

**INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS  
SUPERIORES DE MONTERREY**

**CAMPUS MONTERREY**

**DIVISION DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA  
PROGRAMA DE GRADUADOS EN INGENIERIA**



**ANÁLISIS Y SIMULACIÓN DE TRAYECTORIAS  
DE COHETES METEOROLÓGICOS**

**TESIS**

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL  
PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE**

**MAESTRO EN CIENCIAS  
ESPECIALIDAD EN INGENIERIA MECANICA**

**ARTEMIO JOSUE AGUILAR CUELLAR**

**JUNIO DEL 2000**

**INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES  
DE MONTERREY**

**CAMPUS MONTERREY**

**DIVISION DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA**

**PROGRAMA DE GRUADOS EN INGENIERIA**



**ANÁLISIS Y SIMULACIÓN DE TRAYECTORIAS  
DE COHETES METEOROLÓGICOS**

**TESIS**

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO  
ACADÉMICO DE**

**MAESTRO EN CIENCIAS  
ESPECIALIDAD EN INGENIERIA MECANICA**

**ARTEMIO JOSUE AGUILAR CUELLAR  
JUNIO DEL 2000**

**INSTITUTO TECNOLOGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES  
DE MONTERREY**

**CAMPUS MONTERREY  
DIVISION DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA  
PROGRAMA DE GRADUADOS EN INGENIERIA**

**ANALISIS Y SIMULACION DE TRAYECTORIAS  
DE COHETES METEOROLOGICOS**

**TESIS**

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO  
ACADEMICO DE**

**MAESTRO EN CIENCIAS  
ESPECIALIDAD EN INGENIERIA MECANICA**

**ARTEMIO JOSUE AGUILAR CUELLAR  
JUNIO DEL 2000**

# DEDICATORIAS

Dedico esta tesis a mis padres Artemio e Imelda, a quienes adoro y que con su gran apoyo incondicional han hecho posible la culminación de una más de mis metas. Gracias por todo.

A mi Abuelo Rafael, por sus valiosos consejos y por la sed de superación que me ha inculcado.

A mis hermanos, Martín, Oscar, Yadira y Diana, por el cariño y el incalculable apoyo que me han brindado.

A todos mis familiares y a mis primos Francisco y Gumersindo, con quienes he compartido muchos momentos agradables durante la realización de la tesis.

Al Dr. Karim Heinz Muci Kuchler, quien inicialmente fue mi asesor de tesis y a quien le agradezco me haya reafirmado el valor de la disciplina, honestidad y responsabilidad. No olvidaré sus acertadas recomendaciones, la motivación que me forjó y lo mucho que me ayudó a obtener conocimientos.

Al Dr. Horacio Martínez Alfaro, por sus apreciables asesorías y por los conocimientos que me impartió, los cuales fueron muy valiosos para la realización de esta tesis.

Al Dr. José Luis Gordillo Moscoso, a quien le agradezco su apoyo y con quien trabajé como compañero en el proyecto que dio origen a esta tesis.

Al Dr. Joaquín Acevedo Mascarúa por indicarme sus observaciones, las cuales fueron de gran importancia.

A mis amigos y compañeros, que al nombrarlos sería una lista extensa, con quienes compartí muchos momentos agradables y con quienes encontré apoyo y ánimo durante mis estudios de la Maestría.

A la Lic. Yolanda Amaya y la Lic. Claudia E. Garza del CIB (Centro de Información Biblioteca) del ITESM Campus Monterrey, quienes me ayudaron a conseguir una gran parte de la bibliografía que se utilizó en esta tesis.

## Resumen

El uso de modelos matemáticos asociados con simulaciones computacionales es una técnica bien establecida para predecir las trayectorias de cohetes. Por razones de confidencialidad, las pruebas de campo, los modelos matemáticos completos y los programas computacionales que describen trayectorias de cohetes meteorológicos, no se encuentran totalmente disponibles para dominio público en la literatura.

Este trabajo de tesis presenta los resultados obtenidos en la simulación de trayectorias de cohetes meteorológicos, así como la realización de pruebas experimentales para validar los resultados de la simulación. El trabajo está dividido en tres tipos de modelos matemáticos a analizar; **Modelo matemático 1**: Un modelo matemático general que considera al cohete meteorológico como un cuerpo rígido con seis grados de libertad en movimiento tridimensional y con aletas de estabilización no móviles, viajando sobre la atmósfera terrestre y considerando a la tierra como un elipsoide. **Modelo matemático 2**: Un modelo matemático simplificado que considera al cohete meteorológico como una partícula con dos grados de libertad con movimiento plano y con una fuerza de arrastre aerodinámica. **Modelo matemático 3**: Un modelo matemático simplificado que considera al cohete meteorológico como una partícula con dos grados de libertad con movimiento plano y viajando en el vacío.

En esta tesis se consideran los tres modelos matemáticos con la finalidad de llevar a cabo comparaciones de la exactitud obtenida en las simulaciones de las trayectorias con cada uno de éstos, de esta manera se puede estimar el error que se espera cuando el problema bajo análisis aumenta de complejidad. Las soluciones del modelo matemático 3 se obtienen mediante un tratamiento analítico, mientras que las soluciones de los modelos matemáticos 1 y 2 se obtienen mediante la utilización de métodos numéricos y de programas computacionales.

Con la finalidad de validar el modelo matemático 2, se diseñaron y fabricaron cohetes a escala *Tonatiuh* para ser lanzados en pruebas de campo. Los resultados obtenidos en las pruebas de campo preliminares reflejaron que, como una primera

aproximación a la solución, el programa computacional que utiliza el modelo matemático 2 proporciona resultados satisfactorios. El programa computacional que utiliza el modelo matemático 1, fue validado con el programa computacional que utiliza el modelo matemático 2, considerando las mismas condiciones iniciales. La validación mediante pruebas de campo, del programa computacional que utiliza el modelo matemático 1 con todas sus consideraciones, queda como una propuesta para trabajo a futuro.

Los modelos matemáticos y los programas computacionales presentados en este trabajo de tesis, pueden ser utilizados para realizar simulaciones de trayectorias de una extensa variedad de motores y cohetes meteorológicos, tanto de tamaños a escala como de tamaños reales. También se pueden hacer simulaciones con una combinación de varios motores y cohetes previamente cargados en las bases de datos de los programas, lo que da a relucir la flexibilidad que tienen estos programas computacionales.

Finalmente, en el presente trabajo de tesis, se documenta la información del tema, la cual no había sido recopilada anteriormente en esta institución, además de que se desarrolla una forma de análisis que en su conjunto tiene diferentes ideas de estrategias de solución a cada uno de los tres modelos matemáticos, estas ideas a las soluciones no se encuentran reportadas en los diferentes artículos consultados.

# CONTENIDO

<b>Nomenclatura.</b>	<b>VII</b>
<b>Indice de figuras.</b>	<b>XV</b>
<b>Indice de tablas.</b>	<b>XX</b>
<b>CAPÍTULO 1: Descripción del trabajo de investigación</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción.	1
1.2. Definición del problema.	3
1.3. Objetivo de la investigación.	4
1.4. Hipótesis de la investigación.	4
1.5. Justificación de la investigación.	5
1.6. Limitaciones.	5
1.7. Delimitaciones o alcances.	6
1.8. Organización de la tesis.	10
1.9. Conclusiones.	11
<b>CAPÍTULO 2: Cohetes y cohetes sonda</b>	<b>13</b>
2.1. Introducción.	13
2.2. Clasificación general de cohetes y cohetes sonda.	14
2.2.1. Clasificación y características generales.	14
2.2.2. Tipos de cohetes sonda actuales.	20
2.2.3. Objetivos o misiones encomendadas a los cohetes sonda.	22
2.2.4. Partes principales de cohetes sonda.	27
2.3. Consideraciones acerca de estabilidad en el vuelo.	30
2.3.1. Método de Barrowman.	30

2.3.2. Consideraciones de la relación centro de presión - centro de masa.	31
2.3.3. Recomendaciones generales sobre estabilidad estática y dinámica durante el vuelo de cohetes y cohetes sonda.	32
2.4. Conclusiones.	33
<b>CAPITULO 3: Ecuaciones de movimiento.</b>	<b>34</b>
3.1. Introducción.	34
3.2. Sistema de coordenadas de referencia.	37
3.3. Análisis cinemático.	39
3.4. Análisis dinámico.	45
3.4.1. Movimiento de traslación.	45
3.4.2. Movimiento angular.	52
3.5. Parámetros de Euler.	61
3.6. Variables utilizadas en las ecuaciones de movimiento.	68
3.6.1. Densidad del aire.	68
3.6.2. Aceleración de la gravedad terrestre.	69
3.6.3. Fuerza de empuje.	71
3.6.4. Velocidad del viento.	73
3.7. Conclusiones.	77
<b>CAPITULO 4: Efectos aerodinámicos.</b>	<b>79</b>
4.1. Introducción.	79
4.2. Análisis de las fuerzas y momentos aerodinámicos.	80
4.3. Túnel de viento.	92
4.4. Conclusiones.	97
<b>CAPITULO 5: Ecuación general de movimiento y métodos de solución.</b>	<b>99</b>
5.1. Introducción.	99
5.2. Ecuación general de movimiento.	100



---

5.3. Antecedentes de métodos numéricos utilizados para el cálculo de trayectorias de cohetes.	103
5.4. Modelo matemático que considera una aproximación en el vacío y movimiento plano.	104
5.4.1. Metodología de solución y consideraciones.	105
5.4.2. Solución de las ecuaciones de movimiento.	109
5.5. Modelo matemático que considera la fuerza de arrastre aerodinámica y un movimiento plano.	113
5.5.1. Metodología de solución y consideraciones.	113
5.5.2. Métodos numéricos utilizados en la derivación de las fórmulas computacionales.	116
5.5.3. Descripción del programa computacional.	117
5.6. Modelo matemático que considera seis grados de libertad del cohete.	132
5.6.1. Metodología de solución y consideraciones.	132
5.6.2. Métodos numéricos utilizados en la derivación de las fórmulas computacionales.	134
5.6.3. Descripción del programa computacional.	134
5.7. Conclusiones.	142
<b>CAPITULO 6: Casos de estudio.</b>	<b>145</b>
6.1. Introducción.	145
6.2. Características físicas de cohetes y motores.	146
6.2.1. Características del cohete.	146
6.2.1.1. Cohete <i>Tonatiuh</i> .	146
6.2.1.2. Cohete de la <i>NACA</i> .	147
6.2.2. Motor y fuerza de empuje.	147
6.2.2.1. Motor comercial de la marca ESTES modelo C6-3.	148
6.2.2.2. Motor comercial de la marca AEROTECH modelo K1050W-PLUG.	148
6.3. Velocidad del viento.	149
6.4. Densidad del aire.	150

---

---

6.5 . Aceleración de la gravedad.	150
6.6 . Coeficientes aerodinámicos.	150
6.6.1. Coeficientes aerodinámicos en el cohete <i>Tonatiuh</i> .	150
6.6.2. Coeficientes aerodinámicos en el cohete de la <i>NACA</i> .	155
6.7. Modelo matemático que considera una aproximación en el vacío y movimiento plano.	158
6.8. Modelo matemático que considera la fuerza de arrastre aerodinámica y movimiento plano.	163
6.9. Modelo matemático que considera seis grados de libertad del cohete.	165
6.10. Comparación y comentarios de resultados obtenidos con los diferentes modelos matemáticos.	168
6.10.1. Resumen de consideraciones utilizadas en las simulaciones.	168
6.10.2. Cohete <i>Tonatiuh</i> .	170
6.10.3. Cohete de la <i>NACA</i> .	172
6.11. Conclusiones.	174
<b>CAPÍTULO 7: Diseño de un cohete sonda a escala y pruebas de campo.</b>	<b>177</b>
7.1. Introducción.	177
7.2. Diseño de un cohete sonda a escala para la realización de pruebas de campo.	178
7.2.1. Estabilidad estática y dinámica.	178
7.2.2. Bosquejo del cohete sonda a escala utilizado para validar el programa de simulación.	178
7.3. Procedimiento utilizado en la realización de las pruebas de campo.	179
7.4. Diseño de experimentos.	181
7.5. Conclusiones.	185
<b>CAPÍTULO 8: Conclusiones y trabajo a futuro.</b>	<b>187</b>
8.1. Conclusiones generales.	187
8.2. Trabajo a futuro.	189

<b>Referencias.</b>	<b>191</b>
<b>Apéndice A: Antecedentes de los cohetes.</b>	<b>197</b>
A.1. Introducción.	197
A.2. Breve historia acerca de los cohetes y cohetes sonda.	197
A.3. Antecedentes en el desarrollo de cohetes sonda en México.	220
<b>Apéndice B: Características de cohetes meteorológicos.</b>	<b>223</b>
B.1. Introducción.	223
B.2. Características de los cohetes meteorológicos de la NASA.	223
<b>Apéndice C: Ecuación de Barrowman.</b>	<b>228</b>
C.1. Introducción.	228
C.2. Presentación de ecuaciones.	228
<b>Apéndice D: Dibujo y cálculo del centro de presión del cohete a escala <i>Tonatiuh.</i></b>	<b>231</b>
D.1. Introducción.	231
D.2. Dibujo del cohete <i>Tonatiuh.</i>	232
D.3. Cálculo del centro de presión del cohete <i>Tonatiuh.</i>	233
<b>Apéndice E: Dibujo y cálculo del centro de presión del cohete de la <i>NACA.</i></b>	<b>234</b>
E.1. Introducción.	234
E.2. Dibujo del cohete <i>NACA.</i>	235
E.3. Cálculo del centro de presión del cohete <i>NACA.</i>	236
<b>Apéndice F: Antecedentes de métodos en el cálculo de trayectorias de cohetes.</b>	<b>237</b>
F.1. Introducción.	237
F.2. Métodos utilizados.	237

---

<b>Apéndice G: Determinación del ángulo de lanzamiento.</b>	<b>241</b>
G.1. Introducción.	241
G.2. Metodología empleada.	241
<b>Apéndice H: Métodos numéricos utilizados en la solución de las ecuaciones de movimiento</b>	<b>246</b>
H.1. Introducción.	246
H.2. Método de Diferencias Centradas y de Newton Raphson.	247
H.3. Método de Runge-Kutta Felbergh.	248

## Nomenclatura

### CARACTERES LATINOS

$a$	Radio del centro de la tierra a los polos.
$A$	Matriz de rotación ortogonal que transforma del sistema de coordenadas ABC al sistema de coordenadas ECI.
$A$	Sistema de coordenadas arbitrario.
$ABC$	Sistema de referencia ortogonal ubicado en el centro de masa del cohete y teniendo los ejes coordenados $[x, y, z]^T$ .
$b = r_E$	Radio ecuatorial de la tierra .
$B$	Sistema de coordenadas ortogonal arbitrario.
$B(t), B$	Matriz de rotación ortogonal que transforma del sistema de coordenadas ECI al sistema de coordenadas ABC.
$B_B$	Matriz de rotación ortogonal que transforma del sistema de coordenadas ABC al sistema de coordenadas NED.
$B_G$	Matriz de rotación ortogonal que transforma el sistema de coordenadas NED al sistema de coordenadas ECI.
$B_l$	Matriz de rotación ortogonal respecto a la longitud celestial.
$B_\mu$	Matriz de rotación ortogonal respecto a la latitud geográfica o geodésica.
$B\omega_E$	Vector de velocidad angular total.
$B(\omega_E xp)$	Vector velocidad traslacional absoluta de la masa de aire en coordenadas ABC.
$C_l$	Coefficiente de momento de balanceo.
$C_{IP}$	Coefficiente de amortiguación del momento de balanceo.
$C_m$	Coefficiente de momento de cabeceo.
$CM, cg$	Centro de masa del cohete.

---

$C_{mq}$	Coeficiente de amortiguación del momento de cabeceo.
$C_n$	Coeficiente lateral de arrastre aerodinámico respecto a alguno de los ejes $y, z$ .
$C_{nP}$	Coeficiente lateral de amortiguación de arrastre.
$(C_N)_F$	Coeficiente de la fuerza en las aletas.
$(C_N)_N$	Coeficiente de la fuerza en la punta.
$(C_N)_R$	Coeficiente de la fuerza total.
$(C_N)_T$	Coeficiente de la fuerza en la transición cónica.
$CP1, \bar{X}$	Distancia desde la punta del cohete al centro de presión total.
$CP$	Centro de presión del cohete.
$C_R$	Cuerda en la raíz de la aleta.
$C_T$	Cuerda en la punta de la aleta.
$C_x$	Coeficiente de arrastre aerodinámico axial.
$d$	Longitud de la envergadura en el plano de las aletas.
$d1$	Diámetro de la base de la punta del cohete.
$d_c$	Diámetro del cohete.
$d_F$	Diámetro en la parte frontal de transición.
$d_R$	Diámetro en la parte trasera de transición.
$e_0, e_1, e_2, e_3$	Componentes del vector de parámetros de Euler $\mathbf{q}$ .
$\dot{e}_0, \dot{e}_1, \dot{e}_2, \dot{e}_3$	Componentes del vector de derivada de parámetros de Euler $\dot{\mathbf{q}}$ .
$ECI$	Sistema de referencia ortogonal inercial centrado en la tierra y teniendo los ejes coordenados $[X, Y, Z]^T$ .
$f$	Parámetro de planicidad de la tierra.
$\mathbf{F}$	Vector suma de fuerzas aerodinámicas, de propulsión y gravitacionales.
$F$	Fuerza de empuje.
$\mathbf{F}_B$	Vector suma de las fuerzas aerodinámicas y de propulsión en coordenadas ABC.

---

$F_x = D, F_y, F_z$	Componentes del vector fuerza de arrastre aerodinámica.
$\mathbf{g}$	Vector de aceleración gravitacional de la tierra en coordenadas ECI.
$g$	Aceleración de la gravedad.
$\mathbf{g}'$	Vector de aceleración de la gravedad, normal a la superficie de la tierra en coordenadas ECI.
$g'_x, g'_y, g'_z$	Componentes del vector de aceleración de la gravedad, $\mathbf{g}'$ en coordenadas ABC.
$GM$	Constante gravitacional de la tierra.
$h$	Altura sobre el nivel del mar.
$\mathbf{H}_B$	Vector de momentum angular del cohete rígido en coordenadas ABC.
$j$	Constante gravitacional armónica.
$\mathbf{J}$	Matriz de inercia con los componentes dados en coordenadas ABC.
$J_x, J_y, J_z$	Momentos de inercia respecto al los ejes coordenados ABC.
$J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}$	Productos de inercia respecto a los ejes coordenados ABC.
$\dot{\mathbf{J}}$	Matriz de velocidad de variación constante de la inercia, con los componentes dados en coordenadas ABC.
$k$	Variable auxiliar.
$K$	Variable auxiliar.
$l$	Ángulo de longitud celestial.
$l_G$	Longitud geográfica.
$\bar{L}, M, N$	Componentes del vector del torque o momento neto $\mathbf{T}_B$ en coordenadas ABC, también para esta tesis, son las componentes de los momentos aerodinámicos.
$\mathbf{L}$	Matriz de transformación de tamaño 3 x 4, tratando con vectores de componentes locales.
$L_F$	Longitud de la media cuerda de la aleta.
$L_N$	Longitud de la punta del cohete.
$L_T$	Longitud de la pieza de transición (distancia desde $d_F$ hasta $d_R$ ).

---

$m$	Masa del cohete.
$\dot{m}$	Velocidad de variación constante de la masa del cohete.
$NED$	Sistema de referencia ortogonal ubicado en la superficie de la tierra y teniendo los ejes coordenados $[X', Y', Z']^T$ .
$\mathbf{p}(t), \mathbf{p}$	Vector de posición inercial en coordenadas ECI $[p_x, p_y, p_z]^T = [X, Y, Z]^T$ .
$\dot{\mathbf{p}}$	Vector de velocidad traslacional absoluta del centro de gravedad del cohete en coordenadas ECI.
$\ddot{\mathbf{p}}$	Vector de aceleración traslacional absoluta del centro de gravedad del cohete en coordenadas ECI.
$P$	Origen del sistema de coordenadas ABC .
$P, Q, R$	Componentes del vector de la velocidad angular absoluta $\boldsymbol{\omega}_B$ .
$\dot{P}, \dot{Q}, \dot{R}$	Componentes del vector de la aceleración angular absoluta $\dot{\boldsymbol{\omega}}_B$ .
$\mathbf{q}$	Vector de parámetros de Euler.
$\dot{\mathbf{q}}$	Vector de derivada de parámetros de Euler.
$q'$	Presión dinámica.
$Q$	Origen del sistema de coordenadas NED.
$\mathbf{r}$	Vector de posición de un elemento infinitesimal de masa $\delta m$ .
$r_{nm}$	Radio de la superficie terrestre al nivel del mar.
$\mathbf{R}$	Matriz de rotación cualquiera.
$R$	Radio posterior del cohete.
$\mathbf{s}$	Vector arbitrario cualquiera respecto a los ejes $xyz$ .
$\mathbf{s}'$	Vector arbitrario cualquiera respecto a los ejes $\xi\eta\zeta$ .
$S$	Área de la sección transversal del cohete.
$S1$	Semi-envergadura de la aleta.
$S^*$	Área total de las cuatro aletas del cohete.
$\mathbf{S}_\alpha$	Matriz de rotación ortogonal que transforma el sistema de coordenadas del cuerpo ABC al sistema de coordenadas de <i>ejes de estabilidad</i> .



---

$S_B$	Matriz de rotación ortogonal que transforma el sistema de coordenadas de <i>ejes de estabilidad</i> al sistema de coordenadas de <i>ejes de flujo del aire</i> .
$S_T$	Matriz de rotación ortogonal que transforma el sistema de coordenadas del cuerpo (ABC) al sistema de coordenadas de <i>ejes de flujo del aire</i> .
$t$	Tiempo.
$t_0$	Tiempo inicial de la trayectoria.
$t_b$	Tiempo en el momento que el cohete llega al blanco.
$t_c$	Tiempo total de la combustión del propelente.
$trB$	Traza de la matriz $B$ .
$T$	Vector de fuerza de empuje del motor en coordenadas ABC.
$T_B$	Vector del torque o momento neto actuando respecto al centro de gravedad del cohete en coordenadas ABC.
$T_x, T_y, T_z$	Componentes del vector de fuerza empuje del motor $T$ .
$u, v, w$	Componentes del vector de velocidad traslacional relativa $V_B$ .
$\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$	Componentes del vector de aceleración traslacional relativa $\dot{V}_B$ .
$u_R, v_R, w_R$	Componentes del vector velocidad del centro de gravedad del cohete respecto al vector de la velocidad del viento $V_R$ .
$v$	Magnitud de la velocidad del cohete, $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ .
$V_{Abs}$	Vector velocidad traslacional absoluta del centro de masa del cohete en coordenadas ABC.
$V_B$	Vector de velocidad traslacional relativa del centro de masa del cohete respecto a la masa de aire en coordenadas ABC.
$\dot{V}_B$	Vector de aceleración traslacional relativa del centro de masa del cohete respecto a la masa de aire en coordenadas ABC.
$V_{ESTAB}$	Vector de velocidad traslacional relativa del centro de masa del cohete respecto a la masa de aire en coordenadas de <i>ejes de estabilidad</i> .

---

$V_{\text{FLUJO}}$	Vector de velocidad traslacional relativa del centro de masa del cohete respecto a la masa de aire en coordenadas de <i>ejes del flujo del aire</i> .
$V_g$	Magnitud del viento geostrófico, $V_g = \sqrt{Wx_g^2 + Wy_g^2}$ .
$V_R$	Vector velocidad del centro de gravedad del cohete respecto a la velocidad del viento en coordenadas ABC.
$V_T$	Única componente del vector velocidad $V_{\text{FLUJO}}$ llamada como <i>velocidad verdadera del flujo del aire</i> , donde su magnitud es $V_T = \sqrt{(u_R^2 + v_R^2 + w_R^2)}$ .
$W_E, W_N, W_Z$	Componentes del vector velocidad del viento en coordenadas NED, los subíndices indican que se dirige en sentido positivo hacia el Este, Norte y Zenit respectivamente.
$[W_x, W_y, W_z]^T$	Componentes de la velocidad del viento en coordenadas NED.
$Wx_g, Wy_g$	Componentes del viento geostrófico en coordenadas NED.
$\ddot{X}, \ddot{Y}, \ddot{Z}$	Componentes del vector de aceleración traslacional inercial $\ddot{\mathbf{p}}$ .
$\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$	Componentes del vector de velocidad traslacional inercial $\dot{\mathbf{p}}$ .
$X = p_x, Y = p_y, Z = p_z$	Componentes del vector de posición inercial en $\mathbf{p}$ .
$X_B$	Distancia desde la punta del cohete hasta el borde del comienzo de raíz de la cuerda de las aletas.
$\bar{X}_F$	Distancia desde la punta del cohete al centro de presión de las aletas.
$\bar{X}_N$	Distancia desde la punta del cohete al centro de presión de la punta del cohete.
$X_P$	Distancia desde la punta del cohete hasta la parte frontal de la transición.
$X_R$	Distancia entre el borde del comienzo de la raíz de la aleta y el borde de la punta de la aleta paralela al cuerpo del cohete.
$\bar{X}_T$	Distancia desde la punta del cohete al centro de presión de la zona de transición cónica.
$\ddot{x}_0, \ddot{y}_0$	Componentes rectangulares de la aceleración inicial del cohete.

---

$\dot{x}_0, \dot{y}_0$	Componentes rectangulares de la velocidad inicial del cohete.
$x_0, y_0$	Componentes rectangulares de la posición inicial del cohete.
$\ddot{x}_b, \ddot{y}_b$	Componentes rectangulares de la aceleración en el momento que el cohete llega al blanco.
$\dot{x}_b, \dot{y}_b$	Componentes rectangulares de la velocidad en el momento que el cohete llega al blanco.
$x_b, y_b$	Componentes rectangulares de la posición en el momento que el cohete llega al blanco.
$\ddot{x}_c, \ddot{y}_c$	Componentes rectangulares de la aceleración en el momento que termina la combustión del propelente.
$\dot{x}_c, \dot{y}_c$	Componentes rectangulares de la velocidad en el momento que termina la combustión del propelente.
$x_c, y_c$	Componentes rectangulares de la posición en el momento que termina la combustión del propelente.
$0$	Origen del sistema de coordenadas ECI.

### CARACTERES GRIEGOS

$\alpha$	Ángulo de acimut de lanzamiento.
$\alpha$	Ángulo de ataque.
$\beta$	Ángulo de deslizamiento.
$\delta m$	Elemento infinitesimal de la masa.
$\Delta$	Tamaño del incremento.
$\Delta$	Variable auxiliar.
$\phi$	Ángulo entre la horizontal y la dirección del vector empuje.

---

---

$\phi_b$	Ángulo entre la horizontal y la dirección del vector empuje de llegada al blanco.
$\lambda$	Latitud geocéntrica.
$\mu$	Latitud geográfica o geodésica.
$\mu_{(\xi)}, \mu_{(\eta)}, \mu_{(\zeta)}$	Vectores unitarios definidos a lo largo de los ejes $\xi\eta\zeta$ .
$\mu_{(\xi)}, \mu_{(\eta)}, \mu_{(\zeta)}$	Componentes de los vectores unitarios $\mu_{(\xi)}, \mu_{(\eta)}, \mu_{(\zeta)}$
$\mu_{(x)}, \mu_{(y)}, \mu_{(z)}$	Vectores unitarios definidos a lo largo de los ejes $xyz$ .
$\mu_{(x)}, \mu_{(y)}, \mu_{(z)}$	Componentes de los vectores unitarios $\mu_{(x)}, \mu_{(y)}, \mu_{(z)}$ .
$\Omega_B$	Matriz que equivale al producto vectorial de la velocidad angular absoluta $\omega_B$ .
$\Omega_E$	Matriz que equivale al producto vectorial de la velocidad angular terrestre $\omega_E$ .
$\Omega_q$	Matriz que equivale al producto vectorial de parámetros de Euler $q$ .
$\rho$	Densidad del aire.
$\frac{\partial p_r}{\partial x}$	Diferencia de presión entre las isobaras y sus distancias entre sí.
$\theta$	Ángulo de elevación de lanzamiento.
$\Gamma$	Variable auxiliar.
$\omega'$	Vector arbitrario de la velocidad angular dada en coordenadas locales.
$\omega_B$	Vector de velocidad angular absoluta del cohete en coordenadas ABC.
$\dot{\omega}_B$	Vector de aceleración angular absoluta del cohete en coordenadas ABC.
$\omega_E$	Vector de velocidad angular absoluta de la tierra en coordenadas ECI.
$\omega_E \times (\omega_E \times \mathbf{p})$	Vector de aceleración centrípeta.
$(\omega_E \times \mathbf{B} \omega_E) \times \mathbf{V}_B$	Vector de aceleración tangencial.

## Indice de figuras.

### *Capítulo 1.*

- 1.1. Atmósfera terrestre. 2

### *Capítulo 2.*

- 2.1. Explorador Internacional de rayos Ultravioleta (IUE). 17
- 2.2. Telescopio Hopkins de rayos ultravioleta (HUT). 17
- 2.3. Satélite TRACE. 18
- 2.4. Tipos de cohetes sonda actuales utilizados por la NASA. 21
- 2.5. Desempeño de motores con variación de la carga útil en cohetes sonda de la NASA. 22
- 2.6. Trayectoria que lleva a cabo un cohete sonda para cumplir su misión. 23
- 2.7. Otra figura mostrando la trayectoria desarrollada por un cohete sonda para cumplir su misión. 24
- 2.8. Fotografía de una trayectoria que sigue un cohete sonda para lograr su misión lanzado desde Poker Flat Research Range en Alaska. 25
- 2.9. Bosquejo general de los componentes principales de un cohete sonda. 29
- 2.10. Isométrico y despiece general de los componentes principales de un cohete sonda. 29

### *Capítulo 3.*

- 3.1. Sistema de coordenadas para el análisis cinemático. 37
- 3.2. Posición inicial del sistema de referencia del cohete ABC en la plataforma de lanzamiento NED. 39
- 3.3. Ángulo de longitud celestial  $l$ , mostrando el sentido de giro positivo. 41
- 3.4. Cohete con cuatro aletas y suponiendo tres planos de simetría;  $x$ - $z$ ,  $y$ - $z$ ,  $x$ - $y$ . 57

3.5.	Vectores unitarios a lo largo de los ejes del sistema de coordenadas local y global.	62
3.6a.	Sistemas de coordenadas de rotación: a). Punto de vista activo.	64
3.6b.	Sistemas de coordenadas de rotación: b). Punto de vista pasivo.	64
3.7a.	Vientos medios anuales en latitud geográfica Norte.	76
3.7b.	Vientos medios anuales de latitud geográfica Sur.	77

#### ***Capítulo 4.***

4.1.	Fuerzas y momentos que actúan, y definición de ejes y ángulos aerodinámicos en un cohete rígido.	80
4.2.	Túnel de viento subsónico del I.T.E.S.M.	94
4.3.	Modelo de aeronave con instrumentación para medir los momentos y fuerzas aerodinámicas dentro de un túnel de viento.	96
4.4.	Montaje típico de un modelo de aeronave en la sección de prueba del túnel de viento.	97

#### ***Capítulo 5.***

5.1.	Trayectoria de vuelo del cohete sonda en movimiento plano y el vacío.	109
5.2.	Trayectoria de vuelo del cohete sonda en movimiento plano y con una fuerza de arrastre aerodinámica.	113
5.3.	Diagrama de cuerpo libre del cohete sonda en el despegue.	119
5.4.	Diagrama de flujo del programa computacional escrito en FORTRAN'90.	131
5.5.	Diagrama de flujo del programa computacional escrito en MAPLE V Release 4.	143

#### ***Capítulo 6.***

6.1.	Curva de la fuerza de empuje del motor ESTES C6-3.	148
6.2.	Curva de la fuerza de empuje del motor AEROTECH K1050W-PLUG.	149
6.3a.	Vista lateral del cohete montado sobre el balanceador.	151
6.3b.	Vista frontal del cohete durante el montaje.	151

---

6.4.	Ajuste del balanceador durante el montaje del cohete.	152
6.5.	Encendido del motor del túnel y fijación de valor de la velocidad del aire.	152
6.6.	Medición de la fuerza de arrastre.	153
6.7.	Gráfica de $C_x$ vs $v$	155
6.8.	Curva del coeficiente de arrastre axial.	156
6.9.	Curva del coeficiente de arrastre lateral.	156
6.10.	Curva del coeficiente de momento de cabeceo.	157
6.11.	Curva del coeficiente de momento de balanceo.	157
6.12.	Curva del coeficiente de amortiguación de balanceo.	158
6.13.	Alcance horizontal del cohete con diferentes ángulos de lanzamiento para un blanco ubicado en $y_b = 0$ .	160
6.14.	Simulación de la trayectoria del cohete sonda Tonatiuh con un ángulo de lanzamiento de $30^\circ$ .	162
6.15.	Simulación de la trayectoria del cohete de la NACA con un ángulo de lanzamiento de $70^\circ$ .	163
6.16.	Simulación de la trayectoria del cohete Tonatiuh con un ángulo de lanzamiento de $30^\circ$ .	164
6.17.	Simulación de la trayectoria del cohete de la NACA con un ángulo de lanzamiento de $70^\circ$ .	165
6.18.	Simulación de la trayectoria del cohete NACA con ángulos de lanzamiento de $20^\circ$ de elevación y $0^\circ$ de acimut.	167
6.19.	Gráfica de la trayectoria en el vacío versus trayectoria con coeficiente de arrastre aerodinámico para el cohete <i>Tonatiuh</i> .	171
6.20.	Gráfica de la trayectoria en el vacío versus trayectoria con coeficiente de arrastre aerodinámico versus trayectoria con seis grados de libertad, para el cohete de la <i>NACA</i> .	172

### **Capítulo 7.**

7.1.	Componentes del cohete sonda a escala <i>Tonatiuh</i> .	179
7.2.	Cohete sonda a escala ensamblado.	179

7.3.	Esquema de los lanzamientos realizados.	180
------	---	-----

### *Apéndice A.*

A.1.	Aelopile inventado por Hero de Alejandría.	199
A.2.	Tubos de bambú montados sobre las flechas que utilizaron los Chinos.	200
A.3.	Primeros cohetes lanzados por los Chinos.	200
A.4.	Cohete de superficie tipo torpedo diseñado por Joanes de Fontana.	201
A.5.	Bosquejo de la silla voladora del oficial Wan-Hu.	202
A.6.	Konstantin Eduardovich Tsiolkovsky.	204
A.7.	Diseño de cohetes de Tsiolkovsky.	205
A.8.	Robert H. Goddard, año de 1935, foto tomada en su taller.	205
A.9.	El primer cohete con combustible líquido diseñado por el Dr. Goddard en 1926.	207
A.10.	Fotografía tomada antes del primer vuelo del cohete en 1926.	207
A.11.	Hermann Oberth	208
A.12.	Fotografía de Wernher Von Braun en 1926.	209
A.13.	Cohete Alemán V-2 (A-4).	210
A.14 y A.15.	Fotografía de la preparación y el lanzamiento de un cohete V-2 lanzado desde White Sands, NM.	211
A.16.	Cohete Atlas.	212
A.17.	Cohete Titan.	212
A.18.	Cohete Redstone, 1959.	213
A.19.	Satélite Sputnik I, lanzado en 1957.	214
A.20.	Satélite Explorer I, lanzado en 1958.	214
A.21.	Globos sonda construidos de polietileno.	215
A.22.	Cohete Aerobee, 1949.	216
A.23.	Cohete Viking, 1949.	217
A.24.	Configuración del cohete sonda Super Loki	219
A.25.	Preparativos para el lanzamiento del cohete sonda Super-Loki.	220
A.26.	Lanzador y cohete Super Loki.	220



***Apéndice C.***

- C.1. Nomenclatura en las dimensiones del cohete. 229

***Apéndice G.***

- G.1. Barrido de trayectorias comenzando con un ángulo inicial de  $-90^\circ$  y con incrementos de  $5^\circ$ . 243
- G.2. Determinación de  $y'_b$  correspondiente a  $x_b$ . 244
- G.3. Determinación del ángulo del blanco requerido  $\phi_b$  para satisfacer los requerimientos de llegada  $x_b$  y  $y_b$ . 245

## Indice de tablas.

### *Capítulo 1.*

- 1.1 División térmica de la atmósfera terrestre. 3

### *Capítulo 4.*

- 4.1. Datos técnicos del túnel de viento del ITESM. 95

### *Capítulo 5.*

- 5.1. Métodos utilizados en el cálculo de trayectorias de cohetes. 104
- 5.2. Suposiciones particulares para el análisis del modelo matemático básico de la trayectoria de los cohetes. 108
- 5.3. Suposiciones particulares para el modelo matemático que considera la fuerza de arrastre aerodinámica. 116

### *Capítulo 6.*

- 6.1. Valores de la fuerza de arrastre obtenidos en pruebas de laboratorio para una muestra de cuatro cohetes a escala. 153
- 6.2. Valores del coeficiente de arrastre como función de la velocidad. 154
- 6.3. Resumen de las variables utilizadas en los modelos matemáticos bajo análisis. 169
- 6.4. Comparación del tiempo de simulación y del error, obtenidos en los dos modelos matemáticos utilizados en la simulación de la trayectoria del cohete *Tonatiuh*. 171
- 6.5. Comparación del tiempo de simulación y del error, obtenidos en los tres modelos matemáticos utilizados en la simulación de la trayectoria del cohete de la *NACA*. 173

### *Capítulo 7.*

- 7.1. Experimentos realizados con dos objetivos y 5 replicas. 180

7.2. Diseño experimental de 8 corridas con motores B4-4 para cumplir el objetivo de 140 mts en $x$ y -1 mts en $y$ .	182
7.3. Diseño experimental de 8 corridas con motores C6-3 para cumplir el objetivo de 150 mts en $x$ y 3 mts en $y$ .	182
7.4. Variables que intervienen durante la simulación de lanzamientos del cohete <i>Tonatiuh</i> .	183
7.5. Efectos de las variables en la distancia recorrida del cohete (mts).	183

---

*El espacio es bello y ordenado. Hay regularidad en él. Es predecible.  
Todo en él obedece a las leyes físicas. Si conocemos esas leyes  
y las obedecemos, el espacio nos tratará bien.*

***Wernher Von Braun***

# Capítulo 1

## Descripción del trabajo de investigación

### 1.1. Introducción

La motivación que dio origen a esta tesis se debe a que, en Enero de 1998 la Secretaría de Marina Armada de México solicitó al Centro de Inteligencia Artificial del ITESM Campus Monterrey, estudios relacionados con cohetes meteorológicos. Esta tesis es la continuación de este trabajo en el cual participé y que duró aproximadamente año y medio. La información y el contenido de la tesis se enriqueció con bibliografía más especializada obtenida en los meses subsecuentes.

La tesis aquí presentada está enfocada principalmente al análisis y simulación de las trayectorias que siguen los cohetes meteorológicos. Estos vehículos llevan instrumentos meteorológicos y han sido utilizados por cerca de 50 años para realizar rutinas de observaciones de la atmósfera de la tierra entre los 20 y los 250 kms de altura (ver figura 1.1). Estos cohetes son unos de los mejores vehículos para sondear (investigar) esta “*atmósfera media*”, la cual está situada sobre el límite superior de vuelo de la mayoría de aeroplanos (en la zona de la troposfera) y bajo el límite inferior de vuelo de

muchos satélites orbitales (en la zona de la termosfera). La atmósfera media corresponde a la accidentada zona intermedia, que se encuentra en una parte de la zona superior de la estratosfera y que se introduce en la mesosfera llegando hasta la base inferior de la termosfera, como puede observarse en la figura 1.1. Para referencia de las diferentes capas de transición debidas a la distribución de temperaturas, ver la tabla 1.1. Como puede notarse, en la región de la atmósfera media que forma parte de la estratosfera hay una capa de máxima concentración de ozono.

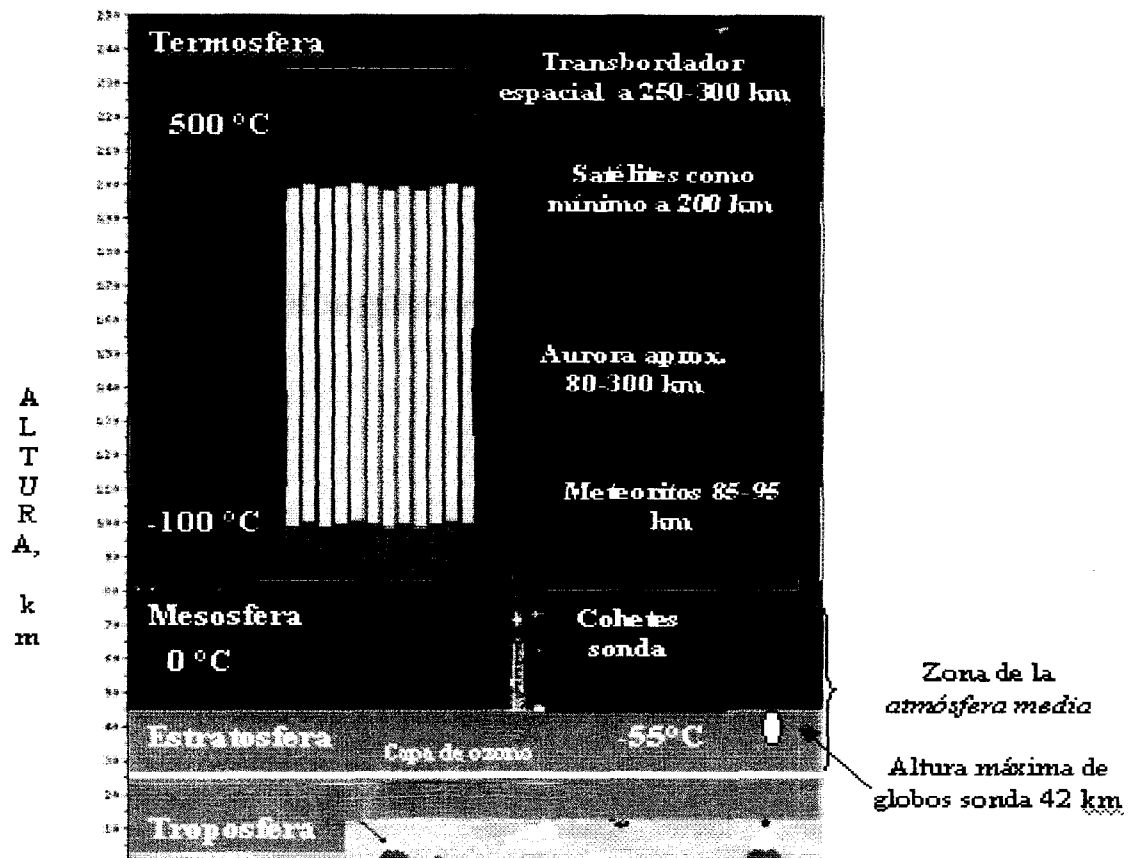


Figura 1.1. Atmósfera terrestre [1].

En la tabla 1.1, se muestran las regiones en que esta conformada la atmósfera y la distancia que ocupan respecto al nivel del mar.

**Tabla 1.1.** División térmica de la atmósfera terrestre [2].

<b>REGIÓN</b>	<b>ALTURA MEDIA (Km).</b>
<b>Troposfera</b>	0-13
<b>Estratosfera</b>	13-25
<b>Mesosfera</b>	25-80
<b>Termosfera</b>	80-800
<b>Exosfera</b>	Más de 800.

Una gran cantidad de cohetes meteorológicos, también conocidos como *cohetes sonda*, contienen típicamente sensores de temperatura. Otras variables termodinámicas pueden ser calculadas de los datos recolectados por el sensor, tales como la presión y la densidad del aire, entre otras. Estas variables pueden calcularse ya sea de acuerdo a las ecuaciones termodinámicas o por medio de medidores especiales de presión, densidad, etc., a bordo del vehículo. Los datos del viento (velocidad y dirección del viento) son determinados de acuerdo a los datos de posición determinados por el radar que se encuentra en un lugar fijo sobre la superficie terrestre. Algunos cohetes pueden contener diseños de instrumentación para sondeos especiales que midan ozono, vapor de agua, campos eléctricos, etc. También han sido lanzados desde cohetes: los globos sonda, reflejadores de zumbido y granadas; para estudiar la estructura de la atmósfera media [3].

Durante este capítulo se expondrá la descripción del problema a tratar en esta tesis, también se expondrá el valor agregado que se busca aportar, así como su justificación y sus respectivos alcances.

## **1.2. Definición del problema**

Durante las primeras etapas en el desarrollo y diseño de cohetes sonda, el análisis y simulación de trayectorias a las que serán sujetas tales naves aéreas es de relevante importancia, esto, debido a la necesidad de conocer los posibles factores (tales como: velocidades y aceleraciones, entre otras) y requerimientos (por ejemplo: tipo de motor, dimensiones geométricas para obtener estabilidad, etc.) necesarios para obtener el

desempeño adecuado de vuelo, y como resultado llegar al objetivo y completar la misión planeada.

Es por ello, que esta tesis hace énfasis en la elaboración de un programa computacional que resuelva un modelo matemático para llevar a cabo la simulación de trayectorias de *cohetes sonda* durante su vuelo, sin limitaciones de carga útil y con un alcance al apogeo u objetivo limitado solo por la capacidad del motor que se empleará, así también, este programa computacional contará con la capacidad de otras consideraciones que se explicarán con más detalle en las secciones subsecuentes.

### **1.3. Objetivo de la investigación**

A continuación se presentan los objetivos de este trabajo de tesis:

- Documentación de un modelo matemático que describa el comportamiento de la trayectoria del cohete sonda.
- Utilización y aplicación de un método numérico para resolver el sistema de ecuaciones que forman parte del modelo matemático.
- Desarrollo de un programa computacional para resolver el método numérico propuesto, y que simule la trayectoria del cohete sonda.
- Validación de la exactitud y la precisión de la simulación realizada por el programa, esto, mediante la realización de pruebas de campo con modelos de cohetes sonda a escala (se llevará a cabo el diseño y la fabricación de los cohetes sonda a escala que se utilizarán para esta validación).

### **1.4. Hipótesis de la investigación**

Con el programa computacional desarrollado en esta tesis, el cual lleva a cabo la simulación de la trayectoria de un cohete sonda, se obtendrán valores suficientemente aceptables (dentro de una tolerancia adecuada) comparada con el blanco requerido. Para ello, se utilizará un modelo a escala de un cohete sonda lanzado en experimentos de pruebas de campo.

## 1.5. Justificación de la investigación

En estos días, con el advenimiento de nuevas tecnologías en el ramo de la aeronáutica y la astronáutica, se puede apreciar que es necesario adquirir conocimientos de tales áreas en nuestro país. Tales tecnologías se han aplicado con éxito en otras naciones, por lo cual, estos países han obtenido de estas disciplinas una parte importante en su crecimiento científico, económico, financiero y militar.

Dada la situación económica mundial, la mayoría de los países del mundo no cuentan con condiciones económicas y con un desarrollo tecnológico que les permita disponer de tal aplicación tecnológica.

De ahí que, los países más pobres (entre ellos México) no están aún en condiciones de aprovechar la libertad de utilización y exploración de la atmósfera y del espacio.

En particular, las tecnologías de cohetes sonda son manejadas a gran escala por los llamados *países desarrollados*, quienes cada vez tienen el poder de usar esta tecnología para la implementación de nuevas investigaciones científicas, y por consecuencia un rápido desarrollo en varios campos científicos.

Debido a la motivación que origina este campo de estudio de trayectorias en cohetes sonda, se establecerán las contribuciones que se buscan generar en esta tesis:

- Reunir la documentación acerca de este tema, el cual no ha sido explotado sustancialmente en este país.
- Poner a disposición la información y resultados que se obtengan de esta tesis, a aquellas personas que tengan interés en profundizar en esta área y en los que deriven de ésta.

## 1.6. Limitaciones

- Las limitaciones serán en mayor grado debido a la escasez de instrumentación y equipo que se tiene disponible, y que es necesaria para determinar el desempeño del modelo a escala del cohete (utilizado para validar la simulación) durante toda su trayectoria en las pruebas de campo.



- Otra limitación que se tiene en este momento es el túnel de viento, ya que el del I.T.E.S.M. Campus Monterrey sólo tiene la capacidad para manejar velocidades máximas del aire de 26 m/seg, la cual dista de las velocidades utilizadas para esta tesis (como referencia, la velocidad del sonido para condiciones estándar de 20°C y densidad atmosférica al nivel del mar es de 373 m/seg.)

### 1.7. Delimitaciones o alcances

El enfoque principal en esta tesis, es el de desarrollar un programa computacional para predecir la trayectoria de cohetes sonda, así como de, probar la exactitud y la precisión de la modelación y simulación mediante pruebas de campo con cohetes a escala, así entonces, la utilización del diseño y experimentación sólo serán una herramienta para lograr dicha misión.

El programa general que se desarrollará contará con las siguientes delimitaciones en la simulación de la trayectoria:

- ◆ La **trayectoria** será simulada en su forma más general en tres dimensiones.
- ◆ El **cohete** será considerado ya sea como, una partícula o como un cuerpo rígido en el espacio.
- ◆ Se simularán trayectorias con **cohetes sonda** que describen una trayectoria libre o también llamada *trayectoria balística*.
- ◆ La velocidad y la dirección del **viento** en el caso general se considerarán como:
  - Actuando en cualquier dirección sobre el cohete.
  - Será función de la altura y de la latitud geográfica.
- ◆ El **motor** que se considerará tendrá las siguientes características:
  - Cualquier función del empuje respecto al tiempo.
  - Deberá tener una sola tobera o en otro caso, varias toberas con la condición de que el flujo de gases expulsados sean en la dirección axial del cohete, y que las toberas tengan su movimiento restringido.

- Se considerará la variación de la masa del motor debido al consumo del propelente.
  - Se considerará el tipo de combustible sólido.
- ◆ Se analizarán trayectorias de cohetes que vuelen ya sea a **velocidades subsónicas** (menores o iguales a 373 m/seg en condiciones atmosféricas estándar) y **supersónicas**.
- ◆ Para la simulación del cohete sonda considerándolo como una partícula en el espacio, actuará sólo la **fuerza de arrastre** como la única fuerza aerodinámica, por otra parte, considerando al cohete como un cuerpo rígido, actuarán **tres fuerzas de arrastre aerodinámicas**, así como, **tres momentos aerodinámicos**.
- ◆ Los **coeficientes de las fuerzas y momentos aerodinámicos** serán obtenidos de algún artículo, libro, reporte científico o por experimentación en el túnel de viento de esta institución.
- ◆ Se utilizará un **diseño de modelo a escala de cohete sonda** con consideraciones geométricas particulares (no necesariamente óptimas).
- ◆ La **carga útil** será considerada de acuerdo a:
  - Utilizada para soltarse del cohete sonda en la zona de apogeo de la trayectoria.
  - Es un instrumento científico.
- ◆ La **densidad atmosférica** será considerada como función de la altura.
- ◆ La **fuerza gravitacional** en su caso general se considerará como función de la altura sobre el nivel del mar y de la latitud geográfica.
- ◆ La **experimentación** con los modelos a escala de cohete sonda, se realizarán con el objetivo de validar la exactitud y la precisión (de la predicción del programa computacional) del blanco (apogeo) requerido para la descarga de la carga útil, y sólo se limitará esta experimentación a recabar las mediciones del radio de descarga respecto al objetivo, y por lo tanto, a la comparación con los resultados arrojados en la simulación (*Nota:* No incluirá mediciones del desempeño del modelo a escala de cohete sonda durante toda la trayectoria ni alguna otra medida adicional).
- ◆ El **movimiento del cohete** durante toda su trayectoria será traslacional y/o angular (dependiendo de la consideración como partícula o cuerpo rígido).

- ◆ Se considerará que **la trayectoria y el desplazamiento del cohete** se llevarán a cabo dentro de la atmósfera terrestre utilizando el aire como medio y que no se considerará en algún otro medio (dentro del mar, etc.) y donde sólo exista la fuerza de atracción gravitacional ejercida sólo por la tierra.
- ◆ Se considerarán **cohetes sonda** configurados de una sola etapa de combustión.
- ◆ **La plataforma de lanzamiento** podrá ser fija o móvil, y se determinará el porcentaje de error debido a la tolerancia en el movimiento (deflexiones) de sus componentes, esta tolerancia será estimada experimentalmente.
- ◆ **El blanco de descarga de la carga útil (zona de apogeo)** se considerará como estrictamente fijo.
- ◆ **La longitud de la plataforma de lanzamiento**, se considerará como preestablecida (no necesariamente la óptima).
- ◆ No se considerará el valor del **coeficiente de fricción entre la plataforma de lanzamiento y el cohete**.
- ◆ En el caso general se considerará el efecto de la **rotación de la tierra**.
- ◆ El **alcance de la trayectoria** estará limitada solo por el empuje de los motores (el análisis de la trayectoria se limita sólo dentro de la atracción gravitacional terrestre).
- ◆ Se podrá simular el **lanzamiento del cohete sonda** desde el aire (helicópteros, aviones, etc. - considerando que se encuentra estable estática y dinámicamente en el momento del despegue -) y por tierra. Además será posible lanzarse desde cualquier ángulo que sea requerido.
- ◆ Será calculado el **tiempo de despegue del cohete sonda**, utilizando cada tipo de motor especificado.

♦ **Simulador**

El simulador trabajará con los siguientes *datos de entrada*:

- **Tipo de cohete (se introducirá numeración):** Donde se incluirán las características físicas del cohete, tales como, las dimensiones, peso, etc. (irán implícitos los coeficientes de las fuerzas y momentos aerodinámicos, así como, dimensiones de la plataforma de lanzamiento, entre otras).
- **Coordenadas de localización del punto de lanzamiento (en el análisis más general, serán la longitud celestial y latitud geográfica).**
- **Coordenadas de localización del blanco (apogeo) de entrega de la carga útil (en el análisis más general, serán la latitud geográfica y la altura sobre el nivel del mar).**
- **Tipo de motor (se introducirá numeración):** Donde estará preestablecida la función del empuje, peso del motor, peso del propelente, tiempo de combustión, etc.
- **Tipo de carga útil (se introducirá numeración):** Se colocará el tipo de carga útil (nomenclatura preestablecida con valores del peso) que se transportará.

El simulador trabajará con los siguientes *datos de salida*:

- **Mensaje de éxito o fracaso en la llegada al blanco** (indicar si el cohete es incapaz de llegar al blanco, o si el cohete sobrevoló la frontera territorial fuera de lo indicado - por ejemplo, invasión aérea a otro país, etc.-).
- **Ángulo de lanzamiento** para llegar al blanco de entrega de la carga útil.
- **Tiempo en que se llega al blanco de entrega de la carga útil.**
- **Presentación de valores de las variables en función del tiempo** (tales como: posición, tiempo de despegue, velocidad, ángulo de la velocidad y ángulo de la aceleración del cohete sonda; además, empuje del motor, fuerza de gravedad, fuerza de arrastre, densidad atmosférica, etc.)

- **Presentación de valores de variables de importancia en el resultado de la simulación** (ejemplo: posición, velocidad, aceleración, tiempo hasta la llegada al blanco, etc.)

Para la simulación se descartarán consideraciones que tengan relación con:

- Condiciones meteorológicas adversas tales como; lluvia, granizo, nieve, ciclones, huracanes, remolinos, tormentas, etc.
- Otros.

En los capítulos siguientes de esta tesis, serán más evidentes las delimitaciones mencionadas anteriormente.

## **1.8. Organización de la tesis**

La tesis se encuentra estructurada con ocho capítulos.

Después de haber leído este capítulo, han quedado mostrados los objetivos, la justificación, los alcances, las limitaciones y las delimitaciones que contiene esta tesis.

El capítulo 2 presenta un importante contenido que ayuda a conocer a grandes rasgos a los cohetes sonda, y se complementa con los apéndices A y B. Este capítulo será de mucha utilidad para lectores que no estén familiarizados con estos vehículos. Además, este capítulo contiene las recomendaciones de estabilidad durante el vuelo (que se complementa con el apéndice C), que deben tomarse en cuenta en el diseño de cohetes sonda.

El capítulo 3 contiene la deducción de las ecuaciones de movimiento del cohete. Además, se establece el sistema de coordenadas de referencia para desarrollar el análisis cinemático, y se lleva a cabo el análisis dinámico. También se presentan los parámetros de Euler utilizados para evitar singularidades en las matrices de transformación y se obtienen las ecuaciones de las variables utilizadas en las ecuaciones de movimiento.

El capítulo 4 contiene el análisis de las fuerzas y momentos aerodinámicos. De este análisis se obtienen las ecuaciones aerodinámicas que, junto con las ecuaciones de movimiento obtenidas en el capítulo 3, complementan el sistema de

ecuaciones que representan la trayectoria de un cohete. Además, en este capítulo se muestra la obtención experimental de las fuerzas y los momentos aerodinámicos mediante la utilización de un túnel de viento.

El capítulo 5 contiene al sistema general de ecuaciones de movimiento del cohete. Además, se presentan a grandes rasgos los antecedentes de los métodos numéricos utilizados para la solución de las ecuaciones de movimiento a lo largo de la historia, el cual se complementa con el apéndice F. En este capítulo se obtienen los tres modelos matemáticos que se analizan en esta tesis, así como la metodología llevada a cabo para obtener sus soluciones y la descripción de los programas computacionales realizados.

El capítulo 6 contiene los casos de estudio donde son utilizados dos cohetes, por un lado un cohete a escala llamado *Tonatiuh* y por el otro un cohete diseñado por la *NACA* (National Advisory Committee for Aeronautics), además de dos motores comerciales. Así, utilizando los cohetes y motores, se obtienen las trayectorias con cada uno de los tres modelos matemáticos, y finalmente se lleva a cabo una comparación de los resultados obtenidos. Este capítulo se complementa con los apéndices D y E.

El capítulo 7 contiene el diseño de los cohetes a escala *Tonatiuh*, utilizados para validar mediante pruebas de campo a uno de los modelos matemáticos. Además, se lleva a cabo un diseño de experimentos para obtener el factor más importante en la dispersión de las trayectorias de los cohetes.

Finalmente en el capítulo 8 se presentan las conclusiones generales, así como, el trabajo a futuro.

## **1.9. Conclusiones**

La utilización principal de cohetes sonda tiene fines científicos y educativos. En los programas de Universidades, tales como los hacen la Universidad de Michigan y la Universidad de Wisconsin, los alumnos desarrollan experimentos con pequeños cohetes sonda para llevar a cabo el estudio práctico de las leyes físicas, sensibilizarlos de su utilización y aplicar los conocimientos teóricos que aprenden en las aulas de clase, como se describe en la referencia [4].

La simulación de trayectorias es una parte muy importante en el diseño y la implementación de un cohete sonda.

En el presente capítulo se han mostrado las razones que han motivado al autor a la realización de esta tesis, así como, de su justificación, alcances y contribuciones. También se presentó la organización de la tesis.

El programa computacional propuesto en esta tesis será de gran ayuda para obtener resultados que puedan ser útiles en la toma de decisiones en el diseño y lanzamiento de cohetes sonda de manera preliminar.

En los siguientes capítulos se detallarán los fundamentos del modelo matemático bajo análisis y el desarrollo del programa computacional. Sin embargo, antes de ello es importante conocer de una forma general a los cohetes sonda y esto será tema del siguiente capítulo.

*Es difícil decir que es imposible, los sueños de ayer son  
la esperanza de hoy y la realidad del mañana.  
Robert Goddard, Padre de la cohetaría moderna.*

## Capítulo 2

### Cohetes y cohetes sonda

#### 2.1. Introducción.

Este capítulo se encuentra dividido en dos partes, en primer lugar se presenta la clasificación general de cohetes sonda. En esta primera parte del capítulo se presentan tanto las características generales, su clasificación, las razones por las que aún es redituable lanzar cohetes sonda para la investigación científica, los tipos de cohetes que existen actualmente en la NASA, se detallan las misiones a las que son encomendados y finalmente se describen brevemente las partes principales que componen a un cohete sonda. El lector puede ver una breve historia de la aparición de los cohetes en el apéndice A.

En la segunda parte de este capítulo se indicarán las recomendaciones de estabilidad durante el vuelo que se deben tomar en cuenta en el diseño de un cohete sonda, la idea es mostrar en este momento este concepto para que el lector observe a grandes rasgos la problemática del análisis que se llevará a cabo durante esta tesis.



## 2.2. Clasificación general de cohetes y cohetes sonda.

En esta primera sección del capítulo se mostrarán los detalles de las características físicas y de desempeño generales más importantes de cohetes sonda.

### 2.2.1. Clasificación y características generales.

Es hora de conocer en detalle al cohete, símbolo por excelencia de la era espacial. Los cohetes generalmente se pueden clasificar de acuerdo con sus aplicaciones, el tipo de combustible que usan y su tamaño, atendándose además en algunos casos a su tipo de construcción y a los sistemas de alimentación del combustible que emplean. Tomando en consideración estas cualidades se presenta la siguiente clasificación [5]:

#### *Por su tipo de aplicación*

- Sistema principal de propulsión para aviones (ejemplos, American Bell XS-1, North American X-3 y el X-15).
- Sistema auxiliar de propulsión para aviones (ejemplo, caza Alemán Me-262).
- Sistema auxiliar de propulsión para aviones en el despegue.
- Projectiles cohete.
- Projectiles cohete dirigidos (misiles).
- Cohetes meteorológicos o sonda.
- Satélites artificiales, y naves interplanetarias.
- Otras aplicaciones (ejemplo; lanchas, trineos, etc.)

#### *Por su tipo de combustible utilizado [50]*

- Cohetes de combustible líquido.
- Cohetes de combustible sólido.
- Cohetes de combustible líquido y sólido combinados (híbridos).

***Por su tamaño***

El tamaño del cohete está en función de:

- Peso total de la unidad.
- Empuje obtenido.
- Duración de la combustión.
- Relación empuje-peso del sistema.
- Impulso total.

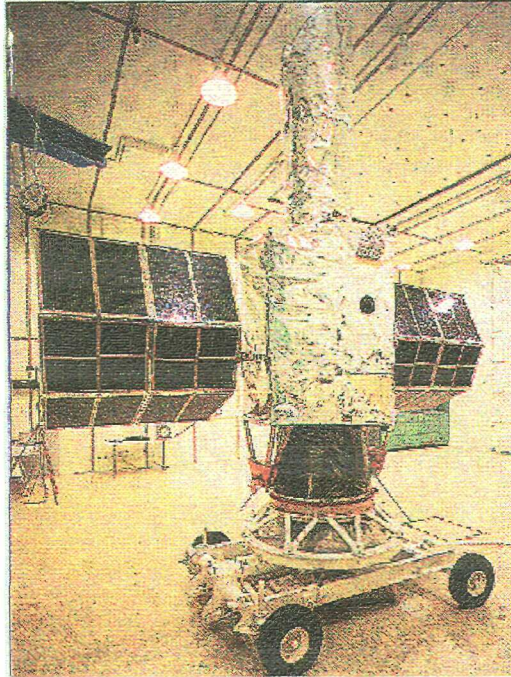
El enfoque dado en esta tesis es en lo que respecta a los cohetes sonda, a continuación se presentan las características generales de este tipo de cohetes.

Los cohetes sonda tienen ventajas sobre otras formas utilizadas para conducir experimentos por las siguientes razones [6], [7]:

- ***Costo:*** Los experimentos llevados a cabo por medio de cohetes sonda son relativamente baratos comparados con los realizados por grandes satélites artificiales y naves espaciales. Estos costos también se reducen debido a que el programa es dirigido desde un local central (por ejemplo, el equipo de vuelo de Wallops/NASA), lo que significa que se pueden hacer ahorros a través de operaciones eficientes que ordene accesorios, partes y motores de cohetes en grandes cantidades y utilizar diseños anteriores de subsistemas para misiones posteriores. En otras palabras, el programa toma ventajas de un alto grado en la especialización de desarrollo de cohetes, cargas útiles y subsistemas que vuelan repetidamente. (En muchos casos, sólo el experimento – provisto por los científicos – es cambiado). En algunos casos, las cargas útiles son recuperadas, lo cual significa que los costos del experimento y los subsistemas puedan distribuirse sobre muchas misiones.
- ***Tiempo de desarrollo:*** Las cargas útiles de los cohetes sonda pueden ser desarrolladas rápidamente (en algunos casos tan rápido como tres meses), este tiempo de respuesta habilita a los científicos para reaccionar

rápidamente a nuevos fenómenos (tal como la observación del cometa Shoemaker-Levy que impactó en Júpiter) e incorporar lo más novedoso o reciente de la tecnología en el experimento, y además el tiempo de desarrollo también es reducido debido a que pueden ser utilizados aquellos equipos que se usaron en vuelos previos y que fueron recuperados.

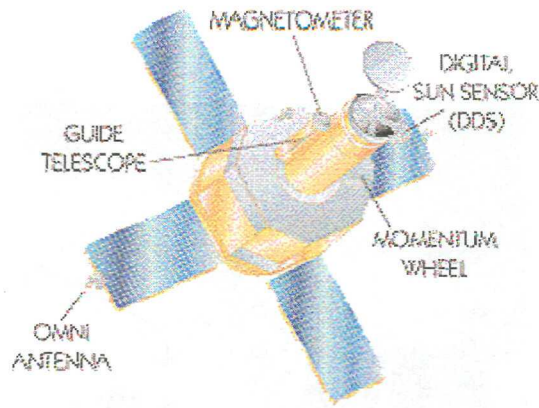
- **Oportunidad:** Como los cohetes sonda se pueden desarrollar rápidamente y a bajo costo, son perfectos para hacer observaciones de “objetivos de oportunidad”, tal como el cometa Hale-Bopp, el cual pudo ser observado por el telescopio espacial Hubble cerca del perihelio.
- **Altitud media:** Los cohetes sonda son los únicos calificados para el estudio de la atmósfera terrestre (misiones suborbitales) en el rango de altitudes inaccesibles a globos (altitud máxima de globos de aprox. 50 km) o satélites (altitud mínima de satélites aprox. 200 km).
- **Desarrollo de instrumentos:** Los cohetes sonda también pueden proveer un alojamiento de prueba para el desarrollo de instrumentos que se utilizan comúnmente en misiones de grandes distancias. Por ejemplo, el Explorador Internacional de rayos Ultravioleta (IUE) (ver figura 2.1) y el Telescopio Hopkins de rayos Ultravioleta (HUT) (ver figura 2.2) y el satélite TRACE (ver figura 2.3), que se utilizaron como cargas útiles de cohetes sonda.



*Figura 2.1.* Explorador Internacional de rayos Ultravioleta (IUE) [6].



*Figura 2.2.* Telescopio Hopkins de rayos ultravioleta (HUT) [6].



**Figura 2.3.** Satélite TRACE.

- **Educación:** También, debido al corto tiempo de desarrollo de cohetes sonda y a su bajo costo, éstos proveen el desarrollo de la experiencia en estudiantes graduados que aprenden las herramientas invaluableles del campo científico. Por ejemplo, una misión de cohetes sonda de tres años en una Universidad (en los E.U.) proporciona una excelente oportunidad para obtener una tesis en Ph. D., en la cual los estudiantes llevan el proyecto a través de todas sus etapas (desde la concepción, diseño del hardware, vuelo, análisis de datos y finalmente, la publicación de resultados). Esta interrelación con la práctica provee a los estudiantes una experiencia invaluable del entendimiento de la misión de vuelo espacial de una forma muy general.

Las características de los cohetes sonda son [7]:

- Bajo costo, rápido acceso a grandes altitudes donde se hacen observaciones de radiaciones en longitudes de onda absorbidas por la atmósfera terrestre.
- Acceso directo a la mesosfera y a la termosfera inferior (40 – 150 km).
- Rápida respuesta en tiempo.
- Transportación de cargas útiles especialmente montadas para el estudio de fenómenos específicos.
- Masas relativamente grandes de cargas útiles.

- Provisión de algunos minutos de microgravedad.
- Habilidad para utilizar el extremo terrestre como un disco ocultante para que se posibiliten observaciones cerca de los alrededores del sol.
- Habilidad en la adaptación de cargas útiles para el estudio de objetivos específicos.
- Acceso a sitios remotos.
- Tiempo relativamente largo cuando se detiene en el apogeo.
- Baja velocidad del vehículo respecto al medio ambiente.
- Recolección de parámetros descriptivos verticales.
- Habilidad para recuperar y poder volver a utilizar los instrumentos.

Las disciplinas científicas que utilizan cohetes sonda son [8]:

- Astrofísica.
- Física planetaria.
- Física solar.
- Física Magnetosférica, Ionosférica, Termosférica y Mesosférica.
- Misión para el planeta tierra.
- Microgravedad.
- Proyectos especiales.

Zonas de lanzamiento de cohetes sonda utilizados por la NASA (desde 1980) [8].

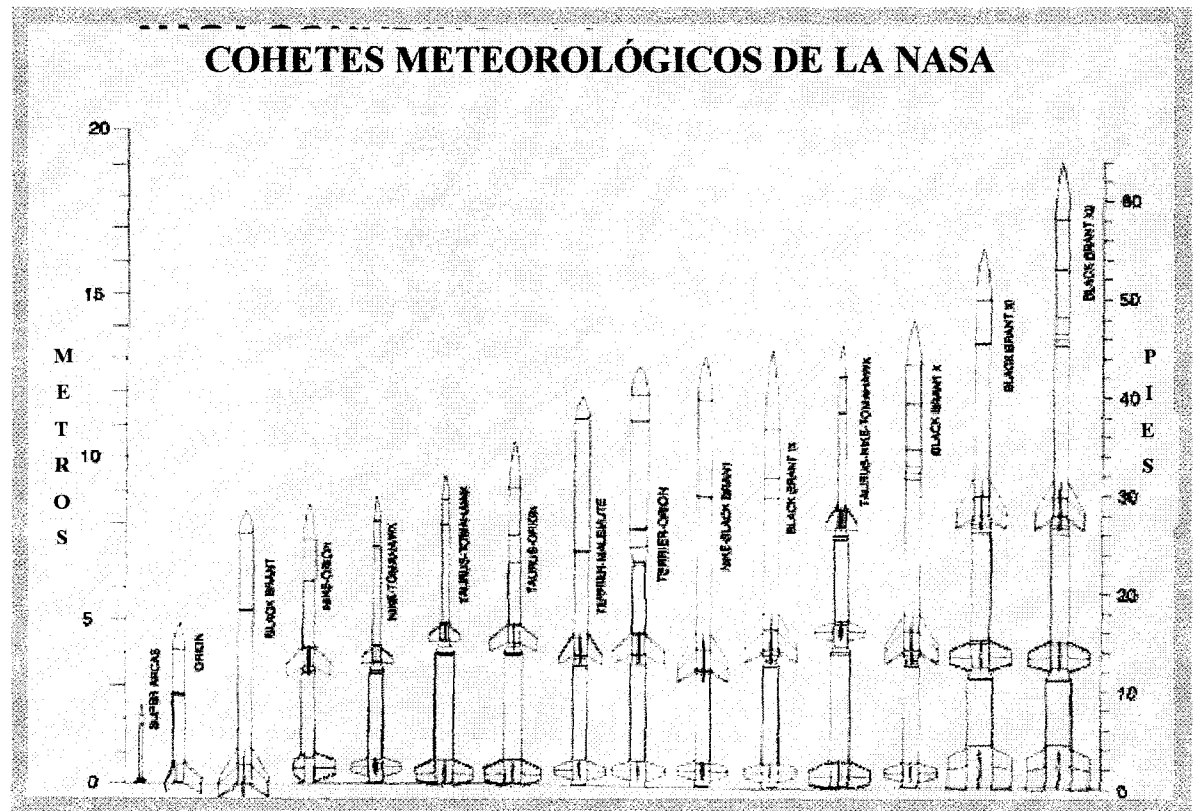
- Wallops Island, VA (E.U.).
- Poker Flat, Alaska (E.U.).
- Ft. Yukon, Alaska.
- Cape Perry, Canada.
- White Sands, NM (E.U.).
- Andoya, Noruega.

- NY-Alesund, Spitzbergen (Noruega).
- Esrange, Suecia.
- Ft. Churchill, Canada.
- Sondre Stromfjord, Groenlandia.
- Punta Lobos, Perú.
- Alcántara, Brasil.
- Woomera, Australia.
- Tortuguero, Puerto Rico.
- Kwujalein Atoll, Islas Marshall.
- Kenya, África.

### **2.2.2. Tipos de cohetes sonda actuales.**

Los cohetes sonda toman su nombre del término náutico “sondear”, lo cual significa tomar mediciones. Estos cohetes están divididos básicamente dentro de dos partes, un motor sólido y una carga útil. Muchos de los motores que se utilizan en estos programas son proporcionados por los militares, los cuales conservan los costos bajos. La carga útil lleva los instrumentos que conducen el experimento y que envían los datos de regreso a un radar montado en la superficie de la tierra.

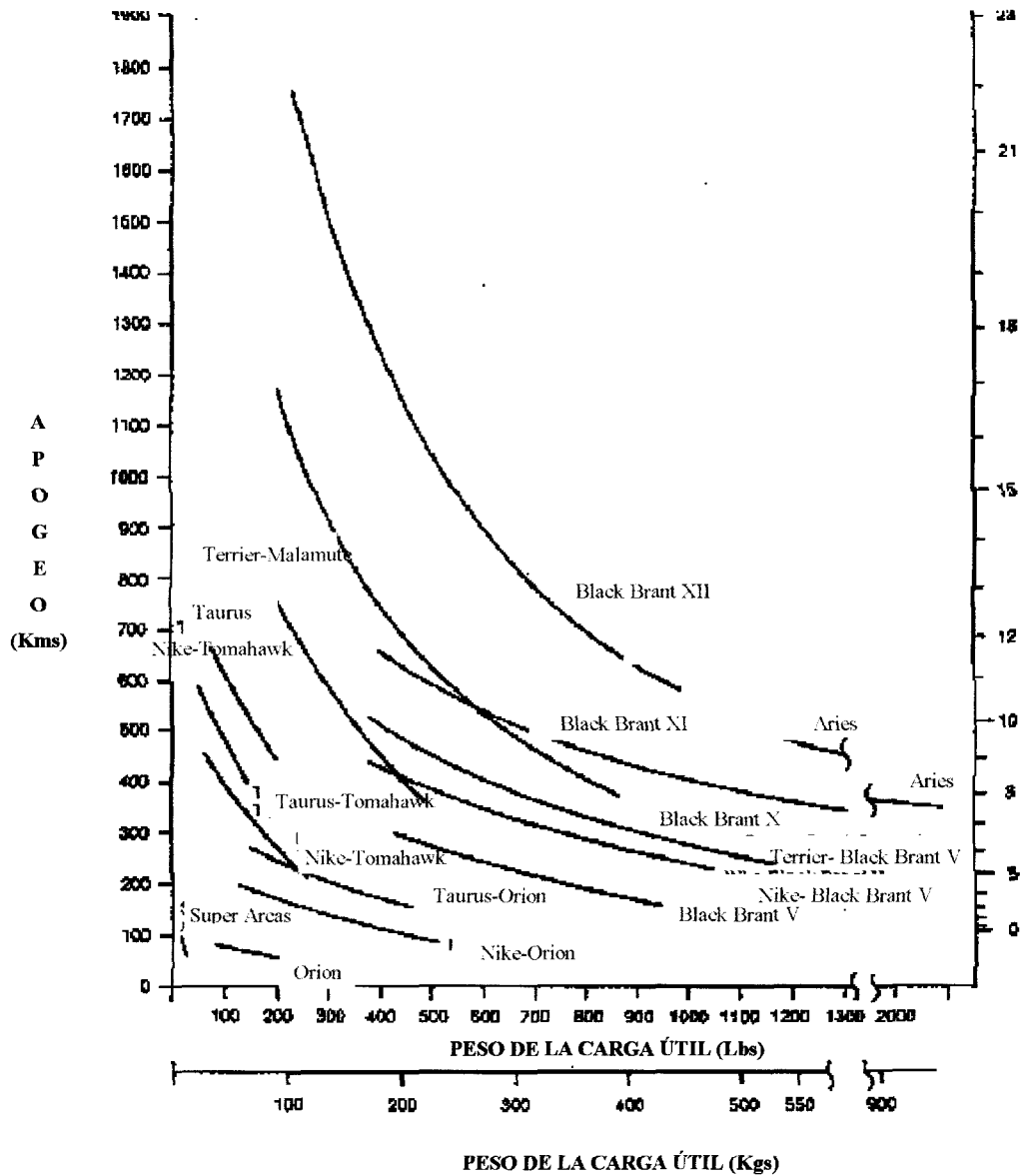
La NASA recientemente utiliza 14 tipos de cohetes sonda [9]. Estos cohetes, son de varios tamaños y desde etapas simples como el Super Arcas el cual tiene una altura de aproximadamente 3 mts (7ft) hasta de tres etapas como el Black Brant XII el cual tiene una altura de hasta 20 mts (65 ft) (ver figura 2.4). Estos cohetes pueden llevar cargas útiles científicas de varios pesos en altitudes desde 48 km hasta un poco más de 1,800 km (ver figura 2.5).



*Figura 2.4.* Tipos de coheteros sonda actuales utilizados por la NASA [9].

Las características de los coheteros sonda utilizados por la NASA expuestas en la figura 2.4, se detallan en el apéndice B.



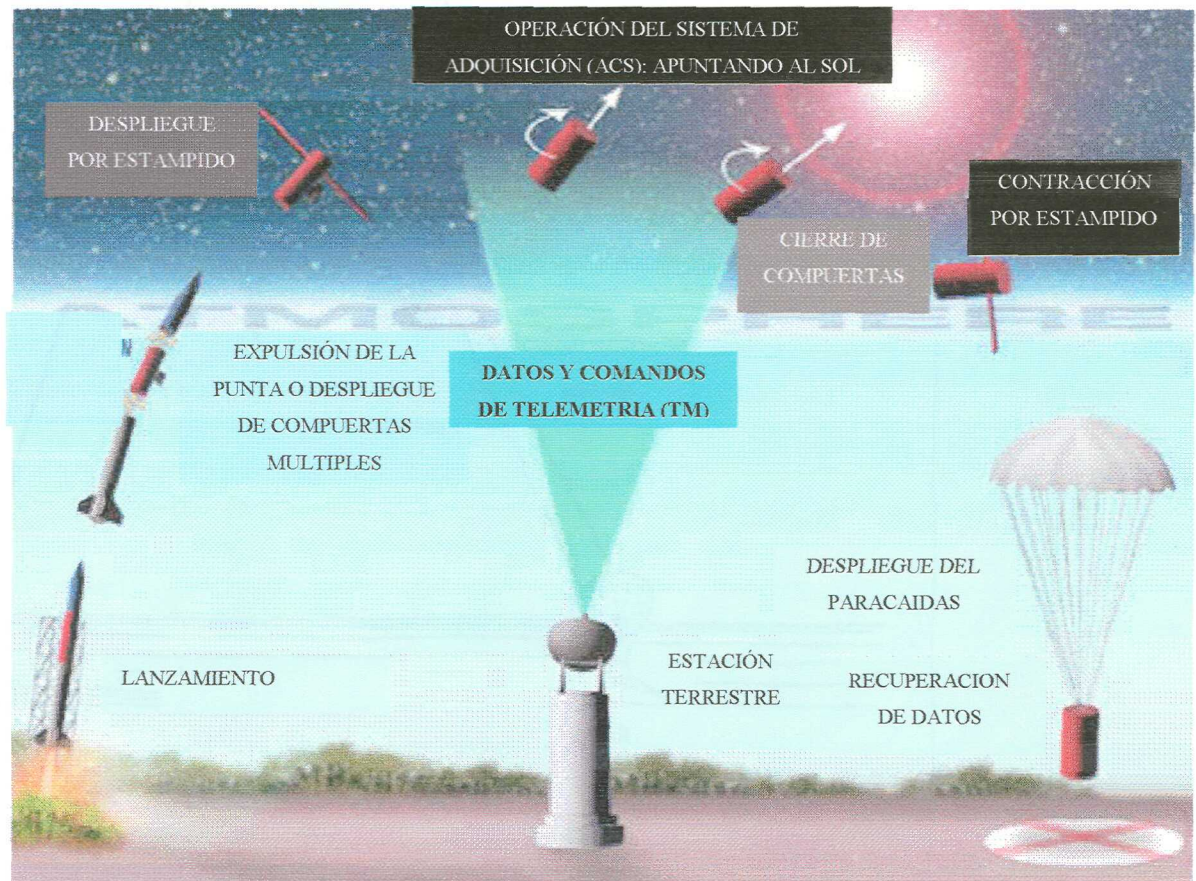


**Figura 2.5.** Desempeño de motores con variación de la carga útil en cohetes sonda de la NASA [7].

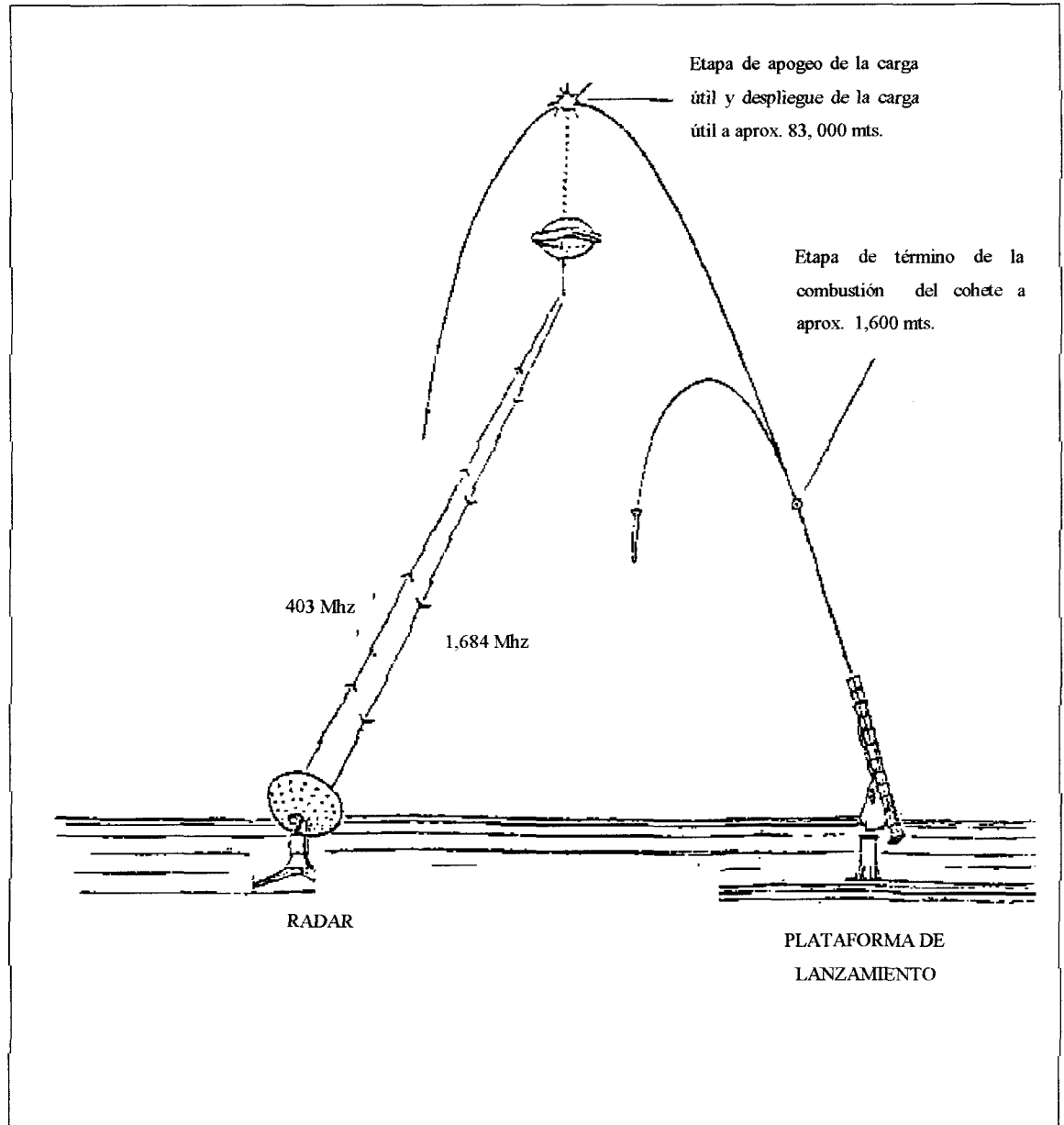
### 2.2.3. Objetivos o misiones encomendadas a los cohetes sonda.

Los cohetes sonda llevan instrumentos científicos como cargas útiles hacia la atmósfera, pero no colocan la carga útil dentro de la órbita terrestre sino en la subórbita. Así, este vuelo suborbital sigue trayectorias “parabólicas” (o balísticas),

proporcionando travesías cercanas a la vertical en su etapa de ascenso y en el descenso de la trayectoria, mientras que en la zona de apogeo (altura máxima que alcanza) sufre una disminución de velocidad debido a la fuerza de gravedad hasta que esta velocidad en la vertical llega a ser nula y lo hace detenerse (ver figuras 2.6, 2.7 y 2.8).



**Figura 2.6.** Trayectoria que lleva a cabo un cohete sonda para cumplir su misión [10].



**Figura 2.7.** Otra figura mostrando la trayectoria desarrollada por un cohete sonda para cumplir su misión [3].



**Figura 2.8.** Fotografía de una trayectoria que sigue un cohete sonda para lograr su misión, lanzado desde Poker Flat Research Range en Alaska [10].

Las misiones que actualmente se llevan a cabo con los cohetes sonda están enfocadas básicamente en cubrir las necesidades de las siguientes disciplinas:

- Física del plasma.
- Astronomía galáctica.
- Astrofísica de alta energía.
- Atmósfera planetaria.
- Proyectos especiales.
- Radio astronomía.
- Física solar.
- Pruebas y soporte.
- Investigación de la atmósfera superior.

- Investigación de la microgravedad.

Además, las misiones las llevan a cabo las siguientes agencias [7]:

- Agencias gubernamentales diferentes a la NASA.
- Corporaciones Industriales.
- Centro espacial Goddard de la NASA.
- Internacionales.
- Otro centro de la NASA diferente al Goddard o Wallops.
- Colegio o Universidad.
- Centro Wallops de la NASA.

Una forma común de tener clasificadas y controladas las misiones, es por medio de códigos alfanuméricos, por ejemplo, la misión **36.120 UE** indica [7],

- 36.**   ⇒   Tipo de cohete sonda: Cohete Black Brant IX  
**120**   ⇒   120 ava. misión asignada.  
**U**     ⇒   Agencia: Colegio o Universidad.  
**E**     ⇒   Disciplina: Física del plasma

Y una forma completa de especificar un lanzamiento para alguna misión es [7]:

<b>Misión</b>	<b>Experimentador /organismo</b>	<b>Lugar de lanzamiento</b>	<b>Fecha</b>	<b>Tiempo</b>	<b>Responsable de carga útil por la NASA</b>
36.120 UE	Carlston/U. Cal./Berkeley	WS	Ago.	Noche	W. Lau

Donde:

- WS**   ⇒   White Sands, NM.

#### **2.2.4. Partes principales de cohetes sonda.**

Un cohete sonda está constituido por dos secciones principales [6]:

- Motor(es) sólido(s).
- Carga útil.

##### ***Motor***

El motor utilizado en estos cohetes varía de acuerdo al tipo de cohete a utilizar, por ejemplo para el uso de un cohete sonda Black Brant IX, se pueden requerir dos motores ya que este cohete es de dos etapas (como se mencionó anteriormente), en la primer etapa se puede utilizar un impulsor Terrier, originalmente desarrollado por el laboratorio de física aplicada (APL) de la Universidad Johns Hopkins y para la segunda etapa se puede utilizar un motor Black Brant, construido por la compañía “Bristol Aerospace”. Mayores detalles acerca de motores utilizados en cohetes sonda pueden ser encontrados en la referencia [50].

##### ***Carga útil***

La carga útil de un cohete sonda dependerá de la misión, sin embargo, hay algunos componentes que se tienen en común para la mayor parte de las misiones. En las figuras 2.9 y 2.10, se muestra un bosquejo general de un cohete sonda. La siguiente lista describe las secciones comunes de la carga útil:

- *Cono de la punta/Sistema de ensamble para la recuperación de la ojiva (ORSA):* La ORSA contiene el paracaídas y el ACS (sistema de control de la actitud) que controla el momento de cabeceo y el momento de guiñada por medio de la manipulación de la expulsión de gases.
- *Sistema de control de la actitud (ACS):* El ACS controla la orientación de la carga útil usando una microcomputadora programada por medio de la

expulsión de los gases (vector de empuje) y generando los momentos de guiñada, cabeceo y balance que compensen la orientación hacia la trayectoria.

- *Telemetría:* La sección de telemetría es el sistema nervioso central de la carga útil del cohete. Éste transmite todos los datos hacia alguna estación (radar) ubicada en la superficie terrestre, incluyendo datos científicos y otras señales. También puede recibir comandos de enlace que dirijan al cohete.
- *Experimento:* La sección de experimento depende de la misión que se lleve a cabo, por ejemplo, esta sección podría ser de un tamaño tal que cupiera un telescopio de 40 cm de diámetro y un espectrógrafo (así es como lo utilizó la Universidad de Johns Hopkins).
- *Ignitor o sección de encendido:* Esta sección contiene al sistema de inversión del giro y el sistema de la terminación del empuje. Después de que el cohete sonda ha terminado su combustión, el cohete se encuentra girando a aproximadamente 4 cps. El sistema de inversión de giro suelta un peso unido a un alambre largo que se encuentra enrollado respecto al cohete, y así llevando un momento angular en sentido opuesto. Cualquier giro residual es ajustado por el ACS del momento de giro por medio de la expulsión de gases. El sistema de terminación del empuje, consiste de explosivos fijados al motor, y son utilizados (para destruir al cohete en pleno vuelo) si la dispersión de la trayectoria es mayor a los límites de seguridad.

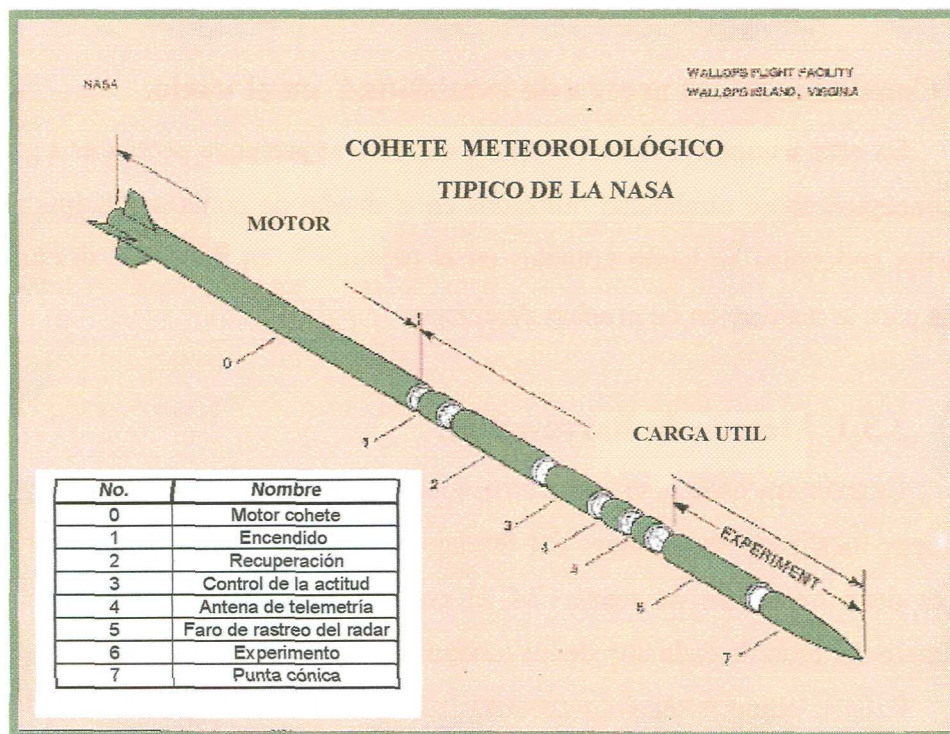


Figura 2.9. Bosquejo general de los componentes principales de un cohete sonda [9].

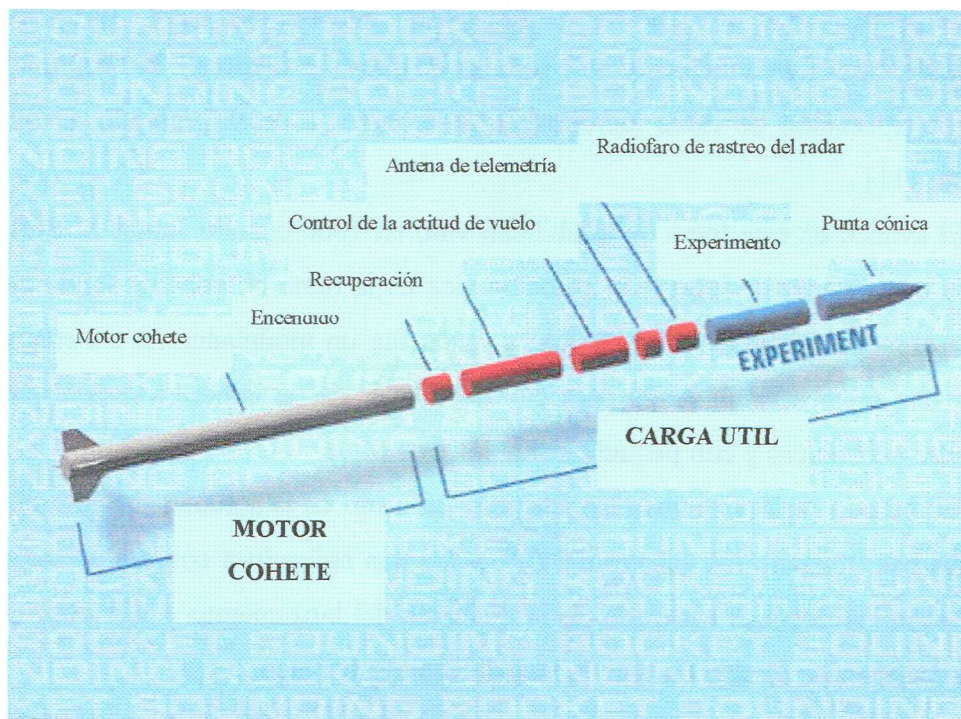


Figura 2.10. Isométrico y despiece general de los componentes principales de un cohete sonda [10].



### 2.3. Consideraciones acerca de estabilidad en el vuelo.

En esta segunda parte del presente capítulo se pretende presentar a grandes rasgos los conceptos sobre estabilidad utilizados en el diseño de cohetes. La aplicación práctica de estos conceptos se harán notables en el capítulo 7, en donde se diseña un cohete a escala para la realización de pruebas de campo.

#### 2.3.1. Método de Barrowman.

Cuando un cohete se encuentra volando, las fuerzas aerodinámicas tendrán una resultante localizada en un lugar del fuselaje llamado centro de presión  $CP$ . A su vez el cohete tiene un centro de masa  $CM$ , el cual se considera como la localización de la resultante del peso de cada uno de los componentes que lo conforman.

Existen reportes técnicos aeronáuticos en la NASA (de la década de los 50's) de ingenieros y expertos en dinámica de fluidos que desarrollaron métodos para el cálculo del centro de presión  $CP$ , pero han sido muy complejos de manejar y fueron utilizados para determinar el  $CP$  de cohetes a velocidades supersónicas, los cuales fueron de considerable interés en aquellos días (y todavía en nuestros tiempos). En la práctica nadie ha visto la aplicación de estos métodos en los cohetes a escala volando a velocidades subsónicas [11].

El avance en este tema de estabilidad vino en 1966 cuando James S. Barrowman, quien era un profesor de ingeniería aerodinámica en la rama de cohetes sonda del centro de vuelo espacial Goddard de la NASA, y quien fue un modelador de cohetes a escala, presentó una técnica simplificada para calcular el  $CP$  de un cohete a escala que viaja a velocidades subsónicas y con pequeños ángulos de ataque.

El método de Barrowman ha sido muy utilizado en la actualidad. Gran número de ingenieros han utilizado los valores del  $CP$  y los han aplicado a cohetes a escala real en algunos estudios que han realizado de la dinámica del lanzamiento y han observado que el cohete permanece estable durante la fase de vuelo subsónico.

Las ecuaciones y el procedimiento del método Barrowman se describen en el apéndice C [11].

*Para que un cohete desempeñe su vuelo adecuadamente debe ser estable estática y dinámicamente.*

### **2.3.2. Consideraciones de la relación centro de presión - centro de masa.**

En [11], se menciona que para obtener una *estabilidad estática* del desempeño de un cohete durante su vuelo se debe cumplir que,

- El centro de presión  $CP$  debe mantenerse detrás (hacia la parte posterior del cohete) del centro de masa  $CM$ , y esto se conoce como *estabilidad positiva*.

El decir que un cohete es *inestable estáticamente* implica que se aparta de su posición de equilibrio continuamente [28].

Ahora bien, la *estabilidad dinámica* depende de la relación de la longitud del cohete, de su diámetro y de la ubicación del centro de presión  $CP$  respecto al centro de masa  $CM$ . Esto es debido a que, como resultado de la variación de esos parámetros, se obtienen diferentes valores de amortiguamiento durante el desempeño del cohete en vuelo.

El decir que un cohete es *inestable dinámicamente* es un fenómeno más complicado en el cual el cohete oscila respecto a su condición de equilibrio con incrementos en su amplitud de oscilación. Los requerimientos de una estabilidad dinámica son expresados típicamente en términos del amortiguamiento y la frecuencia de modos normales de vibración. Así, la USAF MIL-F-8785C, 1980 establece requerimientos de valores del amortiguamiento y frecuencias de las oscilaciones laterales para varias fases de vuelo y niveles de estabilidad [28].

Básicamente, la diferencia entre la estabilidad estática y la estabilidad dinámica, es el balanceo de un dispositivo sin movimiento *versus* uno moviéndose.

Es totalmente posible que se tenga una posición del  $CP$  respecto al  $CM$  adecuado para mantener una buena estabilidad estática pero que dinámicamente sea inestable.

### **2.3.3. Recomendaciones generales sobre estabilidad estática y dinámica durante el vuelo de cohetes y cohetes sonda.**

Gran parte de los problemas de estabilidad dinámica son muy complejos y todavía no son totalmente entendidos por ingenieros especialistas en el diseño de cohetes [11].

Como resultado de esto, un modelador de cohetes a escala llamado Gordon K. Mandell atacó este asunto mientras era estudiante de ingeniería en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT). Su tesis sobre este tema fue publicada en el libro *Topics in Advanced Model Rocketry*, escrito por Mandell, Caporaso y Bengen y publicado por primera vez por MIT Press en 1973 [11].

En resumen, Mandell mencionó algunos puntos básicos en el diseño de cohetes a escala que se deben considerar.

1.- Mantener una relación de longitud a diámetro de 10 a 1 o mayor, para proveer un amortiguamiento adecuado.

2.- Mantener una estabilidad estática (relación entre  $CP$  y  $CM$ ) entre 1 y 2 calibres (1 calibre es la distancia igual al diámetro del cohete) para prevenir un sobreamortiguamiento, pero no bajar de 1 calibre.

3.- Mantener el rango de giro del cohete tan bajo como sea posible para prevenir el efecto mezclado entre el giro y la cabeceada del cohete, esto se obtiene alineando cuidadosamente las aletas estabilizadoras para que no produzcan giro y para que se tenga un buen desempeño.

4.- Si se incrementan las dimensiones lineales de las aletas estabilizadoras para proveer de estabilidad estática se deben incrementar también las dimensiones de la envergadura, debido a que se incrementará la fuerza de restauración en vez de incrementar la distancia entre el  $CP$  y el  $CM$ , con lo que se mejora el amortiguamiento dinámico.

Algunos diseñadores de cohetes sonda de tamaño real, han utilizado los trabajos de Barrowman y de Mandell. Ingenieros especialistas en el diseño de

cohetes en la NASA han utilizado el trabajo de Mandell debido a que es aplicable tanto a cohetes de tamaño real como a cohetes a escala [11].

## **2.4. Conclusiones.**

En este capítulo se han presentado las características físicas y de desempeño más importantes de los cohetes sonda, se han resaltado las ventajas de su utilización y de su amplio uso actual. Se ha visto que las misiones de cohetes sonda son principalmente científicas y que seguirán utilizándose como un medio de transporte para obtener mediciones suborbitales. Se han expuesto sus partes principales resaltando de entre éstas el sistema de control de vuelo el cual mantiene al cohete en seguir la trayectoria preestablecida. Debe notarse que para los capítulos siguientes este sistema de control será omitido en las ecuaciones de movimiento que se presentarán en los capítulos 3, 4 y 5.

Finalmente en este capítulo se presentó el método de Barrowman para obtener el cálculo del centro de presión en cohetes, el cual es de importancia para mantener estabilidad en el vuelo, así también, se presentaron las recomendaciones generales hechas por Mandell para obtener diseños (en su etapa preliminar) de cohetes estables tanto dinámica como estáticamente. Estos últimos conceptos serán utilizados en el diseño del cohete a escala utilizado para las pruebas de campo que se verán en el capítulo 7.

Después de esta exploración general de la utilidad de los cohetes sonda, así como de su estructura física y desempeño general, en el capítulo siguiente se determinarán los modelos matemáticos que describen su movimiento.

.....a partir de los mismos principios, ahora demuestro  
la estructura del sistema del mundo.  
*Principia Mathematica. Isaac Newton*

## Capítulo 3

### Ecuaciones de movimiento

#### 3.1. Introducción.

Durante este capítulo se deducirán las ecuaciones de movimiento del cohete considerándolo como un cuerpo rígido con sus seis grados de libertad y estabilizado sólo con aletas, lo cual implica que no se tiene control de la trayectoria ya sea con el vector de empuje (expulsión de gases de la combustión) o con algunas superficies del fuselaje móviles.

El término *cuerpo rígido* implica que todos los puntos en la estructura del cohete se mantienen en posiciones relativamente fijas en cualquier tiempo. La descripción matemática natural de un cohete flexible es en términos de ecuaciones diferenciales parciales, y podría ser necesario un buen tratamiento de análisis preliminar para arribar a las ecuaciones diferenciales requeridas. La interacción de los efectos de flexibilidad con la aerodinámica complican en gran forma el modelo matemático y es tema de actuales investigaciones [12]. Sin embargo, el modelo rígido es de importancia fundamental y será el foco de atención en esta tesis.

Las ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido pueden ser separadas (desacopladas) en ecuaciones angulares y ecuaciones traslacionales si el origen de coordenadas es seleccionado en el *centro de masa* o también llamado *centro de gravedad (cg)*. El movimiento angular del cohete será equivalente a los movimientos de guiñada, cabeceo y balance respecto al centro de masa como si fuera un punto fijo en el espacio. Los componentes siguientes de movimiento serán tres componentes de traslación del *cg*.

De ahí que, el *modelo matemático en su forma más general derivado en esta tesis* será un modelo de seis grados de libertad (6-DOF). No se considerarán los grados de libertad asociados con modos flexibles de fuselaje o aletas en el cohete.

En la primera sección de este capítulo se mencionarán los tres sistemas de referencia cartesianos utilizados para obtener las matrices de transformación y se explicarán sus orientaciones. En el desarrollo de las ecuaciones de movimiento del cuerpo rígido se expresará un vector dado en varios sistemas de referencia diferentes. Así, cuando se especifica una posición en un nuevo sistema de coordenadas de referencia, la magnitud y dirección del vector de posición son cambiados. La velocidad y la aceleración pueden ser cada una relativas o absolutas. La referencia absoluta para estas cantidades es el espacio inercial, en el cual las leyes de movimiento de Newton son válidas. Un sistema de referencia inercial puede ser definido como estacionario con respecto a las estrellas fijas. Cuando se especifica una velocidad o aceleración absoluta en un nuevo sistema de referencia su magnitud y dirección permanecen sin cambios; sólo las coordenadas del vector son cambiadas. El vector velocidad o aceleración de un cuerpo puede, si es requerido, ser especificado en términos de un sistema de coordenadas de referencia que este fijado al cuerpo (por ejemplo, moviéndose con el cuerpo). Esto significa simplemente que el vector es resuelto a lo largo de las direcciones instantáneas de los ejes coordenados como si emanarán desde el origen de coordenadas. De ahí que, no se tiene que considerar la traslación del origen del sistema de coordenadas, sino sólo su orientación.

En la segunda sección del capítulo se presentará el análisis cinemático espacial de donde se obtendrán las matrices de transformación, el procedimiento analítico en cinemática espacial es el mismo que en el caso plano, el análisis de cinemática espacial

requiere de técnicas matemáticas más poderosas que la cinemática plana, particularmente para describir la orientación angular del cuerpo en un sistema de coordenadas global.

Durante el análisis dinámico, expuesto en la tercera sección de este capítulo, se obtendrán las ecuaciones de movimiento traslacional y angular deducidas a partir de la segunda Ley de Newton.

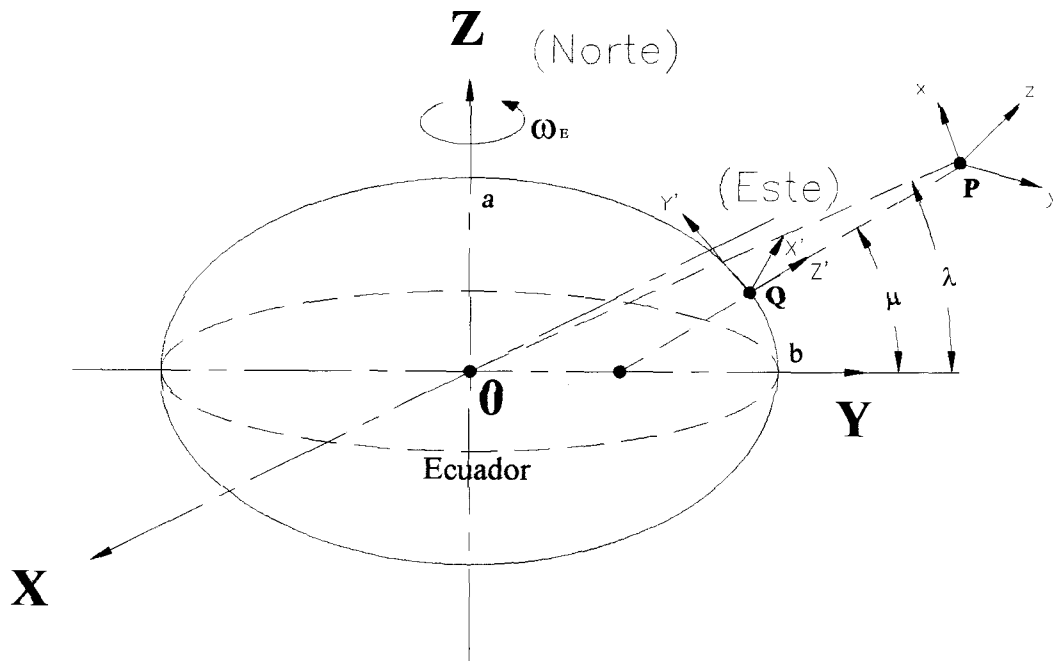
En la cuarta sección de este capítulo se expondrá la teoría para el complemento del análisis cinemático espacial. Hay varios métodos junto con los ángulos de Euler o con los ángulos Bryant conocidos, para representar la orientación de un sistema de coordenadas rotatorio [13]. Estos métodos envuelven cuatro, cinco o aún seis variables en lugar de los tres ángulos de Euler y ángulos Bryant [12]. Estos métodos han sido considerados con el propósito de *evitar las singularidades matemáticas* de la representación con los ángulos de Euler o con los ángulos Bryant, de esta manera maximizando la velocidad de procesamiento computacional en los cálculos. Sin embargo, uno de estos métodos es ahora más usado exclusivamente en varias de las aplicaciones de cohetes sonda, naves espaciales, misiles y aeronaves. Estos son los *parámetros de Euler* o también llamados *cuaterniones* que son una representación de cuatro variables [12]. La deducción detallada de estos parámetros será presentada.

Para terminar el capítulo, se presentarán tanto las consideraciones relevantes como las deducciones de las ecuaciones de las variables más importantes que son utilizadas en las ecuaciones de movimiento. Inicialmente se comenzará exponiendo lo referente a la densidad del aire y su dependencia con respecto a la altura sobre el nivel del mar y se deducirá su modelo matemático. El modelo matemático que representa a la fuerza de gravedad terrestre utilizada en esta tesis será mostrada a partir de la ley de gravitación de Newton. Se llevarán a cabo comentarios relevantes respecto a las dispersiones en la trayectoria de cohetes debido a desalineamientos causados por imperfecciones en el vector de empuje. Y finalmente se presentarán los datos graficados de un modelo matemático que presenta las velocidades del viento en función tanto de la altura sobre el nivel del mar (0-120 km) como de la latitud geográfica en el globo terrestre (0°-90° Sur y 0°-90° Norte), los resultados de este modelo matemático es publicado por un grupo de trabajo de la COSPAR (Committee on Space Research).

### 3.2. Sistema de coordenadas de referencia.

Se escogerá un sistema de referencia inercial para ser utilizado en el desarrollo de las ecuaciones de movimiento del cohete sonda. Puede ser utilizado cualquier sistema que no tenga rotación y ni aceleración (pero puede estar moviéndose con velocidad constante) relativo a la posición aproximadamente fija de las estrellas. Un sistema de coordenadas con su origen en el centro del sol, y con una orientación relativamente fija respecto a las estrellas, es un sistema de referencia inercial casi perfecto. Un sistema de referencia que es menos perfecto, pero mucho más conveniente en términos de visualización de la trayectoria del cohete, especificando sus coordenadas y especificando la aceleración de la gravedad terrestre, es un sistema de referencia ortogonal inercial centrado en la tierra (ECI por sus siglas en inglés) [12]. Este es un marco de coordenadas de referencia con su origen en el centro de la tierra, trasladándose con la tierra, pero que tiene una orientación fija relativa a las estrellas.

En la figura 3.1 se muestra el sistema de coordenadas ECI con su origen  $O$ , el sistema de coordenadas ABC con su origen en  $P$ , y un sistema de coordenadas intermedio NED en la superficie de la tierra con su origen en  $Q$  [12], [14], [15] y [16].

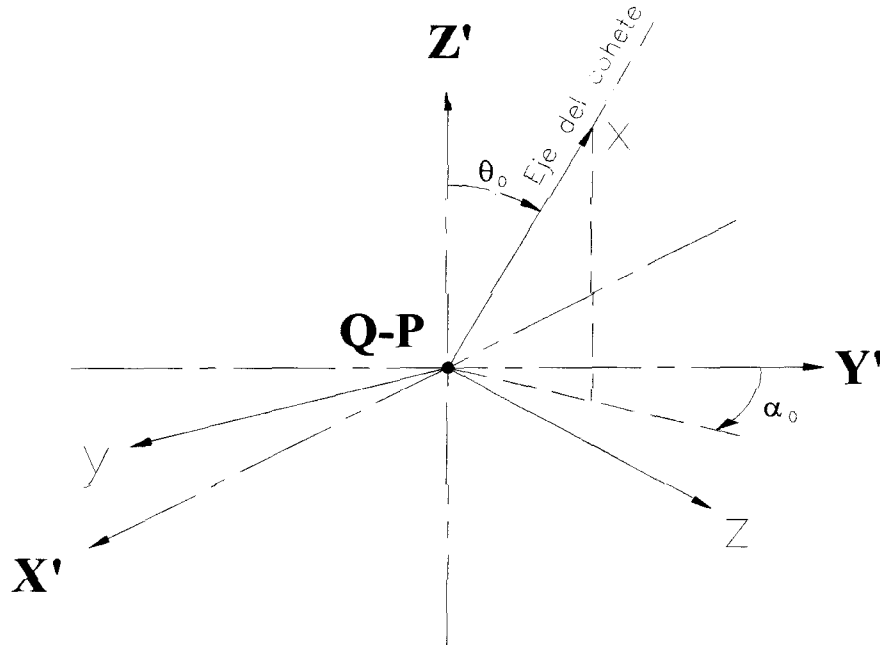


**Figura 3.1.** Sistema de coordenadas para el análisis cinemático.



Así, el sistema de coordenadas utilizado es como se indica a continuación:

1. El sistema de la plataforma de lanzamiento NED denotado por  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  el cual tiene su origen en la plataforma de lanzamiento (punto  $Q$ ) y rota con la tierra. El eje positivo  $X'$  apunta hacia el Este; el eje positivo  $Y'$  apunta hacia el Norte y el eje positivo  $Z'$  apunta hacia fuera de la tierra y es normal a su superficie (Zenit). El plano  $X'$ - $Y'$  de la plataforma de lanzamiento es tangente a la periferia de la tierra.
2. El sistema inercial ECI (Earth-Centered Inertial) denotado por  $X, Y, Z$ , tiene su origen en el centro de la tierra (punto  $O$ ). El sistema está orientado tal que el plano  $X$ - $Y$  está tendido en el plano ecuatorial de la tierra con el eje positivo  $Y$  apuntando inicialmente a través de la longitud celestial del lanzador. El eje  $Z$  coincide con el eje de rotación de la tierra y es positivo hacia el polo norte. Este sistema no rota con la tierra.
3. El sistema del cuerpo ABC (Aircraft-Body Coordinate) denotado por  $x, y, z$ , que tiene su origen en el centro de masa o de gravedad del cohete (punto  $P$ ). El eje  $x$ , coincide con el eje longitudinal axial del cohete y es positivo hacia la punta (nariz) de éste. La posición de los ejes  $y, z$  está determinado por el movimiento del cohete, así el eje  $z$  se encuentra orientado a estribor del cohete y el eje  $y$  se encuentra dirigido hacia arriba del cohete (como referencia ver figura 3.4). Las posiciones iniciales de estos ejes están definidas como sigue. Permita que  $\theta$  sea un ángulo entre el eje  $x$ , y el eje positivo  $Z'$  medido desde el eje  $Z'$ . El eje  $y$  se tiende en el plano  $X'$ - $Y'$ . El ángulo entre los ejes positivos  $Y'$ - $y$  es el acimut  $\alpha$  de lanzamiento, medido en el sentido de las manecillas del reloj desde el eje  $Y'$ , ver figura 3.2.



**Figura 3.2.** Posición inicial del sistema de referencia del cohete ABC en la plataforma de lanzamiento NED.

La forma de la tierra es exactamente elipsoidal, pero la excentricidad de la sección transversal elíptica ha sido exagerada en la figura 3.1 para propósitos de visualización.

En el sistema de coordenadas ECI la posición del centro de gravedad del cohete será denotado por el vector de posición inercial  $\mathbf{p}(t)$ . La matriz de rotación que transforma al sistema de coordenadas ECI al sistema de coordenadas ABC es  $\mathbf{B}(t)$ . Debido a que el sistema de coordenadas es ortogonal y la transformación sólo es rotación, la matriz  $\mathbf{B}$  es una matriz ortogonal.

### 3.3. Análisis cinemático.

Para llevar a cabo el análisis cinemático, primero se establecerán algunos datos respecto a la forma de la tierra y el método para especificar las coordenadas en el sistema ECI. Una buena aproximación de la superficie de la tierra al nivel del mar es un elipsoide de revolución [12], la figura sólida generada por la elipse en rotación es,

$$\frac{Z^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1, \quad b > a > 0 \quad (3.1)$$

respecto al eje  $Z$ , cuando el eje  $Z$  coincide con el eje de rotación de la tierra, ver figura 3.1.

El radio ecuatorial de la tierra es  $b = r_E$  (como referencia, ver figura 3.1), donde,  $r_E = 6,378,138.12m$  ( $r_E = 2.092565 \times 10^7 ft$ ). La longitud del semieje menor está dada por,

$$a = b(1 - f) \quad (3.2)$$

donde,

$$f = \frac{1}{298.257} \quad (3.3)$$

que es el parámetro de planicidad de la tierra [12].

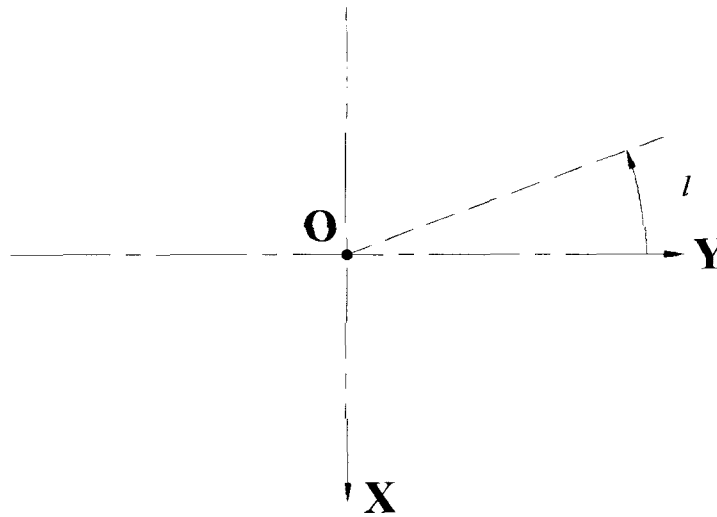
La magnitud de la rotación de la tierra  $\omega_E$  es de  $7.292115 \times 10^{-5} rad / seg$  y el vector de rotación de la tierra tiene la forma,

$$\omega_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_Z \end{bmatrix}$$

Las coordenadas de posición comúnmente utilizadas en la superficie de la tierra (en mapas geográficos) son los ángulos de *latitud* y *longitud*.

La *longitud* está medida en grados en el Este y el Oeste respecto al *primer meridiano*, el cual está definido que pasa a través del Observatorio Real en Greenwich, Inglaterra. Para los propósitos de navegación en el sistema de coordenadas sin rotación ECI, se podrá usar el *ángulo de longitud celestial*,  $l$ , definido como un ángulo medido en

el plano X-Y del sistema de coordenadas ECI (tendido en el plano ecuatorial de la tierra), desde el eje positivo Y, y en el sentido contrario a las manecillas del reloj visto desde el polo norte, ver figura 3.1 y figura 3.3.



**Figura 3.3.** Ángulo de longitud celestial  $l$ , mostrando el sentido de giro positivo

La *longitud geográfica*  $l_G$  puede ser calculada de,

$$l_G = \text{Valor\_principal}(l_G(0) + l - \omega_E t) \quad (3.4)$$

Donde *Valor\_principal* indica una conversión del argumento a un ángulo en el rango de  $-180^\circ$  a  $+180^\circ$  [12]. Para éste análisis se considerará la medida de la longitud sólo considerando a la longitud celestial en relación con la rotación de la tierra, que implica la posición en longitud desde que se lanza el cohete en  $t = 0$  hasta la longitud alcanzada en un tiempo  $t$ , así la ecuación (3.4) con  $l_G = 0$ , *Valor\_principal* = 1 y  $l_G(0) = 0$ , queda como,

$$l = \omega_E t \quad (3.5)$$

La medida de la *latitud* es un poco más complicada debido a la forma elíptica de la tierra. En la figura 3.1 la *latitud geocéntrica* está definida como el ángulo  $\lambda$  (notar que la latitud geocéntrica hace referencia a la posición  $\mathbf{p}(t)$  del cohete respecto al centro de la tierra), y el ángulo  $\mu$  es la *latitud geográfica* o también llamada *latitud geodésica*. La latitud geodésica es la latitud comúnmente utilizada en los mapas y en las cartas geográficas y es la que se utilizará para los análisis subsecuentes.

La relación entre la latitud geográfica  $\mu$  y la latitud geocéntrica  $\lambda$  en el punto Q (ver figura 3.1) es [12],

$$\tan \mu = \frac{\tan \lambda}{(1-f)^2} \quad (3.6)$$

La relación para determinar el radio de la superficie de la tierra al nivel del mar en el punto Q (ver figura 3.1) es [12],

$$r_{nm}^2 = \frac{r_E^2}{1 + \left[ \frac{1}{(1-f)^2} - 1 \right] \text{sen}^2 \lambda} \quad (3.7)$$

Habiendo mostrado algunas variables y continuando con el análisis cinemático, se calcularán las matrices de transformación ortogonales de rotación para llevar a cabo la transformación de coordenadas que quedan como;

- *Matrices de rotación del sistema de coordenadas inercial ECI.*

De acuerdo a la figura 3.1, llevando a cabo la rotación respecto a la *latitud geográfica* o *latitud geodésica*, la matriz queda como,

$$[\mathbf{B}_\mu] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\text{sen } \mu & \text{cos } \mu \\ 0 & \text{cos } \mu & \text{sen } \mu \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Ahora considerando la rotación respecto a la *longitud celestial*, la matriz queda como,

$$[\mathbf{B}_1] = \begin{bmatrix} \cos l & -\operatorname{sen} l & 0 \\ \operatorname{sen} l & \cos l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

- *Coordenadas NED a ECI*: Un vector en coordenadas NED puede ser expresado en términos de coordenadas ECI por medio de las rotaciones,

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = [\mathbf{B}_1][\mathbf{B}_\mu] \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Notar de (3.10) que se está utilizando la convención “x” de ángulos Bryant [13]. Esta convención indica que se debe llevar a cabo la primer rotación a través del ángulo de latitud geográfica  $\mathbf{B}_\mu$  (respecto al eje “x”) y posteriormente se realiza la segunda rotación a través del ángulo de longitud celestial  $\mathbf{B}_1$  (respecto al eje “z”), tal como se realizó en la ecuación (3.10).

Permítase denotar a  $\mathbf{B}_G$  como la matriz de transformación completa del sistema de coordenadas inercial,

$$\mathbf{B}_G = \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_\mu \quad (3.11)$$

y llevando a cabo este cálculo,

$$\mathbf{B}_G = \begin{bmatrix} \cos l & -\operatorname{sen} l & 0 \\ \operatorname{sen} l & \cos l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen} \mu & \cos \mu \\ 0 & \cos \mu & \operatorname{sen} \mu \end{bmatrix}$$

obteniéndose,

$$\mathbf{B}_G = \begin{bmatrix} -\cos l & \text{sen } l \text{ sen } \mu & -\text{sen } l \cos \mu \\ -\text{sen } l & -\text{sen } \mu \cos l & \cos l \cos \mu \\ 0 & \cos \mu & \text{sen } \mu \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

- *Coordenadas ABC a NED*: La matriz de transformación de un vector en coordenadas ABC a NED es,

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = [\mathbf{B}_B] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Tomando como referencia a la figura 3.2, se obtiene la siguiente matriz de transformación  $\mathbf{B}_B$ ,

$$\mathbf{B}_B = \begin{bmatrix} \text{sen } \theta \text{ sen } \alpha & \cos \alpha & \text{sen } \alpha \cos \theta \\ \text{sen } \theta \cos \alpha & -\text{sen } \alpha & \cos \alpha \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\text{sen } \theta \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

y la transformación desde ABC hasta ECI es denotada por la matriz  $\mathbf{A}(t)$  donde,

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}_G \mathbf{B}_B \quad (3.15)$$

y desde ECI hasta ABC es denotada por la matriz  $\mathbf{B}(t)$  donde,

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \quad (3.16)$$

La matriz de rotación  $\mathbf{B}$  describe la actitud del cohete conforme cambia con el tiempo.

### 3.4. Análisis dinámico.

Esta sección será dividida, por un lado en el análisis a detalle del movimiento traslacional y por otro lado, en el análisis del movimiento angular.

#### 3.4.1. Movimiento de traslación.

La segunda ley de Newton, aplicada al movimiento de traslación, relaciona a la fuerza y a la cantidad de cambio del momentum<sup>1</sup> lineal. En este caso las fuerzas que actúan son las de propulsión, las fuerzas aerodinámicas y la atracción gravitacional. Por consiguiente, cuando se aplica la segunda ley de Newton, es apropiado expresar los vectores fuerza y velocidad en el sistema de coordenadas ortogonales del cuerpo ABC.

Permita que  $\mathbf{F}_B$  represente el vector suma de las fuerzas aerodinámicas y de propulsión, con el subíndice  $B$  indicando que esta fuerza está dada en el sistema de coordenadas del cuerpo ABC. La atracción gravitacional es  $\mathbf{B}m\mathbf{g}$ , donde  $m$  es la masa del cohete y  $\mathbf{B}$  es la matriz que rota al vector  $\mathbf{g}$  desde el sistema de coordenadas ECI hasta el sistema de coordenadas ABC. También permita que  $\mathbf{V}_{Abs}$  (medida con respecto al espacio inercial) sea el vector de la velocidad absoluta del centro de gravedad del cohete, expresado en coordenadas ABC. La ley de Newton para movimiento traslacional toma la forma [12],

$$\mathbf{F}_B + \mathbf{B}m\mathbf{g} = \frac{d}{dt_I} (m\mathbf{V}_{Abs}) \quad (3.17)$$

La derivada se deberá efectuar respecto a un sistema de referencia inercial, y esto está indicado con el subíndice  $I$ , la atracción gravitacional será asumida que será debida sólo a la atracción de la tierra.

Las fuerzas aerodinámicas en el cohete son creadas por su movimiento relativo a la masa de aire. Por lo que, es conveniente separar el vector de la velocidad absoluta

---

<sup>1</sup> Por simplicidad se utilizará el término *momentum* en vez de *cantidad de movimiento*.



$\mathbf{V}_{Abs}$ , en una componente de velocidad relativa respecto a la masa de aire  $\mathbf{V}_B$  y una componente que es la velocidad absoluta de la masa de aire  $\mathbf{B}(\omega_E \mathbf{x}\mathbf{p})$ . Será asumido que toda la masa del aire rota con el vector velocidad de la tierra (no habrá deslizamientos ni cortantes). Las variables de estado del modelo del cohete serán cada una de las tres componentes del vector de posición inercial  $\mathbf{p}$ , el vector de la velocidad relativa  $\mathbf{V}_B$ , y el vector de la velocidad angular  $\omega_B$ . Se requerirá una ecuación diferencial para la transformación de la matriz  $\mathbf{B}$ , la cual está dada en función del tiempo.

La ecuación de la velocidad traslacional absoluta del centro de gravedad del cohete en coordenadas ECI es [12],

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{B}^T \mathbf{V}_{Abs} = \mathbf{B}^T \mathbf{V}_B + \omega_E \mathbf{x}\mathbf{p} \quad (3.18)$$

Esta misma relación, expresada en coordenadas del cuerpo ABC, proporcionará una expresión para  $\mathbf{V}_{Abs}$  para usarse en la ley de Newton:

$$\mathbf{V}_{Abs} = \mathbf{V}_B + \mathbf{B}(\omega_E \mathbf{x}\mathbf{p}) \quad (3.19)$$

Sustituyendo la ecuación (3.19) en (3.17), se tiene,

$$\mathbf{F}_B + \mathbf{B}\mathbf{m}\mathbf{g} = \dot{m} \mathbf{V}_{Abs} + m \frac{d}{dt} [\mathbf{V}_B + \mathbf{B}(\omega_E \mathbf{x}\mathbf{p})] \quad (3.20)$$

En este análisis se considerará despreciable el valor de  $\dot{m}$ .

Antes de continuar, se establecerá la derivada de una matriz de rotación  $\mathbf{R}$  que transforma un vector del sistema de coordenadas arbitrario  $A$  al sistema de coordenadas arbitrario  $B$ , así [12],

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{R}\mathbf{V}_A \quad (3.21)$$

y una expresión para la derivada de  $\mathbf{V}_B$ , respecto al sistema de coordenadas  $A$ , es,

$$\frac{d}{dt_A}(\mathbf{V}_B) = \mathbf{R} \dot{\mathbf{V}}_A \quad (3.22)$$

de la misma manera una expresión para la derivada de  $\mathbf{V}_B$ , respecto al sistema de coordenadas  $B$ , es,

$$\frac{d}{dt_B}(\mathbf{V}_B) = \dot{\mathbf{V}}_B = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{V}_A + \mathbf{R} \dot{\mathbf{V}}_A \quad (3.23)$$

Sustituyendo (3.23) en (3.22), se obtiene,

$$\frac{d}{dt_A}(\mathbf{V}_B) = \dot{\mathbf{V}}_B - \dot{\mathbf{R}} \mathbf{V}_A \quad (3.24)$$

La ecuación (3.24) muestra que la derivada de un vector, respecto a otro sistema de coordenadas, tiene dos componentes. El primer componente es la derivada respecto a su propio sistema de coordenadas, y el segundo componente es diferente de cero cuando su propio sistema de coordenadas está rotando relativo al sistema de coordenadas en el que fue tomado.

La ecuación (3.24) es comúnmente expresada de la siguiente forma, como el *teorema de Coriolis* [12]:

$$\frac{d}{dt_A}(\mathbf{V}_B) = \dot{\mathbf{V}}_B + \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{V}_B \quad (3.25)$$

Notar que todos los vectores están expresados en el mismo sistema de coordenadas.

Ahora bien, volviendo a la deducción de ecuaciones, diferenciando en (3.20) y considerando el *teorema de Coriolis* dado en (3.25), resulta,

$$\frac{I}{m} \mathbf{F}_B + \mathbf{B}\mathbf{g} = \left( \dot{\mathbf{V}}_B + \omega_B x \mathbf{V}_B \right) + \mathbf{B} \left( \omega_E x \dot{\mathbf{p}} \right) \quad (3.26)$$

y sustituyendo en (3.26) el valor de la velocidad  $\dot{\mathbf{p}}$  de (3.18),

$$\frac{I}{m} \mathbf{F}_B + \mathbf{B}\mathbf{g} = \left( \dot{\mathbf{V}}_B + \omega_B x \mathbf{V}_B \right) + \mathbf{B} \left\{ \omega_E x (\mathbf{B}^T \mathbf{V}_B + \omega_E x \mathbf{p}) \right\} \quad (3.27)$$

analizando sólo el término entre corchetes del lado derecho,

$$\omega_E x (\mathbf{B}^T \mathbf{V}_B + \omega_E x \mathbf{p}) = (\omega_E x \mathbf{B}^T \mathbf{V}_B) + \omega_E x (\omega_E x \mathbf{p}) \quad (3.28)$$

y sustituyéndolo en (3.27), resulta,

$$\frac{I}{m} \mathbf{F}_B + \mathbf{B}\mathbf{g} = \left( \dot{\mathbf{V}}_B + \omega_B x \mathbf{V}_B \right) + \mathbf{B} \left\{ (\omega_E x \mathbf{B}^T \mathbf{V}_B) + \omega_E x (\omega_E x \mathbf{p}) \right\}$$

Además debido a la ortogonalidad de  $\mathbf{B}$  se tiene,  $\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{I}$ , así,

$$\frac{I}{m} \mathbf{F}_B + \mathbf{B}\mathbf{g} = \left( \dot{\mathbf{V}}_B + (\omega_B x \mathbf{V}_B) + (\mathbf{B} \omega_E x \mathbf{V}_B) + \mathbf{B} [\omega_E x (\omega_E x \mathbf{p})] \right)$$

$$\frac{I}{m} \mathbf{F}_B + \mathbf{B}[\mathbf{g} - \omega_E x (\omega_E x \mathbf{p})] = \dot{\mathbf{V}}_B + (\omega_B x \mathbf{B} \omega_E) x \mathbf{V}_B$$

y despejando  $\dot{\mathbf{V}}_B$ ,

$$\dot{\mathbf{V}}_B = \frac{I}{m} \mathbf{F}_B + \mathbf{B}[\mathbf{g} - \omega_E x(\omega_E x \mathbf{p})] - (\omega_B x \mathbf{B} \omega_E) x \mathbf{V}_B \quad (3.29)$$

en (3.29) la velocidad traslacional  $\mathbf{V}_B$  es una velocidad relativa mientras la velocidad  $\omega_B$  es una velocidad absoluta. Deberá notarse que de (3.29),

$$\begin{aligned} \omega_E x(\omega_E x \mathbf{p}) & \quad \text{es la aceleración centrípeta.} \\ (\omega_B x \mathbf{B} \omega_E) x \mathbf{V}_B & \quad \text{es la aceleración tangencial.} \\ \mathbf{B} \omega_E & \quad \text{es la velocidad angular total.} \end{aligned}$$

El componente de la velocidad angular total  $\mathbf{B} \omega_E$ , es comúnmente despreciable comparado con las velocidades angulares de un cohete, y su producto vectorial con  $\mathbf{V}_B$  también es despreciable para velocidades comunes, por lo que, la ecuación (3.29) queda escrita como [12],

$$\dot{\mathbf{V}}_B = \frac{I}{m} \mathbf{F}_B - (\omega_B x \mathbf{V}_B) + \mathbf{B} \mathbf{g}' \quad (3.30)$$

donde,

$$\mathbf{g}' = [\mathbf{g} - \omega_E x(\omega_E x \mathbf{p})] \quad (3.31)$$

Ahora bien, definiendo a la velocidad angular de un cuerpo en rotación como  $\omega_B$  y considerando sus componentes como,

$$\omega_B = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

y definiendo a  $\Omega_B = \omega_B x$ , entonces, se tiene,

$$\Omega_{\mathbf{B}} = \omega_{\mathbf{B}} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & -R & Q \\ R & 0 & -P \\ -Q & P & 0 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

además definiendo,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\mathbf{B}} + m\mathbf{B}g' \quad (3.34)$$

por lo tanto, sustituyendo (3.33) y (3.34) en (3.30), se tiene,

$$m\dot{\mathbf{V}}_{\mathbf{B}} = -m(\omega_{\mathbf{B}} \mathbf{x} \mathbf{V}_{\mathbf{B}}) + \mathbf{F} \quad (3.35)$$

y definiendo a los componentes de  $\mathbf{V}_{\mathbf{B}}$  y  $\mathbf{F}$ , como,

$$\mathbf{V}_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

se tiene,

$$m \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = -m \begin{bmatrix} 0 & -R & Q \\ R & 0 & -P \\ -Q & P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

y desarrollando (3.37),

$$m \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = -m \begin{bmatrix} -Rv + Qw \\ Ru - Pw \\ -Qu + Pv \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

Finalmente las ecuaciones de movimiento traslacional del cohete quedan como,

$$\begin{aligned} m \dot{u} &= m(Rv - Qw) + F_x \\ m \dot{v} &= m(Pw - Ru) + F_y \\ m \dot{w} &= m(Qu - Pv) + F_z \end{aligned} \quad (3.38)$$

El conjunto de las ecuaciones traslacionales obtenidas en (3.38) y deducidas a partir de las ecuaciones (3.18) y (3.29) están acopladas y son no lineales. La ecuación (3.18) contiene a  $\mathbf{V}_B$ , y la ecuación (3.29) contiene a  $\mathbf{p}$ , de ahí el acoplamiento que previene que cada conjunto de ecuaciones sea resuelta en forma aislada. La no linealidad de las ecuaciones es evidente en el producto vectorial de las velocidades traslacionales y angulares, y los productos con la matriz  $\mathbf{B}$  que esta en función del tiempo.

### 3.4.2. Movimiento angular.

Las aceleraciones angulares del cohete pueden ser determinadas aplicando la segunda ley de Newton a la cantidad de cambio del momentum angular del cohete. Así, si  $\mathbf{H}_B$  es el vector de momentum angular del cohete rígido, y  $\mathbf{T}_B$  es el torque o momento neto actuando respecto al centro de gravedad del cohete, entonces [12],

$$\mathbf{T}_B = \frac{d}{dt_1}(\mathbf{H}_B) \quad (3.39)$$

El torque o momento es generado por las superficies de control (aletas, alerones, etc.), por cualquier reacción controlada de los impulsores del motor (toberas móviles), y por cualquiera de los componentes del motor en el que el empuje no actúe en la dirección del centro de gravedad (por ejemplo, debido a la manipulación del vector de control del empuje).

Para determinar el vector de momentum angular, considere un elemento de masa  $\delta m$  con vector de posición  $\mathbf{r}$  (en coordenadas ABC). Su momentum traslacional es la cantidad infinitesimal [12],

$$\delta(\text{momentum}) = (\omega_B \times \mathbf{r}) \delta m \quad (3.40)$$

El momentum angular de esta partícula es el momento del momentum traslacional respecto al origen, es decir [12],

$$\delta \mathbf{H}_B = [\mathbf{r} \times (\omega_B \times \mathbf{r})] \delta m \quad (3.41)$$

y si  $\mathbf{r}$ , tiene los componentes,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (3.42)$$

además recordando la propiedad del triple producto escalar del término en (3.41), se tiene,

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega}_B (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}_B) \quad (3.43)$$

y sustituyendo (3.43) en (3.41),

$$\delta \mathbf{H}_B = \boldsymbol{\omega}_B (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \delta m - \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}_B) \delta m \quad (3.44)$$

y sustituyendo los componentes  $\boldsymbol{\omega}_B$  de (3.31) y los componentes de  $\mathbf{r}$  de (3.42) en la ecuación (3.44), se tiene,

$$\delta \mathbf{H}_B = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \{ (xi + yj + zk) \cdot (xi + yj + zk) \} \delta m - \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \{ (xi + yj + zk) \cdot (Pi + Qj + Rk) \} \delta m \quad (3.45)$$

y desarrollando (3.45),

$$\delta \mathbf{H}_B = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} (x^2 + y^2 + z^2) \delta m - \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} (Px + Qy + Rz) \delta m \quad (3.46)$$

resolviendo a (3.46), se tiene,

$$\delta \mathbf{H}_B = \begin{bmatrix} P(x^2 + y^2 + z^2) \\ Q(x^2 + y^2 + z^2) \\ R(x^2 + y^2 + z^2) \end{bmatrix} \delta m - \begin{bmatrix} x(Px + Qy + Rz) \\ y(Px + Qy + Rz) \\ z(Px + Qy + Rz) \end{bmatrix} \delta m \quad (3.47)$$

y queda,



$$\delta \mathbf{H}_B = \begin{bmatrix} P(y^2 + z^2) \\ Q(x^2 + z^2) \\ R(x^2 + y^2) \end{bmatrix} \delta m - \begin{bmatrix} (Qxy + Rxz) \\ (Pyx + Ryz) \\ (Pzx + Qzy) \end{bmatrix} \delta m \quad (3.48)$$

El momentum angular  $\mathbf{H}_B$  del cohete, es obtenido integrando los componentes de  $\delta \mathbf{H}_B$  sobre toda la masa,

$$\mathbf{H}_B = \begin{bmatrix} P \int (y^2 + z^2) dm - Q \int (xy) dm - R \int (xz) dm \\ Q \int (x^2 + z^2) dm - R \int (yz) dm - P \int (yx) dm \\ R \int (x^2 + y^2) dm - P \int (zx) dm - Q \int (zy) dm \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

donde, recordando la definición de los momentos y productos de inercia,

$$J_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm; J_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm; J_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm \quad (3.50)$$

$$J_{xy} = J_{yx} = \int (xy) dm; J_{yz} = J_{zy} = \int (yz) dm; J_{zx} = J_{xz} = \int (zx) dm \quad (3.51)$$

y sustituyendo en (3.49), se tiene,

$$\mathbf{H}_B = \begin{bmatrix} PJ_{xx} - QJ_{xy} - RJ_{xz} \\ QJ_{yy} - RJ_{yz} - PJ_{yx} \\ RJ_{zz} - PJ_{zx} - QJ_{zy} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

es decir,

$$\mathbf{H}_B = \begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

o en forma más compacta,

$$\mathbf{H}_B = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_B \quad (3.54)$$

además, notar que la *matriz de inercia*  $\mathbf{J}$ , es una matriz simétrica.

Con el momentum angular expresado en términos de la matriz de inercia y el vector de la velocidad angular del cuerpo rígido completo, se está listo para aplicar la segunda ley de Newton como se expresó en (3.39). La diferenciación es realizada usando el *teorema de Coriolis* (ver como referencia la ecuación –3.24-), y la matriz de inercia de (3.53) es asumida como constante.

En la práctica la matriz de inercia cambiará abruptamente si el cohete desaloja provisiones (soltando equipo) y cambiará de una forma gradual respecto a su consumo de combustible. Sin embargo, el efecto más importante es usualmente la variación del centro de gravedad, y este se deberá mantener entre límites predeterminados colocando adecuada y cuidadosamente la carga útil. Si es necesario considerar la variación de las propiedades de la masa, esto no podría hacerse considerando las derivadas de los momentos de inercia. En vez de ello, en la etapa del diseño del sistema de control, podría ser realizado un número de diseños nominales para configuraciones con diferentes configuraciones de propiedades de masa y la computadora del control de vuelo podría ser programada para interpolar suavemente entre estos diseños en el vuelo. Finalmente, es importante darse cuenta de que se ha aplicado la segunda ley de Newton al momentum angular en el sistema de coordenadas del cuerpo ABC en vez del sistema de coordenadas inercial ECI, de lo contrario, la matriz de inercia pudo haber estado variando con el tiempo y las ecuaciones hubieran sido más difíciles de manejar [12].

Ahora se procederá a hacer la diferenciación al momentum angular dado por (3.54), de acuerdo a la segunda ley de Newton dada por (3.39), se tiene,

$$\mathbf{T}_B = \dot{\mathbf{H}}_B + \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{H}_B \quad (3.55)$$

donde,

$$\dot{\mathbf{H}}_B = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_B = \dot{\mathbf{J}} \omega_B + \mathbf{J} \dot{\omega}_B \quad (3.56)$$

y sustituyendo (3.56) en (3.55),

$$\mathbf{T}_B = \dot{\mathbf{J}} \omega_B + \mathbf{J} \dot{\omega}_B + \omega_B \times (\mathbf{J} \omega_B) \quad (3.57)$$

despejando,

$$\mathbf{J} \dot{\omega}_B = \mathbf{T}_B - \omega_B \times (\mathbf{J} \omega_B) - \dot{\mathbf{J}} \omega_B \quad (3.58)$$

y se tiene,

$$\dot{\omega}_B = -\mathbf{J}^{-1} \left[ \omega_B \times (\mathbf{J} \omega_B) \right] + \mathbf{J}^{-1} \mathbf{T}_B - \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{J}} \omega_B \quad (3.59)$$

La ecuación (3.59), es la ecuación básica para el movimiento angular; relaciona las derivadas de las cantidades angulares  $P$ ,  $Q$  y  $R$  del sistema de coordenadas del cuerpo ABC con las cantidades de estas mismas y los torques o momentos ejercidos en la estructura del cohete. Esta ecuación constituye el próximo arreglo de tres ecuaciones. Las ecuaciones son *no lineales* debido a que el vector de la velocidad angular  $\omega_B$  se encuentra repetido dos veces en el primer término del lado derecho.

La matriz inversa de inercia presentada en (3.59), tiene la siguiente forma,

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \\ k_7 & k_8 & k_9 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

donde,

$$k_1 = \frac{J_{yy}J_{zz} - J_{yz}^2}{\Delta}, \quad k_2 = \frac{J_{yz}J_{zx} + J_{xy}J_{zz}}{\Delta}$$

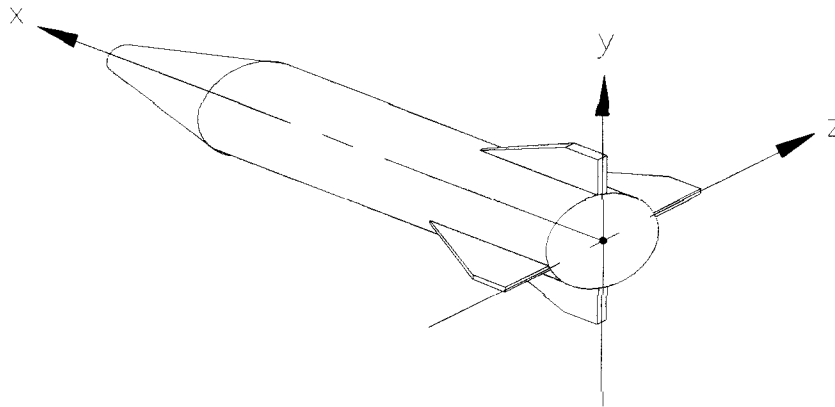
$$k_3 = \frac{J_{xy}J_{yz} + J_{zx}J_{yy}}{\Delta}, \quad k_4 = \frac{J_{zz}J_{xx} - J_{zx}^2}{\Delta}$$

$$k_5 = \frac{J_{xy}J_{zx} + J_{yz}J_{xx}}{\Delta}, \quad k_6 = \frac{J_{xx}J_{yy} - J_{xy}^2}{\Delta}$$

y,

$$\Delta = J_{xx}J_{yy}J_{zz} - 2J_{xy}J_{yz}J_{zx} - J_{xx}J_{yz}^2 - J_{yy}J_{zx}^2 - J_{zz}J_{xy}^2$$

Para este análisis se supondrá un cohete con cuatro aletas y tres ejes de simetría, tal como el que se muestra en la figura 3.4.



**Figura 3.4.** Cohete con cuatro aletas y suponiendo tres planos de simetría;  $x$ - $z$ ,  $y$ - $z$ ,  $x$ - $y$ .

Por lo que la matriz de inercia y la matriz inversa de inercia quedan respectivamente como,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\Gamma} \begin{bmatrix} J_z & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma & 0 \\ 0 & 0 & J_x \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

donde,

$$\Gamma = J_x J_z$$

por simplicidad los momentos de inercia se manejarán como,

$$J_x = J_{xx}; \quad J_y = J_{yy}; \quad J_z = J_{zz}$$

además, se tiene,

$$\dot{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \dot{J}_x & 0 & 0 \\ 0 & \dot{J}_y & 0 \\ 0 & 0 & \dot{J}_z \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

ahora bien, definamos los componentes del torque o momento  $\mathbf{T}_B$  como;

$$\mathbf{T}_B = \begin{bmatrix} \bar{L} \\ M \\ N \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

donde,  $\bar{L}$  es el componente del momento de balance del vector del torque, se diferenciará con una la línea sobre esta letra, de la variable de la fuerza de sustentación  $L$ .

Sustituyendo las ecuaciones (3.31), (3.32), (3.61), (3.62), (3.63) y (3.64) en (3.59), se tiene,

$$J_x J_z \begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_z & 0 & 0 \\ 0 & \frac{J_x J_z}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & J_x \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & R & -Q \\ -R & 0 & P \\ Q & -P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{L} \\ M \\ N \end{bmatrix} \right. \\ \left. - \begin{bmatrix} \dot{J}_x & 0 & 0 \\ 0 & \dot{J}_y & 0 \\ 0 & 0 & \dot{J}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \right\} \quad (3.65)$$

desarrollando el primer término entre corchetes, se tiene,

$$\begin{bmatrix} 0 & R & -Q \\ -R & 0 & P \\ Q & -P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & RJ_y & -QJ_z \\ -RJ_x & 0 & PJ_z \\ QJ_x & -PJ_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} QRJ_y - RQJ_z \\ -PRJ_x + PRJ_z \\ PQJ_x - QPJ_y \end{bmatrix} \quad (3.65a)$$

desarrollando el tercer término entre corchetes, se tiene,

$$\begin{bmatrix} \dot{J}_x & 0 & 0 \\ 0 & \dot{J}_y & 0 \\ 0 & 0 & \dot{J}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \dot{J}_x \\ Q \dot{J}_y \\ R \dot{J}_z \end{bmatrix} \quad (3.65b)$$

sustituyendo (3.65a) y (3.65b) en (3.65),

$$J_x J_z \begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_z & 0 & 0 \\ 0 & \frac{J_x J_z}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & J_x \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} QRJ_y - RQJ_z + \bar{L} - P \dot{J}_x \\ -PRJ_x + PRJ_z + M - Q \dot{J}_y \\ PQJ_x - QPJ_y + N - R \dot{J}_z \end{bmatrix} \right\} \quad (3.66)$$

desarrollando la ecuación (3.66),

$$J_x J_z \begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_z \left\{ QR(J_y - J_z) + \bar{L} - P \dot{J}_x \right\} \\ \frac{J_x J_z}{J_y} \left\{ PR(J_z - J_x) + M - Q \dot{J}_y \right\} \\ J_x \left\{ PQ(J_x - J_y) + N - R \dot{J}_z \right\} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Finalmente las ecuaciones de movimiento angular del cohete quedan como,

$$\begin{aligned} J_x \dot{P} &= \left\{ QR(J_y - J_z) + \bar{L} - P \dot{J}_x \right\} \\ J_y \dot{Q} &= \left\{ PR(J_z - J_x) + M - Q \dot{J}_y \right\} \\ J_z \dot{R} &= \left\{ PQ(J_x - J_y) + N - R \dot{J}_z \right\} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Las ecuaciones de movimiento angular (3.68), son no lineales y acopladas. Estas ecuaciones están inherentemente acopladas debido a que la velocidad angular respecto a cualquiera de los dos ejes produce una aceleración respecto al tercero, es decir, se produce un *efecto giroscópico*.

### 3.5. Parámetros de Euler.

Como lo sugiere su título, esta sección se concentra en un conjunto de coordenadas orientacionales conocidas como *parámetros de Euler*<sup>1</sup>, los cuales están libres de algunas de las deficiencias de otras coordenadas angulares comúnmente utilizadas como es el caso de los ángulos de Euler o como también sucede con los ángulos Bryant, por ejemplo en [16], [36], [37] y [38] se deducen las ecuaciones de movimiento de un cohete en función de los ángulos de Euler y/o ángulos Bryant. Para programas computacionales de gran escala que tratan la orientación angular de cuerpos, ya sean rígidos o deformables, el uso de parámetros de Euler puede simplificar drásticamente las formulaciones matemáticas.

En la sección de análisis cinemático se dedujeron las matrices de transformación ortogonal requeridas para transformar los vectores respecto a los tres sistemas de coordenadas de referencia utilizadas en esta tesis, sin embargo, a continuación se dará nuevamente un breve tratamiento para exponer los parámetros de Euler.

Considérese un vector cualquiera  $\mathbf{s}$  desde el origen de un punto  $p$ , como se muestra en la figura 3.5, que puede ser expandido en dos sistemas de coordenadas.

Si los vectores unitarios  $\mu_{(\xi)}$ ,  $\mu_{(\eta)}$  y  $\mu_{(\zeta)}$  están definidos a lo largo de los ejes  $\xi\eta\zeta$  y  $\mu_{(x)}$ ,  $\mu_{(y)}$  y  $\mu_{(z)}$  son definidos a lo largo de los ejes  $xyz$ , entonces [13],

$$\mathbf{s} = s_{(x)}\mu_{(x)} + s_{(y)}\mu_{(y)} + s_{(z)}\mu_{(z)} \quad (3.69)$$

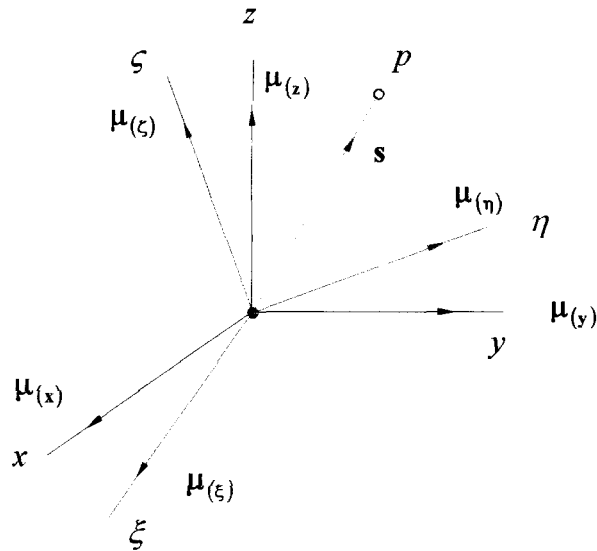
o

---

<sup>1</sup> Los parámetros de Euler son una forma normalizada de parámetros conocidos como cuaterniones.



$$\mathbf{s} = s_{(\xi)}\boldsymbol{\mu}_{(\xi)} + s_{(\eta)}\boldsymbol{\mu}_{(\eta)} + s_{(\zeta)}\boldsymbol{\mu}_{(\zeta)} \quad (3.70)$$



**Figura 3.5.** Vectores unitarios a lo largo de los ejes del sistema de coordenadas local y global

Las componentes de los vectores que define  $\mathbf{s}$  en los dos sistemas de coordenadas son,

$$\mathbf{s} = [s_{(x)}, s_{(y)}, s_{(z)}]^T \quad (3.71)$$

en el sistema  $xyz$ , y

$$\mathbf{s}' = [s_{(\xi)}, s_{(\eta)}, s_{(\zeta)}]^T \quad (3.72)$$

en el sistema  $\xi\eta\zeta$ .

La relación entre  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{s}'$  en forma matricial es,

$$\mathbf{s} = \mathbf{B}\mathbf{s}' \quad (3.73)$$

El lector debe notar la similitud conceptual de la matriz de transformación  $\mathbf{B}$  dada en la ecuación (3.73), con la matriz que se presenta en la ecuación (3.15). Por definición esta matriz de cosenos directores esta dada por,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

La matriz  $\mathbf{B}$  tiene una propiedad especial. Si las componentes  $\xi\eta\zeta$  de los vectores unitarios  $\boldsymbol{\mu}_{(\xi)}$ ,  $\boldsymbol{\mu}_{(\eta)}$  y  $\boldsymbol{\mu}_{(\zeta)}$  son denotados por  $\mu_{(\xi)}$ ,  $\mu_{(\eta)}$  y  $\mu_{(\zeta)}$  y las componentes xyz de los vectores  $\boldsymbol{\mu}_{(x)}$ ,  $\boldsymbol{\mu}_{(y)}$  y  $\boldsymbol{\mu}_{(z)}$  son denotados por  $\mu_{(x)}$ ,  $\mu_{(y)}$  y  $\mu_{(z)}$ , es claro que,

$$\boldsymbol{\mu}_{(x)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu}_{(y)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu}_{(z)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Además,

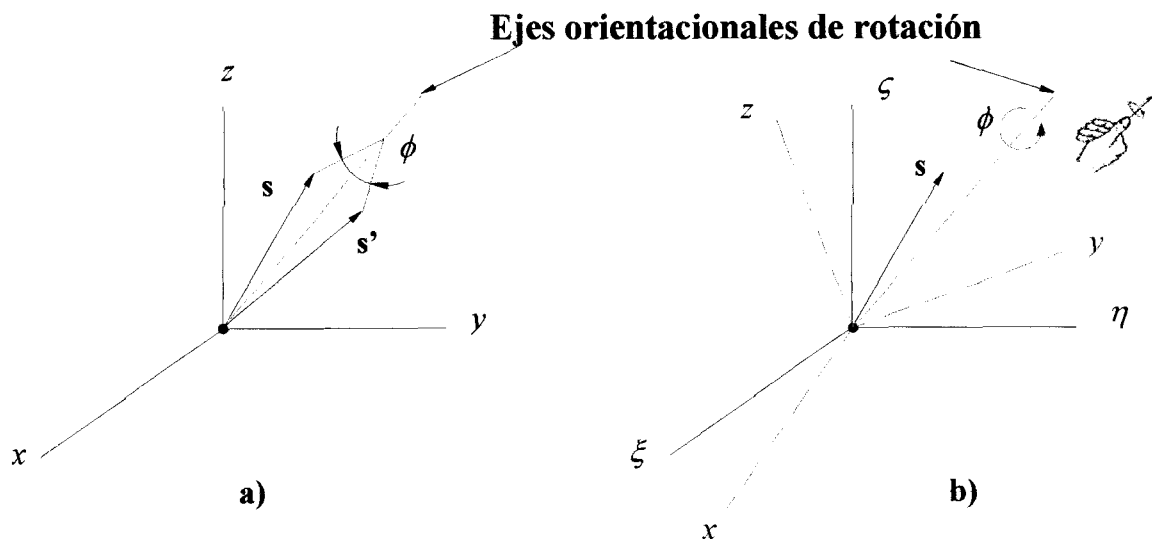
$$\boldsymbol{\mu}_{(\xi)} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu}_{(\eta)} = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu}_{(\zeta)} = \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

y la matriz  $\mathbf{B}$ , puede ser escrita como sigue,

$$\mathbf{B} = [\boldsymbol{\mu}_{(\xi)}, \boldsymbol{\mu}_{(\eta)}, \boldsymbol{\mu}_{(\zeta)}]^T \quad (3.77)$$

El conjunto de parámetros de Euler emplean el *punto de vista activo* para la determinación de la matriz  $\mathbf{B}$ . Ya que un cambio en la orientación angular puede ser interpretado desde un *punto de vista activo* o desde un *punto de vista pasivo* [13]. Simbólicamente una transformación puede escribirse como la ecuación (3.73).

De acuerdo al *punto de vista activo*, el operador  $\mathbf{B}$  relaciona dos vectores de igual longitud,  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{s}'$ , expresados sólo en términos del sistema de coordenadas global, como se muestra en la figura 3.6a. Por el otro lado, el *punto de vista pasivo* describe sólo un vector simple  $\mathbf{s}$  e introduce un nuevo sistema de coordenadas local que acontece para el cambio en la orientación, como se muestra en la figura 3.6b. En este caso el operador  $\mathbf{B}$  relaciona a los componentes globales del vector  $\mathbf{s}$  a sus componentes locales  $\mathbf{s}'$ . Mientras uno rota el sistema de coordenadas en contra de las manecillas del reloj (rotación en sentido positivo), de acuerdo al *punto de vista pasivo*, un vector  $\mathbf{s}$  rota en el sentido de las manecillas del reloj a un mismo ángulo desde el *punto de vista activo*, para obtener un nuevo vector  $\mathbf{s}'$  en el mismo sistema de coordenadas. El álgebra es la misma cuando los dos puntos de vista son proseguídos.



**Figura 3.6.** Sistemas de coordenadas de rotación: a). Punto de vista activo.  
b). Punto de vista pasivo.

El *punto de vista pasivo* es empleado para determinar la matriz de transformación en término de los ángulos de Euler y Bryant [13].

Desarrollando el análisis relacionando a la matriz de transformación  $\mathbf{B}$  desde el *punto de vista activo*, se obtiene [13],

$$\mathbf{B} = 2 \begin{bmatrix} e_0^2 + e_1^2 - \frac{1}{2} & e_1 e_2 - e_0 e_3 & e_1 e_3 + e_0 e_2 \\ e_1 e_2 + e_0 e_3 & e_0^2 + e_2^2 - \frac{1}{2} & e_2 e_3 - e_0 e_1 \\ e_1 e_3 - e_0 e_2 & e_2 e_3 + e_0 e_1 & e_0^2 + e_3^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

Las cuatro cantidades  $e_0$ ,  $e_1$ ,  $e_2$  y  $e_3$  son llamadas *parámetros de Euler*.

Se puede demostrar que los parámetros de Euler no son independientes y que tienen la relación [13],

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1 \quad (3.79)$$

Los cuatro parámetros de Euler son colocados en un vector-4,

$$\mathbf{q} = [e_0, e_1, e_2, e_3]^T \quad (3.80)$$

De la matriz de transformación de la ecuación (3.78) y asumiendo que los nueve cosenos directores de la matriz de transformación están dados por la ecuación (3.74), es posible derivar fórmulas explícitas para los parámetros de Euler en términos de los elementos de la matriz de transformación. Las ecuaciones obtenidas son [13],

$$e_0^2 = \frac{\text{tr}\mathbf{B} + 1}{4} \quad (3.81)$$

$$e_1^2 = \frac{1 + 2b_{11} - \text{tr}\mathbf{B}}{4} \quad (3.82)$$

similarmente,

$$e_2^2 = \frac{1 + 2b_{22} - \text{tr}\mathbf{B}}{4} \quad (3.83)$$

y,

$$e_3^2 = \frac{1 + 2b_{33} - \text{tr}\mathbf{B}}{4} \quad (3.84)$$

donde, la traza de la matriz  $\mathbf{B}$  esta dada por,

$$\text{tr}\mathbf{B} = b_{11} + b_{22} + b_{33} \quad (3.85)$$

En contraste a los ángulos de Euler y Bryant, o cualquier otro conjunto de tres coordenadas rotacionales, no hay casos críticos en los cuales estas fórmulas inversas sean singulares.

Es interesante y computacionalmente importante notar que las ecuaciones (3.81) a la (3.84) determinan sólo las magnitudes de los parámetros de Euler, en término de sólo los elementos de la diagonal de la matriz  $\mathbf{B}$  de cosenos directores, ver ecuación (3.74). Para determinar los signos algebraicos de los parámetros de Euler, deben ser utilizados los términos fuera de la diagonal. La ecuación (3.79) indica que por lo menos un parámetro de Euler debe ser diferente de cero. Sustrayendo simétricamente los términos fuera de la diagonal de la matriz  $\mathbf{B}$  en las ecuaciones (3.74) y (3.78) dan [13],

$$e_1 = \frac{b_{32} - b_{23}}{4e_0} \quad (3.86)$$

$$e_2 = \frac{b_{13} - b_{31}}{4e_0} \quad (3.87)$$

$$e_3 = \frac{b_{21} - b_{12}}{4e_0} \quad (3.88)$$

Si  $e_0$  calculada de la ecuación (3.81), es diferente de cero, entonces las ecuaciones (3.86) – (3.88) pueden ser usadas para determinar  $e_1$ ,  $e_2$  y  $e_3$ .

Por el contrario, si  $e_0$  calculada de la ecuación (3.81), es cero, entonces las ecuaciones (3.82) – (3.84) pueden ser usadas para calcular  $e_1$ ,  $e_2$  y  $e_3$ . Para determinar los signos algebraicos de  $e_1$ ,  $e_2$  y  $e_3$ , los términos simétricamente colocados fuera de la diagonal de la matriz  $\mathbf{B}$  son adicionados para obtener [13],

$$b_{21} + b_{22} = 4e_1e_2 \quad (3.89)$$

$$b_{31} + b_{13} = 4e_1e_3 \quad (3.90)$$

$$b_{32} + b_{23} = 4e_2e_3 \quad (3.91)$$

Por lo menos uno de los tres parámetros de Euler  $e_1$ ,  $e_2$  y  $e_3$  debe ser diferente de cero. Su signo puede ser seleccionado como positivo o negativo y así entonces, las ecuaciones (3.89) – (3.91) pueden ser utilizadas para determinar la magnitud y el signo de los otros dos parámetros.

Con la finalidad de obtener la derivada de los parámetros de Euler, se definirá la matriz  $\mathbf{L}$  de 3 x 4, que es una matriz de transformación tratando con vectores de componentes locales, donde se puede demostrar que es [13],

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & e_3 & -e_2 \\ -e_2 & -e_3 & e_0 & e_1 \\ -e_3 & e_2 & -e_1 & e_0 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

La derivada de los parámetros de Euler con respecto al tiempo puede ser demostrada que es obtenida como,

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{L}^T \omega' \quad (3.93)$$

Donde  $\omega'$  indica el vector de la velocidad angular dada en coordenadas locales que para el análisis en particular de las ecuaciones de movimiento presentadas en esta tesis es  $\omega' = \omega_B$ .

El conjunto de ecuaciones diferenciales presentadas en (3.93) son utilizadas en las ecuaciones generales de movimiento del cohete, y como ya se había comentado anteriormente éstas eliminan el problema de singularidad. Estas ecuaciones son acopladas con el resto de las ecuaciones de movimiento a través de las variables  $P, Q$  y  $R$  y a través de la reconstrucción de la matriz  $\mathbf{B}$  para usarla junto con las demás variables, como será visto en el ensamble de las ecuaciones generales de movimiento presentadas en el capítulo 5.

### 3.6. Variables utilizadas en las ecuaciones de movimiento.

Esta sección tiene como objetivo exponer los modelos matemáticos de las variables de mayor importancia que, junto con las fuerzas aerodinámicas que se presentan en el capítulo 4 son consideradas en las ecuaciones generales de movimiento que serán presentadas en el capítulo 5.

#### 3.6.1. Densidad del aire.

La densidad del aire decrece con la altitud y por lo tanto, los efectos aerodinámicos disminuyen, por razones analíticas es conveniente utilizar una aproximación exponencial de la densidad atmosférica en función de la altura [17]. Una de tales aproximaciones bajo 9,144 m (30,000 ft) de altitud está dada por,

$$\rho(h) = 0.002378e^{-h/30,000} \quad (3.94)$$

arriba de 9,144 m (30,000 ft) de altitud, la aproximación exponencial da,

$$\rho(h) = 0.0034e^{-h/22,000} \quad (3.95)$$

donde,  $h$  esta dada en ft.

Para comprobar la validez de las aproximaciones exponenciales, la U. S. Standard Atmosphere de 1962, es desplegada como una función de la altura y comparada con las ecuaciones (3.94) y (3.95) y se demuestra una aproximación que con fines prácticos es aceptable.

### 3.6.2. Aceleración de la gravedad terrestre.

La fuerza de atracción de la masa entre dos cuerpos es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia  $r$  entre sus centros de masa (Ley de gravitación de Newton). Cuando esta ley es aplicada a la atracción gravitacional de la tierra, es conveniente combinar la constante de proporcionalidad con la masa de la tierra. El resultado es una constante conocida como la *constante gravitacional de la tierra*  $GM$ , y la magnitud de la fuerza actuando en un cohete sonda de masa  $m$  es entonces,  $(GM \cdot m)/r^2$ . La dirección de esta fuerza esta alineada al vector de posición  $\mathbf{p}$  en coordenadas ECI, apuntando hacia el centro de la tierra. La longitud del vector de posición ECI da la separación  $r$  en esta relación de la Ley gravitacional. Así, la aceleración gravitacional es escrita como [12],

$$\mathbf{g} = -\frac{GM}{\|\mathbf{p}\|^3} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

donde,  $GM = 3.986 \times 10^{14} \text{ m}^3 / \text{s}^2$ .

Es importante aclarar que el vector gravedad apuntando hacia la superficie de la tierra y la que se considera en las ecuaciones de movimiento como se vio en la



ecuación (3.30) es el vector de aceleración de la gravedad dado por la ecuación (3.31) en coordenadas ECI,

$$\mathbf{g}' = [\mathbf{g} - \omega_E \times (\omega_E \times \mathbf{p})] \quad (3.31)$$

Esta ecuación contiene la aceleración gravitacional de la tierra de la ecuación (3.96) y el término de la aceleración centrípeta debido a la rotación en el sistema de coordenadas ECI con el vector de velocidad angular de la tierra  $\omega_E$ . Es interesante examinar este término debido a que también corresponde a la aceleración sentida por una plomada o péndulo suspendido sobre la superficie de la tierra [12]. Es importante distinguir entre  $\mathbf{g}$  y  $\mathbf{g}'$  cuando se utilice la ecuación (3.30).

Por otro lado, haciendo referencia a la ecuación (3.96), la componente  $(GM / \|p\|^2)$  proporciona la magnitud correcta para  $\mathbf{g}$ , el denominador sobrante  $\|p\|$  sirve para reducir al vector  $\mathbf{p}$  a su longitud unitaria. La atracción gravitatoria varía con la longitud del vector  $\mathbf{p}$  debido al cuadrado inverso, y también con el ángulo de latitud geocéntrica  $\lambda$  debido a la forma elipsoidal de la tierra.

La ecuación (3.96) es modificada para considerar el efecto elipsoidal de la tierra sobre  $\mathbf{g}$ . Las componentes  $p_x$ ,  $p_y$  y  $p_z$  del vector de posición en ECI de la ecuación (3.96) son respectivamente reemplazadas por  $\bar{p}_x$ ,  $\bar{p}_y$  y  $\bar{p}_z$ , como [12],

$$\bar{p}_x = p_x \left[ 1 + 1.5j \left( \frac{r_E}{\|p\|} \right)^2 (1 - 5\text{Sen}^2 \lambda) \right] \quad (3.97a)$$

$$\bar{p}_y = p_y \left[ 1 + 1.5j \left( \frac{r_E}{\|p\|} \right)^2 (1 - 5\text{Sen}^2 \lambda) \right] \quad (3.97b)$$

$$\bar{p}_z = p_z \left[ 1 + 1.5j \left( \frac{r_E}{\|p\|} \right)^2 (3 - 5\text{Sen}^2 \lambda) \right] \quad (3.97c)$$

donde,  $j = 1.08263 \times 10^{-3}$  es una constante gravitacional armónica,  $r_E = 6,378,138.12m$  es el radio ecuatorial y  $\lambda$  es el ángulo de latitud geocéntrica.

### 3.6.3. Fuerza de empuje.

Hay varios comentarios importantes que deben hacerse a este respecto.

En estudios de balística interior (ciencia que estudia las fuerzas y aceleraciones producidas por el flujo de gas cuando sale del motor) el empuje es usualmente calculado a partir de la distribución de presiones. Esto es necesario en cualquier tratamiento que considere los detalles del flujo del gas y la combustión del propelente. Por el otro lado, si no se considera a un cohete estacionario montado sobre un bloque estático de lanzamiento, sino más bien, a un cohete volando teniendo una variedad de velocidades traslacionales y angulares, y si solo las aceleraciones son deseadas, entonces es más conveniente expresar el empuje en término de fuerzas [18].

Durante todas las consideraciones realizadas en esta tesis referente a la fuerza de empuje utilizada en las ecuaciones de movimiento del cohete, se asume que la fuerza de empuje actúa a lo largo del eje axial del cohete y que pasa a través de su centro de masa y que la fuerza de empuje sólo es una función del tiempo (la curva del empuje en función del tiempo de cohetes comerciales son proporcionadas por el fabricante, como se presentará en los casos de estudio del capítulo 6). Además, se considera en esta tesis que el motor utilizado durante las ecuaciones de movimiento es un motor de propelente sólido, ya que de lo contrario, en la utilización de motores de combustible líquido se deberían considerar los efectos inerciales del movimiento del fluido durante el vuelo.

En la práctica es imposible construir los cohetes ideales como los que se consideran en esta tesis, debido a que las partes de material del fuselaje no pueden ser construidas y alineadas perfectamente y debido a que los flujos de gases de la combustión no están perfectamente uniformes aún si las partes de material del fuselaje fueran perfectas.

Hay dos tipos de imperfecciones a saber, por un lado están las imperfecciones conocidas como *desalineamientos lineales*, en las cuales la línea de acción del empuje no

pasa a través del centro de masa, y se producirá un torque tendiendo a rotar al cohete respecto a alguno de sus ejes. Debido a que el empuje tiende a dirigir al cohete en la dirección en la cual éste apunta, el cohete se moverá en una trayectoria curva y no seguirá la trayectoria esperada, así, los *desalineamientos lineales* son definidos como la distancia desde el eje del vector de empuje hacia el centro de masa; por otro lado, las imperfecciones debidas a, si la línea de acción del vector de empuje pasa a través del centro de masa pero no es paralelo al eje axial del cohete, ésta deslizará al cohete lateralmente, estas imperfecciones son conocidas como *desalineamientos angulares* y son definidas como el ángulo tendido entre el eje del vector de empuje y el eje axial del cohete [18], y [33].

Las consideraciones de desalineamientos son muy importantes debido a que en muchos casos la causa principal de fuentes de dispersión de cohetes estabilizados con aletas (como el que se trata en esta tesis) es el *desalineamiento lineal* debido a flujos de gases de combustión no uniformes. Lanzamientos de cohetes desde aeroplanos forman una excepción a estas consideraciones debido a que la alta velocidad a través del aire en el lanzamiento reduce la deflexión del cohete ya que lo obliga a apuntar hacia su trayectoria y la dispersión resultante disminuye [18], y [33].

Después de extensas investigaciones realizadas con cohetes estabilizados con aletas (en los Estados Unidos en la década de los 40's) similares a los que considera la presente tesis, las conclusiones a las que se llegaron fueron que mientras los factores tales como, la velocidad del viento, el movimiento de la plataforma de lanzamiento, la variación en la velocidad en la combustión, etc., podían producir dispersiones que fueran bastantes grandes en circunstancias especiales, bajo circunstancias ordinarias estas fueron menos importantes con respecto al efecto producido cuando el eje del vector de empuje durante la combustión no coincidía con la posición de los ejes geométricos de las toberas del cohete antes de iniciarse la combustión, es decir, se presentaba una combinación tanto de desalineamientos angulares como lineales [18], y [33]. Por esto, para aproximaciones más reales, se requiere de experimentación en el análisis del vector empuje de motores comerciales.

### 3.6.4. Velocidad del viento.

Comentarios acerca de este tema son de importancia debido a la relevancia que reviste la variable velocidad del viento en las ecuaciones de movimiento. El tema es muy extenso y sólo se expondrán los puntos más relevantes que ayuden a entender en forma general el problema.

La atmósfera es un fluido que raramente se encuentra en reposo. Debido a la irregular distribución de la temperatura, las masas de aire se mueven en todas las direcciones y sentidos en el globo terrestre. Este fenómeno es llamado *viento*. Desde el punto de vista físico es la velocidad de las partículas de aire, en consecuencia es un vector que se define por su dirección e intensidad.

Las ecuaciones de movimiento presentadas en esta tesis pueden considerar vientos que varíen en sus tres direcciones en el espacio, como la que se expone en la ecuación (4.7) del capítulo 4.

La forma de obtener valores de la velocidad y dirección del viento es mediante mediciones de satélites artificiales o mediante modelos matemáticos. Éste último es el que interesa debido a que se puede utilizar para hacer simulaciones de trayectorias preliminares. Por esto, a continuación se habla de tales modelos matemáticos.

Existen varias suposiciones que se pueden hacer para determinar modelos matemáticos que se aproximen al viento real tales como [2,19],

*Viento geostrófico*, es una aproximación al viento real que se obtiene con las siguientes hipótesis,

- a). La corriente de aire se supone rectilínea, es decir, las isobaras (conjunto de líneas que representan zonas de igual presión atmosférica) son líneas rectas, así es que como no hay curvatura, no habrá aceleración centrípeta.
- b). El viento se considera horizontal tendiéndose sólo en el plano “x”-“y” en coordenadas NED (véase figura 3.1, como referencia).
- c). No hay aceleración, es decir la velocidad es una constante.
- d). El movimiento se supone libre de fricción (no se consideran turbulencias, sólo flujo laminar).

La ecuación del viento geostrófico en sus coordenadas NED está dada por [2,19],

$$Wx_g = \left( \frac{1}{\rho 2\omega_E \text{Sen}\mu} \right) \frac{\partial p_r}{\partial x} \quad (3.98a)$$

$$Wy_g = \left( \frac{1}{\rho 2\omega_E \text{Sen}\mu} \right) \frac{\partial p_r}{\partial y} \quad (3.98b)$$

donde,  $\rho$  es la densidad del aire. El término  $\frac{\partial p_r}{\partial x}$  representa la diferencia de presión entre las isobaras y sus distancias entre sí. La cantidad  $2\omega_E \text{Sen}\mu$  se llama parámetro de Coriolis y sus componentes  $\omega_E$  y  $\mu$  son la velocidad angular de la tierra y la latitud geográfica respectivamente.

De las ecuaciones (3.98a) y (3.98b) se define la magnitud del viento geostrofico como,

$$V_g = \sqrt{Wx_g^2 + Wy_g^2} \quad (3.99)$$

Por lo tanto, los términos importantes de las ecuaciones de flujo de viento horizontal (3.98a) y (3.98b) son la fuerza de presión y la fuerza de Coriolis (fuerza desviadora debida a la rotación de la tierra).

Otra aproximación al viento real es el *viento del gradiente*. Es similar al viento geostrófico, pero en él se incluye una fuerza más: la fuerza centrífuga. El viento gradiente es definido como el viento que existe si la trayectoria de la partícula es circular y existe un balance entre la fuerza de presión, la fuerza de Coriolis y la fuerza centrífuga [2,19]. Se puede apreciar que el viento gradiente es una generalización del viento geostrófico, ya que en tal caso se requiere un balance entre las fuerzas de presión y la fuerza de Coriolis.

Una mejor aproximación al viento real y que es más general que los flujos geostróficos y de gradiente se obtiene considerando el viento de gradiente más una componente de aceleración tangencial [2] y [19].

Mayores consideraciones al modelo matemático que simule al vector de velocidad del viento toman en cuenta lo siguiente; el efecto del *rozamiento del suelo*, comprendida entre el suelo y los 1,000 m de altura. En esta zona la masa de aire, en su movimiento, es frenada y desviada por la superficie como consecuencia del rozamiento o fricción respecto al flujo de aire viscoso. Esto incluye a los *obstáculos y la accidentada orografía*, estimulando la formación de remolinos [2] y [19].

Además en la atmósfera se producen, en determinadas circunstancias, ciertos movimientos ondulatorios. Si las ondas son de gran longitud, se producen grandes remolinos que engendran borrascas y anticiclones, pero si las longitudes no exceden de varios kilómetros, se forman ondas cortas.

Las ondas cortas pueden ser de tres clases [2]:

- a). De gravedad
- b). De gravedad-cizalladura.
- c). De cizalladura.

Las *ondas de gravedad*, como su nombre indica, se deben a la fuerza de gravedad. Se forman cuando una fuerza eleva la superficie de un fluido hasta un determinado nivel, a partir del cual la fuerza de gravedad lo hace descender, produciéndose así ascensos y descensos que configuran la onda, cuya longitud varía desde 3 a 20 km. Un caso particular de onda de gravedad es la onda de montaña.

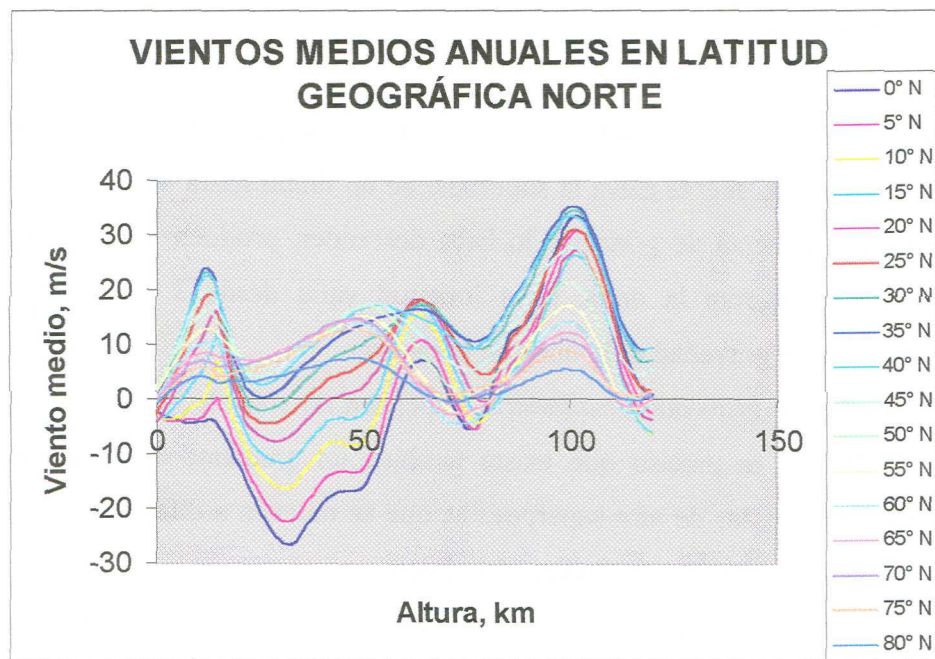
Las *ondas de gravedad-cizalladura*, dependen no sólo de la fuerza de gravedad, para que se formen es preciso que exista también un gradiente de temperatura y de densidad entre dos masas de aire superpuestas que se mueven a diferente velocidad y en consecuencia hay una notable cizalladura del viento.

Finalmente las *ondas de cizalladura*, no se presentan nunca en estado estacionario, son altamente inestables y se caracterizan por una definida discontinuidad en el campo el viento.

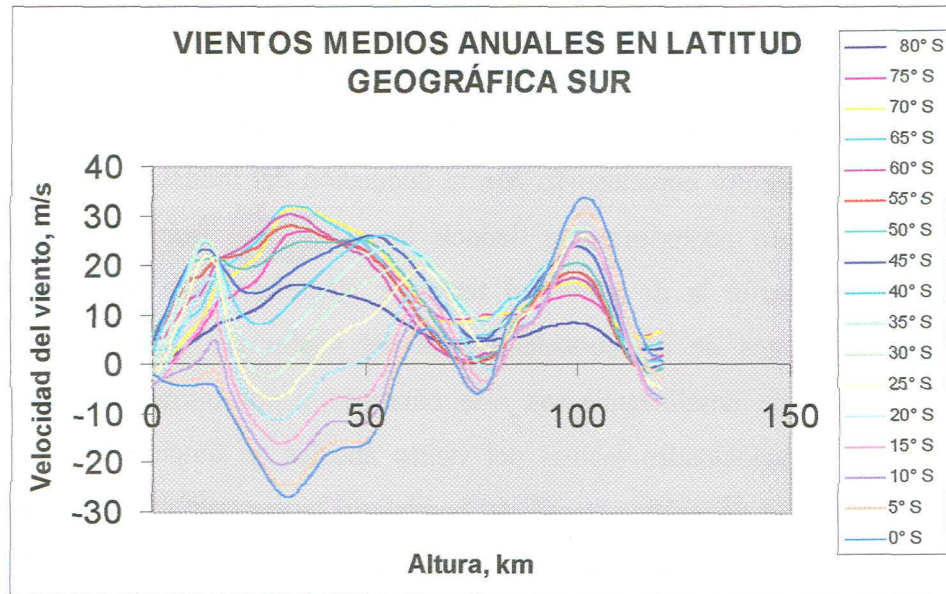
Por lo anterior, existen versiones más generales para aproximarse al viento real que las expuestas en las ecuaciones (3.98).

Se han desarrollado modelos matemáticos de temperaturas y densidades atmosféricas como es recomendado por el COSPAR (Committee on Space Research) que pertenece a la NSSDC (National Space Science Data Center). El grupo de trabajo llamado CIRA (COSPAR International Reference Atmosphere) formado dentro de la COSPAR ha desarrollado estos modelos desde principios de los sesentas. El grupo de trabajo CIRA se reúne bianualmente durante las asambleas generales de la COSPAR [20].

De los datos de CIRA desarrollados en 1986 (CIRA-86), los que resaltan para esta tesis son las tablas de velocidades de viento que en forma gráfica se presentan a continuación,



*Figura 3.7a.* Vientos medios anuales en latitud geográfica Norte.



*Figura 3.7b.* Vientos medios anuales de latitud geográfica Sur.

En las figuras 3.7a y 3.7b se presentan los datos del modelo matemático citado por CIRA-86. De acuerdo a lo comentado por CIRA, el modelo reproduce con gran exactitud muchas de las características de la atmósfera tales como vientos ecuatoriales y la estructura general de la tropopausa, estratopausa y mesopausa.

De estas figuras se observa la dependencia de los vientos tanto de la altura sobre el nivel del mar como de la latitud geográfica, esto implica que se realizaron consideraciones de gradientes térmicos en el modelo. Además notar que estos datos hacen referencia a la variación de los vientos en el eje “x” de coordenadas NED. Como será demostrado en el capítulo 6 las ecuaciones utilizadas para aproximar las curvas se obtuvieron por medio de polinomios.

### 3.7. Conclusiones.

Se han expuesto en este capítulo los tres sistemas de referencia cartesianos utilizados durante la deducción de las ecuaciones de movimiento, así también, se han presentado las matrices de transformación ortogonal durante el análisis cinemático. En el análisis dinámico se han deducido los dos conjuntos de 3 ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales, ambos de traslación y rotación respectivamente. Para evitar



singularidades en las matrices de transformación, se han deducido las ecuaciones utilizadas para determinar los parámetros de Euler. Se han presentado las consideraciones y modelos matemáticos útiles de las variables más importantes utilizadas en las ecuaciones de movimiento, comenzando con la deducción del modelo matemático de la densidad del aire, para posteriormente deducir las ecuaciones que se utilizarán para determinar la aceleración la de gravedad terrestre. Posteriormente se mencionan los aspectos más relevantes de las consideraciones del vector de la fuerza de empuje, indicando los tipos de desalineamientos más comunes y por último se presentan las curvas de datos de velocidades medias del viento anuales en función de la altura (0-120 km) y de la latitud geográfica (tanto del hemisferio Norte como del hemisferio Sur) obtenidas mediante un modelo matemático publicado por la COSPAR (Committee on Space Research).

En general, gran parte de las ecuaciones deducidas en este capítulo junto con otro sistema de ecuaciones del siguiente capítulo 4 conformarán el sistema ensamblado de ecuaciones de movimiento generales que se presentarán en el capítulo 5.

*El término aerodinámica es usado generalmente para problemas que tratan con el vuelo y con otros tópicos que involucren al flujo del aire.*

*Ludwig Prandtl, 1949. Padre de la aerodinámica moderna.*

## Capítulo 4

### Efectos aerodinámicos

#### 4.1. Introducción.

Durante este capítulo se deducirán las ecuaciones de las fuerzas y momentos aerodinámicos que actúan sobre un cohete. La aerodinámica es la rama que trata con las propiedades y características de las fuerzas ejercidas por el aire y otros gases en movimiento. El campo de la aerodinámica incluye la ciencia del gas en sí mismo en movimiento y la ciencia de objetos sumergidos en un gas entre los cuales existe un movimiento relativo.

La aerodinámica es un campo con numerosas especializaciones y aplicaciones, algunas de las cuales se extienden dentro de campos de la ciencia y tecnología, aparentemente no relacionados. La función más frecuentemente practicada de los profesionales en aerodinámica, es el análisis de las fuerzas y momentos ejercidos en un cuerpo sólido en movimiento a través del aire.

En la primera sección de este capítulo se definirán los ejes y ángulos aerodinámicos utilizados para deducir las ecuaciones de las fuerzas y momentos aerodinámicos.

son también dependientes de las velocidades angulares, pero por el momento se considerarán sólo dependientes de la orientación.

El ángulo de ataque es medido con respecto a una línea de referencia del fuselaje y denotado por  $\alpha$ . Se considerará que los *ejes del cuerpo* (ABC) están alineados con las líneas de referencia del fuselaje; de lo contrario, el ángulo  $\alpha$  utilizado en las ecuaciones de movimiento en las coordenadas del cuerpo (ABC), podrían diferir por una constante de corrección usada en las bases de datos aerodinámicos [12].

En la figura 4.1 se muestra un cohete con el flujo de aire deslizándose lateralmente sobre éste, y con sus correspondientes ejes coordenados. El vector del flujo de aire es igual y opuesto (de acuerdo con la tercera Ley de Newton) al vector velocidad del centro de gravedad del cohete  $\mathbf{V}_B$  (o  $\mathbf{V}_{\text{FLUJO}}$  que será deducido más adelante), el cual ha sido utilizado en las ecuaciones de movimiento del capítulo 3. El ángulo de ataque  $\alpha$  y el de deslizamiento  $\beta$  están definidos por el desarrollo de una rotación del plano respecto al eje “y” del cuerpo (ABC), seguido por una rotación del plano respecto al nuevo eje “z” del cuerpo (ABC), tal que finalmente el eje “x” sea alineado directamente respecto al flujo de aire como se muestra en la figura 4.1. La primera rotación define los *ejes de estabilidad* y el ángulo de ataque es el ángulo entre el eje “x” del cuerpo (ABC) y el eje “x” de estabilidad. El ángulo de ataque  $\alpha$  es positivo si la rotación respecto al eje “y” fijo al cuerpo (ABC) fue negativa (convención de rotación de la mano derecha); así en la figura 4.1 se muestra un ángulo  $\alpha$  positivo. La segunda rotación permite la aparición de los *ejes del flujo de aire*, el ángulo de deslizamiento  $\beta$  es el ángulo entre el eje “x” de estabilidad y el eje “x” del flujo de aire. El ángulo de deslizamiento  $\beta$  es positivo si la rotación respecto al eje de estabilidad “z” es positiva; así en la figura 4.1 se muestra un  $\beta$  positivo [12].

Un cohete de forma convencional deberá volar muy cerca del flujo de aire para tener una fuerza de arrastre relativamente pequeña; por lo tanto,  $\alpha$  y  $\beta$  son muy pequeños en vuelos estables. Los ejes de estabilidad y los ejes del flujo de aire tienen una orientación variable dependiendo de las condiciones de vuelo, sus ejes coordenados están orientados (hacia el frente, a estribor y hacia abajo) en el mismo sentido que los ejes coordenados del cuerpo (ABC) (como referencia ver las figuras 4.1 y 3.4).

Siguiendo las reglas (de ángulos Bryant) para determinar las matrices de rotación, la matriz de transformación ortogonal de los *ejes del cuerpo* (ABC) a *ejes de estabilidad* es,

$$\mathbf{S}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

y la matriz de rotación de los *ejes de estabilidad* a los *ejes del flujo de aire* es,

$$\mathbf{S}_\beta = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Y la rotación completa de los ejes del cuerpo (ABC) a los *ejes del flujo de aire* es denotada por la matriz de transformación ortogonal  $\mathbf{S}_T$ ,

$$\mathbf{S}_T = \mathbf{S}_\beta \mathbf{S}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta & \sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta & \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

y así las velocidades quedan como,

$$\mathbf{V}_{\text{ESTAB}} = \mathbf{S}_\alpha \mathbf{V}_B \quad (4.4)$$

$$\mathbf{V}_{\text{FLUJO}} = \mathbf{S}_\beta \mathbf{V}_{\text{ESTAB}} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{V}_{\text{FLUJO}} = \mathbf{S}_\beta \mathbf{S}_\alpha \mathbf{V}_B = \mathbf{S}_T \mathbf{V}_B \quad (4.6)$$

recordando de la ecuación (3.35) que,

$$\mathbf{V}_B = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

A partir de este momento, es importante mencionar que se podría asumir que hay vientos locales con direcciones este, norte y hacia el zenit (dados en coordenadas NED), respectivamente (los detalles de la velocidad del viento fueron mencionados en la última parte del capítulo 3). Se podría también asumir que el vector de la velocidad del viento es constante sobre una región mucho más grande con relación al tamaño del cohete. Esto significa que no se tendrán que considerar efectos cortantes del viento ni torques ejercidos en el cohete.

La velocidad del centro de gravedad del cohete respecto a la velocidad del viento está dada por,

$$\mathbf{V}_R = \mathbf{V}_B - [\mathbf{B}_B]^T \begin{bmatrix} W_E \\ W_N \\ W_Z \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

donde,

$$\mathbf{V}_R = \begin{bmatrix} u_R \\ v_R \\ w_R \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

así, considerando la velocidad del viento en (4.6), se tiene,

$$\mathbf{V}_{\text{FLUJO}} = \mathbf{S}_T \mathbf{V}_R \quad (4.9)$$

y

$$\mathbf{V}_R = \mathbf{S}_T^T \mathbf{V}_{\text{FLUJO}} \quad (4.10)$$

donde, el vector velocidad del centro de gravedad expresado en coordenadas del flujo del aire, tiene (por definición) una componente en "x" igual a la *velocidad verdadera del flujo del aire* y no tiene otras componentes ortogonales. De acuerdo a esta definición,

$$\mathbf{V}_{\text{FLUJO}} = \begin{bmatrix} V_T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

así, resolviendo (4.10),

$$\begin{bmatrix} u_R \\ v_R \\ w_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

por lo que,

$$\begin{bmatrix} u_R \\ v_R \\ w_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_T \cos \alpha \cos \beta \\ V_T \sin \beta \\ V_T \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

y realizando operaciones en esta matriz resulta,

$$\tan \alpha = \frac{w_R}{u_R} \quad (4.14)$$

$$\sin \beta = \frac{v_R}{V_T} \quad (4.15)$$

donde,

$$V_T = \sqrt{(u_R^2 + v_R^2 + w_R^2)} \quad (4.16)$$

$\alpha$ ,  $\beta$  y  $V_T$  son las variables más importantes en la determinación de las fuerzas y los momentos aerodinámicos, así, estas ecuaciones se utilizarán junto con las ecuaciones de movimiento en el sistema de coordenadas ABC obtenidas en el capítulo 3.

Las fuerzas y los momentos aerodinámicos dependen de los efectos combinados de muchas variables diferentes. Las variables más importantes son [25],

- ◆ Velocidad del flujo de aire.
- ◆ Densidad del aire.
- ◆ Forma del cohete.
- ◆ Ángulo de ataque y de deslizamiento.
- ◆ Sección transversal del cohete.
- ◆ Efectos compresibles.
- ◆ Efectos viscosos.

Si los efectos de la viscosidad y compresibilidad no son de importancia significativa, las demás variables pueden ser combinadas para considerarlas. Debido a que las fuerzas aerodinámicas son el resultado de distribuciones de presión en la superficie del cohete, el área de esta superficie es un factor de consideración. La presión dinámica debida al flujo de aire es otro denominador común de las fuerzas aerodinámicas y es un factor de importancia debido a que la magnitud de la distribución de presión depende de la fuente de energía del flujo de aire. Otro factor de importancia es la distribución de presión relativa existiendo sobre la superficie del cohete. Por supuesto que, la distribución de la velocidad (y la distribución de presión resultante) es determinada por la forma del cohete y los ángulos aerodinámicos. Así, cualquier fuerza

aerodinámica puede ser representada como el producto de tres factores importantes (por lo menos, en condiciones subsónicas) [25], [26] y [27]:

- ◆ Una sección transversal arbitraria.
- ◆ La presión dinámica del flujo de aire.
- ◆ Un coeficiente empírico de una fuerza relativa a la sección transversal.

A bajas velocidades el estudio de la aerodinámica es simplificada grandemente por el hecho de que el aire puede experimentar cambios con la presión despreciando los cambios con la densidad. Este tipo de flujo de aire es análogo al del agua, fluido hidráulico o cualquier otro fluido incompresible. Sin embargo, a altas velocidades los cambios en la presión que toman lugar son grandes y ocurren cambios significativos en la densidad del aire. El estudio del flujo de aire en altas velocidades toma en cuenta estos cambios en la densidad del aire y consideran al aire como compresible. En velocidades arriba la velocidad del sonido el flujo de aire es acompañado por algunos fenómenos (por lo menos para ángulos de ataque relativamente pequeños) [25], [26] y [27],

- ◆ La velocidad del flujo de aire es reducida detrás de la onda de choque.
- ◆ La presión estática es incrementada detrás de la onda de choque.
- ◆ La densidad del flujo detrás de la onda de choque es incrementada.
- ◆ La presión total decrece conforme el flujo pasa a través de la onda de choque debido a que hay una pérdida en la energía total del flujo en forma de calor producida por la onda de choque.

Las fuerzas y los momentos que actúan en un cohete con seis grados de libertad en coordenadas ABC, están definidos en términos de sus coeficientes dimensionales (los cuales pueden ser obtenidos de experimentación a velocidades menores o mayores que la velocidad del sonido), [12], [16], [28], como,

- ***Fuerza de arrastre axial (que actúa en la dirección del eje “x”)***

La fuerza de arrastre aerodinámica será calculada sobre la base de las componentes de velocidad del cohete en coordenadas del cuerpo ABC, así se tiene,



$$F_x = D = -C_x(\alpha)q' S \quad (4.17)$$

donde, la sección transversal del cohete es,

$$S = \frac{\pi d_c^2}{4} \quad (4.18)$$

y la presión dinámica,

$$q' = \frac{1}{2} \rho(h) V_T^2 \quad (4.19)$$

Debido a que la presión dinámica es una función directa de la velocidad del flujo de aire, se sigue que para cualquier velocidad dada, la presión dinámica se debe decrementar conforme la altitud incrementa. En forma inversa, para un incremento en la altitud debe ser requerida una alta velocidad para producir una presión dinámica dada. Así, el desempeño de un cohete dependerá en gran parte de la altitud en que opere, por lo que cohetes a altas velocidades son más eficientes en grandes altitudes (ya que las fuerzas de arrastre desarrolladas repercuten directamente en el desempeño de la trayectoria) [25], [26] y [27].

- **Fuerza de arrastre lateral (que actúa en la dirección del eje “y”)**

De la misma forma la fuerza de arrastre lateral en “y” es,

$$F_y = -C_n(\alpha) S q' \operatorname{sen} \beta - C_{np}(\alpha) dS^* \left( \frac{Pd}{2V_T} \right) \operatorname{sen} \alpha^* q' \quad (4.20)$$

donde,

$$\text{sen } \alpha^* = \text{sen } \alpha \cos \beta \quad (4.21)$$

- **Fuerza de arrastre lateral (que actúa en la dirección del eje “z”)**

Para la fuerza de arrastre lateral en “z” se tiene,

$$F_z = -C_n(\alpha)Sq' \text{sen } \alpha^* + C_{np}(\alpha)dS^* \left( \frac{Pd}{2V_T} \right) \text{sen } \beta q' \quad (4.22)$$

- **Momento de cabeceo (que tiene su rotación respecto al eje “y”)**

El momento de cabeceo en coordenadas ABC se calcula como,

$$M = C_m(\alpha)Sq' d_c \text{sen } \alpha^* + C_{mq}(\alpha) \left( \frac{Qd}{2V_T} \right) S^* dq' \quad (4.23)$$

donde,

$$\text{Momento restaurador} = C_m(\alpha)Sq' d_c \text{sen } \alpha^*$$

$$\text{Momento amortiguador} = C_{mq}(\alpha) \left( \frac{Qd}{2V_T} \right) S^* dq'$$

Antes de continuar es importante mencionar que el *momento restaurador* ( $C_m(\alpha)Sq' d_c \text{sen } \alpha^*$ ) es el momento aerodinámico más importante en la determinación de la orientación del cohete, entre mayor sea el momento restaurador el cohete oscilará con mayor rapidez hacia su posición de equilibrio y no será alterado significativamente de su posición de equilibrio cuando haya algún torque o impulso no esperado. Durante la combustión, la orientación del cohete y por lo tanto, el momento restaurador son importantes en la determinación de la trayectoria ya que la propulsión de los gases aceleran al cohete en la dirección en el cual éste apunta [12].

El *momento amortiguador*  $\left( C_{mq}(\alpha) \left( \frac{Qd}{2V_T} \right) S^* dq' \right)$  es de poca importancia; su

efecto principal es contribuir a amortiguar las oscilaciones. Como la combustión toma parte durante sólo una o dos oscilaciones de cabeceo, y como la dirección del movimiento al final de la combustión está determinada en gran parte por lo que sucede durante las primeras oscilaciones, la amortiguación tiene poco efecto durante la combustión. Su efecto en la amplitud de las oscilaciones después de la combustión es apreciable, pero la influencia de estas oscilaciones es despreciable debido a que no hay empuje de gases de la combustión. El valor de  $C_{mq}$  puede ser medido en un túnel de viento soportando el cohete tal que pueda rotar respecto a su eje transversal a través del centro de gravedad y de esa forma determinar la cantidad de oscilaciones hasta que logra el equilibrio o también puede medirse determinando la potencia que debe ser suministrada para mantener las oscilaciones y mantener la amplitud constante [12].

Se debe hacer una aclaración de importancia respecto al término correspondiente al momento amortiguador. Cuando un cohete tiene una velocidad angular y además tiene un movimiento traslacional, el campo de flujo de aire alrededor del cohete es modificado y las fuerzas y los momentos aerodinámicos son cambiados. Los efectos son modelados en una primera aproximación adicionando términos de corrección dependientes de las velocidades angulares  $(P, Q, R)$  a las ecuaciones de las fuerzas y de los momentos aerodinámicos. También cuando es cambiada la velocidad traslacional, el ángulo de ataque y el ángulo de deslizamiento pueden cambiar. Los efectos no pueden ocurrir simultáneamente sobre todo el cohete (el flujo de aire toma un tiempo relativamente significativo para pasar desde la punta hasta la parte posterior del cohete), así, se crea tal dependencia del tiempo de las fuerzas y de los momentos aerodinámicos, adicionalmente a los efectos de dependencia de la velocidad flujo del aire y de la orientación.

Una examen de los efectos de dependencia en las magnitudes angulares inmediatamente levanta la pregunta de que tan rápidamente el flujo de aire se ajusta a los cambios en el cohete. La dificultad en los problemas de caracterización de flujos inestables todavía es el tema de recientes investigaciones [12].

Para modelar estos efectos se han formulado criterios empíricos para determinar los límites de frecuencia bajo los cuales puede hacerse una suposición de flujos cuasi-estables (reajuste instantáneo) [12].

En general los efectos dependientes de las magnitudes angulares (para este análisis en particular  $P, Q, R$ ) se modelan con la ecuación de la forma [12], y [25],

$$\frac{k}{2V_T} C(\alpha, \beta, M) x \text{MAGNITUD}$$

es decir, para este análisis en las ecuaciones de momentos aerodinámicos,

$$\frac{k}{2V_T} C(\alpha, \beta, M) x(P, Q, R)$$

En la ecuación anterior el factor de  $k/2$  es alguna longitud característica (para la ecuación 4.23 - es la longitud de la envergadura en el plano de las aletas del cohete) la cual cuando es multiplicada por la magnitud (velocidad angular  $P$  en la ecuación 4.23), es equivalente a la velocidad tangencial. Cuando ésta es dividida entre la velocidad del flujo de aire  $V_T$  se obtiene una *perturbación equivalente* en el ángulo local de ataque o de deslizamiento de una superficie aerodinámica. Esto puede ser pensado como una fuente de fuerza o momento aerodinámico.

Después de haber mencionado algunos conceptos de importancia, se continuarán presentando las ecuaciones de los momentos aerodinámicos.

- **Momento de derrape o guiñada (que tiene su rotación respecto al eje "z")**

El momento de derrape tiene la siguiente ecuación,

$$N = -C_m(\alpha) S q' d_c \text{sen } \beta + C_{mq}(\alpha) \left( \frac{Rd}{2V_T} \right) S^* dq' \quad (4.24)$$

donde,

$$\text{Momento restaurador} = -C_m(\alpha)Sq'd_c \text{ sen } \beta$$

$$\text{Momento amortiguador} = C_{mq}(\alpha) \left( \frac{Rd}{2V_T} \right) S^* dq'$$

- **Momento de balance (que tiene su rotación respecto al eje “x”)**

El momento de balance se origina por diversas causas (por ejemplo, inclinación de toberas del motor, o por desperfectos de diseño), unas de estas causas es debido a la acción de la inclinación de las aletas con un cierto ángulo. Antes de continuar, es importante hacer notar que este ángulo puede ser obtenido por lo menos por dos razones, la primer razón, es por diseño del cohete para generar un “spin” de rotación que ayude a mantener una menor dispersión de la trayectoria, ya que el hecho de provocar un “spin” disminuye la turbulencia de las líneas de flujo del aire en la parte posterior del cohete, y en segundo lugar este ángulo puede ser debido a resultados de desajustes inherentes en los equipos de manufactura en la construcción del cohete, así el momento de balance (para referencia ver figura 4.1) se calcula como,

$$\bar{L} = C_l(\alpha)q'Sd + C_{lp}(\alpha) \left( \frac{Pd}{2V_T} \right) S^* q' d \text{ sen } \beta \quad (4.25)$$

donde,

$$\text{Momento restaurador} = C_l(\alpha)q'Sd$$

$$\text{Momento amortiguador} = C_{lp}(\alpha) \left( \frac{Pd}{2V_T} \right) S^* q' d \text{ sen } \beta$$

En resumen, las ecuaciones de las fuerzas aerodinámicas (4.17), (4.20), (4.22) y los momentos aerodinámicos (4.23), (4.24), (4.25) del cohete quedan como,

$$\begin{aligned}
 F_x = D &= -C_x(\alpha)q'S \\
 F_y &= -C_n(\alpha)Sq' \operatorname{sen} \beta - C_{np}(\alpha)ds^* \left( \frac{Pd}{2V_T} \right) \operatorname{sen} \alpha^* q' \\
 F_z &= -C_n(\alpha)Sq' \operatorname{sen} \alpha^* + C_{np}(\alpha)ds^* \left( \frac{Pd}{2V_T} \right) \operatorname{sen} \beta q' \\
 \bar{L} &= C_l(\alpha)q'Sd + C_{lp}(\alpha) \left( \frac{Pd}{2V_T} \right) S^* q' d \operatorname{sen} \beta \\
 M &= C_m(\alpha)Sq' d_c \operatorname{sen} \alpha^* + C_{mq}(\alpha) \left( \frac{Qd}{2V_T} \right) S^* dq' \\
 N &= -C_m(\alpha)Sq' d_c \operatorname{sen} \beta + C_{mq}(\alpha) \left( \frac{Rd}{2V_T} \right) S^* dq'
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Los coeficientes aerodinámicos  $(C_x, C_n, C_{np}, C_l, C_{lp}, C_m, C_{mq})$  de las fuerzas y momentos presentados en las ecuaciones (4.26) son obtenidos ya sea experimental o numéricamente como se explicará en la siguiente sección (notar que todos ellos están en función del ángulo de ataque, como serán considerados en esta tesis).

### 4.3. Túnel de viento.

Las fuerzas y los momentos aerodinámicos se pueden obtener mediante dos formas, por un lado, las técnicas numéricas computacionales hoy en día han adquirido un gran auge debido a sus resultados cada vez más aceptables y a su bajo costo relativo. En particular para la modelación de las fuerzas y momentos aerodinámicos son utilizados paquetes de programas computacionales que tienen como base teórica ya sea el método de elementos finitos o el de volumen finito. Por otro lado, estas magnitudes también se

pueden calcular experimentalmente mediante el túnel de viento, el cual es el propósito de discusión de esta sección.

El túnel de viento es un ducto donde pueden determinarse los efectos del flujo de aire que pasa sobre los objetos. Las fuerzas en estado estacionario sobre un cuerpo que se mantiene inmóvil dentro de una corriente de aire en movimiento, son las mismas que las que actúan cuando este cuerpo se mueve a través del aire en reposo; suponiendo la misma forma del cuerpo y la misma velocidad y propiedades del aire [21].

Los túneles de viento varían en tamaños y complejidades, pero todos ellos contienen por lo menos 4 elementos importantes [21]:

- a) Un sistema suministrador de aire.
- b) Un flujo de aire controlado.
- c) Un modelo a escala.
- d) Instrumentos de medición.

Las diferentes velocidades del fluido que se manejan dentro de túneles de viento están generalmente divididas en:

- a) Subsónica (0 - 0.95 Mach).
- b) Transónica (0.95 - 1.3 Mach).
- c) Supersónica (1.3 - 5 Mach).
- d) Hipersónica (5 - en adelante Mach).

Hay diferentes tipos de túneles de viento para simular el flujo de aire en esos rangos de velocidades, incluyendo los de dos o de tres dimensiones, los de flujo de retorno y no-retorno, los de flujo intermitente y continuo, los de densidad atmosférica constante y de densidad variable, y los túneles de vuelo vertical.

Los túneles de viento se pueden clasificar en:

- a) De baja velocidad o subsónicos.
- b) V/STOL .
- c) Transónicos.

- d) Supersónicos.
- e) No-aeronáuticos.
- f) De hipervelocidad.

En el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Monterrey, se tiene un túnel subsónico, de flujo continuo, de no retorno, y de densidad atmosférica constante. Dicho túnel, mostrado en la figura 4.2, fue utilizado para la determinación del coeficiente de arrastre de los modelos de cohetes sonda utilizados en las pruebas de campo como se explicarán con detalle en una de las secciones del capítulo 6.



*Figura 4.2.* Túnel de viento subsónico del I.T.E.S.M.

Los datos técnicos del túnel del ITESM se muestran en la tabla 4.1.



**Tabla 4.1.** Datos técnicos del túnel de viento del ITESM.

<b>DATOS</b>	<b>VALOR</b>
Potencia del Motor	1.50 kw
Longitud del túnel	2.98 mts
Altura del túnel	1.83 mts
Ancho del túnel	0.80 mts
Área de trabajo	300 mm. Octaedro x 450mm
Fuerza máxima de sustentación	7.0 N
Fuerza máxima de arrastre	2.5 N
Sensibilidad de la balanza medidora	$\pm 0.01$ N
Rango de velocidad del flujo de aire	0 – 26 m/s

La selección de la instrumentación y equipo de adquisición de datos utilizada en los túneles de viento dependerá de la necesidad del usuario en obtener valores de variables tales como,

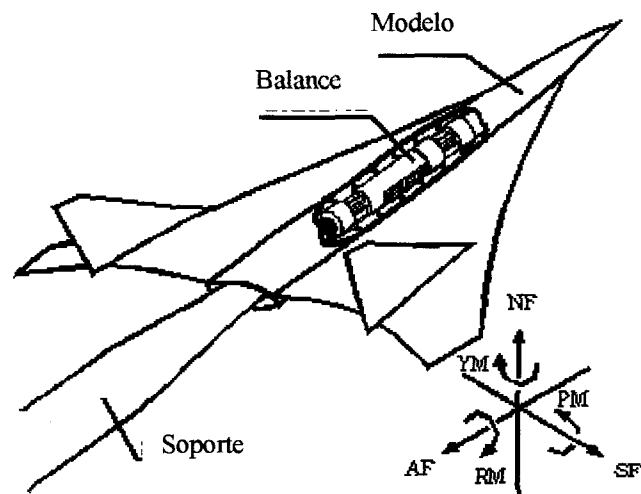
- Presiones.
- Fuerzas y momentos.
- Visualización de las líneas de flujo del aire.
- Temperaturas.
- Velocidad del viento.

Es de nuestro interés concentrarnos en la instrumentación utilizada para la medición de las fuerzas y momentos aerodinámicos.

A fin de entender las fuerzas y momentos aerodinámicos que actúan en un cohete en pleno vuelo, los ingenieros han probado dispositivos e instrumentos de medición, incluyendo aquellos utilizados en modelos a escala dentro de túneles de viento.

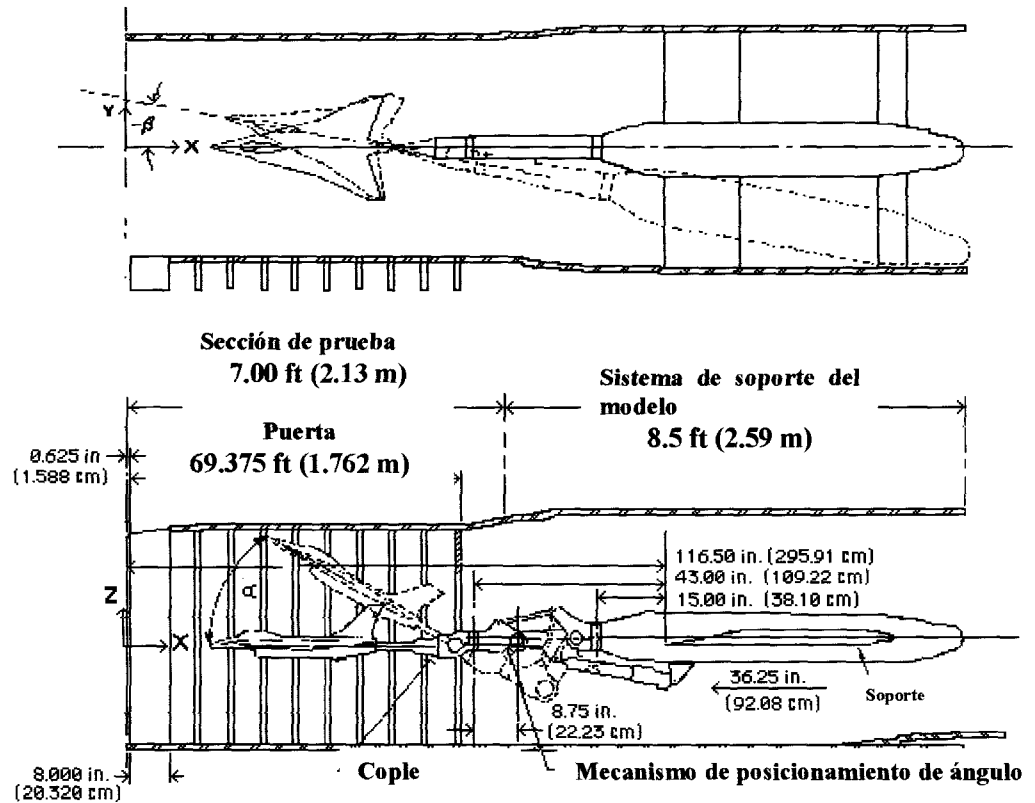
En la actualidad se utiliza un dispositivo llamado *balance o balanza* para llevar a cabo la medición de estas fuerzas y momentos aerodinámicos. Los datos de las fuerzas y momentos son medidos por medio de balances medidores de deformación (galgas extensométricas) los cuales tienen compensación por temperatura. Un sistema de balance separa y mide las tres componentes de la fuerza y las tres componentes de los momentos aerodinámicos. Idealmente una galga extensométrica registrará sólo una de las seis componentes de fuerzas y momentos. Sin embargo, la dificultad consiste en asegurar que las otros componentes no interfieran. Esto podría ser dado fácilmente si el espacio no está limitado dentro del modelo del cohete [22] y [23].

En la figura 4.3 se muestra un modelo de una aeronave fijada sobre el balance y a su vez el balance es soportado por una estructura. Como se mencionó anteriormente, el balance debe separar las fuerzas dentro de seis componentes y entonces medir cada una de ellas individualmente.



**Figura 4.3.** Modelo de aeronave con instrumentación para medir los momentos y fuerzas aerodinámicas dentro de un túnel de viento [23].

Un ejemplo de montaje típico de un modelo dentro de un túnel de viento es mostrado en la figura 4.4. Es importante notar de la figura como se puede variar el ángulo de ataque  $\alpha$  y el ángulo de deslizamiento  $\beta$  (discutidos al inicio de este capítulo).



**Figura 4.4.** Montaje típico de un modelo de aeronave en la sección de prueba del túnel de viento [24].

#### 4.4. Conclusiones.

En este capítulo se han deducido y presentado las ecuaciones de las fuerzas y momentos aerodinámicos a partir de las definiciones de los ejes y ángulos aerodinámicos. Estas fuerzas y momentos están dadas en coordenadas ABC y serán utilizadas en el capítulo 5 en el ensamble de las ecuaciones generales de movimiento del cohete.

Por otro lado, para obtener los datos de los coeficientes aerodinámicos se utilizan programas computacionales o experimentación. Debido a que éste último fue utilizado para obtener los coeficientes de arrastre del cohete a escala que se presentará en el capítulo 7, se llevó a cabo la descripción breve del túnel de viento, y se ha presentado muy brevemente su función y la manera en que un modelo de cohete sonda puede ser adicionado con instrumentación para obtener las fuerzas y momentos aerodinámicos mediante experimentación.

*Se ha observado que los cuerpos lanzados o proyectiles, describen una curva de cierto tipo; pero que esta curva sea una parábola nadie lo ha puesto en evidencia.  
Galileo Galilei, en su "Diálogo" de 1638.*

## Capítulo 5

### Ecuación general de movimiento y métodos de solución

#### 5.1. Introducción.

En la primer sección de este capítulo las ecuaciones completas de cuerpo rígido serán ensambladas considerando las deducciones obtenidas en los capítulos 3 y 4. Posteriormente en la segunda sección se presentarán los métodos utilizados desde los inicios del análisis de trayectorias de cohetes.

A manera de obtener soluciones aproximadas, en la tercer sección de este capítulo se obtendrá un modelo matemático simplificado que simula la trayectoria al vacío del cohete y sus soluciones, este modelo es obtenido a partir de la ecuación de movimiento general. El problema tendrá un mayor grado de dificultad cuando en la tercera sección de este capítulo sea analizado el caso de trayectorias suponiendo al cohete como una partícula con movimiento plano y con una fuerza de arrastre aerodinámica actuando sobre él, además se presentará su modelo matemático y los métodos numéricos utilizados para su solución, además de la descripción del programa computacional utilizado.

Finalmente se presentará el modelo matemático, el método numérico y la descripción del programa computacional del caso en que el cohete es considerado como cuerpo rígido estabilizado sólo por aletas y con seis grados de libertad.

## 5.2. Ecuación general de movimiento.

Para la ecuación general de movimiento del cohete sonda, las ecuaciones relevantes deducidas en el capítulo 3 son, (3.18), (3.29), (3.59), y (3.93).

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{B}^T \mathbf{V}_{\text{Abs}} = \mathbf{B}^T \mathbf{V}_B + \omega_E x \mathbf{p} \quad (3.18)$$

$$\dot{\mathbf{V}}_B = \frac{I}{m} \mathbf{F}_B + \mathbf{B}[\mathbf{g} - \omega_E x (\omega_E x \mathbf{p})] - (\omega_B x \mathbf{B} \omega_E) x \mathbf{V}_B \quad (3.29)$$

$$\dot{\omega}_B = -\mathbf{J}^{-1} \left[ \omega_B x \left( \mathbf{J} \omega_B \right) \right] + \mathbf{J}^{-1} \mathbf{T}_B - \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{J}} \omega_B \quad (3.59)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{L}^T \omega_B \quad (3.93)$$

Estas ecuaciones son ahora ensambladas en forma matricial con las operaciones de producto vectorial  $(\omega_B x)$  y  $(\omega_E x)$  reemplazadas por las matrices  $\Omega_B$  (que ya se definió en la ecuación -3.33-), y  $\Omega_E$  respectivamente. Se puede demostrar que la ecuación (3.93) es igual a  $\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{L}^T \omega_B = -\frac{1}{2} \Omega_q \mathbf{q}$ . Por lo tanto, la ecuación general de movimiento del cohete sonda en forma compacta es [12],

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{V}}_B \\ \dot{\omega}_B \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_E & \mathbf{B}^T & 0 & 0 \\ -\mathbf{B} \Omega_E^2 & -(\Omega_B + \mathbf{B} \Omega_E \mathbf{B}^T) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{J}^{-1} \Omega_B \mathbf{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \Omega_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{V}_B \\ \omega_B \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B}\mathbf{g}(\mathbf{p}) + \frac{\mathbf{F}_B}{m} \\ \mathbf{J}^{-1}\mathbf{T}_B - \mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega}_B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Donde la matriz de coeficientes contiene las submatrices,

$$\boldsymbol{\Omega}_B = \begin{bmatrix} 0 & -R & Q \\ R & 0 & -P \\ -Q & P & 0 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\Omega}_E = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_E & 0 \\ \omega_E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\Omega}_q = \begin{bmatrix} 0 & P & Q & R \\ -P & 0 & -R & Q \\ -Q & R & 0 & -P \\ -R & -Q & P & 0 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

La ecuación general (5.1) junto con las submatrices (5.2) en forma expandida y acomodando términos quedan como;

$$\dot{X} = -\omega_E Y + ub_{11} + vb_{21} + wb_{31} \quad (5.3a)$$

$$\dot{Y} = \omega_E X + ub_{12} + vb_{22} + wb_{32} \quad (5.3b)$$

$$\dot{Z} = ub_{13} + vb_{23} + wb_{33} \quad (5.3c)$$

$$\dot{u} = (Rv - Qw) + \left( \frac{-C_x q' S + T_x}{m} \right) - g'_x \quad (5.4a)$$

$$\dot{v} = (Pw - Ru) + \left( \frac{-C_n S q' \text{Sen}\beta - C_{n^p} dS^* \left( \frac{Pd}{2V_T} \right) \text{Sen}\alpha^* q' + T_y}{m} \right) - g'_y \quad (5.4b)$$

$$\dot{w} = (Qu - Pv) + \left( \frac{-C_n S q' \text{Sen}\alpha^* + C_{n^p} dS^* \left( \frac{Pd}{2V_T} \right) \text{Sen}\beta q' + T_z}{m} \right) - g'_z \quad (5.4c)$$

$$\dot{P} = \frac{1}{J_x} \left[ QR(J_y - J_z) + \left\{ C_l S + C_{lp} S^* \left( \frac{Pd}{2V_T} \right) \text{Sen}\beta \right\} q' d \right] \quad (5.5a)$$

$$\dot{Q} = \frac{1}{J_y} \left[ PR(J_z - J_x) + \left\{ C_m S d_c \text{Sen}\alpha^* + C_{mq} S^* d \left( \frac{Qd}{2V_T} \right) \right\} q' \right] \quad (5.5b)$$

$$\dot{R} = \frac{1}{J_z} \left[ PQ(J_x - J_y) + \left\{ -C_m S d_c \text{Sen}\beta + C_{mq} S^* d \left( \frac{Rd}{2V_T} \right) \right\} q' \right] \quad (5.5c)$$

$$\dot{e}_0 = -\frac{1}{2} (e_1 P + e_2 Q + e_3 R) \quad (5.6a)$$

$$\dot{e}_1 = \frac{1}{2} (e_0 P - e_3 Q + e_2 R) \quad (5.6b)$$

$$\dot{e}_2 = -\frac{1}{2} (e_3 P + e_0 Q - e_1 R) \quad (5.6c)$$

$$\dot{e}_3 = \frac{1}{2} (-e_1 P + e_2 Q + e_0 R) \quad (5.6d)$$

Estas 13 ecuaciones diferenciales obtenidas en forma expandida son no lineales debido a que los coeficientes en la matriz de la ecuación (5.1) contienen a  $\mathbf{B}$ ,  $\Omega_B$  y  $\Omega_q$ , las cuales están en función de las variables de estado (las variables de estado son las tres componentes del vector de posición  $\mathbf{p}$ , el vector de la velocidad relativa  $\mathbf{V}_B$ , el vector de la velocidad angular  $\omega_B$  y el vector de parámetros de Euler  $\mathbf{q}$ ). Estas ecuaciones son válidas para simulaciones a altas velocidades alrededor de la tierra rotante. Para trayectorias de naves espaciales se necesitarían consideraciones más detalladas, como un nuevo modelo matemático que representará la fuerza de gravedad y de otros efectos de atracción de la masa y de disturbios de fuerzas tales como el viento solar [12].

Habiéndose presentado las ecuaciones generales de movimiento del cohete en las siguientes secciones de este capítulo se procederá a obtener soluciones a problemas específicos con sus consideraciones particulares de análisis.



Antes de ello, se presentarán en forma resumida los antecedentes de los métodos utilizados en el cálculo de trayectorias de cohetes. Esto con la finalidad de tener una perspectiva muy general de como se han llevado a cabo estos análisis a través de la historia.

### **5.3. Antecedentes de métodos numéricos utilizados para el cálculo de trayectorias de cohetes.**

Los antecedentes que son presentados a continuación hacen referencia tanto a movimiento plano como a movimiento tridimensional.

Durante el análisis de trayectorias balísticas en movimiento plano (dos dimensiones) podemos apreciar que en las ecuaciones de movimiento, la fuerza de arrastre  $D$  o también denotada como  $F_x$  de la ecuación (4.17) es una función de la velocidad a lo largo de la trayectoria y, por lo tanto, es una función compleja de  $x$ ,  $y$  y  $t$ . Por esta razón, estas ecuaciones no pueden resolverse en una forma analítica, y se tiene que recurrir al uso de métodos numéricos para obtener soluciones aproximadas.

En el apéndice F se presenta una breve explicación de los métodos utilizados para obtener soluciones a las ecuaciones de movimiento de cohetes, cualquiera de los *cinco métodos* mencionados en ese apéndice pueden ser utilizados para calcular la trayectoria resultante. En la tabla 5.1 se da una indicación del mejor método a usar, con varias combinaciones de las condiciones iniciales de velocidad y ángulos de lanzamiento.

**Tabla 5.1.** Métodos utilizados en el cálculo de trayectorias de cohetes [29].

<b>MÉTODOS PARA EL CÁLCULO DE LAS TRAYECTORIAS EN COHETES</b>			
<b>Velocidad</b>	<b>Alcance máximo</b>	<b>Ángulo de lanzamiento</b>	<b>Método</b>
Baja	Corto	Pequeño	Aproximación en el vacío
Baja	Medio	Pequeño	Didion-Bernoulli
Alta	Medio-Largo	Pequeño	Siacci
Baja	Media	Cualquiera	Otto-Lardillon
Alta	Largo	Cualquiera	Integración Numérica

#### **5.4. Modelo matemático que considera una aproximación en el vacío y movimiento plano.**

Como se presentó en la tabla 5.1, los métodos de análisis para la determinación de trayectorias de cohetes dependerán de las suposiciones y de la exactitud requerida para la solución de algún problema particular. Muchos libros de física traen problemas bidimensionales con la solución de trayectorias de proyectiles lanzados al vacío, sin embargo, las ecuaciones deducidas de estos análisis no toman en cuenta la fuerza de empuje del motor. En esta sección se realizará el análisis de trayectorias de cohetes considerándolo como una partícula que viaja en el vacío en movimiento plano y considerando la fuerza de empuje del motor, como una primera aproximación a la solución real. Además, desde el punto de vista didáctico este análisis sirve para la sensibilización en el entendimiento de la metodología de solución del problema.

### 5.4.1. Metodología de solución y consideraciones.

En esta sección se presentará el modelo matemático básico en la predicción de trayectorias balísticas de cohetes sonda y la solución del mismo. Se pretende que el lector considere el siguiente análisis como una alternativa sencilla para determinar a grandes rasgos la trayectoria de los cohetes sonda.

En la simplificación del modelo matemático general de movimiento (5.1) para llevar a cabo el análisis en el vacío con movimiento plano y sólo considerando movimiento traslacional, se tienen las siguientes suposiciones,

1. El análisis se considerará basándose en que la plataforma de lanzamiento que se encuentra sobre la superficie de la tierra tendrá las coordenadas NED (para referencia, ver figura 3.1) y que éste será el sistema de referencia de coordenadas inercial para este análisis (notar que también no se considerará la rotación de la tierra), por lo que, las ecuaciones (5.2) quedan descartadas de este análisis.
2. Debido a que sólo se considerará movimiento traslacional, las ecuaciones (5.3), (5.5) y (5.6) también quedan descartadas de este análisis, por lo que, quedarán para este análisis las ecuaciones (5.4).
3. Debido a la suposición de considerar sólo movimiento traslacional en el plano "x-z" en coordenadas NED, queda descartada la ecuación (5.4b).

Por lo tanto sólo nos queda por analizar las ecuaciones de movimiento traslacional (5.4a) y (5.4c) que se encuentran definidas en coordenadas ABC. Ahora bien, como este análisis parte de la suposición de que el sistema de referencia de coordenadas inercial se encuentra en coordenadas NED, entonces el siguiente paso es transformar las ecuaciones desde coordenadas ABC hasta coordenadas NED (para referencia ver la figura 3.2) de acuerdo a la matriz de transformación  $\mathbf{B}_B$ ,

$$\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen } \theta \text{ sen } \alpha & \cos \alpha & \text{sen } \alpha \cos \theta \\ \text{sen } \theta \cos \alpha & -\text{sen } \alpha & \cos \alpha \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\text{sen } \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

En este análisis, el lector notará que el ángulo de acimut  $\alpha = 0$  de la figura 3.2, por lo que, la ecuación (5.7) se reduce a,

$$\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\text{sen } \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

que en forma expandida es,

$$\ddot{X} = \dot{v} \quad (5.9a)$$

$$\ddot{Y} = \dot{u} \text{sen } \theta + \dot{w} \cos \theta \quad (5.9b)$$

$$\ddot{Z} = \dot{u} \cos \theta - \dot{w} \text{sen } \theta \quad (5.9c)$$

El objetivo consiste en determinar las ecuaciones básicas para calcular la trayectoria del cohete utilizando versiones simplificadas de las ecuaciones de movimiento traslacional de (5.8).

Cuando el ángulo de acimut  $\alpha = 0$  las componentes de la fuerza de gravedad en coordenadas ABC son,

$$g'_x = -g \cos \theta$$

$$g'_y = 0 \quad (5.10)$$

$$g'_z = g \operatorname{sen} \theta$$

Es importante mencionar que la magnitud del vector  $\mathbf{g}$  de la ecuación (5.10) se utilizó considerando que ya se transformó (ya que originalmente esta dado en coordenadas ECI) y esta dado en coordenadas NED.

Resolviendo las ecuaciones presentadas en (5.9) suponiendo una trayectoria en el vacío y considerando las ecuaciones (5.10),

$$\ddot{Y} = \left( \frac{T}{m} \right) \operatorname{sen} \theta \quad (5.11)$$

$$\ddot{Z} = \left( \frac{T}{m} \right) \cos \theta - g \quad (5.12)$$

Las ecuaciones (5.11) y (5.12) son las ecuaciones traslacionales de un cohete que definen el movimiento plano en el vacío. Para hacerse el manejo de estas ecuaciones de una forma más conocida y convencional en movimiento plano, se utilizará un cambio en la notación de variables (para referencia en el cambio de notación de coordenadas y recordando que  $\alpha = 0$  ver figuras 3.2 y 5.1) como,

$$\ddot{x} = \ddot{Y}, \quad \ddot{y} = \ddot{Z}, \quad F = T, \quad \phi = (90^\circ - \theta)$$

donde,

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right)$$

Así entonces, las ecuaciones (5.11) y (5.12) quedan definidas en la nueva notación como,

$$\ddot{x}(t) = \frac{F(t)\cos\phi(t)}{m(t)} \quad (5.13)$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{F(t)\sen\phi(t)}{m(t)} - g(y) \quad (5.14)$$

Las ecuaciones (5.13) y (5.14) son las ecuaciones generales de movimiento plano traslacional en el vacío.

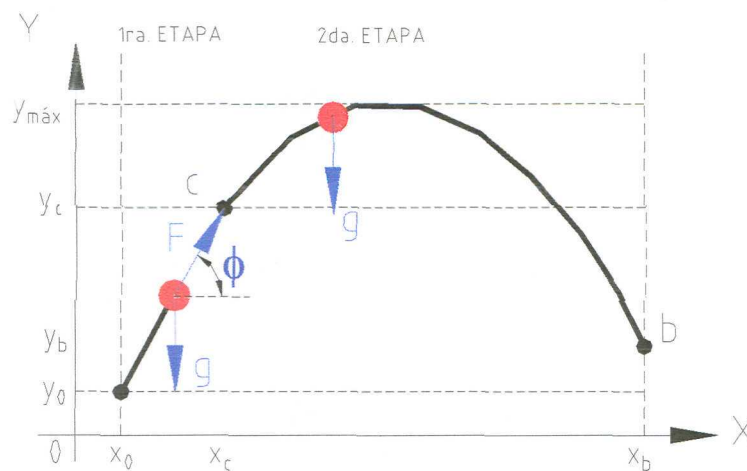
En la tabla 5.2 se muestran las suposiciones que se llevarán a cabo en la solución de éstas ecuaciones.

**Tabla 5.2.** Suposiciones particulares para el análisis del modelo matemático básico de la trayectoria de los cohetes.

<i>Variable</i>	$F(t)$	$\phi(t)$	$m(t)$	$g(y)$
1 <sup>era</sup> etapa	$Cte = F$	$Cte = \phi$	$Cte = m$	$Cte = g$
2 <sup>da</sup> etapa	$0$	$\phi(t)$	$Cte = m$	$Cte = g$

En este análisis se considerarán dos etapas (ver figura 5.1):

- 1) 1<sup>era</sup> etapa: Trayectoria de impulso (cohetes impulsado por la combustión del propelente).
- 2) 2<sup>da</sup> etapa: Trayectoria balística (caída libre).



**Figura 5.1.** Trayectoria de vuelo del cohete sonda en movimiento plano y el vacío.

#### 5.4.2. Solución de las ecuaciones de movimiento.

Haciendo referencia a las ecuaciones (5.13) y (5.14) y considerando las suposiciones particulares mostradas en la tabla 5.2, se realizará el análisis de la trayectoria en cada etapa como se describe a continuación.

Las ecuaciones válidas para la primer etapa son: (para  $t_0 \leq t \leq t_c$ )

$$\ddot{x}(t) = \frac{F \cos \phi}{m} \quad (5.15)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{F \cos \phi}{m} (t - t_0) + \dot{x}_0 \quad (5.16)$$

$$x(t) = \frac{F \cos \phi}{2m} (t-t_0)^2 + \dot{x}_0(t-t_0) + x_0 \quad (5.17)$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{F \operatorname{sen} \phi}{m} - g \quad (5.18)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{F \operatorname{sen} \phi}{m} (t-t_0) - g(t-t_0) + \dot{y}_0 \quad (5.19)$$

$$y(t) = \frac{F \operatorname{sen} \phi}{2m} (t-t_0)^2 - \frac{g(t-t_0)^2}{2} + \dot{y}_0(t-t_0) + y_0 \quad (5.20)$$

Considerando  $t_0 = 0$ , las ecuaciones válidas para la segunda etapa son: (para  $t_c \leq t \leq t_b$ ).

$$\ddot{x}(t) = 0 \quad (5.21)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{F \cos \phi}{m} t_c + \dot{x}_0 \quad (5.22)$$

$$x(t) = \frac{F \cos \phi}{2m} t_c (2t - t_c) + \dot{x}_0 t + x_0 \quad (5.23)$$

$$\ddot{y}(t) = -g \quad (5.24)$$

$$\dot{y}(t) = -gt + \frac{F \operatorname{sen} \phi}{m} t_c + \dot{y}_0 \quad (5.25)$$



$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \dot{y}_0 t + y_0 + \frac{F \operatorname{sen} \phi}{2m} t_c (2t - t_c) \quad (5.26)$$

Considerando a  $t = t_b$  como el tiempo en el cual el cohete llega al blanco, se tiene,

$$\dot{x}_b = \frac{F \operatorname{cos} \phi}{m} t_c + \dot{x}_0 \quad (5.27)$$

$$x_b = \frac{F \operatorname{cos} \phi}{2m} t_c (2t_b - t_c) + \dot{x}_0 t_b + x_0 \quad (5.28)$$

$$\dot{y}_b = -gt_b + \frac{F \operatorname{sen} \phi}{m} t_c + \dot{y}_0 \quad (5.29)$$

$$y_b = -\frac{1}{2}gt_b^2 + \dot{y}_0 t_b + y_0 + \frac{F \operatorname{sen} \phi}{2m} t_c (2t_b - t_c) \quad (5.30)$$

A continuación se deducirán las ecuaciones para el tiempo  $t_b$  y la posición  $x_b$  correspondientes a las siguientes condiciones iniciales:

$$y_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 0 \quad \text{y} \quad y_b = 0$$

Evaluando la ecuación para  $y(t)$  en el tiempo  $t = t_b$ , se tiene,

$$0 = -\frac{1}{2}gt_b^2 + \frac{F \operatorname{sen} \phi}{2m} t_c (2t_b - t_c)$$

$$0 = -mgt_b^2 + F \operatorname{sen} \phi t_c (2t_b - t_c)$$

$$mgt_b^2 - 2F \operatorname{sen} \phi t_c t_b + F \operatorname{sen} \phi t_c^2 = 0$$

Despejando a  $t_b$  de la expresión anterior,

$$t_b = \frac{F \operatorname{sen} \phi t_c}{mg} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \left( \frac{mg}{F \operatorname{sen} \phi} \right)} \right\} \quad (5.31)$$

En la ecuación anterior se debe notar que debe de cumplirse la desigualdad  $\left( \frac{mg}{F \operatorname{sen} \phi} \right) \leq 1$  para que en dicha ecuación no se tenga un resultado con números imaginarios. Desde el punto de vista físico del problema, esta desigualdad nos indica que la componente vertical del empuje proporcionado por el motor debe ser mayor que la componente del peso del cohete para que haya despegue.

Por otro lado, una vez conocido el valor de  $t_b$ , éste se puede sustituir en la ecuación (5.23) para obtener  $x_b$ :

$$x_b = \frac{F \cos \phi}{2m} t_c (2t_b - t_c) \quad (5.32)$$

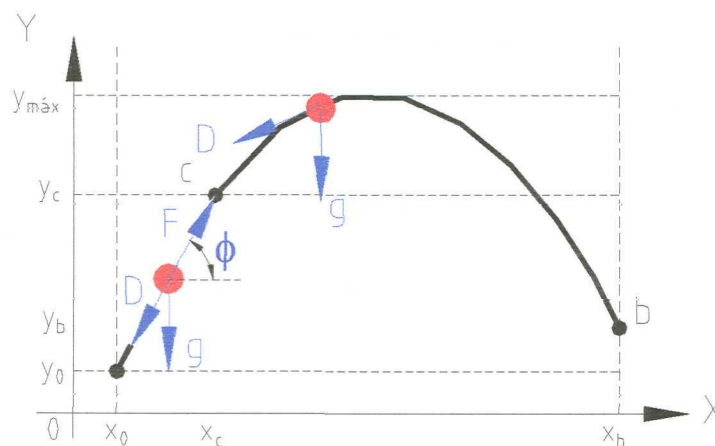
Debe aclararse que, cuando se consideren los efectos de la fuerza de arrastre  $F_x = D$ , los resultados proporcionados por la ecuación (5.32) disminuirán apreciablemente, esto quedará demostrado en una de las secciones del capítulo 6.

## 5.5. Modelo matemático que considera la fuerza de arrastre aerodinámica y un movimiento plano.

Habiéndose presentado una primera aproximación del problema real en la sección anterior, ahora se procederá a complicar el problema. En esta sección se incorporará la suposición de que habrá una fuerza de arrastre aerodinámica que actúa en el cohete. Esta suposición hará que las ecuaciones diferenciales resultantes sean no lineales y por lo tanto que se requiera la utilización de métodos numéricos para obtener su solución.

### 5.5.1. Metodología de solución y consideraciones.

La figura 5.2 muestra las fuerzas que actúan durante la trayectoria del cohete bajo análisis.



**Figura 5.2.** Trayectoria de vuelo del cohete sonda en movimiento plano y con una fuerza de arrastre aerodinámica.

Para llegar a las ecuaciones diferenciales a analizar se considerarán las mismas suposiciones hechas para el análisis de la trayectoria en el vacío a partir de las ecuaciones generales de movimiento hasta llegar a las ecuaciones (5.9), a partir de estas ecuaciones

la suposición ahora es que la fuerza aerodinámica tendrá un efecto en el cuerpo del cohete, para ello, las ecuaciones de movimiento se resuelven con el mismo procedimiento visto en la sección anterior y se llega a una ecuación similar a las ecuaciones (5.11) y (5.12), excepto por el término de la fuerza de arrastre aerodinámica como se muestra a continuación,

$$\ddot{Y} = \left( \frac{T}{m} - \frac{C_x q' S}{m} \right) \text{sen } \theta \quad (5.33)$$

$$\ddot{Z} = \left( \frac{T}{m} - \frac{C_x q' S}{m} \right) \text{cos } \theta - g \quad (5.34)$$

Las ecuaciones (5.33) y (5.34) son las ecuaciones traslacionales de un cohete que definen el movimiento plano considerando la fuerza de arrastre aerodinámica. De la misma forma que como se realizó anteriormente, se procederá a hacerse un cambio en la notación de variables, como,

$$\begin{aligned} \ddot{x} = \ddot{Y}, \quad \ddot{y} = \ddot{Z}, \quad F = T, \quad \phi = (90^\circ - \theta), \\ K[v(t)]^2 = C_x q' S, \end{aligned}$$

donde,

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right)$$

Así entonces, las ecuaciones (5.33) y (5.34) quedan definidas en la nueva notación como,

$$\ddot{x}(t) = \frac{F(t)\cos\phi(t)}{m(t)} - \frac{K[v(t)]^2}{m(t)}\cos\phi(t) \quad (5.35)$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{F(t)\sen\phi(t)}{m(t)} - g(y) - \frac{K[v(t)]^2}{m(t)}\sen\phi(t) \quad (5.36)$$

donde

$$K = \frac{1}{2}S\rho(y)C_x \quad (5.37)$$

y

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} \quad (5.38)$$

Las ecuaciones (5.35) y (5.36) son las ecuaciones generales de movimiento plano traslacional considerando la fuerza de arrastre aerodinámica. Debe aclararse que el valor de  $K$  en algunos análisis es tomada como un valor constante desde una velocidad de cero hasta cerca de la velocidad del sonido ya que estudios experimentales lo han demostrado [34]. Estos estudios llegaron a esa aproximación ya que graficando los valores de la velocidad en el eje de las abscisas y el valor de  $D/\rho(y)$  en las ordenadas han observado que se pueden obtener buenas aproximaciones considerando el término  $C_x q' S$  para una aproximación como  $Kv$  y una mejor aproximación como lo presentado anteriormente, es decir,  $K[v(t)]^2$ . Como se comentó anteriormente, es importante aclarar que el valor de  $K$  en este análisis será variable ya que se considerará a la densidad del aire variando en función de la altura de la trayectoria como se puede apreciar en la ecuación (5.37).

En la tabla 5.3 se muestran las suposiciones que se llevarán a cabo en la solución particular de éstas ecuaciones.

**Tabla 5.3.** Suposiciones particulares para el modelo matemático que considera la fuerza de arrastre aerodinámica.

<i>Variable.</i>	$F(t)$	$\phi(t)$	$m(t)$	$C_x q' S$	$g(y)$	$\rho(y)$
<i>Suposición.</i>	$F(t)$	$\phi(t)$	$m(t)$	$K[v(t)]^2$	$g(y)$	$\rho(y)$

Como es de notarse, las ecuaciones diferenciales (5.35) y (5.36) son no lineales y de segundo orden, por lo que no es posible resolverlas en forma analítica. La no linealidad es evidente en el término de la velocidad al cuadrado debida a la existencia de la fuerza de arrastre aerodinámica.

Las ecuaciones (5.35) y (5.36) se resolvieron utilizando varios métodos numéricos, los cuales serán descritos en la siguiente sección.

### 5.5.2. Métodos numéricos utilizados en la derivación de las fórmulas computacionales.

Como se mencionó anteriormente, las ecuaciones (5.35) y (5.36) no pueden ser resueltas en forma analítica, es por esto, que se emplearon métodos numéricos para obtener soluciones aproximadas.

Se desarrollaron ecuaciones basadas en técnicas numéricas conocidas como el *Método de Diferencias Centradas* y el *Método de Newton-Raphson*.

La descripción resumida de estos métodos se presenta en el apéndice H.

### 5.5.3. Descripción del programa computacional.

El programa computacional fue escrito en FORTRAN'90 y su diseño fue *modular*, esto es, el programa contiene un programa principal y varias subrutinas o módulos.

La metodología utilizada para llevar a cabo la secuencia de funcionamiento del programa de simulación, y las consideraciones en el análisis físico del problema, se presentarán a continuación.

Antes de entrar en detalles, es preciso aclarar que el sistema de unidades utilizado durante todos los análisis, es el Sistema Internacional S.I.

1. El *programa principal general*, solicita al usuario introducir los valores numéricos (previamente cargados) del;
  - Tipo de motor.
  - Tipo de cohete.
  - Distancia horizontal ( $x$ ) desde la plataforma hasta el blanco deseado.
  - Distancia vertical ( $y$ ) desde la plataforma hasta el blanco deseado.
  - Método numérico a utilizar.
  - Ángulo de lanzamiento (no requerido para el Método de Diferencias Centradas con Newton-Raphson).
  - Masa de la carga útil.
  
2. Para la utilización del Método de Diferencias Centradas con Newton-Raphson en la realización de la simulación se llama la *subrutina Trayectoria*. A su vez, esta subrutina llamará a diversas subrutinas y funciones, que serán explicadas a continuación.
  - 2.1. En primer lugar se encuentra la subrutina EPSI, la cuál calcula el épsilon de la máquina. El épsilon de la máquina, es una medida de las limitantes de precisión de la computadora para realizar el redondeo de cifras. Su aplicación práctica es cuando se prueba la convergencia de valores. Esto

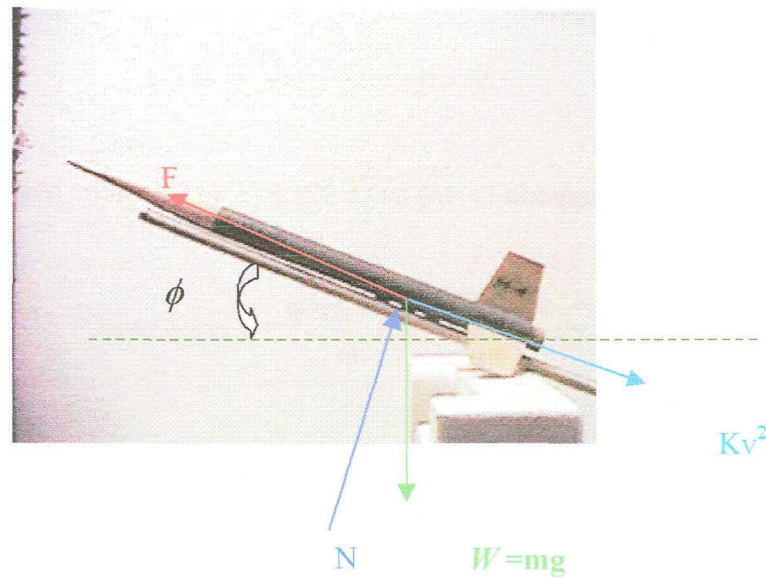
asegura que los programas sean portátiles, es decir, que éstos no dependan de la computadora en la que son implementados.

- 2.2. La subrutina PARAM, es utilizada para inicializar constantes y parámetros, tales como; inicio y final del barrido de ángulos, la delta angular de barrido y los parámetros utilizados para imprimir archivos de salida.
- 2.3. Para inicializar las variables de posición y velocidad de la plataforma de lanzamiento, así como la cantidad de puntos de impresión requeridos, se utiliza la subrutina LECTURA.
- 2.4. La clasificación y algunas características funcionales de cada motor se encuentran definidas en la subrutina MOTOR.
- 2.5. La clasificación y algunas características físicas de cada cohete se encuentran definidas en la subrutina COHETE.
- 2.6. Se anexo al programa una subrutina (TIPOCALC) que nos diera la opción de escoger entre simular la trayectoria dado un blanco o por otro lado, realizar la simulación dado un ángulo de lanzamiento inicial.
- 2.7. La subrutina ARRANQUE, calcula los valores de arranque para las variables desplazamiento, velocidad, aceleración y tiempo, considerando las condiciones a las que está sometido el cohete durante el inicio de su vuelo. En esta subrutina, se emplean ecuaciones de movimiento considerando la plataforma de lanzamiento. El análisis es el siguiente:

A continuación se utilizan las ecuaciones de equilibrio durante la fase de despegue, las cuales toman en cuenta la influencia de la plataforma de lanzamiento que



no se consideró en las ecuaciones (5.35) y (5.36). La figura 5.3 muestra el diagrama de cuerpo libre del cohete sonda en la fase de despegue.



**Figura 5.3.** Diagrama de cuerpo libre del cohete sonda en el despegue.

Aplicando la segunda Ley de Newton a la figura 5.3, se tiene,

$$\leftarrow \sum F_x = m \ddot{x} = F \cos \phi - Kv^2 \cos \phi - N \operatorname{sen} \phi \quad (5.39)$$

$$\uparrow + \sum F_y = m \ddot{y} = F \operatorname{sen} \phi - Kv^2 \operatorname{sen} \phi - mg + N \cos \phi \quad (5.40)$$

$$\sum F_N = 0 = N - W \cos \phi \quad (5.41)$$

despejando en (5.39), (5.40) y (5.41), se tiene;

$$\ddot{x} = \frac{F \cos \phi}{m} - \frac{Kv^2 \cos \phi}{m} - \frac{N \operatorname{sen} \phi}{m} \quad (5.42)$$

$$\ddot{y} = \frac{F \operatorname{sen} \phi}{m} - \frac{Kv^2 \operatorname{sen} \phi}{m} - g + \frac{N \cos \phi}{m} \quad (5.43)$$

$$N = W \cos \phi = mg \cos \phi \quad (5.44)$$

Por último, sustituyendo (5.44) en (5.42) y (5.43), se tiene respectivamente,

$$\ddot{x} = \frac{F \cos \phi}{m} - \frac{Kv^2 \cos \phi}{m} - g \cos \phi \operatorname{sen} \phi \quad (5.45)$$

$$\ddot{y} = \frac{F \operatorname{sen} \phi}{m} - \frac{Kv^2 \operatorname{sen} \phi}{m} - g + g \cos^2 \phi \quad (5.46)$$

Las cuales son las ecuaciones que gobiernan el movimiento del cohete sonda durante la fase de despegue en que éste hace su recorrido durante la plataforma de lanzamiento. Debe aclararse que por simplicidad del análisis se omitió considerar la fricción entre la plataforma de lanzamiento y el cohete durante el deslizamiento.

Por otro lado, también es utilizada la fórmula de la expansión de la serie de Taylor de primer orden de la ecuación (H.1) del apéndice H, como:

$$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i \Delta + \frac{1}{2} \ddot{x}_i \Delta^2 \quad (5.47)$$

2.8. La *subrutina NEWGRAPH*, es el corazón del programa, ya que es la parte iterativa para la solución de las ecuaciones correspondientes al problema bajo estudio.

Esta subrutina inicia con un ciclo iterativo, el cual tiene un condicional para continuar mientras la distancia “ $x$ ” calculada durante la trayectoria sea menor o igual a la distancia “ $x$ ” del blanco. Como el método de Newton-Raphson requiere de valores iniciales “arbitrarios” cercanos a la solución del problema, se optó por resolver las

ecuaciones (5.45) y (5.46) por medio del método de diferencias centradas considerando al ángulo  $\phi = Cte$  para obtener los “valor iniciales” que se emplearán en el método de Newton-Raphson.

**Análisis de las ecuaciones de la trayectoria durante la fase de despegue (deslizamiento sobre la plataforma).**

Recordando a las ecuaciones (5.45) y (5.46), se tiene:

$$\ddot{x} = \frac{F \cos \phi}{m} - \frac{Kv^2 \cos \phi}{m} - g \cos \phi \sin \phi \quad (5.45)$$

$$\ddot{y} = \frac{F \sin \phi}{m} - \frac{Kv^2 \sin \phi}{m} - g + g \cos^2 \phi \quad (5.46)$$

donde

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \quad (5.48)$$

En  $t = t_i$ , se tiene:

$$\ddot{x}_i = \frac{F_i \cos \phi_i}{m_i} - \frac{K_i \left( \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 \right) \cos \phi_i}{m_i} - g_i \cos \phi_i \sin \phi_i \quad (5.49)$$

$$\ddot{y}_i = \frac{F_i \text{Sen} \phi_i}{m_i} - \frac{K_i \left( \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 \right) \text{sen} \phi_i}{m_i} - g_i + g_i \cos^2 \phi_i \quad (5.50)$$

además, de las ecuaciones (H.2) y (H.3), se obtiene,

$$\dot{x}_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta} \quad (5.51)$$

$$\ddot{x}_i = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta^2} \quad (5.52)$$

y para la variable  $y$ , se tienen las ecuaciones análogas,

$$\dot{y}_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta} \quad (5.53)$$

$$\ddot{y}_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta^2} \quad (5.54)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.51), (5.52) y (5.53), en (5.49), se obtiene,

$$f_i = A_{1i} x_{i+1}^2 + B_{1i} x_{i+1} + C_{1i} y_{i+1}^2 + D_{1i} y_{i+1} - E_{1i} \quad (5.55)$$

donde;

$$A_{1i} = k_i \cos \phi_i$$

$$B_{1i} = 4m_i - 2k_i \cos \phi_i x_{i-1}$$

$$C_{1i} = k_i \cos \phi_i$$

$$D_{1i} = -2k_i \cos \phi_i y_{i-1}$$

$$E_{1i} = 4F_i \Delta^2 \cos \phi_i + 8m_i x_i - k_i \cos \phi_i x_{i-1}^2 - 4m_i x_{i-1} - k_i \cos \phi_i y_{i-1}^2 - 4m_i g_i \Delta^2 \cos \phi_i \sin \phi_i$$

Si consideramos a  $k_i = 0$  (despreciamos la fuerza de arrastre aerodinámica) en la ecuación (5.55), se tiene,

$$4m_i x_{i+1} = 4F_i \Delta^2 \cos \phi_i + 8m_i x_i - 4m_i x_{i-1} - 4m_i g_i \Delta^2 \cos \phi_i \sin \phi_i \quad (5.56)$$

En forma similar, se sustituyen las ecuaciones (5.51), (5.53) y (5.54) en (5.50) y se obtiene;

$$f_2 = A_{2i} x_{i+1}^2 + B_{2i} x_{i+1} + C_{2i} y_{i+1}^2 + D_{2i} y_{i+1} - E_{2i} \quad (5.57)$$

donde;

$$A_{2i} = k_i \sin \phi_i$$

$$B_{2i} = -2k_i \sin \phi_i x_{i-1}$$

$$C_{2i} = k_i \sin \phi_i$$

$$D_{2i} = -2k_i \sin \phi_i y_{i-1}$$

$$E_{2i} = 4F_i \Delta^2 \operatorname{sen} \phi_i - 4g_i \Delta^2 M_i - k_i \operatorname{sen} \phi_i x_{i-1}^2 \\ + 8M_i y_i - k_i \operatorname{sen} \phi_i y_{i-1}^2 - 4M_i y_{i-1} + 4M_i g_i \Delta^2 \cos^2 \phi_i$$

Y volvemos a considerar a  $k_i = 0$  (despreciamos la fuerza de arrastre aerodinámica) en la ecuación (5.57), se obtiene,

$$4m_i y_{i+1} = 4F_i \Delta^2 \operatorname{sen} \phi_i - 4g_i \Delta^2 m_i + 8m_i y_i - 4m_i y_{i-1} + 4m_i g_i \Delta^2 \cos^2 \phi_i \quad (5.58)$$

Despejando a  $x_{i+1}$  y a  $y_{i+1}$  de las ecuaciones (5.56) y (5.58) respectivamente, se tiene,

$$x_{i+1} = \frac{F_i \Delta^2 \cos \phi_i}{m_i} + 2x_i - x_{i-1} - g_i \Delta^2 \cos \phi_i \operatorname{sen} \phi_i \quad (5.59)$$

$$y_{i+1} = \frac{F_i \Delta^2 \operatorname{sen} \phi_i}{m_i} - g_i \Delta^2 + 2y_i - y_{i-1} + g_i \Delta^2 \cos^2 \phi_i \quad (5.60)$$

Así, las ecuaciones (5.59) y (5.60) proporcionan las suposiciones iniciales para el método de Newton Raphson durante la fase de despegue (cuando recorre la plataforma de lanzamiento).

Ahora bien, en el método de Newton-Raphson utiliza los valores de las ecuaciones anteriores (donde se despreció la fuerza de arrastre) para posteriormente calcular los valores de desplazamientos, velocidades y aceleraciones considerando las ecuaciones que incluyen la fuerza de arrastre aerodinámica durante la fase de despegue (deslizamiento durante la plataforma).

Para esto, de (5.37) se obtiene la ecuación para el problema particular de análisis, es decir, para resolver un sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{(i+1)} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{(i)} - \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}_{(i)}^{-1} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}_{(i)} \quad (5.61)$$

donde,  $f_1$  y  $f_2$  están dadas por las ecuaciones (5.55) y (5.56) respectivamente, y los coeficientes de la matriz jacobiana son:

$$W_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_i} = 2A_1 x_i + B_1 \quad (5.62)$$

$$W_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial y_i} = 2C_1 y_i + D_1 \quad (5.63)$$

$$W_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x_i} = 2A_2 x_i + B_2 \quad (5.64)$$

$$W_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial y_i} = 2C_2 y_i + D_2 \quad (5.65)$$

Y despejando valores de (5.61), se obtiene,

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(W_{22} f_1 - W_{12} f_2)}{(W_{11} W_{22} - W_{21} W_{12})} \quad (5.66)$$

$$y_{i+1} = y_i - \frac{(W_{11} f_2 - W_{21} f_1)}{(W_{11} W_{22} - W_{21} W_{12})} \quad (5.67)$$

Debe notarse que las ecuaciones (5.66) y (5.67) utilizan los valores iniciales  $x_i, y_i$  las cuales fueron deducidas en (5.59) y (5.60) respectivamente;

***Análisis de las ecuaciones de la trayectoria durante la fase de vuelo libre.***

Partiendo de las ecuaciones (5.35) y (5.36) en el análisis de vuelo libre y considerando (5.48),

En  $t = t_i$ , se tiene,

$$\ddot{x}_i = \frac{F_i \cos \phi_i}{m_i} - \frac{K_i \left( \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 \right) \cos \phi_i}{m_i} \quad (5.68)$$

$$\ddot{y}_i = \frac{F_i \sen \phi_i}{m_i} - \frac{K_i \left( \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 \right) \sen \phi_i}{m_i} - g_i \quad (5.69)$$

donde,

$$\cos \phi_i = \frac{\dot{x}_i}{\sqrt{\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2}}; \quad \sen \phi_i = \frac{\dot{y}_i}{\sqrt{\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2}}$$

Análogamente al caso de la fase de despegue, las condiciones iniciales en vuelo libre se obtienen a partir de las ecuaciones (5.68) y (5.69), y son;

$$x_{i+1} = \frac{F_i \Delta^2 \cos \phi_{i-1}}{m_i} + 2x_i - x_{i-1} \quad (5.70)$$



$$y_{i+1} = \frac{F_i \Delta^2 \operatorname{sen} \phi_{i-1}}{m_i} - g_i \Delta^2 + 2y_i - y_{i-1} \quad (5.71)$$

Y, las ecuaciones (5.70) y (5.71), proporcionan las suposiciones iniciales para el método de Newton-Raphson durante la fase de vuelo libre.

Por otro lado, sustituyendo las ecuaciones (5.51), (5.52) y (5.53), en (5.68), se obtiene,

$$f_1 = \left\{ m(XB) \sqrt{XA^2 + YA^2} \right\} - F(XA) + k(XA^2 + YA^2)XA \quad (5.72)$$

En forma similar, se sustituyen las ecuaciones (5.51), (5.53) y (5.54) en (5.69) y se obtiene;

$$f_2 = \left\{ m(YB) \sqrt{XA^2 + YA^2} \right\} - F(YA) + k(XA^2 + YA^2)YA + \left[ mg \sqrt{XA^2 + YA^2} \right] \quad (5.73)$$

donde,

$$XA = \frac{x_i - x_{i-2}}{2\Delta} \quad (5.74)$$

$$XB = \frac{x_i - 2x_{i-1} + x_{i-2}}{\Delta^2} \quad (5.75)$$

$$YA = \frac{y_i - y_{i-2}}{2\Delta} \quad (5.76)$$

$$YB = \frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{\Delta^2} \quad (5.77)$$

que son la versión de las ecuaciones de diferencias centradas (5.51) – (5.54).

De (5.61), los coeficientes de la matriz jacobiana son:

$$W_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_i} = \frac{m\sqrt{XA^2 + YA^2}}{\Delta^2} + \frac{m(x_i - 2x_{i-1} + x_{i-2})(x_i - x_{i-2})}{4\Delta^4\sqrt{XA^2 + YA^2}} - \frac{F}{2\Delta} + \frac{k(x_i - x_{i-2})^2}{4\Delta^3} + \frac{k(XA^2 + YA^2)}{2\Delta} \quad (5.78)$$

$$W_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial y_i} = \frac{m(x_i - 2x_{i-1} + x_{i-2})(y_i - y_{i-2})}{4\Delta^4\sqrt{XA^2 + YA^2}} + \frac{k(y_i - y_{i-2})(x_i - x_{i-2})}{4\Delta^3} \quad (5.79)$$

$$W_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x_i} = \frac{m(y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2})(x_i - x_{i-2})}{4\Delta^4\sqrt{XA^2 + YA^2}} + \frac{k(y_i - y_{i-2})(x_i - x_{i-2})}{4\Delta^3} + \frac{mg(x_i - x_{i-2})}{4\Delta^2\sqrt{XA^2 + YA^2}} \quad (5.80)$$

$$W_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial y_i} = \frac{m\sqrt{XA^2 + YA^2}}{\Delta^2} + \frac{m(y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2})(y_i - y_{i-2})}{4\Delta^4\sqrt{XA^2 + YA^2}} - \frac{F}{2\Delta} + \frac{k(y_i - y_{i-2})^2}{4\Delta^3} + \frac{k(XA^2 + YA^2)}{2\Delta} + \frac{mg(y_i - y_{i-2})}{4\Delta^2\sqrt{XA^2 + YA^2}} \quad (5.81)$$

Así, al obtenerse los valores de los desplazamientos de (5.66) y (5.67), es posible calcular las velocidades y aceleraciones utilizando las ecuaciones desde la (5.51) hasta la (5.54) del método de Diferencias Centradas.

Hasta aquí se han deducido las ecuaciones que se utilizan para determinar los desplazamientos, velocidades y aceleraciones durante toda la trayectoria utilizando el método de Diferencias Centradas y el método de Newton-Raphson. Sin embargo, esta subrutina también hace el análisis para determinar el ángulo de lanzamiento para la

localización del blanco seleccionado. En este momento la subrutina está acondicionada para obtener blancos en el eje  $x$ .

Para determinar el ángulo de lanzamiento para llegar al blanco requerido, el programa comienza un barrido de trayectorias, iniciando desde un ángulo de  $-90^\circ$  hasta un ángulo de  $90^\circ$  (hace el barrido del cuarto y primer cuadrante de los ejes cartesianos).

En el apéndice G, se da una explicación detallada y apoyada con gráficas de la metodología empleada para calcular el ángulo del blanco requerido. A continuación se explica de manera resumida el procedimiento.

En primer lugar, cada trayectoria calculada durante el barrido es detenida en cada delta del ángulo cercano a la  $x_b$  del blanco seleccionado y compara los valores de  $y_b$  del blanco, de tal manera que cuando llegue a un  $x_i$  cerca del blanco  $x_b$ , entonces se detiene el ciclo y se lleva a cabo una interpolación lineal utilizando el polinomio de Lagrange para encontrar a  $y'_b$  del blanco (la cual es  $y'_b \approx y_b$ ) obligada a tomar el valor que le corresponde en  $x_b$  del blanco, que está expresada de la siguiente forma,

$$y'_b = \frac{x_b - x_i}{x_{i-1} - x_i} y_{i-1} + \frac{x_b - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} y_i \quad (5.82)$$

Además de calcularse  $y'_{bi}$  (de una iteración presente) sea mayor a  $y_b$  del blanco en cada iteración, debe satisfacerse que la  $y'_{bi-1}$  (de una iteración anterior) sea menor que  $y_b$  del blanco. Los valores del delta del ángulo son utilizados para determinar el valor correspondiente al ángulo que se obtiene en cada trayectoria, por lo que, se utiliza el mismo criterio descrito anteriormente y de forma análoga se obtiene para el ángulo lo siguiente,

$$\phi_b = \frac{y_b - y'_{bi}}{y'_{bi-1} - y'_{bi}} \phi'_{bi-1} + \frac{y_b - y'_{bi-1}}{y'_{bi} - y'_{bi-1}} \phi'_{bi} \quad (5.83)$$

Donde  $\phi_b$  es el ángulo requerido para llegar al blanco deseado.

- 2.9. La *subrutina IMPRESIÓN*, se encarga de imprimir los resultados obtenidos en la simulación.
- 2.10. La *función COEF*, calcula el valor del coeficiente de arrastre para cada tipo de cohete.
- 2.11. La *función DENS*, determina la densidad del aire a diferentes alturas de vuelo.
- 2.12. La *función EMPUJE*, calcula los valores de la fuerza de empuje del motor en función del tiempo, estos datos fueron obtenidos del catálogo del proveedor de motores ESTES para cada tipo de motor utilizado durante la simulación.
- 2.13. La *función FK*, calcula la variable de fuerza de arrastre como función del; coeficiente de arrastre, del área transversal del cohete, y de la densidad atmosférica.
- 2.14. La *función GRAV*, determina la fuerza de gravedad como función de la altura.
- 2.15. La *función RMASA*, determina la masa total del cohete como función del tiempo durante toda la trayectoria y toma en cuenta la pérdida de la masa del propelente debido a la combustión.
- 2.16. La *función TD*, calcula el tiempo de despegue que el motor es capaz de realizar, el criterio que se estableció para determinar la deducción de la ecuación utilizada se basó en el despeje de la ecuación de la función empuje, considerando que si la fuerza de empuje realizada por el motor durante su alcance o pico máximo en la función no era capaz de hacer mover al cohete, entonces el motor sería incapaz de hacer que vuele.

A continuación en la figura 5.4 se presenta el diagrama de flujo del programa,

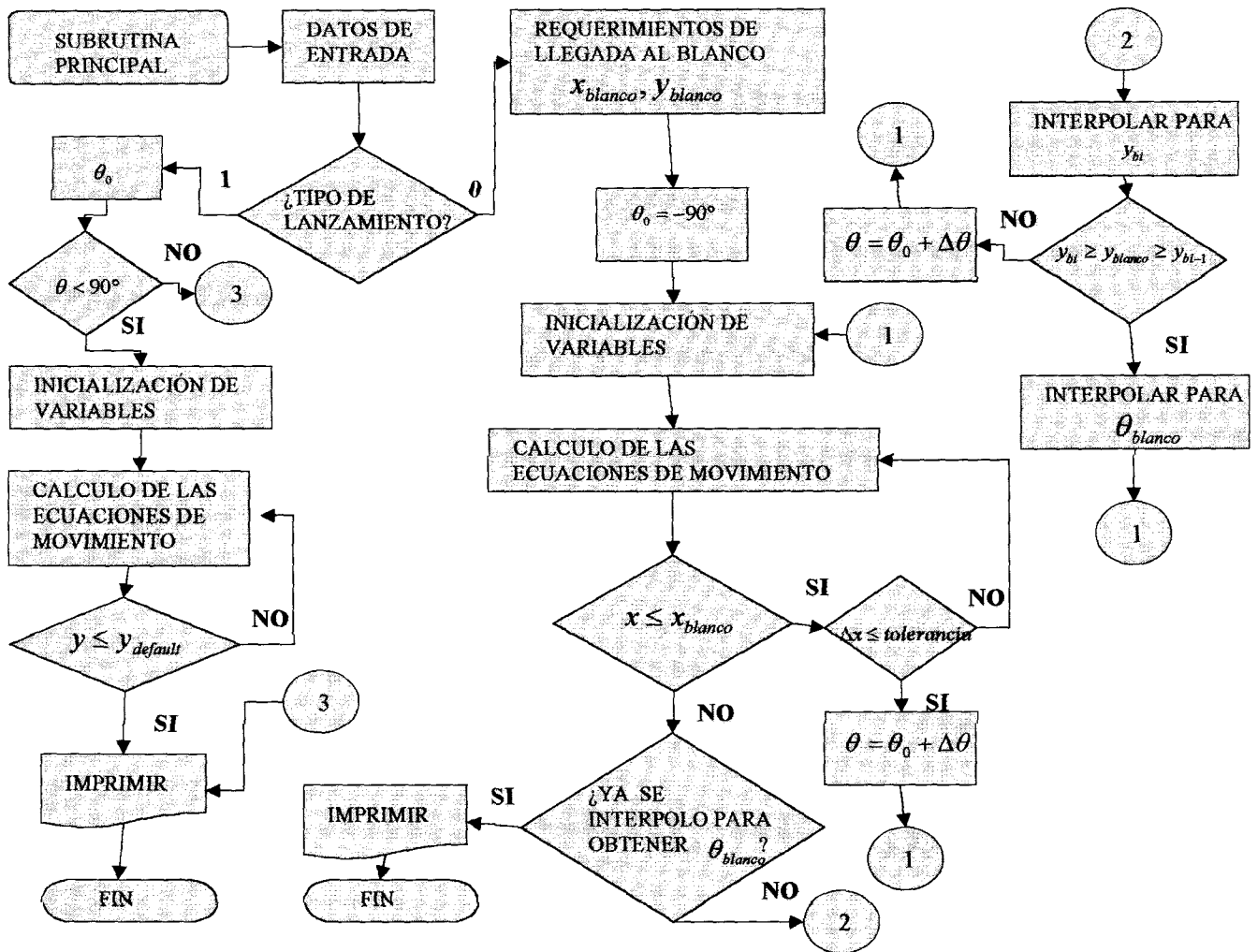


Figura 5.4. Diagrama de flujo del programa computacional escrito en FORTRAN'90.

## 5.6. Modelo matemático que considera seis grados de libertad del cohete.

En esta sección será presentado el método de solución de las ecuaciones de movimiento generales (5.1) para simular un cohete sonda considerado como un cuerpo rígido, estabilizado con aletas y teniendo seis grados de libertad, presentadas al inicio de este capítulo. Se presentará a grandes rasgos la teoría en que se fundamenta el método numérico seleccionado. Finalmente, se presentará en detalle la descripción del programa computacional, utilizado para resolver las ecuaciones diferenciales bajo consideración.

### 5.6.1. Metodología de solución y consideraciones.

El problema consiste en obtener soluciones a las ecuaciones diferenciales no lineales de movimiento del cohete con seis grados de libertad presentados en la ecuación (5.1).

Recordando la ecuación bajo análisis se presenta a continuación,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{V}}_B \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_B \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_E & \mathbf{B}^T & 0 & 0 \\ -\mathbf{B}\Omega_E^2 & -(\Omega_B + \mathbf{B}\Omega_E\mathbf{B}^T) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{J}^{-1}\Omega_B\mathbf{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\Omega_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{V}_B \\ \boldsymbol{\omega}_B \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B}\mathbf{g}(\mathbf{p}) + \frac{\mathbf{F}_B}{m} \\ \mathbf{J}^{-1}\mathbf{T}_B - \mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega}_B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Que en forma expandida son las ecuaciones presentadas anteriormente,

$$\dot{X} = -\omega_E Y + ub_{11} + vb_{21} + wb_{31} \quad (5.3a)$$

$$\dot{Y} = \omega_E X + ub_{12} + vb_{22} + wb_{32} \quad (5.3b)$$

$$\dot{Z} = ub_{13} + vb_{23} + wb_{33} \quad (5.3c)$$

$$\dot{u} = (Rv - Qw) + \left( \frac{-C_x q' S + T_x}{m} \right) - g'_x \quad (5.4a)$$

$$\dot{v} = (Pw - Ru) + \left( \frac{-C_n S q' \text{Sen}\beta - C_{nP} d S^* \left( \frac{Pd}{2V_T} \right) \text{Sen}\alpha^* q' + T_y}{m} \right) - g'_y \quad (5.4b)$$

$$\dot{w} = (Qu - Pv) + \left( \frac{-C_n S q' \text{Sen}\alpha^* + C_{nP} d S^* \left( \frac{Pd}{2V_T} \right) \text{Sen}\beta q' + T_z}{m} \right) - g'_z \quad (5.4c)$$

$$\dot{P} = \frac{1}{J_x} \left[ QR(J_y - J_z) + \left\{ C_l S + C_{lP} S^* \left( \frac{Pd}{2V_T} \right) \text{Sen}\beta \right\} q' d \right] \quad (5.5a)$$

$$\dot{Q} = \frac{1}{J_y} \left[ PR(J_z - J_x) + \left\{ C_m S d_c \text{Sen}\alpha^* + C_{mq} S^* d \left( \frac{Qd}{2V_T} \right) \right\} q' \right] \quad (5.5b)$$

$$\dot{R} = \frac{1}{J_z} \left[ PQ(J_x - J_y) + \left\{ -C_m S d_c \text{Sen}\beta + C_{mq} S^* d \left( \frac{Rd}{2V_T} \right) \right\} q' \right] \quad (5.5c)$$

$$\dot{e}_0 = -\frac{1}{2}(e_1 P + e_2 Q + e_3 R) \quad (5.6a)$$

$$\dot{e}_1 = \frac{1}{2}(e_0 P - e_3 Q + e_2 R) \quad (5.6b)$$

$$\dot{e}_2 = -\frac{1}{2}(e_3 P + e_0 Q - e_1 R) \quad (5.6c)$$

$$\dot{e}_3 = \frac{1}{2}(-e_0 P + e_1 Q + e_2 R) \quad (5.6d)$$

Como se ha mencionado anteriormente estas ecuaciones son no lineales y por lo tanto, se requerirá de un método numérico para obtener la solución. Para ello en la siguiente sección se presenta el método numérico utilizado para tal finalidad.

### **5.6.2. Métodos numéricos utilizados en la derivación de las fórmulas computacionales.**

El problema consiste en obtener soluciones de las 13 ecuaciones diferenciales no lineales obtenidas a partir de la expansión de las ecuaciones generales de movimiento (5.1).

El método numérico seleccionado para tal finalidad es el método de Runge-Kutta Felbergh de quinto orden, el cual es utilizado para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con valores iniciales. Este método está diseñado para obtener un ajuste del tamaño de paso en cada iteración. En el apéndice H se presenta una breve descripción de este método numérico.

### **5.6.3. Descripción del programa computacional.**

Después de explicar en forma general la teoría en que se fundamenta el método numérico utilizado en la solución de las ecuaciones de movimiento de esta sección, sigue presentar la metodología utilizada en el desarrollo del programa computacional que simula la trayectoria de cohetes sonda con seis grados de libertad.

El programa desarrollado está escrito utilizando el paquete MAPLE V Release 4. La metodología utilizada para llevar a cabo la secuencia de funcionamiento del programa de simulación, y las consideraciones en el análisis físico del problema, se presentarán a continuación.

Es preciso aclarar que el sistema de unidades utilizado durante todos los análisis, es el Sistema Internacional S.I.

Este programa al igual que el de Newton-Raphson y Diferencias Centradas utiliza un diseño *modular* resaltando las siguientes secciones,



1. Función fuerza de empuje del motor
2. Características de cohetes
3. Función de las variables aerodinámicas
4. Función velocidad del viento
5. Función densidad del aire
6. Función aceleración de la gravedad
7. Función masa variable
8. Subrutina de variables de control general
9. Subrutina de constantes
10. Subrutina de datos de entrada iniciales
11. Subrutina de requerimientos de llegada al blanco del apogeo
12. Subrutina principal
13. Subrutina de impresión de resultados

A continuación se describen cada una de las secciones utilizadas,

1. La sección **FUNCIÓN FUERZA DE EMPUJE DEL MOTOR**, es una subrutina que contiene los valores de la masa inicial del propelente, la masa del cartucho, el tiempo de combustión y el código de las ecuaciones que describen la curva de empuje en función del tiempo. En esta sección se cargan todas las ecuaciones de empuje representando a cada uno de los motores utilizados para llevar a cabo la simulación (por ejemplo, ver la ecuación de empuje obtenida en el motor comercial modelo K1050W-PLUG de la marca AEROTECH, utilizado en el caso de estudio del capítulo 6).
2. En la sección de llamada **CARACTERÍSTICAS DE COHETES**, se encuentran como su nombre así lo indica, las características físicas de cada uno de los cohetes utilizados (notar que se pueden hacer combinaciones entre tipos de cohetes y motores para ser simulados) y tiene los siguientes datos,

- a). El diámetro del cohete.
  - b). Momentos de inercia respecto a los ejes "x", "y", y "z" del cohete.
  - c). Masa del cohete
  - d). Masa de la carga útil
  - e). Se calcula la masa total del cohete
  - f). Se evalúa el área de la sección transversal
  - g). Área total de las 4 aletas.
  - h). Centro de masa o de gravedad
  - i). Centro de presión
3. La sección de la **FUNCIÓN DE LAS VARIABLES AERODINÁMICAS**, contiene los valores de los coeficientes aerodinámicos que se utilizan en las ecuaciones de movimiento (como se presentaron en el capítulo 4), para un tipo de cohete dado, estos coeficientes están representados con ecuaciones que se obtienen mediante ajustes de curvas de valores ya sea numéricos o experimentales. Los coeficientes aerodinámicos son,  $(C_x, C_n, C_{np}, C_l, C_{lp}, C_m, C_{mq})$  y un ejemplo típico de curvas de éstos es mostrado en el capítulo 6, donde se muestran los casos de estudio.
4. La **FUNCIÓN VELOCIDAD DEL VIENTO**, es la sección que contiene el código que representa las ecuaciones de ajuste de curvas utilizadas para obtener a la velocidad del viento en función de la altura sobre el nivel del mar y en función de la latitud geográfica el globo terrestre, en el capítulo 6 se muestra el caso específico de ecuaciones utilizadas en esta sección.
5. En la **FUNCIÓN DENSIDAD DEL AIRE**, es presentada con el código de la ecuación de la densidad del aire en función de la altura sobre el nivel del mar. Las ecuaciones utilizadas son las ecuaciones (3.94) y (3.95) deducidas en el capítulo 3.

6. Para determinar la fuerza de atracción terrestre, en la sección **FUNCIÓN ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD**, se introduce el código de las ecuaciones (3.30), (3.96) y (3.97) deducidas en el capítulo 3.
7. **FUNCIÓN MASA VARIABLE**, es la sección en la cual se calcula la variación de la masa del cohete conforme se consume el combustible del motor.
8. En la **SUBROUTINA DE VARIABLES DE CONTROL GENERAL**, se maneja el parámetro para el control del tipo de lanzamiento. Este programa tiene dos opciones de simulación, por una lado en la **opción tipo 1** se simula la trayectoria dadas las variables deseadas de llegada del cohete que en este caso son; una altura sobre el nivel del mar  $h$  y la latitud geográfica  $\mu$ . En la **opción tipo 2** se introduce el ángulo de elevación  $\theta$  y el ángulo de acimut  $\alpha$  iniciales y de esta manera se obtiene la trayectoria del cohete (para referencia de los ángulos de lanzamiento ver figura 3.2) con una altura sobre el nivel del mar dada por default de  $h = 0$ .
9. **SUBROUTINA DE CONSTANTES**, es la sección que está subdividida en dos subsecciones a saber,
  - a). *Constantes de la tierra*, donde se encuentran las constantes; parámetro de planicidad de la tierra, radio ecuatorial, velocidad angular de rotación terrestre, tiempo inicial de la simulación, constante gravitacional armónica y la constante gravitacional masa-tierra.
  - b). *Constantes iniciales*, donde se encuentran; las velocidades angulares en coordenadas ECI, además de las constantes que se utilizan en la iniciación y control de los ciclos.
10. En la sección denominada **SUBROUTINA DE DATOS DE ENTRADA INICIALES**, se encuentra el tamaño de paso global, la latitud geográfica inicial del lanzador, la altura inicial del lanzador sobre el nivel del mar, el ángulo de acimut y el ángulo de

lanzamiento, así como, sus tamaños de incrementos y la velocidad inicial del cohete al separarse de la plataforma de lanzamiento.

11. El lugar donde son colocadas las variables requeridas para llegar al objetivo deseado de acuerdo a la **opción tipo 2** que se describió en el inciso 8 es en la SUBRUTINA DE REQUERIMIENTOS DE LLEGADA AL BLANCO DEL APOGEO, en esta sección se introduce la altura de llegada requerida sobre el nivel del mar, así como la latitud geográfica requerida, esto implica que el programa debe localizar los ángulos  $(\alpha, \theta)$  de llegada a esos requerimientos.
12. La SUBRUTINA PRINCIPAL, es el corazón del programa, éste funciona dependiendo de que *tipo de opción de lanzamiento selecciona*, como se explicó en el inciso 8,
  - 12.1). El programa se encuentra dentro de un ciclo condicional general, si se selecciona la **opción tipo 1** entonces terminará al llegar a la latitud geográfica deseada, y si se elige la **opción tipo 2**, entonces este ciclo condicional es ignorado. Ahora bien, considerando que se ha elegido a la **opción tipo 1**, entonces en este ciclo general se realizan los incrementos del ángulo de acimut  $\alpha$  (para referencia ver figura 3.2) en intervalos dados haciendo un barrido como máximo de  $360^\circ$  en la plataforma de lanzamiento hasta llegar a la latitud geográfica deseada.
  - 12.2). Dentro del ciclo condicional general se encuentra un subciclo condicional que se encarga de hacer el barrido del ángulo de elevación  $\theta$  (ver figura 3.2) en intervalos y se detendrá hasta llegar a la altura sobre el nivel del mar requerida (de acuerdo a la opción tipo 2). Si selecciona la opción tipo 1, este ciclo es ignorado.

- 12.2.1). Dentro de este subciclo se realizan los cálculos para obtener;  
(Nota: El orden de los cálculos en el siguiente listado es el mismo que en el programa)

*Iniciación de variables,*

- 12.2.1a). Ángulo de longitud celestial inicial.
- 12.2.1b). Ángulo de latitud geodésica del lanzador.
- 12.2.1c). Distancia del lanzador respecto al centro de la tierra.
- 12.2.1d). Vector de posición del cohete en coordenadas ECI.
- 12.2.1e). Matrices de transformación ortogonal.
- 12.2.1f). Inicialización de parámetros de Euler.
- 12.2.1g). Vector de velocidad traslacional inicial del cohete en coordenadas ECI.
- 12.2.1h). Vector de velocidad traslacional inicial del cohete en coordenadas ABC.
- 12.2.1i). Vector de velocidad angular inicial del cohete en coordenadas ECI.
- 12.2.1j). Vector de velocidad angular inicial en del cohete coordenadas ABC.

A su vez existe otro subciclo dentro del anterior en el cual se calcula la trayectoria en cada intervalo de tiempo global, y se termina el ciclo cuando se llega, ya sea, a la altura de lanzamiento deseada (en la **opción tipo 1**), o cuando se llega a una altura dada por default (en la **opción tipo 2**) que actualmente es de 0. Dentro de este subciclo se realizan los cálculos para obtener (Nota: El orden de los cálculos en el siguiente listado es el mismo que en el programa):

- 12.2.1.1a). Ángulo de longitud celestial.
- 12.2.1.1b). Distancia del cohete respecto al centro de la tierra en coordenadas ECI.
- 12.2.1.1c). Ángulo de latitud geográfica respecto a la posición del cohete.
- 12.2.1.1d). Matrices de transformación ortogonal.
- 12.2.1.1e). Vector de posición del lanzador en coordenadas ECI.
- 12.2.1.1f). Vector de posición del cohete en coordenadas NED.
- 12.2.1.1g). Vector de velocidad angular del cohete en coordenadas NED.
- 12.2.1.1h). Vector de velocidad traslacional del cohete en coordenadas NED.
- 12.2.1.1i). Matrices de transformación ortogonal.
- 12.2.1.1j). Vector de posición del cohete en coordenadas ECI.
- 12.2.1.1k). Vector de velocidad del cohete en coordenadas ABC.
- 12.2.1.1l). Vector velocidad del viento en coordenadas NED.
- 12.2.1.1m). Vector velocidad del viento en coordenadas ECI.
- 12.2.1.1n). Vector velocidad del viento en coordenadas ABC.
- 12.2.1.1ñ). Vector velocidad aerodinámica del cohete en coordenadas ABC.
- 12.2.1.1o). Velocidad del flujo de aire.
- 12.2.1.1p). Ángulo de ataque del cohete.
- 12.2.1.1q). Ángulo de deslizamiento del cohete.
- 12.2.1.1r). Densidad del aire.
- 12.2.1.1s). Presión dinámica.
- 12.2.1.1t). Aceleración de la gravedad en coordenadas ECI.
- 12.2.1.1u). Aceleración de la gravedad en coordenadas ABC.
- 12.2.1.1v). Aceleración de la gravedad en coordenadas NED.
- 12.2.1.1w). Fuerza de empuje.
- 12.2.1.1x). Coeficientes aerodinámicos.

12.2.1.1y). Aceleraciones traslacionales del cohete en coordenadas ABC.

12.2.1.1z). Aceleraciones angulares del cohete en coordenadas ABC.

12.2.1.1aa). Aceleraciones traslacionales del cohete en coordenadas ECI.

12.2.1.1bb). Aceleraciones angulares del cohete en coordenadas ECI.

12.2.1.1cc). Derivadas de los ángulos de Euler.

12.2.1.1dd). Después de la primer iteración hasta el paso anterior, donde ya se inicializaron las variables, el siguiente paso consiste en calcular las velocidades y posiciones del punto siguiente utilizando integración numérica, específicamente, el método de Runge-Kutta Felbergh (el cual se utiliza llamando las librerías de MAPLE), este método se utiliza para resolver las 6 ecuaciones generales de movimiento, es decir, 3 traslacionales y 3 angulares y las 4 ecuaciones para determinar los parámetros de Euler, así en total, se resuelven 10 ecuaciones diferenciales de primer orden. Las 3 ecuaciones diferenciales de movimiento general restantes (en total son 13, ver ecuación –5.1- para referencia), que son las ecuaciones de velocidad del cohete inercial en coordenadas ECI, se calcularon mediante integración convencional, ya que son lineales. El resultado de esta integración numérica son los valores en un paso  $i+1$  (considerando al paso  $i$  como inicial) de las 3 velocidades traslacionales del cohete en coordenadas ABC, 3 velocidades angulares del cohete en coordenadas ABC, 3 posiciones del cohete en

coordenadas ECI y los 4 parámetros de Euler que construyen la matriz de transformación ortogonal  $B$ . Así, el proceso continúa hasta llegar al objetivo deseado.

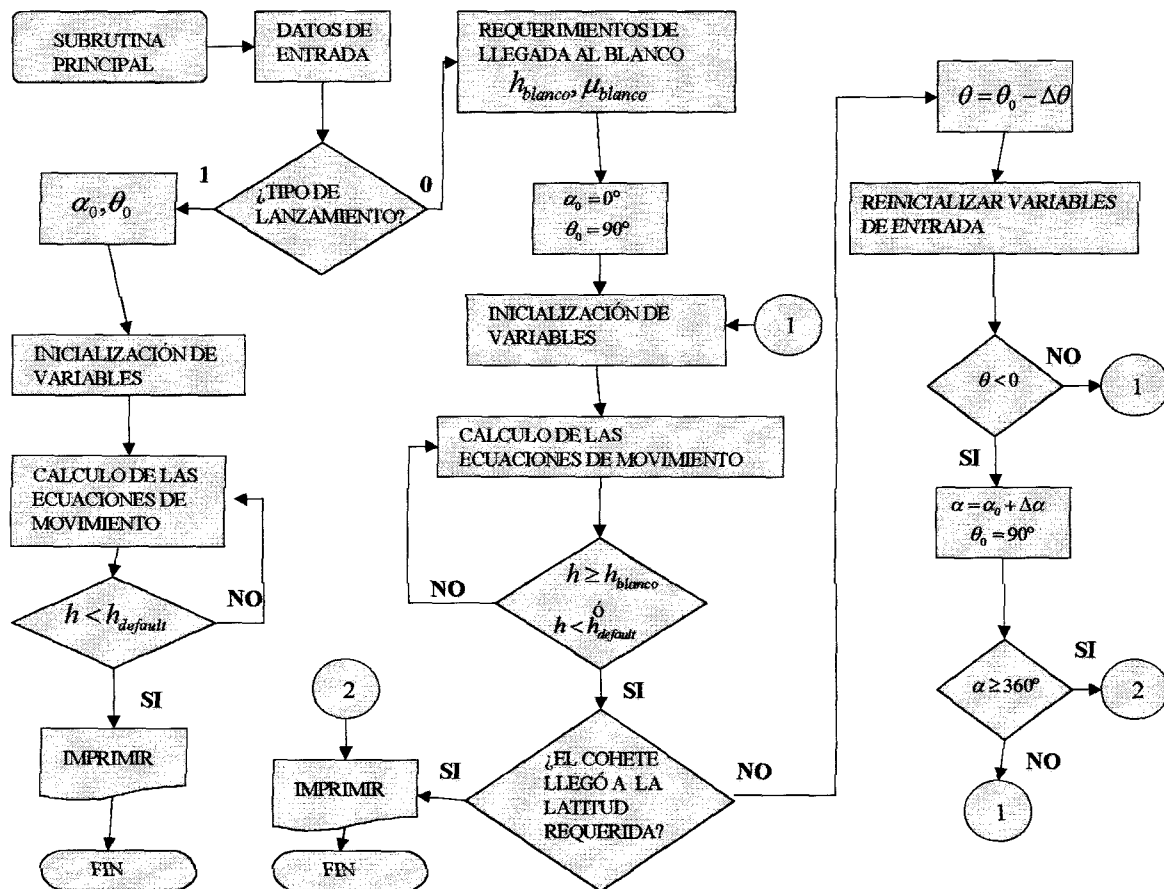
13. Finalmente en la SUBROUTINA DE IMPRESIÓN DE RESULTADOS, se grafican los valores de las variables de interés, entre estas están las posiciones, velocidades, aceleraciones, entre otras.

En la figura 5.5 se presenta el diagrama de flujo del programa.

### **5.7. Conclusiones.**

En este capítulo se ha presentado la ecuación general de movimiento tanto en su forma compacta como expandida. En su forma expandida se han presentado las 13 ecuaciones diferenciales ordinarias que representan el movimiento y la trayectoria del cohete considerándolo como cuerpo rígido, con aletas de estabilización y con seis grados de libertad. Además se hace una breve presentación de los métodos de solución de trayectorias de cohetes a partir del siglo 17 con la finalidad de que se conozca su evolución a lo largo de los años.





**Figura 5.5.** Diagrama de flujo del programa computacional escrito en MAPLE V Release 4.

A fin de presentar soluciones al modelo matemático general, se describió el primer análisis mostrando un modelo matemático simplificado que considera al cohete como una partícula en el vacío, y se obtuvieron las soluciones analíticas. En segundo lugar con la finalidad de complicar un poco más el modelo matemático a analizar, y a partir de las ecuaciones generales de movimiento, se deduce el modelo matemático que representa a un cohete como una partícula con movimiento plano y en la cual actúa una fuerza de arrastre aerodinámica. Debido a la no linealidad de las ecuaciones se utilizaron métodos numéricos tales como el método de Diferencias centradas y el método de Newton Raphson, se detallan las ecuaciones deducidas a

partir de estos métodos y se detalla el programa computacional que utiliza las ecuaciones derivadas de estos métodos.

Finalmente se analiza el modelo matemático general que considera al cohete como cuerpo rígido estabilizado sólo con aletas y con seis grados de libertad. Para ello, y debido a la no linealidad de las ecuaciones de movimiento se utilizó el método de Runge-Kutta Felbergh, así, se ha presentado en forma general la teoría en que se basa éste método. Finalmente se describe la metodología utilizada en la elaboración del programa computacional para obtener las soluciones a dichas ecuaciones. En el capítulo 6, se presentará un caso de estudio donde serán observados los resultados del programa.

*La descripción correcta de las líneas y círculos, sobre las cuales se fundamenta la geometría, pertenecen al campo de la mecánica. La geometría no nos enseña a dibujar esas líneas, sino las requiere para que sean trazadas.*

*Principia Mathematica. Isaac Newton.*

## Capítulo 6

### Casos de estudio

#### 6.1. Introducción

Para fines de estudio y presentación de soluciones de los modelos matemáticos deducidos en el capítulo 5, en este capítulo se expondrán los resultados de la simulación realizada a dos tipos de cohetes. Por un lado, se simula la trayectoria de un cohete a escala llamado *Tonatiuh* el cual utiliza un motor comercial de la marca ESTES modelo C6-3 obtenido de la referencia [40]. En segundo lugar se presentan los resultados de la simulación de la trayectoria de un cohete diseñado en la National Advisory Committee for Aeronautics (NACA) obtenido de la referencia [41], que utiliza un motor de la marca AEROTECH modelo K1050W-PLUG obtenido de la referencia [42].

En la primer sección de este capítulo serán presentadas las características físicas de los cohetes y motores bajo estudio. Posteriormente en secciones subsecuentes se presentarán los valores de las variables que se utilizan en las ecuaciones de movimiento, tales como, velocidad del viento, densidad del aire, aceleración de la gravedad y coeficientes aerodinámicos

Los tres modelos matemáticos estudiados en el capítulo 5 son ahora resueltos y es llevada a cabo la simulación de trayectorias, de la siguiente manera:

1. Para el modelo matemático que considera al cohete como una partícula con movimiento plano viajando en el vacío, se obtienen las trayectorias simuladas con los dos cohetes.
2. Para el modelo matemático con movimiento plano que considera la fuerza de arrastre aerodinámico, se obtienen las trayectorias simuladas de ambos cohetes también.
3. Finalmente para el modelo matemático que considera los seis grados de libertad del cohete, se obtiene sólo la trayectoria del cohete de la NACA.

En la penúltima sección de este capítulo se resumirán las suposiciones más importantes que se utilizaron para cada modelo con la finalidad de hacer una comparación.

Y finalmente este capítulo terminará haciendo la comparación de resultados de la simulación de trayectorias de cada cohete y los correspondientes comentarios al respecto.

## **6.2. Características físicas de cohetes y motores**

En esta sección se mostrarán los valores de las características de los motores y cohetes utilizados en secciones siguientes de este capítulo.

### **6.2.1. Características del cohete.**

#### **6.2.1.1. *Cohete Tonatiuh.***

El cohete *Tonatiuh*, se presenta en el dibujo del apéndice D y tiene las siguientes características de importancia,

Sección transversal:	0.00041 m <sup>2</sup>
Longitud total:	0.380 m
Diámetro:	0.0235 m
Masa:	0.045 kgs.

Los tres modelos matemáticos estudiados en el capítulo 5 son ahora resueltos y es llevada a cabo la simulación de trayectorias, de la siguiente manera:

1. Para el modelo matemático que considera al cohete como una partícula con movimiento plano viajando en el vacío, se obtienen las trayectorias simuladas con los dos cohetes.
2. Para el modelo matemático con movimiento plano que considera la fuerza de arrastre aerodinámico, se obtienen las trayectorias simuladas de ambos cohetes también.
3. Finalmente para el modelo matemático que considera los seis grados de libertad del cohete, se obtiene sólo la trayectoria del cohete de la NACA.

En la penúltima sección de este capítulo se resumirán las suposiciones más importantes que se utilizaron para cada modelo con la finalidad de hacer una comparación.

Y finalmente este capítulo terminará haciendo la comparación de resultados de la simulación de trayectorias de cada cohete y los correspondientes comentarios al respecto.

## **6.2. Características físicas de cohetes y motores**

En esta sección se mostrarán los valores de las características de los motores y cohetes utilizados en secciones siguientes de este capítulo.

### **6.2.1. Características del cohete.**

#### **6.2.1.1. Cohete *Tonatiuh*.**

El cohete *Tonatiuh*, se presenta en el dibujo del apéndice D y tiene las siguientes características de importancia,

Sección transversal:	0.00041 m <sup>2</sup>
Longitud total:	0.380 m
Diámetro:	0.0235 m
Masa:	0.045 kgs.

No. de aletas estabilizadoras: 4

### 6.2.1.2. *Cohete de la NACA.*

El cohete *NACA*, se presenta en el dibujo del apéndice E y tiene las siguientes características de importancia,

Sección transversal de aletas:	0.0484 m <sup>2</sup>
Longitud total:	0.973372 m
Diámetro:	0.081 m
Masa <sup>2</sup> :	7 kgs.
No. de aletas estabilizadoras:	4
Momento de inercia respecto al eje "x":	$0.01356 \frac{kg}{m^2}$
Momento de inercia respecto al eje "y":	$4.487061 \frac{kg}{m^2}$
Momento de inercia respecto al eje "z":	$4.487061 \frac{kg}{m^2}$
Distancia de parte posterior al centro de presión:	0.264 m
Distancia de parte posterior al centro de masa:	0.409 m
Envergadura (span):	0.200 m

### 6.2.2. Motor y fuerza de empuje.

Durante la presentación de los casos de estudio se utilizarán dos motores comerciales, por un lado el motor ESTES C6-3 para el cohete a escala *Tonatiuh* y el motor K1050W-PLUG de la marca AEROTECH para el cohete de la *NACA*.

---

<sup>2</sup> Este valor fue obtenido en forma promediada y aproximada, comparando valores de cohetes de su mismo tamaño de la referencia [49]. Ya que no fue proporcionado por el artículo de la *NACA* de donde se obtuvo.

### 6.2.2.1. Motor comercial de la marca ESTES modelo C6-3.

El motor C6-3 utilizado tiene las siguientes propiedades,

Masa del propelente:	12.6 grs.
Masa del cartucho:	12 grs.
Tiempo de combustión:	1.7 segs.
Empuje promedio:	5.8 N

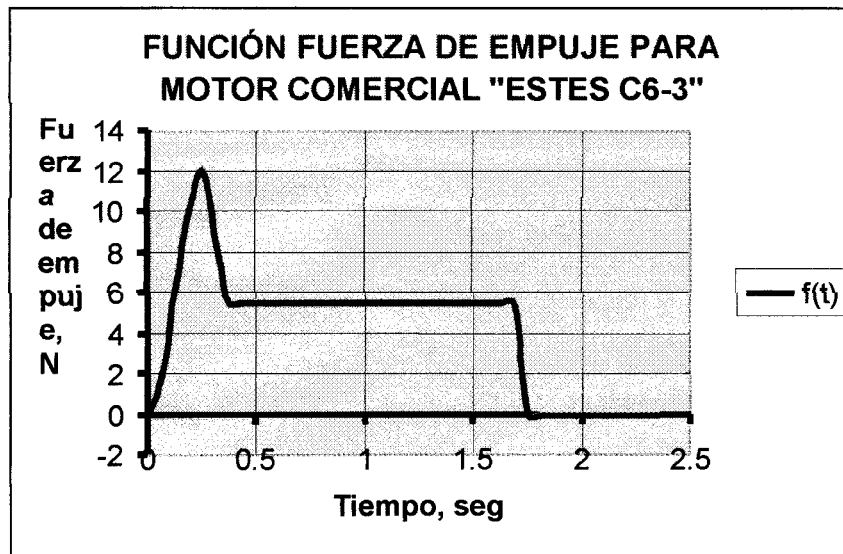


Figura 6.1. Curva de la fuerza de empuje del motor *ESTES C6-3*.

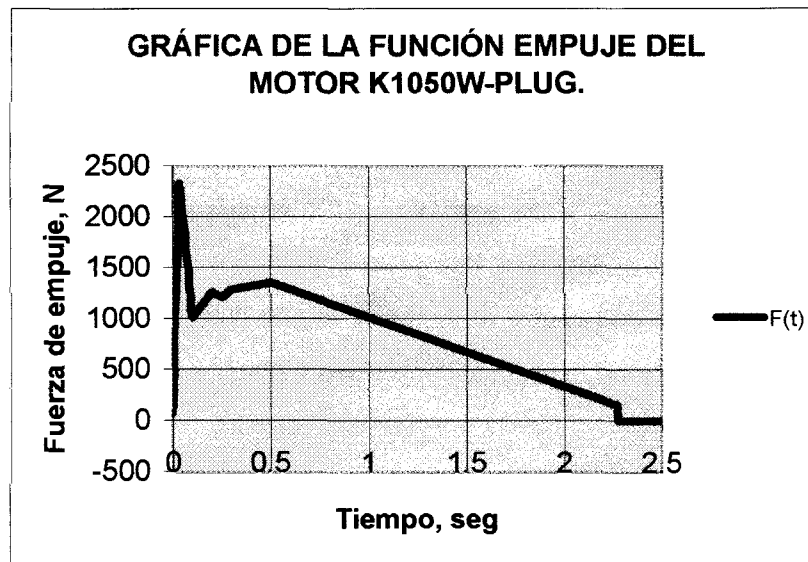
Las ecuaciones utilizadas para modelar la función de empuje de la figura 6.1, en el código del programa, fueron obtenidas mediante aproximaciones lineales en intervalos de tiempo. Los tamaños de estos intervalos dependieron de la forma de la función.

### 6.2.2.2. Motor comercial de la marca AEROTECH modelo K1050W-PLUG.

El motor K1050W-PLUG utilizado tiene las siguientes propiedades,

Masa del propelente:	1,368 grs.
----------------------	------------

Masa del cartucho:	792 grs.
Tiempo de combustión:	2.27292 segs.
Empuje promedio:	1113.25 N.



**Figura 6.2.** Curva de la fuerza de empuje del motor *AEROTECH K1050W-PLUG*.

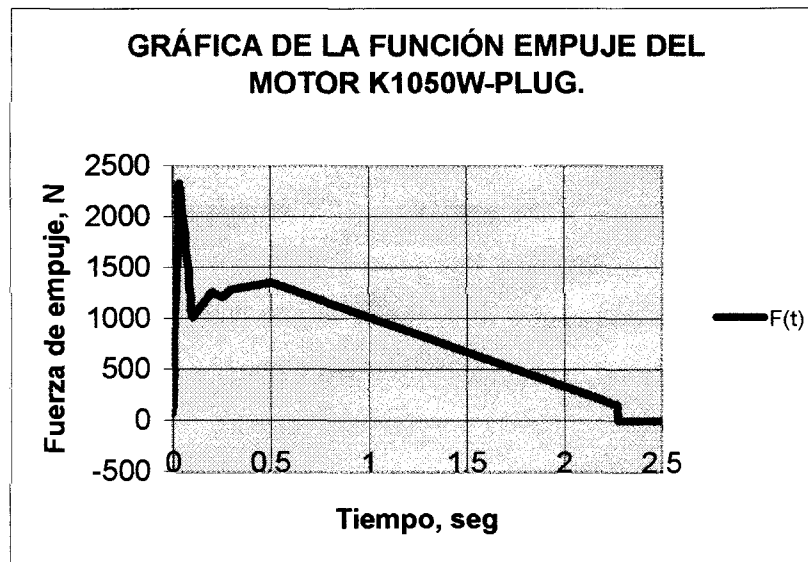
Las ecuaciones utilizadas para modelar la función de empuje de la figura 6.2, en el código del programa, fueron obtenidas mediante aproximaciones lineales en intervalos de tiempo. Los tamaños de estos intervalos dependieron de la forma de la función.

### 6.3. Velocidad del viento.

Para la simulación del caso de estudio considerando al cohete con seis grados de libertad, los valores de la velocidad del viento que se utilizarán son los mostrados en las figuras (3.8a) y (3.8b) del capítulo 3. De esas figuras se debe notar que hace referencia a vientos que viajan sólo en la dirección Oeste a Este y que esa dirección es positiva, esto implica que no se consideran vientos cortantes ni turbulencia. Las ecuaciones utilizadas para aproximar cada una de tales curvas fueron obtenidas mediante polinomios de sexto grado. En el código del programa se utilizaron tales ecuaciones.



Masa del cartucho:	792 grs.
Tiempo de combustión:	2.27292 segs.
Empuje promedio:	1113.25 N.



**Figura 6.2.** Curva de la fuerza de empuje del motor *AEROTECH K1050W-PLUG*.

Las ecuaciones utilizadas para modelar la función de empuje de la figura 6.2, en el código del programa, fueron obtenidas mediante aproximaciones lineales en intervalos de tiempo. Los tamaños de estos intervalos dependieron de la forma de la función.

### 6.3. Velocidad del viento.

Para la simulación del caso de estudio considerando al cohete con seis grados de libertad, los valores de la velocidad del viento que se utilizarán son los mostrados en las figuras (3.8a) y (3.8b) del capítulo 3. De esas figuras se debe notar que hace referencia a vientos que viajan sólo en la dirección Oeste a Este y que esa dirección es positiva, esto implica que no se consideran vientos cortantes ni turbulencia. Las ecuaciones utilizadas para aproximar cada una de tales curvas fueron obtenidas mediante polinomios de sexto grado. En el código del programa se utilizaron tales ecuaciones.

## 6.4. Densidad del aire.

La densidad del aire utilizada en los casos de estudio, se modeló con las ecuaciones exponenciales (3.94) y (3.95) del capítulo 3.

## 6.5. Aceleración de la gravedad.

Para la simulación de la trayectoria considerando el modelo matemático que sólo toma en cuenta una trayectoria plana y el coeficiente de arrastre aerodinámico, debido a que la fuerza de gravedad es inversamente proporcional a distancia al cuadrado entre el centro de masa del cohete y el centro de la tierra, la gravedad en diferentes alturas sobre la superficie terrestre puede ser expresada simplemente por [5], [43],

$$g = g_0 \left( \frac{r_E}{r_E + h} \right)^2 = 9.81 \left( \frac{r_E}{r_E + h} \right)^2 \quad (6.1)$$

En el análisis del cohete con seis grados de libertad, se utilizarán las ecuaciones (3.30), (3.96) y (3.97) presentadas en el capítulo 3.

## 6.6. Coeficientes aerodinámicos.

### 6.6.1. *Coeficientes aerodinámicos en el cohete Tonatiuh.*

Para la simulación en el caso de estudio del modelo matemático que considera el coeficiente de arrastre y movimiento plano, se presenta a continuación la metodología para su determinación.

La fuerza de arrastre que experimenta un cohete sonda durante su trayectoria no es posible calcularla hoy en día en forma analítica. Las ecuaciones que se han estado reportando en la actualidad aún están en etapa de desarrollo y son obtenidas a partir de la experimentación. Por otro lado, se pueden obtener valores aproximados del coeficiente de arrastre llevando a cabo simulaciones mediante algún programa computacional que utilice el método elemento finito o el método de volumen finito.

## 6.4. Densidad del aire.

La densidad del aire utilizada en los casos de estudio, se modeló con las ecuaciones exponenciales (3.94) y (3.95) del capítulo 3.

## 6.5. Aceleración de la gravedad.

Para la simulación de la trayectoria considerando el modelo matemático que sólo toma en cuenta una trayectoria plana y el coeficiente de arrastre aerodinámico, debido a que la fuerza de gravedad es inversamente proporcional a distancia al cuadrado entre el centro de masa del cohete y el centro de la tierra, la gravedad en diferentes alturas sobre la superficie terrestre puede ser expresada simplemente por [5], [43],

$$g = g_0 \left( \frac{r_E}{r_E + h} \right)^2 = 9.81 \left( \frac{r_E}{r_E + h} \right)^2 \quad (6.1)$$

En el análisis del cohete con seis grados de libertad, se utilizarán las ecuaciones (3.30), (3.96) y (3.97) presentadas en el capítulo 3.

## 6.6. Coeficientes aerodinámicos.

### 6.6.1. *Coeficientes aerodinámicos en el cohete Tonatiuh.*

Para la simulación en el caso de estudio del modelo matemático que considera el coeficiente de arrastre y movimiento plano, se presenta a continuación la metodología para su determinación.

La fuerza de arrastre que experimenta un cohete sonda durante su trayectoria no es posible calcularla hoy en día en forma analítica. Las ecuaciones que se han estado reportando en la actualidad aún están en etapa de desarrollo y son obtenidas a partir de la experimentación. Por otro lado, se pueden obtener valores aproximados del coeficiente de arrastre llevando a cabo simulaciones mediante algún programa computacional que utilice el método elemento finito o el método de volumen finito.

## 6.4. Densidad del aire.

La densidad del aire utilizada en los casos de estudio, se modeló con las ecuaciones exponenciales (3.94) y (3.95) del capítulo 3.

## 6.5. Aceleración de la gravedad.

Para la simulación de la trayectoria considerando el modelo matemático que sólo toma en cuenta una trayectoria plana y el coeficiente de arrastre aerodinámico, debido a que la fuerza de gravedad es inversamente proporcional a distancia al cuadrado entre el centro de masa del cohete y el centro de la tierra, la gravedad en diferentes alturas sobre la superficie terrestre puede ser expresada simplemente por [5], [43],

$$g = g_0 \left( \frac{r_E}{r_E + h} \right)^2 = 9.81 \left( \frac{r_E}{r_E + h} \right)^2 \quad (6.1)$$

En el análisis del cohete con seis grados de libertad, se utilizarán las ecuaciones (3.30), (3.96) y (3.97) presentadas en el capítulo 3.

## 6.6. Coeficientes aerodinámicos.

### 6.6.1. *Coeficientes aerodinámicos en el cohete Tonatiuh.*

Para la simulación en el caso de estudio del modelo matemático que considera el coeficiente de arrastre y movimiento plano, se presenta a continuación la metodología para su determinación.

La fuerza de arrastre que experimenta un cohete sonda durante su trayectoria no es posible calcularla hoy en día en forma analítica. Las ecuaciones que se han estado reportando en la actualidad aún están en etapa de desarrollo y son obtenidas a partir de la experimentación. Por otro lado, se pueden obtener valores aproximados del coeficiente de arrastre llevando a cabo simulaciones mediante algún programa computacional que utilice el método elemento finito o el método de volumen finito.

Como el alcance de este trabajo en el área aerodinámica se encuentra limitado por no tener aún tal programa para la simulación computacional, se optó por llevar a cabo pruebas en el túnel de viento del I.T.E.S.M. Campus Monterrey, el cual fue descrito en el capítulo 4.

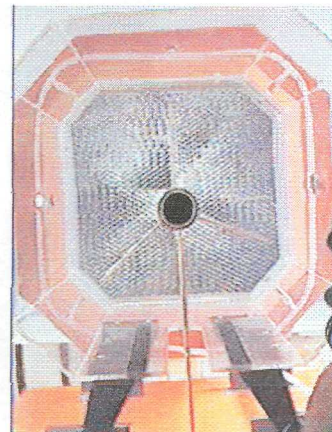
Las pruebas de laboratorio que se realizaron quedaron limitadas a obtener las fuerzas de arrastre generadas en un rango de velocidades de 0 a 26 m/s, el cual está por debajo del rango de velocidad que en realidad se presenta en un modelo de un cohete en pruebas reales (estos cohetes alcanzan velocidades de alrededor de 100 m/s, es decir, aproximadamente una tercera parte de la velocidad del sonido en condiciones atmosféricas estándar). Aún considerando esa limitante, se tomaron los valores obtenidos de la realización de experimentos que sirvieron como un aproximado del valor real del coeficiente de arrastre.

Los experimentos se realizaron con la siguiente metodología:

1. Calibración básica del túnel de viento y de la instrumentación.
2. Verificación de la velocidad del fluido (aire).
3. Colocación del modelo del cohete en el soporte del balanceador del túnel, como se muestra en las figuras 6.3a y 6.3b.



a)



b)

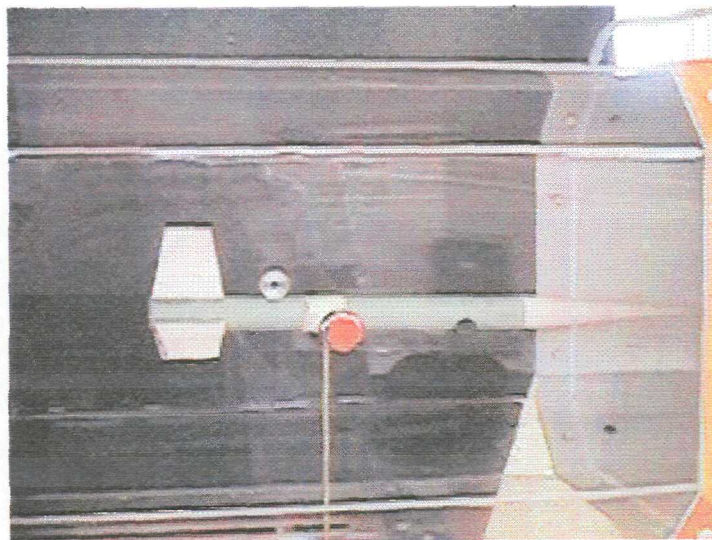
**Figura 6.3.** a). Vista lateral del cohete montado sobre el balanceador;  
b). Vista frontal del cohete durante el montaje.

4. Ajustar cuidadosamente el balanceador para que marque cero con el modelo del cohete montado, (ver figura 6.4).



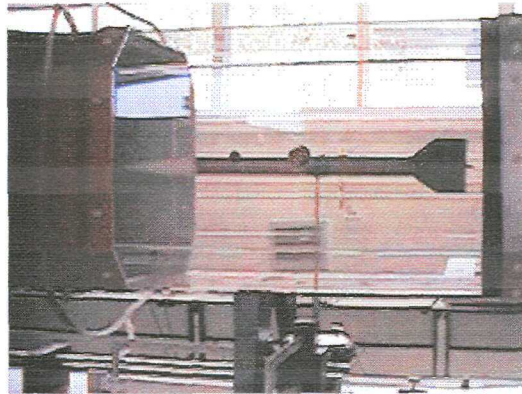
*Figura 6.4.* Ajuste del balanceador durante el montaje del cohete.

5. Encender el motor del túnel para que comience la circulación del aire y se fija cada valor de velocidad en que se determinará la fuerza de arrastre, la velocidad se mide directamente en m/seg en un manómetro que se encuentra colocado en el túnel de viento (ver figura 6.5).



*Figura 6.5.* Encendido del motor del túnel y fijación de valor de la velocidad del aire.

6. Se miden las fuerzas de arrastre que se producen en el modelo del cohete a escala, las lecturas tomadas corresponden a cada velocidad dada, ver figura 6.6.



**Figura 6.6.** Medición de la fuerza de arrastre.

7. Registrar los valores obtenidos del balanceador y elaborar tablas y gráficas para mostrar los resultados.

Los resultados que se obtuvieron utilizando una muestra de cuatro cohetes del mismo modelo, se presentan a continuación en la tabla 6.1.

**Tabla 6.1.** Valores de la fuerza de arrastre obtenidos en pruebas de laboratorio para una muestra de cuatro cohetes a escala.

Velocidad del aire, $v$ (m/s)	Fuerza de arrastre, $F_x = D$ (Newtons)				Promedio
	<i>Cohete 1</i>	<i>Cohete 2</i>	<i>Cohete 3</i>	<i>Cohete 4</i>	
10	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040
12	0.065	0.060	0.065	0.065	0.064
14	0.088	0.088	0.090	0.100	0.092
16	0.120	0.115	0.130	0.130	0.124
18	0.160	0.150	0.165	0.170	0.161
20	0.195	0.190	0.205	0.205	0.199
22	0.240	0.235	0.250	0.250	0.244
24	0.288	0.280	0.295	0.295	0.290

Para calcular el coeficiente de arrastre  $C_x$ , recordar de la ecuación (4.18) y (5.37) que  $D = Kv^2$ , y despejando,

$$C_x = \frac{2D}{S\rho v^2}$$

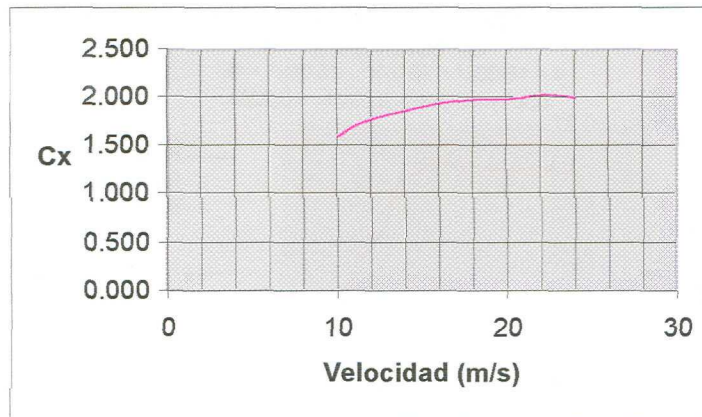
Los valores de  $F_x = D$  y  $v$  se sustituyen directamente de la tabla 6.1, y así se obtienen los valores del coeficiente de arrastre como función de la velocidad como se muestra en la tabla 6.2.

**Tabla 6.2.** Valores del coeficiente de arrastre como función de la velocidad.

<b>Velocidad del aire, <math>v</math> (m/s)</b>	<b>Coficiente de arrastre <math>C_x</math></b>
10	1.605
12	1.777
14	1.873
16	1.940
18	1.997
20	1.994
22	2.021
24	2.016

Los valores obtenidos en la tabla 6.2, se muestran en la gráfica de la figura 6.7.





*Figura 6.7.* Gráfica de  $C_x$  vs  $v$

Calculando el valor promedio del coeficiente de arrastre de la tabla 6.2, se tiene

$$C_x = 1.903$$

### **6.6.2. Coeficientes aerodinámicos en el cohete de la NACA.**

A continuación se presentan los coeficientes de arrastre aerodinámico obtenidos del reporte técnico NACA RM A52C04 [41]. Es importante mencionar que los valores utilizados corresponden a una velocidad y a un ángulo de balance dado, además de que se convirtieron como función del ángulo de ataque  $\alpha$  para comodidad de manejo.

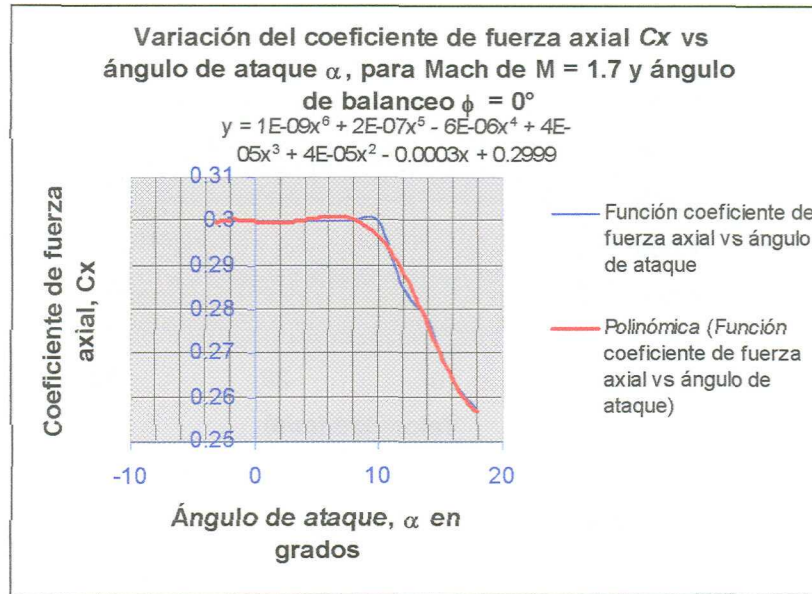
a). *Coefficiente de arrastre axial.*

Figura 6.8. Curva del coeficiente de arrastre axial.

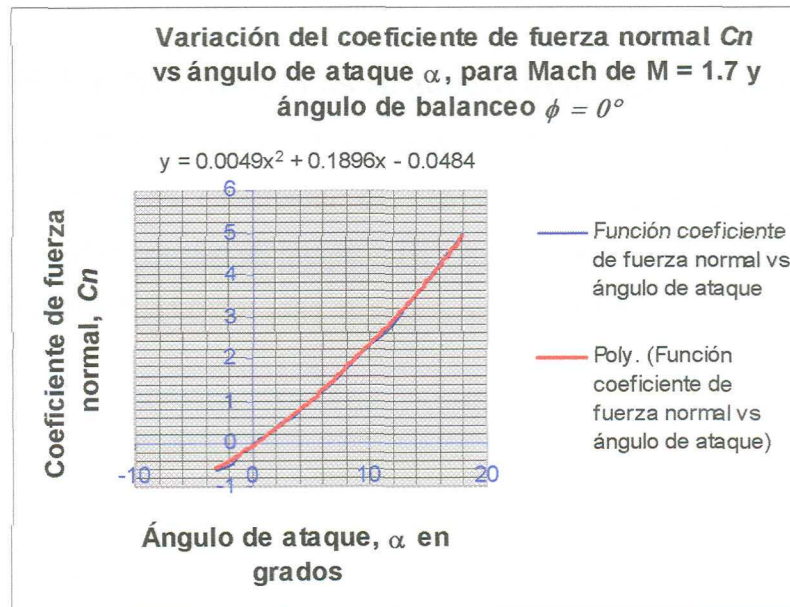
b). *Coefficiente de arrastre lateral o de fuerza normal.*

Figura 6.9. Curva del coeficiente de arrastre lateral.

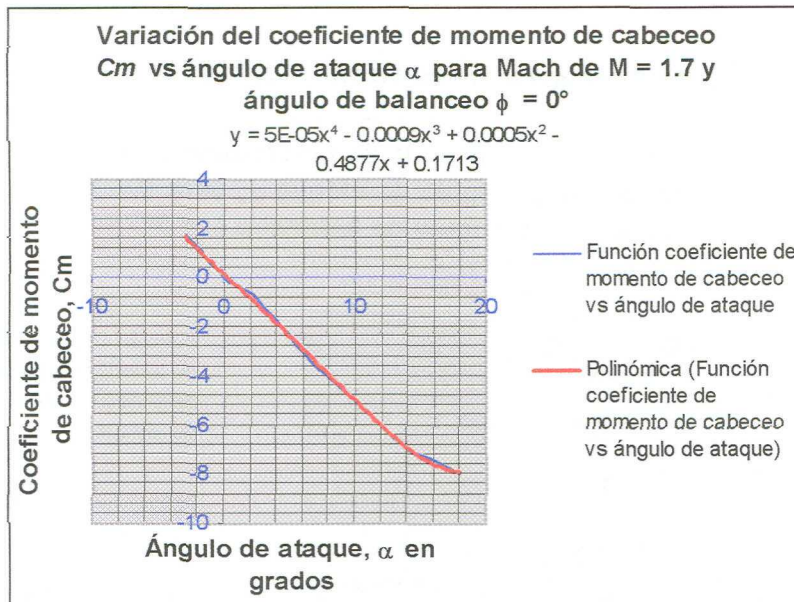
c). *Coefficiente de momento de cabeceo.*

Figura 6.10. Curva del coeficiente de momento de cabeceo.

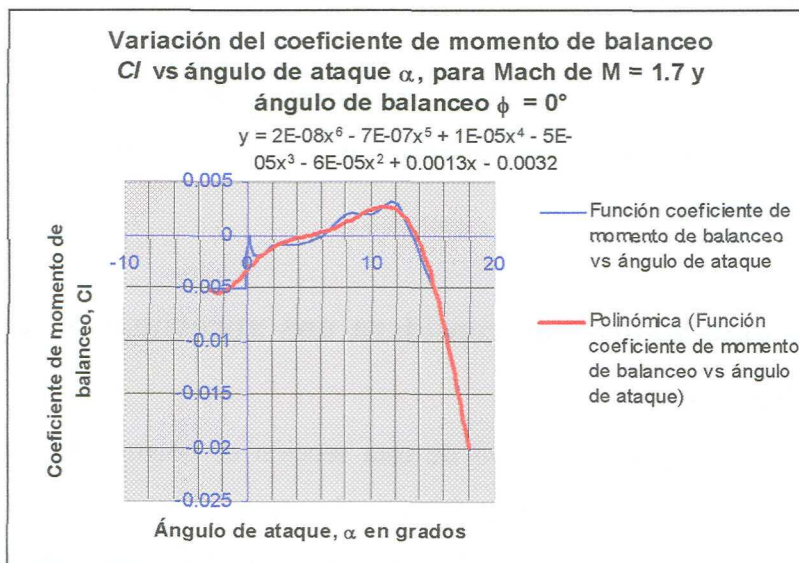
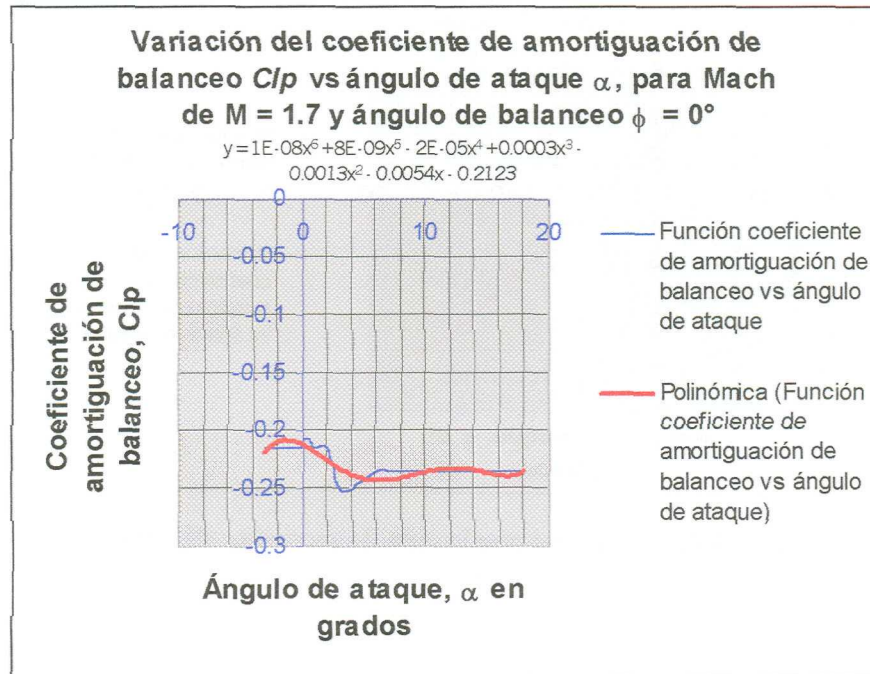
d). *Coefficiente de momento de balanceo.*

Figura 6.11. Curva del coeficiente de momento de balanceo.

e). *Coefficiente de amortiguación del momento de balanceo.*



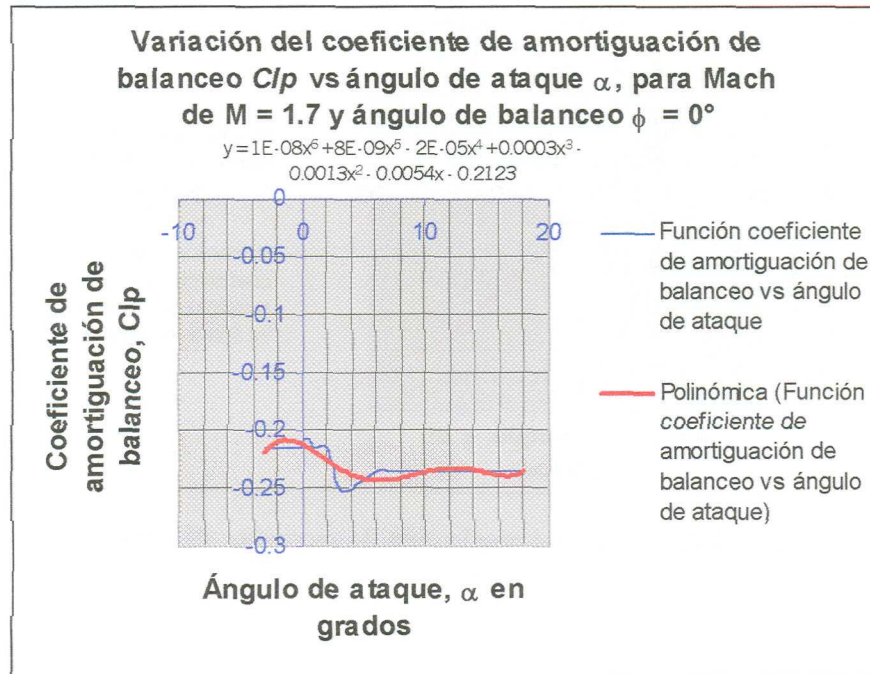
**Figura 6.12.** Curva del coeficiente de amortiguación de balanceo.

Como es de notarse, cada una de las curvas de las figuras (6.8)-(6.12) se han aproximado con una funciones polinómicas, las cuales fueron codificadas en el programa computacional.

### 6.7. Modelo matemático que considera una aproximación en el vacío y movimiento plano.

Debe aclararse que el objetivo de esta sección es obtener los resultados de la simulación del modelo matemático básico al vacío para que sean comparados posteriormente con los resultados de la simulación del modelo matemático que considera la fuerza de arrastre aerodinámico y el modelo matemático que considera los seis grados de libertad del cohete.

e). *Coefficiente de amortiguación del momento de balanceo.*



**Figura 6.12.** Curva del coeficiente de amortiguación de balanceo.

Como es de notarse, cada una de las curvas de las figuras (6.8)-(6.12) se han aproximado con una funciones polinómicas, las cuales fueron codificadas en el programa computacional.

### 6.7. Modelo matemático que considera una aproximación en el vacío y movimiento plano.

Debe aclararse que el objetivo de esta sección es obtener los resultados de la simulación del modelo matemático básico al vacío para que sean comparados posteriormente con los resultados de la simulación del modelo matemático que considera la fuerza de arrastre aerodinámico y el modelo matemático que considera los seis grados de libertad del cohete.

Utilizando las ecuaciones presentadas en la sección 5.4 del capítulo 5, se procedió a llevar a cabo el análisis del cohete sonda a escala *Tonatiuh*.

Los pasos que se siguieron para llevar a cabo el análisis fueron:

1. *Definición de los datos de entrada.*

$$g = 9.81 \frac{m}{seg^2}; \quad v_0 = 0; \quad y_0 = 0; \quad x_0 = 0; \quad y_b = 0; \quad t_0 = 0$$

2. *Definición de las variables a graficar.*

Utilizando la raíz real de la ecuación (5.31), se tiene,

$$t_b = \frac{F \operatorname{sen} \phi t_c}{mg} \left\{ 1 + \sqrt{1 - \left( \frac{mg}{F \operatorname{sen} \phi} \right)} \right\} \quad (6.1)$$

Además de acuerdo a la ecuación (5.32) se tiene que  $x_b$  está dada por:

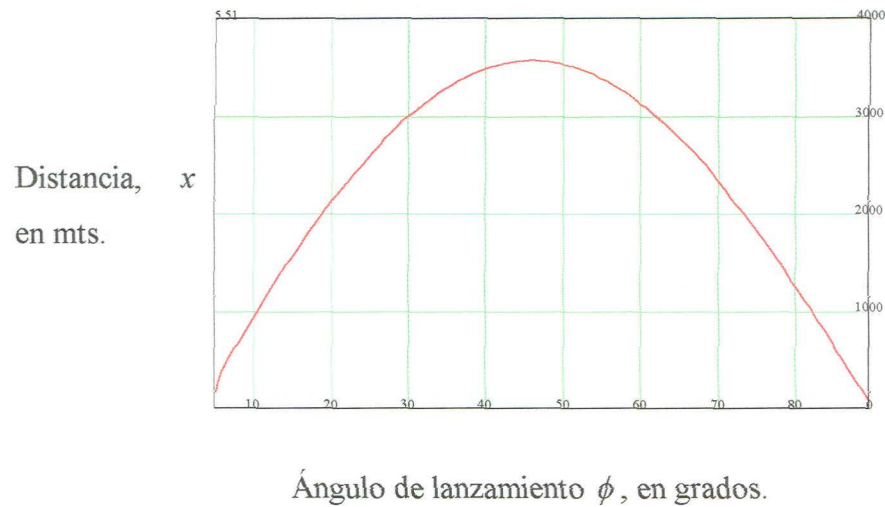
$$x_b = \frac{F \cos \phi}{2m} t_c (2t_b - t_c) \quad (5.32)$$

2. *Gráfica de  $x_b$  vs  $\phi$ .*

Hay que señalar que una condición indispensable para que el cohete pueda volar es la siguiente:

$$\phi \geq \operatorname{sen}^{-1} \left( \frac{mg}{F} \right)$$

En la figura 6.13, se muestra el alcance horizontal del cohete sonda para diferentes ángulos de lanzamiento. En el eje horizontal está el ángulo de lanzamiento en grados y en el eje vertical está la distancia horizontal alcanzada en metros.



**Figura 6.13.** Alcance horizontal del cohete con diferentes ángulos de lanzamiento para un blanco ubicado en  $y_b = 0$ .

Por otro lado, se presenta una gráfica donde se muestra la trayectoria correspondiente a un ángulo de lanzamiento dado. Como un ejemplo, se supone un ángulo de lanzamiento de  $30^\circ$  para el cohete analizado anteriormente. En la figura 6.14, se presenta la trayectoria que sigue el cohete sonda.

Los pasos a seguir para obtener una gráfica de  $y$  vs  $x$  son los siguientes:

1. *Introducción del valor del ángulo a utilizar.*

$$\phi = 30^\circ$$

2. *Definición de variables para graficar.*

Para el *eje horizontal* se tiene,

En  $t_0 \leq t \leq t_c$ , se utiliza la ecuación (5.17),

$$x(t) = \frac{F \cos \phi}{2m} t^2 + \dot{x}_0 t + x_0 \quad (5.17)$$

En  $t_c \leq t \leq t_b$ , se utiliza la ecuación (5.23),

$$x(t) = \frac{F \cos \phi}{2m} t_c (2t - t_c) + \dot{x}_0 t + x_0 \quad (5.23)$$

Para el *eje vertical* se tiene,

En  $t_0 \leq t \leq t_c$ , se utiliza la ecuación (5.20),

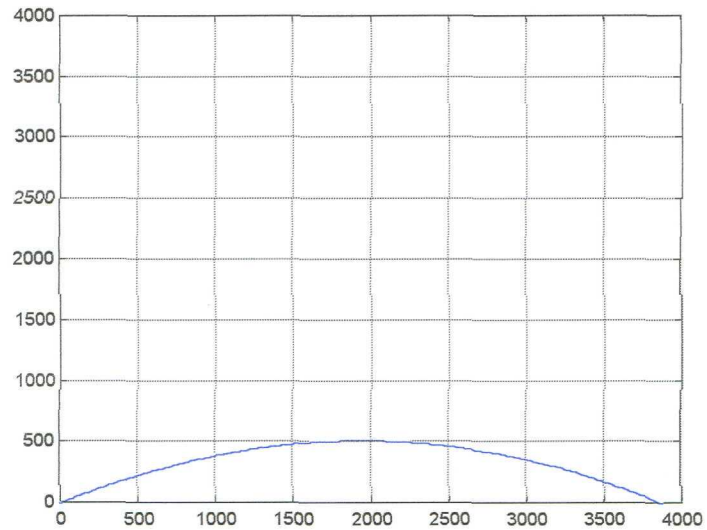
$$y(t) = \frac{F \sen \phi}{2m} t^2 - \frac{gt^2}{2} + \dot{y}_0 t + y_0 \quad (5.20)$$

En  $t_c \leq t \leq t_b$ , se utiliza la ecuación (5.26),

$$y(t) = -\frac{1}{2} gt^2 + \dot{y}_0 t + y_0 + \frac{F \sen \phi}{2m} t_c (2t - t_c) \quad (5.26)$$

2. *Gráfica de la trayectoria.*

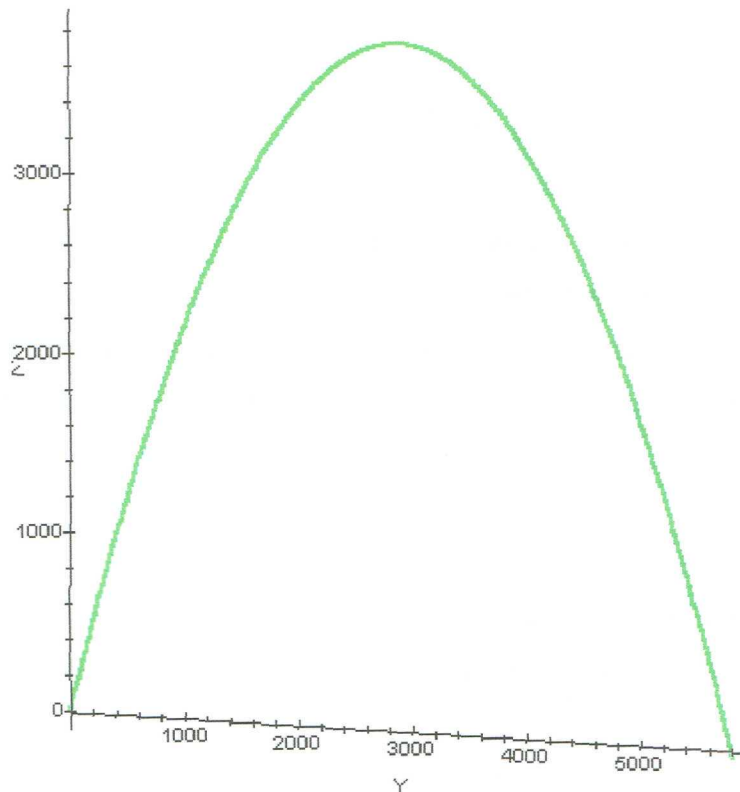




**Figura 6.14.** Simulación de la trayectoria del cohete sonda *Tonatiuh* con un ángulo de lanzamiento de  $30^\circ$ .

De la misma forma que el análisis anterior, sólo que ahora se procederá a llevar a cabo el análisis del cohete de la *NACA* lanzado con un ángulo de  $70^\circ$ , como se muestra en la figura 6.15.

## TRAYECTORIA AL VACIO



**Figura 6.15.** Simulación de la trayectoria del cohete de la *NACA* con un ángulo de lanzamiento de  $70^\circ$ .

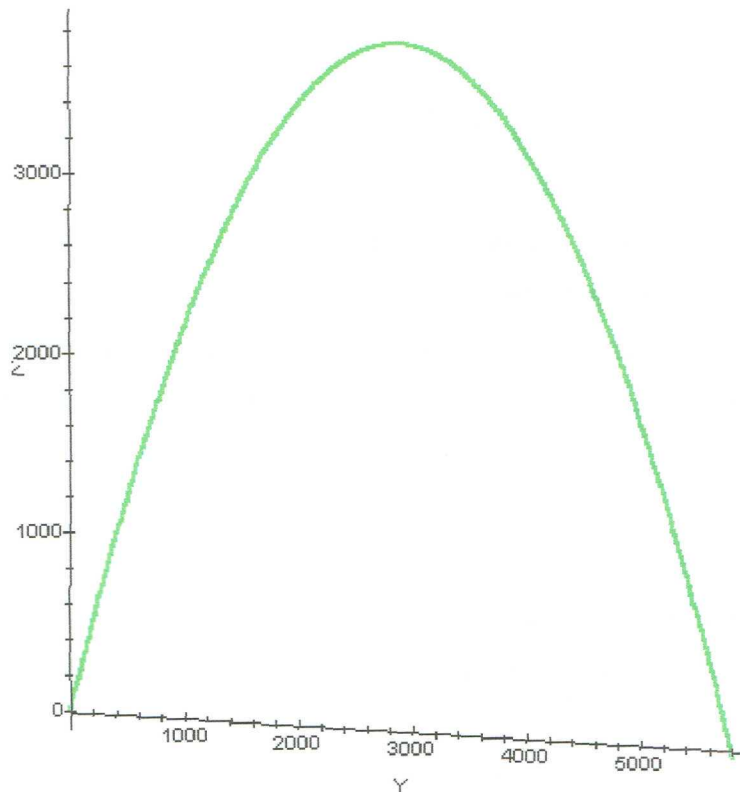
### 6.8. Modelo matemático que considera la fuerza de arrastre aerodinámica y movimiento plano.

Utilizando el programa que simula trayectorias considerando el efecto de la fuerza de arrastre aerodinámica, se procedió a llevar a cabo el análisis del cohete a escala *Tonatiuh* con un motor modelo C6-3 de la marca *ESTES*, con las características mencionadas anteriormente y considerando además,

- Longitud de la varilla de la plataforma de lanzamiento: 0.655 m.

Los pasos que se siguieron para llevar a cabo el análisis fueron los siguientes:

## TRAYECTORIA AL VACIO



**Figura 6.15.** Simulación de la trayectoria del cohete de la *NACA* con un ángulo de lanzamiento de  $70^\circ$ .

### 6.8. Modelo matemático que considera la fuerza de arrastre aerodinámica y movimiento plano.

Utilizando el programa que simula trayectorias considerando el efecto de la fuerza de arrastre aerodinámica, se procedió a llevar a cabo el análisis del cohete a escala *Tonatiuh* con un motor modelo C6-3 de la marca *ESTES*, con las características mencionadas anteriormente y considerando además,

- Longitud de la varilla de la plataforma de lanzamiento: 0.655 m.

Los pasos que se siguieron para llevar a cabo el análisis fueron los siguientes:

1. *Definición de los datos de entrada iniciales.*

$$x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = 0, \quad t_0 = 0$$

2. *Definición de las coordenadas del blanco* (deberá notarse que las coordenadas al blanco fueron seleccionadas para obtener un ángulo de  $30^\circ$  previsto con anticipación, esto con la finalidad de poder realizar la comparación del modelo matemático al vacío respecto al modelo matemático que considera el efecto del arrastre aerodinámico).

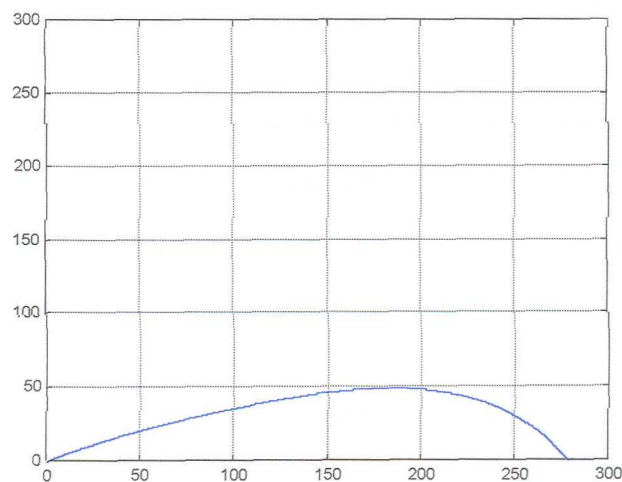
$$x_b = 278.0m, \quad y_b = 0.0$$

3. *Cálculo del valor del ángulo a utilizar.*

El programa calcula el ángulo requerido y como resultado se obtiene:

$$\phi = 30^\circ$$

4. *Gráfica de la simulación de la trayectoria.*

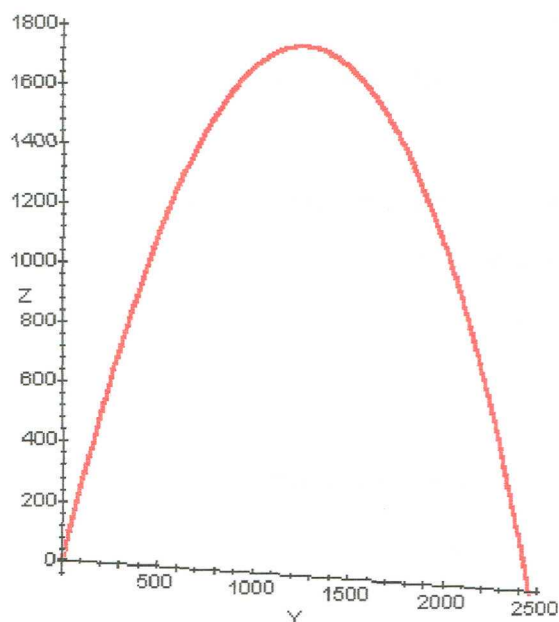


**Figura 6.16.** Simulación de la trayectoria del cohete *Tonatiuh* con un ángulo de lanzamiento de  $30^\circ$ .

De la misma forma que el análisis anterior, sólo que ahora se procedió a llevar a cabo el análisis del cohete de la *NACA* lanzado con un ángulo de  $70^\circ$ , como se muestra en la figura 6.17 y considerando,

- Longitud de la varilla de la plataforma de lanzamiento: 3.325 m.

### TRAYECTORIA CON FUERZA DE ARRASTRE



**Figura 6.17.** Simulación de la trayectoria del cohete de la *NACA* con un ángulo de lanzamiento de  $70^\circ$ .

### 6.9. Modelo matemático que considera seis grados de libertad del cohete.

Utilizando el programa que simula trayectorias de cohetes sonda con seis grados de libertad, se procedió a llevar a cabo el análisis del cohete de la *NACA* con un motor

Notar que el efecto de la velocidad del viento fue mayor que el efecto de la rotación de la tierra en el desvío del cohete, ya que los vientos son positivos hacia la dirección Este a la cual el cohete fue desviado.

## **6.10. Comparación y comentarios de resultados obtenidos con los diferentes modelos matemáticos.**

En esta sección del capítulo se resumirán en una tabla las consideraciones hechas para cada uno de los modelos matemáticos presentados en los casos de estudio anteriores y posteriormente se compararán los resultados para cada caso de estudio bajo análisis

### ***6.10.1. Resumen de consideraciones utilizadas en las simulaciones.***

Con la finalidad de comparar las suposiciones realizadas en los diferentes modelos matemáticos presentados en secciones anteriores de este capítulo, a continuación se definirán los términos que serán utilizados en la tabla 6.3.

***Modelo # 1.*** Trayectoria al vacío con movimiento plano, sección 5.4 del capítulo 5 (ver ecuaciones 5.13 y 5.14; y la tabla 5.2).

***Modelo # 2.*** Trayectoria con fuerza de arrastre y movimiento plano, sección 5.5 del capítulo 5 (ver ecuaciones 5.35 y 5.36).

***Modelo # 3.*** Trayectoria con seis grados de libertad, sección 5.6 del capítulo 5 (ver ecuaciones 5.3, 5.4, 5.5 y 5.6).

**Tabla 6.3.** Resumen de las variables utilizadas en los modelos matemáticos bajo análisis.

VARIABLES		VALOR				
		Modelo # 1		Modelo # 2		Modelo # 3
		1ra. Etapa	2da. Etapa	1ra. Fase	2da. Fase	Toda la trayectoria
Ángulo de trayectoria.	$\phi$	Cte.	$\phi(t)$	Cte.	$\phi(t)$	-----
	$\theta, \alpha$	-----	-----	-----	-----	$\theta(t)^{\otimes 2}, \alpha(t)^{\otimes 2}$
Masa, $m$		Cte.	Cte.	$m(t)$	$m(t)$	$m(t)$
Aceleración de la gravedad, $g$		Cte.	Cte.	$g(y)$	$g(y)$	$g(x, y, z)^{\otimes 1}$
Fuerza de empuje, $F$		Cte.	0	$F(t)$	$F(t)$	$T_x(t)^{\otimes 1}$
Densidad del aire, $\rho$		0	0	$\rho(y)$	$\rho(y)$	$\rho(h)^{\otimes 2}$
Velocidad del viento, $[W_x, W_y, W_z]^T$		0	0	0	0	$W_x(h, \mu)^{\otimes 2}$
Coeficiente de arrastre axial, $C_x$		0	0	$C_x(V)$	$C_x(V)$	$C_x(\alpha)^{\otimes 1}$
Coeficiente de arrastre normal, $C_n$		0	0	0	0	$C_n(\alpha)^{\otimes 1}$
Coeficiente del momento de cabeceo, $C_m$		0	0	0	0	$C_m(\alpha)^{\otimes 1}$
Coeficiente del momento de balance, $C_l$		0	0	0	0	$C_l(\alpha)^{\otimes 1}$
Coeficiente del momento de amortiguación de balance, $C_{lp}$		0	0	0	0	$C_{lp}(\alpha)^{\otimes 1}$
Sistemas de referencia cartesianos		1	1	1	1	3

Rotación de la tierra, $\omega_E^{\otimes 3}$	0	0	0	0	Cte.
Momento de inercia respecto al eje "x", $J_x^{\otimes 1}$	0	0	0	0	Cte.
Momento de inercia respecto al eje "y", $J_y^{\otimes 1}$	0	0	0	0	Cte.
Momento de inercia respecto al eje "z", $J_z^{\otimes 1}$	0	0	0	0	Cte.
Posición del lanzador sobre la superficie terrestre, $\mu$	Cte.	Cte.	Cte.	Cte.	$\mu(x, y, z, t)^{\otimes 3}$

⊗ 1: En coordenadas ABC

⊗ 2: En coordenadas NED

⊗ 3: En coordenadas ECI

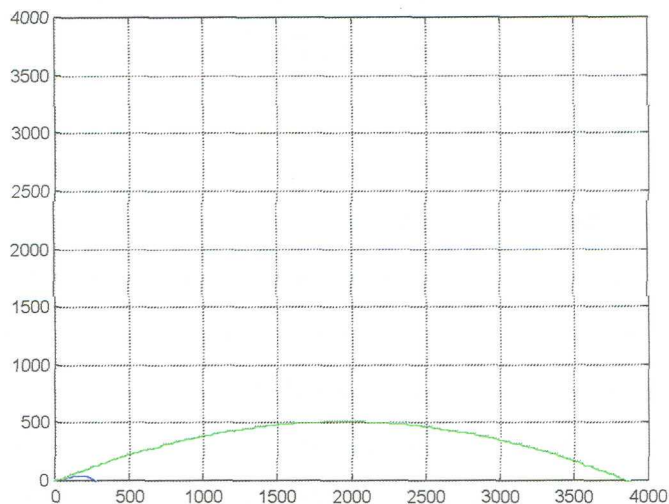
$h$  = Altura sobre el nivel del mar está dada en coordenadas NED.

*Nota para el modelo # 3:* Aunque las variables se pueden obtener en cualquier sistema de coordenadas de referencia se han utilizado las coordenadas marcadas a fin de comparación con los otros modelos.

### 6.10.2. Cohete Tonatiuh.

La comparación de la simulación efectuada al cohete *Tonatiuh*, para el caso del modelo matemático que considera la trayectoria en el vacío descrito en la sección 6.7 versus el caso del modelo matemático que considera la fuerza de arrastre aerodinámico descrito en la sección 6.8, se muestra en la figura 6.19,





**Figura 6.19.** Gráfica de la trayectoria en el vacío versus trayectoria con coeficiente de arrastre aerodinámico para el cohete *Tonatiuh*.

Como se puede apreciar en la figura 6.19 para este caso de estudio, el factor proporcional en la diferencia de las trayectorias es de aproximadamente 12.

En la tabla 6.4, se muestra el error estimado y el tiempo de simulación obtenidos utilizando una computadora PC marca Silicon Graphics, Pentium III, con una velocidad de procesamiento de 320 Mhz y 512 Mb de memoria RAM. Deberá notarse de la tabla 6.4, que para el cálculo del error se tomó como referencia el modelo matemático 2, y sólo se consideraron las coordenadas en la caída (no se consideró el error obtenido en los puntos que conforman la curva resultante de la trayectoria).

**Tabla 6.4.** Comparación del tiempo de simulación y del error, obtenidos en los dos modelos matemáticos utilizados en la simulación de la trayectoria del cohete *Tonatiuh*.

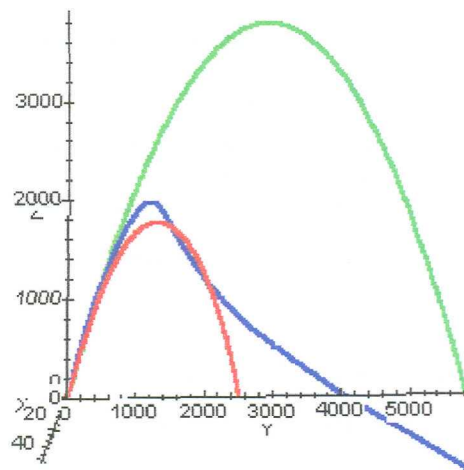
Modelo matemático*	Tiempo de simulación	Error (%)
1	≈ 1 seg.	1,248.92
2	≈ 1 seg.	0

**Nota:** Los números indicados corresponden a la notación utilizada en la sección 6.10.1.

### 6.10.3. Cohete de la NACA.

De forma semejante, la comparación de la simulación efectuada en el cohete de la NACA para el caso del modelo matemático que considera la trayectoria en el vacío descrito en la sección 6.7 versus el caso del modelo matemático que considera la fuerza de arrastre aerodinámico descrito en la sección 6.8 y versus el caso del modelo matemático que considera seis grados de libertad, se muestra en la figura 6.20,

#### TRAYECTORIA 3D



**Figura 6.20.** Gráfica de la trayectoria en el vacío versus trayectoria con coeficiente de arrastre aerodinámico versus trayectoria con seis grados de libertad, para el cohete de la NACA.

En la gráfica de la figura 6.20 se muestran las trayectorias de las simulaciones realizadas en los tres modelos matemáticos, resaltando la diferencia considerable entre el análisis al vacío respecto a los otros dos análisis. Por otro lado, en la comparación de la trayectoria que considera la fuerza de arrastre y la trayectoria que considera los seis grados de libertad del cohete se puede apreciar una similitud durante el ascenso hasta cerca del apogeo y la diferencia notable al descender, así también de la diferencia de aproximadamente 40 mts de desvío en el último modelo debido a la velocidad del viento.

En la tabla 6.5, se muestra el error estimado y el tiempo de simulación obtenidos utilizando una computadora PC marca Silicon Graphics, Pentium III, con una velocidad de procesamiento de 320 Mhz y 512 Mb de memoria RAM. Deberá notarse de la tabla 6.5, que para el cálculo del error se tomó como referencia el modelo matemático 3, y sólo se consideraron las coordenadas en la caída (no se consideró el error obtenido en los puntos que conforman la curva resultante de la trayectoria).

**Tabla 6.5.** Comparación del tiempo de simulación y del error, obtenido en los tres modelos matemáticos utilizados en la simulación de la trayectoria del cohete de la *NACA*.

<b>Modelo matemático *</b>	<b>Tiempo de simulación</b>	<b>Error (%)</b>
1	≈ 1 seg.	46.76
2	≈ 2 seg.	38.95
3	≈ 40 mins.	0

\* **Nota:** Los números indicados corresponden a la notación utilizada en la sección 6.10.1.

En la tabla 6.5, se hace evidente que el nivel del error disminuye a costa del aumento en el costo computacional (tiempo de simulación). Esta evidencia no fue posible notarla en la tabla 6.4, debido a que el alcance de la trayectoria fue muy corto. También se puede apreciar en la tabla 5.6, que el modelo matemático 2 presentó una mayor exactitud que el modelo matemático 1.

## 6.11. Conclusiones.

En este capítulo se han presentado los casos de estudio relacionados con los tres modelos matemáticos considerados en esta tesis.

Inicialmente en este capítulo se presentaron las características del cohete *Tonatiuh* y del cohete de la *NACA*, los cuales son los cohetes que se utilizaron en la simulación de sus trayectorias con condiciones iniciales dadas. Las características de los motores comerciales ESTES C6-3 y AEROTECH K1050W-PLUG utilizados en estos casos de estudio fueron también presentados con sus respectivas curvas de empuje. Posteriormente se mencionaron las ecuaciones y/o valores de las variables utilizadas en estos modelos matemáticos, tales variables fueron,

- ◆ La velocidad del viento, fue modelada a base de ecuaciones polinómicas que representan la variación del viento en función de la altura sobre el nivel del mar y de la latitud geográfica. Además se indicó que los vientos simulados viajan en dirección positiva de Oeste al Este y que no se considera turbulencia.
- ◆ La densidad del aire se indicó que es modelada de acuerdo a la ecuación exponencial presentada en el capítulo 3.
- ◆ La aceleración de gravedad utilizada para el modelo matemático que considera sólo la fuerza de arrastre aerodinámica es presentada en este capítulo como una versión simplificada de la ecuación presentada en el capítulo 3 y esta última es utilizada en la simulación de la trayectoria que considera seis grados de libertad del cohete.
- ◆ El coeficiente aerodinámico del cohete *Tonatiuh* utilizado para la simulación de la trayectoria con el modelo matemático que sólo toma en cuenta la fuerza de arrastre fue obtenido en forma experimental en el túnel de viento de esta institución, mientras que los coeficientes de las fuerzas y momentos aerodinámicos en el cohete de la *NACA* que es utilizado en la simulación de la trayectoria del cohete con seis grados de libertad fueron obtenidos en base al reporte de la referencia [41].

Basándose en los valores anteriores, posteriormente se desarrolló la metodología para obtener los resultados de la simulación de la trayectoria de los dos cohetes con los modelos matemáticos. Así, el cohete *Tonatiuh* fue utilizado en las simulaciones de las trayectorias con el modelo matemático que considera al cohete viajando en el vacío y con el modelo matemático que considera sólo la fuerza de arrastre. Por otra parte, el cohete de la *NACA* fue utilizado en las simulaciones de las trayectorias con los tres modelos matemáticos.

Antes de finalizar el capítulo se mostró una tabla que resume y compara las suposiciones hechas para cada uno de los tres modelos matemáticos que se estudiaron.

Finalmente se realizaron las comparaciones entre las trayectorias de las simulaciones resultantes, resaltando lo siguiente,

- ◆ Se obtuvieron diferencias muy notables en los resultados de la simulación con el cohete a escala *Tonatiuh*, obteniendo una diferencia en la trayectoria de aproximadamente un factor de 12 en la comparación del modelo matemático al vacío respecto al modelo matemático que solo considera la fuerza de arrastre. Esto muestra la importancia que tiene el efecto de la fuerza de arrastre en el modelo matemático. Y se mostró que el nivel de error obtenido es de 1,248.92 % entre los dos modelos matemáticos y con una diferencia inapreciable en el costo computacional.
- ◆ De la misma manera se compararon los resultados de las tres trayectorias representadas cada una por los modelos matemáticos analizados durante este capítulo con el cohete de la *NACA*, y se mostró que la trayectoria al vacío difería considerablemente respecto a las otras dos, además en las otras dos trayectorias, a saber, la que considera la fuerza de arrastre y la de seis grados de libertad, se notaron similitudes durante el ascenso, pero en esta última trayectoria se obtuvo una desviación en el eje "x" y en el descenso, debido principalmente a la velocidad del viento. Y se mostró que el nivel de error obtenido entre los tres modelos matemáticos fueron; de 46.76% y de 38.95% entre los modelos matemáticos 1 y 2 (de acuerdo a la notación indicada en la sección 6.10.1) respecto al modelo matemático 3 respectivamente. También se mostró que en estas simulaciones el costo computacional respecto al nivel de precisión juega un papel muy importante, ya que al disminuir el nivel de error se aumenta el costo computacional considerablemente.

Para corroborar los resultados de las simulaciones arrojados por los programas computacionales utilizados en los casos de estudio de este capítulo, es necesario compararlos con pruebas experimentales a fin de validarlos, es por ello, que en el siguiente capítulo se presentarán las pruebas de campo llevadas a cabo.

*Una teoría puede ser probada por medio de experimentos; pero no hay ningún camino que conduzca desde la experimentación hacia el nacimiento de una teoría.*

*The Sunday Times. Albert Einstein*

## Capítulo 7

### Diseño de un cohete sonda a escala y pruebas de campo.

#### 7.1. Introducción.

Para evaluar el comportamiento de los modelos matemáticos básicos presentados en la sección anterior, se ha planeado comparar los resultados con los que se obtengan en pruebas de campo con cohetes a escala.

Este capítulo está dividido en tres secciones importantes. En la primera sección se menciona la metodología llevada a cabo para el diseño de los cohetes *Tonatiuh* utilizados en las pruebas de campo.

Posteriormente se mostrará el plan de las pruebas y se tabularán los resultados obtenidos de los cohetes lanzados.

Finalmente los resultados de las pruebas de campo serán comparados con los resultados obtenidos en un diseño de experimentos efectuado a simulaciones de trayectorias hechas por el programa computacional.

## **7.2. Diseño de un cohete sonda a escala para la realización de pruebas de campo.**

Durante el diseño de los cohetes a escala se llevaron a cabo consideraciones que serán explicadas en las siguientes secciones.

### **7.2.1. Estabilidad estática y dinámica.**

Para el diseño del cohete a escala que se utilizó para llevar a cabo las pruebas de campo, se consideraron los trabajos de Barrowman y de Mandell mencionados en el capítulo 2 de esta tesis. El método de Barrowman se aplicó mediante la utilización de un programa computacional localizado en [44]. A su vez, también se aplicaron las recomendaciones dadas por Mandell.

En el apéndice D, se muestran los resultados del análisis llevado a cabo en el programa computacional mencionado, resaltando que:

$$\text{Relación } CP-CM \text{ (calibre)} = 2.11$$

$$\text{Relación longitud-diámetro} = 17.73$$

Lo anterior refleja que el cohete sonda a escala *Tonatiuh* cumple con las consideraciones para obtener *estabilidad estática y dinámica*.

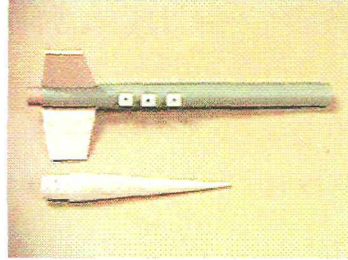
### **7.2.2. Bosquejo del cohete sonda a escala utilizado para validar el programa de simulación.**

El diseño del modelo a escala para las pruebas de campo cumple con las condiciones de estabilidad como se describió en la sección anterior. Por otro lado, la forma geométrica de las aletas se escogieron debido a la experiencia observada en el vuelo de un cohete a escala comercial modelo *SABRE* de la marca *ESTES*, ver características del modelo en [40], debido a su buen desempeño en pruebas pasadas. El diámetro del tubo del cohete estuvo dimensionado considerando el tamaño de los motores comerciales.

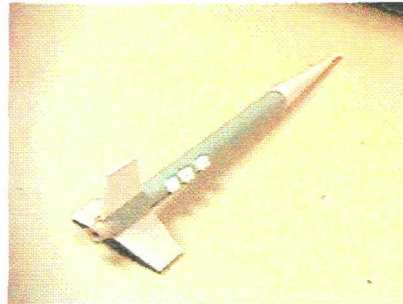


Así, utilizando estos criterios, el diseño del cohete a escala utilizado para las pruebas de campo tiene las dimensiones mostradas en el dibujo del apéndice D.

En las figuras 7.1 y 7.2, muestran físicamente al cohete utilizado en las pruebas.



*Figura 7.1.* Componentes del cohete sonda a escala *Tonatiuh*.



*Figura 7.2.* Cohete sonda a escala ensamblado.

### **7.3. Procedimiento utilizado en la realización de las pruebas de campo.**

Las pruebas realizadas y los resultados obtenidos se muestran en la tabla 7.1; se trataron de alcanzar dos objetivos, realizándose para cada objetivo cinco réplicas. Es importante mencionar que no se realizó un análisis para obtener algún tamaño de muestra estadísticamente representativo, sino más bien, la intención era obtener datos para una primera aproximación del problema.

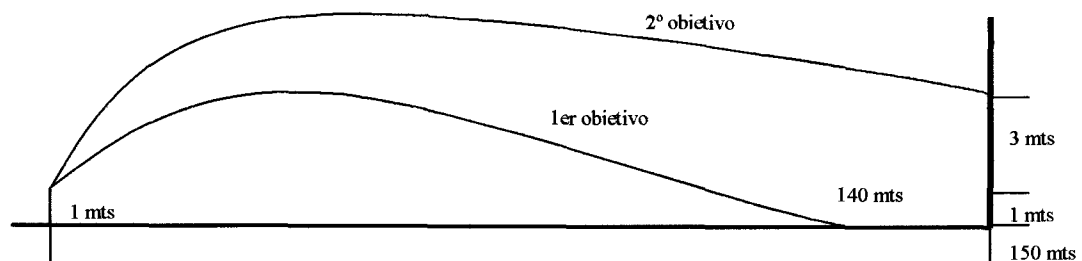
En el primer caso se intentó cubrir una distancia horizontal de 140 mts utilizando motores B4-4, mientras que en el segundo caso el blanco se colocó en un muro de contención que se encuentra a aproximadamente 150 mts del punto de disparo, utilizándose motores C6-3. La coordenada (0,0) se fijó en la plataforma de lanzamiento, la cual se encuentra a una altura de un metro del piso, por lo que el primer objetivo y se

encuentra a -1 mts (el suelo) y en el segundo objetivo a 3 mts, equivalente a una altura de 4 mts (ver figura 7.3).

En las primeras dos réplicas del primer objetivo (140 mts en  $x$  y -1 mts en  $y$ ) se tuvieron problemas durante el despegue ocasionados por fricciones con la guía de lanzamiento, que fueron corregidas para los siguientes experimentos. Durante los lanzamientos para el segundo objetivo las réplicas 2 y 3 no lograron sustentarse al salir de la plataforma y tuvieron un vuelo muy errático por lo que no se consideran puntos válidos para nuestro análisis del modelo matemático aunque sí determinan la posibilidad de éxito de estos experimentos.

**Tabla 7.1.** Experimentos realizados con dos objetivos y 5 réplicas.

<b>OBJETIVO</b>	<b><math>x = 140</math> mts <math>y</math> <math>y = -1</math> mts</b>	<b><math>x = 150</math> mts <math>y</math> <math>y = 3</math> mts</b>
<b>REPLICA</b>	<b>Distancia (mts)</b>	<b>Distancia (mts)</b>
<b>1</b>	$x = 58.67$ *	$x = 148$ y $y = 3$
<b>2</b>	$x = 68.67$ *	Caída a pique
<b>3</b>	$x = 88.60$	Caída a pique
<b>4</b>	$x = 114.0$	$x = 147$ y $y = 3$
<b>5</b>	$x = 127.0$	$x = 148.5$ y $y = 6$
* Tuvieron un mal despegue		



**Figura 7.3.** Esquema de los lanzamientos realizados.

#### 7.4. Diseño de experimentos.

Para poder evaluar el ajuste del modelo matemático que considera sólo la fuerza de arrastre y que simula movimiento plano, se hizo un análisis de sensibilidad utilizando un diseño factorial  $2^3$  (es decir, 3 variables con 2 niveles cada uno, para referencia ver [45]) del modelo matemático con respecto a parámetros que presentan un efecto en la desviación de la trayectoria.

Este análisis se llevó a cabo utilizando el programa computacional que considera sólo la fuerza de arrastre aerodinámica, esto, debido a que el cohete de pruebas es el cohete a escala *Tonatiuh* del cual sólo se tienen datos de coeficiente de arrastre axial.

Para comenzar a resolver el problema, se definirán las tres variables que se consideraron de mayor importancia involucradas en este análisis.

##### 1. Fuerza de empuje $F$ (en Newtons).

El primer parámetro considerado fue el *empuje de los motores*, cuya especificación de fábrica tiene una variación de  $\pm 10\%$  de acuerdo al proveedor.

##### 2. Coeficiente de arrastre $C_x$ (adimensional).

El segundo parámetro de importancia es el *coeficiente de arrastre* que, como se mencionó anteriormente, fue obtenido experimentalmente. A este parámetro se le asignó una variación de  $\pm 20\%$  observada en las mediciones experimentales en el túnel de viento.

##### 3. Ángulo de lanzamiento $\phi$ (en grados).

Por último, se consideró una variación de  $+ 2\%$ ,  $-0\%$  en el *ángulo de lanzamiento* debido a la flexibilidad y juego de componentes en la plataforma de lanzamiento.

Los valores que el modelo matemático predice para los dos objetivos, se muestran en los diseños matriciales de las tablas 7.2 y 7.3.

**Tabla 7.2.** Diseño experimental de 8 corridas con motores B4-4 para cumplir el objetivo de 140 mts en  $x$  y -1 mts en  $y$ .

PRUEBA	VARIABLES			DISTANCIA, "x" (mts)
	$F$	$C_x$	$\phi$	
1	-	-	-	130.35
2	+	-	-	173.00
3	-	+	-	112.16
4	+	+	-	143.91
5	-	-	+	132.73
6	+	-	+	175.35
7	-	+	+	113.75
8	+	+	+	145.62

**Tabla 7.3.** Diseño experimental de 8 corridas con motores C6-3 para cumplir el objetivo de 150 mts en  $x$  y 3 mts en  $y$ .

PRUEBA	VARIABLES			DISTANCIA, "x" (mts)
	$F$	$C_x$	$\phi$	
1	-	-	-	121.32
2	+	-	-	204.74
3	-	+	-	102.23
4	+	+	-	169.37
5	-	-	+	130.83
6	+	-	+	211.77
7	-	+	+	106.59
8	+	+	+	172.29

En la tabla 7.4, se muestran los rangos de valores que las variables tienen durante las pruebas y que fueron utilizados en las tablas 7.2 y 7.3.

**Tabla 7.4.** Variables que intervienen durante la simulación de lanzamientos del cohete *Tonatiuh*.

VARIABLE (Unidad de medida)	NOMENCLATURA		-	+
	1. Fuerza de empuje (N)	$F$	<i>Motor B4-4</i>	3.375
<i>Motor C6-3</i>			5.22	6.38
2. Coeficiente de arrastre (adimensional)	$C_x$		1.5224	2.284
3. Ángulo de lanzamiento (grados)	$\phi$	<i>Motor B4-4</i>	18.702	19.076
		<i>Motor C6-3</i>	14.206	14.545

Para calcular los efectos principales se utilizan las siguientes ecuaciones [45],

$$F = \frac{x_2 + x_4 + x_6 + x_8}{4} - \frac{x_1 + x_3 + x_5 + x_7}{4} \quad (7.1)$$

$$C_x = \frac{x_3 + x_4 + x_7 + x_8}{4} - \frac{x_1 + x_2 + x_5 + x_6}{4} \quad (7.2)$$

$$\phi = \frac{x_5 + x_6 + x_7 + x_8}{4} - \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \quad (7.3)$$

Sustituyendo los valores de la tabla 7.2 y 7.3 en las ecuaciones (7.1), (7.2) y (7.3) para el cálculo de los efectos principales causados utilizando los motores B4-4 y C6-3 se obtienen los valores mostrados en la tabla 7.5.

**Tabla 7.5.** Efectos de las variables en la distancia recorrida del cohete (mts)

ANÁLISIS	EFECTOS DE LAS VARIABLES		
	$F$	$C_x$	$\phi$
<i>Con motor B4-4</i>	37.22	-23.97	2.00
<i>Con motor C6-3</i>	74.30	-29.54	5.95

En resumen, los resultados obtenidos en la tabla 7.5 se interpretan como,

1. Cuando el valor de la **fuerza de empuje** del motor B4-4 aumenta de 3.375 a 4.565 N, la distancia que recorre el cohete aumenta en 37.22 mts. De la misma manera cuando el valor de la fuerza de empuje del motor C6-3 aumenta de 5.22 a 6.38 N, la distancia que recorre el cohete aumenta en 74.30 mts, lo cual es una variable muy significativa a considerar.
2. El incremento en el **coeficiente de arrastre** de 1.5224 a 2.284 resulta como una disminución de la distancia recorrida por el cohete en 23.97 mts para el caso de análisis con el motor B4-4 y de 29.54 para el caso de análisis con el motor C6-3.
3. El movimiento del **ángulo de lanzamiento** inicial de la plataforma de lanzamiento desde  $18.702^\circ$  hasta  $19.076^\circ$  para el análisis con el motor B4-4 aumenta la distancia recorrida por el cohete en 2.00 mts y para el caso de análisis con el motor C6-3 donde el ángulo de lanzamiento inicial tiene una variación desde  $14.260^\circ$  hasta  $14.545^\circ$ , la distancia recorrida por el cohete es de 5.95 mts.

Como se puede observar de la tabla 7.5 y del resumen anterior, para cualquiera de los dos análisis, el parámetro más importante para definir un rango de error en el tiro es el **empuje de los motores**, seguido del **coeficiente de arrastre** estimado, mientras que la posible variación en el **ángulo de salida** casi no tiene efecto mientras se mantenga en el rango estipulado.

Por otro lado, volviendo al análisis de la tabla 7.2, el radio promedio de error en x es de aproximadamente 30 mts. De las 3 réplicas exitosas que se realizaron en las pruebas de campo con este objetivo, dos se encuentran dentro de este radio. Con estos resultados preliminares, se podría decir que utilizando motores B4-4, el lanzamiento hacia un punto

a una distancia  $x$  caerán dentro de un círculo definido un radio de  $x = 30$  mts con un éxito del 66%.

De la misma forma en la tabla 7.3 se obtiene un radio promedio de error aproximadamente  $x=50$  mts, lo cual significa que todas las pruebas realizadas se encuentren en dicho radio. Estos valores, sin embargo, seguramente cambiarán cuando se tenga suficiente información de campo.

La probabilidad de caer en el radio de error puede variar debido a factores que no se consideraron en este modelo matemático como es el viento, la lluvia, la precisión en la manufactura del cohete, la precisión de la guía de lanzamiento, humedad en los motores, desviaciones en ángulos laterales de la plataforma y quizás el factor más importante que es la desviación del vector de empuje del motor respecto al centro de masa y al eje axial del cohete (como se comentó en el capítulo 3) que no se han considerado en el modelo bidimensional utilizado.

### **7.5. Conclusiones.**

Con el fin de obtener información de campo para ajustar el modelo matemático (que considera sólo la fuerza de arrastre y un movimiento plano) de seguimiento de la trayectoria de los cohetes sonda, se diseñaron y fabricaron un conjunto de cohetes a escala *Tonatiuh*, los cuales se utilizaron en pruebas de campo, usando motores comerciales de la marca ESTES de diferentes capacidades (B4-4 y C6-3).

Se obtuvo mediante un diseño de experimentos que el factor más importante en la dispersión de las trayectorias es la variación en el empuje de los motores que no podrá ser eliminada mientras se utilicen motores comerciales. Estas variaciones se deben a que la masa del combustible en los motores no es siempre la misma y las toberas no tienen las mismas dimensiones.

Se ha podido comprobar a través de pruebas experimentales que, como una primera aproximación, el modelo matemático que considera solo la fuerza de arrastre aerodinámica proporciona resultados satisfactorios y podría servir como herramienta base

para evaluar diferentes opciones de diseño. Esto requerirá de un ajuste más fino del modelo que exige un mayor número de pruebas experimentales. La exactitud en la simulación de vuelo de cohetes sonda, sin embargo, estará sujeta a las limitaciones que se han impuesto al modelo matemático y a las variaciones inherentes del sistema experimental.

Se propone evaluar también el modelo matemático que considera los seis grados de libertad del cohete, para estas pruebas se requerirá instrumentación y equipo más sofisticado.



# Capítulo 8

## Conclusiones y trabajo a futuro

### 8.1. Conclusiones generales

La utilización principal de los cohetes meteorológicos tiene fines científicos y educativos. Aunque su desarrollo comenzó en la década de los 50's, se siguen utilizando ampliamente debido a que su aplicación es redituable económica y científicamente. Actualmente, los modelos matemáticos completos, programas computacionales y los resultados de pruebas de campo de estos cohetes, realizados por otras Naciones, no son de dominio público y he ahí la necesidad de investigar en estos temas. La importancia en el análisis y la simulación de trayectorias de cohetes meteorológicos radica en que juegan un papel de consideración durante las etapas de diseño e implementación de tales naves aéreas.

Este trabajo de tesis presentó los resultados obtenidos de las simulaciones de trayectorias de cohetes meteorológicos, los cuales se muestran a detalle en el capítulo 6. Las simulaciones se fundamentaron con la utilización de tres modelos matemáticos

mostrados en el capítulo 5, el cual fue complementado con los capítulos 3 y 4, además del desarrollo de programas computacionales mostrados en el mismo capítulo 5. El modelo matemático más general partió del hecho de que se consideró al cohete meteorológico principalmente como un cuerpo rígido con seis grados de libertad con movimiento tridimensional, teniendo aletas de estabilización no móviles, viajando dentro de la atmósfera terrestre y considerando a la tierra como un elipsoide. Los otros dos modelos matemáticos presentados se obtuvieron con simplificaciones del modelo matemático general.

El modelo matemático más simple de los tres, el cual considera al cohete meteorológico como una partícula con movimiento plano viajando en el vacío se resolvió analíticamente, mientras que el modelo matemático general se resolvió utilizando métodos numéricos, específicamente el método de Runge-Kutta Felbergh y se desarrolló un programa computacional. Finalmente el modelo matemático restante también se resolvió mediante técnicas numéricas, en específico se utilizaron los métodos de Diferencias Centradas y el de Newton Raphson y también se desarrolló un programa computacional, tal y como se presenta en el capítulo 5.

Las contribuciones de esta tesis se deben a cinco aspectos principales: *en primer lugar*, los resultados preliminares obtenidos en las simulaciones muestran que el modelo matemático que considera al cohete como una partícula con dos grados de libertad en movimiento plano y con una fuerza de arrastre aerodinámica, ha presentado resultados satisfactorios comparándolo con los resultados obtenidos mediante pruebas de campo presentadas en el capítulo 7. En *segundo lugar*, otra contribución, se debe a las ideas de estrategia de solución utilizadas en cada uno de los tres modelos matemáticos analizados, ya que como se vio en los capítulos 5 y 6, el usuario sólo requiere dar las coordenadas de llegada al blanco del cohete meteorológico para que la simulación se lleve a cabo y como resultado se obtenga el ángulo al que deberá ser lanzado. Estas ideas de estrategia de solución no se reportaron en la literatura consultada. En *tercer lugar*, se provee de documentación en este tema el cual no se había reunido anteriormente en esta institución. En *cuarto lugar*, queda de manifiesto la posibilidad de simular trayectorias obtenidas con los tres modelos matemáticos y será el usuario quien podrá decidir qué modelo matemático utilizar dependiendo de que grado de exactitud requiere la predicción de la

trayectoria versus costo computacional (para referencia ver tablas 6.4 y 6.5 del capítulo 6). En *quinto lugar*, en el capítulo 7, se ha probado mediante un diseño de experimentos, que el factor más importante en la dispersión de las trayectorias de los cohetes se debe principalmente a la variación en el empuje de los motores, lo cual coincide con las conclusiones obtenidas en la experimentación realizada en los años 40's por otros autores, tal como se describió en la sección 3.6.3 del capítulo 3. Esto último, trae como resultado una mayor atención en el control de la manufactura de los motores para disminuir las dispersiones en las trayectorias.

Además, los programas computacionales aquí presentados pueden ser utilizados para una gran variedad de motores y de cohetes de tamaño a escala como también de tamaño real, además de obtener trayectorias haciendo uso de diferentes combinaciones de motores y cohetes, lo que implica una alta flexibilidad en la simulación, para esto sólo bastará cargar en la base de datos de los programas computacionales las características de cada cohete y motor a simular.

## **8.2. Trabajo a futuro**

La propuesta de trabajo a futuro a corto plazo es enfocarse en el modelo matemático que simula la trayectoria con seis grados de libertad. En primer lugar se debe disminuir el tiempo de cómputo mediante la optimización del algoritmo utilizado en el programa computacional o mediante la implementación de otro método numérico, y en segundo lugar, continuar ya sea investigando reportes científicos donde vengan trayectorias de cohetes y éstos estén mostrados con todas sus características (lo cual es muy difícil por la confidencialidad que guardan los países en estos temas, en especial en los Estados Unidos algunos artículos científicos han sido manejados como *controlados*), u obtener estas trayectorias mediante pruebas experimentales (lo cual es la mejor opción), esto con la finalidad de refinar el modelo matemático, lo último implica diseñar cohetes de mayor tamaño que el modelo a escala *Tonatiuh* presentado en esta tesis y tener la instrumentación adecuada para medir el desempeño del cohete durante toda su trayectoria. Además, se deben obtener datos de los coeficientes de fuerzas y de momentos aerodinámicos mediante la utilización de algún programa comercial que maneje CFD (Computational Fluid Dynamics), por ejemplo el STAR-CD el cual se encuentra en esta

institución, ya que en México no se tienen túneles de viento acondicionados para llevar a cabo estas pruebas.

A largo plazo, mientras se realizan los ajustes del modelo matemático, se puede comenzar a trabajar con otra versión de este modelo incorporándole las ecuaciones que representan los sistemas de control (vector de empuje móvil, superficies de control móviles, etc), además de los modos flexibles del fuselaje, con la finalidad de obtener valores lo más cercano a la realidad posible y el control de la trayectoria.

Trabajos más avanzados, incluirían el análisis del cohete en cada iteración del modelo matemático en la etapa de vuelo donde se realicen para cada uno de estos intervalos el análisis de fuerzas y momentos aerodinámicos mediante un programa comercial de CFD y un análisis de esfuerzos y deformaciones estructurales causados por tales fuerzas en un programa comercial de FEM (Finite Element Method), con este último se consideraría al cohete en una mejor forma aproximada como un cuerpo flexible y finalmente reunir los resultados de esas simulaciones mediante una interfase a un programa principal que tenga el modelo matemático para el cálculo de la trayectoria y del desempeño de las superficies de control, para finalmente presentar estos resultados con la finalidad de optimizar trayectorias y diseños de cohetes.

## Referencias

- [1] ***Sounding Rockets***  
<http://www.pfrr.alaska.edu/~ddr/ASGP/STRSCOOP/ROCKETS/RKT-0.HTM>
  
- [2] Ledesma, Manuel; Baleriola, Gabriel. *Meteorología aplicada a la aviación*. 8va ed., Paraninfo. Madrid España, 1997.
  
- [3] ***Meteorological Rockets***  
<http://earthlab.meteor.wisc.edu/hopkins/rockets/metrock1.htm>
  
- [4] ***Michigan & Wisconsin Rockets for Schools: Announcement***  
<http://earthlab.meteor.wisc.edu/~rockets/wrfs97in.htm>
  
- [5] Rangel Abraham, Arnulfo. *Tesis: Principios teóricos y diseño elemental de un cohete impulsado por combustible sólido*. ITESM, 1963.
  
- [6] ***General description of Sounding Rockets***  
<http://www.pha.jhu.edu/groups/rocket/general.html>
  
- [7] ***NASA Sounding Rocket Program Overview***  
<http://lepjas.gsfc.nasa.gov/rocket/intro.html>
  
- [8] ***NASA Sounding Rocket Program***  
<http://lepjas.gsfc.nasa.gov/rocket/RocketProgram.html>
  
- [9] ***NASA Wallops Flight Facility, Sounding Rockets Program***  
<http://www.wff.nasa.gov/~web/sndroc.html>

- [10] ***Sounding Rockets Program***  
<http://www.wff.nasa.gov/pages/soundingrockets.html>
- [11] Stine, Harry. ***Handbook of model Rocketry***. Prentice Hall Press. New York, 1987.
- [12] Stevens L. Briant; Lewis L. Frank. ***Aircraft Control and Simulation***. John Wiley & Sons, Inc, 1992.
- [13] Nikravesh E, Parviz. ***Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems***. Prentice Hall, Inc. New Jersey, 1988.
- [14] Duncan D., Louis; Engebos F., Bernard. ***A six degree of freedom digital computer program for trajectory simulation***. ECOM-5158. Atmospheric Sciences Laboratory, White Sands Missile Range, New Mexico, 1967.
- [15] Wells A., Dare. ***Lagrangian Dynamics***. Mc-Graw Hill, Inc. New York, 1967.
- [16] Duncan D., Louis; Ensey J., Ronald; ***Six degree of freedom digital simulation model for unguided fin-stabilized rockets***. ERDA-186. U.S. Army Electronics Research and Development Activity, White Sands Missile Range, New Mexico, 1964.
- [17] Zarchan, Paul. ***Tactical and Strategic Missile Guidance***. American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), Inc. Washington, DC., 1990.
- [18] Davis, Leverett Jr.; Follin W., James Jr; Blitzer, Leon. ***Exterior Ballistic of Rockets***. D. Van Nostrand Company Inc. Princeton, N.J., 1958.
- [19] ***Meteorología Dinámica***. Organización Meteorológica Mundial. OMM-364. México, 1973.

- [20] *Atmosphere*  
[http://nssdc.gsfc.nasa.gov/space/model/atmos/atmos\\_index.html](http://nssdc.gsfc.nasa.gov/space/model/atmos/atmos_index.html)
- [21] Pope, Alan. *Wind-Tunnel Testing*. 2da. Ed. John Wiley & Sons Inc. New York, 1954.
- [22] *Force, Strain, and Aceleration Measurements at NASA Langley Research Center*  
<http://sigma-www.larc.nasa.gov/products/measure/focus/force/>
- [23] *Wind Tunnel Balances Assure Safe Airplane Designs*  
<http://www.algor.com/adw/nov95/windtunl.htm>
- [24] *Langley Unitary Plan Wind Tunnel*  
<http://ad-www.larc.nasa.gov/facility/upwt/upwt04.html>
- [25] Anderson D., John Jr. *Fundamentals of Aerodynamics*. Mc-Graw Hill. New York, 1985.
- [26] Romero-Robledo Ordoñez, Carlos. *Aerodinámica*. Uteha, S.A. México, 1979.
- [27] Smith R., Billy Jr.; Archbold, Gregory; Jennings, James. *Weapons Systems Engineering*. Kendall/Hunt. Dubuque, Iowa, 1993.
- [28] Etkin, Bernard; Duff Reid, Lloyd. *Dynamics of flight, Stability and Control*. 3<sup>rd</sup>. ed. John Wiley and Sons, Inc. New York, 1996.
- [29] Parker P., Sybil. *McGraw-Hill Encyclopedia Science & Technology*. McGraw-Hill Inc. New York, 1992.
- [30] Nielsen L. Kaj. *Ecuaciones diferenciales*. CECSA. México, 1971.

- [31] Ames Bliss, Gilbert. *Mathematics for exterior ballistics*. John Wiley and Sons Inc. New York, 1944.
- [32] T. Heath, Michael. *Scientific Computing*. Mc-Graw Hill. New York. 1990.
- [33] Rosser J., Barkley; R. Newton, Robert, L. Gross George. *Mathematical theory of rocket flight*. 1<sup>st</sup> ed. Mc-Graw Hill. New York, 1947.
- [34] Moore, Steven; Botero de Meza, Mararita. *Ecuaciones diferenciales*. Harla. México, 1977.
- [35] C. Chapra, Steven; P. Canale, Raymond. *Numerical Methods for Engineers*. 2<sup>nd</sup> ed. Mc-Graw Hill. New York, 1988.
- [36] P. Stamps, Mickie. *Free rocket six degree of freedom digital simulation*. RF-77-1. U. S. Army Missile Command. Redstone Arsenal, Alabama, 1976.
- [37] Wang, Sheng-De; Lin, Chuan-Kai. *A self-organizing fuzzy control approach for bank-to-turn missiles*. Elsevier Science, 1998.
- [38] V. Groves, G. *Dynamics of rockets and satellites*. North-Holland Publishing Co. Amsterdam, Holland, 1965.
- [39] H. Press, William; A. Teukolsky, Saul; T. Vetterling, William; P. Flannery, Brian. *Numerical Recipes in FORTRAN*. Cambridge University Press, 1992.
- [40] *ESTES CATALOG, Flying Model Rockets*. PN-2927, 1996
- [41] S. Chubb Robert. *Experimental investigation of the static aerodynamic and dynamic damping-in-roll characteristics of an 8-cm aircraft rocket with solid*



- and slotted fins. NACA RM-A52C04*. National Advisory Committee for Aeronautics (NACA). Washington, 1952
- [42] ***AEROTECH motors***  
[http://www.tripoli.org/motors/New\\_Motors/K1050Wat.html](http://www.tripoli.org/motors/New_Motors/K1050Wat.html)
- [43] Ying, Shuh-Jing. *Advanced Dynamics*. American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA). Reston, Virginia, 1997.
- [44] ***Center of pressure calculation***  
<http://www.impulseaero.com/Software/VCP/index.html> realizado por Gary A. Crowell
- [45] P. Box, George E; G. Hunter, William; Hunter, J. Stuart. *Statistics for experimenters*. John Wiley & Sons. New York, 1978.
- [46] ***Rocket history***  
[http://www.lerc.nasa.gov/WWW/K-12/TRC/Rockets/history\\_of\\_rockets.html](http://www.lerc.nasa.gov/WWW/K-12/TRC/Rockets/history_of_rockets.html)
- [47] ***A brief history of rocketry***  
<http://hiris.anorg.chemie.tu-muenchen.de/AAL/otto/solarsystem/rocket.htm>
- [48] Gall, Ruth; Álvarez, Román; Fernández, Fátima; Schmucler, Héctor; Castro Villalobos, José. *Las actividades espaciales en México: Una revisión crítica*. Fondo de cultura económica. México, 1986.
- [49] ***The World's Missile Systems***. 8<sup>th</sup> ed. General Dynamics. Pomona, Ca, 1988.
- [50] Sutton, George P. *Rocket Propulsion Elements*. 6<sup>th</sup> ed. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1992.

- [51] *The space memorial*  
<http://www.isid.es/nautas/>
- [52] S. Seifert, Howard. *Space Technology*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1959.
- [53] Zucrow M. J. *Aircraft and Missile Propulsion*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1958.
- [54] Dr. Gerald M. Gregorek. *TR-11 Aerodynamic Drag of Model Rockets* (ESTES Inc, 1970).
- [55] *Subsonic Wind Tunnel C-2*. Instruction Manual, 1996.

*La tierra es la cuna de la humanidad, pero no se  
puede vivir en la cuna para siempre.  
Konstantin Tsiolkovsky, Padre de la Astronáutica.*

# Apéndice A

## Antecedentes de los cohetes

### A.1. Introducción

En este apéndice se presenta una breve historia de los cohetes. El apéndice se encuentra dividido en dos secciones, en la primer sección se describe la aparición de los cohetes y cohetes sonda, desde su advenimiento en el siglo XIII hasta nuestros días, y en la segunda sección se describen los antecedentes de los cohetes sonda en México, los cuales fueron utilizados hasta la década de los 70's.

### A.2. Breve historia acerca de los cohetes y cohetes sonda

Durante el contenido de toda esta sección, la información fue obtenida de las referencias [3], [46] y [47].

Hoy en día los cohetes son notables colecciones del ingenio humano que han tenido sus raíces en la ciencia y en la tecnología del pasado. Son el resultado natural de literalmente miles de años de experimentación e investigación de cohetes y de dispositivos de propulsión.

*La tierra es la cuna de la humanidad, pero no se  
puede vivir en la cuna para siempre.  
Konstantin Tsiolkovsky, Padre de la Astronáutica.*

# Apéndice A

## Antecedentes de los cohetes

### A.1. Introducción

En este apéndice se presenta una breve historia de los cohetes. El apéndice se encuentra dividido en dos secciones, en la primer sección se describe la aparición de los cohetes y cohetes sonda, desde su advenimiento en el siglo XIII hasta nuestros días, y en la segunda sección se describen los antecedentes de los cohetes sonda en México, los cuales fueron utilizados hasta la década de los 70's.

### A.2. Breve historia acerca de los cohetes y cohetes sonda

Durante el contenido de toda esta sección, la información fue obtenida de las referencias [3], [46] y [47].

Hoy en día los cohetes son notables colecciones del ingenio humano que han tenido sus raíces en la ciencia y en la tecnología del pasado. Son el resultado natural de literalmente miles de años de experimentación e investigación de cohetes y de dispositivos de propulsión.

Uno de los primeros dispositivos que exitosamente emplearon los principios esenciales para volar un cohete, fueron los “pájaros de madera”. En los escritos de un romano llamado Aulus Gellius, comenta una historia de un Griego llamado Archytas quien vivió en la ciudad de Tarentum, ahora una parte del sur de Italia. Aproximadamente en el año 400 A.C., Archytas mistificó y divirtió a los ciudadanos de Tarentum haciendo volar una paloma hecha de madera. La paloma se suspendía sobre cables y era propulsada por medio de la expulsión de vapor. La paloma utilizó el principio de la acción y la reacción, el cual fue establecido como una ley científica hasta el siglo XVII.

Cerca de 300 años después del suceso de la paloma de Archytas, otro Griego, Hero de Alejandría, inventó un dispositivo muy similar a un cohete llamado un aelopile. Éste también utilizaba vapor como un gas de propulsión. Hero montó una esfera sobre una olla de agua (ver figura A.1). El fuego que incidía debajo de la cacerola inducía a la formación de vapor y este vapor viajaba a través de tubos hacia la esfera. Dos tubos en forma de “L” colocados en lados opuestos de la esfera permitían el escape del gas y, al formarse así una fuerza de empuje, se causaba la rotación de la esfera.



*Figura A.1.* Aelopile inventado por Hero de Alejandría.

No es claro aún cuando aparecieron los primeros cohetes. Historias de recientes dispositivos semejantes a cohetes, aparecieron esporádicamente a través de los registros históricos de varias culturas. Quizás el descubrimiento de los primeros cohetes se realizó de forma accidental. En el primer siglo D.C., la dinastía China reportó una forma muy sencilla de pólvora hecha de nitrato de sodio (potasio), sulfuro, y carbón vegetal en polvo. Ellos llenaban tubos de bambú con esa mezcla de pólvora y los encendían para crear explosiones durante los festivales religiosos. Quizás algunos de estos tubos fallaban y no se realizaba la explosión y en vez de ello estos tubos se movían rápidamente fuera de la zona de fuego propulsados por los gases, y se producían chispas debido a la combustión de la pólvora.

Los Chinos comenzaron experimentando primero con los tubos rellenos de pólvora. En algún momento, ellos utilizaron tubos de bambú montados sobre flechas (ver figura A.2) y los lanzaban con la ayuda de unos arcos. Rápidamente descubrieron que

esos tubos con pólvora podrían impulsarse por sí mismos debido a la potencia producida por el escape del gas, y *nacieron los cohetes*.



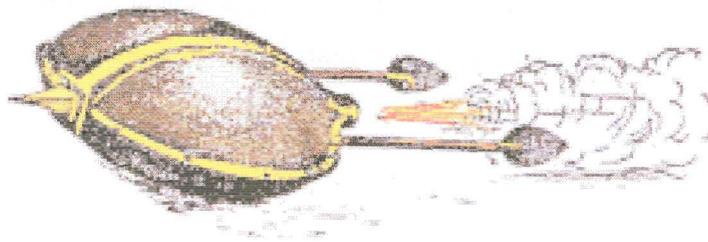
**Figura A.2.** Tubos de bambú montados sobre las flechas que utilizaron los Chinos.

El primer reporte del uso de cohetes fue en 1232. En esa fecha, los Chinos y los Mongoles estaban en guerra. Durante la batalla de Kai-Keng, los Chinos repelieron a sus invasores que eran los Mongoles por medio de un bombardeo de “flechas voladoras de fuego”. Estas flechas de fuego fueron una forma simple de un cohete con propelente sólido. Un tubo en un extremo derecho contenía la pólvora (ver figura A.3). El extremo izquierdo estaba abierto y el tubo era colocado sobre una vara larga. Cuando la pólvora era encendida, la rápida combustión de la pólvora producía fuego, humo, y gas que escapaba fuera del extremo izquierdo abierto y se producía un empuje. La vara actuaba como un sistema de guía simple que mantenía al cohete colocado para su salida en una dirección dada. No está claro como era la efectividad de esas flechas al ser utilizadas como armas de destrucción, pero los efectos psicológicos que producían a los Mongoles pudieron haber sido formidables.



**Figura A.3.** Primeros cohetes lanzados por los Chinos.

Poco después de la batalla de Kai-Keng, los Mongoles produjeron cohetes propios y pudieron haber sido responsables de difundir estos conocimientos a toda Europa. Existen muchos reportes de experimentos realizados con cohetes durante los siglos XIII al XV. En Inglaterra, un monje llamado Roger Bacon trabajó en la mejora de la pólvora que incrementó en gran forma el rango de viaje de los cohetes. En Francia, Jean Froissart encontró que podrían realizarse muchos vuelos exactos por medio del lanzamiento de cohetes a través de tubos. La idea de Froissart fue la precursora de las modernas bazucas. Por otro lado, Joanes de Fontana de Italia diseñó un cohete que se deslizaba en la superficie tipo torpedo (ver figura A.4) para enviarlos hacia naves enemigas en combate.



*Figura A.4.* Cohete de superficie tipo torpedo diseñado por Joanes de Fontana.

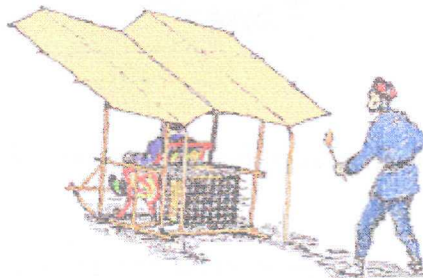
Por el siglo XVI, los cohetes estuvieron en un tiempo en desuso como armas de guerra, aunque eran todavía utilizados para fuegos artificiales. En Alemania un fabricante de fuegos artificiales llamado Johann Schmidlap, inventó el “cohete de etapas”, que es un vehículo de varias etapas que se utilizaba para levantar a grandes alturas los fuegos artificiales. Un cohete grande (primera etapa) llevaba pequeños cohetes (segunda etapa). Cuando el cohete grande terminaba su combustión, los cohetes pequeños independientemente continuaban ascendiendo hacia grandes alturas antes de explotar en el cielo y formar cenizas resplandecientes. La idea de Schmidlap es el concepto básico que se utiliza en todos los cohetes actuales para poder salir de la atmósfera terrestre y poder internarse al espacio.

Es claro que la utilización de todos los cohetes durante esas épocas fueron utilizados para la guerra y para los fuegos artificiales, pero hay una vieja leyenda



China que es muy interesante y que reporta la utilización de cohetes como un medio de transporte. Con la ayuda de muchos asistentes, un conocido oficial Chino de bajo rango llamado Wan-Hu ensambló una silla voladora por medio de varios cohetes (ver figura A.5). Unidos a la silla hubo dos grandes cometas, y había 47 cohetes colocados en un dispositivo de soporte.

En el día de vuelo, Wan-Hu se sentó en la silla y tomó el mando del encendido de los cohetes. Cuarenta y siete asistentes, cada uno teniendo una antorcha en mano, se apresuraron a encender las mechas de los cohetes. Durante un momento, hubo un tremendo estruendo acompañado por nubes ondulantes de humo. Cuando el humo estuvo poco denso, Wan-Hu junto con su silla voladora habían desaparecido. Nadie estuvo seguro de lo que le había pasado a Wan-Hu, sin embargo, es probable que si el evento realmente sucedió, Wan-Hu y su silla habían sido hechos pedazos debido a la explosión. Las flechas de fuego tanto eran propensas para explotar como para volar.



*Figura A.5.* Bosquejo de la silla voladora del oficial Wan-Hu.

Durante la última parte del siglo XVII, los fundamentos científicos para la cohetería moderna fueron establecidos por el gran científico Inglés Sir Issac Newton (1642-1727). Newton dividió su conocida física del movimiento en tres leyes. Las leyes explican el principio de funcionamiento de un cohete y la razón de la posibilidad del funcionamiento de un cohete en el vacío durante un viaje en el espacio.

Las leyes de Newton muy pronto se convirtieron en un impacto práctico en el diseño de cohetes. Cerca del año 1720, un profesor Alemán, William Gravesande,

construyó modelos de coches impulsados por medio de vapor a propulsión a chorro. Los experimentadores de cohetes en Alemania y en Rusia comenzaron trabajando con cohetes con una masa de más de 45 kg. Algunos de estos cohetes fueron tan poderosos que su flama de escape era capaz de formar grandes agujeros profundos en el terreno, aún antes del despegue.

Durante finales del siglo XVIII y principios del siglo XIX, los cohetes experimentaron una breve resucitación como armas de guerra. Los sucesos de bombardeo de cohetes por parte de la India contra los Británicos en 1792 y de nueva cuenta en 1799 crearon en el Coronel William Congreve que se originara un interés en el área de cohetes. Así, Congreve planeó diseñar cohetes para ser utilizados por el Ejército Militar Británico.

Los cohetes de Congreve, altamente exitosos en batalla. Fueron lanzados por las naves Británicas para demoler la base militar McHenry en la guerra de 1812. Éstos inspiraron a Francis Scott Key para escribir “the rockets’ red glare”.

Aún con el trabajo de Congreve, la exactitud de los cohetes todavía no había sido mejorada mucho desde los primeros días. La naturaleza de devastación de los cohetes en la guerra no era la exactitud que tenían o su potencia, sino su número. Desde un lugar elegido se podrían lanzar miles de ellos hacia el enemigo. Por todo el planeta, los investigadores experimentados de cohetes buscaban formas de mejorar la exactitud de los cohetes. Un hombre Inglés, William Hale, desarrolló una técnica llamada “spin” de estabilización. En este método, los gases de escape movían pequeñas aletas que se encontraban en la parte posterior (trasera) del cohete, causando el “spin” tal como lo realiza una bala durante su vuelo. En nuestros días todavía son utilizadas variaciones de este principio.

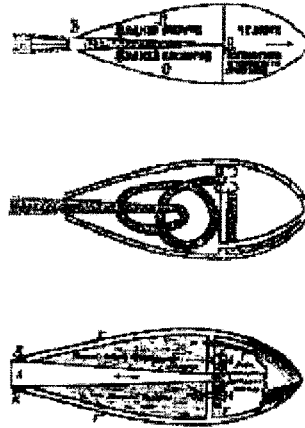
Los cohetes continuaron siendo utilizados en sucesos de batalla sobre todo en el continente Europeo. Sin embargo, en una guerra con Prusia, la brigada de cohetes de Austria se reunió para diseñar nuevamente piezas de artillería. Los cañones con recámara de carga con barriles de rifles y cabezas de guerra explosivas eran mucho más efectivos como armas de guerra que los mejores cohetes. Una vez más, los cohetes fueron relegados.

En 1898, un profesor de Rusia, Konstantin Tsiolkovsky (1857-1935) (ver figura A.6), propuso la idea de realizar la exploración espacial por medio de cohetes.



*Figura A.6.* Konstantin Eduardovich Tsiolkovsky.

En un reporte que publicó en 1903, Tsiolkovsky sugirió la utilización de propelentes líquidos para cohetes con la finalidad de alcanzar grandes rangos de distancias (ver figura A.7). Tsiolkovsky estableció que la velocidad y el rango de un cohete estuviera limitada sólo por la velocidad de salida de los gases. Por sus ideas, investigación cuidadosa, y gran visión, Tsiolkovsky ha sido llamado el *padre de la astronáutica moderna*.



*Figura A.7.* Diseño de cohetes de Tsiolkovsky.

A principios del siglo XX, un Americano, Robert H. Goddard (1882-1945) (ver figura A.8), condujo experimentos prácticos en cohetería. Él llegó a estar interesado en la forma de cómo alcanzar grandes altitudes que fueran posibles tenerlas por medio de globos más ligeros que el aire. Él publicó un folleto en 1919 titulado “Un método para alcanzar alturas extremas”. Era un análisis matemático de lo que hoy en día es llamado un cohete sonda meteorológico.

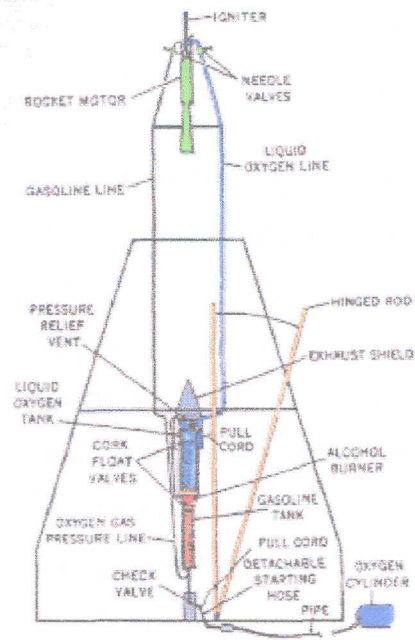


*Figura A.8.* Robert H. Goddard, año de 1935, foto tomada en su taller.

En su folleto, Goddard realizó algunas conclusiones importantes hacia la cohetaría. De sus pruebas, él estableció que un cohete opera con gran eficiencia en el vacío. En esos tiempos, mucha gente equivocada creyó que el aire era necesario para que un cohete pudiera ser impulsado, y el periódico *The New York Times* en una editorial mencionó el día simulado de la carencia de Goddard de la “física básica diaria de atole con el dedo dada en nuestras escuelas secundarias”. Goddard también estableció que los cohetes con varias etapas eran la respuesta para alcanzar grandes altitudes y que la velocidad necesaria para escapar de la fuerza gravitacional de la tierra podría ser alcanzada de esta forma.

Los primeros experimentos de Goddard fueron con cohetes de propelente sólido. En 1915, él comenzó tratando varios tipos de combustibles sólidos e hizo mediciones de la velocidad de salida de los gases de la combustión.

Mientras trabajaba con cohetes de propelentes sólidos, Goddard estaba convencido que los cohetes podrían ser propulsados mejor con combustible líquido. Nadie había construido un cohete con propelente líquido antes que él. Fue un objetivo mucho más difícil que construir cohetes con propelentes sólidos. Era necesario tener los tanques de combustible y de oxígeno, turbinas, y las cámaras de combustión. A pesar de las dificultades, Goddard alcanzó el primer vuelo exitoso de un cohete con un propelente líquido el 16 de Marzo de 1926 (ver figuras A.9 y A.10). Utilizando oxígeno líquido y gasolina, el cohete voló por solo dos y medio segundos, se levantó a 12.5 metros, y cayó a 56 metros a lo lejos cerca de un sembradío de coliflor. Para los estándares actuales, el vuelo fue impresionante, como el primer aeroplano volado por los hermanos Wright en 1903, el cohete de gasolina de Goddard fue el precursor de una nueva era en vuelos de cohetes.



**Figura A.9.** El primer cohete con combustible líquido diseñado por el Dr. Goddard en 1926.



**Figura A.10.** Fotografía tomada antes del primer vuelo del cohete en 1926.

Los experimentos de Goddard en cohetes con combustible líquido continuaron por muchos años. Sus cohetes llegaron a ser muy grandes y alcanzar grandes alturas. Él desarrolló el sistema de giróscopos para mantener el control del vuelo y desarrolló un compartimento de la carga útil para llevar instrumentos científicos. Fueron empleados los sistemas de recuperación por medio de paracaídas para regresar los cohetes y los instrumentos con cierto grado de seguridad. Goddard, por sus investigaciones ha sido llamado el *padre de la cohetaria moderna*.

Un tercer gran pionero del espacio, Hermann Oberth (1894-1989) de Alemania (ver figura A.11), publicó un libro en 1923 acerca de los viajes de los cohetes en el espacio. Sus escritos fueron importantes ya que debido a éstos, surgieron muchas sociedades pequeñas de cohetes alrededor del planeta.



*Figura A.11.* Hermann Oberth

En Alemania, la formación de una de estas sociedades, la *Verein für Raumschiffahrt* (sociedad para el viaje espacial), condujo al desarrollo del cohete V-2, el cual fue utilizado para ser lanzado contra Londres durante la segunda guerra mundial. En 1937, los ingenieros y científicos Alemanes, incluyendo a Oberth, se reunieron en *Peemunde* en las orillas del mar báltico. Ahí pudieron haber sido

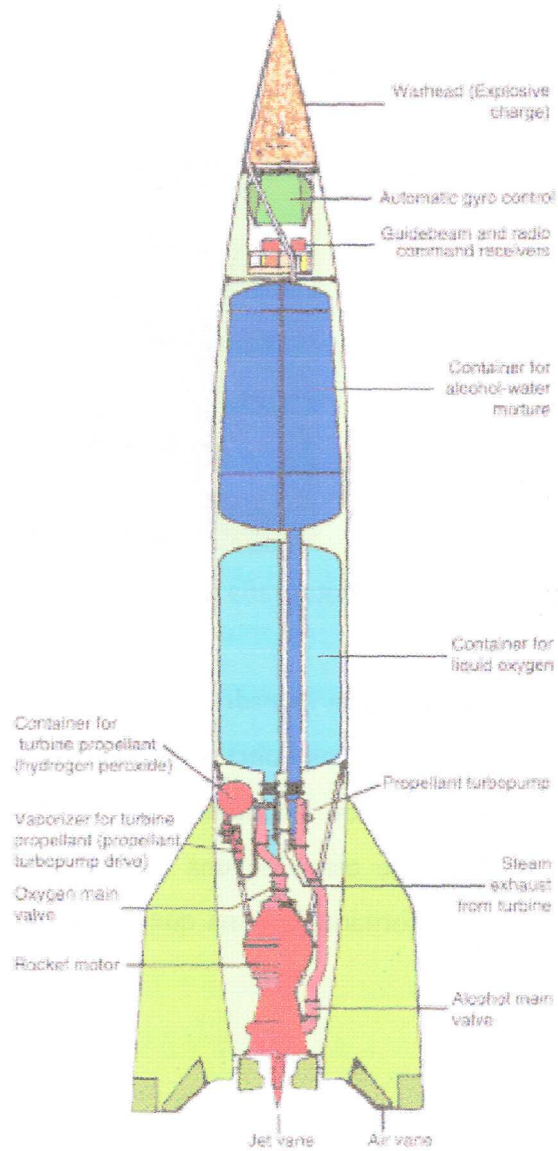
volados, bajo la dirección de Wernher Von Braun (ver figura A.12), los cohetes de construcción más avanzada de su tiempo.



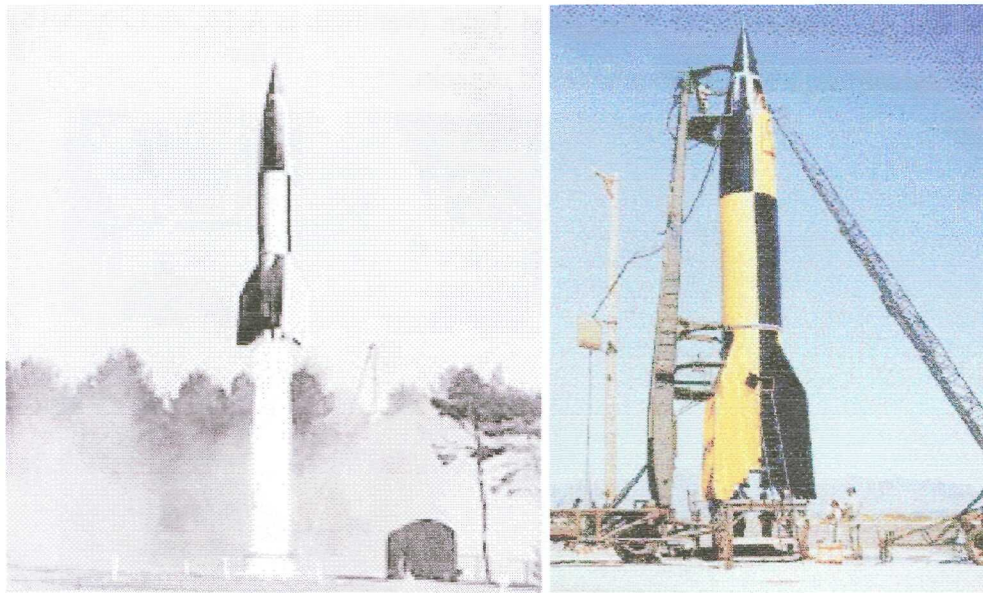
*Figura A.12.* Fotografía de Wernher Von Braun en 1926.

El cohete V-2 (en Alemania llamado el A-4) (ver figuras A.13, A.14 y A.15) era pequeño en comparación con los cohetes que se fabrican actualmente. Este cohete realizaba un gran empuje debido a la combustión de una mezcla de oxígeno líquido y de alcohol en un rango de cerca de una tonelada cada siete segundos. Una vez lanzado, el V-2 fue una formidable arma que podría devastar superficies enteras de ciudades.





*Figura A.13.* Cohete Alemán V-2 (A-4).



*Figuras A.14 y A.15.* Fotografía de la preparación y el lanzamiento de un cohete V-2 lanzado desde White Sands, NM.

Afortunadamente para Londres y las fuerzas aliadas, el V-2 llegó tarde en la guerra para cambiarla. No obstante, al término de la guerra, los científicos e ingenieros Alemanes tenían realmente planes para desarrollar misiles avanzados capaces de atravesar el océano Atlántico y caer en los Estados Unidos. Estos misiles podrían haber volado en varias etapas pero con cargas útiles de pequeñas capacidades.

Con la caída de Alemania, muchos cohetes V-2 que no se utilizaron y sus componentes fueron capturados por los aliados. Muchos de los científicos Alemanes vinieron a los Estados Unidos. Otros se fueron a la Unión Soviética. Los científicos Alemanes, incluyendo Wernher Von Braun, estuvieron asombrados por los progresos desarrollados por Goddard.

Los Estados Unidos y la Unión Soviética desarrollaron el potencial de la cohetaría como una arma militar y comenzaron una gran variedad de programas experimentales. Los Estados Unidos comenzaron un programa con cohetes sonda con alcances de grandes altitudes, que eran una de las grandes ideas de Goddard. Más tarde, fueron desarrollados misiles balísticos intercontinentales. Estos llegaron a ser el punto de inicio del programa espacial de los Estados Unidos. Los misiles tales

como el Redstone, el Atlas, y el Titán (ver figuras A.16, A.17 y A.18), pudieron eventualmente enviar astronautas al espacio.



*Figura A.16.* Cohete Atlas.

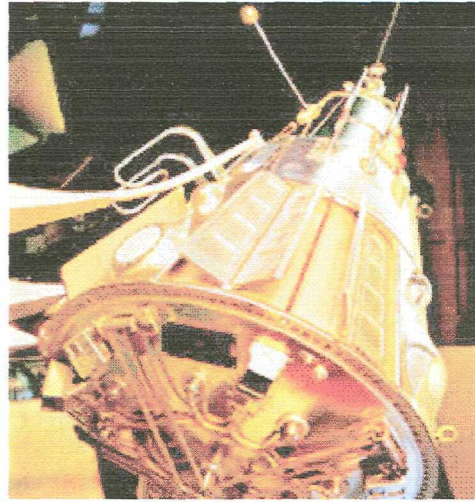


*Figura A.17.* Cohete Titan.



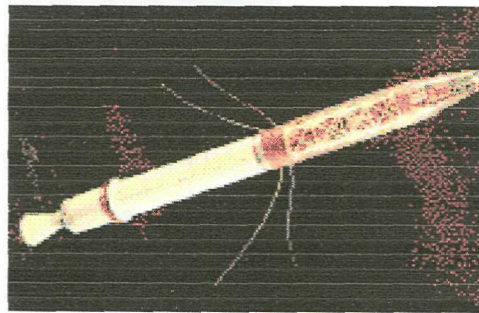
*Figura A.18.* Cohete Redstone, 1959.

El 4 de Octubre de 1957, el planeta se quedó asombrado por las noticias de que había sido lanzado en la órbita terrestre un satélite por la Unión Soviética. Llamado el Sputnik I (ver figura A.19), este satélite fue el primer éxito registrado en la carrera del espacio entre estas dos naciones. En menos de un mes más tarde, los soviéticos siguieron con el lanzamiento de un satélite llevando un perro a bordo llamado Laika. Este perro sobrevivió en el espacio por siete días antes de ser puesto a dormir y de que se terminara el suministro de oxígeno.



*Figura A.19.* Satélite Sputnik I, lanzado en 1957.

Unos meses después del Sputnik, los Estados Unidos siguieron a la Unión Soviética con un satélite. Así, el Explorer I (ver figura A.20) fue lanzado por la Armada de los Estados Unidos el 31 de Enero de 1958. En Octubre de ese año, los Estados Unidos organizaron formalmente su programa espacial y crearon la Administración Nacional de Aeronáutica y del Espacio (NASA). La NASA llegó a ser la agencia civil con el objetivo de llevar a cabo la exploración espacial en beneficio de la raza humana.



*Figura A.20.* Satélite Explorer I, lanzado en 1958.

Rápidamente, muchas personas y maquinaria fueron utilizadas para realizar lanzamientos espaciales. Astronautas orbitando sobre la tierra y enviados a la Luna. Naves espaciales tipo Robot viajando a través de los planetas. El espacio fue súbitamente abierto para la exploración y la explotación comercial. Los satélites

habilitan a los científicos para investigar a nuestro planeta, los pronósticos del clima, y para obtener comunicación instantánea alrededor del planeta. Como se ha incrementado la demanda de muchas cargas útiles cada vez más grandes, se han construido una amplia variedad de cohetes.

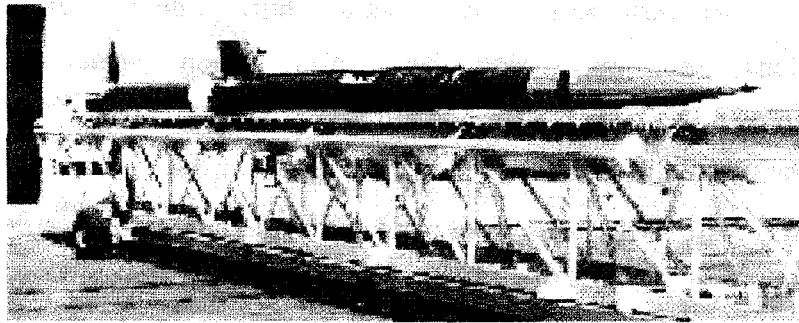
Desde los primeros días del descubrimiento y la experimentación, los cohetes se han desarrollado desde dispositivos utilizando la simple pólvora hasta vehículos gigantes capaces de atravesar el espacio. Los cohetes han abierto el Universo directamente para que a la raza humana le sea posible esa vasta exploración.

En lo que respecta exclusivamente a la historia de los *cohetes sonda*, se puede mencionar que el primer cohete con instrumentación conteniendo un termómetro y un barómetro aneroide fue lanzado el 17 de Julio de 1929 en Auburn, MA por Robert H. Goddard. Cuando el paracaídas se desplegó, se tomaron las lecturas de los instrumentos que llevaba a bordo por medio de una cámara fotográfica. Su cohete alcanzó una altura de 52.10 mts (171 ft). En la primavera de 1946, justo después de la Segunda Guerra Mundial, fueron lanzados los cohetes alemanes V-2 desde un terreno ubicado en White Sands, Nuevo México con cámaras a bordo que fueron recuperadas después de realizar vuelos suborbitales que llegaron hasta 110 y 165 km (65 a 100 millas). Estas cámaras tomaron fotografías de nubes cuando se estaba en pleno vuelo; estas fotografías que se tomaron fueron las primeras desde alturas aún superiores a las que se manejan con *globos sonda* (ver figura A.21).

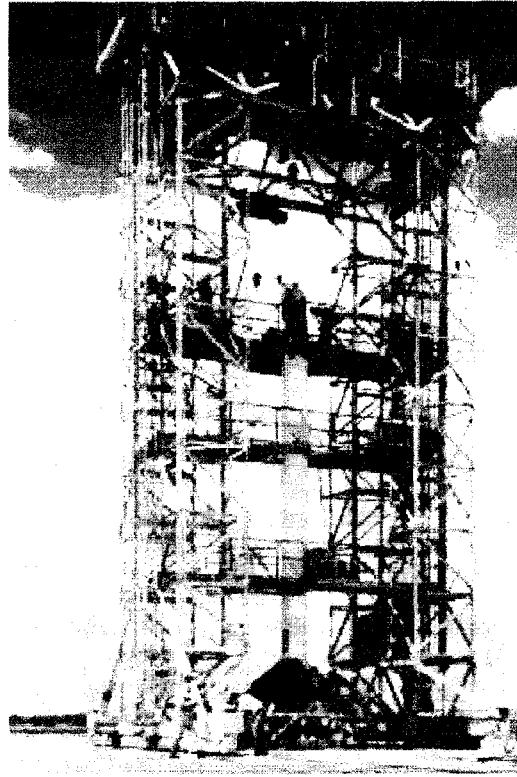


**Figura A.21.** Globos sonda construidos de polietileno.

Como resultado, estas fotografías ayudaron a estimular el interés en la utilización de satélites artificiales como plataformas en las observaciones meteorológicas. A finales de la década de los 40's se comenzaron a desarrollar diseños Americanos de cohetes, tales como el Aerobee y el Viking, y el primer lanzamiento se llevó acabo con el cohete Aerobee lanzado por la Fuerza Aérea de los E.U. en 1949 (ver figuras A.22 y A.23).



*Figura A.22.* Cohete Aerobee, 1949.



*Figura A.23.* Cohete Viking, 1949.

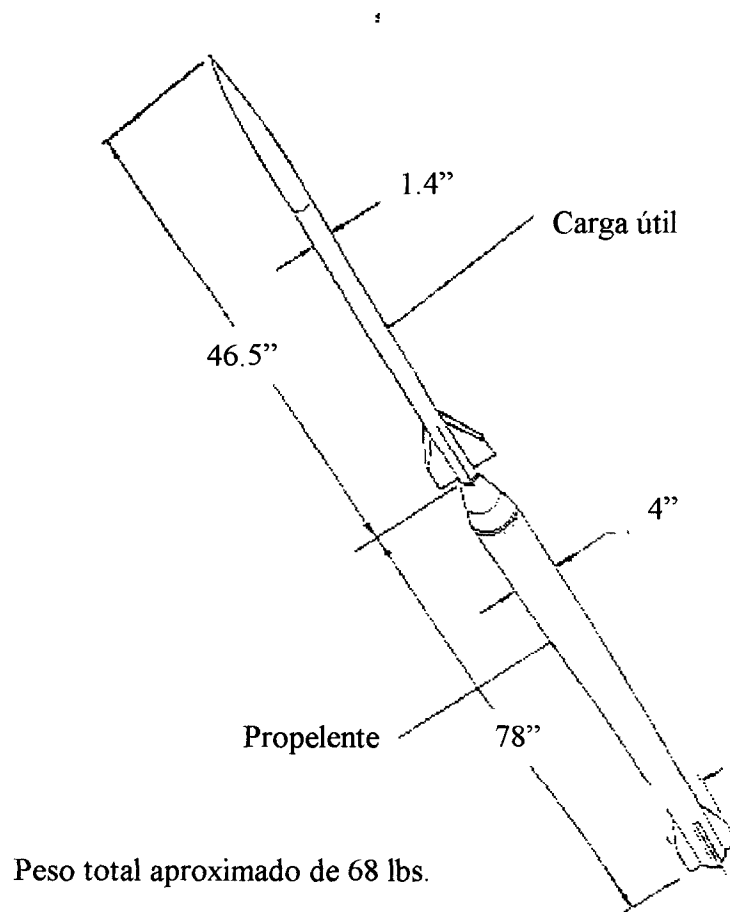
Estos cohetes contenían instrumentos que registraban la atmósfera superior. Sin embargo, muchos de estos cohetes de propelente líquido fueron también muy grandes, complicados y costosos para llevar a cabo medidas detalladas en una rutina básica sinóptica.

Durante el Año Geofísico Internacional (AGI) de 1957 a 1958, se hicieron extensas investigaciones de la atmósfera superior utilizando una gran variedad de cohetes sonda. Fueron lanzados numerosos cohetes sonda en todo el planeta; varias agencias del gobierno de los E.U. condujeron más allá de 210 lanzamientos. La realización de un gran esfuerzo para diseñar un cohete con todos sus subsistemas para que fuera pequeño, simple y barato para realizar un estudio tipo sinóptico, dio como resultado al cohete Arcas (cohete sonda de propósitos generales para la recolección de datos atmosféricos) (ver figura 2.4 del capítulo 2). Este cohete, usado por primera vez en 1959, pudo alcanzar una altitud de 64 km (40 mi) con una carga útil de 5.40 kgs (12 lb). Durante ese mismo año, fue establecida la red de observación de cohetes meteorológicos (MRN) como un programa que se encargaría

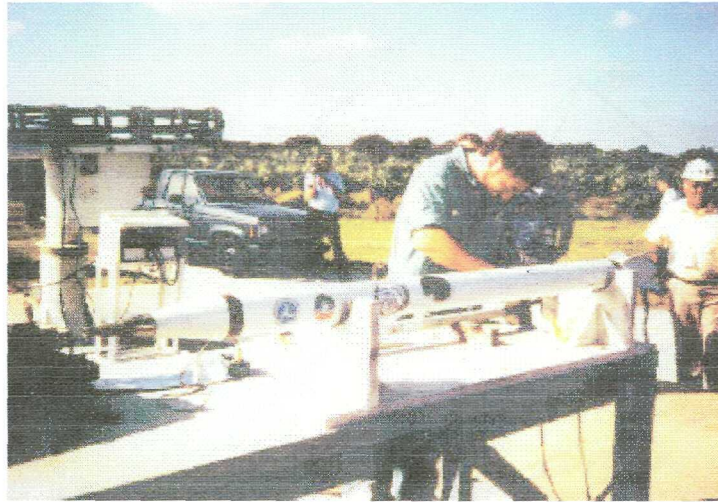


de la regulación de la observación sinóptica de la atmósfera superior patrocinado por la agencia meteorológica de los E.U, la militar y la NASA. Algunos otros países desarrollaron programas similares de cohetes sonda, tales como Francia, Japón, Inglaterra, la Unión Soviética e inclusive México (sin llegar a sobresalir en este campo).

Estos cohetes sonda ayudaron a la exploración sinóptica del régimen de circulación de la atmósfera media, contribuyendo al entendimiento de la temperatura y de la estructura del ozono de la estratosfera y mesosfera aún antes del programa de satélites. Por el año de 1968, se expandió una gran red global de observación (MRN) para llegar a constituir 50 estaciones de cohetes sonda. Los sistemas Loki-Datasonde (PWN-8D), Super Loki-Datasonde (PWN-11D) (ver figuras A.24, A.25 y A.26) y la esfera inflable Super Loki han reemplazado a cohetes que habían sido desarrollados antes de 1972. Un estudio extensivo llamado Programa de la Atmósfera Media (MAP), fue conducido con cohetes sonda durante la década de los 80's. Aunque han sido discontinuadas muchas redes de observación de cohetes meteorológicos (MRN), todavía se ha conducido un programa de limitada observación rutinaria de cohetes sonda en forma semanal en algunas estaciones MRN, que tiene como objetivo monitorear la temperatura de la estratosfera y de la mesosfera. También una función de muchos vuelos de cohetes sonda es el de calibrar los sistemas de medición de satélites artificiales.



**Figura A.24.** Configuración del cohete sonda Super Loki



*Figura A.25.* Preparativos para el lanzamiento del cohete sonda Super-Loki.

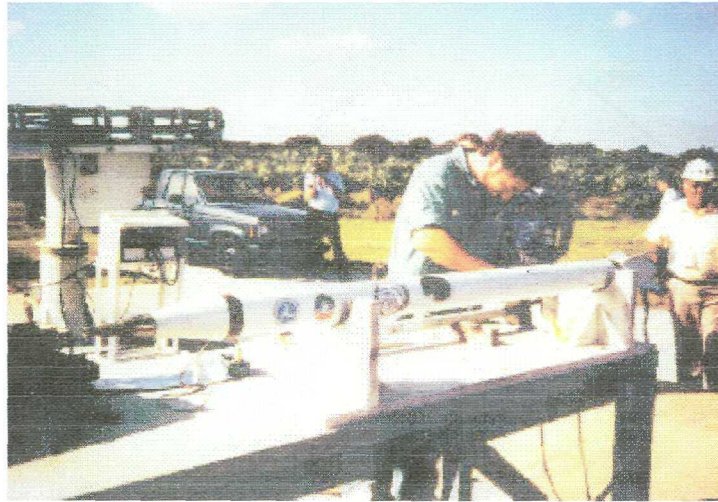


*Figura A.26.* Lanzador y cohete Super Loki.

### **A.3. Antecedentes en el desarrollo de cohetes sonda en México**

En esta sección la información se obtuvo de la referencia [48].

El Año Geofísico Internacional (AGI) y el lanzamiento del Sputnik en el año de 1957 sirvieron para impulsar en México diversas ramas de la geofísica. Aunque ese impulso se observó principalmente en el Instituto de Geofísica de la UNAM, que empezó a funcionar en 1949, en la Secretaría de Comunicaciones y Transportes (SCT) se formó también un grupo de técnicos e ingenieros bajo la dirección del ingeniero Becerril,



*Figura A.25.* Preparativos para el lanzamiento del cohete sonda Super-Loki.



*Figura A.26.* Lanzador y cohete Super Loki.

### **A.3. Antecedentes en el desarrollo de cohetes sonda en México**

En esta sección la información se obtuvo de la referencia [48].

El Año Geofísico Internacional (AGI) y el lanzamiento del Sputnik en el año de 1957 sirvieron para impulsar en México diversas ramas de la geofísica. Aunque ese impulso se observó principalmente en el Instituto de Geofísica de la UNAM, que empezó a funcionar en 1949, en la Secretaría de Comunicaciones y Transportes (SCT) se formó también un grupo de técnicos e ingenieros bajo la dirección del ingeniero Becerril,

dedicado al diseño, construcción y lanzamiento de cohetes, así como a la experimentación de combustibles. Ese grupo estuvo dirigido a fines de los cuarenta por el ingeniero Nuñez Arano, y sus primeros lanzamientos de cohetes, llamados *SCT 1* y *SCT 2*, o también *Tonatiuh (Sol)*, datan de 1959 y 1960.

También entre 1960 y 1961 se elaboraron en la SCT varios estudios sobre el régimen jurídico de la astronáutica. Este conjunto de hechos constituyen los antecedentes de formación de la Comisión Nacional del Espacio Exterior (CONEE), creada oficialmente por el decreto del presidente Adolfo López Mateos el 31 de agosto de 1962.

La CONEE se creó como organismo técnico especializado encargado de la investigación, exploración y utilización del espacio exterior. Su papel era de controlar y fomentar las actividades espaciales en el país, y su estructura (conformada por una junta directiva, un consejero y un grupo técnico) se estableció en el decreto presidencial que le dio origen.

En su primer periodo, la junta directiva estaba integrada por cinco miembros, todos ellos de la SCT: el secretario y un subsecretario eran, respectivamente, presidente y vicepresidente de la CONEE; los tres miembros restantes eran vocales, elegidos entre directores de diferentes departamentos de la misma Secretaría. Durante el sexenio 1965-1970 el secretario, ingeniero Padilla Segura, nombró a un secretario de la CONEE, y en el sexenio 1971-1976 el secretario, ingeniero E. Méndez Docurro, nombró como director al ingeniero Higuera Mota, incrementando así a siete personas la junta directiva.

Al crearse la CONNE dentro de la SCT, el grupo dedicado a la cohetería en esa dependencia quedó incorporado a esa comisión, continuándose así el programa de cohetes sonda de 1962 a 1970. En este periodo se procesaron algunos datos de satélites meteorológicos y de percepción remota, y se ofreció cierto apoyo a los proyectos de ciencia básica de la UNAM y de ciencia aplicada del IPN.

En el periodo 1971-1976 la CONEE siguió aumentando el número de programas, a pesar de sus limitaciones presupuestarias y de recursos humanos bien calificados.

Uno de los programas que llevaba a cabo la CONNE estaba enfocado a cohetes sonda, que a continuación se relatara brevemente.

*Programa de cohetes sonda* : Después de su incorporación a la CONEE en 1962, el grupo de cohetería lanzó su primer cohete de combustible sólido, el *Tototl*, que alcanzó

una altura de 22 km. Subsecuentemente, se experimentó con el cohete *Mitl*, que tenía una capacidad de carga útil de 8kg. El primero de esta serie (*Mitl I-op*) fue lanzado en 1967, y alcanzó 50 km de altura; después, el *Mitl II*, lanzado en 1975, alcanzó 120 km de altura. Estas pruebas se efectuaban desde un camión-rampa en Cuahiniquilapan, Guerrero. En los años setenta se inició también la construcción de una base de lanzamiento en la misma localidad. De manera paralela se diseñó y construyó una serie de cohetes pequeños denominados *Tláloc*, con el fin de experimentar en la estimulación de lluvia para la siembra.

En documentos de 1970 y 1975 se menciona como proyecto la creación de unos cohetes denominados *Huite I* y *II*, en dos etapas: la primera sería el *Mitl I*, y la segunda el *Huite I*, con lo que se esperaba poder transportar cargas útiles de 4 kg hasta 230 km de altura. Sin embargo, no se tienen referencias adicionales sobre las pruebas o el funcionamiento de estos cohetes. En general, aquel grupo se limitó a efectuar experimentos técnicos de funcionamiento sin llegar a concretar las posibles aplicaciones.

# Apéndice B

## Características de cohetes meteorológicos

### B.1. Introducción

En este apéndice se detallan las características de los cohetes sonda utilizados por la NASA los cuales fueron mostrados en la figura 2.4 del capítulo 2.

### B.2. Característica de los cohetes meteorológicos de la NASA

#### *Super Arcas*

- Una etapa.
- 2.5 – 2.75 mts de longitud; peso de 37.5 kg sin carga útil.
- Lleva de 4 – 8 kg de carga útil por arriba de 100 km de altitud.
- La duración típica de un vuelo es de 5 mins.
- Impacta a 60 – 70 km desde la plataforma de lanzamiento.

#### *Orion*

- Una etapa.

- 4.6 – 5.3 mts de longitud; peso de 418 kg sin carga útil.
- Lleva de 38 kg de carga útil por arriba de 88 km de altitud.
- Lleva de 68 kg de carga útil por arriba de 71 km de altitud.
- La duración típica de un vuelo es de 5 mins.
- Impacta a 25 – 50 km desde la plataforma de lanzamiento.

#### ***Black Brant V***

- Una etapa.
- La versión VB tiene tres aletas, y la versión VC tiene cuatro aletas.
- 9 – 11 mts de longitud; peso de 1,265 kg sin carga útil.
- Lleva de 180 kg de carga útil por arriba de 290 km de altitud.
- Lleva de 450 kg de carga útil por arriba de 140 km de altitud.
- La duración típica de un vuelo es de 10 - 15 mins.
- Impacta a 80 – 200 km desde la plataforma de lanzamiento.

#### ***Nike-Orion***

- Dos etapas.
- 8.1 – 8.8 mts de longitud; peso de 1,034 kg sin carga útil.
- Lleva de 68 kg de carga útil por arriba de 190 km de altitud.
- Lleva de 204 kg de carga útil por arriba de 60 km de altitud.
- La duración típica de un vuelo es de 5 - 10 mins.
- Impacta a 30 – 120 km desde la plataforma de lanzamiento.

#### ***Nike-Tomahawk***

- Dos etapas.
- 9 – 10.3 mts de longitud; peso de 861 kg sin carga útil.
- Lleva de 45 kg de carga útil por arriba de 370 km de altitud.
- Lleva de 115 kg de carga útil por arriba de 215 km de altitud.
- La duración típica de un vuelo es de 10 mins.
- Impacta a 150 – 300 km desde la plataforma de lanzamiento.



***Taurus-Tomahawk***

- Dos etapas.
- 9.7 – 10.1 mts de longitud; peso de 1608 kg sin carga útil.
- Lleva de 27 kg de carga útil por arriba de 590 km de altitud.
- Lleva de 59 kg de carga útil por arriba de 490 km de altitud.
- La duración típica de un vuelo es de 10 mins.
- Impacta a 250 – 400 km desde la plataforma de lanzamiento.

***Taurus-Orion***

- Dos etapas.
- 9.7 – 11.7 mts de longitud; peso de 1789 kg sin carga útil.
- Lleva de 68 kg de carga útil por arriba de 260 km de altitud.
- Lleva de 227 kg de carga útil por arriba de 140 km de altitud.
- La duración típica de un vuelo es de 10 mins.
- Impacta a 60 – 150 km desde la plataforma de lanzamiento.

***Terrier-Malamute***

- Dos etapas.
- 10 – 12.6 mts de longitud; peso de 1472 kg sin carga útil.
- Lleva de 90 kg de carga útil por arriba de 650 km de altitud.
- Lleva de 180 kg de carga útil por arriba de 420 km de altitud.
- La duración típica de un vuelo es de 10 mins.
- Impacta a 200 – 300 km desde la plataforma de lanzamiento.

***Nike-Black Brant VB***

- Dos etapas.
- Arriba de 14 mts de longitud; peso de 1881 kg sin carga útil.
- Lleva de 136 kg de carga útil por arriba de 430 km de altitud.
- Lleva de 408 kg de carga útil por arriba de 230 km de altitud.

- La duración típica de un vuelo es de 6 – 18 mins.
- Impacta a 100 – 300 km desde la plataforma de lanzamiento.

#### ***Black Brant IX***

- Dos etapas.
- Arriba de 13.6 mts de longitud; peso de 2102 kg sin carga útil.
- Lleva de 159 kg de carga útil por arriba de 540 km de altitud.
- Lleva de 500 kg de carga útil por arriba de 230 km de altitud.
- La duración típica de un vuelo es de 10 mins.
- Impacta a 50 – 150 km desde la plataforma de lanzamiento.

#### ***Taurus-Nike-Tomahawk***

- Tres etapas.
- 13 – 15.3 mts de longitud; peso de 2234 kg sin carga útil.
- Lleva de 32 kg de carga útil por arriba de 700 km de altitud.
- Lleva de 125 kg de carga útil por arriba de 400 km de altitud.
- La duración típica de un vuelo es de 15 mins.
- Impacta a 180 – 400 km desde la plataforma de lanzamiento.

#### ***Black Brant X***

- Tres etapas.
- Arriba de 15.7 mts de longitud; peso de 2510 kg sin carga útil.
- Lleva de 90 kg de carga útil por arriba de 1200 km de altitud.
- Lleva de 317 kg de carga útil por arriba de 550 km de altitud.
- La duración típica de un vuelo es de 20 mins.
- Impacta a 200 – 500 km desde la plataforma de lanzamiento.

#### ***Black Brant XI***

- Tres etapas.
- Arriba de 21 mts de longitud; peso de 4712 kg sin carga útil.

- Lleva de 318 kg de carga útil por arriba de 700 km de altitud.
- Lleva de 545 kg de carga útil por arriba de 350 km de altitud.
- La duración típica de un vuelo es de 10 - 15 mins.
- Impacta a 200 – 500 km desde la plataforma de lanzamiento.

***Black Brant XII***

- Tres etapas.
- Arriba de 23 mts de longitud; peso de 5119 kg sin carga útil.
- Lleva de 136 kg de carga útil por arriba de 1500 km de altitud.
- Lleva de 522 kg de carga útil por arriba de 500 km de altitud.
- La duración típica de un vuelo es de 10 - 20 mins.
- Impacta a 300 – 1200 km desde la plataforma de lanzamiento.

# Apéndice C

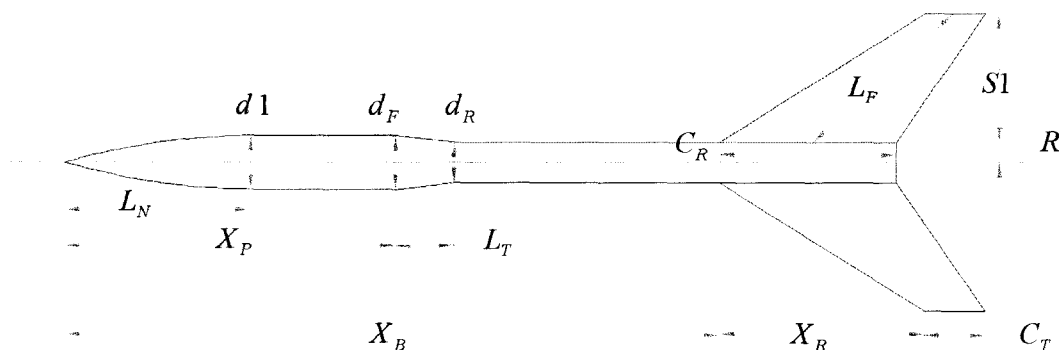
## Ecuación de Barrowman

### C.1. Introducción

En este apéndice se presenta la ecuación de Barrowman, la cual es utilizada en el cálculo del centro de presión ( $CP$ ), que es importante para el establecimiento de la estabilidad en el vuelo de cohetes (como se indica en el capítulo 2). El programa computacional de la referencia [44] utiliza esta ecuación.

### C.2. Presentación de ecuaciones

Obtenido de James S. y Judith A. Barrowman [11]. En la siguiente figura C.1, se muestra la nomenclatura utilizada en las ecuaciones,



**Figura C.1.** Nomenclatura en las dimensiones del cohete.

**PUNTA:**

**Cónica**

$$(C_N)_N = 2$$

$$\bar{X}_N = 0.666L_N$$

**Ojiva**

$$(C_N)_N = 2$$

$$\bar{X}_N = 0.466L_N$$

**TRANSICIÓN CÓNICA: (Para diámetros que incrementan y decremantan)**

$$(C_N)_T = 2 \left[ \left( \frac{d_R}{d_1} \right)^2 - \left( \frac{d_F}{d_1} \right)^2 \right] \quad (C.1)$$

$$\bar{X}_T = X_P + \frac{L_T}{3} \left[ 1 + \frac{1 - \frac{d_F}{d_R}}{1 - \left( \frac{d_F}{d_R} \right)^2} \right] \quad (C.2)$$

**ALETAS: (Para modelos de etapas múltiples, calcular cada conjunto de aletas en forma separada, utilizando un  $X_B$  diferente).**

*Para 3 aletas:*

$$(C_N)_F = \left[ 1 + \frac{R}{S1+R} \right] \frac{12 \left( \frac{S1}{d1} \right)^2}{1 + \sqrt{1 + \left( \frac{2L_F}{C_R + C_T} \right)^2}} \quad (C.3)$$

*Para 4 aletas:*

$$(C_N)_F = \left[ 1 + \frac{R}{S1+R} \right] \frac{16 \left( \frac{S1}{d1} \right)^2}{1 + \sqrt{1 + \left( \frac{2L_F}{C_R + C_T} \right)^2}} \quad (C.4)$$

$$\bar{X}_F = X_B + \frac{X_R}{3} \frac{(C_R + 2C_T)}{(C_R + C_T)} + \frac{1}{6} \left[ (C_R + C_T) - \frac{(C_R C_T)}{(C_R + C_T)} \right] \quad (C.5)$$

**VALORES TOTALES:**

$$(C_N)_R = (C_N)_N + (C_N)_T + (C_N)_F + \dots \quad (C.6)$$

**CENTRO DE PRESIÓN: (Distancia obtenida desde la punta del cohete hasta la ubicación del CP).**

$$CPI = \bar{X} = \frac{(C_N)_N \bar{X}_N + (C_N)_T \bar{X}_T + (C_N)_F \bar{X}_F}{(C_N)_R} \quad (C.7)$$

La ecuación C.7, es la utilizada para obtener la distancia al centro de presión del cohete.

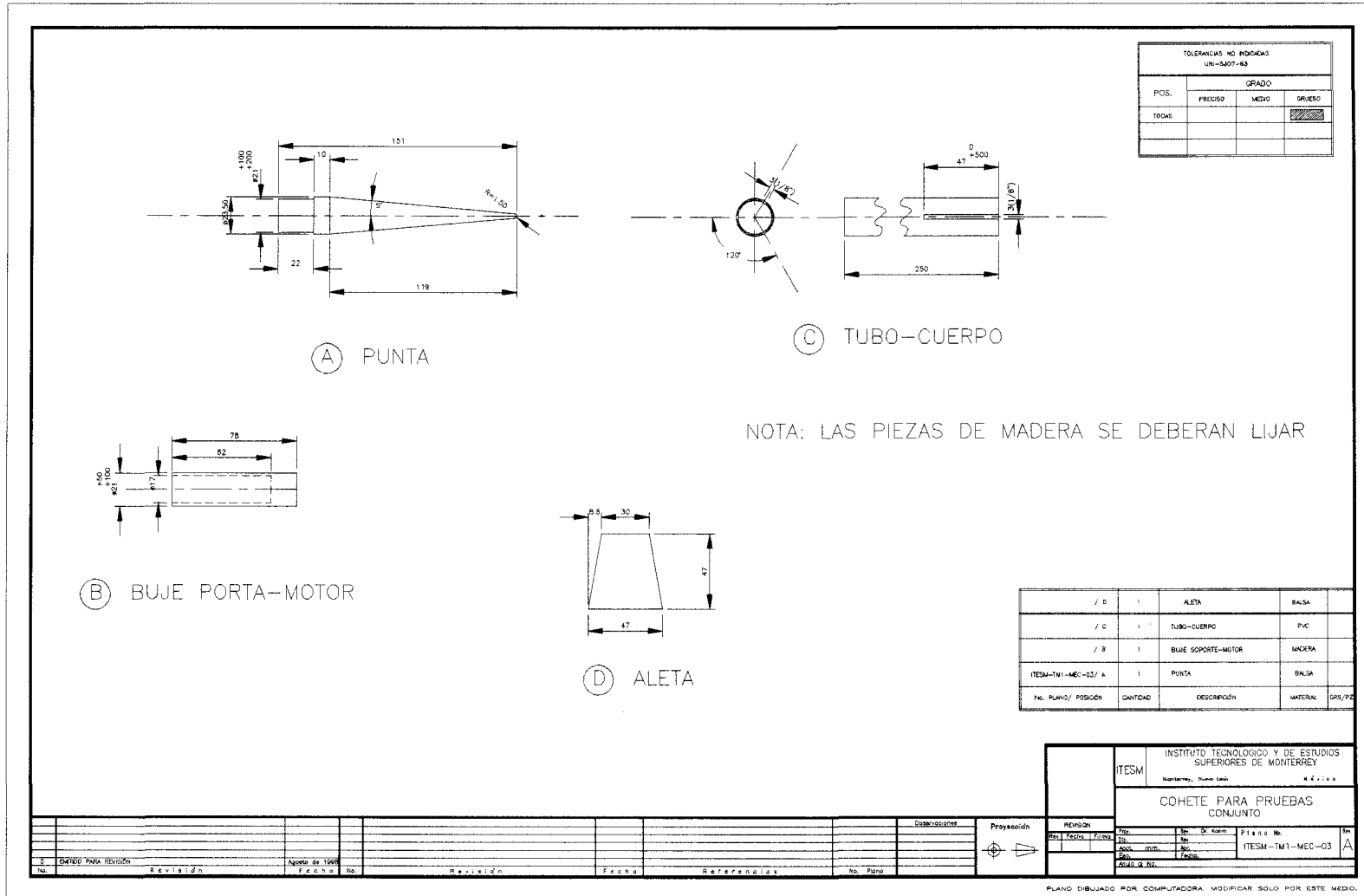
## Apéndice D

### Dibujo y cálculo del centro de presión del cohete a escala *Tonatiuh*

#### D.1. Introducción

En este apéndice se presenta el dibujo del cohete *Tonatiuh*, así como también, el cálculo de su centro de presión utilizando el programa computacional de la referencia [44].

D.2. Dibujo del cohete *Tonatiuh*





### D.3. Cálculo del centro de presión del cohete *Tonatiuh*

Nose Cone		Trans Sec		Fin Unit		Mass Item	
Vehicle Description: COHETE TONATIUH							Notes
Component Description	Mass gm	Mass Position mm	Rel Aero Force Coef	Force Position mm	Rel Aero Force Moment		
<i>Nose Cone</i>	2.9	271.0	2.000	296.7	-15.56		
<i>Trans Sec 1</i>	46.8	91.0	-0.018	125.1	0.02		
<i>Fin Unit 1</i>	1.6	23.5	25.258	33.3	65.41		
<i>Sustainer</i>		$\Sigma$ Mass	C. G.	$\Sigma$ C.N.	C. P.		
		51.3	99.1	27.240	52.6		
		<i>Length Diameter</i>		<i>L/D</i>		<i>Margin</i>	
		390.0	22.0 mm	17.73	2.11		Cal

3

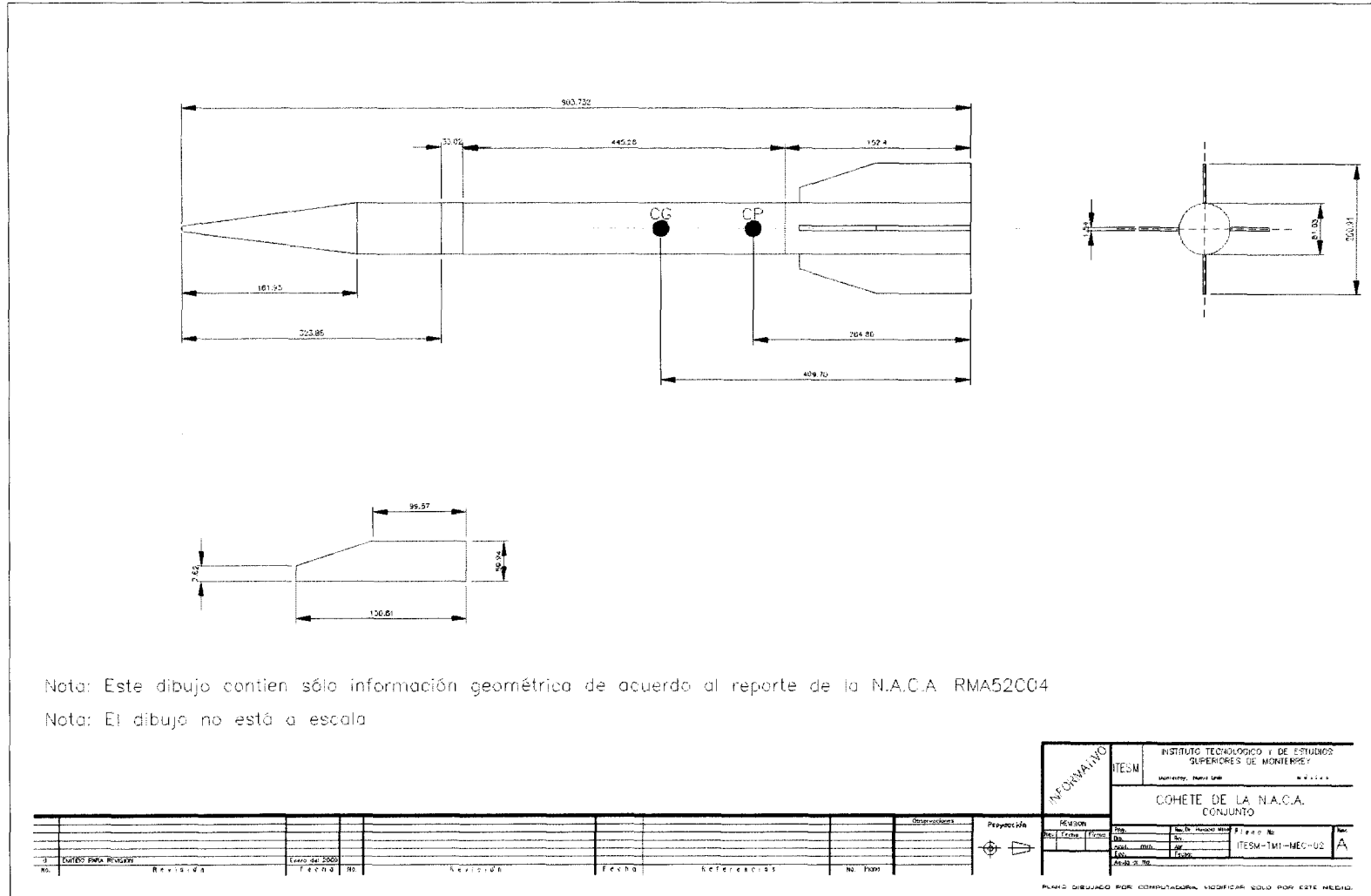
## Apéndice E

### Dibujo y cálculo del centro de presión del cohete de la *NACA*

#### E.1. Introducción

En este apéndice se presenta el dibujo del cohete de la *NACA* el cual se obtuvo de la referencia [41], así como también, el cálculo de su centro de presión utilizando el programa computacional de la referencia [44].

### E.2. Dibujo del cohete de la NACA



## E.3. Cálculo del centro de presión del cohete de la NACA

Nose Cone	Trans Sec	Fin Unit	Mass Item		
Vehicle Description:			Cohete de 8cm de diámetro	Notes	
Component Description	Mass gm	Mass Position mm	Rel Aero Force Coef	Force Position mm	Rel Aero Force Moment
<i>Nose Cone</i>	0.0	630.7	2.000	776.5	-28.88
<i>Trans Sec 1</i>	9000.0	409.7	-0.001	315.4	-0.01
<i>Fin Unit 1</i>	0.0	0.0	5.753	86.9	73.11
<i>Sustainer</i>	$\Sigma$ Mass	C. G.	$\Sigma C_N$	C. P.	
	9000.0	409.7	7.752	264.8	
	Length	Diameter	L/D	Margin	Cal
	903.7	81.0 mm	11.15	1.79	

4

Pgm Mode: CP/CG Calc	Eqn Mode: Barrowman	Disp Units: mm/gm
----------------------	---------------------	-------------------

# Apéndice F

## Antecedentes de métodos en el cálculo de trayectorias de cohetes

### F.1. Introducción

Este apéndice complementa con una breve descripción a los métodos de solución presentados en la tabla 5.1 del capítulo 5. Estos métodos han sido utilizados en la solución de las ecuaciones de movimiento de cohetes durante el transcurso de la historia. Mayores detalles se encuentran en la bibliografía en que cada uno de éstos hace referencia.

### F.2. Métodos utilizados

Antes de la Primera Guerra Mundial, cuando los proyectiles cohetes se disparaban con ángulos de lanzamiento pequeños (menos de  $15^\circ$  o  $20^\circ$ ), el método Siacci fue comúnmente utilizado para calcular las trayectorias. Durante el transcurso de la Guerra llegaron a ser comunes el uso de trayectorias con grandes ángulos de lanzamiento y fueron desarrollados en los Estados Unidos por F. Moulton nuevos métodos basados en

integración numérica. Estos métodos fueron adaptados a la balística después de sus primeros usos en la Astronomía [29], y [31].

El empleo de una amplia variedad de técnicas de aproximación, las cuales pueden ser utilizadas para el cálculo de las trayectorias de los proyectiles cohetes, son determinadas, principalmente, por la velocidad del proyectil cohete y la elevación de la trayectoria. De acuerdo a la complejidad, los métodos que se pueden utilizar son los que se presentan a continuación.

### *Aproximación en el vacío*

Cuando la velocidad es pequeña, el ángulo de lanzamiento es pequeño, y el proyectil cohete es bastante pesado (tal que el alcance sea corto y los efectos atmosféricos sean pequeños), las ecuaciones desarrolladas en un principio para las trayectorias en vacío pueden ser utilizadas con buena exactitud [29], y [18]. Por dar algunas de las referencias en este tema considerando trayectorias al vacío, en [30] se presenta el análisis de un cohete al vacío y que considera a la tierra como una esfera no giratoria, en [31] se realiza el análisis con la misma consideración anterior, y en [15] se lleva a cabo el análisis considerando la rotación terrestre.

### *Método Didion-Bernoulli*

Este método puede ser utilizado cuando el ángulo de lanzamiento es pequeño (menor de  $20^\circ$ ) y la velocidad sea menor de 800 ft/s (240 m/s), así la *fuerza de arrastre* puede ser considerada proporcional al cuadrado de la velocidad. Las variables en las ecuaciones de movimiento están separadas para su empleo, en ciertos lugares críticos de la solución, tal que la aproximación de  $\sec \phi = Cte$ . Una vez que esta suposición es admitida, la solución es exacta y es encontrada en fórmulas escribiendo alrededor de cuatro funciones. Estas funciones y los valores apropiados de la representación constante de  $\sec \phi$  son tabuladas y, junto con las fórmulas representado la solución de las ecuaciones de movimiento, hacen posible el cálculo con una exactitud muy cercana, de las trayectorias a bajas velocidades y pequeños ángulos de lanzamiento [18], y [29].

### ***Método Siacci***

Este método es exacto y utilizado para trayectorias de proyectiles cohetes de altas velocidades con pequeños ángulos de lanzamiento. Las suposiciones básicas son que la densidad atmosférica en cualquier lugar de la trayectoria es aproximadamente constante y que el ángulo de lanzamiento es menor de  $15^\circ$ . Las ecuaciones de movimiento pueden entonces ser colocadas en cierta forma, permitiendo una solución en término de las fórmulas para  $t$ ,  $x$ ,  $y$  y  $\tan\phi$ . Estas fórmulas, utilizadas junto con las tablas de cuatro funciones involucradas en la solución, producen las trayectorias de proyectiles cohetes lanzados a bajos ángulos de lanzamiento [18], [29] y [31].

### ***Método Otto-Lardillon***

Para trayectorias de proyectiles cohetes a bajas velocidades (tal que la fuerza de arrastre sea proporcional a la velocidad al cuadrado) y los ángulos de lanzamiento pudieran ser grandes, pueden obtenerse soluciones aproximadas de las ecuaciones de movimiento por integración numérica y entonces ser tabuladas [18], y [29].

### ***Integración Numérica***

Cuando son utilizados proyectiles cohetes a altas velocidades y grandes ángulos de lanzamiento, todos los métodos anteriormente vistos utilizados en el campo de la balística darán soluciones suficientemente exactas. La introducción de altas velocidades y grandes ángulos de lanzamiento incrementan la complejidad tanto en la variación del coeficiente de arrastre, tal que la fuerza de arrastre no será una función simple de la velocidad al cuadrado, como en las variaciones de la densidad atmosférica a lo largo de la trayectoria. Moulton y sus asociados introdujeron el método de aproximación numérica, ampliamente utilizado en la astronomía, para obtener las soluciones a estas trayectorias [29], y [32].

Desde el advenimiento de los cohetes viajando a grandes alturas en la atmósfera, el método de integración numérica ha sido ampliamente utilizado. La complejidad del problema es tal que las nuevas computadoras con grandes capacidades de manejo y gran capacidad de almacenamiento, son necesarias para obtener soluciones en forma rápida.

La aproximación básica en la solución de problemas de trayectorias en movimiento plano de cohetes, es determinar las condiciones  $x$ ,  $y$ ,  $dx/dt$ ,  $dy/dt$  y  $\phi$  en el final de la combustión y regresar a lo largo de la trayectoria hipotética para determinar las coordenadas, la velocidad, y el ángulo de lanzamiento del proyectil cohete, el cual, pasará a través del mismo punto con el mismo vector velocidad de un cohete equivalente que consumió su combustible [29].



# Apéndice G

## Determinación del ángulo de lanzamiento

### G.1. Introducción

Este apéndice describe en forma detallada el barrido de trayectorias para encontrar el ángulo  $\phi_b$  dado un  $x_b$  y un  $y_b$ , esto, auxiliándose de gráficas y de un ejemplo. Este apéndice es el complemento de la explicación resumida presentada en la sección 5.5.3 del capítulo 5.

### G.2. Metodología empleada

Para explicar la metodología, se ilustra el siguiente ejemplo.

*Ejemplo:* Dado un motor y un cohete cualquiera, supóngase que los requerimientos de llegada al blanco son,

$$x_b = 3,000m \quad y \quad y_b = 1,760m$$

Por lo tanto, el programa deberá calcular el ángulo de lanzamiento  $\phi_b$  que satisfaga estos requerimientos.

La metodología es la siguiente,

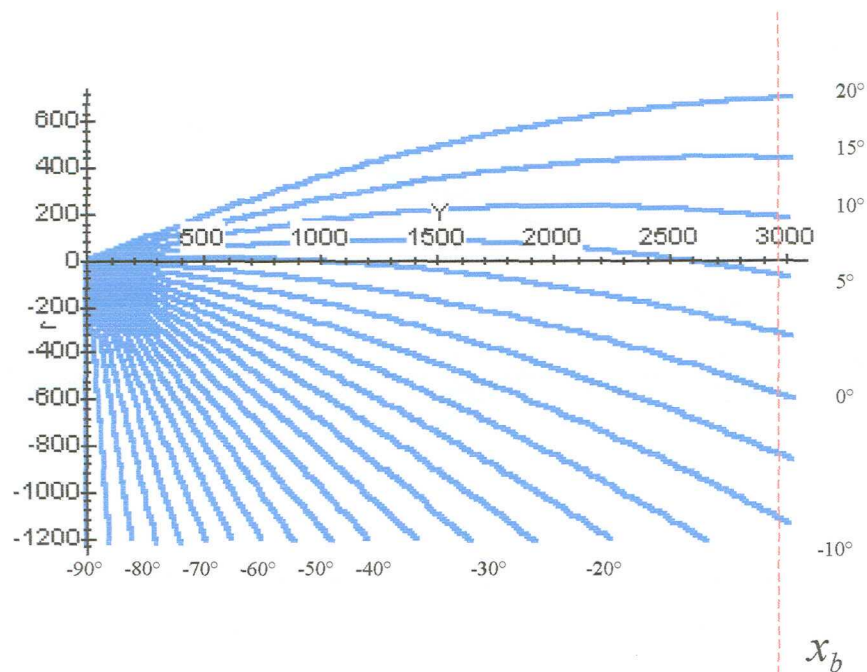
1. En primer lugar, el programa lleva a cabo un barrido de trayectorias comenzando desde un ángulo inicial de  $-90^\circ$  (dado por default para rastrear los dos cuadrantes cartesianos, esto implica que el blanco puede ser dado tanto en valores positivos como negativos en la vertical), cada trayectoria es calculada hasta que se cumpla alguna de las dos siguientes condiciones,

a).  $abs(x_i - x_{i-1}) \geq tol$ , ó

b).  $x_i < x_b$

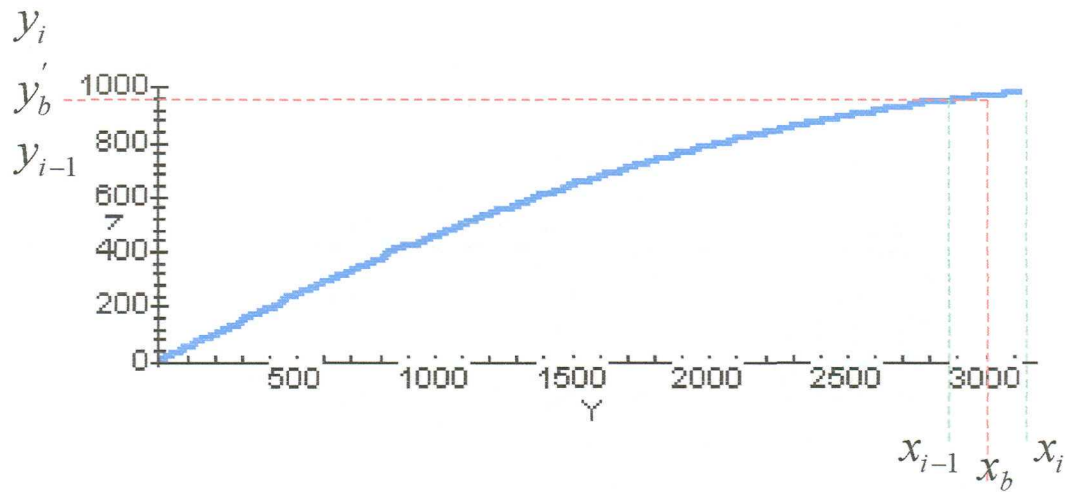
donde  $tol$  es un número muy pequeño y en este momento en el programa tiene un valor de  $tol = 0.0001$ . En la figura G.1, se muestra el barrido de trayectorias comenzando con un ángulo de  $-90^\circ$  y con incrementos de  $5^\circ$  (en simulaciones realizadas previamente se determinó que con un intervalo de  $5^\circ$  los resultados son adecuados) entre cada una de éstas.

De la figura G.1, puede notarse que en las trayectorias con ángulos desde  $-90$  hasta  $-15^\circ$ , el final de la trayectoria es gobernada por la **condición a)**, mientras que las demás trayectorias son gobernadas por la **condición b)**.



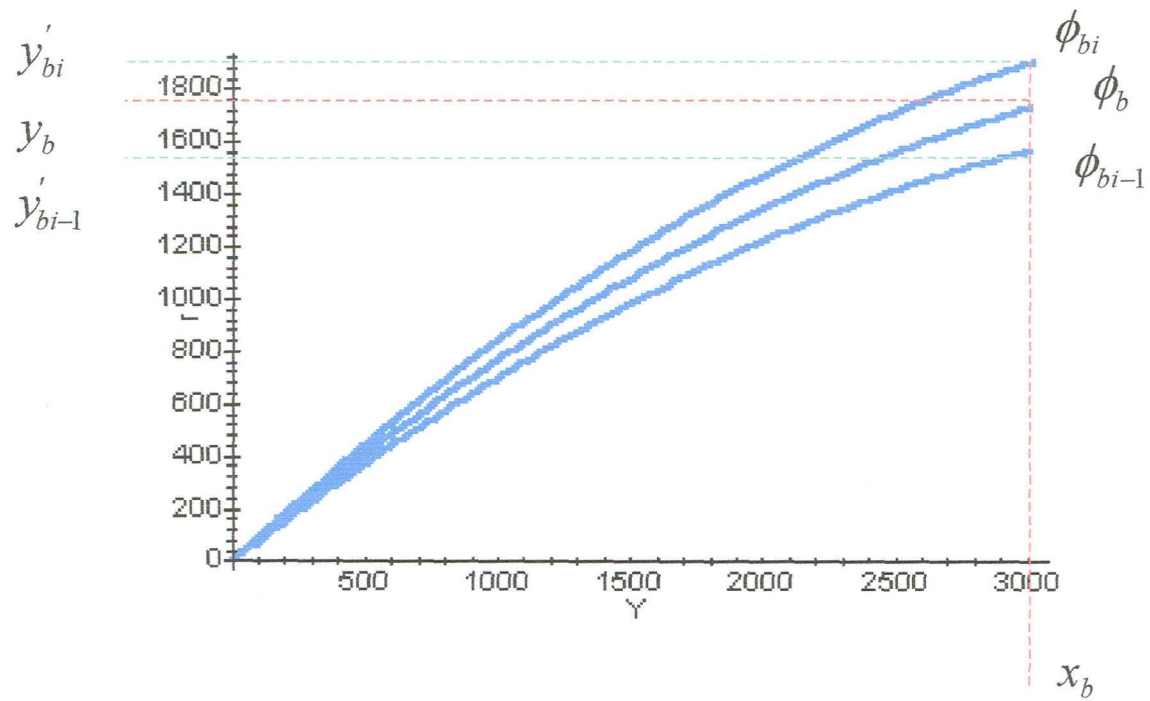
*Figura G.1.* Barrido de trayectorias comenzando con un ángulo inicial de  $-90^\circ$  y con incrementos de  $5^\circ$ .

2. A partir de cada  $x_i$  calculada le corresponde una  $y_i$ . Como el proceso es iterativo, el valor de  $x_b$  se encuentra entre  $x_i > x_b > x_{i-1}$  de acuerdo a la **condición b)**. Así, para determinar un valor de  $y'_b$  que le corresponda a  $x_b$ , se utiliza la interpolación de la ecuación (5.82) y ésta es llevada a cabo en cada una de las trayectorias, como es mostrado en la figura G.2. Notar de la figura G.2 que los valores de  $y'_b$ ,  $y_i$ ,  $y_{i-1}$  están tan juntos que, en la gráfica no se alcanzan a apreciar las líneas horizontales de intersección con el eje vertical (sólo se alcanza a notar la línea para  $y'_b$ ).



**Figura G.2.** Determinación de  $y'_b$  correspondiente a  $x_b$ .

3. Finalmente como se muestra en la figura G.3, cada valor calculado de  $y'_{bi}$  en la trayectoria junto con su iteración anterior  $y'_{bi-1}$  y sus correspondientes ángulos  $\phi'_{bi}$  y  $\phi'_{bi-1}$ , son utilizados para obtener el valor de  $\phi_b$  de acuerdo con la ecuación (5.83), tal que se deba cumplir  $y'_{bi} > y_b > y'_{bi-1}$ .



**Figura G.3.** Determinación del ángulo del blanco requerido  $\phi_b$  para satisfacer los requerimientos de llegada  $x_b$  y  $y_b$ .

# Apéndice H

## Métodos numéricos utilizados en la solución de las ecuaciones de movimiento

### H.1. Introducción

Este apéndice está dividido en dos partes que contienen una descripción breve de los métodos numéricos utilizados en la solución de las ecuaciones de movimiento. Este apéndice complementa la descripción realizada en la sección 5.5.2 del capítulo 5, la cual hace referencia al método de Diferencias Centradas y el de Newton Raphson, esto es descrito en la primera parte de este apéndice.

En la segunda parte del apéndice, se presenta una breve descripción del método de Runge-Kutta Felbergh de quinto orden, el cual se menciona en la sección 5.6.2 del capítulo 5.

## H.2. Método de Diferencias Centradas y de Newton Raphson

*El Método de Diferencias Centradas* es utilizado para aproximar las primeras derivadas de la expansión de la serie de Taylor hacia atrás y hacia delante, es decir, se obtiene al restar la expansión de Taylor hacia atrás (se utiliza hacia atrás con la finalidad de calcular un valor anterior sobre el valor actual) en su primera derivada y así se le resta a la expansión de Taylor hacia delante (se utiliza hacia adelante con la finalidad de calcular un valor posterior sobre el valor actual).

Mediante una expansión en la Serie de Taylor de primer orden se tiene,

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)\Delta + \frac{1}{2} f''(x_i)\Delta^2 \quad (\text{H.1})$$

Así, las fórmulas de diferencias divididas finitas centrales son [35]:

*Primera derivada:*

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2\Delta} \quad (\text{H.2})$$

*Segunda derivada:*

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{\Delta^2} \quad (\text{H.3})$$

donde;

$$\Delta = (x_{i+1} - x_i) \quad (\text{H.4})$$

Debido a que las ecuaciones (5.35) y (5.36) son ecuaciones no lineales, es obvio que se debe resolver empleando un método numérico que sea utilizado para tal finalidad. El método utilizado en este análisis es el *Método de Newton-Raphson*. Este método enfocado al análisis de un sistema de  $n$  ecuaciones algebraicas está basado en la expansión de  $n$  funciones con  $n$  incógnitas, utilizando hasta la primera derivada de la Serie de Taylor. Así, la fórmula del *Método de Newton-Raphson* para  $n$  ecuaciones algebraicas en forma general es [35]:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}_{(i+1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}_{(i)} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(i)}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \cdot \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}_{(i)} \quad (\text{H.5})$$

es decir,

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{X}_i - \mathbf{J}(\mathbf{X}_i)^{-1} * \mathbf{F}(\mathbf{X}_i) \quad (\text{H.6})$$

donde:

$\mathbf{J}(\mathbf{X}_i)$  se conoce como la matriz jacobiana.

### H.3. Método de Runge-Kutta Felbergh

En este método el error de truncamiento local es estimado como el resultado de la sustracción realizada de valores obtenidos en dos predicciones usando métodos de Runge-Kutta de diferente orden. El método de Runge-Kutta Felbergh usa el método de Runge-Kutta de quinto orden que emplea las funciones de evaluación del método de Runge-Kutta de cuarto orden, así esta aproximación da el error estimado en la base de seis funciones de evaluación. A continuación se presentan las ecuaciones de este método [35], y [39],



La fórmula de cuarto orden es implantada,

$$y_{i+1} = y_i + h \left( \frac{25}{216} k_1 + \frac{1408}{2565} k_3 + \frac{2197}{4104} k_4 - \frac{1}{5} k_5 \right) \quad (\text{H.7})$$

con la fórmula de quinto orden,

$$y_{i+1} = y_i + h \left( \frac{16}{135} k_1 + \frac{6656}{12825} k_3 + \frac{28561}{56430} k_4 - \frac{9}{50} k_5 + \frac{2}{55} k_6 \right) \quad (\text{H.8})$$

donde,

$$k_1 = 2f(x_i, y_i) \quad (\text{H.9a})$$

$$k_2 = f \left( x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{4}hk_1 \right) \quad (\text{H.9b})$$

$$k_3 = f \left( x_i + \frac{3}{8}h, y_i + \frac{3}{32}hk_1 + \frac{9}{32}hk_2 \right) \quad (\text{H.9c})$$

$$k_4 = f \left( x_i + \frac{12}{13}h, y_i + \frac{1932}{2197}hk_1 - \frac{7200}{2197}hk_2 + \frac{7296}{2197}hk_3 \right) \quad (\text{H.9d})$$

$$k_5 = f \left( x_i + h, y_i + \frac{439}{216}hk_1 - 8hk_2 + \frac{3680}{513}hk_3 - \frac{845}{4104}hk_4 \right) \quad (\text{H.9e})$$

$$k_6 = f \left( x_i + \frac{1}{2}h, y_i - \frac{8}{27}hk_1 + 2hk_2 - \frac{3544}{2565}hk_3 + \frac{1859}{4104}hk_4 - \frac{11}{40}hk_5 \right) \quad (\text{H.9f})$$

El estimado del error es obtenido sustrayendo las ecuaciones (H.7) y (H.8), como,

$$\Delta_p = h \left( \frac{1}{360} k_1 - \frac{128}{4275} k_3 - \frac{2197}{75240} k_4 + \frac{1}{50} k_5 + \frac{2}{55} k_6 \right) \quad (\text{H.10})$$

Ahora que se tiene estimado el error  $\Delta_p$ , éste puede ser utilizado para ajustar el tamaño de paso. En general, la estrategia es incrementar el tamaño de paso si el error es muy pequeño y decrementarlo si el error es muy grande. Se utiliza el siguiente criterio para llevar a cabo esta estrategia [35], y [39],

$$h_n = h_p \left| \frac{\Delta_n}{\Delta_p} \right|^\alpha \quad (\text{H.11})$$

donde  $h_p$  y  $h_n$  son los tamaños de paso presente y nuevo respectivamente. Además  $\Delta_p$  es el error presente calculado en la ecuación (H.11),  $\Delta_n$  es la exactitud deseada, y  $\alpha$  es una constante que es igual a 0.2 cuando el tamaño de paso es incrementado ( $\Delta_p \leq \Delta_n$ ) y 0.25 cuando el tamaño de paso es decrementado ( $\Delta_p > \Delta_n$ ).

Una manera general para determinar  $\Delta_n$  es,

$$\Delta_n = \varepsilon y_s \quad (\text{H.12})$$

donde  $\varepsilon$ , es un nivel de tolerancia general que puede ser del orden de  $10^{-6}$ , [35], y [39], y,

$$y_s = |y| + \left| h \frac{dy}{dx} \right| \quad (\text{H.13})$$

Centro de Información-Biblioteca

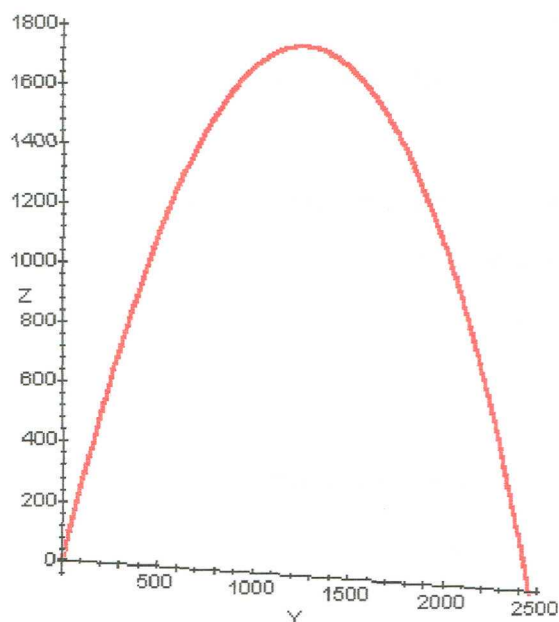


3000200682439

De la misma forma que el análisis anterior, sólo que ahora se procedió a llevar a cabo el análisis del cohete de la *NACA* lanzado con un ángulo de  $70^\circ$ , como se muestra en la figura 6.17 y considerando,

- Longitud de la varilla de la plataforma de lanzamiento: 3.325 m.

### TRAYECTORIA CON FUERZA DE ARRASTRE



**Figura 6.17.** Simulación de la trayectoria del cohete de la *NACA* con un ángulo de lanzamiento de  $70^\circ$ .

### 6.9. Modelo matemático que considera seis grados de libertad del cohete.

Utilizando el programa que simula trayectorias de cohetes sonda con seis grados de libertad, se procedió a llevar a cabo el análisis del cohete de la *NACA* con un motor

modelo K1050W-PLUG de la marca *AEROTECH*, con las características mencionadas anteriormente y considerando además,

- Longitud de la varilla de la plataforma de lanzamiento: 3.325 m.

Los pasos que se siguieron para llevar a cabo el análisis fueron los siguientes:

1. *Definición de los datos de entrada iniciales.*

Ángulo de latitud geográfica del lanzador.

$$\mu_0 = 0^\circ$$

Altura del lanzador sobre el nivel del mar.

$$z_{nm} = 0 \text{ mts}$$

Velocidad traslacional inicial respecto al eje axial del cohete en coordenadas ABC.

$$\begin{bmatrix} 27m / \text{seg} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tiempo inicial de lanzamiento.

$$t_0 = 0.22 \text{ seg}$$

2. *Definición de las coordenadas del blanco* (deberá notarse que las coordenadas al blanco fueron seleccionadas para obtener un ángulo de  $20^\circ$  de elevación y  $0^\circ$  de acimut previstos con anticipación, esto con la finalidad de poder realizar la comparación de los tres modelos matemáticos).

Latitud geográfica de llegada requerida.

$$\mu_{blanco} = 0.04^\circ$$

Altura sobre el nivel del mar de llegada requerida.

$$h_{blanco} = 0 \text{ mts}$$

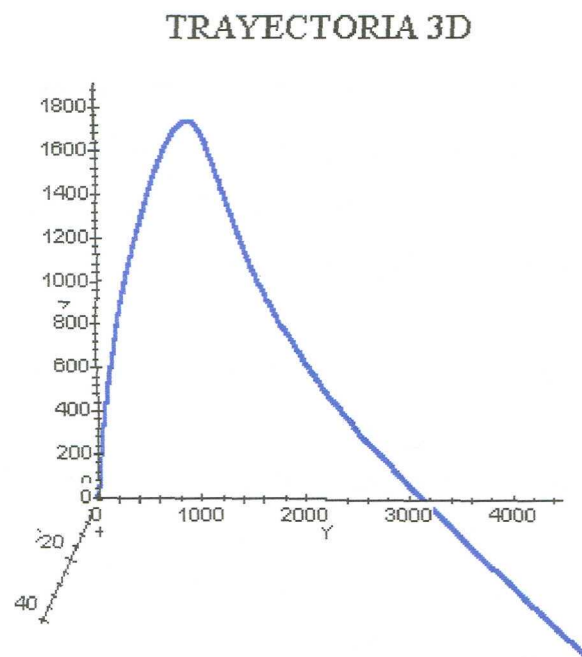
### 3. Cálculo del valor del ángulo a utilizar.

El programa calcula el ángulo requerido y como resultado se obtiene:

Ángulo de elevación y de acimut de lanzamiento.

$$\theta_0 = 20^\circ, \quad \alpha_0 = 0^\circ$$

### 4. Gráfica de la simulación de la trayectoria.



**Figura 6.18.** Simulación de la trayectoria del cohete *NACA* con ángulos de lanzamiento de  $20^\circ$  de elevación y  $0^\circ$  de acimut.

$$\text{Vector de posición de llegada} = \begin{bmatrix} 40.223 \\ 4020.002 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ en metros.}$$

Notar que el efecto de la velocidad del viento fue mayor que el efecto de la rotación de la tierra en el desvío del cohete, ya que los vientos son positivos hacia la dirección Este a la cual el cohete fue desviado.

## **6.10. Comparación y comentarios de resultados obtenidos con los diferentes modelos matemáticos.**

En esta sección del capítulo se resumirán en una tabla las consideraciones hechas para cada uno de los modelos matemáticos presentados en los casos de estudio anteriores y posteriormente se compararán los resultados para cada caso de estudio bajo análisis

### ***6.10.1. Resumen de consideraciones utilizadas en las simulaciones.***

Con la finalidad de comparar las suposiciones realizadas en los diferentes modelos matemáticos presentados en secciones anteriores de este capítulo, a continuación se definirán los términos que serán utilizados en la tabla 6.3.

***Modelo # 1.*** Trayectoria al vacío con movimiento plano, sección 5.4 del capítulo 5 (ver ecuaciones 5.13 y 5.14; y la tabla 5.2).

***Modelo # 2.*** Trayectoria con fuerza de arrastre y movimiento plano, sección 5.5 del capítulo 5 (ver ecuaciones 5.35 y 5.36).

***Modelo # 3.*** Trayectoria con seis grados de libertad, sección 5.6 del capítulo 5 (ver ecuaciones 5.3, 5.4, 5.5 y 5.6).