

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS
SUPERIORES DE MONTERREY
CAMPUS MONTERREY

DIVISION DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
PROGRAMA DE GRADUADOS EN INGENIERIA



TECNOLÓGICO
DE MONTERREY.

DISEÑO DEL CONTROL MIXTO H_2/H_∞ PARA
ESTRUCTURAS DE SUSPENSIONES ACTIVAS,
UTILIZANDO DESIGUALDADES LINEALES
MATRICIALES (LMI)

TESIS

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA
OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS
ESPECIALIDAD EN AUTOMATIZACION

POR

YASSER ALBERTO DAVIZON CASTILLO

MONTERREY, N. L.

DICIEMBRE DE 2003

**INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE
MONTERREY**

CAMPUS MONTERREY

**DIVISIÓN DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA
PROGRAMA DE GRADUADOS EN INGENIERÍA**



**TECNOLÓGICO
DE MONTERREY.**

**DISEÑO DEL CONTROL MIXTO H_2/H_∞ PARA ESTRUCTURAS DE
SUSPENSIONES ACTIVAS, UTILIZANDO DESIGUALDADES LINEALES
MATRICIALES (LMI)**

TESIS

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER
EL GRADO ACADÉMICO DE:**

**MAESTRO EN CIENCIAS
ESPECIALIDAD EN AUTOMATIZACIÓN**

POR:

YASSER ALBERTO DAVIZÓN CASTILLO

MONTERREY, N.L.

DICIEMBRE DE 2003

**Diseño del Control Mixto H_2/H_∞ para Estructuras de Suspensiones Activas,
Utilizando Desigualdades Lineales Matriciales (LMI)**

Por

Yasser Alberto Davizón Castillo

Tesis

Presentada al Programa de Graduados en Ingeniería

del

**Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey,
Campus Monterrey**

Como requisito parcial para obtener el grado académico de

Maestro en Ciencias

Especialidad en Automatización

Monterrey, N.L. a 15 de Diciembre de 2003

DEDICATORIA

Este Trabajo esta dedicado,

A Dios por todo lo que me ha dado y también por los simples detalles negados...

A mis Padres Alberto y Beatriz por haber coincidido en Espacio y Tiempo para darle contenido a mi vida y formación.

A mis siempre compañeros de Ruta, mis hermanos Pável, Anuar y Alberto por su apoyo constante y desinteresado, así como su compañía en los momentos de mayor demanda durante esta etapa.

*“Un simple marinero
puede capitanear un barco,
mientras las olas
se vayan con el viento
y el mar permanece cual debe:
Incólume al Tiempo”*

Yasser A. Davizón Castillo
2002

AGRADECIMIENTOS

Al Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey por darme la oportunidad de estudiar durante mi etapa profesional y ahora en posgrado, a través del programa de Becas de Excelencia.

Al Departamento de Física, en especial al Dr. Luis Lauro Cantú y Dr. Carlos Hinojosa por brindarme su apoyo y amistad, en la etapa de formación educativa y sobre todo por ese gran lado humano que los caracteriza.

Al Departamento de Mecatrónica y Automatización y a mi comité de tesis, al Dr. Ricardo Ramírez, Dr. Jorge Limón y Dr. Antonio Favela. Así mismo a los señores Pedro Sanchez y Juan Pineda por su amistad y apoyo en proyectos de Laboratorio.

A mis amigos de siempre: Eugenio Flores, José Rojas, Bernard Manríquez, Fabián Rosas, Christian Gaxiola, Carlos y Edgar Meléndrez, que han estado al pendiente en momentos de avance e incertidumbre para mi persona.

A mis compañeros en la época IFI: Diego Gil Leyva, Edén Figueroa, Rodolfo Briones, Blas Rodríguez, Carlos García, Alicia Moreno, Víctor Valles, Roberto Trigueros, Karla Topete, Juan Enrique Portillo y Ángel Estrada, que compartieron momentos de gran aprendizaje humano.

A mis compañeros de Maestría: Rodolfo Sepúlveda, Luis Poirerth, Miguel Zavala, Jorge Lozoya, Ramiro Alcaraz, Abel Tello, David Ortega, Aline Drivet, Fernando Peña, Luis González, Francisco Montes y a todos los demás, gracias por que el objetivo de la educación no se reduce a un número o estándar de evaluación, sino a la interacción constante y propositiva de cualidades hacia un fin común.

RESUMEN

Esta investigación aborda el estudio del problema de Control Mixto H_2/H_∞ utilizando la herramienta matemática de Desigualdades Lineales Matriciales (LMI, por sus siglas en inglés) para el caso de Control Multivariable (MIMO, por sus siglas en inglés). Utilizando como sistema dinámico de estudio estructuras de Suspensiones Activas de un vehículo previamente identificado. Se utiliza el paquete de simulación MATLAB.

Índice general

1. Introducción	1
1.1 Caso de Estudio	3
1.2 Objetivo	3
2. Formulación del Problema de Control Lineal Óptimo H_2, H_∞ y Mixto H_2/H_∞	4
2.1 Introducción al Diseño del Control Multivariable (MIMO)	4
2.2 Sistemas de Normas	6
2.2.1 Definición de las Normas H_2 y H_∞	6
2.2.2 Interpretación de las Normas H_2 y H_∞	7
2.3 Control Lineal Cuadrático Gaussiano (LQG): Control Óptimo H_2	8
2.3.1 Antecedentes al Control LQG	8
2.3.2 Problemas Tradicionales usando Control LQG	9
2.3.3 Retroalimentación Óptima de Estados	10
2.3.4 Filtrado de Kalman	11
2.4 Control por Información Completa y Estimación	12
2.4.1 Antecedentes del Control H_∞	12
2.4.2 Teoría de Control H_∞	12
2.5 Control Mixto H_2/H_∞	14
2.5.1 Introducción	14
2.5.2 Alternativas para solucionar el problema Mixto H_2/H_∞	14
3. Teoría y Aplicaciones a Sistemas de Control de las LMI	18
3.1 Antecedentes de LMI	18
3.1.1 Antecedente Histórico de LMI	18
3.1.2 Teoría de la Formulación LMI	20
3.2 Problemas LMI en Sistemas y Control	23
3.2.1 Problema de Escalamiento de Matrices	23
3.2.2 Obtención de las Funciones de Lyapunov	23
3.2.3 Problema Inverso de Control Óptimo	24
3.3 Propiedades importantes de la Formulación LMI	26
3.3.1 Lema de Eliminación	26
3.3.2 Lema de Acotamiento Real	26
3.3.3 Lema Real Positivo	27
4. Modelación del Sistema Dinámico para Suspensiones Activas	28
4.1 Introducción	28
4.2 Modelo utilizado en el diseño de la Suspensión Activa	29
4.3 Sistema Dinámico de una Suspensión Activa	31

5. Diseño del Control Mixto H_2/H_∞: un acercamiento con LMI	35
5.1 Introducción	35
5.2 Demostración de la Unicidad del Controlador Óptimo H_2/H_∞	36
5.2.1 Parametrización de Youla	38
5.2.2 Formulación del Control Mixto mediante Optimización Convexa	40
5.3 Diseño del Control basado en el criterio Mixto H_2/H_∞	41
5.4 Formulación del Problema Mixto en términos de LMI	43
5.4.1 Formulación del Desempeño H_∞ en LMI	44
5.4.2 Formulación del Desempeño H_2 en LMI	44
5.5 Reubicación de Polos en Regiones LMI	45
5.5.1 Antecedentes	45
5.5.2 Definición de Regiones LMI	46
5.5.3 Intersecciones de Regiones LMI	48
5.5.4 Propuesta para la Unión de Regiones LMI	49
5.6 Formulación del Control Mixto Subóptimo en términos LMI	50
5.7 Caso de Estudio para el modelo de Suspensión Activa en medio y un cuarto de vehículo aplicando Control Mixto	52
5.7.1 Algoritmo de Diseño del Control Mixto	52
5.7.2 Caso Estudio Modelo de un Cuarto de Vehículo sin Incertidumbre	53
5.7.3 Caso Estudio Modelo de Medio Vehículo sin Incertidumbre	56
6. Diseño del Control Mixto H_2/H_∞ para Suspensiones Activas con Incertidumbre	60
6.1 Introducción	60
6.2 Modelación del Control Mixto de Retroalimentación de Estados con Incertidumbre	61
6.3 Modelación de la Incertidumbre Paramétrica	64
6.4 Caso de Estudio para Modelación de Incertidumbre Paramétrica en el modelo de un Cuarto de Vehículo	66
6.4.1 Características del Sistema Nominal en Lazo Abierto	66
6.4.2 Características del Sistema Nominal en Lazo Cerrado	69
6.4.3 Características del Sistema con Incertidumbre	71
7. Conclusiones	74
7.1 Modelación e Identificación del Sistema Dinámico	74
7.2 Formulación del problema en LMI	74
7.3 Diseño del Control Mixto H_2/H_∞	75
7.4 Modelación del Control Mixto con Incertidumbre	75
7.5 Perspectivas	75
A. Listado del Código para la Modelación del Sistema Sin Incertidumbre Paramétrica	77
B. Listado del Código para la Modelación del Sistema Con Incertidumbre Paramétrica	84

Índice de figuras

2.1. Configuración de un grado de libertad con Retroalimentación	5
2.2. Lazo de Control H_{∞}	13
2.3. Definición General del problema de Control Mixto con Incertidumbre	14
4.1. Modelo de Suspensión Activa para medio vehículo estructura rígida	30
4.2. Modelo de Suspensión Activa para medio vehículo estructura flexible	30
4.3. Modelo de Suspensión Activa para un cuarto de vehículo	31
5.1. Problema General de Optimización Mixto H_2/H_{∞}	36
5.2. Problema de Optimización Mixto H_2/H_{∞} , para el caso de estudio	41
5.3. Diseño de Control Mixto del sistema para lazo cerrado	42
5.4. Región LMI para el Plano Vertical	46
5.5. Región LMI para el Disco centrado en $(-q, 0)$ con radio " r "	47
5.6. Región LMI para el Sector cónico con el vértice en el origen y ángulo interno	47
5.7: Diagrama de Bode en Lazo Abierto del Modelo de un Cuarto de Vehículo	54
5.8: Curva de Compromiso o Pareto para modelar el criterio H_2/H_{∞} en el modelo de un Cuarto de Vehículo	55
5.9: Respuesta ante entrada impulso para el sistema en Lazo Cerrado	56
5.10: Diagrama de Bode en Lazo Abierto del Modelo de Medio Vehículo	57
5.11: Curva de Compromiso o Pareto para modelar el criterio H_2/H_{∞} en Medio Vehículo	58
5.12: Respuesta ante entrada impulso para el sistema en Lazo Cerrado para Pitch	59
6.1. Caja de Parámetros para Modelación de Incertidumbre	65
6.2: Diagrama de Bode en Lazo Abierto del modelo de un Cuarto de Vehículo Con Incertidumbre	67
6.3: Sistema Nominal en Lazo Abierto ante una Entrada Impulso	67
6.4: Curva compromiso del Sistema Nominal y de los Valores Calculados	68
6.5: Diagrama de Bode en Lazo Cerrado del modelo de un Cuarto de Vehículo Con Incertidumbre	70
6.6: Curva de Compromiso para el Modelo Nominal y el Modelo Robusto	70
6.7 Respuesta del Modelo Nominal en Lazo Cerrado para un cuarto de Vehículo Con Incertidumbre	71
6.8 Respuesta ante entrada Impulso para los valores extremos de k y b en el modelo con Incertidumbre para un Cuarto de Vehículo	72
6.9 Comparación entre el Sistema Nominal y con Incertidumbre ante una entrada Impulso	73
6.10 Polos de Lazo Cerrado para los cuatro extremos de valores con Incertidumbre Paramétrica	73

Capítulo 1

Introducción

Esta investigación aborda el estudio del problema de Control Mixto H_2/H_∞ utilizando la herramienta matemática de Desigualdades Lineales Matriciales (LMI, por sus siglas en inglés) para el caso de Control Multivariable (MIMO, por sus siglas en inglés). Se utiliza el paquete de simulación MATLAB. Este trabajo consta de siete capítulos.

En el capítulo 2, se establecen los conceptos básicos sobre control multivariable en sus formas de Control Óptimo H_2 , Control H_∞ y Control Mixto H_2/H_∞ , así mismo se presenta una explicación sobre la norma infinita y la norma cuadrada, como herramientas matemáticas para la modelación de problemas de control multivariable.

El capítulo 3 aborda el desarrollo matemático en el que se sustenta la definición de las LMI así como sus características de aplicación en la solución de problemas de sistemas de control. En este capítulo también se presentan las propiedades de mayor impacto para aplicación en teoría de control como Complemento de Schur, la definición del Lema Acotamiento Real y el Lema de Positividad Real para su aplicación en Sistemas Dinámicos Disipativos.

El desarrollo del capítulo 4 expone lo concerniente al modelo dinámico de la suspensión activa para el caso de medio vehículo y un cuarto de vehículo, donde se parte de un modelo previamente identificado. Se establece el modelo en la formulación en Espacio de Estados para fines de control.

En el capítulo 5 se hace la formulación del problema de Control Mixto en términos de LMI para su solución, así mismo se demuestra por que la herramienta de LMI es un programa de optimización convexa, condición necesaria y suficiente para resolver el problema de control subóptimo a través de LMI.

El capítulo 6 establece la modelación del problema de Control Mixto con incertidumbres paramétricas para su solución, tomando como caso ilustrativo el modelo de un cuarto de vehículo.

En el capítulo 7 se concluye la investigación del trabajo de tesis, haciendo observaciones y recomendaciones sobre las líneas de investigación futuras que le den continuidad a este trabajo.

1.1 Caso de Estudio

Para sustentar el desarrollo matemático sobre el cual se desarrolla esta tesis, se utiliza la modelación del sistema dinámico de la suspensión activa de un vehículo, en la modalidad de un cuarto de vehículo y medio vehículo. Para eso se hace la simulación en MATLAB considerando la modelación con incertidumbres (modelo de un cuarto de vehículo) y sin incertidumbres (modelo de medio vehículo). Es necesario recalcar que este trabajo parte de un modelo de dinámico que ya había sido identificado en trabajos anteriores.

1.2 Objetivo

En virtud que el objetivo de este proyecto es explorar el contenido matemático de las LMI como una herramienta útil para solución de problemas de control óptimo multivariable, no hacemos gran énfasis en las características del sistema dinámico que se controla sino mas bien en el contenido matemático que sustenta la teoría de control mixto como un problema de optimización convexa, que por no poseer una solución analítica recurre a métodos numéricos como el caso de LMI.

Capítulo 2

Formulación del Problema de Control Lineal Óptimo H_2 , H_∞ y Mixto H_2/H_∞

2.1 Introducción al Diseño del Control Multivariable (MIMO)

La conformación de la Función de Transferencia Multivariable se basa en la idea de una definición satisfactoria del rango de ganancias para una matriz de función de transferencia dado por los valores singulares de la función de transferencia misma. Por función de transferencia multivariable, nos referimos a la conformación de valores singulares de funciones de transferencia específicas como funciones de transferencia de lazo cerrado.

En 1981, la IEEE Transactions on Automatic Control publicó un volumen especial sobre Sistemas de Control Lineal Multivariable, los primeros seis artículos se basaron en el uso de valores singulares para el análisis y diseño de sistemas multivariables retroalimentados.

El artículo de Doyle y Stein fue de gran importancia: trataba sobre la cuestión fundamental de como obtener beneficios de la retroalimentación en presencia de incertidumbre, y a través del uso de valores singulares se demostró como las ideas de control clásico retroalimentado pueden ser generalizadas para el control de sistemas multivariables. Observe el lazo de control de la Figura 2.1, para un grado de libertad.

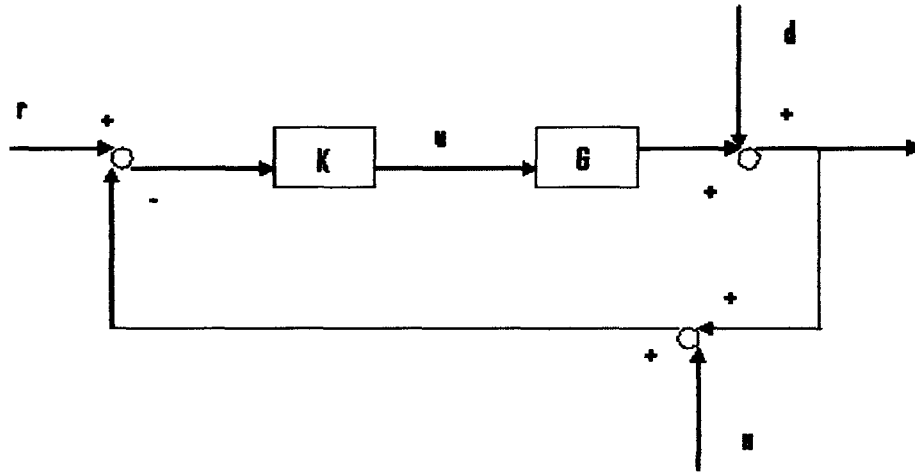


Figura 2.1: Configuración de un grado de libertad con Retroalimentación

La interconexión de la planta G y el controlador K está dirigido por comandos de referencia r , perturbaciones de salida d y ruido de medición n , las salidas a ser controladas son y , además las señales de control u . En términos de la función de sensibilidad $S = (I + GK)^{-1}$ y de la función de transferencia en lazo cerrado $T = GK(I + GK)^{-1} = I - S$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 y(s) &= T(s)r(s) + S(s)d(s) - T(s)n(s) \\
 u(s) &= k(s)S(s)[r(s) - n(s) - d(s)]
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Estas relaciones determinan varios objetivos de lazo cerrado, en adición a los requerimientos donde K estabiliza G , llamados:

1. Para rechazar perturbaciones hacer $\sigma(S)$ pequeño.
2. Para atenuación de ruido hacer $\sigma(T)$ pequeño.
3. Para seguimiento de referencia hacer $\sigma(T) \approx \sigma(S) \approx 1$.
4. Para controlar energía hacer $\sigma(KS)$ pequeño.

Si la incertidumbre en el modelo de la planta G esta representada por una perturbación aditiva, $G_p = G + \Delta$, entonces el objetivo de lazo cerrado es:

5. Para estabilidad robusta en presencia de perturbación aditiva hacer $\sigma(KS)$ pequeño.

Alternativamente, si la incertidumbre es modelada mediante una salida de perturbación multiplicativa, $G_p = (I + \Delta)G$, tenemos:

6. Para estabilidad robusta en presencia de una perturbación multiplicativa a la salida hacemos $\sigma(T)$ pequeño.

Los requerimientos de lazo cerrado de 1 a 6 no pueden ser satisfechos simultáneamente. El diseño de retroalimentación es un compromiso en la frecuencia de varios objetivos. Esto no es siempre tan difícil como suena, debido a que los rangos de frecuencia sobre los cuales los objetivos son importantes son diferentes. Por ejemplo, rechazo a perturbaciones es típicamente un requerimiento a baja frecuencia, mientras la mitigación de ruido blanco es relevante a bajas frecuencias.

2.2 Sistemas de Normas

2.2.1 Definición de las Normas H_2 y H_∞

Sea una función de transferencia estrictamente estable $P(s)$ con una representación en espacio de estados (A, B, C, D) la siguientes medidas del desempeño se pueden definir como.[1]

- La norma H_2 de la función de transferencia $P(s)$ se define como:

$$\|P(s)\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} [P^T(-j\omega)P(j\omega)] d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2)$$

La norma-2 puede ser calculada mediante las ecuaciones de Lyapunov:

$$\|P\|_2^2 = \text{tr}[SC^T C] = \text{tr}[G B B^T] \quad (2.3)$$

donde S es la controlabilidad de Gramian y G es la observabilidad de Gramian las cuales se obtienen de

$$\begin{aligned} AS + SA^T + BB^T &= 0 \\ A^T G + GA + C^T C &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

- La norma H_∞ de la función de transferencia $P(s)$ esta definida como, siendo $\bar{\sigma}$ el máximo valor singular:

$$\|P(s)\|_\infty = \sup \left[\bar{\sigma}(G(jw)) \right] \quad (2.5)$$

2.2.2 Interpretación de las Normas H_2 y H_∞

Para la norma H_2

1. Para sistemas SISO, la norma inducida desde ℓ_2 a ℓ_∞ .
2. La raíz cuadrada de la potencia promedio (la norma de Potencia) de la respuesta para una señal de entrada con densidad espectral.
3. La raíz cuadrada de la energía contenida en la respuesta al impulso.

Para la norma H_∞

1. La norma inducida desde ℓ_2 a ℓ_2 .
2. La potencia de la ganancia RMS.
3. El valor pico de la amplitud, en los valores singulares, de un Diagrama de Bode.[2]

2.3 Control Lineal Cuadrático Gaussiano (LQG): Control Óptimo H_2

2.3.1 Antecedentes al Control LQG

El Control Óptimo se construye a partir del trabajo sobre filtraje óptimo de Wiener en 1940, el cual alcanza madurez en 1960 con lo que ahora llamamos Control lineal cuadrático Gaussiano o Control LQG. Su desarrollo coincide con los grandes programas de investigación de los Estados Unidos de América y su contraparte de la Unión Soviética de problemas para el desarrollo espacial. Dichos problemas, como la manipulación de un cohete con el mínimo consumo de combustible, el cual podría ser bien definido y formulado como problemas de optimización. Los ingenieros aeroespaciales fueron exitosos aplicando el control LQG, pero cuando ingenieros de control intentaron usar el control LQG en problemas de índole industrial una historia diferente sucedió. Los modelos de plantas no estuvieron frecuentemente disponibles y la presencia de perturbaciones de ruido blanco no fueron significativas para los ingenieros de control en la práctica.

El Regulador Lineal Cuadrático (LQR) es una metodología de control óptimo que puede ser empleada en una amplia gama de aplicaciones. La función de costo cuadrática provee al diseñador gran de flexibilidad para realizar compromisos entre varios criterios de desempeño. La relación entre los pesos de la función de costo y el criterio de desempeño funcionan bien para sistemas MIMO, donde el uso de técnicas de control clásico se vuelve difícil.

Una gran limitación del control LQR es que el estado entero debe ser exactamente medido al generar la acción de control. Esta limitación aumenta para sistemas de gran orden, donde la medición de todos los estados puede ser muy costosa. Además, ninguna medición es siempre exacta. Por lo tanto, una metodología de diseño óptimo que resulte en controladores que utilicen ruido parcial de la información es deseable. La metodología del Control LQG provee una forma de diseñar dicho tipo de controlador. (El control LQG también es conocido como el control óptimo H_2 . La H es por los Espacios de Hardy de todos los controladores estables, y el 2 denota el sistema de norma 2).

El controlador LQG conlleva a la necesidad de medir el estado completo mediante la estimación del estado, usando el Filtro de Kalman. Este controlador es una combinación del Control LQR y el Filtro de Kalman, un hecho conocido como el principio de separación. El controlador LQG básico es un regulador, pero puede ser modificado para permitir seguimiento ante cambios en referencia. Las modalidades de Control Anteaalimentado, error de retroalimentación y control integral pueden ser implementados dentro del esquema LQG. Nótese que esos métodos para obtener sistemas de seguimiento pueden aplicarse también al caso de LQR.

2.3.2 Problemas Tradicionales usando Control LQG

En el control LQG tradicional, se asume que la dinámica de la planta es lineal y conocida, y que el ruido de medición y las señales de perturbación son estocásticas con propiedades estadísticas conocidas. Así tenemos, el siguiente modelo de planta:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + w_d \\ y &= Cx + w_n \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde w_d y w_n son las perturbaciones (proceso con ruido) y las mediciones con ruido a la entrada respectivamente, las cuales usualmente están no correlacionadas con media cero para procesos Gaussianos estocásticos así como matrices de densidad espectral W y V constantes respectivamente.

Esto es, w_d y w_n son procesos de ruido blanco con covarianzas

$$\begin{aligned} E\{w_d(t)w_d(\tau)^T\} &= W\delta(t-\tau) & E\{w_n(t)w_d(\tau)^T\} &= 0 \\ E\{w_n(t)w_n(\tau)^T\} &= V\delta(t-\tau) & E\{w_d(t)w_n(\tau)^T\} &= 0 \end{aligned} \quad y \quad (2.7)$$

donde E es el operador de Esperanza Matemática y $\delta(t-\tau)$ la función delta (impulso válido en $t = \tau$).

El problema de Control LQG se sustenta en encontrar el controlador óptimo $u(t)$ que minimice

$$J = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x^T Q x + u^T R u] dt \right\} \quad (2.8)$$

donde Q y R están apropiadamente escogidos como matrices de peso constantes (parámetros de diseño), tal que $Q = Q^T \geq 0$ y $R = R^T > 0$. La idea de LQG proviene de usar un modelo lineal, una función de costo cuadrático y un proceso de ruido blanco Gaussiano para modelo señales de perturbación y ruido.

La solución al problema LQG se conoce como el Teorema de Separación o Principio de Equivalencia. Consiste en determinar primero el control óptimo de un regulador cuadrático (LQR) sin considerar w_d y w_n . Las soluciones a este problema pueden ser escritas en términos de la ley de control:

$$u(t) = -K_r x(t) \quad (2.9)$$

donde K_r es una matriz constante la cual fácilmente se puede calcular y es claramente independiente de W y V , las propiedades estadísticas de la planta con ruido. El siguiente

paso es encontrar un estimador óptimo \hat{x} del estado x , de manera que $E \left\{ \begin{bmatrix} x - \hat{x} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x - \hat{x} \end{bmatrix} \right\}$

sea mínimo. El estimador de estado óptimo viene dado por el Filtro de Kalman y es independiente de Q y R .

2.3.3 Retroalimentación Óptima de Estados

El problema LQR, donde todos los estados son conocidos, es el valor inicial del problema determinístico: donde dado el sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ con el estado inicial $x(0)$, se debe encontrar una señal de entrada $u(t)$ la cual toma el sistema al estado cero ($x = 0$) de manera óptima, esto mediante la minimización de la función de costo determinística

$$J = \left\{ \int_0^{\infty} [x^T Q x + u^T R u] dt \right\} \quad (2.10)$$

Donde la solución óptima viene dada por $u(t) = -K_r x(t)$, donde a su vez:

$$K_r = R^{-1} B^T X \quad (2.11)$$

y $X = X^T \geq 0$ es la solución única semidefinida positiva de la Ecuación Algebraica de Riccati:

$$A^T X + X A - X B R^{-1} B^T X + Q = 0 \quad (2.12)$$

2.3.4 Filtrado de Kalman

El Filtro de Kalman tiene la estructura de un estimador de estados ordinario u observador con:

$$\dot{x} = Ax + Bu + K_f (y - CX) \quad (2.13)$$

La parte óptima de K_f , la cual minimiza $E \left\{ \begin{bmatrix} x - \hat{x} \\ y - C\hat{x} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x - \hat{x} \\ y - C\hat{x} \end{bmatrix} \right\}$ viene dada por

$$K_f = Y C^T V^{-1} \quad (2.14)$$

2.4 Control por Información Completa y Estimación

2.4.1 Antecedentes del Control H_∞

En virtud a los avances que presentó el control LQG, a principios de 1980 se generaron cambios substanciales hacia la optimización H_∞ del control robusto. Este desarrollo tomó peso con el trabajo de Zames (1981), sin embargo la primera aplicación de la optimización H_∞ en un contexto ingenieril la presenta Helton (1976). Zames argumentaba las pobres propiedades de la norma H_2 , en lo relacionado al criterio integral. .

La optimización de la norma- ∞ tiene aplicaciones en maximizar el desempeño y robustez. Los problemas de control y estimación, con el objetivo de minimizar el sistema de la norma- ∞ , son llamados problemas de optimización H_∞ . Un controlador óptimo H_∞ minimiza la ganancia con el peor caso del sistema. Este problema puede ser pensado como un juego donde se presentan dos criterios: el criterio de desempeño que busca maximizar la ganancia y por otro lado el criterio de robustez cuyo objetivo es minimizar la ganancia. Este tipo de juegos son conocidos como juegos diferenciales cuando la dinámica del juego esta descrita por ecuaciones diferenciales. [3]

2.4.2 Teoría de Control H_∞

La norma H_∞ de una función de transferencia estable $G(s)$ es el valor mas grande de la ganancia entrada/salida RMS,

$$\|G\|_\infty = \sup \frac{\|y\|_{L_2}}{\|u\|_{L_2}} \quad (2.15)$$

donde ℓ_2 es el espacio de señales finitas de energía y $y(t)$ es la salida del sistema G para la entrada $u(t)$, esta norma también corresponde al valor pico de la respuesta frecuencial de $G(j\omega)$, esto es:

$$\|G\|_\infty = \sup \sigma_{\max}(G(j\omega)) \quad (2.16)$$

Para esta formulación estándar del problema de control H_∞ , corresponde al de rechazo de perturbaciones. Específicamente, consiste en la minimización de la ganancia RMS de lazo cerrado desde w a z en el lazo mostrado en la Figura 2.2. Este puede ser interpretado como la minimización del efecto del peor de los casos para la perturbación de w en la salida z .

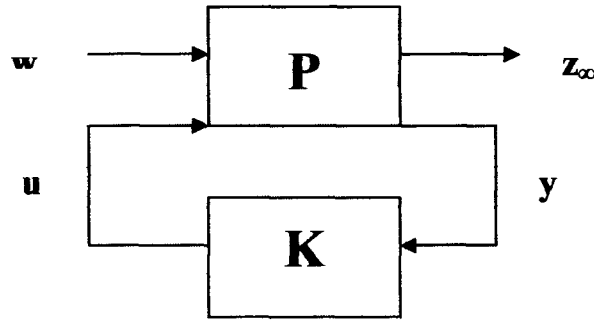


Figura 2.2. Lazo de Control H_∞

Si particionamos la planta $P(s)$ como:

$$\begin{bmatrix} Z(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s) \\ U(s) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

donde la función de transferencia de lazo cerrado desde w a z se obtiene mediante la siguiente expresión lineal fraccional

$$F(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (2.18)$$

De esta forma el control H_∞ busca minimizar $\|F(P, K)\|_\infty$ sobre todos los controladores $K(s)$. Alternativamente, podemos especificar un valor máximo γ para la ganancia RMS. Si existe un controlador estable $K(s)$ que asegure $\|F(P, K)\|_\infty < \gamma$, se dice que el problema es de control H_∞ subóptimo.

2.5 Control Mixto H_2/H_∞

2.5.1 Introducción

En el pasado el problema general mixto H_2/H_∞ de control óptimo ha recibido especial interés. Los primeros acercamientos incluían la solución al problema de una entrada/una salida, una entrada/dos salidas y dos entradas/una salida. Bernstein y Haddad consideraron el caso de una entrada exógena y dos salidas controladas. Usando la técnica de Multiplicadores de Lagrange y bajo la suposición de que el orden del controlador está especificado, ellos derivaron la condición necesaria para minimizar el acotamiento de la norma H_2 de la matriz de transferencia, sujeta a la norma H_∞ con una restricción. [4] formulación del problema mixto con dos entradas exógenas y dos salidas controladas se estudió por primera vez por Rotea y Khargonekar. [5]

2.5.2 Alternativas para solucionar el problema Mixto H_2/H_∞

La solución al problema de optimización de la norma-mixta posee diferentes acercamientos con los cuales atacar el problema. Para esto se realiza una clasificación de cada acercamiento. Basados en el diagrama de bloques de la Figura 2.3.

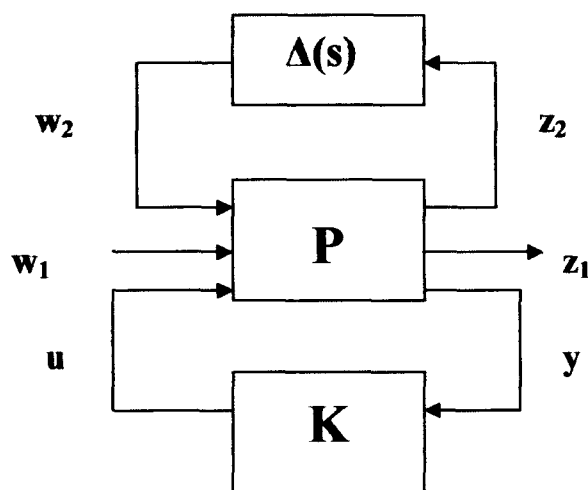


Figura 2.3: Definición General del problema de Control Mixto con Incertidumbre

2.5.2.1 Acercamiento de programación lineal: $\ell_1 / \frac{H_2}{H_\infty}$

Este acercamiento usa la técnica de Programación Lineal (PL) combinada con la teoría de dualidad. Un problema PL es un problema de optimización en \mathcal{R}^n , donde la función objetivo es lineal en las incógnitas y las incógnitas satisfacen un conjunto de igualdades y/o desigualdades lineales con restricciones. Esto puede establecerse de una manera estándar como:

$$\begin{aligned} & \min_x (c^T x) \\ & \text{sujeto a } Ax = b \\ & \quad x_i \geq 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

donde $x, c \in \mathcal{R}^n$, $b \in \mathcal{R}^m$ y $A \in \mathcal{R}^{m \times n}$.

La idea es aumentar la restricción de la programación lineal, derivada del control óptimo ℓ_1 con la especificación lineal y resolver el nuevo programa lineal.

2.5.2.2 Acercamiento usando Parametrización de Youla: ℓ_1 / H_∞

Este acercamiento utiliza la descripción más general donde $w_1 \neq w_2$ y $z_1 \neq z_2$ para el caso de control continuo y discreto. El resultado principal muestra que la solución subóptima para el problema ℓ_1 / H_∞ , cuyo desempeño es arbitrario y cercano al óptimo, puede ser resuelto utilizando optimización convexa. La formulación del problema utilizando la parametrización de Youla:

1. Encontrar el valor óptimo para la medición del desempeño:

$$\mu^o = \inf_{Q \in \mathcal{R}} \|T_{w_1 \rightarrow z_1}\|_1 \tag{2.20}$$

sujeto a

$$\|T_{w_2 \rightarrow z_2}\|_\infty = \|T_{11} + T_{12}QT_{21}\|_\infty \leq \gamma \tag{2.21}$$

2. Dado $\varepsilon > 0$, sintetizar un controlador tal que

$$\begin{aligned} \|T_{w_2 \rightarrow z_2}\|_\infty &\leq \gamma \\ \|T_{w_1 \rightarrow z_1}\|_1 &\leq \mu^0 + \varepsilon \end{aligned} \quad (2.22)$$

2.5.2.3 Optimización del funcional de costo para la Entropía: H_2 / H_∞

Mustafa y Glover propusieron el problema donde $w_1 = w_2 = w$ y $z_1 = z_2 = z$. La entropía de $T_{w \rightarrow z}$, donde $\|T_{w \rightarrow z}\|_\infty < \gamma$, se define como:

$$(T_{w \rightarrow z}, \gamma) = \lim_{s_0 \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\gamma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |\det(I - \gamma^2 T_{w \rightarrow z}(j\omega) T_{w \rightarrow z}^*(j\omega))| \left[\frac{s_0}{s_0 - j\omega} \right]^2 d\omega \right\} \quad (2.23)$$

donde $s_0 \in \mathfrak{R}^+$.

El problema de Entropía Máxima/ H_∞ se establece como:

Encontrar, para la planta P, un controlador de retroalimentación K tal que:

1. K estabilice a P
2. La función de Transferencia en lazo cerrado $T_{w \rightarrow z}$ que satisfaga la norma H_∞ acotada por $\|T_{w \rightarrow z}\|_\infty < \gamma$.
3. La entropía en lazo cerrado de $(T_{w \rightarrow z}, \gamma)$ se maximice.

Mientras el máximo valor de la entropía puede ser expresado en términos de la solución a dos ecuaciones de Riccati, el costo auxiliar mínimo requiere una tercera ecuación de Riccati acoplada a las otras dos.

2.5.2.4 Acercamiento utilizando la caracterización de potencia: H_2 / H_∞

Las normas de potencia y espectro se definen como la raíz cuadrada del promedio de potencia (P) y la raíz cuadrada de la norma infinita de la densidad espectral (S) respectivamente. El problema propone $w_1 \neq w_2$ y $z_1 = z_2 = z$ donde w_1 se asume fijo y blanco, y w_2 se asume como potencia acotada. El objetivo de diseño es minimizar la potencia de la señal de salida, la cual se calcula como:

$$\sup_{w_1 \in S, w_2 \in P} \|Z\|_P^2 \quad (2.24)$$

2.5.2.5 Optimización convexa utilizando LMI: H_2 / H_∞

La solución a muchos problemas de optimización convexa puede ser calculada en un tiempo en el cual es comparable al tiempo requerido para evaluar una solución en “forma-cerrada” para un problema similar. Los problemas de Ingeniería de Control se reducen a resolver dos ecuaciones de Riccati se consideran resueltos. Sin embargo cuando existen más desigualdades de Riccati el problema no tiene solución analítica, de ahí la importancia de esta alternativa. [1.2]

En este trabajo de investigación se resuelve el problema mixto H_2 / H_∞ utilizando esta técnica computacional, como se presenta en el Capítulo 5.

Capítulo 3

Teoría y Aplicaciones a Sistemas de Control de las Desigualdades Lineales Matriciales (LMI)

3.1 Antecedentes de LMI

3.1.1 Antecedente Histórico de LMI

Contrario a lo que varios autores en la actualidad proponen, el estudio de las desigualdades lineales matriciales (LMI, por sus siglas en inglés) en el contexto de los sistemas dinámicos y control datan de un gran camino en la historia y probablemente comienza con el trabajo fundamental de Aleksandr Mikhailovich Lyapunov en el estudio de estabilidad del movimiento. Alrededor de 1890, Lyapunov realizó un estudio sistemático sobre la expansión local y propiedades de contracción de sistemas dinámicos. Trabajó la idea que un conjunto invariante de ecuaciones diferenciales es estable en el sentido que atrae todas las soluciones si uno puede encontrar una función que esté acotada por debajo y decrece alrededor de todas las soluciones fuera del conjunto invariante.

En su trabajo “El Problema General de la Estabilidad de Movimiento” publicado en 1892, Lyapunov demostró que la ecuación diferencial (3.1) es estable:

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) \quad (3.1)$$

esto es que todas las trayectorias convergen a cero, si y sólo si existe una matriz definida positiva P tal que:

$$A^T P + PA < 0 \quad (3.2)$$

El requisito de que $P=P^T>0$, $A^T P + PA < 0$ es lo que ahora llamamos desigualdad de Lyapunov sobre P , la cual es una forma especial de LMI. Lyapunov también demostró que esa primer LMI podía ser resuelta analíticamente. Por lo que es posible hacer $Q = Q^T > 0$ y resolver la ecuación lineal $A^T P + PA = -Q$ para la matriz P , la cual debe garantizar ser definida positiva si el sistema es estable. De esta forma, la primer LMI usada para analizar la estabilidad de sistemas dinámicos fue la desigualdad de Lyapunov, la cual puede ser resuelta analíticamente (resolviendo el conjunto de ecuaciones lineales).

La siguiente contribución ocurrió en 1940. Lur'e, Postnikov y otros investigadores de la Unión Soviética aplicaron los métodos de Lyapunov a algunos problemas específicos en ingeniería de control con no-linealidades en el actuador. Sin embargo, no utilizaron el concepto de desigualdades matriciales, más bien su criterio de estabilidad tiene la forma de LMI. Estas desigualdades fueron reducidas a desigualdades polinomiales. Las LMI resultantes fueron resueltas, a mano. Por supuesto esto limitó su aplicación a sistemas de orden pequeño (segundo y tercer orden).

Para 1960, Yakubovich, Popov, Kalman redujeron la solución de LMI, usando el lema Kalman-Yakubovich-Popov (KYP). Esto resultó en el criterio de Popov, criterio del círculo, criterio de Taypkin y algunas variaciones. La contribución a la teoría de control a través de LMI, fue demostrar cómo resolver ciertas familias de LMIs a través de métodos gráficos.

En 1971 un artículo de control óptimo cuadrático, escrito por J.C. Willems propuso la siguiente LMI:

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + Q & PB + C^T \\ B^T P + C & R \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.3)$$

y establece que puede ser resuelta estudiando las soluciones simétricas a la ecuación de Riccati:

$$A^T P + PA - (PB + C^T)R^{-1}(B^T P + C) + Q = 0 \quad (3.4)$$

la cual se solucionó mediante la descomposición en valores propios de la matriz Hamiltoniana.

El siguiente gran avance fue el hecho de poder formular los problemas de control mediante optimización convexa que son amigables al ámbito computacional, [6]. Es este tópico el que se presenta para su análisis en esta investigación.

3.1.2 Teoría de la Formulación LMI

Una gran variedad de problemas del área de Sistemas y Control como escalamiento óptimo de matrices, diseño de filtros digitales, problemas de interpolación para identificación de sistemas, análisis de robustez y síntesis a través de funciones de Lyapunov, pueden ser tratados como problemas convexos o cuásiconvexos que relacionan desigualdades matriciales,[7].

Una desigualdad lineal matricial (LMI) es una desigualdad matricial de la forma:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (3.5)$$

donde $x \in \mathfrak{R}^m$ es la variable, y $F_i = F_i^T \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ $i=0, \dots, m$ son conocidas.

Las LMI definen una restricción convexa sobre x . Esto es, el conjunto $\delta = \{x \mid F(x) > 0\}$ es convexo. Esto implica, que si $x_1, x_2 \in \delta$ y $\alpha \in (0,1)$ entonces:

$$F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \alpha F(x_1) + (1-\alpha)F(x_2) > 0 \quad (3.6)$$

donde con la igualdad decimos que F es afín y la desigualdad proviene del hecho que $\alpha \geq 0$ y $(1 - \alpha) \geq 0$.

Una propiedad esencial es que un sistema de LMI puede ser escrito como una sola LMI. Específicamente, $F_1(x) > 0, \dots, F_k(x) > 0$ si y sólo si

$$F(x) = \begin{bmatrix} F_1(x) & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & F_2(x) & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & F_k(x) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

La segunda propiedad implica incorporar restricciones afines en las LMI. Esto significa que las restricciones combinadas de la forma

$$\begin{array}{l} F(x) > 0 \\ Ax = b \end{array} \quad \text{ó} \quad \begin{array}{l} F(x) > 0 \\ x = Ay + b \end{array} \quad (3.8)$$

pueden ser articuladas como una LMI.

Es posible convertir desigualdades no-lineales en desigualdades lineales, esto utilizando el Complemento de Schur. La idea básica es que dada la LMI

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (3.9)$$

donde $Q(x) = Q(x)^T$, $R(x) = R(x)^T$ y $S(x)$ depende de x , es equivalente a

$$\begin{array}{l} Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0 \\ R(x) > 0 \end{array} \quad (3.10)$$

Nótese que la primera desigualdad es no lineal en x .

Dado que la LMI $F(x) > 0$ define una restricción convexa sobre la variable x , los problemas de optimización involucran la minimización (o maximización) de la función de desempeño $f : \delta \rightarrow \mathfrak{R}$ con $\delta = \{x \mid F(x) > 0\}$ como la clase de problema de optimización convexa.

Suponga que $F, G, H : V \rightarrow S$ son funciones afines. Existen tres problemas relacionados con el estudio de LMI:

1. Factibilidad: La prueba de si existe o no solución $x \in V$ de $F(x) > 0$ es llamado un problema factible. La LMI es factible si tal x existe, de lo contrario las LMI $F(x) > 0$ no son factibles.

2. Optimización: Sea $f : \delta \rightarrow \mathfrak{R}$ y suponga que $\delta = \{x \mid F(x) > 0\}$. El problema de determinar

$$V_{opt} = \inf_{x \in \delta} f(x) \quad (3.11)$$

es un problema de optimización con una restricción LMI. Este problema implica la determinación de V_{opt} y para un arbitrario $\varepsilon > 0$ el cálculo de una solución casi óptima de x la cual satisfaga $x \in \delta$ y $V_{opt} \leq f(x) \leq V_{opt} + \varepsilon$.

3. Problema de Eigenvalores Generalizados: Este problema implica la minimización de un escalar $\lambda \in \mathfrak{R}$ sujeto a

$$\begin{aligned} \lambda F(x) - G(x) &> 0 \\ F(x) &> 0 \\ H(x) &> 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.2 Problemas LMI en Sistemas y Control

3.2.1 Problema de Escalamiento de Matrices

Dada $M \in C^{m \times m}$, la norma óptima diagonalmente escalada de M se define como

$$\nu(M) = \inf_{D \in P} \|DMD^{-1}\| \quad (3.13)$$

donde P es el conjunto de matrices diagonales no singulares de tamaño m.

Nótese que $\nu(M) < \gamma$ si y sólo si existe una no-singular $D \in P$ tal que

$$(DMD^{-1})^T (DMD^{-1}) < \gamma^2 I \quad (3.14)$$

Por lo tanto,

$$\nu(M) = \inf \{ \gamma \mid M^T P M < \gamma^2 P, P = P^T > 0 \in P \} \quad (3.15)$$

De lo anterior $\nu(M)$ es el valor óptimo del problema generalizado de eigenvalores

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar } & \gamma \\ \text{Sujeto a } & P > 0, \\ & M^T P M < \gamma^2 P \end{array} \quad (3.16)$$

3.2.2 Obtención de las Funciones de Lyapunov

Considérese la inclusión diferencial (ID)

$$\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = A(t)x(t) \\ A(t) \in Co\{A_1, \dots, A_L\} \end{array} \quad (3.17)$$

donde Co representa la estructura convexa. Buscamos dónde la ID es estable, donde las trayectorias del sistema convergen a cero cuando $t \rightarrow \infty$. Una condición suficiente para esto es la existencia de una función cuadrática positiva $V(z) = z^T Pz$

tal que $\frac{dV(x(t))}{dt} < 0$ para cada trayectoria de la ID. Entonces

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = x(t)^T (A(t)^T P + PA(t)) x(t) \quad (3.18)$$

una condición suficiente para la estabilidad es la existencia de $P > 0$ tal que

$$\begin{aligned} A(t)^T P + PA(t) &< 0 \\ A(t) &\in Co\{A_1, \dots, A_L\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Si existe tal P decimos que la ID es cuadráticamente estable.

3.2.3 Problema Inverso de Control Óptimo

Dado el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} Q^{1/2} & 0 \\ 0 & R^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

asumiendo que (A, B) es estable, (Q, A) es detectable y $R > 0$, el problema LQR de Control Óptimo es determinar la entrada u que minimiza el índice de desempeño

$$\int_0^{\infty} z(t)^T z(t) dt \quad (3.21)$$

La solución a este problema puede ser expresado como una retroalimentación de estados $u = Kx$ con $K = -R^{-1} B^T P$, donde P es la única solución definida positiva de la Ecuación de Riccati (ARE)

$$A^T P + PA - PBR^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (3.22)$$

La formulación del problema inverso de control óptimo es:

“dada la ganancia K , determinar si existe una $Q > 0$ y $R > 0$, (Q, A) sea observable tal que $u(t) = Kx(t)$ sea la ley de control óptimo correspondiente al problema LQR”

Este problema de control óptimo se puede reducir a un problema LMI. Si existe una P positiva y una W definida positiva satisfaciendo

$$\begin{aligned}(A + BK)^T P + P(A + BK) + K^T R K + Q &< 0 \\ A^T W + W A &< Q \\ B^T P + K R &= 0\end{aligned}\tag{3.23}$$

3.3 Propiedades importantes de la Formulación LMI

3.3.1 Lema de Eliminación

Para lograr remover o modificar las variables de decisión se aplica el lema de eliminación el cual se representa como:

$$\begin{aligned}
 A(x) + B(x)XC^T(x) + C(x)X^T B^T(x) > 0 &\Leftrightarrow \\
 \tilde{B}^T(x)A(x)\tilde{B}(x) > 0 & \\
 \tilde{C}^T(x)A(x)\tilde{C}(x) > 0 &
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

3.3.2 Lema de Acotamiento Real

En algunos problemas de control óptimo H_∞ se aplica el lema de acotamiento real

Sea el sistema lineal no expansivo

$$\int_0^T y^T(t)y(t)dt \geq \int_0^T u^T(t)u(t)dt \tag{3.25}$$

si y sólo si su función de transferencia

$$G^T(s)G(s) \leq I \tag{3.26}$$

es real acotada para todo $Re(s) > 0$

De manera equivalente se satisface la restricción de la norma H_∞

$$\|G(s)\|_\infty \leq 1 \tag{3.27}$$

si y sólo si existe una solución a la LMI

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & D^T D - I \end{bmatrix} \leq 0$$

$$P = P^T > 0 \quad (3.28)$$

3.3.3 Lema Real Positivo

Para el sistema dinámico lineal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (3.29)$$

es pasivo

$$\int_0^T u^T(t)y(t)dt \geq 0 \quad (3.30)$$

si y sólo si existe una solución a la LMI

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB - C^T \\ B^T P - C & -D^T - D \end{bmatrix} \leq 0$$

$$P = P^T > 0 \quad (3.31)$$

Además si y si sólo si es una solución simétrica positiva de la Desigualdad de Riccati

$$A^T P + PA + (PB - C^T)(D + D^T)^{-1}(PB - C^T)^T \leq 0 \quad (3.32)$$

Capítulo 4

Modelación del Sistema Dinámico para Estructuras de Suspensiones Activas

4.1 Introducción

La suspensión de un vehículo juega un rol importante en áreas tan diversas como seguridad, minimización del daño en las llantas, confort del pasajero y todo aquello relacionado con el desempeño del vehículo. Para cumplir con todas esas demandas se han desarrollado diferentes estructuras de sistemas para suspensiones las cuales van desde elementos pasivos como resortes y amortiguadores para suspensiones activas, [8]. Es común diseñar los sistemas de suspensión que usan el criterio basado en aislarlo de vibraciones, manejo de suspensión y características de agarre en las llantas de un vehículo.

4.2 Modelo utilizado en el diseño de la Suspensión Activa

El objetivo principal de un sistema de suspensión para aplicaciones automotrices es mejorar las características dinámicas como aislamiento de vibraciones (confort de manejo), espacio de trabajo para la suspensión y agarre de la llanta. El manejo de agarre es requerido para permitir las operaciones de aceleración, manejo y frenado. Dado que el amortiguamiento en la llanta típicamente es muy pequeño.

El criterio de desempeño para suspensión incluye la variación en la carga del eje, el control estático y dinámico de la altitud, espacio de trabajo y falta de confort. En este trabajo se analiza el caso del modelo para un cuarto y medio carro, y se calculan la variación en la carga del eje, el espacio de trabajo de la suspensión y la aceleración de la masa puede ser calculado. Dado que el desplazamiento del cuerpo de la masa puede enlazarse con falta de confort, este criterio se aplica para el caso de medio carro, [9].

La Figura 4.1 y 4.2 muestra el modelo para medio vehículo el cual es ampliamente utilizado para el diseño de suspensiones activas. El modelo comprende tres partes: la masa comprimida y las dos masas descomprimidas. Sean las masas comprimidas y descomprimidas denotadas por m_s y m_a , respectivamente. Ambas suspensiones consisten de un resorte lineal, un amortiguador y un actuador que genera una fuerza de empuje entre el cuerpo y el eje. La rigidez de la suspensión en la parte frontal y posterior se denotan por k_{sf} , k_{sr} y la parte frontal y posterior de la rigidez de la llanta se denota por k_{yf} , k_{yr} . La parte frontal y posterior de amortiguamiento se denota por b_{sf} , b_{sr} . El modelo de medio vehículo tiene cuatro grados de libertad. La masa comprimida se asume como un cuerpo rígido y tiene libertad de movimiento en la dirección vertical y transversal. Cada una de las masas comprimidas tiene libertad de movimiento en la dirección vertical. Sea el desplazamiento de la masa comprimida y descomprimida como x_{1f} , x_{1r} y sea el desplazamiento frontal y posterior como x_{2f} , x_{2r} . En el modelo de medio vehículo las perturbaciones w_f , w_r son provocadas por irregularidades de la llanta. Las señales de entrada u_f y u_r son generados por actuadores.

4. Modelación del Sistema Dinámico para Suspensiones Activas

En la Figura 4.3 se presenta el modelo de un cuarto de vehículo para el caso de análisis posterior, nótese que es un caso particular del modelo de medio vehículo.

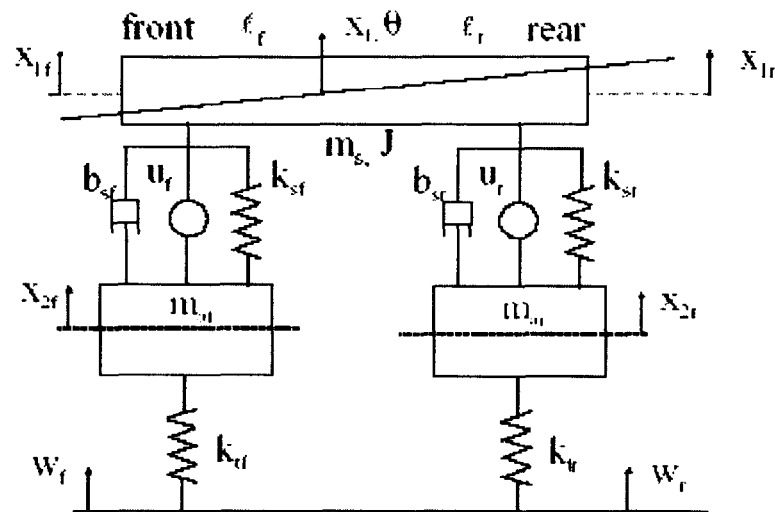


Figura 4.1: Modelo de Suspensión Activa para medio vehículo estructura rígida

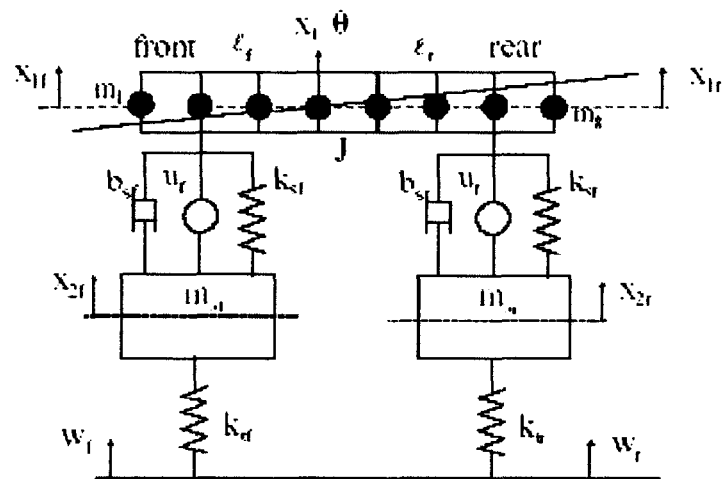


Figura 4.2: Modelo de Suspensión Activa para medio vehículo estructura flexible

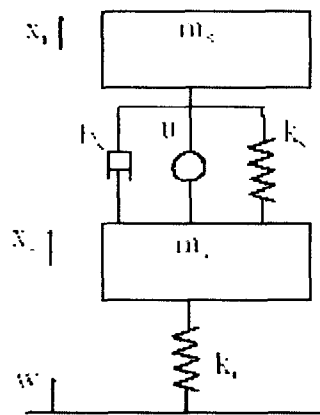


Figura 4.3: Modelo de Suspensión Activa para un cuarto de vehículo

4.3 Sistema Dinámico de una Suspensión Activa

La representación en espacio de estados (SSR) para el modelo de medio vehículo puede formalizarse como sigue:

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \quad (4.1)$$

donde los vectores del estado, perturbación y fuerza, así como las matrices del sistema son las siguientes:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & \theta & x_{2f} & x_{2r} & \dot{x}_1 & \dot{\theta} & \dot{x}_{2f} & \dot{x}_{2r} \end{bmatrix}^T$$

$$w = \begin{bmatrix} w_f & w_r \end{bmatrix}^T \quad (4.2)$$

$$u = \begin{bmatrix} u_f & u_r \end{bmatrix}^T$$

Matrices del Sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}B \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}K_r \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}G_a \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Donde las matrices de la masa comprimida, la masa no comprimida, la rigidez de la suspensión, la rigidez de la llanta y el amortiguamiento de la suspensión son las siguientes:

$$M = \begin{bmatrix} M_s & 0 \\ 0 & M_a \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} GB_s G^T & -GB_s \\ -B_s G^T & B_s \end{bmatrix}; \quad (4.4)$$

$$K = \begin{bmatrix} GK_s G^T & -GK_s \\ -K_s G^T & K_s + K_t \end{bmatrix}; \quad K_r = \begin{bmatrix} 0 \\ K_t \end{bmatrix}; \quad G_a = \begin{bmatrix} -G \\ I \end{bmatrix}$$

donde:

$$M_s = \begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}; \quad B_s = \begin{bmatrix} b_{sf} & 0 \\ 0 & b_{sr} \end{bmatrix}; \quad K_s = \begin{bmatrix} k_{sf} & 0 \\ 0 & k_{sr} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$M_a = \begin{bmatrix} m_{af} & 0 \\ 0 & m_{ar} \end{bmatrix}; \quad K_t = \begin{bmatrix} k_{yf} & 0 \\ 0 & k_{yr} \end{bmatrix}; \quad K_l = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ l_f & -l_r \end{bmatrix}$$

Para la representación en espacio de estados tenemos las siguientes matrices una vez efectuado el desarrollo de las matrices anteriores, esto es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -w_1 & -\frac{r_1}{m_s} & \frac{k_{sf}}{m_s} & \frac{k_{sr}}{m_s} & -b_1 & -\frac{d_1}{m_s} & \frac{b_{sf}}{m_s} & \frac{b_{sr}}{m_s} \\ -\frac{r_1}{J} & -w_2 & \frac{r_2}{J} & -\frac{r_3}{J} & -\frac{d_1}{J} & -b_2 & \frac{d_2}{J} & -\frac{d_3}{J} \\ \frac{k_{sf}}{m_{af}} & \frac{r_2}{m_{af}} & -w_3 & 0 & \frac{b_{sf}}{m_{af}} & \frac{d_2}{m_{af}} & -b_3 & 0 \\ \frac{k_{sr}}{m_{ar}} & -\frac{r_3}{m_{ar}} & 0 & -w_4 & \frac{b_{sr}}{m_{ar}} & -\frac{d_3}{m_{ar}} & 0 & -b_4 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Mediante la Parametrización conveniente tenemos que:

- Para los términos diagonal

$$w_1 = \frac{k_{sf} + k_{sr}}{m_s} ; w_2 = \frac{l_f^2 k_{sf} + l_r^2 k_{sr}}{J} ; w_3 = \frac{k_{sf} k_{sf}}{m_{af}} ; w_4 = \frac{k_{sf} k_{sr}}{m_{ar}}$$

$$b_1 = \frac{b_{sf} + b_{sr}}{m_s} ; b_2 = \frac{l_f^2 b_{sf} + l_r^2 b_{sr}}{J} ; b_3 = \frac{b_{sf}}{m_{af}} ; b_4 = \frac{b_{sr}}{m_{ar}} \quad (4.7)$$

- Para las variables parametrizadas

$$r_1 = l_f k_{sf} - l_r k_{sr} ; r_2 = l_f k_{sf} ; r_3 = l_r k_{sr}$$

$$d_1 = l_f b_{sf} - l_r b_{sr} ; d_2 = l_f b_{sf} ; d_3 = l_r b_{sr} \quad (4.8)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{k_{yf}}{m_{af}} & 0 \\ 0 & -\frac{k_{yr}}{m_{ar}} \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_s} & \frac{1}{m_s} \\ \frac{l_f}{J} & -\frac{l_r}{J} \\ \frac{1}{m_{af}} & \frac{1}{m_{af}} \\ \frac{1}{m_{ar}} & \frac{1}{m_{ar}} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Para el modelo de la suspensión de un cuarto de vehículo las matrices de estado vienen dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_s}{m_s} & \frac{k_s}{m_s} & -\frac{b_s}{m_s} & \frac{b_s}{m_s} \\ \frac{k_s}{m_a} & -\frac{k_s k_t}{m_a} & \frac{b_s}{m_a} & -\frac{b_s}{m_a} \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_a} \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_s} \\ \frac{1}{m_a} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Capítulo 5

Diseño del Control Mixto H_2/H_∞ : un acercamiento con LMI

5.1 Introducción

El objetivo del problema en la síntesis del control mixto H_2/H_∞ es tratar el problema de control óptimo H_2 y H_∞ como problemas separados pero en un mismo espacio de estados unificado. Este método mixto provee un controlador que combina el criterio de desempeño cuadrático H_2 para rechazar perturbaciones con el criterio de desempeño H_∞ para obtener la máxima robustez contra incertidumbres desestabilizadoras. Esto significa, que se busca el controlador que minimice el índice de desempeño H_2 el cual se obtiene de un controlador H_2 , [10]. El control H_2 está diseñado para obtener un buen desempeño en términos de perturbaciones, sin embargo su desempeño no se puede garantizar en presencia de perturbaciones. El control H_∞ garantiza estabilidad robusta y buen desempeño nominal en presencia de incertidumbres, esto resulta en un controlador conservativo.

5.2 Demostración de la Unicidad del Controlador Óptimo H_2/H_∞

El sistema general de control mostrado en la Figura 5.1, donde w es una entrada de ruido Gaussiano, d es una entrada de energía acotada, z y e son salidas controladas (posiblemente ficticias). Para fines de este análisis se asume que no existe relación entre w y d o z y e . La salida medida es y y la ley de control que se aplica es $u = K(s)y$.

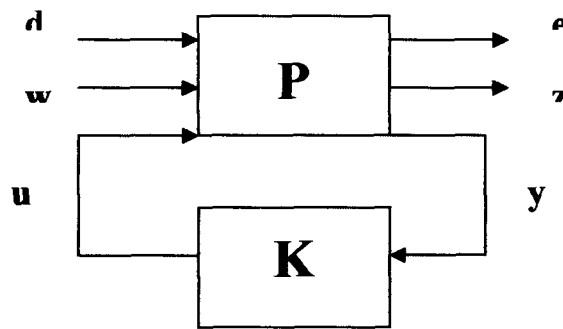


Figura 5.1: Problema General de Optimización Mixto H_2/H_∞

El problema implica diseñar un controlador $K(s)$ tal que la función de transferencia desde w a z tenga ganancia mínima para mantener la ganancia de la función de transferencia desde e a d por debajo de algún valor predeterminado. Esto significa el problema H_2 es el problema base y el problema H_∞ es el problema de restricción.

La planta completa $P(s)$ se forma de una planta $G(s)$ aumentada por funciones de transferencia de peso sobre las entradas d y w , y las salidas e y z . La forma general del sistema es

$$\begin{bmatrix} e \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{ed} & P_{ew} & P_{eu} \\ P_{zd} & P_{zw} & P_{zu} \\ P_{yd} & P_{yw} & P_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Este sistema se puede reducir a dos problemas separados: el problema H_2 , el cual implica encontrar un controlador que internamente estabilice $K(s)$ de forma que se minimice $\|T_{zw}\|_2$ donde

$$T_{zw} = P_{zw} + P_{zu} K (I - P_{yu} K)^{-1} P_{yw} \quad (5.2)$$

y el problema H_∞ , la cual consiste en encontrar un controlador que internamente minimice $K(s)$ la cual satisface $\|T_{ed}\|_\infty \leq \gamma$ para algún γ donde

$$T_{ed} = P_{ed} + P_{eu} K (I - P_{yu} K)^{-1} P_{yd} \quad (5.3)$$

El propósito de este análisis es demostrar que para que el problema de control mixto H_2/H_∞ pueda ser atacado mediante LMI debe ser un problema que cumpla con las características de optimización convexa. Para simplificar la discusión, se tienen las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} \gamma &= \inf_{K \text{ estable}} \|T_{ed}\|_\infty \\ \alpha &= \inf_{K \text{ estable}} \|T_{zw}\|_2 \end{aligned}$$

$$K_{2opt} = \text{el único } K(s) \text{ que hace } \|T_{zw}\|_2 = \alpha$$

$$\bar{\gamma} = \|T_{ed}\|_\infty \text{ cuando } K(s) = K_{2opt} \quad (5.4)$$

K_{mix} = la solución al problema H_2/H_∞ para algún γ

$$\gamma^* = \|T_{ed}\|_\infty \text{ cuando } K(s) = K_{mix}$$

$$\alpha^* = \|T_{zw}\|_2 \text{ cuando } K(s) = K_{mix}$$

Para caracterizar la estabilidad de los problemas individuales, definimos

$$P_2 = \begin{bmatrix} P_{zw} & P_{zu} \\ P_{yw} & P_{yu} \end{bmatrix} \quad P_\infty = \begin{bmatrix} P_{ed} & P_{eu} \\ P_{yd} & P_{yu} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

En base a lo anterior, se asume que P_{yu} es estabilizable y P_2, P_∞ y P se forman aumentando la planta $G(s)$ con funciones de transferencia de peso estables a la entrada de d y w , así como salidas e y z . De lo cual, los siguientes postulados son equivalentes:

- i. K estabiliza P_{yu}
- ii. K estabiliza P_2
- iii. K estabiliza P_∞
- iv. K estabiliza P

De esta forma el problema de control mixto H_2/H_∞ se puede formular como: encontrar un controlador estable $K(s)$ el cual minimice la norma-2 de T_{zw} y satisfaga la restricción de que la norma- ∞ de T_{ed} es menor o igual que algún γ . Este es un problema de programación matemática, pero el conjunto de todos los controladores admisibles no es convexo.

5.2.1 Parametrización de Youla

A través de la aplicación de la Parametrización de Youla para todos los controladores estables, el problema de control mixto H_2/H_∞ puede transformarse en un problema de programación convexa. Para esto es necesario definiendo la doble factorización copríma de P_{yu} mediante

$$P_{yu} = NM^{-1} = \begin{matrix} \bar{} & \bar{} \\ \bar{} & \bar{} \end{matrix}^{-1} \begin{matrix} \bar{} & \bar{} \\ \bar{} & \bar{} \end{matrix}$$

y además

$$\begin{bmatrix} \bar{Y} & -\bar{X} \\ -\bar{N} & \bar{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & X \\ N & Y \end{bmatrix} = I \quad (5.6)$$

De esto, el conjunto de todas las K que estabilizan P_{yu} está parametrizada sobre $Q \in H_\infty$ mediante

$$K = (X + MQ)(Y + NQ)^{-1} = \left(\bar{Y} + Q\bar{N} \right)^{-1} \left(\bar{X} + Q\bar{M} \right) \quad (5.7)$$

Si hacemos $K_0 = K(Q=0) = XY^{-1} = \bar{Y}^{-1} \bar{X}$ y definiendo

$$J = \begin{bmatrix} K_0 & -\bar{Y}^{-1} \\ Y^{-1} & -Y^{-1}N \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Nótese que el término común a T_{zw} y T_{ed} esta expresado por

$$K(I - P_{yu}K)^{-1} = -(X + MQ)\bar{M} \quad (5.9)$$

Por lo cual, podemos expresar la ecuación de T_{zw} como

$$T_{zw} = T_{12} + T_{22}QT_{32} \quad (5.10)$$

donde

$$\begin{aligned} T_{12} &= P_{zw} - P_{zu}X\bar{M}P_{yw} \\ T_{22} &= -P_{zu}M \\ T_{23} &= \bar{M}P_{yw} \end{aligned} \quad (5.11)$$

De la misma forma, podemos expresar la ecuación para T_{ed} como

$$T_{ed} = T_{1\infty} + T_{2\infty}QT_{3\infty} \quad (5.12)$$

donde

$$\begin{aligned} T_{1\infty} &= P_{ed} - P_{eu}X\bar{M}P_{yd} \\ T_{2\infty} &= -P_{eu}M \\ T_{3\infty} &= \bar{M}P_{yd} \end{aligned} \quad (5.13)$$

5.2.2 Formulación del Problema de Control Mixto mediante Optimización Convexa

Mediante el análisis realizado con Parametrización de Youla se puede formular el problema como un programa convexo:

Encontrar una $Q \in H_2$ que satisfaga

$$\begin{aligned} \alpha &= \inf \left(\|T_{12} + T_{22}QT_{32}\|_2 \right) \\ \text{sujeto a } &\|T_{1\infty} + T_{2\infty}QT_{3\infty}\|_\infty \leq \gamma \end{aligned} \quad (5.14)$$

Ahora si $T_{zw} \in H_2$, entonces $\|T_{zw}(Q)\|_2$ es estrictamente convexa de Q sobre H_2 .

Podemos establecer:

Sea dada $\gamma > \gamma$. El controlador que satisface

$$\begin{aligned} \alpha &= \inf \|T_{zw}\|_2 \\ \text{sujeto a } &\|T_{ed}\|_\infty \leq \gamma \end{aligned} \quad (5.15)$$

es único y por ende óptimo.

5.3 Diseño del Control basado en el criterio Mixto H_2/H_∞

Sea la planta lineal P con entrada u , perturbación w , salidas de desempeño z_∞ y z_2 , salida de retroalimentación y . La entrada es generada mediante retroalimentación a la salida, usando el controlador K . La señal z_∞ es el desempeño asociado con la restricción H_∞ , la señal z_2 esta asociada con el criterio H_2 . Obsérvese que en base a la Figura 5.2, las señales de salida e y z corresponde a z_∞ y z_2 respectivamente, y la señal $d=0$.

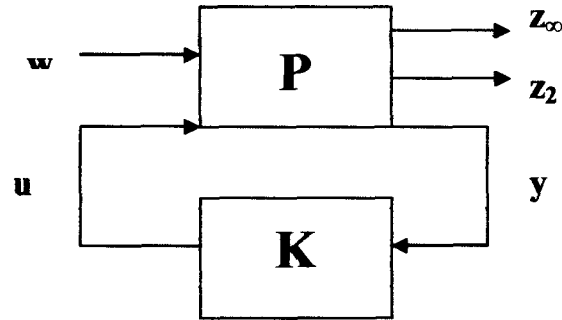


Figura 5.2: Problema de Optimización Mixto H_2/H_∞ , para el caso de estudio

La Representación en Espacio de Estados (SSR, por sus siglas en inglés) del sistema controlado se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\
 z_\infty &= C_1 x + D_{12} u \\
 z_2 &= C_2 x + D_{22} u \\
 y &= C_3 x + D_{31} w
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

donde (A, B_2) se asume como estabilizable y (A, C_3) se asume como detectable. En la Figura 5.3 se presenta el modelo de control mixto.

Estas condiciones aseguran la existencia de controladores estables, y la existencia de una K que estabiliza el problema H_2 que ha sido una condición necesaria y suficiente para K que estabilizan al problema H_∞ . El controlador K en este trabajo se obtiene utilizando la herramienta de optimización numérica de LMI.

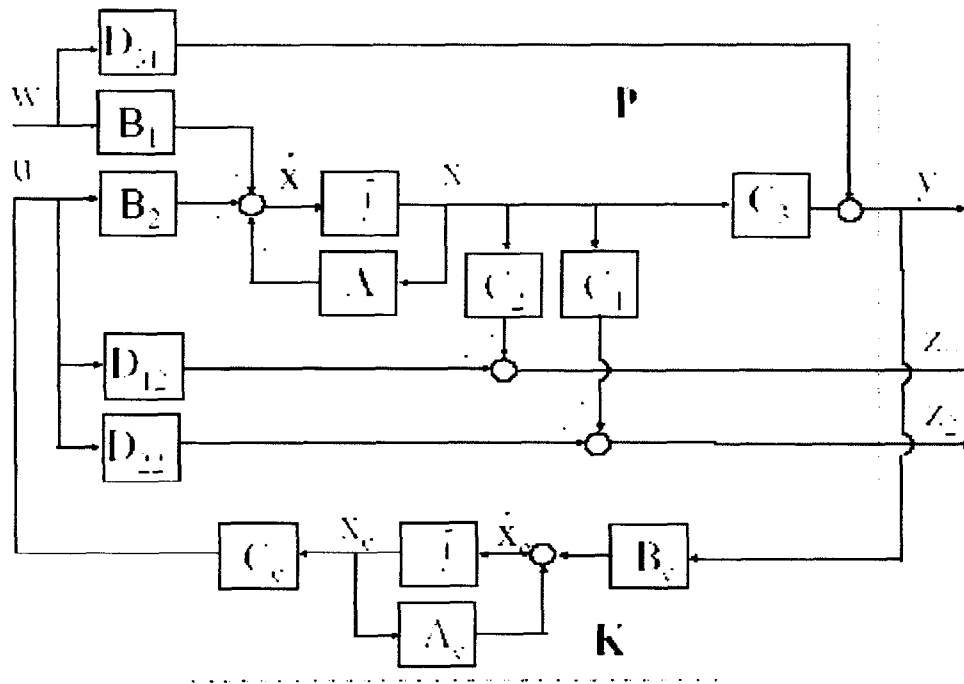


Figura 5.3: Diseño de Control Mixto del sistema para lazo cerrado

En la sección 5.2 se estableció que el objetivo de control mixto H_2/H_∞ es minimizar la norma-2 en lazo cerrado de la función de transferencia T_{z_2w} , mientras se restringe la norma- ∞ de la función de transferencia $T_{z_{\infty}w}$ para valores menores a ciertos niveles especificados mediante criterios de diseño.

El problema se establece como sigue:

Para el sistema P , encontrar un controlador K admisible el cual satisfaga los siguientes criterios de diseño:

- El sistema en lazo cerrado debe ser asintóticamente estable
- La función de transferencia $T_{z_{\infty}w}$ en lazo cerrado desde w a z_{∞} satisface la restricción:

$$\|T_{z_{\infty}w}(s)\|_{\infty} < \gamma \quad (5.17)$$

para un valor positivo real γ .

- La función de transferencia T_{z_2w} en lazo cerrado desde w a z_2 debe ser minimizada:

$$\min \|T_{z_2w}(s)\|_2 \quad (5.18)$$

5.4 Formulación del Problema Mixto en términos de LMI

En aplicaciones del mundo real, la síntesis del problema H_∞ no captura todas las especificaciones de diseño. Para esto, la atenuación de ruido o la regulación contra lo estocástico de perturbaciones se expresan generalmente en términos del problema H_2 . De manera similar, la síntesis pura de H_∞ fuerza la estabilidad de lazo cerrado y no permite la colocación directa de los polos de lazo cerrado en regiones específicas del plano complejo izquierdo. Dado que la colocación de polos está relacionado a la respuesta en el tiempo del sistema retroalimentado, es deseable imponer restricciones de amortiguamiento y estabilización de la dinámica en lazo cerrado. Esto hace a la síntesis de multiobjetivos altamente deseable en la práctica, y la teoría de LMIs ofrece una herramienta poderosa para atacar este tipo de problemas.

Para realizar la formulación del problema mixto en términos de LMIs, se considera el siguiente SSR:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z_\infty &= C_\infty x + D_{\infty 1} w + D_{\infty 2} u \\ z_2 &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \\ y &= C_y x + D_{y1} w \end{aligned} \quad (5.19)$$

y la SSR de la planta P y el controlador K , respectivamente

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= A_{K\zeta} + B_{Ky} \\ \dot{u} &= C_{K\zeta} + D_{Ky} \end{aligned} \quad (5.20)$$

donde la correspondiente SSR de lazo cerrado se expresa como:

$$\begin{aligned} x_{cl} &= A_{cl}x_{cl} + B_{cl}w \\ z_\infty &= C_{cl}x_{cl} + D_{cl}w \\ z_2 &= C_{cl}x_{cl} + D_{cl2}w \end{aligned} \quad (5.21)$$

Los objetivos de diseño en términos de LMI se establecen como:

5.4.1 Formulación del Desempeño H_∞ en LMI

La ganancia de lazo cerrado RMS desde w a z_∞ no debe sobrepasar γ y si y solo si existe una matriz simétrica X_∞ tal que:

$$\begin{bmatrix} A_{cl}X_\infty + X_\infty A_{cl}^T & B_{cl} & X_\infty C_{cl1}^T \\ B_{cl}^T & -I & D_{cl1}^T \\ C_{cl1}X_\infty & D_{cl1} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.22)$$

$$X_\infty > 0$$

5.4.2 Formulación del Desempeño H_2 en LMI

La norma-2 de la función de transferencia en lazo cerrado desde w a z_2 no debe exceder v si y sólo si $D_{cl2} = 0$ y existe dos matrices simétricas χ_2 y Q tal que:

$$\begin{bmatrix} A_{cl}\chi_2 + \chi_2 A_{cl}^T & B_{cl} \\ B_{cl}^T & I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} Q & C_{cl2}\chi_2 \\ \chi_2 C_{cl2}^T & \chi_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (5.23)$$

$$\text{Trace}(Q) < v^2$$

5.5 Reubicación de Polos en Regiones LMI

El criterio de Estabilidad es un requerimiento mínimo para los sistemas de control. Un buen controlador, para ciertas situaciones, debe responder en forma rápida bajo condiciones de amortiguamiento. Una manera de garantizar buen comportamiento es colocando los polos de lazo cerrado en ciertas regiones del plano complejo. Esta técnica es la conocida como ubicación de polos Regional, en contraste con la reubicación de polos, donde los polos se especifican en ciertas localidades del plano complejo, [11].

Por ejemplo, respuesta rápida, buen amortiguamiento y la dinámica en el controlador pueden ser manejados a través de confinar los polos en intersecciones del mitad de plano, un sector y un disco.

5.5.1 Antecedentes

Sea \mathbf{R} y \mathbf{C} los conjuntos de números real y complejo, respectivamente. La notación \mathbf{C}^- se refiere la mitad de la izquierda del plano complejo.

Producto Konecker.

El producto Kronecker para dos matrices A y B es una matriz C con un bloque genérico

$C_{ij} = A_{ij}B$, esto es:

$$A \otimes B = [A_{ij} B]_{ij} \quad (5.24)$$

Las propiedades más comunes del producto de Kronecker son:

$$\begin{aligned} 1 \otimes A &= A \\ (A + B) \otimes C &= A \otimes C + B \otimes C \\ (A \otimes B)(C \otimes D) &= AC \otimes BD \\ (A \otimes B)^T &= A^T \otimes B^T \\ (A \otimes B)^{-1} &= A^{-1} \otimes B^{-1} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Los eigenvalores de $A \otimes B$ son el producto de $\lambda_i(A)\lambda_j(B)$ de los eigenvalores de A y B . Como resultado, el producto Kronecker de dos matrices positivas es una matriz positiva. Finalmente, los valores singulares de $A \otimes B$ son el producto de $\sigma_i(A)\sigma_j(B)$ de los valores singulares de A y B .

5.5.2 Definición de Regiones LMI

Una región LMI es cualquier subconjunto D del plano complejo que puede ser definido como:

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} : L + zM + \bar{z}M < 0 \right\} \quad (5.26)$$

donde L y M son matrices reales tal que $L=L^T$. La función de la matriz evaluada es:

$$f_D(z) = L + zM + \bar{z}M \quad (5.27)$$

es llamada la función característica de D .

A continuación se presentan algunos ejemplos de regiones LMI:

. Plano vertical $h_1 < x < h_2$:

$$f_D(z) = \begin{bmatrix} 2h_1 - (z + \bar{z}) & 0 \\ 0 & (z + \bar{z}) - 2h_2 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

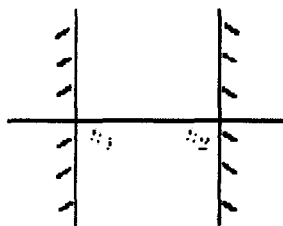


Figura 5.4: Región LMI para el Plano Vertical

. Disco centrado en $(-q, 0)$ con radio "r":

$$f_D(z) = \begin{bmatrix} -r & q+z \\ q+z & -r \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

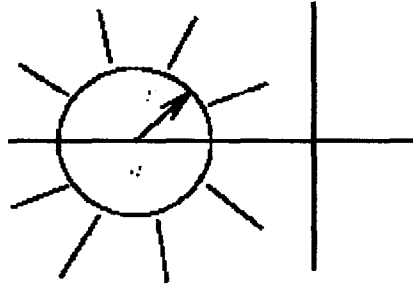


Figura 5.5: Región LMI para el Disco centrado en $(-q, 0)$ con radio "r"

. Sector cónico con el vértice en el origen y ángulo interno 2θ :

$$f_D(z) = \begin{bmatrix} \text{sen}\theta \begin{pmatrix} z + \bar{z} \\ z - \bar{z} \end{pmatrix} & \text{cos}\theta \begin{pmatrix} z - \bar{z} \\ z + \bar{z} \end{pmatrix} \\ \text{cos}\theta \begin{pmatrix} z - \bar{z} \\ z + \bar{z} \end{pmatrix} & \text{sen}\theta \begin{pmatrix} z + \bar{z} \\ z - \bar{z} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

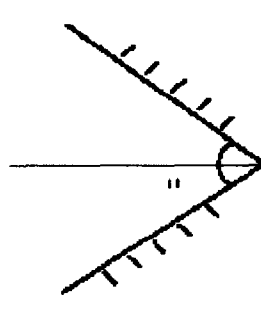


Figura 5.6: Región LMI para el Sector cónico con el vértice en el origen y ángulo interno

Aspectos clave acerca de regiones LMI incluyen:

- . Las intersecciones de regiones LMI son regiones LMI.
- . Cualquier región convexa simétrica con respecto al eje real puede aproximarse mediante una región LMI para cierta precisión deseada.
- . Una matriz real A es D -estable, si y solo si una matriz X simétrica existe tal que:

$$M_D(A, X) = L \otimes X + M \otimes (XA) + M^T \otimes (A^T X) < 0 \quad (5.31)$$

$$X > 0$$

Este resultado se puede ver como una generalización del teorema de Lyapunov ya que para la región $f_D(z) = z + \bar{z} < 0$, usando la ecuación anterior se reduce a:

$$1 \otimes (XA) + 1 \otimes (A^T X) = A^T X + XA < 0 \quad (5.32)$$

$$X > 0$$

5.5.3 Intersecciones de Regiones LMI

En ciertas aplicaciones, las regiones LMI a menudo se especifican como la intersección de regiones elementales, como sectores cónicos, discos o mitad de planos verticales.[12]

Dadas las regiones LMI D_1, \dots, D_N la intersección:

$$D = D_1 \cap \dots \cap D_N \quad (5.33)$$

tiene la función característica:

$$f_D(z) = \text{diag} \left(f_{D_i}(z) \right)_{i=1}^N \quad (5.34)$$

Como resultado, las regiones LMI incluyen todas las regiones de polígonos que son convexas y simétricas con respecto al eje real. De esta forma, cada región puede obtenerse como la intersección de sectores cónicos, líneas verticales y horizontales.

5.5.4 Propuesta para la Unión de Regiones LMI

Dado que cada región LMI es un subconjunto D de el plano complejo [13], basándonos en la teoría de conjuntos, sabemos que:

$$A \cup B = A + B - A \cap B \quad (5.35)$$

para dos conjuntos A, B.

Si generalizamos la ecuación anterior para obtener una representación de la Unión de Regiones LMI en términos de intersecciones tenemos:

$$D = D_1 \cup \dots \cup D_N \quad (5.36)$$

y a su vez:

$$D_1 \cup \dots \cup D_N = (D_1 + \dots + D_N) - (D_1 \cap \dots \cap D_N) \quad (5.37)$$

cuya función característica es:

$$f_D(z) = \sum_{i=1}^N f_D^i - \underset{i=1}{\text{diag}}(f_D^i(z)) \quad (5.38)$$

Sin embargo la definición anterior no nos garantiza que la Unión de Regiones LMI sea Convexa en todos los casos, para eso es conveniente proponer la Unión Parcial de Polos, sobre la región de Estabilidad que garantice que la región resultante sea Convexa.

5.6 Formulación del Problema de Control Mixto Subóptimo en términos LMI

Por simplicidad para la notación LMI, buscamos una matriz de Lyapunov sencilla, de donde:

$$\chi = \chi_\infty = \chi_2 = \chi_{\text{pol}} \quad (5.39)$$

que produce tres conjuntos de restricciones. Factorizando χ como

$$\begin{aligned} \chi &= \chi_1 \chi_2^{-1} \\ \chi_1 &= \begin{bmatrix} R & I \\ M^T & 0 \end{bmatrix} \\ \chi_2 &= \begin{bmatrix} 0 & S \\ I & N^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.40)$$

haciendo el cambio de variable en el controlador tenemos:

$$\begin{aligned} B_K &= NB_K + SB_2 D_K \\ C_K &= C_K M^T + D_K C_y R \\ A_K &= NA_K M^T + NB_K C_y R + SB_2 C_K M^T + S(A + B_2 D_K C_y)R \end{aligned} \quad (5.41)$$

donde la desigualdad sobre χ se puede representar fácilmente en términos de LMI para R , S , Q , A_K , B_K , C_K y D_K .

Esto nos conduce a la siguiente formulación de del problema de control subóptimo en términos de LMI para el caso de síntesis de control multi-objetivo:

Minimizar $\alpha\gamma^2 + \beta \text{Trace}(Q)$ sobre R, S, Q, A_K, B_K, C_K y D_K así como γ_2 satisfaciendo:

$$\begin{bmatrix} AR + RA^T & A_K^T + A + B_2 D_K C_y & B_1 + B_2 D_K D_{y1} & H \\ H & A^T S + SA + B_K C_y + C_y^T B_K^T & SB_1 + B_K D_{y1} & H \\ H & H & -I & H \\ C_\infty R + D_{\infty 2} C_K & C_\infty + D_{\infty 2} D_K C_y & D_{\infty 1} + D_{\infty 2} D_K D_{y1} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} Q & C_2 R + D_{22} C_K & C_2 + D_{22} D_K C_y \\ H & R & I \\ H & I & S \end{bmatrix} > 0 \quad (5.42)$$

$$\left[\lambda_{ij} \begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} + \mu_{ij} \begin{bmatrix} AR + B_2 C_K & A + B_2 D_K C_y \\ A_K & SA + B_K C_y \end{bmatrix} + \mu_{ji} \begin{bmatrix} RA^T + C_K^T B_2^T & A_K^T \\ (A + B_2 D_K C_y)^T & A^T S + C_y^T B_K^T \end{bmatrix} \right]_{|i,j| \leq m} < 0$$

$$\text{Trace}(Q) < \gamma^2$$

$$\gamma^2 < \gamma_0^2$$

$$D_{21} + D_{22} D_K D_{y1} = 0$$

Dadas las soluciones óptimas γ^* , Q^* para este problema LMI, el desempeño de H_∞ y H_2

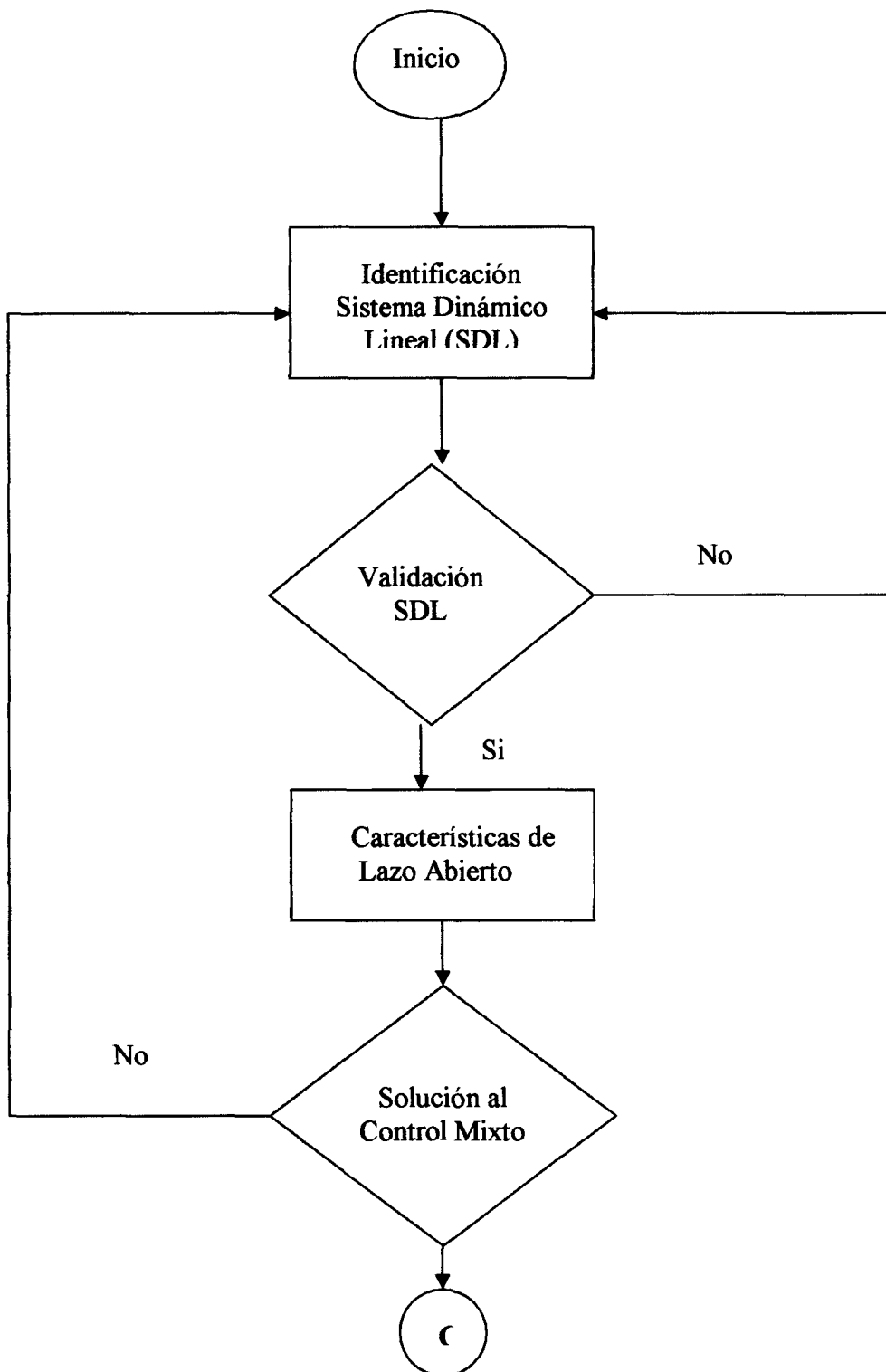
Para el caso de lazo cerrado es:

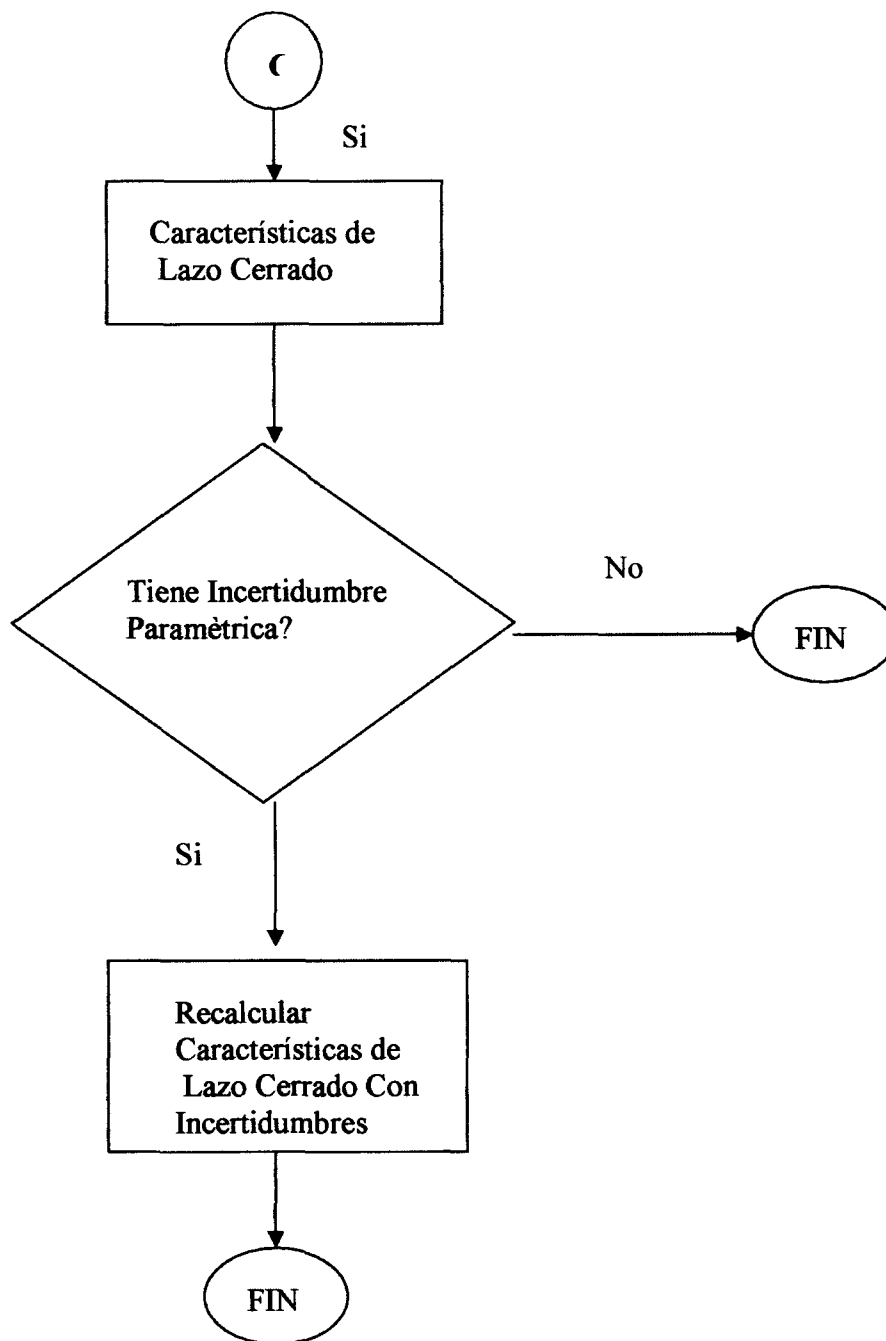
$$\|T_\infty\|_\infty \leq \gamma^*$$

$$\|T_2\|_2 \leq \sqrt{\text{Trace}(Q^*)}$$

5.7 Caso de Estudio para el modelo de Suspensión Activa en medio y un cuarto de vehículo aplicando Control Mixto

5.7.1 Algoritmo de Diseño del Control Mixto





El diagrama de flujo anterior corresponde a la lógica con se programó el caso de estudio del modelo para medio y un cuarto de vehículo, para las situaciones de incertidumbre paramétricas y sin incertidumbres paramétricas. Este algoritmo se programó en el Toolbox LMI de MATLAB. Véase los anexos A y B, que contienen el listado del programa.

5.7.2 Caso Estudio Modelo de un Cuarto de Vehículo sin Incertidumbre

La simulación realizada para el caso de un Cuarto de Vehículo, se hizo en MATLAB utilizando como apoyo el ToolBox de LMI.

En la Figura 5.7, se muestra el Diagrama de Bode en Lazo Abierto del Sistema Dinámico esto considerando que el diseño del controlador se hace partiendo de esta herramienta para ver las regiones de atenuación, así como los sectores donde se presentan frecuencias características del modelo. Para las variables de estado de velocidad.

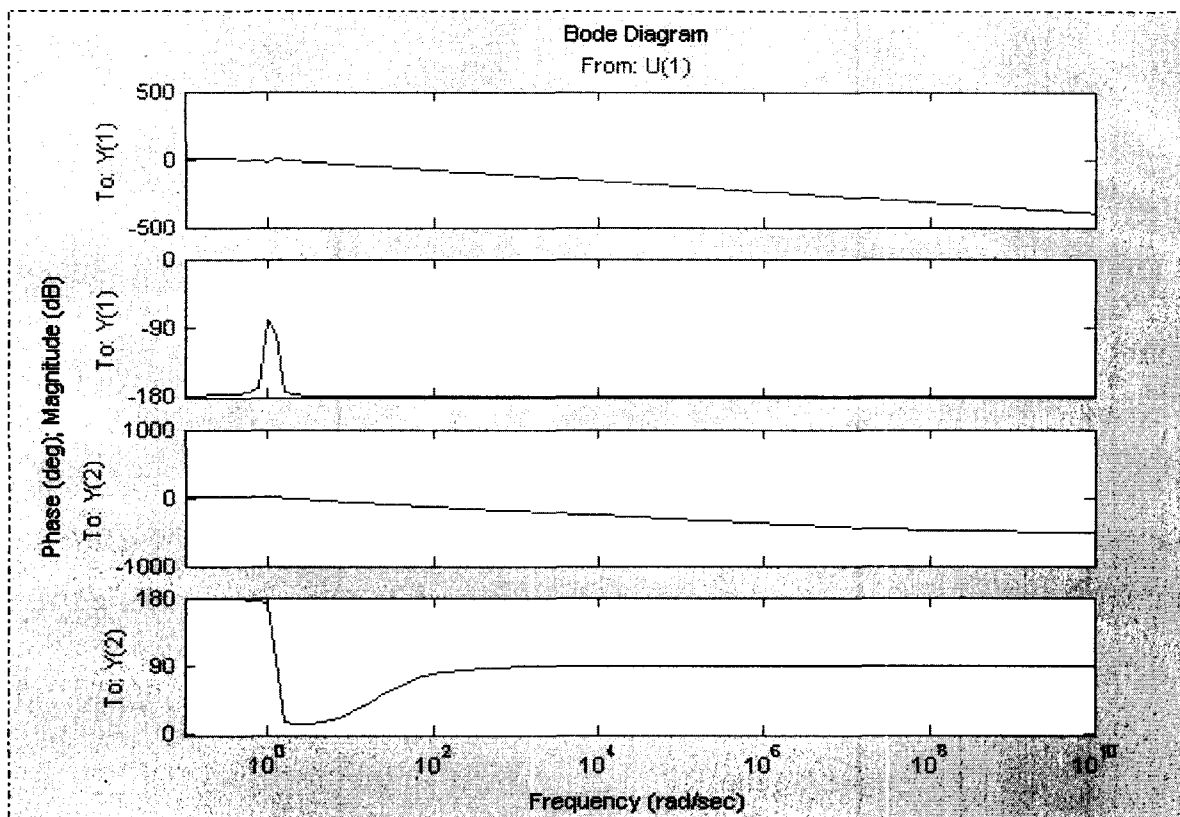


Figura 5.7: Diagrama de Bode en Lazo Abierto del Modelo de un Cuarto de Vehículo Sin Incertidumbre

En la Figura 5.8, se representa la Curva de Compromiso o de Pareto como herramienta para ver el grado de incertidumbre con respecto al desempeño del sistema. Así mismo se hace un comparativo entre los valores reales del modelo y los obtenidos en simulación.

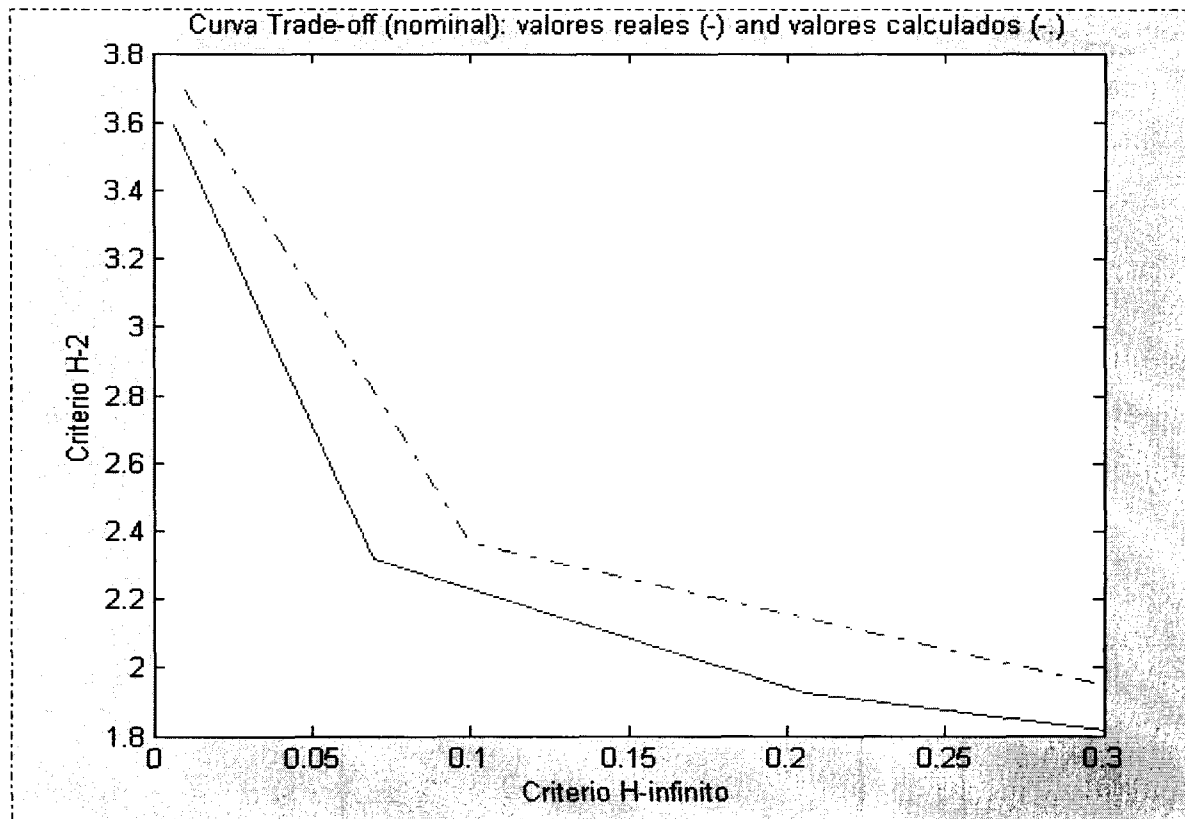


Figura 5.8: Curva de Compromiso o Pareto para modelar el criterio H_2/H_∞ en el modelo de un Cuarto de Vehículo Sin Incertidumbre

Una vez realizado el proceso de iteración e iterado con respecto a varios valores de gamma como una medida de minimizar la norma infinita, se obtiene la respuesta del modelo nominal en lazo cerrado.

Para esto en la Figura 5.9 se hace presenta la respuesta del sistema en lazo cerrado ante una entrada impulso. Sin embargo, dado el tipo de sistema dinámico que estamos utilizando es más conveniente observar el tipo de respuesta ante una entrada impulso dado que en el modelo en realidad reacciona a ese tipo de entradas en el fenómenos físico.

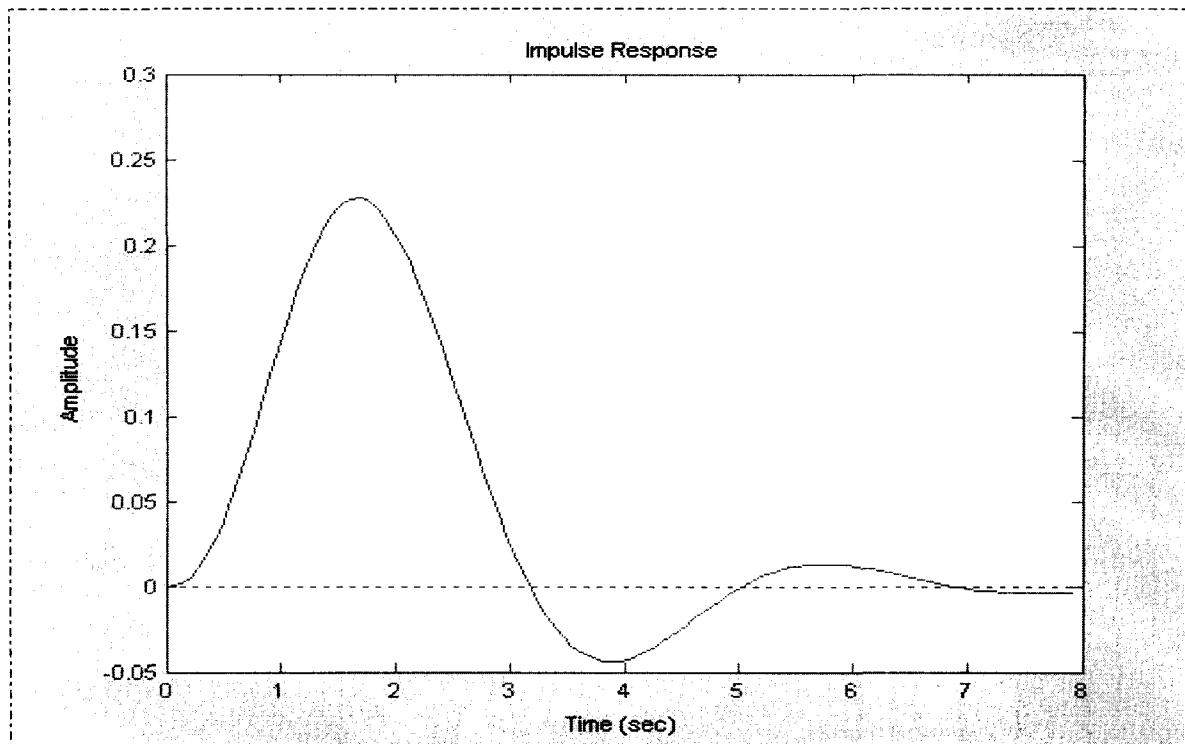


Figura 5.9: Respuesta ante entrada impulso para el sistema en Lazo Cerrado sin Incertidumbres

5.7.3 Caso Estudio Modelo de Medio Vehículo sin Incertidumbre

La simulación del problema de Medio Vehículo muestra resultados interesantes dado que los valores del sistema nominal no están normalizados en un rango de (0,1) esto implica que el método computacional no arroje valores en la ganancia de la norma infinita y cuadrada convincentes. Es necesario recordar que el método computacional que modela esta sistema es el conocido como de punto interior. Este método propone normalizar los variables de decisión en términos que la suma de todos los valores sea de uno.

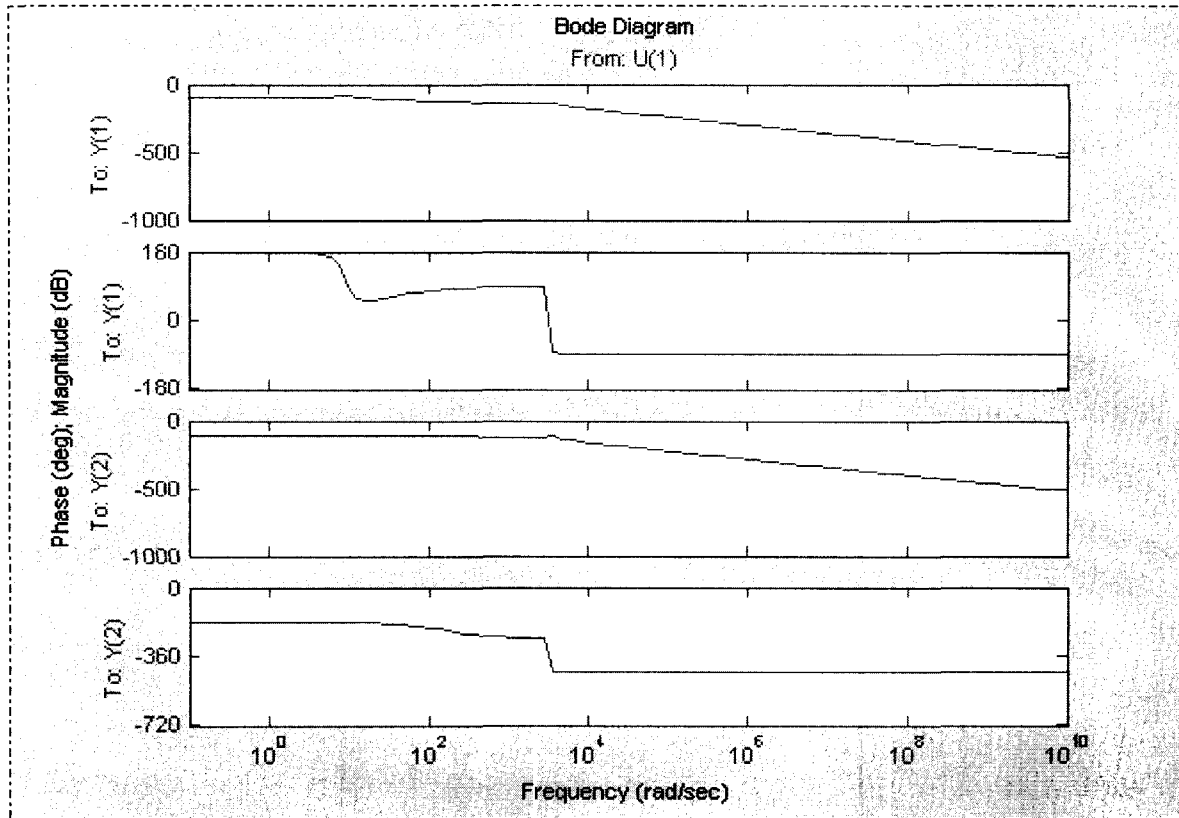


Figura 5.10: Diagrama de Bode en Lazo Abierto del Modelo de Medio Vehículo Sin Incertidumbre

La Figura 5.10 presenta el Diagrama de Bode en Lazo Abierto para el modelo de medio vehículo obsérvese que se presentan mas puntos singulares ya que este modelo tiene mas grados de libertad, con respecto al modelo de un cuarto de carro.

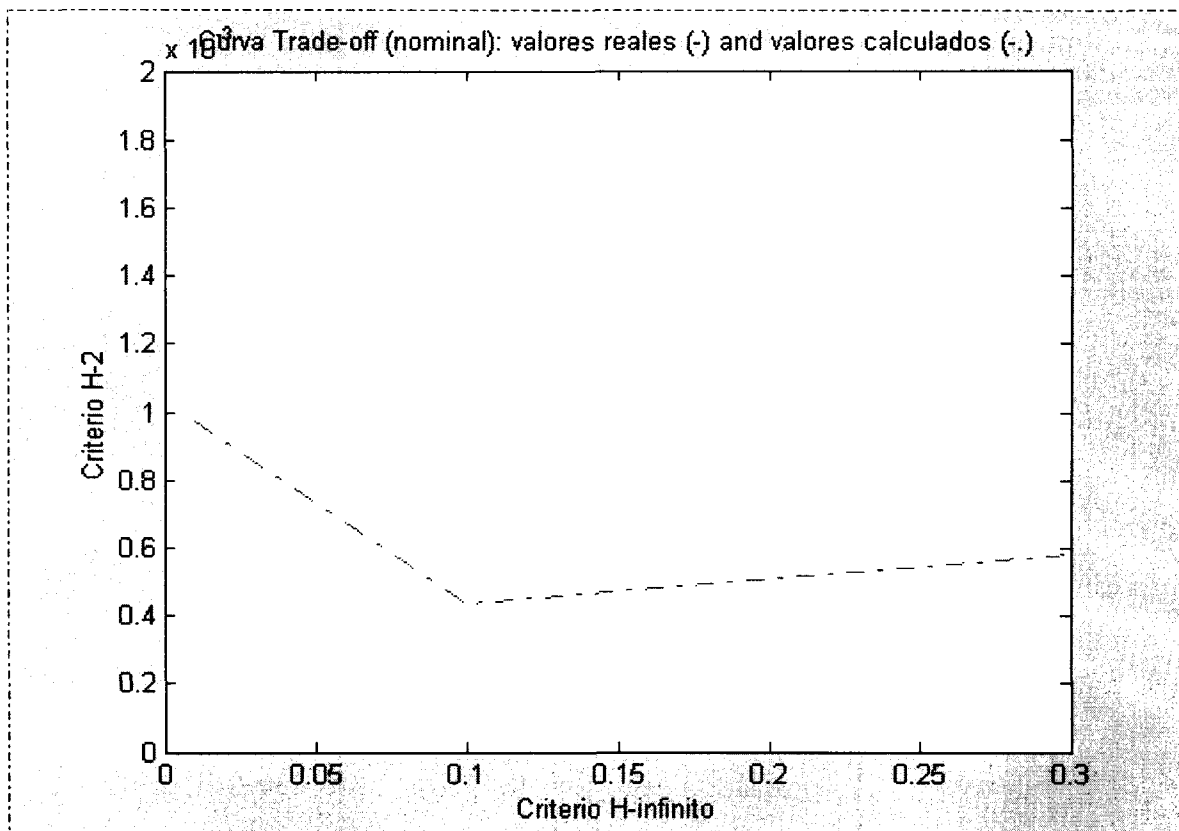


Figura 5.11: Curva de Compromiso o Pareto para modelar el criterio H_2/H_∞ en Medio Vehículo Sin Incertidumbre

La curva de compromiso, de la Figura 5.11, que se presenta nos establece que sería conveniente normalizar los datos nominales, en términos de hacer más notable el valor de la ganancia en la norma infinita.

La Figura 5.12, modela la respuesta del sistema en lazo cerrado ante una entrada impulso. Nótese que se presenta una región sombreada, esto es por el hecho de que el método de punto interior causa variabilidad cuando los datos no están convenientemente normalizados.

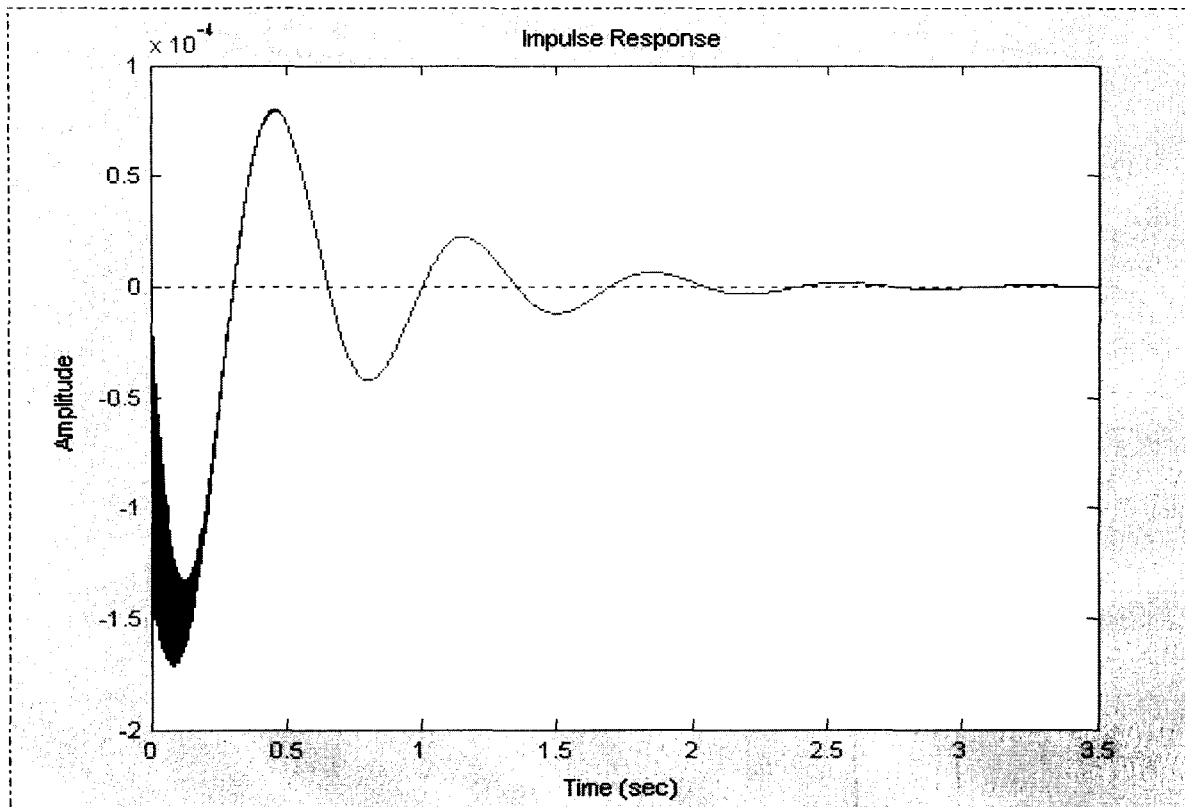


Figura 5.12: Respuesta ante entrada impulso para el sistema en Lazo Cerrado para Pitch Sin Incertidumbre

Capítulo 6

Diseño del Control Mixto H_2/H_∞ para Estructuras de Suspensiones Activas con Incertidumbre, utilizando Desigualdades Lineales Matriciales (LMI)

6.1 Introducción

Un buen sistema de control debe satisfacer varios objetivos simultáneamente como que sea robusto ante incertidumbres, que tenga tiempo de respuesta rápido y buen desempeño al momento de realizarse la retroalimentación con fines de control. En este capítulo se ataca el problema para el caso en el que existe incertidumbre en el modelo dinámico de un cuarto de vehículo. Para esto se explora el potencial de las LMI como un acercamiento a la solución del problema de control mixto. En términos de politopos que modelan las incertidumbres en condiciones de LMI, [14].

6.2 Modelación del Control Mixto de Retroalimentación de Estados con Incertidumbre

Sea el sistema dinámico continuo Lineal Invariante en el Tiempo descrito por las siguientes ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z_\infty(t) &= C_\infty x(t) + D_{\infty 1} w(t) + D_{\infty 2} u(t) \\ z_2(t) &= C_{12} x(t) + D_{12} u(t) \end{aligned} \quad (6.1)$$

donde:

$x \in \mathfrak{R}$: Estados

$u \in \mathfrak{R}$: Señal de Control

$z_\infty \in \mathfrak{R}$ y $z_2 \in \mathfrak{R}$: Vectores de Salida Controlados

ademas

$w \in \mathfrak{R}$ representa la señal exógena (esto puede ser señales de referencia, señales de perturbación, ruido de los sensores...). Siendo el par de elementos (A, B_1) parte de un politopo con la forma:

$$\begin{aligned} A &\in D_A, B_2 \in D_{B_2} \\ D_A &= \left\{ A; A = \sum_{i=1}^N \lambda_i A_i, \lambda \geq 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \right\} \\ D_{B_2} &= \left\{ B_2; B_2 = \sum_{j=1}^N \mu_j B_{2j}, \mu \geq 0, \sum_{j=1}^N \mu_j = 1 \right\} \end{aligned} \quad (6.2)$$

La naturaleza de la señal de control que se presenta para lograr la retroalimentación de estados es $u=Kx$ que una vez sustituida en el modelo de (6.1) genera el sistema en lazo cerrado:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{cl}x(t) + B_{cl}w(t) \\ z_\infty(t) &= C_{cl\infty}x(t) + D_{cl\infty}w(t) \\ z_2 &= C_{cl2}x(t) \end{aligned} \quad (6.3)$$

donde:

$$\begin{aligned} A_{cl} &= A + B_2K, \quad B_{cl} = B_1, \quad C_{cl\infty} = C_\infty + D_{\infty 2}K \\ D_{cl\infty} &= D_{\infty 1}, \quad C_{cl2} = C_2 + D_{22}K, \quad D_{cl2} = 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

y las funciones de transferencia de lazo cerrado desde w a z son:

$$\begin{aligned} T_{wz\infty} &= C_{cl\infty}(sI - A)B_{cl} + D_{cl\infty} \\ T_{wz2} &= C_{cl2}(sI - A)B_{cl} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Los objetivos de control y especificaciones a considerar incluyen desempeño H_∞ y H_2 . En base a esto la motivación para usar estas medidas de desempeño en forma mixta son:

- El desempeño H_∞ es conveniente cuando se trata de hacer un control robusto para modelar la incertidumbre del sistema y expresar las especificaciones frecuenciales como ancho de banda, frecuencia de ganancia pequeña, etc.
- El desempeño H_2 es útil para manejar aspectos estocásticos (ruido en la medición, perturbaciones aleatorias, etc.)

El sistema lineal incierto descrito por (6.1) y (6.2) es estable, $\|T_{z,w}\|_\infty < \gamma$ y $\|T_{z,w}\|_2^2 < \text{Trace}(Y)$, si y solo si existen matrices positivas $X = X^T > 0$, $Y = Y^T > 0$ y L tal que:

$$\begin{bmatrix} U(X,L) + U(X,L)^T & B_1 & V(X,L)^T \\ B_1^T & -I & D_{\infty 1}^T \\ V(X,L) & D_{\infty 1} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (6.6)$$

$$\begin{bmatrix} Y & C_2 X + D_{22} L \\ (C_2 X + D_{22} L)^T & X \end{bmatrix} > 0 \quad (6.7)$$

donde:

$$\begin{aligned} U(X,L) &= AX + B_2 L \\ V(X,L) &= C_\infty X + D_{\infty 2} L \end{aligned} \quad (6.8)$$

6.3 Modelación de la Incertidumbre Paramétrica

La mayor parte de los diseños de control están basados en el uso del diseño de modelos. La relación entre modelo y realidad presenta la característica de ser delicado y complejo. Un modelo matemático provee de un mapeo de las entradas en salidas. La calidad de un modelo depende de qué tan cerca responde a la planta verdadera. Dado que ningún modelo responde exactamente a la naturaleza de la planta verdadera, necesitamos, al final de todo el mapeo de varios conjuntos. El término incertidumbre se refiere a las diferencias o errores entre los modelos y la realidad, y aquel mecanismo que se use para expresar errores se denominará representación de la incertidumbre.[15]

La incertidumbre paramétrica está cuantificada por el rango de valores paramétricos y posiblemente por la razón de variación de los parámetros. El rango de incertidumbre paramétrica se puede describir como una caja en el espacio paramétrico. Esto corresponde a casos donde cada incertidumbre o parámetro que varía en el tiempo p_i varía en los extremos por los valores \underline{p}_i y \bar{p}_i :

$$p_i \in \left[\underline{p}_i, \bar{p}_i \right] \quad (6.9)$$

Si $p = (p_1, \dots, p_n)$ es un vector de todos los valores inciertos, (6.9) delimita un gran rectángulo de el espacio de parámetros \mathcal{R}^n es llamada la caja de parámetros.

Para el caso de estudio que modela al sistema dinámico de un cuarto de vehículo su caja de parámetros se expresaría como en la Figura 6.1, donde se considera el sistema con incertidumbres en la constante del resorte k y las constante de amortiguamiento b .

$$k \in [k_1, k_2] \quad b \in [b_1, b_2] \quad (6.10)$$

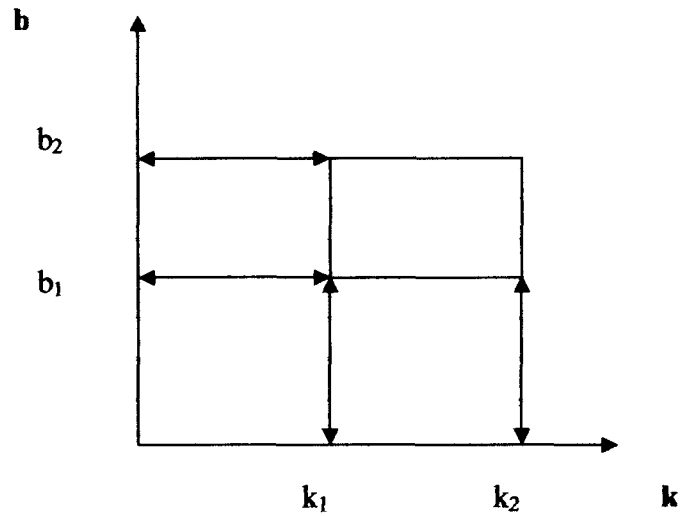


Figura 6.1: Caja de Parámetros para Modelación de Incertidumbre

Para realizar el control con retroalimentación que satisfice todos los sistemas descritos dentro de la caja de parámetros. Es necesario resolver para la desigualdad (6.6) para todos los vértices de la caja de parámetros.

6.4 Caso de Estudio para Modelación de Incertidumbre

Paramétrica en el modelo de un Cuarto de Vehículo

En el Capítulo 5 se presentó el caso de estudio para el modelo de suspensión activa en el sistema nominal de medio y un cuarto de vehículo. Esto sin considerar incertidumbre paramétrica en la vecindad del modelo nominal.

En esta sección se modela el caso de incertidumbre paramétrica sobre el modelo de un cuarto de vehículo. La incertidumbre se modela sobre los parámetros de las constantes del resorte y la del amortiguador del modelo. Esto implica utilizar politopos y así darle forma con LMI a la entrada de incertidumbres.

6.4.1 Características del Sistema Nominal en Lazo Abierto

El proceso de diseño del Controlador para el problema Mixto requiere de proponer una manera computacional accesible y factible. Para esto es necesario explorar al Sistema Dinámico una vez que fue identificado, utilizando dos características. Por un lado se presenta la Figura 6.2 la cual representa el Diagrama de Bode en Lazo Abierto del sistema para representar las frecuencias de mayor información para el sistema masa-resorte-amortiguador. Con esta herramienta es muy conveniente proponer el rango de frecuencias para los cuales es conveniente diseñar un control que responda ante incertidumbre, esto es robusto. En este caso es necesario establecer que las dos variables que se presentan corresponden a la velocidad de ambas cantidades del modelo presentado en el Capítulo 4, así mismo se presenta la fase para ambas gráficas.

La Figura 6.3 establece una buena medida de cómo responde el Sistema Nominal en lazo abierto ante una entrada escalón. Aquí se vuelve importante mencionar que la entrada impulso, se toma para este caso dado que es la que mejor se acerca al fenómeno físico que se presenta ante una situación realista. Esto debido a que en un modelo cotidiano, la suspensión de un auto ante una rebote con la superficie, la respuesta del sistema asemeja a la de un impulso dadas las características contenidas.

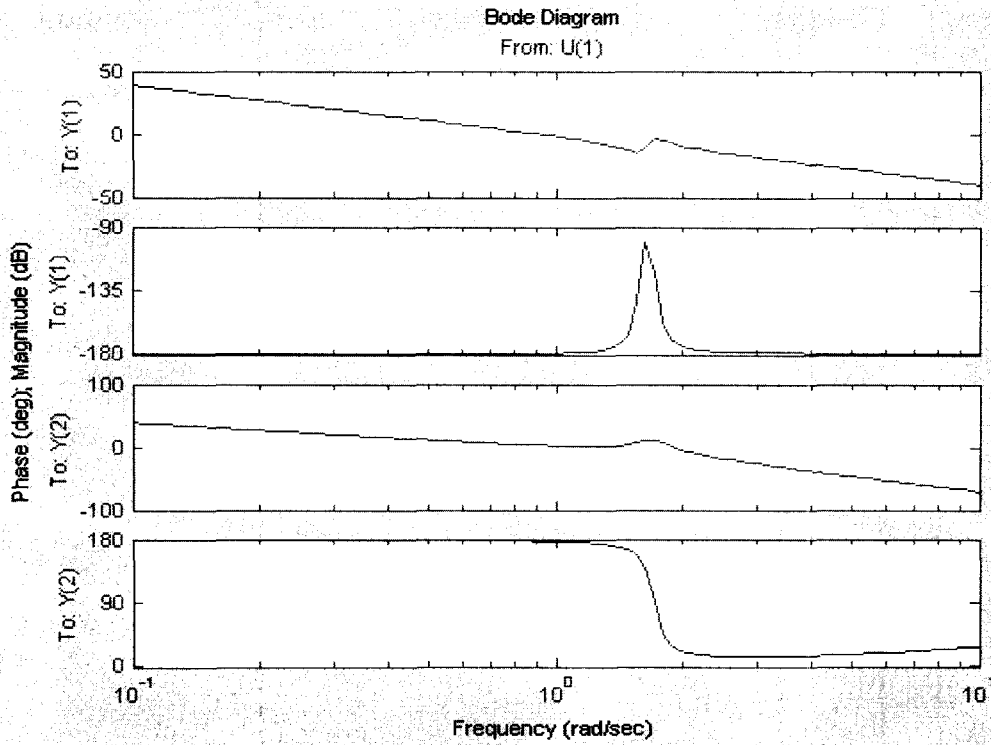


Figura 6.2: Diagrama de Bode en Lazo Abierto del modelo de un Cuarto de Vehículo Con Incertidumbre

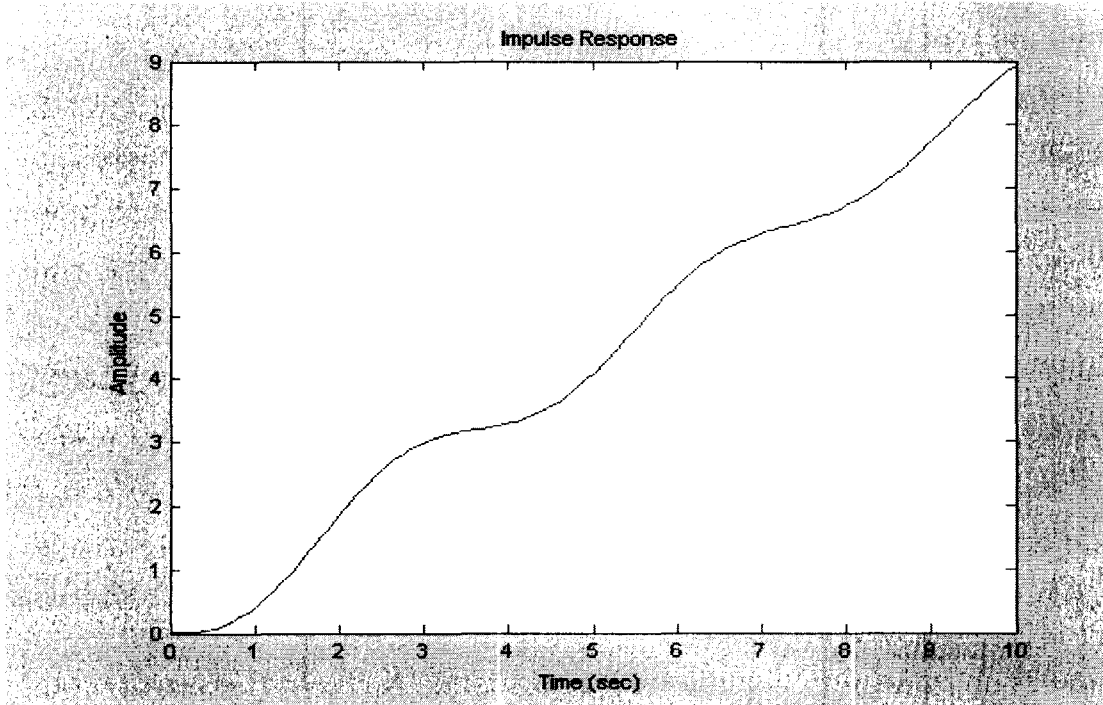


Figura 6.3: Sistema Nominal en Lazo Abierto ante una Entrada Impulso

Para cuantificar la relación de compromiso entre los criterios H_2 y H_∞ , es conveniente representar dicho compromiso mediante la curva de pareto que se presenta en la Figura 6.4, como una manera de obtener la información necesaria y suficiente para el caso de los valores reales del sistema y los calculados por el modelo matemático.

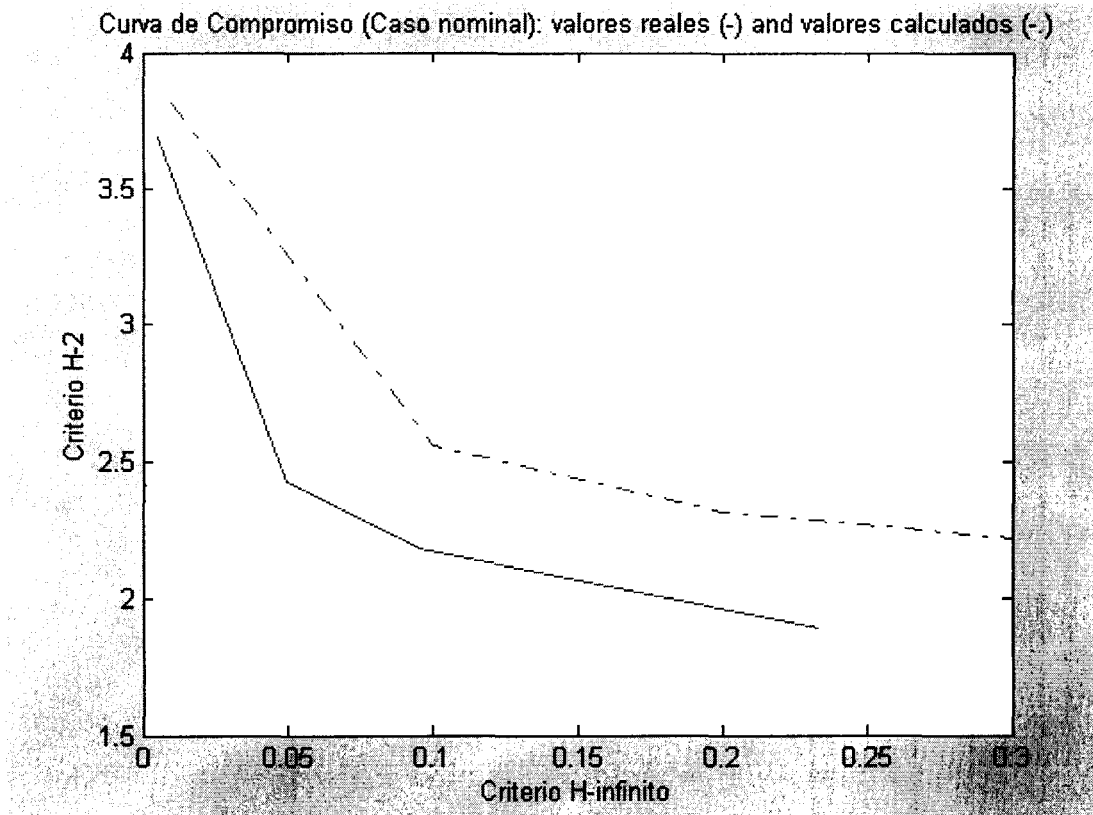


Figura 6.4: Curva compromiso del Sistema Nominal y de los Valores Calculados

6.4.2 Características del Sistema Nominal en Lazo Cerrado

Una vez que se cuantifica la norma óptima del sistema y se itera para diferentes valores de γ (según los intereses del diseñador), es conveniente hacer una presentación de cómo queda el sistema nominal en lazo cerrado en su Diagrama de Bode y ante entrada impulso para relacionar la mejora en términos del sistema en lazo abierto.

La Figura 6.5 presenta el Diagrama de Bode en lazo cerrado, se puede observar como se presenta una singularidad para el caso de la variable en velocidad dos y en el caso de la velocidad del sistema en uno, asemeja a la respuesta para un rango frecuencial con buena zona de operación.

La Figura 6.6 presenta la Curva de compromiso para el modelo con incertidumbre y buscando hacer un modelo más robusto en la vecindad del modelo nominal. Nótese el corrimiento hacia el centro para buscar tener una representación más convincente del sistema sacrificando lo menos posible el criterio de desempeño.

La Figura 6.7 presenta la respuesta ante un impulso del sistema. Es notable el sobretiro del sistema que corresponde al 40% área de oportunidad para fines de diseño.

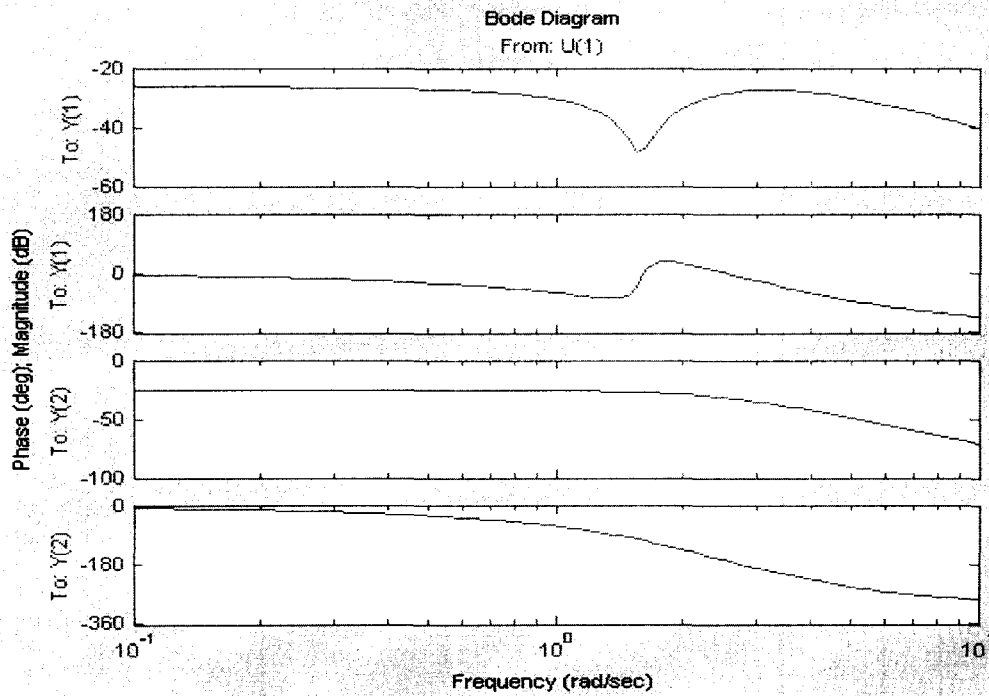


Figura 6.5: Diagrama de Bode en Lazo Cerrado del modelo de un Cuarto de Vehículo Con Incertidumbre

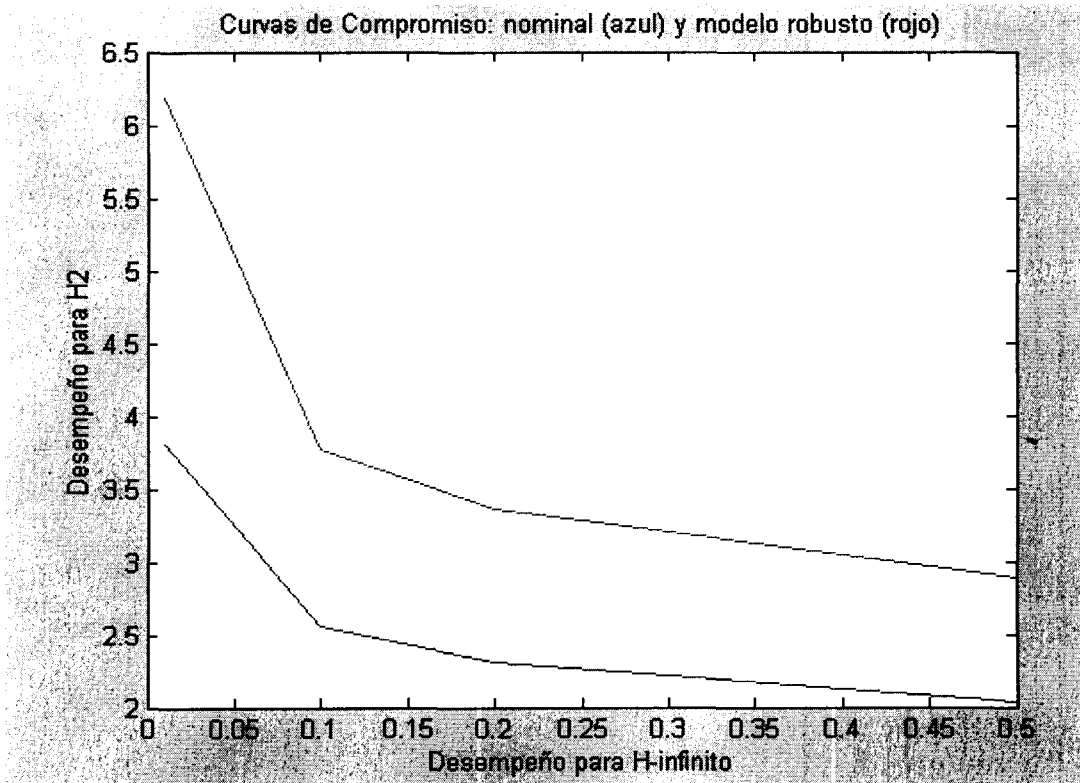


Figura 6.6: Curva de Compromiso para el Modelo Nominal y el Modelo Robusto

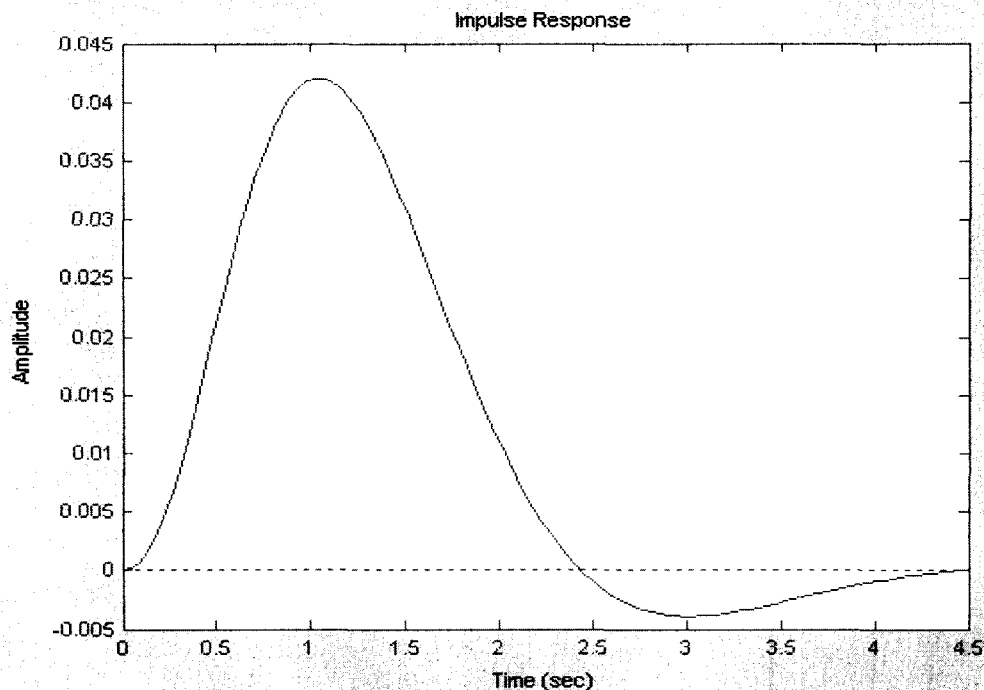


Figura 6.7: Respuesta del Modelo Nominal en Lazo Cerrado para un cuarto de Vehículo Con Incertidumbre

6.4.3 Características del Sistema con Incertidumbre

El Modelo Nominal toma mayor comprensión cuando se modela con incertidumbres en la vecindad de éste. Para esto se vuelve necesario plantear la caja paramétrica que contiene la información de los rangos de valores en los que oscila el nivel de incertidumbre. Y de ahí se vuelve una operación muy simple, plantear el problema en términos de politopos para modelar la respuesta del sistema con incertidumbre en lazo cerrado.

La Figura 6.8 presenta la respuesta ante una entrada impulso del sistema. Para cada valor de incertidumbre paramétrica en los vértices de la caja de modelación de incertidumbre paramétrica. Esto se logra variando los valores de k y b .

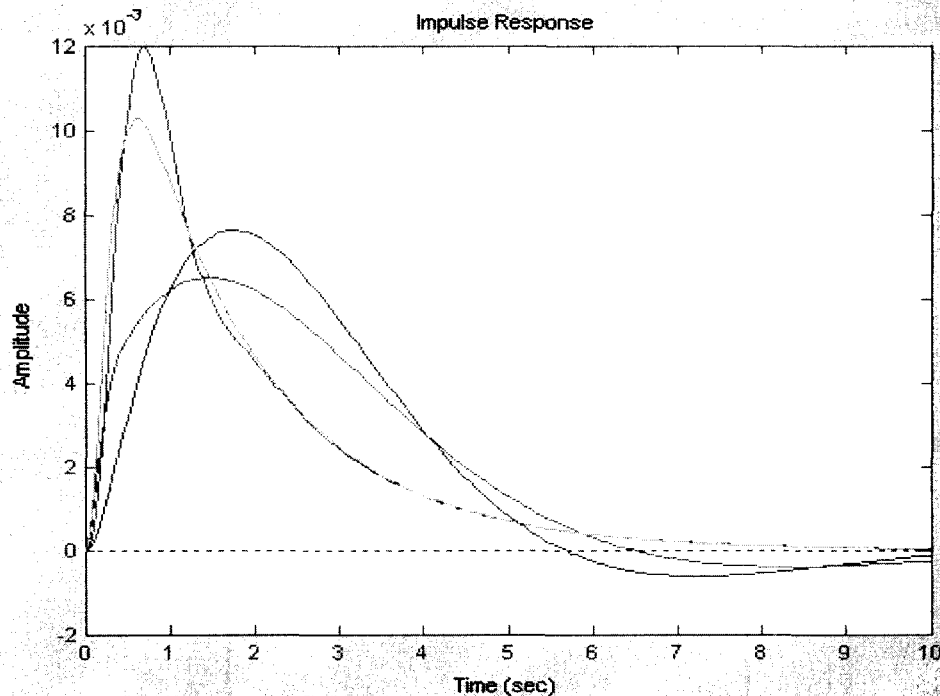


Figura 6.8: Respuesta ante entrada Impulso para los valores extremos de k y b en el modelo con Incertidumbre para un Cuarto de Vehículo

En el caso de la Figura 6.9, se realiza una comparación de la respuesta ante un impulso del sistema nominal contra el sistema en incertidumbre. Nótese que mientras el sistema nominal posee valores de sobretiro del orden de 40% con tiempo de establecimiento del orden de 5 segundos. En el caso del modelo con incertidumbre se logra cuantificar sobrestiros de 10% y 5%, con el tiempo de establecimiento en el mismo orden que el sistema nominal. De ahí que se logra un sistema con buenas características en lazo cerrado, objetivo del control.

La Figura 6.10, muestra la colocación de los Polos en Lazo Cerrado sobre la región LMI de intersección para fines de simulación. Donde se corta un sector cónico y una región vertical en el plano complejo, asegurando estabilidad sobre la respuesta del sistema.

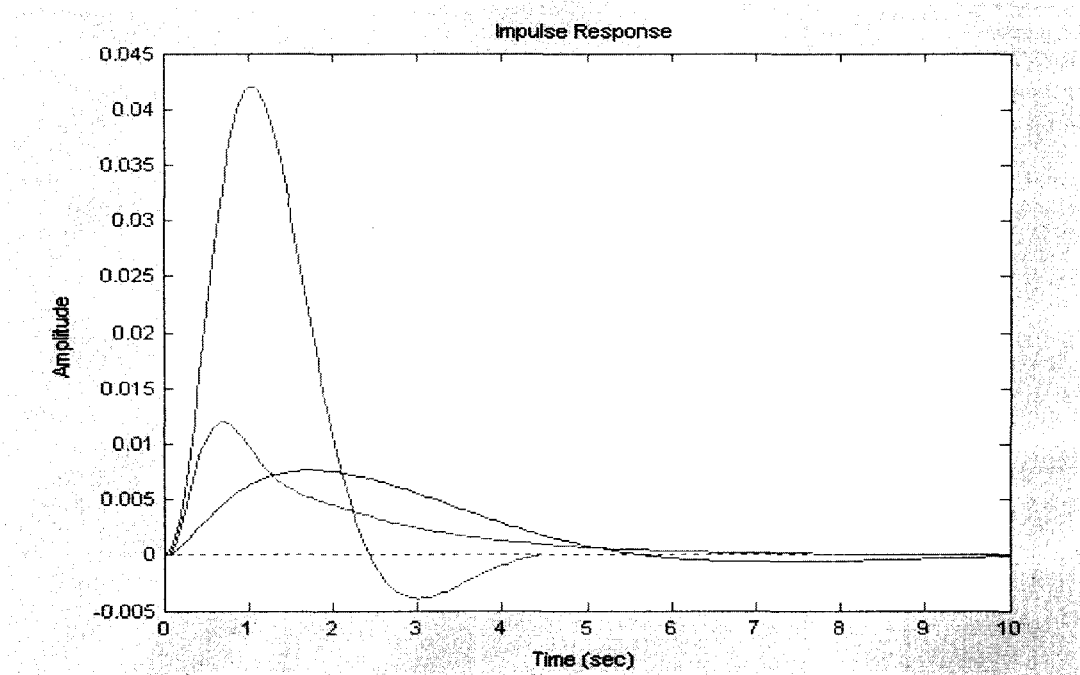


Figura 6.9: Comparación entre el Sistema Nominal y con Incertidumbre ante una entrada Impulso

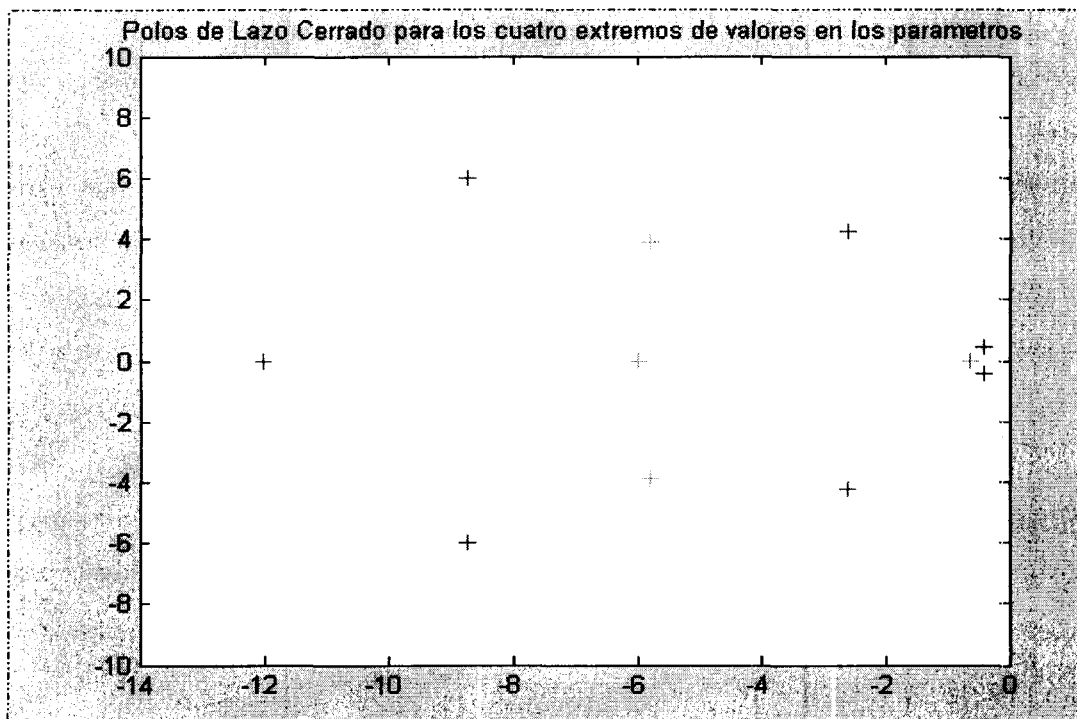


Figura 6.10: Polos de Lazo Cerrado para los cuatro extremos de valores con Incertidumbre Paramétrica

Capítulo 7

Conclusiones

7.1 Modelación e Identificación del Sistema Dinámico

En relación al hecho que en este trabajo se parte de dos modelos previamente identificados por otros trabajos, se puede establecer que se tiene un modelo dinámico acorde a las necesidades del problema en cuestión. Así mismo, la modelación para medio vehículo y un cuarto de vehículo dan una mejor comprensión del modelo a controlar. Cabe hacer mención que los valores para el caso del modelo en medio vehículo parten de valores nominales, en contraste al modelo de un cuarto de vehículo que parte de valores normalizados para fines de simulación.

7.2 Fomulación del problema en LMI

La naturaleza intrínseca de la formulación LMI demostró que es una herramienta sumamente útil cuando se tienen como objetivo controlar de manera óptima un problema que no tiene solución analítica como el caso del control mixto. A manera de conclusión podemos establecer que una vez formulado el problema en términos de LMI el problema esta resuelto, siempre y cuando se le de la manipulación adecuada a los valores nominales del sistema.

7.3 Diseño del Control Mixto H_2/H_∞

El Control Mixto cumple con la finalidad de combinar los criterios de desempeño y robustez desde un mismo problema. Dada la naturaleza del problema en sí, el método numérico es la manera mas apropiada para atacar este problema de optimización. En virtud al buen desempeño y criterios de compromiso se obtendrá un controlador capaz de manejar en forma alternativa la robustez y desempeño como problemas interrelacionados. Se comprobó que se puede estar en un punto intermedio entre los dos criterios si se hace una buena y clara identificación del proceso a controlar.

7.4 Modelación del Control Mixto con Incertidumbre

Al introducir incertidumbre al sistema dinámico es conveniente plantear la formulación LMI en términos de politopos que en el caso de Incertidumbre Paramétrica, se logran resultados de gran interés e importancia poder optimizar el criterio de robustez y en su caso sacrificar el desempeño del controlador. Esto partiendo de la planta nominal con los valores identificados de la mejor manera.

7.5 Perspectivas

7.5.1 Modelación del Sistema Dinámico

En virtud al potencial matemático que tiene la herramienta LMI, sería importante aplicar esta teoría con fines de controlar sistemas dinámicos disipativos. Y no limitar el caso de estudio a Suspensiones Activas, al pensar en términos de sistemas disipativos es posible hacer una formulación en virtud al tipo de control a utilizar. Para esto puede ser conveniente repasar la formulación Lagrangiana o Hamiltoniana como medios alternativos para obtener la representación que mejor se adecue a los sistemas disipativos en general.

7.5.2 Métodos de solución al problema de Control Mixto

El método de optimización convexa es uno de varios para poder explorar las diferentes maneras de solucionar este problema. Para esto sería conveniente plantear el problema en términos de análisis de entropía, solucionar el problema por métodos iterativos, explorar el método computacional que sustenta las técnicas de optimización.

7.5.3 Colocación de Polos en Regiones LMI

En virtud que las regiones LMI poseen características de intersección, sería conveniente explorar la propuesta sobre unión de regiones LMI considerando que la unión de regiones LMI no necesariamente es una región convexa, pero si se toma en cuenta las técnicas de colocación de polos de manera parcial se pueden obtener resultados convenientes a esta herramienta de optimización convexa.

Apéndice A

Listado del Código para la Modelación del Sistema Sin Incertidumbre Paramétrica

```
%Modelacion del Sistema de Medio Vehiculo para Fines de Control Mixto H2/Hinf

echo off
clc

disp(' ');
disp('          T E S I S II');
disp(' ');
disp('          *****');
disp('          EJEMPLO "Suspension Activa para Medio Carro" ');
disp('          *****');
disp(' ');
disp(' ');
disp('          DISEÑO DEL CONTROL MIXTO H2/Hinf PARA CONTROLAR EL MODELO DE
SUSPENSION ACTIVA');
disp(' ');
disp(' ');
disp(' ');

echo on

pause % <<<<<<<<< Presione Enter para Continuar >>>>>>>>>

clc

%
% Modelo de Control en Espacio de Estados Usado:
%
%
%   dx
% Eo -- = Ax + B1 w + B2 u
%   dt
%
%   Zinf= C1 x + D11 w + D12 u
```

```

%
%   Z2 = C2 x + D21 w + D22 u
%
%   y = Cy x + Cyl w

```

```

pause % <<<<<<<<<< Presione Enter para Continuar >>>>>>>>>

```

```

% Objetivo:
%
%   Diseñar un sistema de control optimo retroalimentado con la ley de control u = K x que minimice
%   los efectos de la perturbacion w sobre Z2, para solucionar el problema de Control Mixto H2/Hinf.
%
% ESPECIFICACIONES:
%
%   * Minimiza la norma infinita de H, w -> Z2
%   * Minimiza la norma cuadrada de H, w -> [Zinf, Z2,u]
%   * Estabilidad Alfa con alfa > 0.1
%   * Amortiguamiento de lazo cerrado > tan(pi/8) (sector) Para Reubicacion de Polos
%

```

```

pause % <<<<<<<<<< Presione Enter para Continuar >>>>>>>>>

```

```

% Datos del Sistema para el modelo dinamico de Medio Vehiculo

```

```

%Definicion de Constantes

```

```

ms=580; maf=40; mar=40; J=600;
ksf=23500; ksr=25500; ktf=19900; ktr=19900; bsf=1000; bsr=1100; lf=8; lr=7;

```

```

%Definicion de Relaciones

```

```

f1= ksf + ksr;          b1= bsf + bsr;
f2= lf*ksf - lr*ksr;    b2= lf*bsf - lr*bsr;
f3=ksf;                 b3= bsf;
f4= ksr;                 b4= bsr;
f5= lf^2*ksf + lr^2*ksr; b5= lf^2*bsf + lr^2*bsr;
f6= lf*ksf;             b6= lf*bsf;
f7= ksf*ktf;            b7= lr*bsr;
f8= ksr*ktr;
f9= lr*ksr;

```

```

%Modelo Dinamico Medio Vehiculo

```

```

a0=[zeros(4) eye(4);
    zeros(4,8)];
e0=diag([1 1 1 1 ms J maf mar]);
ak=[ 0 0 0 0 0 0 0 0;
     0 0 0 0 0 0 0 0;
     0 0 0 0 0 0 0 0;
     0 0 0 0 0 0 0 0;
     -f1 -f2 f3 f4 0 0 0 0;

```

```

-f2 -f5 f6 -f9 0 0 0 0;
f3 f6 -f7 0 0 0 0 0 ;
f4 -f9 0 -f8 0 0 0 0];

ad=[0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 -b1 -b2 b3 b4;
    0 0 0 0 -b2 -b5 b6 -b7;
    0 0 0 0 b3 b6 -b3 0 ;
    0 0 0 0 b4 -b7 0 -b4 ];
a=a0+ak+ad

b1=[0 0;0 0;0 0;0 0;0 0;0 0;-ktr 0; 0 -ktr];
b2=[0 0;0 0;0 0;0 0;1 1;lf -lr;-1 -1;-1 -1];

b=[b1 b2]

c1=[0 1 0 0 0 0 0 0];
c2=[1 0 0 0 0 0 0 0;
    0 1 0 0 0 0 0 0;
    0 0 1 0 0 0 0 0;
    0 0 0 1 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0];
c=[c1;c2]

d11=[0 0;0 0;0 0;0 0]; d12=[0 0;0 0;0 0;0 0];
d21=[0 0;0 0;0 0;0 0]; d22=[1 1;lf -lr;-1 -1;-1 -1];
d=[d11 d12; d21 d22]
clc

% REUBICACION DE POLOS
% Especificacion de la region para ubicacion de polos:
%
% Estabilidad Alfa -> Medio-Plano x < -0.1
% Amortiguamiento > tan(pi/8) -> sector con tip en x=0 y angulo 3*pi/4
%
% Esto se hace interactivamente con LMIREG.
% Se Teclee q para evadir esta parte y cargar la region definida arriba

region=lmireg;

pause % <<<<<<<<<< Presione Enter para Continuar >>>>>>>>>
echo off

% Sistema Nominal
Pnom=ltisys(a,b,c,d,e0);
echo on, clc

% Diagrama de Bode w -> x1,x2

```



```

fig1=figure;
subplot(ssub(Pnom,1,2:3),'bo',logspace(-1,10,100))

pause
% <<<<<<<<<< Presione Enter para Continuar >>>>>>>>>

% Calculo de la norma optima infinita H sujeta
% a la restriccion del polo

gopt=msfsyn(Pnom,[1 2],[0 0 1 0],region)

% -> Performance optimo cercano a 0

pause
% <<<<<<<<<< Presione Enter para Continuar >>>>>>>>>

hinfnom=[];
h2nom=[];
h2bnom=[];
clc

% APLICACION DEL CRITERIO MIXED H2/Hinfinity
% Analisis de relacion entre la norma H-infinita y H-2
% (dada la restriccion de reubicacion de polos).
%
% Esto se hace minimizando la norma H-2 para varios valores
% de la norma H-infinita.
%
% Seleccionamos los valores(para las gammas): 0.01, 0.1, 0.2, 0.5

pause % <<<<<<<<<< Presione Enter para Continuar >>>>>>>>>

gammas1=[.01 .1 .3 .5];

for t=gammas1,

    disp(sprintf('\nPerformance requerido para el criterio de H-infinito: %6.2f,t));

    [gopt,h2opt,K,Pcl]=msfsyn(Pnom,[1 2],[t 0 0 1],region);
    hinfcl=norminf(ssub(Pcl,1,1)); %Para el modelo de closed loop
    h2cl=norm2(ssub(Pcl,1,2:4)); %Para el modelo de closed loop

    h2bnom=[h2bnom h2opt]; % Acotamiento calculado del criterio H2
    hinfnom=[hinfnom, hinfcl]; % criterio Hinf verdadero
    h2nom=[h2nom, h2cl]; % criterio H2 verdadero

    if t==0.1, Knom=K; Pclnom=Pcl; end
end

% Grafico de la curva trade-off(de compromiso):

figure(fig1),clf

```

```

plot(hinfnom,h2nom);
set(gca, 'ylim', [0 .002])
set(gca,'xlim',[0 .3])
xlabel('Criterio H-infinito'); ylabel('Criterio H-2'), hold on
plot(gammas1,h2bnom,'-.');
title('Curva Trade-off (nominal): valores reales (-) and valores calculados (-.)')
hold off

```

```

% El mejor compromiso se obtiene para gamma=0.1

```

```

pause % <<<<<<<<< Presione Enter para Continuar >>>>>>>>>
clc

```

```

% Grafique la respuesta al impulso w -> x2

```

```

% Diseño Nominal para gamma=0.1

```

```

figure(fig1),clf
subplot(ssub(Pcl,1,2),'im');
title('Impulse response w -> x2 for the nominal design');

```

```

pause % <<<<<<<<< Presione Enter para Continuar >>>>>>>>>
clc

```

```

pause % <<<<<<<<< Presione Enter para Continuar
%////////////////////////////////////

```

```

%Modelo Dinamico Cuarto de Vehiculo

```

```

k=0.3783;
b=0.0188;

```

```

m1=1; m2=0.15;

```

```

e0q=diag([1 1 m1 m2]);
a0q=[zeros(2) eye(2);zeros(2,4)];
akq=[zeros(2,4); [-k k;k -k*k] zeros(2)];
adq=mdiag(zeros(2),[-b b;b -b]);
aq=a0q+akq+adq

```

```

b1q=[0;0;1;0];
b2q=b1q;
bq=[b1q b2q]

```

```

c1q=[0 1 0 0];
c2q=[1 0 0 0;0 1 0 0;0 0 0 0];
cq=[c1q;c2q]

```

```

d11q=0; d12q=0;
d21q=[0;0;0]; d22q=[0;0;1];
dq=[d11q d12q; d21q d22q]

```

```

region=lmireg;

pause % <<<<<<<< Presione Enter para Continuar >>>>>>>>
echo off

% Sistema Nominal
Pnomq=ltisys(aq,bq,cq,dq,e0q);
echo on, clc

% Diagrama de Bode w -> x1,x2

fig1=figure;
subplot(ssub(Pnomq,1,2:3),'bo',logspace(-1,10,100))

pause
% <<<<<<<< Presione Enter para Continuar >>>>>>>>

% Calculo de la norma optima infinita H sujeta
% a la restriccion del polo

gopt=msfsyn(Pnomq,[1 1],[0 0 1 0],region)

% -> Performance optimo cercano a 0

pause
% <<<<<<<< Presione Enter para Continuar >>>>>>>>

hinfnom=[];h2nom=[];h2bnom=[];
clc

% APLICACION DEL CRITERIO MIXED H2/Hinfinity
% Analisis de relacion entre la norma H-infinita y H-2
% (dada la restriccion de reubicacion de polos).
%
% Esto se hace minimizando la norma H-2 para varios valores
% de la norma H-infinita.
%
% Seleccionamos los valores(para las gammas): 0.01, 0.1, 0.2, 0.5

pause % <<<<<<<< Presione Enter para Continuar >>>>>>>>

gammas=[.01 .1 .3 .5];

for t=gammas,

disp(sprintf('\nPerformance requerido para el criterio de H-infinito: %6.2f,t));

[gopt,h2opt,K,Pcl]=msfsyn(Pnomq,[1 1],[t 0 0 1],region);
hinfc1=norminf(ssub(Pcl,1,1)); %Para el modelo de closed loop

```

```

h2cl=norm2(ssub(Pcl,1,2:4)); %Para el modelo de closed loop

h2bnom=[h2bnom h2opt]; % Acotamiento calculado del criterio H2
hinfnom=[hinfnom, hinfcl]; % criterio Hinf verdadero
h2nom=[h2nom, h2cl]; % criterio H2 verdadero

if t==0.1, Knom=K; Pclnom=Pcl; end
end

% Grafico de la curva trade-off(de compromiso):
figure(fig1),clf
plot(hinfnom,h2nom); set(gca,'xlim',[0 .3])
xlabel('Criterio H-infinito'); ylabel('Criterio H-2'), hold on
plot(gammas,h2bnom,'-');
title('Curva Trade-off (nominal): valores reales (-) and valores calculados (-.)')
hold off

% El mejor compromiso se obtiene para gamma=0.1

pause % <<<<<<<<<< Presione Enter para Continuar >>>>>>>>>>
clc

% Grafique la respuesta al impulso w -> x2

% Diseño Nominal para gamma=0.1

figure(fig1),clf
plot(ssub(Pcl,1,1),'im');
title('Impulse response w -> x2 for the nominal design');

pause % <<<<<<<<<< Presione Enter para Continuar >>>>>>>>>>
clc

echo off
close all
return

```

Apéndice B

Listado del Código para la Modelación del Sistema Con Incertidumbre Paramétrica

```
%Modelo un cuarto de vehiculo con Incertidumbre Parametrica

echo off
clc

disp(' ');
disp('          T E S I S II');
disp(' ');
disp('          *****');
disp('          EJEMPLO "Suspension Activa para un cuarto de Carro" ');
disp('          *****');
disp(' ');
disp(' ');
disp('          DISEÑO DEL CONTROL ROBUSTO PARA CONTROLAR EL MODELO DE SUSPENSION
ACTIVA');
disp(' ');
disp(' ');
disp(' ');

echo on

pause % <<<<<<<<<< Presione Enter para Continuar >>>>>>>>>>

clc

%
% Sistema Dinamico:
%
%      2
%      d x1      dx1 dx2
%      M1 ---- + f ( ---- ) + k(x1-x2) = F + w
```

```

% dt^2 dt dt
%
% 2
% d x2 dx2 dx1
% M2 ---- + f ( ---- ) + k (x2-x1) = 0
% dt^2 dt dt
%
%
% F : Control de Fuerza w : Perturbacion
%
% 0.09 < k < 0.667 (nominal = 0.3783)
% 0.0038 < f < 0.04 (nominal = 0.0188)
%

```

pause % <<<<<<<<<< Presione Enter para Continuar >>>>>>>>>>

```

% Objetivo:
%
% Diseñar un sistema robusto retroalimentado con la ley de control T = K x que minimice
% los efectos de la perturbacion w sobre x2.
%
% ESPECIFICACIONES:
%
% * Minimiza la norma infinita de H, w -> x2
% * Minimiza la norma cuadrada de H, w -> [x1,x2,T]
% * Estabilidad Alfa con alfa > 0.1
% * Amortiguamiento de lazo cerrado > tan(pi/8) (sector) Para Reubicacion de Polos
%

```

pause % <<<<<<<<<< Presione Enter para Continuar >>>>>>>>>>

```

%% Datos del Sistema para modelo dinamico
J1=1; J2=0.15;
a0=[zeros(2) eye(2);zeros(2,4)];
c0=diag([1 1 J1 J2]);
ak=[zeros(2,4); [-1 1;1 -1] zeros(2)];
ad=mdiag(zeros(2),[-1 1;1 -1]);
b1=[0;0;1;0]; b2=b1;
c1=[0 1 0 0];
c2=[1 0 0 0;0 1 0 0;0 0 0 0];
d11=0; d12=0;
d21=[0;0;0]; d22=[0;0;1];
clc

```

```

% REUBICACION DE POLOS
% Especificacion de la region para ubicacion de polos:
%
% Estabilidad Alfa -> Medio-Plano x < -0.1
% Amortiguamiento > tan(pi/8) -> sector con tip en x=0 y angulo 3*pi/4
%
% Esto se hace interactivamente con LMIREG.
% Se Teclee q para evadir esta parte y cargar la region definida arriba

```

```
reg1=lmireg;
reg2=lmireg;
region=lmireg(reg1,reg2);
```

```
pause % <<<<<<<< Presione Enter para Continuar >>>>>>>>
echo off
```

```
% Valor promedio de los parametros para el caso del modelo nominal
k=0.3783;
f=0.0188;
```

```
% Sistema Nominal
a=a0+k*ak+f*ad;
Pnom=ltisys(a,[b1 b2],[c1;c2],[d11 d12;d21 d22],e0);
echo on, clc
%
% Diseño para el Sistema Nominal:
%
% k=0.3783, f=0.0188
%
```

```
% Diagrama de Bode w -> x1,x2
```

```
fig1=figure;
subplot(ssub(Pnom,1,2:3),'bo',logspace(-1,1,100))
fig2=figure;
subplot(ssub(Pnom,1,1),'im',[0:0.05:10]); hold on
```

```
pause
% <<<<<<<< Presione Enter para Continuar >>>>>>>>
```

```
% Calculo de la norma optima infinita H sujeta
% a la restriccion del polo
```

```
gopt=msfsyn(Pnom,[1 1],[0 0 1 0],region)
```

```
% -> Performance optimo cercano a 0
```

```
pause % <<<<<<<< Presione Enter para Continuar >>>>>>>>
```

```
hinfnom=[];h2nom=[];h2bnom=[];
clc
```

```
% APLICACION DEL CRITERIO MIXED H2/Hinfinity
```

```
% Analisis de relacion entre la norma H-infinita y H-2
```

```
% (dada la restriccion de reubicacion de polos).
```

```
%
```

```
% Esto se hace minimizando la norma H-2 para varios valores
```

```
% de la norma H-infinita.
```

```
%
```

```
% Seleccionamos los valores(para las gammas): 0.01, 0.1, 0.2, 0.5
```

```

pause % <<<<<<<<< Presione Enter para Continuar >>>>>>>>>

gammas=[.01 .1 .2 .5];

for t=gammas,

    disp(sprintf('\nPerformance requerido para el criterio de H-infinito: %6.2f,t));

    [gopt,h2opt,K,Pcl]=msfsyn(Pnom,[1 1],[t 0 0 1],region);
    hinfcl=norminf(ssub(Pcl,1,1)); %Para el modelo de closed loop
    h2cl=norm2(ssub(Pcl,1,2:4)); %Para el modelo de closed loop

    h2bnom=[h2bnom h2opt]; % Acotamiento calculado del criterio H2
    hinfnom=[hinfnom, hinfcl]; % criterio Hinf verdadero
    h2nom=[h2nom, h2cl]; % criterio H2 verdadero

    if t==0.1, Knom=K; Pclnom=Pcl; end
end

% Grafico de la curva trade-off(de compromiso):

figure(fig1),clf
plot(hinfnom,h2nom); set(gca,'xlim',[0 .3])
xlabel('Criterio H-infinito'); ylabel('Criterio H-2'), hold on
plot(gammas,h2bnom,'-.');
title('Curva de Compromiso (Caso nominal): valores reales (-) and valores calculados (-.)')
hold off

% El mejor compromiso se obtiene para gamma=0.1

pause % <<<<<<<<< Presione Enter para Continuar >>>>>>>>>
clc
%
% Sintesis del Modelo MIMO Robusto:
%
% 0.09 < k < 0.667, 0.0038 < f < 0.04
%
% Mismas restricciones de reubicacion de polos
%

% Parametros Extremos

k1=0.09; k2=0.667;
f1=0.0038; f2=0.04;
pv=pvec('box',[k1 k2;f1 f2]);

% REPRESENTACION DE INCERTIDUMBRES
% Representacion del Politopo para el sistema incierto

```



```

P0=ltisys(a0,[b1 b2],[c1;c2],[d11 d12;d21 d22],e0);
Pk=ltisys(ak,zeros(4,2),zeros(4),zeros(4,2),0);
Pf=ltisys(ad,zeros(4,2),zeros(4),zeros(4,2),0);
P=psys(pv,[P0 Pk Pf]);

```

```

pause % <<<<<<<<<< Presione Enter para Continuar >>>>>>>>>>
h2rob=[];
clc
%
% Como se recalcula las curvas de trade-off entre H-2 y H-infinito

```

```
load sateldem
```

```
% Comparando con valores nominales
```

```

figure(fig1),clf
plot(gammas,h2bnom,'b');
xlabel('Desempeño para H-infinito'); ylabel('Desempeño para H2'), hold on
plot(gammas,h2rob,'r');
title('Curvas de Compromiso: nominal (azul) y modelo robusto (rojo)')
hold off

```

```

pause % <<<<<<<<<< Presione Enter para Continuar >>>>>>>>>>
clc
%
% Comparacion de lo diseños nominal y robusto:
%
% Grafique la respuesta al impulso w -> x2

```

```

% Diseño Nominal para gamma=0.1
figure(fig1),clf
splot(ssub(Pclnom,1,1),'im');
title('Respuesta al Impulso de w -> x2 para el diseño nominal');
figura5=figure;
splot(ssub(Pclnom,1,2:3),'bo',logspace(-1,1,100))

```

```
% Diseño Robusto para gamma=0.1 (Respuesta Impulso para los valores extremos de k,f)
```

```

figure(fig1+1), clf
for j=1:2,
    Pvert=psinfo(Pclrob,'sys',j);
    splot(ssub(Pvert,1,1),'im',[0:0.05:10]); hold on
end
splot(ssub(Pclnom,1,1),'im');
title('Respuesta al Impulso w -> x2 para el diseño robusto');
hold off

```

```
pause % <<<<<<<<<< Presione Enter para Continuar >>>>>>>>>>
```

```

clc
%
% Checar la ubicacion de polos para el diseño robusto

echo off

colors='wrbg';
figure(fig1), clf
for j=1:4,
    plot(spol(psinfo(Pclrob,'sys' j)),['+' colors(j)]); hold on
end
set(gca,'ylim',[-10 10]);
% Cono
x=[-9:1:0]; plot(x,x/tan(pi/8),'y'); plot(x,-x/tan(pi/8),'y');
% Medio-plano
y=[-10:1:10]; plot(-0.1*ones(size(y)),y,'y'); hold off
title('Polos de Lazo Cerrado para los cuatro extremos de valores en los parametros');

echo on

pause % <<<<<<<<<< Presione Enter para Continuar >>>>>>>>>>

echo off
close all
return

```

Bibliografía

- [1] Vroemen, B and De Pater, B. Multiobjective control : An Overview, IEEE Conference on Decision and Control, December 1997
- [2] Doyle, J. Glover, K. and Khargonekar, P. State Space Solutions to Standard H₂ and H_∞ Control Problems, IEEE Transactions on Automatic Control, August 1998
- [3] Kwakernaak, H. Robust Control and H_∞-Optimization –Tutorial Paper-, Automatica, Vol. 29, No. 2
- [4] Yeh, H.H. and Banda, S. Necessary and Sufficient Conditions for Mixed H₂ and H_∞ Optimal Control, IEEE Conference on Decision and Control, December 1990
- [5] Walker, D. and Brett, D. Uniqueness of the General Mixed H₂/H_∞ Optimal Controller Proceedings American Control Conference (ACC), June 1996
- [6] Boyd, Stephen. Feron, E., El Ghaoui, L and Balakrishnan, V. History of Linear Matrix Inequalities in Control Theory, Automatic Control Conference (ACC), June 1994
- [7] Boyd, S. Feron, E., ElGhaoui, L. and Balakrishnan, V. Control System Analysis and Synthesis Via Linear Matrix Inequalities. Proc. ACC 1993
- [8] Mehdi, D., Abdel, E. and M'Saad. On the Design of Active Suspension System by H_∞ and mixed H₂/H_∞: An LMI Approach. Proceedings ACC, June 2000
- [9] Gáspar, P., Szászi, I. and Bokor, J. Mixed H₂/H_∞ Control Design For Active Suspension Structures, Periodica Polytechnica Vol. 28. No.1-2
- [10] Halder, B. and Kailath, T. LMI Based Design of Mixed H₂/H_∞ Controllers: The State Feedback Case, Proceedings of the ACC, June 1999
- [11] Chilali, M., Gahinet, R. and Apkarian, R. Robust Pole Placement in LMI Regions. IEEE Transactions on Automatic Control, December 1999
- [12] Chilali, M. and Gahinet, P. H_∞ Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach, IEEE Transactions on Automatic Control, March 1996
- [13] Satoh, A., Hodaka, I. And Sugimoto, K. Partial Pole Placement with Specified Stability Margins, Conference on Decision and Control, December 1999

- [14] Mibar, H., Kochbati, A., Zaafour, A. and Ksouri, M.
An LMI approach to H₂/H_∞ Synthesis for polytopic uncertain systems,
IEEE SMC 2002
- [15] Goncalves, P., Lopes, V. and Assuncao. E. H₂ and H_∞ norm control of intelligent
structures using LMI techniques
- [16] Zhou, K., Doyle, J. and Glover, K. Robust and Optimal control,
Prentice Hall, 1996
- [17] Burl, J. Linear optimal control : H₂ and H_∞ methods,
Addison Wesley Longman, 1999
- [18] Boyd, Stephen. Linear matrix inequalities in system and control theory,
Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994
- [19] Kirk, D., Optimal control theory : an introduction. Prentice-Hall, 1970
- [20] Dullerud, G. and Paganini F., A course in robust control theory : a convex approach.
Springer, 2000
- [21] Colman, B., Algebra lineal con aplicaciones y MATLAB. Prentice Hall, 1999
- [22] Gahinet, P., Nemorivski, A., Laub, A. and Chilali, M. LMI Control Toolbox For use
with Matlab. MathWorks
- [23] Skogestad, S. and Postlethwaite, I. Multivariable Feedback Control, Analysis and
Design. Wiley 1997

