8. Hallar los dos números.

2. Entre Pedro y Juan tienen 1154 dólares, Juan tiene 506 menos que Pedro, ¿Cuántos dólares tienen cada uno ?

3. Hallar dos números enteros pares consecutivos cuya suma sea 194.

4. La suma de las edades de tres personas es 88 años. La mayor tiene 20 años menos que la menor y la del medio 18 años menos que la mayor. Hallar las edades de las tres personas.

5. Dividir 642 en dos partes, tales que una exceda a la otra en 36.

5.3 Desigualdades de primer grado con una variable.

Se utiliza el signo de igual para denotar la relación entre dos cantidades colocadas en los dos miembros de una igualdad. Sin embargo la igualdad no es la única relación que puede existir entre dos números, la propiedad de **tricotomía** establece las tres únicas relaciones que se pueden dar; sin embargo sólo una relación puede haber a un mismo tiempo.

$m = n$ $\qquad$ $m < n$ $\qquad$ $m > n$

Ahora se estudiarán las desigualdades, en donde el signo " = " ya no aparece; en las desigualdades también se relacionan dos números o expresiones algebraicas

¿ Qué significado tienen las expresiones de desigualdades?

$m < n$,	"m es menor que n" o "n es mayor que m"
$m > n$,	"m es mayor que n" o "n es menor que m"
$m \leq n$,	"m es menor o igual que n"
$m \geq n$,	"m es mayor o igual que n"
$m \leq x \leq n$,	"x es mayor o igual que m y menor o igual que n"

El conjunto de soluciones para una desigualdad es el conjunto de elementos pertenecientes al conjunto de sustituciones que hacen de la desigualdad una proposición verdadera. Resolver una desigualdad es encontrar **su conjunto de soluciones.**

Los signos de desigualdad "< " y ">" tienen una interpretación geométrica muy clara sobre la recta numérica. Si $m < n$, entonces m está a la izquierda de n, en otras palabras si se tienen dos números, es mayor el que está más a la derecha.

Propiedades de las desigualdades

1. Si a los dos miembros de una desigualdad se le suma o resta una misma cantidad, el signo de la desigualdad no varía.

$$m < n, \text{ entonces } m+k < n+k$$
$$m < n, \text{ entonces } m-k < n-k$$

donde m, n y k son números reales cualesquiera

2. Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por una cantidad **positiva** la desigualdad conserva su mismo signo.

$m < n$ y **k es positivo**, entonces $\mathbf{mk < nk}$

$m < n$ y **k es positivo**, entonces $\frac{m}{k} < \frac{n}{k}$

3. Si los miembros de la desigualdad se **multiplican o dividen** por una **cantidad negativa**, el signo de la desigualdad varía, esto es, **se invierte el signo** para que la desigualdad no se altere.

$m < n$ y **k es negativo,** entonces **mk > nk**

$m < n$ y **k es negativo**, entonces $\frac{m}{k} > \frac{n}{k}$

Ejemplos.

1. $3X - 1 < 5X - 7$

$3X - 5X < 5X - 5X - 7$

$-2X - 1 < -7$

$-2X < -6$

$x > 3$

2. Resolver $8 - 2x \leq 12$

$8-2x \leq 12$
$-8 + 2x \geq 12$
$2x \geq -12 + 8$
$2x \geq -4$
$x \geq -4/2$
$x \geq -2$

5.4 Ecuaciones de segundo grado con una variable.

Las **ecuaciones cuadráticas** o de **segundo grado** son aquellas expresiones algebraicas, en donde la variable de mayor exponente está elevada al cuadrado, y por lo regular tienen la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$

A la expresión $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ se le denomina la **forma general de la ecuación cuadrática**, y por lo general conviene escribir toda ecuación cuadrática en esta forma.

Una **ecuación de segundo grado** es aquella que despues de reducirla a su más simple expresión, el más alto grado de la incógnita es 2.

Ecuación Completa: Es aquella ecuación que consta de tres términos, término cuadrático con exponente dos, término lineal (término en X) con exponente uno y el término independiente.

Ecuación incompleta: es aquella que carece de término en "X" o de término independiente.

Ecuación Cuadrática Pura, es aquella de la forma:

$$ax^2 + c = 0$$

Ecuación Cuadrática Mixta, aquella de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

El siguiente ejemplo ilustra la solución de una ecuación cuadrática pura:

$8x^2 + 28 = 5x^2 + 76$

$3x^2 = 48$

$x^2 = 48/3$

$x^2 = 16$

$X = \pm\sqrt{16}$

Existen varios métodos para resolverlas, como factorización, completar el trinomio y la fórmula general. Por ser ecuaciones de segundo grado, tienen dos soluciones.

NOTA

Es muy importante recordar el **Teorema del producto nulo** el establece que:

Para todo a, b $\in$ R. si (a) (b) = 0 entonces a = 0 o b = 0;

éste será de gran ayuda en la solución de las ecuaciones de segundo grado

El teorema afirma que si se tienen dos factores cuyo producto sea igual a cero, entonces alguno de ellos debe ser igual a cero.

Este teorema sólo se usa cuando se tienen dos o más factores igualados a cero, por ello la conveniencia de dar a las ecuaciones cuadráticas la forma general.

Ejemplo del teorema del producto nulo:

1. Encuentra los valores de x que satisfagan la expresión algebraica

$$(x)\ (x - 3) = 0$$

Solución.

Si (x) (x -3) = 0, cuando un producto es nulo entonces alguno de los factores debe ser igual a cero, lo que significa que el primer factor es x = 0. Pero por otro lado, se tiene la otra alternativa: que el segundo factor sea igual a cero, esto es x - 3 = 0-; entonces, x = 3.

En conclusión, se tiene que los valores que satisfacen son x = 0 o bién, x = 3. Si se sustituye cada uno de esos valores en la expresión y ésta se verifica, es decir, que cumplen la igualdad, entonces se estará comprobando que efectivamente son las soluciones.

Actividades complementarias 5.4

Encuentra los valores de "x" que satisfagan las expresiones algebraicas:

1. (x + 5) (x - 6) = 0

2. (3x - 4) (5x + 3) = 0

3. $(x - 2))X + 2) = 0$

4. $x^2 - 36 = 0$

5. $x(ax + b) = 0$

5.4.1 SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA POR FACTORIZACIÓN.

Se resolverá las ecuaciones cuadráticas separado en factores e igualado cada factor a 0 (por el Teorema del producto Nulo) y encontrando el valor que hace cero a cada factor.

Ejemplos.

1. Resuelve la ecuación $x^2 - 49 = 0$

La expresión $x^2 - 49$ se reconoce como una diferencia de cuadrados que se factoriza como un producto de binomios conjugados:

$x^2 - 49 = (x - 7)(x + 7) = 0$, y por el **teorema del producto nulo**, se tiene:

$x - 7 = 0$, entonces $x = 7$ o $x + 7 = 0$, entonces $x = -7$

Solución:

$x = 7$, $x = -7$.

2. Resolver: $X^2 + 4x - 21 = 0$

Factorizando: $(x + 7)(X - 3) = 0$

Aplicando el teorema: $x_1 = -7$ $x_2 = 3$

Actividades de autoestudio 5.4.1

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas por el método de factorización.

1. $-5x^2 + 15x = 0$

2. $x^2 - 3x - 54 = 0$

3. $-3x^2 - 21x = 0$

4. $36x^2 = 9$

5. $4x^2 + x = 0$

6. $(x + 7)^2 - 25 = 0$

5.4.2 Solución de ecuaciones de segundo grado, completando el trinomio cuadrado perfecto.

Otro método para resolver ecuaciones cuadráticas es el de completar el trinomio cuadrado perfecto, esto es, factorizar el trinomio en dos binomios exactamente iguales, sin embargo es recomendable observar lo siguiente:

La **raíz cuadrada** de un número positivo real tiene **dos valores**, uno positivo y otro negativo, esto es, si $x^2 = \pm\sqrt{16}$, por lo tanto $x = \pm 4$.

El método para formar un trinomio cuadrado perfecto, emplea la propiedad de que este tipo de trinomio se factoriza como un binomio elevado al cuadrado:

$$\boxed{x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2}$$

En el trinomio $x^2 + 2ax + a^2$ el coeficiente del segundo término (2a) tiene relación con el último término (a^2). El último término a^2 se obtiene al calcular la mitad del coeficiente del término en " X" y elevándolo al cuadrado, sumando esto último al binomio original.

Para reafirmar lo anterior, veamos algunos casos.

Paraconvertir el siguiente binomio ($x^2 + 8x$) en un trinomio cuadrado perfecto, se debe agregar la mitad del coeficiente del término lineal, es decir, 8 elevada al cuadrado, o sea $(8/2)^2 = 16$. Con lo que resulta el siguiente trinomio cuadrado perfecto:

$$\mathbf{x^2 + 8x + 16}$$

De la misma manera se procede cuando el coeficiente del término en "X", es impar:

$x^2 - 3x +$ ___?___ , para convertir en un tcp, se debe agregar la mitad de 3 elevada al cuadrado, o sea $(3/2)^2 = 9/4$

$$\mathbf{x^2 - 3x + 9/4}$$

El poder convertir un binomio en trinomio cuadrado perfecto nos servirá para solucionar ecuaciones cuadráticas.

Es importante recordar que para sumar o restar alguna cantidad en alguno de los miembros de una ecuación o identidad se debe efectuar la misma operación en el otro miembro de la ecuación para conservar la igualdad.

Ejemplo:

1. Resuelve la ecuación $x^2 - 5x + 3 = 0$

Solución:

De la ecuación dada sólo se escogen los primeros dos términos y se convierte este binomio en un trinomio cuadrado perfecto.

Así, $x^2 + 11x = 60$ sumamos en ambos miembros $(11/2)^2 = 121/4$.

$x^2 + 11x + (11/2)^2 = 60 + (11/2)^2$ factorizamos como un binomio al cuadrado

$(x + 11/2)^2 = 60 + 121/4$ dejamos el binomio solo en un miembro

$(x + 11/2)^2 = 361/4$ sumamos las fracciones

$(x + 11/2)^2 = (19/2)^2$ obtenemos raíz cuadrada a ambos miembros

$x + 11/2 = \pm 19/2$ despejamos x

$x = -11/2 \pm 19/2$

$x_1 = 11/2 + 19/2 = \mathbf{4}$ que son las dos raíces de la ecuación

$x^2 = 11/2 - 19/2 = \mathbf{-15}$

Actividades complementarias 5.4.2

Resuelve las siguientes ecuaciones completando el trinomio cuadrado perfecto..

1. $x^2 + 3x - 1 = 0$
2. $x^2 + 11x - 60 = 0$
3. $x^2 + 2x - 15 = 0$
4. $3x^2 - 2x - 7 = 0$
5. $2x^2 - 3x - 2 = 0$

5.4. 3 Fórmula general para la solución de una ecuación cuadrática

Sea $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, con $a \neq 0$, a b, $c \in R$, la ecuación general de una cuadrática.

Deducción de la fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado:

$ax^2 + bx + c = 0$ ecuación dada

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$ multiplicando por 4a

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + \mathbf{b^2} = \mathbf{b^2}$ sumando b^2 a ambos miembros

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - \mathbf{4ac}$ pasando 4ac al segundo miembro

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$ descomponiendo el primer miembro que es tcp

$(2ax + b) = \sqrt{b^2 - 4ac}$ sacamos raíz cuadrada a ambos miembros

$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$ transponiendo b

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ **despejando a "X"**

Por lo tanto:

Si $ax^2 + bx + c = 0$ es la ecuación general de una cuadrática, con $a \neq 0$, $a, b, c \in R$, las soluciones están dadas por la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplos.

Encuentra las soluciones a las ecuaciones cuadráticas siguientes

1. $X^2 - 9X + 20$

Solución

En esta ecuación los coeficientes son:
$a = 1$, $b = -9$, $c = 20$.

Sustitúyanse en la fórmula general las literales por sus valores:

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - (4)(1)(20)}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{(81 - 80}}{2}$$

$$= \frac{9 \pm \sqrt{1}}{2}$$

Entonces las soluciones serán:

$x_1 = 10/2 = \mathbf{5}$ $x = 8/2 = \mathbf{4}$

2. $-3x^2 + 3x - 1=0$

Solución.

En esta ecuación los coeficientes son: a = -3, b = 3, c = -1. Sustituimos los valores en la fórmula general:

$$x= = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(-3)(-1)}}{2(-3)}$$

$$= \frac{-3\pm\sqrt{9 -12}}{6} = \frac{-3\pm\sqrt{-3}}{6}$$

En el conjunto de los números reales **no existen raíces cuadradas de números negativos**; por lo tanto, **no hay solucion real.**

Actividades complementarias 5.4.3

Resuelve aplicando cualquier método las siguientes ecuaciones de segundo grado:

1. $x^2 - 4x - 5 = 0$

2. $-80m + 16m^2 =20$

3. $z^2 - 10z=750$
4. $3x^2 - 6x=72$

5. $15b^2 - 14b - 8 = 0$

6. $2(x - 7)(x + 5) = -40$

5.44 Problemas de aplicación con ecuaciones de segundo grado.

Muchos problemas de aplicación se convierten en ecuaciones cuadráticas. En este punto es muy conveniente revisar los pasos para resolver este tipo de problemas; recordar que las descripciones de las variables deben escribirse en forma completa y detallada, analizando que las respuestas sean razonables.

1. La cuarta parte del producto de **dos enteros pares positivos consecutivos** es 56. ¿ Cuáles son estos enteros?

La solución es la siguiente:

$X =$ primer entero par positivo
$X + 2 =$ segundo entero par positivo

Traducido lo anterior a lenguaje matemático:

$$\frac{x(x+2)}{4} = 56$$

Realizando operaciones tenemos:

$X^2 + 2X = 224$

$\mathbf{X^2 + 2X - 224 = 0}$ **Fórmula General**

$(X - 14)(X + 16) = 0$

De donde tenemos que:

$X - 14 = 0$ y $X + 16 = 0$
$\mathbf{X = 14}$ $\mathbf{X = -16}$

Puesto que X debe ser positivo, se descarta el (-16): Por lo tanto 14 es el primer par entero positivo y 16 el segundo.

2. Una roca se deja caer desde un despeñadero a una altura de 420 ft sobre la superficie de un río que se encuentra en la base de dicho despeñadero. ¿ Cuánto tiempo le toma a la roca llegar al agua.

Solución:
Con frecuencia las ecuaciones matemáticas son utilizadas para resolver problemas de física es por eso que algunos problemas de movimiento se refieren a la determinación de la altura a la cual se halla un objeto sobre el nivel

del suelo, en un tiempo determinado, después de haberlo dejado caer, lanzado de arriba hacia abajo. Si h= altura de un objeto a nivel del suelo medida en ft, t el tiempo en segundos partiendo de un tiempo inicial t= 0, v_0 velocidad inicial del objeto medida en ft por segundo, donde es positiva si el objeto sigue una trayectoria ascendente ynegativa en caso contrario en el t=0. Sea tambien h_0 = la altura inicial del objeto en el tiempo cero, entonces se tenemos la siguiente ecuación:

$$\mathbf{h= -16t^2 + v_0t + h_0}$$

Puesto que la altura inicial h_0 = 420, la velocidad inicial v_0 = 0 ya que sólo se deja caer la roca sin recibir impulso y h= 0 cuando la roca llega al agua se tiene:

$0 = -16t^2 + 420$

$16t^2 = 420$

$t^2 = \frac{420}{16} = 26.25$

$t = \pm\sqrt{26.25} = 5.1$

Puesto que el tiempo debe ser positivo se descarta -5.1, por lo tanto la roca llegará al agua en un tiempo de 5.1 segundos.

Soluciones a los Ejercicios correspondientes al Módulo 5

Actividades de autoestudio 5.2

1. 57 y 59

2. Juan 830
   Pedro 324

3. 96 y 88

4. 36, 12 y 48

5. 339 y 303

Actividades de autoestudio 5.4.1

1) x=0 y x=3
2) x=9 y x=-6
3) x=0 y x=-7
4) x=1/2 y x=-1/2
5) x= -1/4 y x=0
6) x=-2 y x=-12

Bibliografía Complementaria

Baldor, Aurelio (1984). *Álgebra.* México: Publicaciones Cultural, S.A. de C.V.

Barnett Raymnod (1990). *Álgebra y Trigonometría.* México: McGraw-Hill.

Leithold, Louis (1994). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* México: Harla.

Lovaglia, Florence M (1972). *Álgebra.* México: Harla.

Murphy Johnson y Steffensen (1994). *Álgebra y Trigonometría con aplicaciones.* México: Trillas

Swokowski, Earl (1988). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* México: Iberoamérica.

Glosario

adición:	Es una operación que tiene por objeto reunir dos o más expresiones algebraicas (sumandos) en una sola expresión algebraica (suma).
Álgebra:	Rama de las matemáticas que estudia la cantidad del modo más general posible.
campo:	Todo conjunto de números que cumple con las propiedades: cerradura, conmutativa, asociativa, distributiva, identidad e inversa.
coeficiente:	Es el número colocado antes de la variable que nos indica el número de veces que ésta es tomada como sumando.
denominador:	Éste indica en cuántas partes iguales se ha dividido la unidad principal. Es el número colocado en la parte inferior de la fracción
división:	La es una operación que tiene por objeto, dado el producto de dos factores (dividendo)y uno de los factores (divisor), hallar el otro factor (cociente).
ecuación completa:	Es aquella ecuación que consta de tres términos, término cuadrático con exponente dos, término lineal (término en X) con exponente uno y el término independiente.
ecuación de primer grado:	Es aquella en que, después de efectuadas todas las reducciones posibles, el exponente de la incógnita es uno.
ecuación de segundo grado:	Es aquella que despues de reducirla a su más simple expresión, el más alto grado de la incógnita es 2.
ecuación incompleta:	Es aquella que carece de término en "X" o de término independiente.
exponente:	Es el número pequeño colocado arriba y a la derecha de un número o variable llamada base, indica el número de veces que ésta es tomada como factor.
expresión algebraica mixta:	Está formada por una parte entera y otra fraccionaria.
expresión algebraica entera:	Es la que no tiene denominador literal,
expresión algebraica:	Es la representación de un símbolo algebraico o de una o más operaciones algebraicas.
factores o divisores:	De una expresión algebraica a las expresiones algebraicas que multiplicadas entre sí dan como producto la primera expresión
factorizar o factorar:	Una expresión algebraica es convertirla en el producto indicado de sus factores.
fracción algebraica:	Es el cociente indicado de dos expresiones algebraicas.

fracción:	Expresa una o varias partes iguales tomadas de la unidad.
fracciones impropias:	Son mayores que la unidad debido a que el numerador es mayor que el denominador.
fracciones propias:	Son menores que la unidad debido a que el numerador es menor que el denominador.
grado absoluto de un término:	Es la suma de los exponentes de sus factores literales.
grado absoluto de un polinomio:	Es el grado de su término de mayor grado.
grado de un polinomio con relación a una letra:	Es el mayor exponente de dicha letra en el polinomio.
grado de un término con relación a una letra:	Es el exponente de dicha letra.
grado de una variable en una expresión algebraica:	Es el exponente al que se encuentra elevada.
jerarquía:	Grado, orden.
miembro:	Se llama primer miembro de una ecuación o de una identidad a la expresión que está a la izquierda del signo de igualdad y segundo miembro al que está a la derecha.
multiplicación:	Es una operación que tiene por objeto, dadas dos cantidades llamadas multiplicando y multiplicador, hallar una tercera cantidad llamada producto.
numerador:	Éste indica cuántas partes se toman de la unidad. Es el número colocado en la parte superior de la fracción
números naturales:	Son un conjunto infinito de números enteros positivos exceptuando al cero.
números enteros no negativos:	Es la unión del elemento cero y el conjunto de los números enteros positivos, se tiene el conjunto
números enteros no positivos:	La unión del elemento cero y el conjunto de los números enteros negativos.
números enteros:	Unión de los números enteros negativos, el elemento cero y los números enteros positivos.
números irracionales:	Aquellos números que no pueden representarse como la división de dos números o que tienen una expansión decimal infinita y no periódica.
números mixtos:	Constan de una parte entera y de una parte fraccionaria
números primos:	Son aquellos números que sólo son divisibles entre sí mismos y la unidad.

números racionales:	Aquellos que pueden representarse como la división de dos números enteros o cuya expansión decimal es infinita y periódica.
números reales:	Son la unión de los números racionales e irracionales y se representan con la letra R.
operacionalización:	Realizar algoritmos que lleven a una solución.
reducir una fracción algebraica:	Es cambiar la forma original de una fracción a otra sin cambiar su valor.
resolver una ecuación:	Es hallar sus raíces o soluciones, es decir, encontrar el valor de las incógnitas que satisfacen la ecuación.
resta:	Se efectúa una operación que tiene por objeto, dada una suma de dos sumandos (minuendo) y (sustraendo), hallar otro sumando llamado resta o diferencia
Teorema del producto nulo	Afirma que si se tienen dos factores cuyo producto sea igual a cero, entonces alguno de ellos debe ser igual a cero.
término:	Es una expresión algebraica que consta de un sólo símbolo o de varios símbolos no separados entre sí por el signo más (+) o menos (-).
términos semejantes :	Son aquellas expresiones que tienen las mismas literales con los mismos exponentes, difieren solamente en sus coeficientes numéricos.
valor numérico de una expresión algebraica:	Es el resultado que se obtiene de sustituir las letras por valores numéricos dados y efectuar después las operaciones indicadas.

Bibliografía

Baldor, Aurelio (1984). *Álgebra.* México: Publicaciones Cultural, S.A. de C.V.

Barnett Raymnod (1990). *Álgebra y Trigonometría.* México: McGraw-Hill.

Fleming, Walter y Dale Varberg (1991). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* México : PRENTICE – HALL. Tercera edición.

Fuenlabrada de la Vega Trucíos, Samuel (1994). *Matemáticas I: aritmética y álgebra.* México: McGraw-Hill.

Gobran, Alfonse (1992). *Álgebra elemental.* México: Grupo Editorial Iberoamérica. Primera edición.

Leithold, Louis (1994). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* México: Harla.

Lovaglia, Florence M (1972). *Álgebra.* México: Harla.

Martínez Aguilera, Miguel Angel (1996). *Matemáticas 1: aritmética y álgebra.* México: McGraw-Hill.

Martínez Gallardo, Víctor, Francisco Sevilla y Víctor Ibarra (1997). *Álgebra elemental.* México: JUST IN TIME PRESS, S.A. DE C.V.

Murphy Johnson y Steffensen (1994). *Álgebra y Trigonometría con aplicaciones.* México: Trillas

Reinoso N. J. Carlos (1978). *Álgebra 1: monomios y polinomios.* México: McGraw-Hill.

Sobel, Max A, Norbert Lerner y Virgilio González Pozo (1996). *Álgebra* . México: Prentice-Hall. Cuarta edición.

Swokowski, Earl (1988). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* México: Iberoamérica.

UNAM. *Apuntes de Álgebra.* (1986). México

3.4 RESULTADOS

Los resultados arrojados por la investigación acción, fueron los siguientes:

Que la práctica docente que la autora ejecutaba era eminentemente tradicionalista, ya que en ella había una excesiva presentación expositiva y mínima utilización de trabajo colaborativo, que los ejercicios utilizados eran repetitivos y sin aplicaciones prácticas, que sólo algunos alumnos participaban en la clase, generalmente los que estaban sentados de la zona frontal, el resto del grupo permanecía inactivo.

Se comprobó que los alumnos no hacían las tareas, que sólo las realizaban algunos y los otros únicamente se concretaban a copiarlas, esto debido a que la mayoría de ellas tenían los mismos aciertos y errores.

Otro resultado obtenido fue el observar de que el libro de texto oficial utilizado en todas las escuelas dependientes e incorporadas a la UAEH, para la materia de álgebra, no es consultado por los alumnos, sólo lo hacen cuando se les pide una tarea específica. Al cuestionarles el porqué de este hecho, la mayoría argumentó que preferían estudiar en su libreta que porque estudiar en el libro les resultaba complicado.

Se observó que los alumnos no tienen desarrollada la cultura de trabajo, ya que cuando se les dejaba preparar algún tema por equipo, sólo eran conocedores del mismo los que lo exponían, los alumnos restantes del equipo actuaban simplemente como asistentes, al cuestionar el porqué de esta actitud, contestaban que sí habían participado debido a que habían cooperado con dinero para el material.

Un aspecto importante que cabe destacar es que al realizar por equipo una práctica antes del examen, no todos los alumnos trabajaban, sin embargo eran incapaces de denunciar a los que no habían trabajado, es decir, no eran honrados y sin embargo ellos pensaban que estaban actuando correctamente.

Teniendo en cuenta lo antes expuesto la autora ya ha cambiado su práctica docente, para comprometer a los alumnos con el objeto de estudio y convertirse ella en facilitadora, razón por la cual se propone como fue expuesto anteriormente un texto en donde se encuentren determinados los objetivos, y se desarrollen habilidades como el autoestudio, además se promueva el aprendizaje colaborativo con el cual además de adquirir conocimientos se mejorarán las relaciones socioafectivas, amén de que se incrementará el rendimiento académico.

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este apartado la autora presenta conclusiones acerca de las actividades de aprendizaje así como también del prototipo y como consecuencia se proponen algunas recomendaciones.

4.1 CONCLUSIONES

4.1.1 Práctica docente

De acuerdo con los resultados de la investigación-acción se llegó a las siguientes conclusiones:

La práctica docente a través del tiempo, de quien escribe, ha sido eminentemente tradicionalista, ya que estaba principalmente basada en una excesiva presentación expositiva, utilizando como recursos didácticos solamente el gis y el borrador. Durante este tiempo el actor fundamental del proceso enseñanza-aprendizaje era precisamente la autora y sin embargo se sentía satisfecha, ya que al aplicar las evaluaciones había alumnos que contestaban absolutamente todo lo que se había enseñado y la satisfacción crecía más cuando había grupos a los que ya había impartido una materia, solicitaban por escrito ante la dirección que la que escribe impartiera el nuevo curso, argumentando que les gustaba el método de enseñanza y entendían la clase. No obstante hacía preguntas a los alumnos, y con la pregunta y la reflexión propiciaba en los alumnos la construcción de procesos de pensamiento, sólo que la autora no sabía qué era lo que se producía o por lo menos no conocía el nombre. En la clase pocos alumnos participaban, el resto del grupo permanecía inactivo, después de exponer el tema los alumnos resolvían ejercicios en forma guiada y posteriormente en forma de práctica independiente

Los ejercicios solucionados en clase eran muy repetitivos. Las tareas no eran resueltas por la totalidad de los estudiantes, ya que éstas tenían los mismos aciertos y

errores, lo cual demostraba que pocos las hacían y los demás sólo se concretaban a copiarlas, no se había desarrollado la cultura de trabajo.

Quien escribe durante su práctica docente no utilizaba el aprendizaje colaborativo, esto se debía a los mitos que giran en torno a este tipo de aprendizaje, tales como: el que sólo algunos estudiantes trabajan, las escuelas deben fomentar la competición, los estudiantes adelantados resultan afectados al trabajar en grupos heterogéneos, el hecho de dar una calificación grupal, entre otros.

La autora también ha participado en investigaciones educativas, tales como el perfil del alumno que ingresa a las preparatorias dependientes de la UAEH, el porqué los alumnos reprueban matemáticas, el perfil del profesor de matemáticas, investigaciones sencillas pero que dieron resultados importantes.

4.1.2 Libro de texto " Álgebra para Siempre"

El prototipo es importante en virtud de que se ofrece a los estudiantes como una herramienta para lograr un aprendizaje significativo que puedan "transferir" a otros contextos.

En él los temas son tratados de una manera práctica, fácil y sencilla, que contiene un breve pero fundamental conocimiento teórico, seguido de ejemplos que ilustran los procedimientos.

Una ventaja que presenta el texto, es que los objetivos tanto formativos como informativos que se encuentran plasmados especifican claramente el nivel cognitivo que se quiere alcanzar, también están definidos las actitudes y valores que el alumno adquirirá en el curso y que deberá aplicar el resto de su vida.

Además presenta las actividades de aprendizaje, tales como actividades de autoestudio, ejercicios para resolver de manera individual, actividades cooperativas, de una manera clara, esto se debe al hecho de que las actividades que deben ejecutar los alumnos para cumplir con los objetivos propuestos, se encuentran perfectamente detalladas.

Desde el punto de vista de la autora, el prototipo es importante, debido a que

permitirá que los alumnos desarrollen habilidades tales como autoestudio, cultura del trabajo, retención de contenidos y creatividad, de la misma manera, reforzarán actitudes tales como disposición al estudio, a la investigación, al trabajo individual y colaborativo, practicarán valores tales como la tolerancia, la responsabilidad, el respeto hacia el profesor y los compañeros de clase.

4.2 RECOMENDACIONES

La autora considera que la Academia de Matemáticas deberá trabajar en la creación de libros de texto dirigidos al estudiante, para utilizarse en los diferentes cursos de matemáticas, en donde se encuentren claramente definidos los contenidos, así como también los objetivos de aprendizaje, las actividades de aprendizaje correspondientes, esto con la finalidad de que el alumno logre un aprendizaje significativo y además desarrolle habilidades, actitudes y valores.

Los textos elaborados deberán tener un complemento, tales como paquetes computacionales, para que los estudiantes visualicen aspectos matemáticos a través de una imagen, todo en aras de que los alumnos adquieran un aprendizaje significativo el cual puedan transferir a otros contextos.

Quien escribe propone que la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, debe implementar un programa permanente y continuo de formación de profesores en el área de Matemáticas, tanto en el aspecto didáctico como en el disciplinario.

Se propone que en el futuro, se elabore el Manual del Profesor el cual serviría de guía para la impartir las clases. En él deberá considerase, que la actividad deberá estar centrada no en la enseñanza sino en el aprendizaje de los alumnos, el tiempo de exposición del docente, de tal manera que permita que los alumnos interactúen, organización del contenido temático, los objetivos instruccionales informativos y formativos, actividades de aprendizaje, así como el procedimiento de evaluación.

Anexo A

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

DIRECCIÓN DE ENSEÑANZA MEDIA SUPERIOR Y TERMINAL

ESCUELAS PREPARATORIAS DEPENDIENTES
E INCORPORADAS

PROGRAMA DE ESTUDIOS

Área:	Matemáticas
Materia:	Matemáticas I (Álgebra elemental)
Carga horaria:	5 horas a la semana
Créditos:	8
Elaboró:	Academia de Matemáticas
Fecha de elaboración:	Mayo, 1997

PROGRAMA

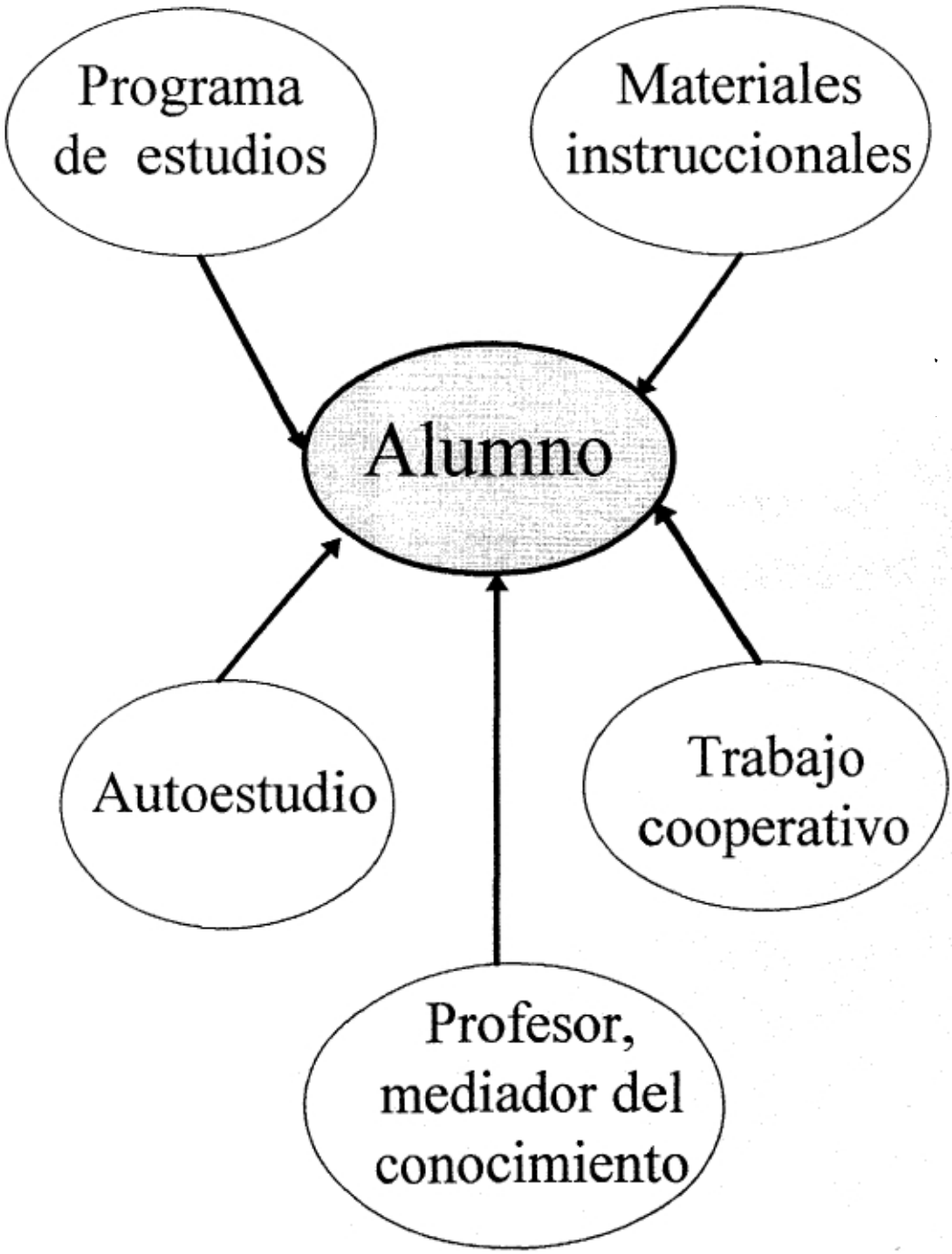
Módulo	Contenido Temático	Objetivos
I	**Números reales** 1.1 Subconjunto de los números reales. 1.2 Operaciones básicas (leyes de los signos: suma, resta o diferencia, multiplicación y división). 1.3 Axiomas de los números reales (cerradura, conmutativa, asociativa, distributiva, identidad e inversa). 1.4 Propiedades de la igualdad (reflexiva, simétrica, transitiva, sustitución, aditiva, multiplicativa). 1.5 Operaciones con los números enteros (prioridades con las operaciones aritméticas fundamentales). 1.6 Números racionales (fracciones propias e impropias, fracciones equivalentes, divisibilidad) 1.7 Operaciones con números racionales (común denominador, suma, resta producto y división de fracciones)	Al finalizar el módulo I, el alumno identificará al conjunto de los números reales, reconociendo sus propiedades y aplicándolas a la solución de operaciones básicas.
II	**Expresiones algebraicas** 2.1 Definición de álgebra. 2.2 Valor numérico. 2.3 Grado de un polinomio 2.4 Notación algebraica 2.5 Leyes de los exponentes 2.6 Operaciones con expresiones algebraicas (suma y resta; multiplicación de: monomio por monomio, monomio por polinomio y polinomio por polinomio; división de: monomio entre monomio, polinomio entre monomio, polinomio entre polinomio.) 2.7 Productos notables (binomio al cuadrado, producto de binomios conjungados, binomio al cubo, producto de binomios con un término común) 2.8 Desarrollo del Binomio de Newton. 2.9 Triángulo de Pascal.	Al finalizar el módulo el alumno: • Será capaz de comprender y aplicar la simbología del Álgebra, aplicándola a solución de operaciones con expresiones algebraicas. • Podrá identificar y desarrollar productos notables para su posterior aplicación en temas subsecuentes.

PROGRAMA

Módulo	Contenido Temático	Objetivos
III	**Factorización** 3.1 Definición de factorización. 3.2 Factorización de polinomios por factor común. 3.3 Factorización de polinomios por agrupación de términos. 3.4 Factorización de polinomios por diferencia de cuadrados. 3.5 Factorización de polinomios por suma o diferencia de cubos. 3.6 Factorización un trinomio cuadrado perfecto. 3.7 Factorización de trinomios de la forma: x^2+bx+c. 3.8 Factorización de trinomios de la forma: ax^2+bx+c.	Al finalizar el módulo el alumno será capaz de identificar y aplicar los diferentes casos de factorización que se le presenten.
IV	**Fracciones algebraicas** 4.1 Definición de fracción algebraica. 4.2 Propiedades básicas de las fracciones algebraicas. 4.3 Signos de la fracción algebraica. 4.4 Suma y diferencia de fracciones algebraicas. 4.5 Multiplicación y división de fracciones algebraicas.	Al finalizar el módulo IV el alumno será capaz de realizar operaciones con fracciones algebraicas.
V	**Identidad y ecuación** 5.1 Definición de igualdad. 5.2 Definición de identidad. 5.3 Definición de ecuación. 5.4 Ecuaciones de primer grado con una variable. 5.5 Solución de problemas con ecuaciones de primer grado. 5.6 Desigualdades de primer grado. 5.7 Ecuaciones de segundo grado con una variable (factorización, completando el trinomio cuadrado perfecto, fórmula general).	Al finalizar el módulo el alumno será capaz de plantear y resolver ecuaciones de primer y segundo grado así como desigualdades de primer grado.

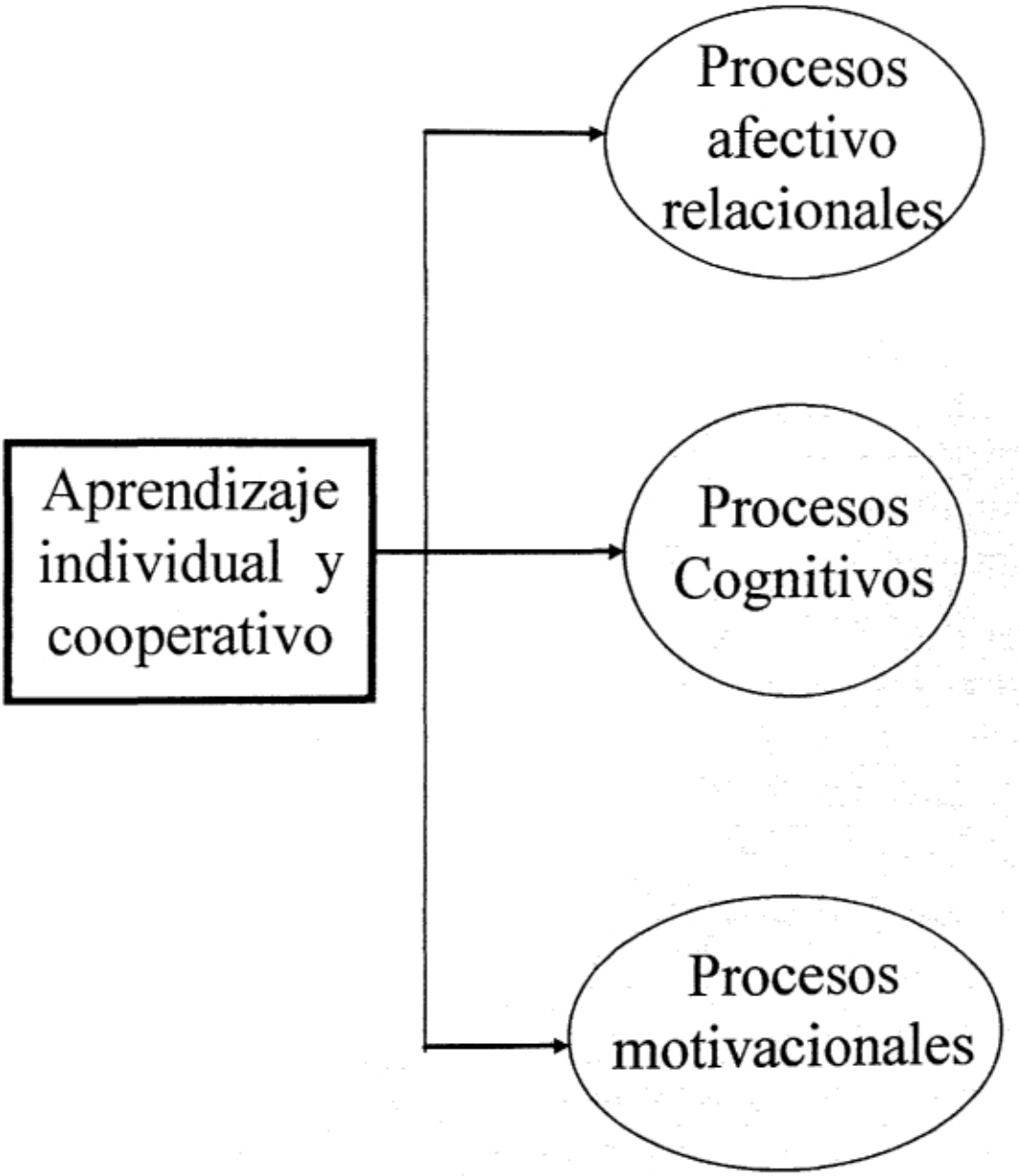
Anexo B

Componentes del aprendizaje para el alumno



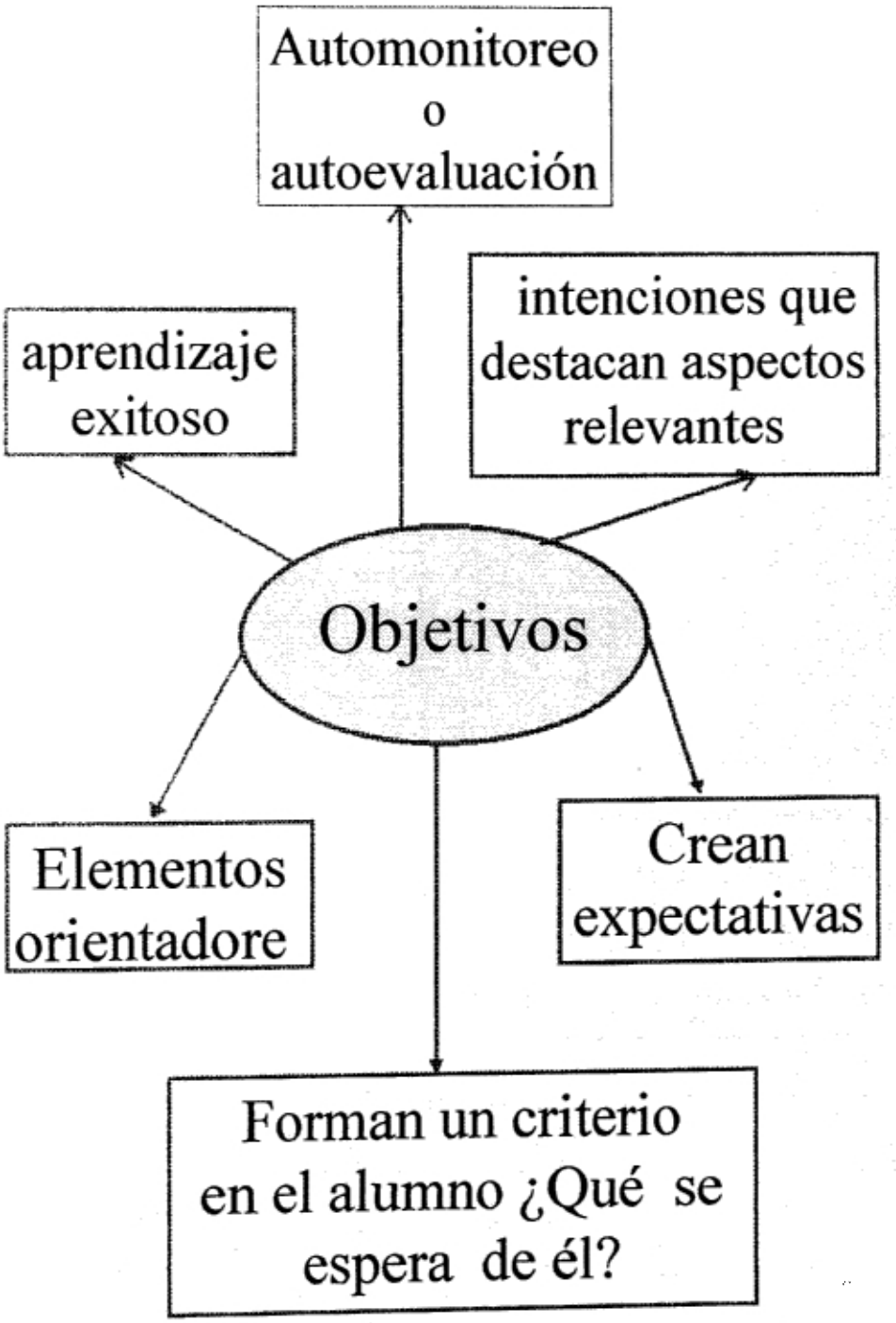
Anexo C

Relaciones psicosociales en el aula



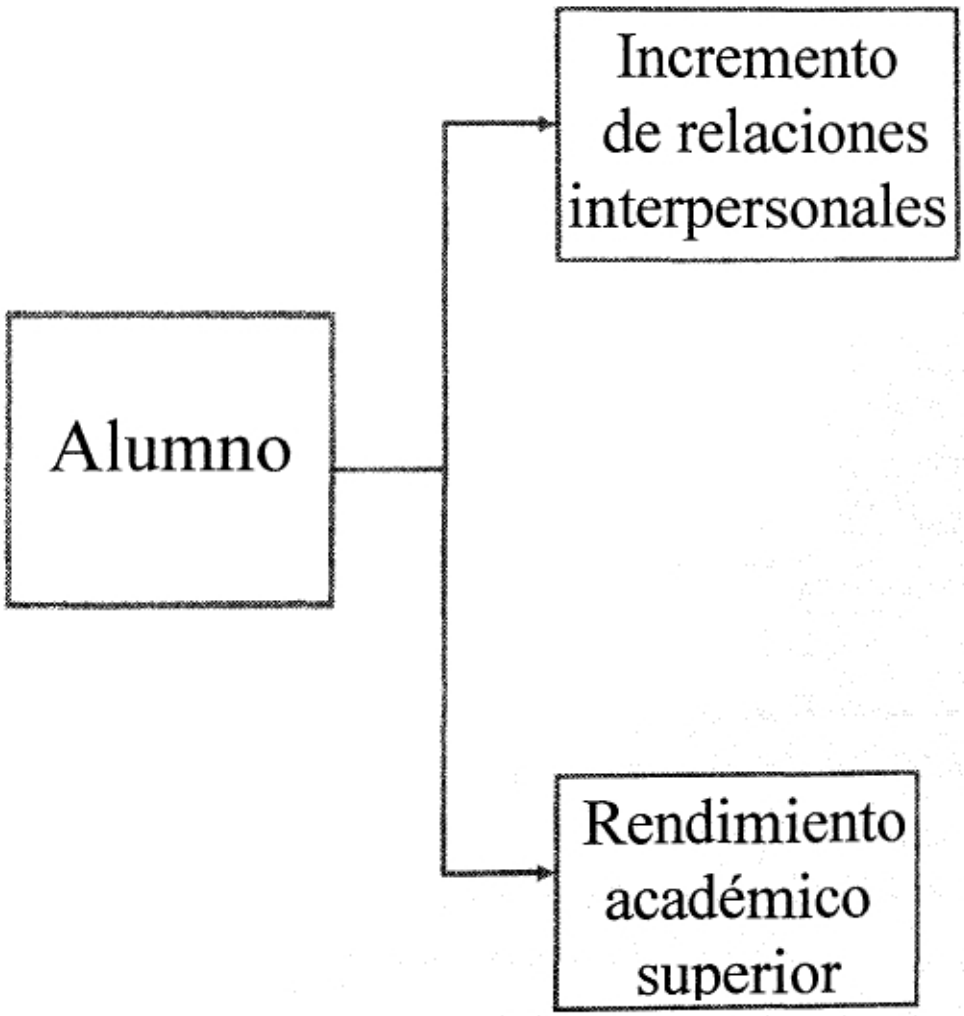
Anexo D

Objetivos como estrategia de enseñanza



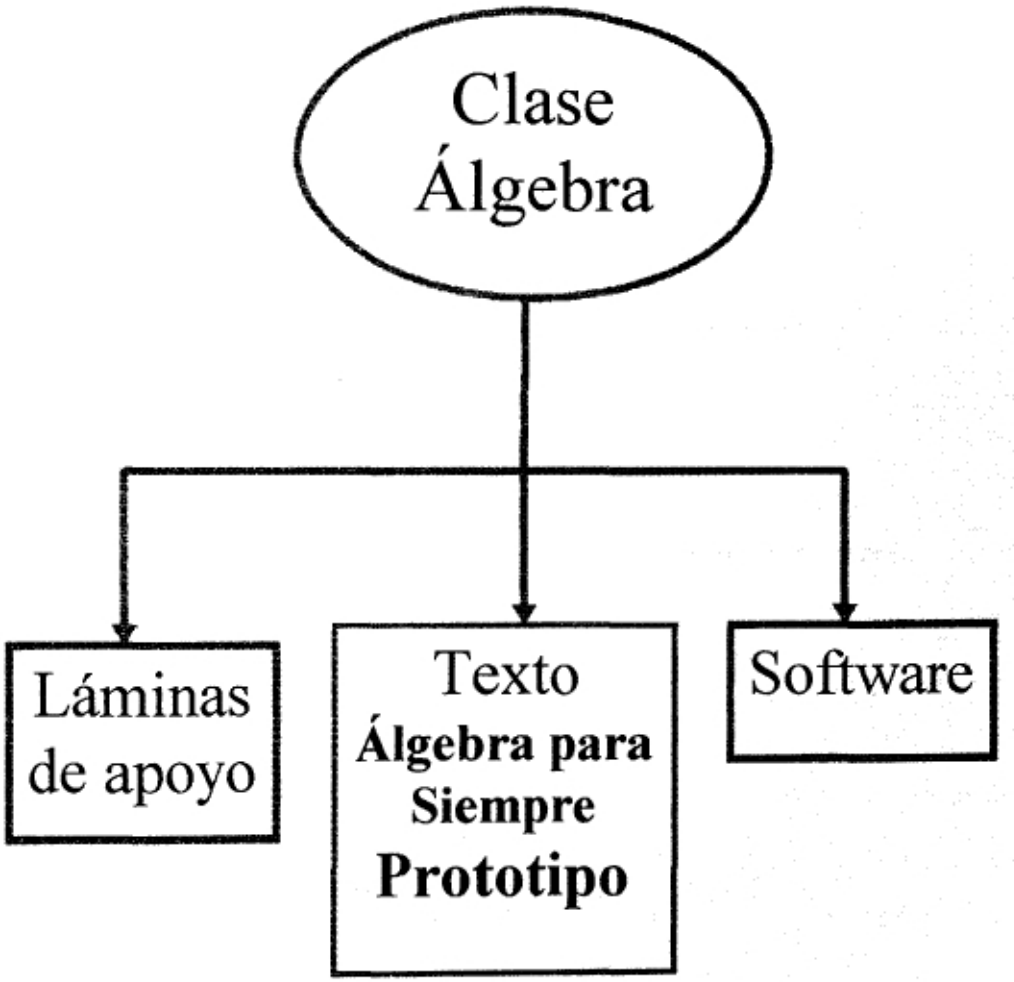
Anexo E

Efectos del aprendizaje cooperativo



Anexo F

Materiales instruccionales utilizados



Anexo G

UNIVERSIDAD AUTÓMOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
ESCUELA PREPARATORIA NÚMERO CUATRO

CUESTIONARIO DIRIGIDO A LOS ALUMNOS QUE CURSAN LA MATERIA DE MATEMÁTICAS I (ÁLGEBRA).

ALUMNO REGULAR ( ) IRREGULAR ( ) SEM..... GRUPO.... TURNO.....

Leer cuidadosamente y contestar:

1. ¿ Es agradable para ti la clase de matemáticas?

2. ¿Cuál fue la calificación de tu primer examen parcial?

3. ¿ Estudias en tu libro de texto el tema que se va a tratar la próxima sesión?

4. ¿ Investigas en los libros de álgebra que se encuentran en la biblioteca?

5. ¿ Es para ti agradable el trabajar con tus compañeros?

6. ¿ Utilizas los paquetes de computación que complementen tu aprendizaje ?

7. ¿ Cómo es tu preparación para presentar el examen de álgebra?

8. ¿Cómo te gustaría que fuera la clase de matemáticas?

9. ¿ Entiendes al estudiar en el libro de álgebra de Aurelio Baldor?

10. ¿Utilizas tus conocimientos algebraicos en otras materias?

BIBLIOGRAFÍA

Ausubel, D. School Learning: *An introduction to educacional psychology.* Holt, Rinehart y Winston, New York, 1969.

Ausubel, D., Novak, Joseph, and Hanesian, Helen. *Psicología Educativa.* Un punto de vista cognoscitivo. Cuarta Reimpresión. Editorial Trillas, México, 1990.

Brousseau, Guy. *Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas.* Traducción de Foundaments et méthods de la didactique des Mathématiques. Recherches en Didactiques des Mathématiques, Vol. 7, No. 2, 1986

Baldor, Aurelio. *Álgebra.* Publicaciones Cultural, México, 1981.

Barnnett, Raymnod. *Álgebra y Trigonometría.* McGraw-Hill, México, 1990.

Carretero, M. *Constructivismo y Educación.* Edelvives. Zaragoza, 1993.

Coll,C. *Psicología y Curriculum.* Laia, Barcelona, 1989.

Coll C. *Un marco de referencia psicológico para la educación escolar. La concepción constructivista del aprendizaje y la enseñanza.* Alianza, Madrid, 1990.

Coll C. *Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento.* Paidós Educador, México, 1997.

De vega, M. *Introducción a la Psicología Cognitiva.* Alianza Editorial, México, 1986.

Díaz Barriga , F., Hernádez Rojas G. *Estrategias Docentes para un aprendizaje Significativo.* Mc Graw Hill, México, 1998.

Echeita, G. *El aprendizaje cooperativo.* Un análisis psicosocial de sus ventajas respecto a otras estructuras de aprendizaje. En Frida Díaz Barriga, Mc Graw Hill, México, 1995.

Flavell, J.H. *El desarrollo cognitivo.* Visor, Madrid, 1993.

Fleming, W y Dale Varberg. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* Prentice Hall, Tercera edición, México, 1991.

Fuenlabrada de la Vega S., *Matemáticas I, Aritmética y Álgebra,* Mac Graw Hill, México, 1994.

Gobran Alfonse. *Álgebra Elemental*. Grupo Editorial Iberoamérica. México, 1992.

Hill, Winfred . *Teorías Contemporáneas del Aprendizaje*. Paidós, Buenos Aires, 1979.

Lovaglia, Florence. *Álgebra*. Harla, México, 1972.

Martínez Aguilera, Miguel Angel. *Matemáticas I: Aritmética y Álgebra.* Mc Graw Hill, México, 1996.

Martínez Gallardo, Víctor, Francisco Sevilla y Víctor Ibarra. *Álgebra Elemental*. JUST IN TIME PRESS, S.A. DE C.V., México, 1997.

Novak, J. D.. *An alternative to Piagetian psychology for sience and mathematics eduacation,* Ithaca, New York, 1993.

Roblyer, M., Edwards J., Havriluk M. *Integrating Educational Technology into teaching.* Prentice Hall, Ohio, 1997.

Woolfolk, Anita. *Psicología educativa*. Prentice Hall, México, 1990.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Dreyfus, T. *The Nature of Advanced Mathematical* Thinking. In D. Tall (De.) Advanced Mathematical Thinking. Chapter 2, Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers. USA 1991.

Leithold, Luis. *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* Harla, México, 1991.

Murphy, Johnson y Steffensen. *Álgebra y Trigonometría con aplicaciones.* Trillas, México 1991.

Sobel, Max, Norbert Lerner y Virgilio González Pozo, *Álgebra.* Prentice-Hall. México 1996

Swokowski, *Earl. Álgebra y Trigonometría con geometría analítica.* Iberoamérica, México, 1988.

VITAE

Ma. Del Socorro Palazuelos Barranco, nació en la ciudad de Pachuca, Hidalgo, el 22 de julio de 1950, es hija del Prof. y Contador Alfonso Palazuelos Gurrola y de la Profra. Angelina Barranco Hernández, estudió el bachillerato de ingeniería en la Escuela Preparatoria Número Uno, obteniendo el diploma de bachiller en diciembre 1967, ingresó a la Escuela de Ingenería Industrial dependiente Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo en enero de 1968, donde obtuvo el título de Ingeniero Industrial con especialidad en Producción en abril de 1978. La obtención del título profesional fue a través de la elaboración de un libro de texto de física titulado Óptica, para el cuarto semestre de bachillerato.

Su principal actividad ha sido la docencia en las materias de física y matemáticas desde hace 27 Años. Trabajó en la Escuela Preparatoria Número Uno, dependiente de la U.A.E.H., desde 1972 hasta 1980 impartiendo las materias de álgebra, geometría analítica y física I y II, trabajando simultáneamente en la Escuela Preparatoria José Ibarra Olivares desde 1972 hasta 1986 impartiendo estadística aplicada, cálculo integral y diferencial, desde 1986 a la fecha se desempeña como académico de tiempo completo y como profesor por asignatura en la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, estando actualmente adscrita a la Dirección de Enseñanza Superior y a la Escuela Preparatoria Número Cuatro. En agosto de 1993 obtiene la beca para estudiar la Maestría en Educación con especialidad en Desarrollo Cognitivo en el Campus Eugenio Garza Sada del Sistema Tecnológico de Monterrey. Está casada con el Ing. Alvaro Angeles Olivares, tienen dos lindas hijas Gabriela de 22 años y Laura Patricia de 18, Gabriela es Ingeniera Industrial y de Sistemas egresada del ITESM Campus Hidalgo y Laura Patricia está estudiando la misma carrera dentro del mismo sistema.

Dirección:

Valle Sombrio No. 136

Fracc. Valle de San Javier, Pachuca Hgo.