

**INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE
MONTERREY**

CAMPUS MONTERREY

DIVISIÓN DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA

PROGRAMA DE GRADUADOS EN INGENIERÍA



**TECNOLÓGICO
DE MONTERREY®**

UN ELEMENTO ARTERIA PARA MODELAR FLUJO VASCULAR

TESIS

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO

ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN

ADMINISTRACIÓN DE LA CONSTRUCCIÓN

POR:

ALFREDO ROBLES VÉLEZ

MONTERREY, N. L.

MAYO 2007

**INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE
MONTERREY**

CAMPUS MONTERREY

DIVISIÓN DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA

PROGRAMA DE GRADUADOS EN INGENIERÍA

Los miembros del comité de tesis recomendamos que el presente proyecto de tesis presentado por el Ing. Alfredo Robles Vélez sea aceptado como requisito parcial para obtener el grado académico de:

**Maestro en Ciencias con especialidad en
Administración de la Construcción**

Comité de tesis:

Sergio Gallegos Cázares, Ph. D.

Asesor

Jorge A. Cortés Ramírez, Ph. D.

Sinodal

Carlos I. Rivera Solorio, Ph. D.

Sinodal

Aprobado:

Francisco Ángel Bello, Ph. D.

Director del Programa de Graduados en Ingeniería

MAYO 2007

Agradecimientos

A Dios, por brindarme la oportunidad de terminar una etapa más en mi vida.

A mi asesor el Dr. Sergio Gallegos Cázares, por su apoyo, paciencia e interés en el desarrollo de éste trabajo.

Al Dr. Jorge A. Cortés Ramírez, por su participación como parte del comité de tesis y por su apoyo durante el último año de mis estudios.

Al Dr. Carlos I. Rivera Solorio, por su participación como parte del comité de tesis y sus comentarios sobre el área de mecánica de fluidos.

A mis profesores, por todas sus enseñanzas y consejos.

A mis compañeros, por su amistad, confianza y ayuda.

A la Cátedra de Bioingeniería, por el apoyo que me brindaron para poder terminar mi maestría.

Al Centro de Diseño y Construcción y el Departamento de Ingeniería Civil, por el apoyo que me brindaron durante los primeros años de mis estudios.

Dedicada a mis padres y hermanos, por todo su apoyo.

Resumen

Para ayudar a los médicos en la decisión sobre posibles terapias de tratamiento cardiovascular se requieren modelos del sistema arterial que les permitan evaluar de una forma cuantitativa los beneficios y riesgos de cada una de ellas. Para esto, es necesario desarrollar modelos computacionales del flujo arterial, para lo cual existen diferentes alternativas.

Se presenta en este trabajo un modelo de elementos finitos unidimensional que considera la conservación de masa y momentum lineal de la sangre a lo largo de un eje axial de la arteria, así como también la elasticidad de las paredes arteriales. La formulación es novedosa en cuanto a que emplea el planteamiento del cálculo incremental finito (FIC) para incluir en la formulación fuerte de las ecuaciones diferenciales del problema las dimensiones de los elementos. A partir de las ecuaciones modificadas es posible desarrollar algoritmos numéricos estables para la solución de éste problema.

Finalmente, se presentan ejemplos de validación para el flujo sanguíneo en conductos y se comenta sobre el desarrollo a futuro en ésta dirección.

Índice

Capítulo 1

Introducción.....	1
1.1 Antecedentes.....	1
1.2 Definición del problema.....	2
1.3 Objetivo.....	3
1.4 Justificación.....	3
1.5 Método.....	4
1.6 Organización de la tesis.....	5

Capítulo 2

Ecuaciones generales y formulación.....	6
2.1 Objetivo.....	6
2.2 Forma general de la ecuación de momentum.....	6
2.3 Ecuación de momentum en 1-D.....	7
2.3.1 Ecuación diferencial estándar para flujo en 1-D.....	7
2.3.2 Ecuación estabilizada para flujo en 1-D.....	14
2.3.3 Condiciones de frontera.....	16
2.4 Forma general de la ecuación de masa.....	18
2.5 Ecuación de masa en 1-D.....	19
2.5.1 Ecuación diferencial estándar de masa en 1-D.....	21
2.5.2 Ecuación estabilizada de masa en 1-D.....	25
2.5.3 Condiciones de frontera.....	27
2.6 Forma alterna de la ecuación de continuidad.....	27
2.7 Relación constitutiva (presión-área).....	30
2.8 Resumen de ecuaciones estabilizadas.....	35
2.9 Forma alterna de las ecuaciones en términos de flujo y presión.....	37

2.9.1 Ecuación de momentum.....	37
2.9.2 Ecuación de continuidad.....	40
2.9.3 Relación constitutiva.....	41

Capítulo 3

Discretización mediante elementos finitos.....	42
3.1 Objetivo.....	42
3.2 Método de residuos pesados.....	42
3.3 Proyecciones de los gradientes.....	43
3.4 Forma débil de la ecuación de momentum.....	44
3.5 Forma débil de la ecuación de masa.....	48
3.6 Resumen de ecuaciones en su forma débil.....	49
3.7 Formas de interpolación.....	50
3.8 Forma matricial de la ecuación de momentum.....	51
3.9 Forma matricial de la ecuación de masa.....	53
3.10 Forma matricial de las proyecciones de los gradientes.....	54
3.11 Resumen de ecuaciones en su forma matricial.....	55
3.12 Selección del tipo de elemento.....	55
3.13 Forma específica de la ecuación de momentum.....	56
3.14 Forma específica de la ecuación de masa.....	58
3.15 Forma específica de las proyecciones de los gradientes.....	58

Capítulo 4

Método de solución.....	60
4.1 Objetivo.....	60
4.2 Ecuaciones básicas.....	60
4.3 Aproximación en el tiempo.....	61
4.4 Esquema de solución transitoria.....	62
4.5 Esquema de paso fraccional.....	62

4.6 Resumen de ecuaciones discretas.....	64
4.7 Algoritmo de solución implícito.....	65

Capítulo 5

Ejemplos de validación.....	70
5.1 Objetivo.....	70
5.2 Pruebas de parcela.....	71
5.2.1 Presión constante.....	72
5.2.2 Flujo constante.....	79
5.3 Prueba hidrostática.....	82
5.4 Validación a nivel sistema.....	87
5.4.1 Presión con variación lineal.....	88
5.4.2 Presión con variación parabólica.....	90
5.4.3 Presión con variación senoidal.....	93
5.5 Sistema con elementos elásticos.....	95

Capítulo 6

Conclusiones.....	99
6.1 Investigación a futuro.....	100

Referencias.....	103
-------------------------	------------

Apéndice A

Programas en MATLAB.....	107
A 1 Pruebas de parcela.....	107
A 2 Prueba hidrostática.....	114
A 3 Validación a nivel sistema.....	121
A 4 Sistema con elementos elásticos.....	128

Apéndice B

Temas adicionales.....	136
B 1 Teorema de transporte de Reynolds.....	136
B 2 Transporte por advección y difusión.....	137
B 2.1 Transporte de masa.....	139
B 2.2 Problema de transporte por advección y difusión en 1-D.....	141
B 2.3 Proceso de estabilización.....	145
B 2.4 Condiciones de frontera (Dirichlet y Neumann).....	148

Índice de figuras

Figura 2.1	Balance de momentum sobre segmento AB	8
Figura 2.2	Segmento de balance cercano a una frontera de Neumann.....	16
Figura 2.3	Segmento de balance con cambio de sección transversal.....	19
Figura 2.4	Balance de flujos sobre el segmento AB	21
Figura 2.5	Segmento de balance cercano a una frontera de Neumann.....	23
Figura 2.6	Conservación de masa sobre el segmento AB	25
Figura 4.1	Esquema de algoritmo de solución implícito.....	68
Figura 5.1	Parcela de tres elementos, $S = 0.5\text{cm}^2$	71
Figura 5.2	Definición del modelo.....	72
Figura 5.3	Propiedades del fluido.....	73
Figura 5.4	Condiciones iniciales.....	73
Figura 5.5	Definición de parámetros.....	74
Figura 5.6	Condiciones de frontera.....	74
Figura 5.7	Ensamble de arreglos.....	75
Figura 5.8	Calculo de presión.....	75
Figura 5.9	Corrección del flujo.....	76
Figura 5.10	Actualización de los gradientes.....	76
Figura 5.11	Resultados para flujo.....	78
Figura 5.12	Resultados para presión.....	78
Figura 5.13	Resultados para flujo.....	80
Figura 5.14	Resultados para presión.....	80
Figura 5.15	Resultados para flujo.....	81
Figura 5.16	Resultados para presión.....	82
Figura 5.17	Parcela de tres elementos, $S = 0.5\text{cm}^2$	83
Figura 5.18	Resultados para flujo.....	84
Figura 5.19	Resultados para presión.....	85
Figura 5.20	Resultados para flujo.....	86
Figura 5.21	Resultados para presión.....	87

Figura 5.22	Ensamble de 16 elementos, $S = 0.5\text{cm}^2$	88
Figura 5.23	Resultados para flujo.....	89
Figura 5.24	Comparación para flujo en estado estable.....	89
Figura 5.25	Resultados para presión.....	90
Figura 5.26	Resultados para flujo.....	91
Figura 5.27	Comparación para flujo en estado estable.....	92
Figura 5.28	Resultados para presión.....	92
Figura 5.29	Resultados para flujo.....	94
Figura 5.30	Comparación para flujo en estado estable.....	94
Figura 5.31	Resultados para presión.....	95
Figura 5.32	Resultados para flujo.....	96
Figura 5.33	Resultados para flujo en zona de interés, S variable.....	97
Figura 5.34	Resultados para flujo en zona de interés, S constante.....	97
Figura 5.35	Comparación para sección luminar.....	98
Figura 6.1	Punto de bifurcación.....	101
Figura B 1	Problema de transporte en 1-D por advección y difusión.....	142
Figura B 2	Balace de flujos sobre el segmento AB	142
Figura B 3	Balace de flujos sobre el segmento AB , fuente de generación lineal.....	146
Figura B 4	Segmento de balace cercano a una frontera de Neumann.....	149

Capítulo 1

Introducción

1.1 Antecedentes

La función primordial del sistema cardiovascular es proveer a los órganos y tejidos del cuerpo un flujo adecuado de la sangre a presiones apropiadas. Además, éste debe responder a cambios en la demanda del flujo sanguíneo ocasionados por actividades tales como el ejercicio y la digestión, y adaptarse a cambios crónicos, originados por acciones tales como el crecimiento y la presencia de enfermedades. Los vasos sanguíneos se contraen o dilatan para redistribuir el flujo de la sangre, expandiéndose para responder al incremento en el flujo y comprimiéndose para responder al decremento en el mismo, o aumentando su espesor para responder al aumento de esfuerzos de tensión. Los cambios de velocidad y presión en el flujo de la sangre son el estímulo para muchos de éstos procesos biológicos normales. Dichos cambios, los cuales ocurren a nivel celular, inician una cadena de señales bioquímicas que culminan en reorganizaciones a escalas molecular, celular, de tejido y sistema.

Además de modular procesos biológicos normales, los campos de velocidad y presión del flujo de la sangre influyen en la progresión de enfermedades cardiovasculares adquiridas y heredadas. Ya sea por el desarrollo del corazón en la etapa de gestación o por la adaptación de los vasos sanguíneos en respuesta a una malformación, las fuerzas de la mecánica de fluidos juegan un papel muy importante en la fisiopatología de enfermedades cardiovasculares congénitas. La aterosclerosis, una de las enfermedades cardiovasculares adquiridas más prevalente, involucra la acumulación de fibras y lípidos, principalmente colesterol, en la pared interna de las arterias provocando el estrechamiento de su luz, las cuales son proveedoras de sangre para organismos vitales tales como el cerebro y corazón, y extremidades inferiores. En México, se estima que dicha enfermedad es causante del 21.6% de las muertes y la cuarta causa de morbilidad [1,2]. Además, la perspectiva a futuro no es mejor, ya que el problema de

obesidad, que es uno de los principales detonantes de esta enfermedad, se incrementa. En México, se estima que 60% de la población sufre de sobre peso y que 30% lo sufre en grado severo [3], colocándolo en el sexto lugar mundial por obesidad; incluso, se estima que 35% de los niños en edad escolar sufren de obesidad [4]. Estos números presentan un serio problema de salud para el futuro inmediato del país. El costo para la sociedad mexicana por este tipo de enfermedades es difícil de estimar; sin embargo, de datos obtenidos para la Unión Europea [5], el costo estimado en 2006 fue de 169 billones de euros anuales con servicios médicos contando por el 62%, pérdidas en la productividad el 21% y cuidado informal el 17%.

Cabe mencionar que aunque los estímulos bioquímicos para el desarrollo de la aterosclerosis son difusos a lo largo del cuerpo, la enfermedad es muy local, encontrándose principalmente en los ramales y dobleces del árbol arterial. En contraste a la obstrucción de los vasos sanguíneos como resultado de la aterosclerosis, la enfermedad aneurismal resulta en la dilatación de los mismos, llevándolos en algunos casos hasta la ruptura. Uno de los lugares más comunes para la enfermedad aneurismal es la aorta infrarrenal abdominal, lugar en donde el flujo de la sangre es particularmente complejo y la recirculación de la misma se da bajo condiciones normales debido a los múltiples ramales existentes que llevan la sangre hacia los órganos en el abdomen.

1.2 Definición del problema

El cuantificar los campos de velocidad y presión del flujo de la sangre se ha vuelto un factor crítico para el diagnóstico, planeación de tratamientos y subsecuente seguimiento de pacientes que sufren de enfermedades cardiovasculares congénitas y adquiridas. Lo que pretenden las terapias médicas y quirúrgicas utilizadas para tratar este tipo de enfermedades es restaurar el flujo de la sangre comprometido con órganos y tejidos, o aislar regiones aneurismales de presiones altas. Idealmente, estas terapias resultan en la restauración de un flujo adecuado de la sangre a presiones fisiológicas apropiadas evitando condiciones adversas, tales como la recirculación y estasis, las cuales pueden conducir a procedimientos sin éxito y/o resultados insuficientes [6].

De lo anterior, se desprende que cualquier investigación que trate de mejorar nuestro conocimiento sobre estas enfermedades y ayude a predecir los resultados de las terapias para los que las sufren tiene, por lo tanto, un alto valor social.

1.3 Objetivo

Este trabajo tiene por objetivo el plantear un modelo físico y matemático básico, que permita modelar el flujo vascular sanguíneo en forma unidimensional mediante las ecuaciones de conservación de momentum lineal y de masa. Se incluye el efecto de la flexibilidad de la pared arterial bajo la presión interna y el efecto del cambio de sección luminal del conducto a lo largo de su eje axial.

El proyecto nace como parte de un trabajo de investigación interdisciplinaria entre las escuelas de ingeniería y medicina del Tecnológico de Monterrey, cuyo objetivo final es producir un marco computacional integral, que permita evaluar la presión y flujo en árboles arteriales, como herramienta de ayuda para el cardiólogo al evaluar alternativas de terapias en pacientes específicos.

1.4 Justificación

En los últimos 10 años ha comenzado a surgir una tendencia en la medicina, en la que además del punto de vista clínico, que es el tradicional, se emplean modelos computacionales para simular los problemas médicos. Tal es el caso de los problemas de circulación sanguínea en donde actualmente existen diversos grupos de investigadores proponiendo marcos computacionales integrales, basados en planteamientos físicos y matemáticos adecuados, que representen éste problema correctamente [7,8,9]. Con éste tipo de modelos se ha podido profundizar en el conocimiento de las enfermedades, mejorar el diagnóstico y simular el resultado de diversas alternativas de terapia que permiten seleccionar la mejor en forma

cuantitativa. La descripción precisa del flujo vascular sanguíneo es un problema de flujo tridimensional acoplado con la deformación de las paredes arteriales, en donde la complejidad y el tamaño de los modelos utilizados obligan al uso de multiprocesadores para entregar resultados en un tiempo razonable [10]. Sin embargo, para realizar una evaluación de las posibles alternativas de terapia, el cardiólogo necesita de una herramienta más sencilla, que le permita evaluar de manera global, pero cuantitativamente, los beneficios de diversas opciones médicas. Además, para poder comprender de manera adecuada el planteamiento de formulaciones tridimensionales y su implementación dentro de algoritmos de solución, es necesario primero estudiar casos más simples de modo que se pueda apreciar con claridad que suposiciones o consideraciones se deben de manejar para poder desarrollar posteriormente modelos más complejos.

1.5 Método

El desarrollo de métodos numéricos eficientes y robustos para el análisis de flujo incompresible ha sido objeto de estudio durante las últimas décadas [11]. Se ha destinado mucho tiempo y recursos para poder desarrollar métodos numéricos estabilizados que puedan tratar con las dos fuentes principales de inestabilidad en éste tipo de análisis, provocadas por el carácter advectivo-difusivo de las ecuaciones y la incompatibilidad entre los campos de presión y velocidad.

Para lograr que el planteamiento genere formulaciones robustas y estables de elementos finitos, se emplea la formulación de cálculo incremental finito (FIC), que se ha empleado con mucho éxito en la solución de problemas de fluidos anteriormente [12]. A diferencia de otros métodos, el FIC se basa en hacer el balance de flujos sobre un dominio de tamaño finito, empleando expansiones de Taylor alrededor de un punto. Esto permite introducir de manera natural términos adicionales en la forma diferencial de las ecuaciones de balance de momentum y masa, los cuales están en función del tamaño del dominio. Además, estos términos son los encargados de proveer la estabilización necesaria al sistema de ecuaciones discreto obtenido mediante la forma estándar de elementos finitos. A partir de este punto, es posible proponer

diferentes métodos de solución que permitan resolver las ecuaciones muestreando en un tiempo específico.

1.6 Organización de la tesis

El presente trabajo está organizado de la siguiente forma: el capítulo 2 muestra el desarrollo de la formulación fuerte a partir de la implementación del método FIC. En el capítulo 3 se presenta la aplicación del método de elementos finitos sobre las ecuaciones gobernantes en su forma fuerte. El capítulo 4 muestra el método de solución seleccionado para resolver el sistema de ecuaciones algebraicas. Posteriormente, en el capítulo 5 se presentan ejemplos de validación típicos que sirven para verificar el comportamiento de los elementos utilizados. Finalmente, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones así como las sugerencias para trabajos futuros.

Adicionalmente, la tesis cuenta con dos apéndices. En el apéndice A se presentan los códigos programados en el lenguaje MATLAB mientras que en el apéndice B se presentan temas adicionales los cuales ayudan a comprender con mayor claridad varios de los conceptos manejados en éste trabajo.

Capítulo 2

Ecuaciones Generales y Formulación

2.1 Objetivo

El presente capítulo tiene como finalidad el encontrar la forma estabilizada de las ecuaciones de momentum lineal y masa mediante la aplicación del método FIC, además de una relación constitutiva que permita considerar la flexibilidad de la pared arterial bajo presión interna.

2.2 Forma general de la ecuación de momentum

Dentro de la mecánica de fluidos, es posible distinguir dos tipos de fuerzas que actúan sobre un fluido: las fuerzas de superficie y las fuerzas de volumen o de cuerpo. Las fuerzas de superficie son aquellas que actúan sobre la superficie de los cuerpos y es la forma en que se interactúa con un volumen. Las fuerzas de volumen o de cuerpo son aquellas que actúan sobre todos los elementos del fluido. La gravedad es el ejemplo más común, pero también están las fuerzas electromagnéticas, las cuales pueden actuar cuando el fluido transporta una corriente eléctrica.

La segunda ley de Newton, a la cual también se le conoce como ecuación de conservación del momentum lineal, expresa que la fuerza resultante que actúa sobre un sistema es igual a la rapidez del cambio de momentum lineal del sistema medido desde un marco de referencia inercial.

Entonces, para un sistema, esta relación puede escribirse como

$$\sum \mathbf{F} = \frac{D}{Dt} \int_{\text{sis}} \rho \mathbf{v} dV \quad (2.1)$$

Utilizando el *Teorema de Reynolds* (véase apéndice B 1.), la ecuación (2.1) se puede describir como

$$\sum \mathbf{F} = \int_{\text{vc}} \frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV + \int_{\text{sc}} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (2.2)$$

En la ecuación (2.2), la cantidad $\sum \mathbf{F}$ representa todas las fuerzas actuando sobre el volumen de control, incluyendo fuerzas de superficie y fuerzas de cuerpo. Las integrales se hacen sobre el volumen de control vc y sobre la superficie de control sc . El término \mathbf{v} representa el vector de velocidades, dV el diferencial de volumen ocupado por una partícula y \mathbf{n} el vector unitario normal al área del elemento dS .

2.3 Ecuación de momentum en 1-D

2.3.1 Ecuación diferencial estándar para flujo en 1-D

Es posible derivar la forma fuerte de las ecuaciones que gobiernan el problema de mecánica de fluidos, si utilizamos las ecuaciones de conservación de flujo en un fluido sobre un dominio de control finito, de longitud h con área transversal $S_{(z,t)}$ como se muestra en la figura 2.1 al tiempo t .

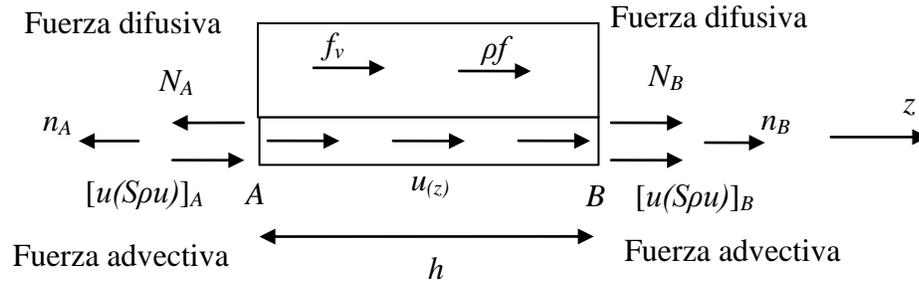


Fig. 2.1 Balance de momentum sobre segmento AB

Variables:

u : velocidad (L/T).

Spu : Momentum por unidad de longitud (ML/TL).

ρf : Fuerza de cuerpo (F/L^3).

f_v : Fuerza de cuerpo viscosa (F/L^3).

$$\sum F_z = \int_0^h \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) S dz + [(S \rho u)u]_B - [(S \rho u)u]_A \quad (2.3)$$

con

$$\sum F_z = N_B - N_A + \int_0^h \rho f S dz + \int_0^h f_v S dz \quad (2.4)$$

En la ecuación (2.4), N_A y N_B son fuerzas axiales que actúan en los extremos del segmento, ρf representa las fuerzas de cuerpo actuando en el volumen del elemento y f_v es una fuerza viscosa de cuerpo que representará la oposición al flujo por estenosis en el conducto.

Utilizando series de Taylor de primer orden para aproximar los valores en el punto A en términos de los valores en el punto B , tenemos que

$$N_A = N_B - h \left. \frac{\partial N}{\partial z} \right|_B + O(h^2) \quad (2.5)$$

$$[(S\rho u)u]_A = [(S\rho u)u]_B - h \frac{\partial [(S\rho u)u]_B}{\partial z} + O(h^2) \quad (2.6)$$

con fuerzas de cuerpo constantes

$$\int_0^h \rho f S dz = \rho f \bar{S} h \quad (2.7)$$

$$\int_0^h f_v S dz = f_v \bar{S} h \quad (2.8)$$

$$\int_0^h \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} S dz = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} \bar{S} h \quad (2.9)$$

en donde $\bar{S} = (S_A + S_B)/2$.

Sustituyendo las ecuaciones (2.4) a (2.9) en la ecuación (2.3), y después de simplificar y notar que la posición del punto B puede ser arbitraria, encontramos que

$$\frac{\partial N}{\partial z} + \rho f S + f_v S = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} S + \frac{\partial[(S\rho u)u]}{\partial z} \quad (2.10)$$

Nótese que en la ecuación (2.10) se evaluó el límite cuando h tiende a cero ($\bar{S} \rightarrow S$).

Tomando la relación constitutiva Newtoniana [13],

$$N = S \left(p - \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (2.11)$$

en donde μ es la viscosidad del fluido ($M/TL = FT/L^2$) y p la presión, positiva en compresión; y sustituyendo en la ecuación (2.10), tenemos la siguiente ecuación, en donde el primer término es el término difusivo y el último el término convectivo.

$$\frac{\partial \left(Sp - \mu S \frac{\partial u}{\partial z} \right)}{\partial z} + \rho f S + f_v S = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} S + \frac{\partial[(S\rho u)u]}{\partial z}$$

En general, las propiedades reológicas de la sangre la hacen que se comporte como un fluido de tipo no-Newtoniano, en donde la viscosidad depende del diámetro de la arteria y de los esfuerzos cortantes. Sin embargo, en arterias grandes como la aorta abdominal, es posible considerar el comportamiento de la sangre como Newtoniano [14], de manera que la viscosidad μ es una constante. Además, de estudios realizados mediante el uso de imágenes obtenidas por resonancia magnética (MRI), se ha visto que bajo condiciones normales, el flujo de la sangre tiende a ser de tipo laminar [15].

Simplificando y dividiendo entre la densidad ρ , que se toma constante, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial(Sp)}{\partial z} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(S \frac{\partial u}{\partial z} \right) + f S + \frac{f_v}{\rho} S &= \frac{\partial u}{\partial t} S + \frac{\partial(Su^2)}{\partial z} \\ \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \nu S \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f S + \frac{f_v}{\rho} S &= \frac{\partial u}{\partial t} S + \frac{\partial S}{\partial z} \left(u^2 - \nu \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{p}{\rho} \right) + S \frac{\partial(u^2)}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.12)$$

en donde ν representa la viscosidad cinemática del fluido (L^2/T).

Para considerar de alguna forma la distribución no-uniforme de la velocidad a través de la sección transversal, se pueden modificar los términos convectivo y de fuerza viscosa [16]. Tomando el término convectivo primero, tenemos

$$S \frac{\partial(u^2)}{\partial z} \approx S \frac{\partial \left(\frac{1}{S_s} \int \bar{u}^2 dA \right)}{\partial z} \quad (2.13)$$

en donde $\bar{u} = \phi u$ y ϕ es una función de distribución de la velocidad sobre la sección transversal. De esta forma:

$$\begin{aligned} S \frac{\partial(u^2)}{\partial z} &\approx S \frac{\partial \left(\left(\frac{1}{S_s} \int \phi^2 dA \right) u^2 \right)}{\partial z} \\ &\approx S \frac{\partial \left(\left(1 - 1 + \frac{1}{S_s} \int \phi^2 dA \right) u^2 \right)}{\partial z} \\ &\approx S \frac{\partial \left(\left(1 - \frac{1}{S_s} \int dA + \frac{1}{S_s} \int \phi^2 dA \right) u^2 \right)}{\partial z} \\ &\approx S \frac{\partial \left(\left(1 + \frac{1}{S_s} \int (\phi^2 - 1) dA \right) u^2 \right)}{\partial z} \\ &\approx S \frac{\partial \left((1 + \delta) u^2 \right)}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.14)$$

con

$$\delta = \frac{1}{S_s} \int (\phi^2 - 1) dA \quad (2.15)$$

Considerando ahora la fuerza viscosa f_v , podemos expresarla como una fricción entre el fluido y la pared del conducto, que depende del gradiente de velocidad en dirección normal a la pared del conducto y la viscosidad del fluido.

$$f_v = \mu \frac{1}{L} \oint_L \frac{\partial \bar{u}}{\partial m} dl \quad (2.16)$$

en donde L es el perímetro del conducto y m representa el vector unitario normal a la pared del conducto.

Sustituyendo en el término de fuerza viscosa

$$f_v \frac{S}{\rho} = \frac{\mu S}{\rho L} \oint_L \frac{\partial}{\partial m} (\phi u) dl \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} &= \nu \frac{S}{L} \oint_L \frac{\partial \phi}{\partial m} dlu \\ &= \bar{N} S u \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\text{con } \bar{N} = \frac{\nu}{L} \oint_L \frac{\partial \phi}{\partial m} dl \text{ y } \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Si asumimos un perfil axisimétrico [16] de la forma:

$$\phi(r) = \frac{n+2}{n} \left(1 - \left(\frac{r_c}{R} \right)^n \right) \quad (2.19)$$

en donde r_c representa la coordenada radial y R el radio luminar, entonces

$$\delta = \frac{1}{1+n} \quad (2.20)$$

$$N = -2(n+2)\pi v \quad (2.21)$$

Nótese que en las ecuaciones (2.20) y (2.21) n es un parámetro el cual define la forma del perfil de velocidades.

Sustituyendo en la ecuación (2.12) y simplificando,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} S + S \frac{\partial [(1+\delta)u^2]}{\partial z} + \left(u^2 - v \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{p}{\rho} \right) \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \\ = Sf + \bar{N}Su - vS \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Si definimos a r tal que

$$\begin{aligned} r = -S \frac{\partial [(1+\delta)u^2]}{\partial z} + \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Sf + \bar{N}Su - vS \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ - \left(u^2 - v \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{p}{\rho} \right) \frac{\partial S}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.23)$$

entonces, para el movimiento en estado estable la ecuación de momentum simbólicamente será:

$$r = 0 \quad (2.24)$$

y para el movimiento en estado transitorio:

$$\hat{r} = \frac{\partial u}{\partial t} S - r = 0 \quad (2.25)$$

2.3.2 Ecuación estabilizada para flujo en 1-D

La forma estable para la ecuación de balance de momentum se puede obtener si expandimos los siguientes términos utilizando series de Taylor de segundo orden, de modo que

$$N_A = N_B - h \left. \frac{\partial N}{\partial z} \right|_B + \frac{h^2}{2} \left. \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \right|_B - O(h^3) \quad (2.26)$$

$$[(S\rho u)u]_A = [(S\rho u)u]_B - h \frac{\partial [(S\rho u)u]_B}{\partial z} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 [(S\rho u)u]_B}{\partial z^2} - O(h^3) \quad (2.27)$$

Considerando una variación lineal para las ecuaciones (2.7) a (2.9) y utilizando series de Taylor de primer orden

$$\int_0^h \rho f S dz = h \left[\frac{(S\rho f)_A + (S\rho f)_B}{2} \right] = \rho f \bar{S} h - \frac{h^2}{2} \frac{\partial (S\rho f)}{\partial z} \quad (2.28)$$

$$\int_0^h f_v S dz = f_v \bar{S} h - \frac{h^2}{2} \frac{\partial S f_v}{\partial z} \quad (2.29)$$

$$\int_0^h \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} S dz = S h \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{(\rho u)_A + (\rho u)_B}{2} \right] = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} S h - S \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2(\rho u)}{\partial t \partial z} \quad (2.30)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.3), simplificando y notando que la posición del punto B puede ser arbitraria

$$\begin{aligned} & \frac{\partial N}{\partial z} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + S\rho f - \frac{h}{2} \frac{\partial (S\rho f)}{\partial z} + S f_v - \frac{h}{2} \frac{\partial S f_v}{\partial z} \\ & \stackrel{h \rightarrow 0; \bar{S} \rightarrow S}{=} S \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - S \frac{h}{2} \frac{\partial^2(\rho u)}{\partial t \partial z} + \frac{\partial[(S\rho u)u]}{\partial z} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2[(S\rho u)u]}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Nótese que en la ecuación anterior se han despreciado los términos de tercer orden.

Sustituyendo la ecuación (2.11) y simplificando

$$\begin{aligned} & \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \nu S \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{S}{\rho} \frac{h}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \nu S \frac{h}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + Sf - \frac{h}{2} \frac{\partial Sf}{\partial z} \\ & + \frac{S}{\rho} f_v - \frac{1}{\rho} \frac{h}{2} \frac{\partial Sf_v}{\partial z} = S \frac{\partial u}{\partial t} - S \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} + S \frac{\partial u^2}{\partial z} - \frac{h}{2} S \frac{\partial^2 u^2}{\partial z^2} \\ & + \frac{\partial S}{\partial z} \left(u^2 - \nu \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{p}{\rho} \right) - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \left(u^2 - \nu \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{p}{\rho} \right) \end{aligned}$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.14) y (2.18), y después de simplificar, encontramos que para el movimiento en estado estable

$$r - \frac{h}{2} \frac{\partial r}{\partial z} = 0 \quad (2.31)$$

y para el movimiento en estado transitorio

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} S - r \right) - \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial t} S - r \right) = 0 \quad (2.32)$$

en donde

$$\begin{aligned} r = & -S \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 + \delta) u^2 \right] + \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Sf + \bar{N} S u - \nu S \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ & - \left(u^2 - \nu \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{p}{\rho} \right) \frac{\partial S}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.33)$$

2.3.3 Condiciones de frontera

La condición de frontera esencial de Dirichlet está dada por:

$$\rho u = \rho \bar{u} \tag{2.34}$$

en donde \bar{u} es el valor prescrito del campo de velocidad. Si ρ es constante, entonces se puede escribir en términos de la velocidad:

$$u = \bar{u} \tag{2.35}$$

Para obtener la condición de frontera estabilizada de Neumann, es necesario escribir la ecuación de balance en un punto de la frontera (figura 2.2).

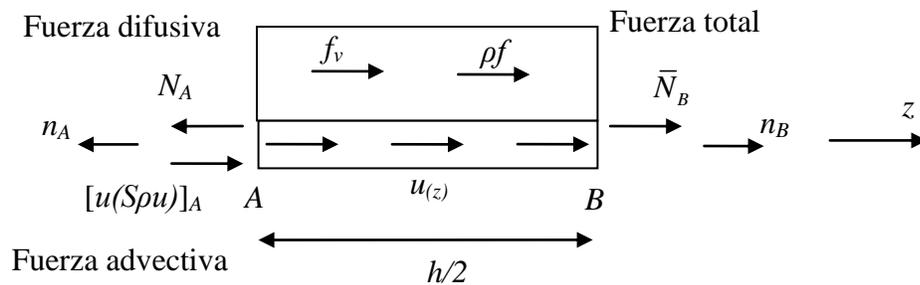


Fig. 2.2 Segmento de balance cercano a una frontera de Neumann

$$\bar{N}_B - N_A + \int_0^{h/2} \rho f S dz + \int_0^{h/2} f_v S dz = \int_0^{h/2} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} S dz - [(S \rho u) u]_A \tag{2.36}$$

en donde \bar{N}_B es la fuerza de tracción aplicada en el extremo del conducto.

Nótese que en la ecuación (2.36) la longitud del segmento AB es la mitad para que posteriormente se puedan simplificar las ecuaciones.

Utilizando series de Taylor de primer orden para aproximar los valores en el punto A en términos de los valores en el punto B , tenemos que

$$N_A = N_B - \frac{h}{2} \frac{\partial N}{\partial z} \Big|_B + O(h^2) \quad (2.37)$$

$$[(S\rho u)u]_A = [(S\rho u)u]_B - \frac{h}{2} \frac{\partial [(S\rho u)u]_B}{\partial z} + O(h^2) \quad (2.38)$$

con fuerzas constantes

$$\int_0^{h/2} \rho f S dz = \rho f \bar{S} \frac{h}{2} \quad (2.39)$$

$$\int_0^{h/2} f_v S dz = f_v \bar{S} \frac{h}{2} \quad (2.40)$$

$$\int_0^{h/2} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} S dz = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} S \frac{h}{2} \quad (2.41)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.37) a (2.41) en la ecuación (2.36), y después de simplificar y notar que la posición del punto B puede ser arbitraria, encontramos que

$$\begin{aligned} \bar{N}_B = N - [(S\rho u)u] - \frac{h}{2} \left[-\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} S - \frac{\partial[(S\rho u)u]}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial z} \right. \\ \left. + \rho f \bar{S} + f_v \bar{S} \right] \end{aligned} \quad (2.42)$$

Finalmente, sustituimos las ecuaciones (2.11), (2.14) y (2.18) en la ecuación (2.42).

$$h \rightarrow 0; \bar{S} \rightarrow S \quad \bar{N}_B = N - [(S\rho u)u] + \rho \frac{h}{2} \hat{r} \quad (2.43)$$

con

$$\begin{aligned} \hat{r} = & \frac{\partial u}{\partial t} S + S \frac{\partial}{\partial z} [(1+\delta)u^2] - \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - Sf - \bar{N}Su + \nu S \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ & + \left(u^2 - \nu \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{p}{\rho} \right) \frac{\partial S}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.44)$$

En términos de la presión total \bar{p}_B , la ecuación (2.43) se puede escribir como

$$\bar{p}_B S = S \left(p - \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) - [(S\rho u)u] + \rho \frac{h}{2} \hat{r} \quad (2.45)$$

Dividiendo la ecuación (2.45) entre ρS ,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{p}_B}{\rho} = & \frac{p}{\rho} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{S} [(Su)u] + \frac{1}{S} \frac{h}{2} \hat{r} \\ \left(\frac{\bar{p}_B}{\rho} \right) = & \left(\frac{p}{\rho} \right) - \nu \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{S} [(Su)u] + \frac{1}{S} \frac{h}{2} \hat{r} \end{aligned} \quad (2.46)$$

2.4 Forma general de la ecuación de masa

La ley de conservación de masa expresa que la masa de un sistema permanece constante. La masa de una partícula en un fluido es ρdV , en donde dV es el volumen ocupado por la partícula y ρ es la densidad. Notando que la densidad puede cambiar de punto a punto dentro del sistema, la ley de conservación de masa se puede expresar como

$$0 = \frac{DM}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\text{sis}} \rho dV \quad (2.47)$$

en donde M representa la masa del sistema.

2.5 Ecuación de masa en 1-D

Para derivar la forma fuerte de la ecuación de masa, es necesario considerar que el área transversal S del conducto puede cambiar en el tiempo (figura 2.3), de modo que

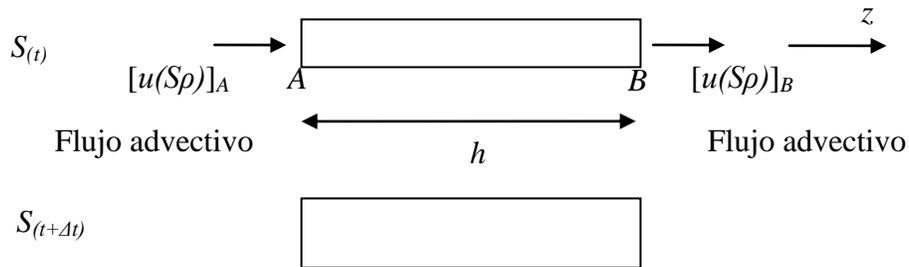


Fig. 2.3 Segmento de balance con cambio de sección transversal

$$0 = \frac{D}{Dt} \int_{\text{sis}} \rho dV$$

$$= \frac{D}{Dt} \int_0^h \rho S dl \quad (2.47)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{\Omega^{t+\Delta t}} \rho S dl - \int_{\Omega^t} \rho S dl}{\Delta t} \quad (2.48)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{\Omega^0} (\rho S j)_{t+\Delta t} dl^0 - \int_{\Omega^0} (\rho S j)_t dl^0}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Omega^0} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\rho S j)_{t+\Delta t} - (\rho S j)_t}{\Delta t} dt^0 \\
 &= \int_{\Omega^0} \frac{D}{Dt} (\rho S j) dt^0
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Omega^0} \left(\frac{D}{Dt} (\rho S) j + \rho S \frac{Dj}{Dt} \right) dt^0 \\
 &= \int_{\Omega^0} \left(\frac{D}{Dt} (\rho S) j + \rho S (\nabla \cdot \mathbf{v}) j \right) dt^0 \\
 &= \int_{\Omega_t} \left(\frac{D}{Dt} (\rho S) + \rho S (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) dl
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

De donde se obtiene

$$\frac{D}{Dt} (\rho S) + \rho S (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \tag{2.51}$$

con

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla(\rho S) + \rho S \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{2.52}$$

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho S \mathbf{v}) = 0 \tag{2.53}$$

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho S V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho S V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho S V_z)}{\partial z} = 0 \tag{2.54}$$

Considerando a la densidad ρ constante, encontramos la ecuación de balance de masa:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(S V_z)}{\partial z} = -\bar{\psi} \tag{2.55}$$

con

$$\bar{\psi} = \frac{\partial(SV_x)}{\partial x} + \frac{\partial(SV_y)}{\partial y} \tag{2.56}$$

En la ecuación (2.55) el término $\bar{\psi}$ representa el flujo de masa saliente a través de las paredes del conducto.

En el caso de que el conducto mantenga su superficie lumínar constante, la ecuación de continuidad toma su forma estándar:

$$\frac{\partial(SV_z)}{\partial z} = -\bar{\psi}$$

2.5.1 Ecuación diferencial estándar de masa en 1-D

Si consideramos un dominio unidimensional, con un segmento típico AB de longitud h (figura 2.4), y partiendo de la ley de conservación de masa (ecuación 2.47), el balance de flujos se puede escribir como

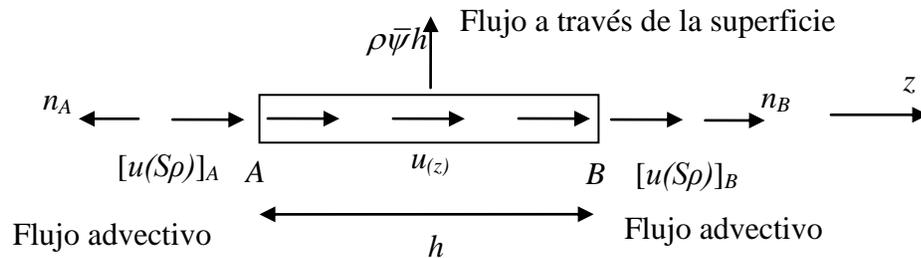


Fig. 2.4 Balance de flujos sobre el segmento AB

Conservación de masa:

$$\begin{aligned} \sum \text{Flujos} &= \frac{DM}{Dt} & (2.57) \\ &= \frac{D}{Dt} \int_{\text{sis}} \rho dV \\ \text{Teorema de} & & \\ \text{transporte de} & & \\ \text{Reynolds} & & \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{vc}} \rho dV + \int_{\text{sc}} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \end{aligned}$$

Rescribiendo la ecuación anterior,

$$-\rho \bar{\psi} h = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{vc}} \rho dV + [u(S\rho)]_B - [u(S\rho)]_A \quad (2.58)$$

en donde

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{vc}} \rho dV = \frac{\partial(\rho Sh)}{\partial t} \quad (2.59)$$

Utilizando series de Taylor de primer orden para aproximar los valores en el punto A en términos de los valores en el punto B , tenemos que

$$[u(S\rho)]_A = [u(S\rho)]_B - h \frac{\partial [u(S\rho)]_B}{\partial z} + O(h^2) \quad (2.60)$$

Sustituyendo la ecuación (2.60) en la ecuación (2.58), y después de simplificar y notar que la posición del punto B puede ser arbitraria, encontramos que

$$-\bar{\psi} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(Su)}{\partial z} \quad (2.61)$$

O bien $\hat{r}_Q = 0$

Con $\hat{r}_Q = \bar{\psi} + \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(Su)}{\partial z}$ (2.62)

Nótese que en la ecuación (2.61) se han despreciado los términos de segundo orden.

Condiciones iniciales:

$$S_{(t=0)} = S_0 \tag{2.63}$$

$$u_{(t=0)} = u_0 \tag{2.64}$$

Condiciones de frontera naturales:

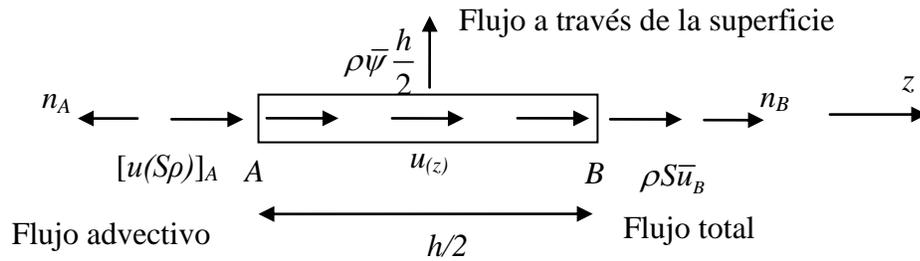


Fig. 2.5 Segmento de balance cercano a una frontera de Neumann

Conservación de flujo:

$$\sum \text{Flujos} = \frac{DM}{Dt} \tag{2.65}$$

$$= \frac{D}{Dt} \int_{\text{sis}} \rho dV$$

Teorema de transporte de Reynolds

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{vc}} \rho dV + \int_{\text{sc}} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{h/2} \rho S dl - [u(S\rho)]_A \\
 -\rho\bar{\psi} \frac{h}{2} - \rho\bar{Q}_B &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{h/2} \rho S dl - [u(S\rho)]_A
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

Se toma $\rho S = \text{constante}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{h/2} \rho S dl = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho S \frac{h}{2} \right) \tag{2.67}$$

Y expansiones de Taylor de primer orden:

$$[u(S\rho)]_A = [u(S\rho)]_B - \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial z} [u(S\rho)]_B + O(h^2) \tag{2.68}$$

Substituyendo y simplificando se tiene

$$\begin{aligned}
 -\rho\bar{\psi} \frac{h}{2} - \rho S \bar{u}_B &= -u\rho S + \frac{h}{2} \rho \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(Su)}{\partial z} \right) \\
 \rho S \bar{u}_B &= \rho S u - \frac{h}{2} \rho \hat{r}_Q \\
 \bar{Q}_B &= S u - \frac{h}{2} \hat{r}_Q
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

Cuando $h \rightarrow 0$ se recupera la forma infinitesimal.

2.5.2 Ecuación estabilizada de masa en 1-D

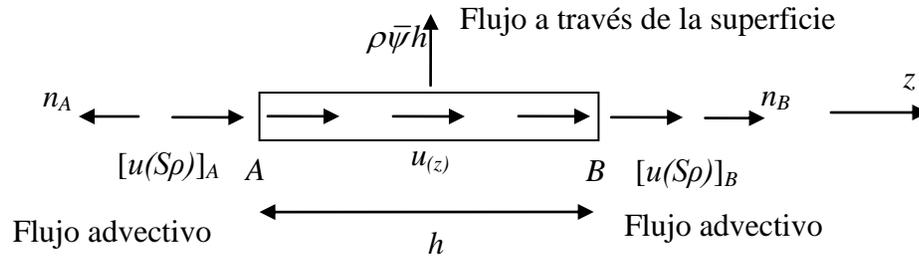


Fig. 2.6 Conservación de masa sobre el segmento AB

Conservación de masa:

$$-\int_0^h \rho \bar{\psi} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho dV + [u(S\rho)]_B - [u(S\rho)]_A$$

La forma estable para la ecuación de conservación de masa se puede obtener si expandimos los siguientes términos utilizando series de Taylor de segundo orden.

$$[u(S\rho)]_A = [u(S\rho)]_B - h \frac{\partial [u(S\rho)]_B}{\partial z} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 [u(S\rho)]_B}{\partial z^2} - O(h^3) \quad (2.70)$$

Asumiendo distribuciones de tipo lineal para los términos convectivo y de flujo de masa, tenemos

$$\int_0^h \rho \bar{\psi} dz = \frac{(\rho \bar{\psi})_A + (\rho \bar{\psi})_B}{2} h \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho S dz = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{(\rho S)_A + (\rho S)_B}{2} h \right] \quad (2.72)$$

Aproximando los valores en el punto A en términos de los valores en el punto B mediante series de Taylor de primer orden:

$$(\rho\bar{\psi})_A = (\rho\bar{\psi})_B - h \frac{\partial(\rho\bar{\psi})_B}{\partial z} \quad (2.73)$$

$$(\rho S)_A = (\rho S)_B - h \frac{\partial(\rho S)_B}{\partial z} \quad (2.74)$$

de modo que

$$\int_0^h \rho\bar{\psi} dz = h(\rho\bar{\psi})_B - \frac{h^2}{2} \frac{\partial(\rho\bar{\psi})_B}{\partial z} \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho dV = h \frac{\partial(\rho S)_B}{\partial t} - \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2(\rho S)_B}{\partial t \partial z} \quad (2.76)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.70), (2.75) y (2.76) en la ecuación de continuidad, ecuación (2.57), y después de simplificar, despreciar los términos de tercer orden y notar que la posición del punto B puede ser arbitraria

$$0 = \bar{\psi} + \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(Su)}{\partial z} - \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{\psi} + \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(Su)}{\partial z} \right) \quad (2.77)$$

Si definimos a \hat{r}_Q tal que

$$\hat{r}_Q = \bar{\psi} + \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(Su)}{\partial z} \quad (2.78)$$

entonces la ecuación de continuidad estabilizada será:

$$\hat{r}_Q - \frac{h}{2} \frac{\partial \hat{r}_Q}{\partial z} = 0 \quad (2.79)$$

2.5.3 Condiciones de frontera

Al igual que para la ecuación diferencial ordinaria se tendrá:

Condiciones iniciales:

$$S_{(t=0)} = S_0 \quad (2.80)$$

$$u_{(t=0)} = u_0 \quad (2.81)$$

Condición de frontera de Neumann:

$$\bar{Q}_B = Su - \frac{h}{2} \hat{r}_Q \quad (2.82)$$

2.6 Forma alterna de la ecuación de continuidad

Partimos de la ecuación (2.79) de continuidad:

$$\hat{r}_Q - \frac{h}{2} \frac{\partial \hat{r}_Q}{\partial z} = 0$$

$$\hat{r}_Q - \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(Su)}{\partial z} \right) = 0$$

Despreciando

$$\frac{\partial S}{\partial t}$$

$$\hat{r}_Q - \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial(Su)}{\partial z} \right) = 0$$

$$\hat{r}_Q - \frac{h}{2Su} Su \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial(Su)}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.83)$$

Notando que

$$Su \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial(Su)}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(Su \frac{\partial(Su)}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial(Su)}{\partial z} \right)^2 \quad (2.84)$$

y después de despreciar el término de alto orden, la ecuación (2.83) queda expresada como:

$$\hat{r}_\varrho - \frac{h}{2Su} \frac{\partial}{\partial z} \left(Su \frac{\partial(Su)}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.85)$$

Notando que

$$\begin{aligned} & S \frac{\partial \left[(1+\delta)u^2 \right]}{\partial z} \\ &= S \frac{\partial \left[(1+\delta) \frac{(Su)^2}{S^2} \right]}{\partial z} \\ &= S(1+\delta) \left(\frac{1}{S^2} 2Su \frac{\partial(Su)}{\partial z} - 2(Su)^2 \frac{1}{S^3} \frac{\partial S}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.86)$$

Entonces en (2.85):

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{r}_\varrho - \frac{h}{2Su} \frac{\partial}{\partial z} \left(Su \frac{\partial(Su)}{\partial z} \right) \\ &= \hat{r}_\varrho - \frac{h}{2Su} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{S}{2(1+\delta)} \left(S \frac{\partial \left[(1+\delta)u^2 \right]}{\partial z} + 2S(1+\delta)(Su)^2 S^{-3} \frac{\partial S}{\partial z} \right) \right] \\ &= \hat{r}_\varrho - \frac{h}{4(1+\delta)Su} \frac{\partial}{\partial z} \left[S \left(S \frac{\partial \left[(1+\delta)u^2 \right]}{\partial z} + 2(1+\delta)u^2 \frac{\partial S}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.87)$$

De la ecuación de balance de momentum:

$$r_m = S \frac{\partial u}{\partial t} + S \frac{\partial}{\partial z} [(1 + \delta)u^2] - \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - Sf - \bar{N}Su + \nu S \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(u^2 - \nu \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{p}{\rho} \right) \frac{\partial S}{\partial z} = 0$$

Por tanto

$$S \frac{\partial [(1 + \delta)u^2]}{\partial z} = - \left(S \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - Sf - \bar{N}Su + \nu S \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(u^2 - \nu \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{p}{\rho} \right) \frac{\partial S}{\partial z} \right) = \hat{r}_m \quad (2.88)$$

Sustituyendo en la ecuación de balance de masa (2.87), se tiene

$$\hat{r}_Q - \frac{h}{4(1 + \delta)Su} \frac{\partial}{\partial z} \left[S \left(\hat{r}_m + 2(1 + \delta)u^2 \frac{\partial S}{\partial z} \right) \right] = 0$$

O bien

$$\hat{r}_Q - \rho \tau_Q \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{r}_m + 2(1 + \delta)u^2 \frac{\partial S}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.89)$$

en donde

$$\hat{r}_m = - \left(S \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - Sf - \bar{N}Su + \nu S \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(u^2 - \nu \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{p}{\rho} \right) \frac{\partial S}{\partial z} \right) \quad (2.90)$$

Tiempo
intrínseco

$$\tau_Q = \frac{h}{4(1 + \delta)\rho u} \quad (2.91)$$

Se puede usar la siguiente aproximación en lugar de (2.89) [11], ya que de igual forma introduce el gradiente de presiones en la ecuación de continuidad. La presencia del gradiente de presiones en esta ecuación hace que la formulación cumpla con el requisito de Babuska-Brezzi [17] y se puedan emplear interpolaciones idénticas para el flujo y para la presión.

$$\hat{r}_Q - \rho \tau_Q \frac{\partial r_m}{\partial z} = 0 \quad (2.92)$$

De igual forma, se puede extender la definición del tiempo intrínseco para considerar la viscosidad del fluido [11].

$$\begin{array}{l} \text{Tiempo} \\ \text{intrínseco} \end{array} \quad \tau_Q = \left(\frac{8\mu}{3h^2} + \frac{4(1+\delta)\rho u}{h} \right)^{-1} \quad (2.93)$$

2.7 Relación constitutiva (presión-área)

Haciendo referencia a la teoría de cascarones, la fuerza, y por lo tanto el esfuerzo actuando en la dirección circunferencial de un conducto se puede expresar como:

$$\begin{aligned} N_\theta &= r(p - p_o) \\ \sigma_\theta &= \frac{N_\theta}{t} = \frac{r}{t}(p - p_o) \end{aligned} \quad (2.94)$$

en donde:

t : espesor

p_o : presión base al tiempo 0

r_o : radio cuando $p = p_o$

con

$$\varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta}{E_\theta} - \nu_{\theta x} \frac{\sigma_x}{E_x} = \frac{N_\theta}{E_\theta t} - \nu_{\theta x} \frac{N_x}{E_x t} \quad (2.95)$$

Sabiendo que la deformación en la dirección circunferencial [18] está dada como

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{r_o} \left(\frac{\partial v}{\partial \phi} + \omega \right) \quad (2.96)$$

en donde ω representa la deformación radial y v la deformación tangencial; y considerando que el problema es axisimétrico ($v=0$),

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{\omega}{r_o}$$

Por tanto

$$\frac{\omega}{r_o} = \frac{N_{\theta}}{E_{\theta}t} - \nu_{\theta x} \frac{N_x}{E_x t} \quad (2.97)$$

Para el caso en el cual $N_x = 0$,

$$\frac{\omega}{r_o} = \frac{N_{\theta}}{E_{\theta}t}$$

O bien

$$\omega = \frac{r_o}{E_{\theta}t} N_{\theta} = \frac{r_o^2}{E_{\theta}t} (p - p_o) \quad (2.98)$$

Si el área luminal inicial es

$$S_o = \pi r_o^2 \quad (2.99)$$

podemos entonces encontrar el área luminal a una presión p como

$$S_{(p)} = \pi r^2 = \pi (r_o + \omega)^2 = \pi \left(r_o + \frac{r_o^2}{E_{\theta}t} (p - p_o) \right)^2 \quad (2.100)$$

Para el caso en el cual $N_x \neq 0$,

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \nu_{x\theta} \frac{\sigma_\theta}{E_\theta} = \frac{N_x}{E_x t} - \nu_{x\theta} \frac{N_\theta}{E_\theta t}$$

Pero

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dx} \text{ (axi-simétrico)}$$

Por tanto

$$\frac{du}{dx} = \frac{N_x}{E_x t} - \nu_{x\theta} \frac{N_\theta}{E_\theta t} \quad (2.101)$$

Considerando el caso especial en el cual el conducto esta completamente restringido en su dirección longitudinal

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = 0 \quad \frac{N_x}{E_x t} = \nu_{x\theta} \frac{N_\theta}{E_\theta t}$$

O bien

$$N_x = \nu_{x\theta} \frac{E_x}{E_\theta} N_\theta \quad (2.102)$$

Sustituyendo la ecuación (2.102) en la ecuación (2.97),

$$\frac{\omega}{r_o} = \frac{N_\theta}{E_\theta t} - \nu_{\theta x} \frac{1}{E_x t} \left(\nu_{x\theta} \frac{E_x}{E_\theta} N_\theta \right)$$

$$= \frac{N_\theta}{t} \left(\frac{1}{E_\theta} - \frac{\nu_{\theta x} \nu_{x\theta}}{E_\theta} \right)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{r_o}{E_\theta t} (1 - \nu_{\theta x} \nu_{x\theta}) N_\theta \\ &= \frac{r_o r}{E_\theta t} (1 - \nu_{\theta x} \nu_{x\theta}) (p - p_o) \end{aligned} \quad (2.103)$$

De la misma forma, sustituimos la ecuación (2.102) en la ecuación (2.95) para encontrar el estado de esfuerzos como:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\theta} &= \frac{N_{\theta}}{E_{\theta}t} - \nu_{\theta x} \frac{1}{E_x t} \left(\nu_{x\theta} \frac{E_x}{E_{\theta}} N_{\theta} \right) \\ &= \frac{N_{\theta}}{E_{\theta}t} (1 - \nu_{\theta x} \nu_{x\theta})\end{aligned}\tag{2.104}$$

Considerando que

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{L_f - L_i}{L_i} = \frac{2\pi r - 2\pi r_o}{2\pi r_o} = \frac{r - r_o}{r_o}\tag{2.105}$$

y sustituyendo en la ecuación (2.104),

$$\frac{r - r_o}{r_o} = \frac{N_{\theta}}{E_{\theta}t} (1 - \nu_{\theta x} \nu_{x\theta})\tag{2.106}$$

De la ecuación anterior podemos expresar el esfuerzo en la dirección circunferencial como

$$\sigma_{\theta} = \frac{N_{\theta}}{t} = \frac{E_{\theta}}{1 - \nu_{\theta x} \nu_{x\theta}} \left(\frac{r - r_o}{r_o} \right)\tag{2.107}$$

Haciendo uso de la ecuación (2.94), encontramos la relación lineal entre p y r .

$$\begin{aligned}\frac{r}{t} (p - p_o) &= \frac{E_{\theta}}{1 - \nu_{\theta x} \nu_{x\theta}} \left(\frac{r - r_o}{r_o r} \right) \\ p - p_o &= \frac{E_{\theta} t}{1 - \nu_{\theta x} \nu_{x\theta}} \left(\frac{r - r_o}{r_o r} \right)\end{aligned}\tag{2.108}$$

Si $\nu_{\theta x} = \nu_{x\theta} = 0.5$ [19],

$$p - p_o = \frac{4}{3} \frac{E_{\theta} t}{r_o} \left(\frac{r - r_o}{r} \right) \quad (2.109)$$

Para encontrar la relación con el área, tenemos que

$$\begin{aligned} S &= \pi r^2 \\ &= \pi (r_o + \omega)^2 \\ &= \pi \left(r_o + \frac{r_o r}{E_{\theta} t} (1 - \nu_{\theta x} \nu_{x\theta}) (p - p_o) \right)^2 \end{aligned} \quad (2.110)$$

Considerando que

$$\begin{aligned} \frac{r - r_o}{r_o} &= \frac{\left(\frac{S}{\pi} \right)^{1/2} - \left(\frac{S_o}{\pi} \right)^{1/2}}{\left(\frac{S_o}{\pi} \right)^{1/2}} \\ &= \frac{S^{1/2} - S_o^{1/2}}{S_o^{1/2}} \\ &= 1 - \left(\frac{S_o}{S} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.111)$$

y sustituyendo en la ecuación (2.109)

$$P_{(z,t)} - P_{o(z)} = \frac{4}{3} \frac{E_{\theta} t}{r_o} \left(1 - \sqrt{\frac{S_{o(z)}}{S_{(z,t)}}} \right) \quad (2.112)$$

2.8 Resumen de ecuaciones estabilizadas

A manera de resumen, vemos como la forma estabilizada de las ecuaciones que gobiernan el problema de mecánica de fluidos se puede obtener expresando el balance de momentum y masa sobre un dominio de control. Asumiendo que el dominio de control tiene dimensiones finitas y considerando cierto patrón de variación para la masa y momentum a lo largo del dominio, se pueden encontrar las siguientes ecuaciones:

Balance de momentum

$$r_m - \frac{h}{2} \frac{\partial r_m}{\partial z} = 0 \quad (2.113)$$

Balance de masa

$$\hat{r}_Q - \rho \tau_Q \frac{\partial r_m}{\partial z} = 0 \quad (2.114)$$

Relación constitutiva

$$P_{(z,t)} - P_{o(z)} = \frac{4}{3} \frac{E_{\theta} t}{r_o} \left(1 - \sqrt{\frac{S_{o(z)}}{S_{(z,t)}}} \right) \quad (2.115)$$

en donde

$$r_m = \frac{\partial u}{\partial t} S - r \quad (2.116)$$

$$r = -S \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 + \delta) u^2 \right] + \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Sf + \bar{N}Su - \nu S \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \left(u^2 - \nu \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{p}{\rho} \right) \frac{\partial S}{\partial z} \quad (2.117)$$

$$\hat{r}_Q = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(Su)}{\partial z} \quad (2.118)$$

Para las condiciones de frontera naturales, tenemos

Balance de momentum

$$r_n = N - \bar{N} - [(S\rho u)u] + \rho \frac{h}{2} \hat{r} = 0 \quad (2.119)$$

O bien

$$r_n = \left(\frac{p}{\rho} \right) - \left(\frac{\bar{p}_B}{\rho} \right) - \nu \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{S} [(Su)u] + \frac{1}{S} \frac{h}{2} \hat{r} = 0 \quad (2.120)$$

Balance de masa

$$\hat{r}_s = \bar{Q} - Q + \frac{h}{2} \hat{r}_Q = 0 \quad (2.121)$$

Para las condiciones de frontera esenciales, tenemos

Balance de momentum

$$Su = S\bar{u} \quad (2.122)$$

Condiciones iniciales:

$$S_{(t=0)} = S_0 \quad (2.123)$$

$$u_{(t=0)} = u_0 \quad (2.124)$$

$$P_{(t=0)} = P_0 \quad (2.125)$$

2.9 Forma alterna de las ecuaciones en términos de flujo y presión

2.9.1 Ecuación de momentum

Partiendo de la ecuación de balance de momentum (2.25), tenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} S - r = 0$$

O bien

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} S + S \frac{\partial}{\partial z} [(1 + \delta)u^2] - \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - Sf - \bar{N}Su + \nu S \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ + \left(u^2 - \nu \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{p}{\rho} \right) \frac{\partial S}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (2.126)$$

Tomando a $u = \frac{Q}{S}$, donde Q representa el flujo a través de la arteria, y sustituyendo en (2.126)

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + S(1 + \delta) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q^2}{S^2} \right) - \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - Sf - \bar{N}Q + \nu S \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{Q}{S} \right) \\ + \left(\left(\frac{Q^2}{S^2} \right) - \nu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q}{S} \right) + \frac{p}{\rho} \right) \frac{\partial S}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (2.127)$$

Notando que

$$S(1 + \delta) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q^2}{S^2} \right) = S(1 + \delta) \left[\frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q^2}{S} \right) - \frac{1}{S^2} \left(\frac{Q^2}{S} \right) \frac{\partial S}{\partial z} \right] \quad (2.128)$$

$$\nu S \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{Q}{S} \right) = \nu S \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{Q}{S^2} \frac{\partial S}{\partial z} \right] \quad (2.129)$$

sustituimos en (2.127) y simplificamos, de modo que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q}{\partial t} + (1+\delta) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q^2}{S} \right) + \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - Sf - \bar{N}Q + \nu S \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \\ & + \left(\frac{Q^2}{S^2} - (1+\delta) \frac{Q^2}{S^2} - \nu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q}{S} \right) + \frac{p}{\rho} \right) \frac{\partial S}{\partial z} - \nu S \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{Q}{S^2} \frac{\partial S}{\partial z} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.130)$$

Expandiendo los siguientes términos:

$$\nu S \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial z} \right) = \nu S \left[\frac{1}{S} \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} - \frac{1}{S^2} \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial S}{\partial z} \right] \quad (2.131)$$

$$\nu S \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{Q}{S^2} \frac{\partial S}{\partial z} \right] = \nu S \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q}{S^2} \right) \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{Q}{S^2} \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \right] \quad (2.132)$$

Entonces, en (2.130)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q}{\partial t} + (1+\delta) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q^2}{S} \right) - \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - Sf - \bar{N}Q + \nu \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \\ & + \left(\frac{Q^2}{S^2} (1 - (1+\delta)) - \nu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q}{S} \right) - \nu \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial z} - \nu S \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q}{S^2} \right) + \frac{p}{\rho} \right) \frac{\partial S}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (2.133)$$

Nótese que en la ecuación (2.133) se ha despreciado el término de alto orden.

Haciendo la expansión del segundo termino

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q}{\partial t} + (1+\delta) \left[\frac{1}{S} \frac{\partial Q^2}{\partial z} - \frac{Q^2}{S^2} \frac{\partial S}{\partial z} \right] - \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - Sf - \bar{N}Q + \nu \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \\ & + \left(\frac{Q^2}{S^2} (1 - (1+\delta)) - \nu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q}{S} \right) - \nu \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial z} - \nu S \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q}{S^2} \right) + \frac{p}{\rho} \right) \frac{\partial S}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (2.134)$$

Simplificando,

$$\begin{aligned}
 0 = & \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{(1+\delta)}{S} \frac{\partial Q^2}{\partial z} - \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - Sf - \bar{N}Q + \nu \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \\
 & + \left(\frac{Q^2}{S^2} (1-2(1+\delta)) - \nu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q}{S} \right) - \nu \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial z} - \nu S \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q}{S^2} \right) + \frac{p}{\rho} \right) \frac{\partial S}{\partial z}
 \end{aligned} \quad (2.135)$$

Notando que

$$\nu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q}{S} \right) = \nu \left[\frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{Q}{S^2} \frac{\partial S}{\partial z} \right] \quad (2.136)$$

sustituimos en (2.135), despreciando el segundo termino de la expansión que será cuadrático en términos de $\partial S/\partial z$.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{(1+\delta)}{S} \frac{\partial Q^2}{\partial z} - \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - Sf - \bar{N}Q + \nu \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \\
 & + \left(\frac{Q^2}{S^2} (1-2(1+\delta)) - 2 \frac{\nu}{S} \frac{\partial Q}{\partial z} - \nu S \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q}{S^2} \right) + \frac{p}{\rho} \right) \frac{\partial S}{\partial z} = 0
 \end{aligned} \quad (2.137)$$

Si $S_{(z,t)} = \varphi_{(p(z,t),z)} \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, entonces en (2.137)

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{(1+\delta)}{S} \frac{\partial Q^2}{\partial z} - \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - Sf - \bar{N}Q + \nu \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \\
 & + A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0
 \end{aligned} \quad (2.138)$$

en donde

$$A = \frac{Q^2}{S^2} (1 - 2(1 + \delta)) - 2 \frac{\nu}{S} \frac{\partial Q}{\partial z} - \nu S \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q}{S^2} \right) + \frac{p}{\rho} \quad (2.139)$$

Rescribiendo la ecuación (2.138)

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{(1 + \delta)}{S} \frac{\partial Q^2}{\partial z} + \left(A \frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{S}{\rho} \right) \frac{\partial p}{\partial z} - Sf - \bar{N}Q + \nu \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} + A \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (2.140)$$

2.9.2 Ecuación de continuidad

Al igual que con la ecuación de momentum, partimos de la ecuación de balance de masa (2.62)

$$\hat{r}_Q = 0$$

O bien

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(Su)}{\partial z} = 0 \quad (2.141)$$

Tomando nuevamente a $u = \frac{Q}{S}$ y sustituyendo en (2.141)

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (2.142)$$

2.9.3 Relación constitutiva

Partiendo de la relación constitutiva (2.112), despejamos para $S_{(z,t)}$, de modo que

$$S_{(z,t)} = \frac{S_{o(z)}}{\left[1 - (p_{(z,t)} - p_{o(z)}) \frac{3 r_{o(z)}}{4 E_{\theta} t}\right]^2} = \varphi_{(p_{(z,t)}, z)} \quad (2.143)$$

Entonces

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = \frac{96 \frac{\partial p_{(z,t)}}{\partial p} r_{o(z)} S_{o(z)} E_{\theta}^2 t^2}{\left(4 E_{\theta} t - 3(p_{(z,t)} - p_{o(z)}) r_{o(z)}\right)^3} \quad (2.144)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = & \left(\frac{1}{\left(3 p_{(z,t)} r_{o(z)} - 3 p_{o(z)} r_{o(z)} - 4 E_{\theta} t\right)^3} \right) \left(-16 \left(6 \frac{\partial p_{(z,t)}}{\partial z} r_{o(z)} S_{o(z)} \right. \right. \\ & \left. \left. - 6 \frac{\partial p_{o(z)}}{\partial z} r_{o(z)} S_{o(z)} + 6 \frac{\partial r_{o(z)}}{\partial z} (p_{(z,t)} - p_{o(z)}) S_{o(z)} - \frac{\partial S_{o(z)}}{\partial z} (3 p_{(z,t)} r_{o(z)} \right. \right. \\ & \left. \left. - 3 p_{o(z)} r_{o(z)} - 4 E_{\theta} t) t^2 E_{\theta}^2 \right) \right) \quad (2.145) \end{aligned}$$

Capítulo 3

Discretización Mediante Elementos Finitos

3.1 Objetivo

Una vez que se ha obtenido la forma fuerte de las ecuaciones que gobiernan el problema de fluidos unidimensional, el siguiente paso es aplicar algún procedimiento de discretización que nos permita encontrar un sistema de ecuaciones equivalente el cual pueda ser resuelto haciendo uso de métodos numéricos. En el presente capítulo, se muestra el proceso de discretización de las ecuaciones gobernantes utilizando el método de residuos pesados, el cual nos permite encontrar un sistema de ecuaciones matriciales que puede ser resuelto mediante la aplicación de algoritmos numéricos de solución.

3.2 Método de residuos pesados

Para una ecuación de la forma $A(u) = f$ dentro del dominio Ω , en donde la solución exacta u satisface la ecuación diferencial mas las condiciones de frontera, es posible definir un residuo R , si en lugar de sustituir la solución exacta se emplea una solución aproximada \hat{u} , de modo que

$$R = A(\hat{u}) - f \neq 0 \quad (3.1)$$

en donde la aproximación \hat{u} se puede proponer como una combinación lineal, con funciones de interpolación N dentro de cada elemento.

$$u \approx \hat{u} = \sum N(\hat{u}) \quad (3.2)$$

De esta manera, el método de residuos pesados tratará de minimizar el residuo para que se satisfaga la ecuación diferencial, utilizando funciones de peso en forma promedio o integrada

$$\int_{\Omega} \psi R d\Omega = 0 \quad (3.3)$$

en donde las funciones ψ son miembros de las funciones de peso que se proponen arbitrariamente.

Para las condiciones de frontera, es posible definir un residuo en la frontera que se forma al emplear la solución aproximada en las expresiones de frontera, de forma que se puede establecer un criterio similar al de la ecuación diferencial para desvanecer el residuo:

$$\int_{\Gamma} \bar{\psi} \bar{R} d\Gamma = 0 \quad (3.4)$$

en donde $\bar{\psi}$ es un vector de funciones de peso sobre la frontera.

En forma compacta, el planteamiento del método de residuos pesados equivalente a la forma fuerte de un problema se puede expresar como:

$$\int_{\Omega} \psi R d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\psi} \bar{R} d\Gamma = 0 \quad (3.5)$$

3.3 Proyecciones de los gradientes

La solución de las ecuaciones discretas de fluidos se hace más robusta si se introducen proyecciones de los gradientes convectivo y de presión [11], definidas respectivamente como:

$$c = r_m - \rho u \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.6)$$

O bien

$$c = r_m - \rho \frac{Q}{S^2} \frac{\partial Q}{\partial z} \quad (3.7)$$

$$\pi = r_m - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3.8)$$

La forma de residuos pesados para minimizar el residuo r_m será:

$$\int_0^L \delta c \left(\rho \frac{Q}{S^2} \frac{\partial Q}{\partial z} + c \right) dz = 0 \quad (3.9)$$

$$\int_0^L \delta \pi S \tau_\rho \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \pi \right) dz = 0 \quad (3.10)$$

en donde δc y $\delta \pi$ son funciones de peso.

3.4 Forma débil de la ecuación de momentum

Partiendo de la ecuación de momentum estabilizada en términos de flujo y presión, la forma de residuos pesados correspondiente es:

$$\int_0^L W \left[r_m - \frac{h}{2} \frac{\partial r_m}{\partial z} \right] dz + \hat{W} [r_{nB} - r_{nA}] = 0 \quad (3.11)$$

en donde W y \hat{W} son funciones de peso apropiadas, con r_m y r_n definidos como

$$r_m = \frac{\partial Q}{\partial t} - r \quad (3.12)$$

$$r_n = \left(\frac{p}{\rho} \right) - \left(\frac{\bar{p}_B}{\rho} \right) - \nu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q}{S} \right) - \frac{Q^2}{S^2} + \frac{1}{S} \frac{h}{2} \hat{r} = 0 \quad (3.13)$$

en donde

$$r = -\frac{(1+\delta)}{S} \frac{\partial Q^2}{\partial z} - \left(A \frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{S}{\rho} \right) \frac{\partial p}{\partial z} + Sf + \bar{N}Q - \nu \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} - A \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (3.14)$$

$$A = \frac{Q^2}{S^2} (1 - 2(1+\delta)) - 2 \frac{\nu}{S} \frac{\partial Q}{\partial z} - \nu S \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q}{S^2} \right) + \frac{p}{\rho} \quad (3.15)$$

$$\hat{r} = r_m \quad (3.16)$$

Utilizando integración por partes, podemos expresar el segundo término de la integral como:

$$\frac{1}{2} \int_0^L Wh \frac{\partial r_m}{\partial z} dz = \frac{1}{2} \left([Whr_m]_B - [Whr_m]_A - \int_0^L \frac{\partial(Wh)}{\partial z} r_m dz \right) \quad (3.17)$$

Sustituyendo la ecuación (3.17) en la ecuación (3.11), simplificando, tomando a $\hat{W} = W$ y haciendo uso de la proyección del gradiente convectivo

$$\begin{aligned} & \int_0^L W \left(\frac{\partial Q}{\partial t} - r \right) dz + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\partial(Wh)}{\partial z} \left(c + \rho \frac{Q}{S^2} \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dz \\ & + W \left[S \left(\frac{p}{\rho} \right) - S \left(\frac{\bar{p}_B}{\rho} \right) - \nu S \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q}{S} \right) - \frac{Q^2}{S} \right]_B \\ & - W \left[S \left(\frac{p}{\rho} \right) - S \left(\frac{\bar{p}_B}{\rho} \right) - \nu S \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q}{S} \right) - \frac{Q^2}{S} \right]_A = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Sustituyendo el término r , tenemos:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L W \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{(1+\delta)}{S} \frac{\partial Q^2}{\partial z} + \left(A \frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{S}{\rho} \right) \frac{\partial p}{\partial z} - Sf - \bar{N}Q + \nu \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \right. \\
 & \left. + A \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dz + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\partial(W h)}{\partial z} \left(c + \rho \frac{Q}{S^2} \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dz \\
 & + W \left[S \left(\frac{p}{\rho} \right) - S \left(\frac{\bar{p}_B}{\rho} \right) - \nu S \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q}{S} \right) - \frac{Q^2}{S} \right]_B \\
 & - W \left[S \left(\frac{p}{\rho} \right) - S \left(\frac{\bar{p}_B}{\rho} \right) - \nu S \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q}{S} \right) - \frac{Q^2}{S} \right]_A = 0
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Utilizando nuevamente integración por partes sobre el termino que depende del gradiente de presión,

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L W \left(A \frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{S}{\rho} \right) \frac{\partial p}{\partial z} dz = \left[W \left(A \frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{S}{\rho} \right) p \right]_B \\
 & - \left[W \left(A \frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{S}{\rho} \right) p \right]_A + \int_0^L \frac{S}{\rho} \frac{\partial W}{\partial z} p dz - \int_0^L A \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial W}{\partial z} p dz
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Rescribiendo la ecuación (3.19)

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L W \frac{\partial Q}{\partial t} dz + \int_0^L W \frac{(1+\delta)}{S} \frac{\partial Q^2}{\partial z} dz + \int_0^L \frac{S}{\rho} \frac{\partial W}{\partial z} p dz - \int_0^L A \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial W}{\partial z} p dz \\
 & - \int_0^L W S f dz - \int_0^L W \bar{N} Q dz + \int_0^L W \nu \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} dz + \int_0^L W A \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\partial(W h)}{\partial z} c dz \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\partial(W h)}{\partial z} \rho \frac{Q}{S^2} \frac{\partial Q}{\partial z} dz \\
 & + W \left[-S \left(\frac{\bar{p}_B}{\rho} \right) - \nu S \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q}{S} \right) - \frac{Q^2}{S} + p A \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right]_B
 \end{aligned}$$

$$-W \left[-S \left(\frac{\bar{p}_B}{\rho} \right) - \nu S \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q}{S} \right) - \frac{Q^2}{S} + pA \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right]_A = 0 \quad (3.21)$$

Para poder simplificar las condiciones de frontera naturales, aplicamos integración por parte sobre los siguientes términos:

$$\int_0^L W \nu \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} dz = \left[W \nu \frac{\partial Q}{\partial z} \right]_A^B - \int_0^L \frac{\partial W}{\partial z} \nu \frac{\partial Q}{\partial z} dz \quad (3.22)$$

$$\int_0^L W \frac{(1+\delta)}{S} \frac{\partial Q^2}{\partial z} dz = \int_0^L W \frac{1}{S} \frac{\partial (Q^2)}{\partial z} dz + \int_0^L W \frac{\delta}{S} \frac{\partial (Q^2)}{\partial z} dz$$

y

$$\int_0^L W \frac{1}{S} \frac{\partial (Q^2)}{\partial z} dz = \left[W \frac{1}{S} Q^2 \right]_A^B - \int_0^L \frac{\partial W}{\partial z} \frac{Q}{S} Q dz$$

Por tanto

$$\int_0^L W \frac{(1+\delta)}{S} \frac{\partial (Q^2)}{\partial z} dz = \left[W \frac{1}{S} Q^2 \right]_A^B - \int_0^L \frac{\partial W}{\partial z} \frac{Q}{S} Q dz + \int_0^L W \frac{\delta}{S} \frac{\partial (Q^2)}{\partial z} dz$$

O bien

$$\int_0^L W \frac{(1+\delta)}{S} \frac{\partial (Q^2)}{\partial z} dz = \left[W \frac{1}{S} Q^2 \right]_A^B - \int_0^L \frac{\partial W}{\partial z} \frac{Q}{S} Q dz + 2 \int_0^L W \frac{\delta}{S} \frac{Q}{\partial z} dz \quad (3.23)$$

$$-\int_0^L A \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial W}{\partial z} p dz = - \left[WA \frac{\partial \varphi}{\partial p} p \right]_A^B + \int_0^L WA \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad (3.24)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.22) a (3.24) en la ecuación (3.21), obtenemos la siguiente estructura para la ecuación de momentum:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L W \frac{\partial Q}{\partial t} dz - \int_0^L \frac{\partial W}{\partial z} \frac{Q}{S} Q dz + 2 \int_0^L W \delta \frac{Q}{S} \frac{\partial Q}{\partial z} dz \\
 & - \int_0^L \frac{\partial W}{\partial z} \left(\nu - \frac{\rho h Q}{2S^2} \right) \frac{\partial Q}{\partial z} dz + \int_0^L \frac{\partial W}{\partial z} \frac{S}{\rho} p dz + \int_0^L W A \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} dz \\
 & + \int_0^L \frac{\partial W}{\partial z} \frac{h}{2} c dz - \int_0^L W S f dz - \int_0^L W \bar{N} Q dz + \int_0^L W A \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz - \left[W \left(\frac{\bar{F}}{\rho} \right) \right]_A^B = 0 \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

en donde $\bar{F} = S\bar{p}$. Nótese que $\nu S \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q}{S} \right) \approx \nu \frac{\partial Q}{\partial z}$.

3.5 Forma débil de la ecuación de masa

De manera similar que con la ecuación de momentum, aplicamos el método de residuos pesados sobre la ecuación de continuidad de masa.

$$\int_0^L q \left[\hat{r}_Q - \rho \tau_Q \frac{\partial r_m}{\partial z} \right] dz = 0 \quad (3.26)$$

en donde q es función de peso, con \hat{r}_Q definida como

$$\hat{r}_Q = \bar{\psi} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \quad (3.27)$$

Utilizando integración por partes sobre el segundo termino de la integral, y haciendo uso de la proyección del gradiente de presión, tenemos

$$\int_0^L q \rho \tau_Q \frac{\partial r_m}{\partial z} dz = [q \rho \tau_Q r_m]_A^B - \int_0^L \frac{\partial q}{\partial z} \rho \tau_Q \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \pi \right) dz \quad (3.28)$$

Suponiendo que el residuo es despreciable en la frontera [11] y sustituyendo la ecuación (3.28) en la ecuación (3.26)

$$\begin{aligned} & \int_0^L q \frac{\partial Q}{\partial z} dz + \int_0^L q \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} dz + \int_0^L \frac{\partial q}{\partial z} \rho \tau_\varrho \frac{\partial p}{\partial z} dz + \int_0^L \frac{\partial q}{\partial z} \rho \tau_\varrho \pi dz \\ & + \int_0^L q \bar{\psi} dz = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Multiplicando todo por $\frac{S}{\rho}$ para posteriormente poder simplificar,

$$\begin{aligned} & \int_0^L q \frac{S}{\rho} \frac{\partial Q}{\partial z} dz + \int_0^L q \frac{S}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} dz + \int_0^L \frac{\partial q}{\partial z} S \tau_\varrho \frac{\partial p}{\partial z} dz + \int_0^L \frac{\partial q}{\partial z} S \tau_\varrho \pi dz \\ & + \int_0^L q \frac{S}{\rho} \bar{\psi} dz = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

3.6 Resumen de ecuaciones en su forma débil

Las ecuaciones del problema de fluidos unidimensional en su forma débil se resumen en las siguientes.

Balance de momentum

$$\begin{aligned} & \int_0^L W \frac{\partial Q}{\partial t} dz - \int_0^L \frac{\partial W}{\partial z} \frac{Q}{S} Q dz + 2 \int_0^L W \delta \frac{Q}{S} \frac{\partial Q}{\partial z} dz \\ & - \int_0^L \frac{\partial W}{\partial z} \left(\nu - \frac{\rho h Q}{2S^2} \right) \frac{\partial Q}{\partial z} dz + \int_0^L \frac{\partial W}{\partial z} \frac{S}{\rho} p dz + \int_0^L W A \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} dz \\ & + \int_0^L \frac{\partial W}{\partial z} \frac{h}{2} c dz - \int_0^L W S f dz - \int_0^L W \bar{N} Q dz + \int_0^L W A \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz - \left[W \left(\frac{\bar{F}}{\rho} \right) \right]_A^B = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ecuación de continuidad

$$\int_0^L q \frac{S}{\rho} \frac{\partial Q}{\partial z} dz + \int_0^L q \frac{S}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} dz + \int_0^L \frac{\partial q}{\partial z} S \tau_Q \frac{\partial p}{\partial z} dz + \int_0^L \frac{\partial q}{\partial z} S \tau_Q \pi dz + \int_0^L q \frac{S}{\rho} \bar{\psi} dz = 0 \quad (3.32)$$

Gradientes de presiones

$$\int_0^L \delta c \left(\rho \frac{Q}{S^2} \frac{\partial Q}{\partial z} + c \right) dz = 0 \quad (3.33)$$

$$\int_0^L \delta \pi S \tau_Q \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \pi \right) dz = 0 \quad (3.34)$$

3.7 Formas de interpolación

Continuando con el planteamiento de las ecuaciones de balance de momentum y masa mediante el método de residuos pesados, se propone la siguiente estructura para las funciones de peso y de prueba:

Funciones de peso

$$W = \mathbf{N} \hat{\mathbf{W}} \quad (3.35)$$

$$q = \mathbf{N} \hat{\mathbf{q}} \quad (3.36)$$

$$\delta c = \mathbf{N} \hat{\delta c} \quad (3.37)$$

$$\delta \pi = \mathbf{N} \hat{\delta \pi} \quad (3.38)$$

Funciones de prueba

$$p = \mathbf{N} \hat{p} \quad (3.39)$$

$$Q = \mathbf{N} \hat{Q} \quad (3.40)$$

$$c = \mathbf{N} \hat{c} \quad (3.41)$$

$$\pi = \mathbf{N} \hat{\pi} \quad (3.42)$$

en donde \mathbf{N} representa las funciones de interpolación dentro de cada elemento.

3.8 Forma matricial de la ecuación de momentum

Utilizando las formas de interpolación propuestas anteriormente y sustituyendo en la ecuación de balance de momentum en su forma débil, es posible obtener su forma matricial, de manera que

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{W}} \left[\int_0^L \mathbf{N}^T \mathbf{N} dz \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} - \int_0^L \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \frac{Q}{S} dz \hat{Q} + 2 \int_0^L \mathbf{N}^T \delta \frac{Q}{S} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} dz \hat{Q} \right. \\ & \left. - \int_0^L \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial z} v \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} dz \hat{Q} + \int_0^L \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial z} \frac{\rho h Q}{2S^2} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} dz \hat{Q} + \int_0^L \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \frac{S}{\rho} dz \hat{p} \right. \\ & \left. + \int_0^L \mathbf{N}^T A \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} dz \hat{p} + \int_0^L \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \frac{h}{2} dz \hat{c} - \int_0^L \mathbf{N}^T S f dz - \int_0^L \mathbf{N}^T \bar{N} Q dz \right] \end{aligned}$$

$$\left. + \int_0^L \mathbf{N}^T A \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right] = 0 \quad (3.43)$$

La ecuación (3.43) se puede describir en formato matricial como

$$\mathbf{M}^e \dot{\hat{\mathbf{Q}}}^e + \mathbf{H}^e \hat{\mathbf{Q}}^e - (\mathbf{G}^e - \mathbf{G}_s^e) \hat{\mathbf{p}}^e + \mathbf{C}^e \hat{\mathbf{c}}^e = \mathbf{f}^e \quad (3.44)$$

en donde:

$$\mathbf{M}^e = \int_0^L \mathbf{N}^T \mathbf{N} dz \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^e = & - \int_0^L \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \frac{Q}{S} dz + 2 \int_0^L \mathbf{N}^T \delta \frac{Q}{S} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} dz - \int_0^L \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial z} \nu \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} dz \\ & + \int_0^L \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial z} \frac{\rho h Q}{2S^2} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\mathbf{G}^e = - \int_0^L \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \frac{S}{\rho} dz \quad (3.47)$$

$$\mathbf{G}_s^e = \int_0^L \mathbf{N}^T A \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} dz \quad (3.48)$$

$$\mathbf{C}^e = \int_0^L \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \frac{h}{2} dz \quad (3.49)$$

$$\mathbf{f}^e = \int_0^L \mathbf{N}^T S f dz + \int_0^L \mathbf{N}^T \bar{N} Q dz - \int_0^L \mathbf{N}^T A \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \quad (3.50)$$

3.9 Forma matricial de la ecuación de masa

De manera similar que con la ecuación de momentum, sustituimos las formas de interpolación propuestas sobre la ecuación de balance de masa en su forma débil, de modo que

$$\hat{\mathbf{q}} \left[\int_0^L \mathbf{N}^T \frac{S}{\rho} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} dz \hat{\mathbf{Q}} + \int_0^L \mathbf{N}^T \mathbf{N} \frac{S}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial p} dz \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} + \int_0^L \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial z} S \tau_\varrho \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} dz \hat{p} + \int_0^L \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial z} \mathbf{N} S \tau_\varrho dz \hat{\pi} + \int_0^L \mathbf{N}^T \frac{S}{\rho} \bar{\psi} dz \right] = 0 \quad (3.51)$$

Rescribiendo la ecuación (3.51) en formato matricial

$$\mathbf{D}^e \dot{\hat{\mathbf{p}}}^e + (\mathbf{G}^e)^T \hat{\mathbf{Q}}^e + \mathbf{L}^e \hat{\mathbf{p}}^e + \mathbf{P}^e \hat{\pi}^e = \mathbf{f}_m^e \quad (3.52)$$

en donde:

$$\mathbf{D}^e = \int_0^L \mathbf{N}^T \mathbf{N} \frac{S}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial p} dz \quad (3.53)$$

$$\mathbf{G}^e = - \int_0^L \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \frac{S}{\rho} dz \quad (3.54)$$

$$\mathbf{L}^e = \int_0^L \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial z} S \tau_\varrho \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} dz \quad (3.55)$$

$$\mathbf{P}^e = \int_0^L \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial z} \mathbf{N} S \tau_\varrho dz \quad (3.56)$$

$$\mathbf{f}_m^e = -\int_0^L \mathbf{N}^T \frac{S}{\rho} \bar{\psi} dz \quad (3.57)$$

3.10 Forma matricial de las proyecciones de los gradientes

Sustituyendo las formas de interpolación propuestas en las proyecciones de los gradientes, obtenemos para el gradiente convectivo

$$\hat{\delta} \mathbf{c} \left[\int_0^L \mathbf{N}^T \rho \frac{Q}{S^2} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} dz \hat{\mathbf{Q}} + \int_0^L \mathbf{N}^T \mathbf{N} dz \hat{\mathbf{c}} \right] = 0 \quad (3.58)$$

En forma matricial

$$\mathbf{B}^e \hat{\mathbf{Q}}^e + \mathbf{M}^e \hat{\mathbf{c}}^e = 0 \quad (3.59)$$

en donde:

$$\mathbf{B}^e = \int_0^L \mathbf{N}^T \rho \frac{Q}{S^2} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} dz \quad (3.60)$$

$$\mathbf{M}^e = \int_0^L \mathbf{N}^T \mathbf{N} dz \quad (3.61)$$

De manera similar para el gradiente de presión

$$\hat{\delta} \boldsymbol{\pi} \left[\int_0^L \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial z} \mathbf{N} S \tau_Q dz \hat{\boldsymbol{\pi}} + \int_0^L \mathbf{N}^T S \tau_Q \mathbf{N} dz \hat{\boldsymbol{\pi}} \right] = 0 \quad (3.62)$$

En forma matricial

$$(\mathbf{P}^e)^T \hat{\mathbf{p}}^e + \mathbf{E}^e \hat{\boldsymbol{\pi}}^e = 0 \quad (3.63)$$

en donde:

$$\mathbf{P}^e = \int_0^L \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial z} \mathbf{N} S \tau_Q dz \quad (3.64)$$

$$\mathbf{E}^e = \int_0^L \mathbf{N}^T S \tau_Q \mathbf{N} dz \quad (3.65)$$

3.11 Resumen de ecuaciones en su forma matricial

Las ecuaciones del problema de fluidos unidimensional en su forma discretizada se resumen en el siguiente sistema:

$$\mathbf{M}^e \dot{\hat{\mathbf{Q}}}^e + \mathbf{H}^e \hat{\mathbf{Q}}^e - (\mathbf{G}^e - \mathbf{G}_s^e) \hat{\mathbf{p}}^e + \mathbf{C}^e \hat{\mathbf{c}}^e = \mathbf{f}^e \quad (3.66)$$

$$\mathbf{D}^e \dot{\hat{\mathbf{p}}}^e + (\mathbf{G}^e)^T \hat{\mathbf{Q}}^e + \mathbf{L}^e \hat{\mathbf{p}}^e + \mathbf{P}^e \hat{\boldsymbol{\pi}}^e = \mathbf{f}_m^e \quad (3.67)$$

$$\mathbf{B}^e \hat{\mathbf{Q}}^e + \mathbf{M}^e \hat{\mathbf{c}}^e = 0 \quad (3.68)$$

$$(\mathbf{P}^e)^T \hat{\mathbf{p}}^e + \mathbf{E}^e \hat{\boldsymbol{\pi}}^e = 0 \quad (3.69)$$

3.12 Selección del tipo de elemento

Debido a que el análisis que se llevara a cabo es unidimensional, se utilizara un elemento lineal de dos nodos, con funciones de interpolación definidas como:

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (3.70)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (3.71)$$

El jacobiano de la transformación para este elemento se define como

$$J = \frac{dx}{d\xi} = \frac{L}{2} \quad (3.72)$$

3.13 Forma específica de la ecuación de momentum

Utilizando las funciones de interpolación propuestas junto con el jacobiano de la transformación, sustituimos en la ecuación de balance de momentum en su forma matricial para encontrar las formas específicas de cada término.

$$\mathbf{M}^e = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} J d\xi = L \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^e &= -\frac{Q}{S} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \end{bmatrix} J d\xi \\ &+ 2\delta \frac{Q}{S} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \end{bmatrix} J d\xi \\ &- \nu \int_{-1}^1 \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \end{bmatrix} \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \end{bmatrix} J d\xi \end{aligned}$$

$$+ \frac{\rho h Q}{2S^2} \int_{-1}^1 \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \end{bmatrix} \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \end{bmatrix} J d\xi \quad (3.74)$$

Rescribiendo la ecuación (3.74)

$$\mathbf{H}^e = -\frac{Q}{S} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} + 2\delta \frac{Q}{S} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} - \frac{\nu}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\rho h Q}{2S^2 L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

$$\mathbf{G}^e = -\frac{S}{\rho} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \end{bmatrix} J d\xi = -\frac{S}{\rho} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

$$\mathbf{G}_s^e = A \frac{\partial \varphi}{\partial p} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \end{bmatrix} J d\xi = A \frac{\partial \varphi}{\partial p} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

$$\mathbf{C}^e = \frac{h}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \end{bmatrix} J d\xi = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

$$\mathbf{f}^e = S f \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} J d\xi + \bar{N} Q \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} J d\xi - A \frac{\partial \varphi}{\partial z} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} J d\xi \quad (3.79)$$

Simplificando la ecuación (3.79)

$$\mathbf{f}^e = S f L \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \bar{N} Q L \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} - A \frac{\partial \varphi}{\partial z} L \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

3.14 Forma específica de la ecuación de masa

De manera similar que con la ecuación de momentum, sustituimos las funciones de interpolación propuestas sobre la ecuación de balance de masa en su forma matricial, de modo que

$$\mathbf{D}^e = \frac{S}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial p} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} J d\xi = \frac{SL}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial p} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

$$\mathbf{G}^e = -\frac{S}{\rho} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \end{bmatrix} J d\xi = -\frac{S}{\rho} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

$$\mathbf{L}^e = S\tau_\varrho \int_{-1}^1 \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \end{bmatrix} \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \end{bmatrix} J d\xi = \frac{S\tau_\varrho}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

$$\mathbf{P}^e = S\tau_\varrho \int_{-1}^1 \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} J d\xi = S\tau_\varrho \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

$$\mathbf{f}_m^e = -\frac{S}{\rho} \bar{\psi} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} J d\xi = -\frac{S}{\rho} \bar{\psi} L \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

3.15 Forma específica de las proyecciones de los gradientes

Sustituyendo las funciones de interpolación en las proyecciones de los gradientes, obtenemos

Gradiente convectivo

$$\mathbf{B}^e = \rho \frac{Q}{S^2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \end{bmatrix} J d\xi = \rho \frac{Q}{S^2} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

$$\mathbf{M}^e = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} J d\xi = L \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

Gradiente de presión

$$\mathbf{P}^e = S\tau_\varrho \int_{-1}^1 \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} J d\xi = S\tau_\varrho \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

$$\mathbf{E}^e = S\tau_\varrho \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} J d\xi = S\tau_\varrho L \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

Capítulo 4

Método de Solución

4.1 Objetivo

La finalidad de éste capítulo es presentar el método de solución seleccionado, el cual se basa en un esquema de paso fraccional que permite resolver el sistema de ecuaciones básicas por separado, aplicando criterios de convergencia para validar cada tiempo de muestreo.

4.2 Ecuaciones básicas

Las ecuaciones del problema de fluidos unidimensional en su forma discretizada se resumen en el siguiente sistema:

$$\mathbf{M}^e \dot{\hat{\mathbf{Q}}}^e + \mathbf{H}^e \hat{\mathbf{Q}}^e - (\mathbf{G}^e - \mathbf{G}_s^e) \hat{\mathbf{p}}^e + \mathbf{C}^e \hat{\mathbf{c}}^e = \mathbf{f}^e \quad (4.1)$$

$$\mathbf{D}^e \dot{\hat{\mathbf{p}}}^e + (\mathbf{G}^e)^T \hat{\mathbf{Q}}^e + \mathbf{L}^e \hat{\mathbf{p}}^e + \mathbf{P}^e \hat{\boldsymbol{\pi}}^e = \mathbf{f}_m^e \quad (4.2)$$

$$\mathbf{B}^e \hat{\mathbf{Q}}^e + \mathbf{M}^e \hat{\mathbf{c}}^e = 0 \quad (4.3)$$

$$(\mathbf{P}^e)^T \hat{\mathbf{p}}^e + \mathbf{E}^e \hat{\boldsymbol{\pi}}^e = 0 \quad (4.4)$$

en el cual el tiempo no se discretiza, por lo que se obtiene un grupo de ecuaciones diferenciales en t .

4.3 Aproximación en el tiempo

En este caso, las variables que se aproximarán en el tiempo son:

Flujo

$$\hat{\mathbf{Q}}^{n+\theta} = (1-\theta)\hat{\mathbf{Q}}^n + \theta\hat{\mathbf{Q}}^{n+1} \quad (4.5)$$

Presión

$$\hat{\mathbf{p}}^{n+\theta} = (1-\theta)\hat{\mathbf{p}}^n + \theta\hat{\mathbf{p}}^{n+1} \quad (4.6)$$

Fuerzas externas

$$\mathbf{f}^{n+\theta} = \mathbf{f}(t_{n+\theta}) \quad (4.7)$$

Proyección del gradiente convectivo

$$\hat{\mathbf{c}}^{n+\theta} = (1-\theta)\hat{\mathbf{c}}^n + \theta\hat{\mathbf{c}}^{n+1} \quad (4.8)$$

Proyección del gradiente de presión

$$\hat{\boldsymbol{\pi}}^{n+\theta} = (1-\theta)\hat{\boldsymbol{\pi}}^n + \theta\hat{\boldsymbol{\pi}}^{n+1} \quad (4.9)$$

en donde θ es un parámetro adimensional con $\theta \in [0,1]$, de modo que el tiempo se puede discretizar en intervalos con

$$t \in [t_n, t_{n+1}] \quad (4.10)$$

$$t_{n+\theta} = (1-\theta)t_n + \theta t_{n+1} \quad (4.11)$$

4.4 Esquema de solución transitoria

La estrategia básica de solución consiste en discretizar las ecuaciones que se quieren resolver muestreando en un tiempo específico del intervalo, representado por θ . En caso de tener varias ecuaciones, cada una se puede muestrear a un tiempo diferente, que corresponde a un parámetro diferente, o bien, pueden muestrearse al mismo tiempo.

Para este caso en particular, escribimos el sistema de ecuaciones como

$$\mathbf{M} \frac{1}{\Delta t} (\hat{\mathbf{Q}}^{n+\beta} - \hat{\mathbf{Q}}^n) + \mathbf{H}^{n+\theta} \hat{\mathbf{Q}}^{n+\theta} - (\mathbf{G}^{n+\theta} - \mathbf{G}_s^{n+\theta}) \hat{\mathbf{p}}^{n+\beta} + \mathbf{C} \hat{\mathbf{c}}^{n+\theta} = \mathbf{f}^{n+\theta} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{D}^{n+\beta} \frac{1}{\Delta t} (\hat{\mathbf{p}}^{n+\beta} - \hat{\mathbf{p}}^n) + (\mathbf{G}^{n+\beta})^T \hat{\mathbf{Q}}^{n+\beta} + \mathbf{L}^{n+\beta} \hat{\mathbf{p}}^{n+\beta} + \mathbf{P}^{n+\beta} \hat{\boldsymbol{\pi}}^{n+\delta} = \mathbf{f}_m^{n+\theta} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{B}^{n+\beta} \hat{\mathbf{Q}}^{n+\beta} + \mathbf{M} \hat{\mathbf{c}}^{n+\beta} = 0 \quad (4.14)$$

$$(\mathbf{P}^T)^{n+\beta} \hat{\mathbf{p}}^{n+\beta} + \mathbf{E}^{n+\beta} \hat{\boldsymbol{\pi}}^{n+\beta} = 0 \quad (4.15)$$

4.5 Esquema de paso fraccional

En la ecuación de momentum (4.12), se pueden expandir los términos de aceleración y presión como:

$$\mathbf{M} \frac{1}{\Delta t} (\hat{\mathbf{Q}}^{n+\beta} - \tilde{\mathbf{Q}}^{n+1} + \tilde{\mathbf{Q}}^{n+1} - \hat{\mathbf{Q}}^n) + \mathbf{H}^{n+\theta} \hat{\mathbf{Q}}^{n+\theta}$$

$$-(\mathbf{G}^{n+\theta} - \mathbf{G}_s^{n+\theta})(\alpha \hat{\mathbf{p}}^{n+\gamma} - \alpha \hat{\mathbf{p}}^{n+\gamma} + \hat{\mathbf{p}}^{n+\beta}) + \mathbf{C}\hat{\mathbf{c}}^{n+\theta} = \mathbf{f}^{n+\theta} \quad (4.16)$$

en donde $\tilde{\mathbf{Q}}^{n+1}$ es el valor estimado del flujo al tiempo $n+1$ y α es un nuevo parámetro cuyo trabajo es distribuir el efecto de la presión en la ecuación de momentum. Sus valores de importancia son 0 o 1.

Dividiendo arbitrariamente la ecuación (4.16), tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \frac{1}{\Delta t} (\tilde{\mathbf{Q}}^{n+1} - \hat{\mathbf{Q}}^n) + \mathbf{H}^{n+\theta} \hat{\mathbf{Q}}^{n+\theta} - (\mathbf{G}^{n+\theta} - \mathbf{G}_s^{n+\theta})(\alpha \hat{\mathbf{p}}^{n+\gamma}) \\ + \mathbf{C}\hat{\mathbf{c}}^{n+\theta} = \mathbf{f}^{n+\theta} \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{M} \frac{1}{\Delta t} (\hat{\mathbf{Q}}^{n+\beta} - \tilde{\mathbf{Q}}^{n+1}) - (\mathbf{G}^{n+\theta} - \mathbf{G}_s^{n+\theta})(\hat{\mathbf{p}}^{n+\beta} - \alpha \hat{\mathbf{p}}^{n+\gamma}) = 0 \quad (4.18)$$

Aquí se puede notar el efecto de emplear los parámetros β y θ , ya que cada uno muestrea cada ecuación en tiempos ligeramente diferentes.

Una forma alterna de la ecuación de continuidad puede obtenerse de la siguiente manera. De (4.18) se puede despejar

$$\hat{\mathbf{Q}}^{n+\beta} = \Delta t \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{G}^{n+\theta} - \mathbf{G}_s^{n+\theta})(\hat{\mathbf{p}}^{n+\beta} - \alpha \hat{\mathbf{p}}^{n+\gamma}) + \tilde{\mathbf{Q}}^{n+1} \quad (4.19)$$

Insertando esta expresión en el segundo término de la ecuación de continuidad (4.13), se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{n+\beta} \frac{1}{\Delta t} (\hat{\mathbf{p}}^{n+\beta} - \hat{\mathbf{p}}^n) + (\mathbf{G}^{n+\beta})^T \tilde{\mathbf{Q}}^{n+1} + \Delta t \frac{L}{\rho} (\hat{\mathbf{p}}^{n+\beta} - \alpha \hat{\mathbf{p}}^{n+\gamma}) \\ + \mathbf{L}^{n+\beta} \hat{\mathbf{p}}^{n+\beta} + \mathbf{P}^{n+\beta} \hat{\boldsymbol{\pi}}^{n+\delta} = 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

en donde

$$\frac{1}{\rho} L = \mathbf{G}^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{G}^{n+\theta} - \mathbf{G}_s^{n+\theta}) \quad (4.21)$$

4.6 Resumen de ecuaciones discretas

Las ecuaciones del problema de fluidos unidimensional en su forma discreta se resumen en las siguientes:

Balance de momentum

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \frac{1}{\Delta t} (\tilde{\mathbf{Q}}^{n+1} - \hat{\mathbf{Q}}^n) + \mathbf{H}^{n+\theta} \hat{\mathbf{Q}}^{n+\theta} - (\mathbf{G}^{n+\theta} - \mathbf{G}_s^{n+\theta}) (\alpha \hat{\mathbf{p}}^{n+\gamma}) \\ + \mathbf{C} \hat{\mathbf{c}}^{n+\theta} = \mathbf{f}^{n+\theta} \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\mathbf{M} \frac{1}{\Delta t} (\hat{\mathbf{Q}}^{n+\beta} - \tilde{\mathbf{Q}}^{n+1}) - (\mathbf{G}^{n+\theta} - \mathbf{G}_s^{n+\theta}) (\hat{\mathbf{p}}^{n+\beta} - \alpha \hat{\mathbf{p}}^{n+\gamma}) = 0 \quad (4.23)$$

Ecuación de continuidad

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{n+\beta} \frac{1}{\Delta t} (\hat{\mathbf{p}}^{n+\beta} - \hat{\mathbf{p}}^n) + (\mathbf{G}^{n+\beta})^T \tilde{\mathbf{Q}}^{n+1} + \Delta t \frac{L}{\rho} (\hat{\mathbf{p}}^{n+\beta} - \alpha \hat{\mathbf{p}}^{n+\gamma}) \\ + \mathbf{L}^{n+\beta} \hat{\mathbf{p}}^{n+\beta} + \mathbf{P}^{n+\beta} \hat{\boldsymbol{\pi}}^{n+\delta} = 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

en donde

$$\frac{1}{\rho} L = \mathbf{G}^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{G}^{n+\theta} - \mathbf{G}_s^{n+\theta}) \quad (4.25)$$

Gradientes de presiones

$$\mathbf{B}\hat{\mathbf{Q}}^{n+\beta} + \mathbf{M}\hat{\mathbf{c}}^{n+\beta} = 0 \quad (4.26)$$

$$(\mathbf{P}^T)^{n+\beta} \hat{\mathbf{p}}^{n+\beta} + \mathbf{E}\hat{\boldsymbol{\pi}}^{n+\beta} = 0 \quad (4.27)$$

A partir de este punto se pueden proponer diferentes métodos de solución al problema dependiendo de la elección de los parámetros de muestreo: β , γ , δ y θ ; y del parámetro de partición de la presión α .

4.7 Algoritmo de solución implícito ($\beta = \theta = 1$, $\delta = \gamma = 0$, $\alpha = 1$)

En este algoritmo se calculan el balance de masa y la ecuación adicional por separado. La diferencia de éste con uno de tipo explícito es que se deben manejar criterios de convergencia para validar los incrementos de tiempo y la obtención de una solución convergida. Sustituyendo los parámetros en las ecuaciones discretas:

Balance de momentum

$$\mathbf{M} \frac{1}{\Delta t} (\tilde{\mathbf{Q}}^{n+1} - \hat{\mathbf{Q}}^n) + \mathbf{H}^{n+1} \hat{\mathbf{Q}}^{n+1} - (\mathbf{G}^{n+1} - \mathbf{G}_S^{n+1}) \hat{\mathbf{p}}^n + \mathbf{C}^{n+1} \hat{\mathbf{c}}^{n+1} = \mathbf{f}^{n+1} \quad (4.28)$$

$$\mathbf{M} \frac{1}{\Delta t} (\hat{\mathbf{Q}}^{n+1} - \tilde{\mathbf{Q}}^{n+1}) - (\mathbf{G}^{n+1} - \mathbf{G}_S^{n+1}) (\hat{\mathbf{p}}^{n+1} - \hat{\mathbf{p}}^n) = 0 \quad (4.29)$$

Ecuación de continuidad

$$\begin{aligned} & \mathbf{D}^{n+1} \frac{1}{\Delta t} (\hat{\mathbf{p}}^{n+1} - \hat{\mathbf{p}}^n) + (\mathbf{G}^{n+1})^T \tilde{\mathbf{Q}}^{n+1} + \Delta t (\mathbf{V}_1^{n+1} - \mathbf{V}_2^{n+1}) (\hat{\mathbf{p}}^{n+1} - \hat{\mathbf{p}}^n) \\ & + \mathbf{L}^{n+1} \hat{\mathbf{p}}^{n+1} + \mathbf{P}^n \hat{\boldsymbol{\pi}}^n = \mathbf{f}_m^{n+1} \end{aligned} \quad (4.30)$$

en donde

$$\mathbf{V}_1^{n+1} = (\mathbf{G}^{n+1})^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}^{n+1} \quad (4.31)$$

$$\mathbf{V}_2^{n+1} = (\mathbf{G}^{n+1})^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_S^{n+1} \quad (4.32)$$

Gradientes de presiones

$$\mathbf{B}\hat{\mathbf{Q}}^{n+1} + \mathbf{M}\hat{\mathbf{c}}^{n+1} = 0 \quad (4.33)$$

$$(\mathbf{P}^{n+1})^T \hat{\mathbf{p}}^{n+1} + \mathbf{E}^{n+1} \hat{\boldsymbol{\pi}}^{n+1} = 0 \quad (4.34)$$

El algoritmo implícito detallado se muestra a continuación:

1. Para la primera iteración se deben definir los estimados de los valores iniciales ($i = 0$), como

$$\hat{\mathbf{Q}}^{n+1,0} = \hat{\mathbf{Q}}^n \quad \hat{\mathbf{p}}^{n+1,0} = \hat{\mathbf{p}}^n \quad \hat{\mathbf{c}}^{n+1,0} = \hat{\mathbf{c}}^n \quad \hat{\boldsymbol{\pi}}^{n+1,0} = \hat{\boldsymbol{\pi}}^n \quad (4.35)$$

Mas todas la matrices que dependen de Q o p

2. Cálculo de primera estimación de flujo, a partir de (4.28). Las condiciones de frontera de presión deben reflejarse en el vector de carga \mathbf{f} , ya que son condiciones de frontera naturales. Si es un flujo, la condición de frontera es esencial.

$$\mathbf{g}^{n+1,i-1} = \mathbf{H}^{n+1,i-1} \hat{\mathbf{Q}}^{n+1,i-1} - (\mathbf{G}^{n+1,i-1} - \mathbf{G}_S^{n+1,i-1}) \hat{\mathbf{p}}^n + \mathbf{C}^{n+1,i-1} \hat{\mathbf{c}}^{n+1,i-1} \quad (4.36)$$

Predictor
$$\tilde{\mathbf{Q}}^{n+1,i} = \hat{\mathbf{Q}}^n - \Delta t \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{g}^{n+1,i-1} - \mathbf{f}^{n+1}) \quad (4.37)$$

3. Calculo del cambio de presión a partir de (4.30).

$$\delta \mathbf{p}^i = - \left(\mathbf{L}^{n+1,i-1} + \mathbf{D}^{n+1,i-1} \frac{1}{\Delta t} + \Delta t (\mathbf{V}_1^{n+1,i-1} - \mathbf{V}_2^{n+1,i-1}) \right)^{-1}$$

$$\left((\mathbf{G}^{n+1,i-1})^T \tilde{\mathbf{Q}}^{n+1,i} + \mathbf{L}^{n+1,i-1} \hat{\mathbf{p}}^n + \mathbf{P}^n \hat{\boldsymbol{\pi}}^n - \mathbf{f}_m^{n+1} \right) \quad (4.38)$$

El cálculo se realiza para una submatriz, ya que no es necesario calcular el cambio de presión en los puntos en donde se especifica una condición de frontera.

$$\hat{\mathbf{p}}^{n+1,i} = \hat{\mathbf{p}}^n + \delta \mathbf{p}^i \quad (4.39)$$

Una vez calculados los cambios de presión, se deben agregar al vector $\delta \mathbf{p}^i$ los términos correspondientes a las condiciones de frontera especificadas, para posteriormente calcular la presión en el intervalo $\hat{\mathbf{p}}^{n+1,i}$ (ecuación 4.39).

4. Corregir el valor del flujo una vez calculada la presión, utilizando (4.29).

$$\text{Corrector} \quad \hat{\mathbf{Q}}^{n+1,i} = \tilde{\mathbf{Q}}^{n+1,i} + \Delta t \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{G}^{n+1,i-1} - \mathbf{G}_s^{n+1,i-1}) \delta \mathbf{p}^i \quad (4.40)$$

4.1. Aplicar condiciones de frontera para el flujo en puntos de control (en caso de ser requerido). Esto se hace en (4.40) de la misma manera que con el cambio de presión.

5. Estimar los valores de los gradientes convectivo y de presión.

$$\hat{\mathbf{c}}^{n+1,i} = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}^{n+1,i-1} \hat{\mathbf{Q}}^{n+1,i} \quad (4.41)$$

$$\hat{\boldsymbol{\pi}}^{n+1,i} = -(\mathbf{E}^{n+1,i-1})^{-1} (\mathbf{P}^{n+1,i-1})^T \hat{\mathbf{p}}^{n+1,i} \quad (4.42)$$

6. Actualizar las variables Q y p junto con todos los arreglos que dependen de ellas.

7. Verificar la convergencia en flujo y presión. Si la convergencia se ha cumplido, saltar al siguiente valor de $n+1$, si no, regresar al punto 2 con el nuevo estimado del flujo. Se debe realizar este ciclo hasta lograr convergencia o terminar con el número de ciclos

deseados de convergencia. A continuación se presenta un esquema que muestra el algoritmo de solución:

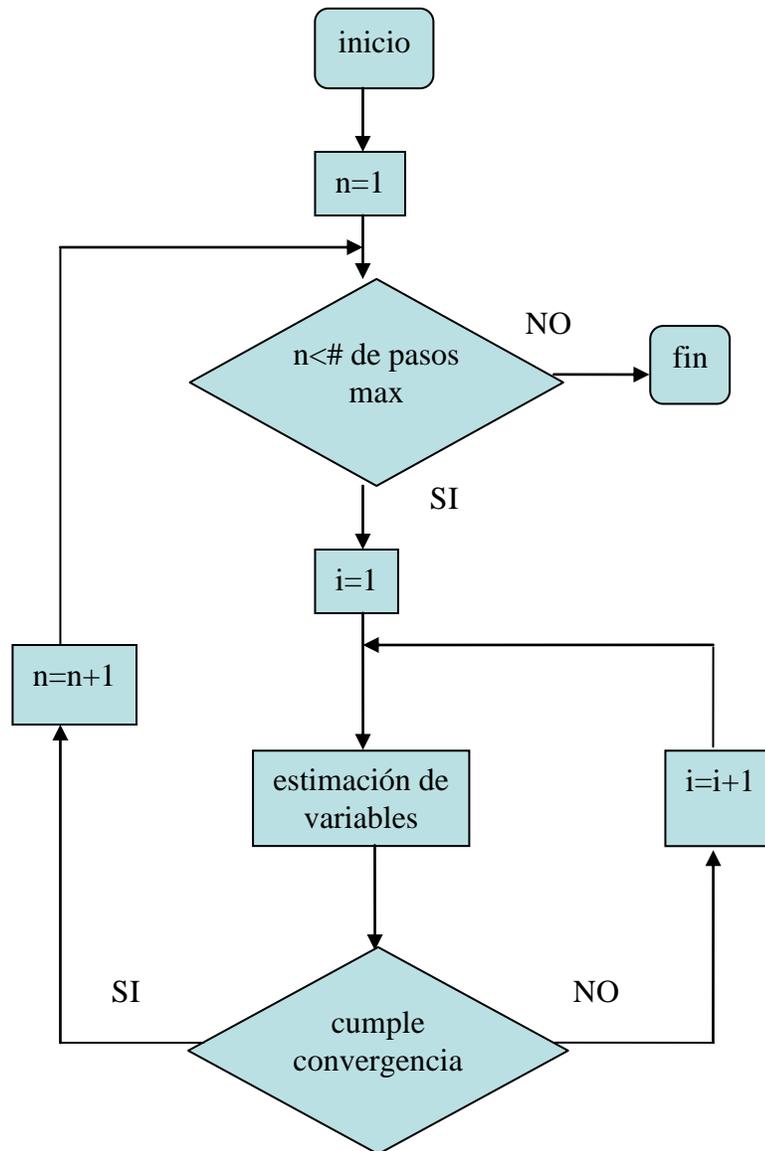


Fig. 4.1 Esquema de algoritmo de solución implícito

A manera de resumen, vemos como a partir de la implementación de un esquema de paso fraccional junto con un algoritmo de solución implícito, es posible resolver el

sistema de ecuaciones discretas para el problema de fluidos unidimensional por separado, manejando criterios de convergencia para validar cada paso en el tiempo.

Capítulo 5

Ejemplos de Validación

5.1 Objetivo

La finalidad del presente capítulo es mostrar ejercicios de prueba los cuales ayuden a verificar la robustez de la formulación y el método empleado de solución, ya que antes de poder emplear el elemento desarrollado dentro de un programa para realizar análisis numérico, es necesario llevar a cabo distintas comprobaciones que determinen la precisión del elemento al modelar problemas e identifiquen situaciones las cuales produzcan problemas de inestabilidad numérica.

El primer grupo de ejemplos presentados consiste en ensamblajes pequeños o “parcelas”, las cuales ayudan a verificar el comportamiento de la formulación ante pruebas típicas que comúnmente son realizadas sobre elementos [20]. Por un lado, se verifica el movimiento de cuerpo rígido, lo cual llevado al contexto de este trabajo representaría problemas en donde la presión es constante. Posteriormente, se verifica el comportamiento ante deformaciones constantes, lo cual equivaldría dentro del contexto manejado a problemas en los cuales el flujo es constante.

El segundo grupo de ejemplos presentados consiste en ensamblajes más grandes, en los cuales se aplican condiciones de frontera más complejas, de manera que se pueda verificar nuevamente el comportamiento de la formulación ante problemas típicos esperados. Para verificar la precisión de los resultados obtenidos, es necesario compararlos contra resultados obtenidos de forma analítica, experimental o numérica ya validada. En este caso, los resultados aquí presentados fueron comparados con aquellos obtenidos mediante la ecuación de gradiente hidráulico para estado estable en un conducto [21], la cual se expresa como

$$Q = \frac{\pi \rho g d^4 h_f}{128 \mu L} \quad (5.1)$$

con

$$h_f = \Delta z + \frac{\Delta p}{\rho g} \quad (5.2)$$

en donde ρ es la densidad del fluido, g la gravedad, d el diámetro del conducto, L la longitud, μ la viscosidad, Δz la diferencia de alturas entre los extremos del conducto y Δp la diferencia de presiones.

5.2 Pruebas de parcela

Para asegurar que la implementación del elemento funcione en ensambles pequeños, se forma una malla que contenga al menos un nodo interior y al menos dos elementos, de tal manera que el ensamble forme una “parcela”. En este caso se genera la malla mostrada en la figura 5.1.

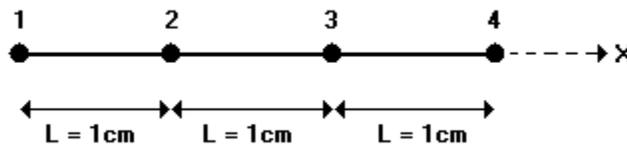


Fig. 5.1 Parcela de tres elementos, $S = 0.5 \text{ cm}^2$

5.2.1 Presión constante

En los nodos 1 y 4 se aplica una presión constante y se analiza el ensamble de elementos. Los resultados exactos implican presión igual para todos los nodos y flujo cero.

Adicionalmente, para este ejemplo se realizara la explicación a detalle del código programado, de manera que se pueda observar la implementación del método de solución seleccionado. Se recomienda también ver el apéndice A.

1. Se definen los nodos y elementos del modelo, así como las incidencias.

```
%Discretizacion mediante elementos finitos
%-----
%numero de elementos
ef=3;
%numero de nodos
nodos=4;
%coordenadas nodales en X (global,cm)
X=[0 1 2 3];
%coordenadas nodales en Y (global,cm)
Y=[0 0 0 0];
%coordenadas nodales en Z (global,cm)
Z=[0 0 0 0];
%arreglo de destino
AD=[1 2;2 3;3 4];
```

Fig. 5.2 Definición del modelo

2. Una vez terminada la geometría, es necesario definir las propiedades del fluido.

```

%Parametros
%-----
%densidad del fluido
dro=0.001060; %(kg/cm3)@37°C [Olufsen, 2000]
%viscosidad del fluido
mu=0.000049; %(kg/cm-s)@37°C [Olufsen, 2000]
%viscosidad cinematica del fluido
nu=mu/dro; %(cm2/s)
%fuerza de cuerpo
%(solo es necesario especificar la gravedad)
f=-0; %(cm/s2)
f=f*fe;
%distribucion de velocidad sobre la seccion transversal
%[Taylor, 2002]
nprofile=1.33;
delta=1/(1+nprofile);
NB=-2*(nprofile+2)*pi*nu; %(cm2/s)

```

Fig. 5.3 Propiedades del fluido

3. Posteriormente, es necesario definir las condiciones iniciales del problema. Para este caso en particular se especifico flujo y presión iguales a cero.

```

%Variables al tiempo t=0
%-----
%flujo inicial (cm3/s)
Qo=0*[1 1 1 1]';
%presion inicial (kg-cm/cm2-s2)
po=0*[0 0 0 0]';
%proyeccion del gradiente convectivo (cm3/s)
gc=[0 0 0 0]';
%proyeccion del gradiente de presion (kg-cm/cm2-s2)
gpi=0*[1 1 1 1]';
%seccion transversal del conducto (cm2)
So=0.5*[1 1 1 1]';

```

Fig. 5.4 Condiciones iniciales

4. Finalmente, se definen los parámetros requeridos para el proceso de solución.

```

%Proceso de solución
%-----
%contador de tiempo
tiempo=0; %(seg)
%tiempo maximo
tiempomax=30; %(seg)
%contador de iteraciones-->i
%numero de iteraciones max (convergencia)
imax=200;
%contador de pasos-->n
%numero de pasos max
nmax=100;
%tolerancia para flujo
tolQ=0.01; %(0.01=1%)
%tolerancia para presión
tolp=0.01; %(0.01=1%)

```

Fig. 5.5 Definición de parámetros

5. Antes de poder iniciar la fase de procesamiento, se requiere definir el intervalo de tiempo Δt así como las condiciones de frontera del problema. En este caso, se define la presión prescrita en los nodos 1 y 4.

```

%incremento para el tiempo (seg)
deltat=0.0001;

%presión en puntos de control
%para cada paso en el tiempo
CFp(1,n)=1; %(kg-cm/cm2-s2)
CFp(1,n)=CFp(1,n)*fe;

```

Fig. 5.6 Condiciones de frontera

6. Siguiendo el esquema de paso fraccional presentado en el capítulo 4, el programa calcula primero las matrices de cada elemento, para posteriormente hacer el ensamble y calcular la primera estimación de flujo.

```

MGs=0*[-1/2 1/2;-1/2 1/2]; %por el momento no se usa
ML=((Sm*tcpm)/h(1,j))*[1 -1;-1 1];
MP=Sm*tcpm*[-1/2 -1/2;1/2 1/2];
MH=-Qm/Sm*[-1/2 1/2;-1/2 1/2]+2*delta*(Qm/Sm)*[-1/2 1/2;-1/2 1
MD=Sm*(h(1,j)/dro)*0*[1/3 1/6;1/6 1/3]; %por el momento no se
VF=0*CFp(1,n)*(Sm/dro)*h(1,j)*[1/2 1/2]'+Sm*f*h(1,j)*[1/2 1/2]

%ensambla matrices M,G,Gs,C,L,P,H y D globales
[MMg,MGg,MGsg,MCg,MLg,MPg,MHg,MDg]=mensambla(j,AD,MMg,MGg,MGsg

%ensambla vector f global
[VFg]=vensambla(j,AD,VFg,VF);
end

%calcula estimacion de flujo
Qestn1=Qn-(deltat*inv(MMg)*(MHg*Qn1a-(MGg-MGsg)*pn+MCg*gcnl-VFg))

```

Fig. 5.7 Ensamble de arreglos

7. Una vez obtenida la estimación de flujo, el programa calcula el cambio de presión aplicando primero las condiciones de frontera correspondientes.

```

%calcula arreglos para cambio de presion
V1=MGg'*inv(MMg)*MGg;
V2=MGg'*inv(MMg)*MGsg;
deltapmat=(MLg+MDg*(1/deltat)+deltat*(V1-V2));
deltapvec=(MGg'*Qestn1+MLg*pn+MPg*gp);

%aplica condiciones de frontera esenciales para presion
valk=0;

```

Fig. 5.8 Calculo de presión

8. Con la nueva presión calculada, se lleva a cabo la corrección del flujo.

```

%calcula cambio de presion
deltap=-inv(deltapmat)*deltapvec;

%calcula nueva presion
pnli=pn+deltap;

%corrige el valor del flujo
Qnli=Qestn1+deltat*inv(MMg)*(MGg-MGsg)*deltap;

```

Fig. 5.9 Corrección del flujo

9. Finalmente, se actualizan los valores para las proyecciones de los gradientes y se verifican los criterios de convergencia para flujo y presión, los cuales se hacen mediante la norma Euclidiana.

```

%estima valores de los gradientes convectivo y de presion
gcn1=-inv(MMg)*MBg*Qnli;
gpil=-inv(MEg)*MPg'*pnli;

%calcula nuevos valores de S
Sn1=Sn; %por el momento S es constante

%verifica convergencia en flujo

if abs(norm(Qnli-Qnlia)/norm(Qnli))<=tolQ
    convQ=1;
else
    convQ=0;
end

```

Fig. 5.10 Actualización de los gradientes

A continuación, se presentan los resultados para el ejemplo.

Propiedades del fluido

$$\rho = 0.00106 \text{ kg / cm}^3$$

$$\mu = 0.000049 \text{ kg / cm-s}$$

Condiciones iniciales

$$Q = 0 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$p = 0 \text{ Pa}$$

$$\Delta t = 0.0001 \text{ seg}$$

Condiciones de frontera

$$p(1,1) = 100 \text{ Pa}$$

$$p(4,1) = 100 \text{ Pa}$$

Resultados exactos

$$Q = [0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000]^T \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$p = [100.0000, 100.0000, 100.0000, 100.0000]^T \text{ Pa}$$

Resultados aproximados

$$Q = 1e^{-22} [-0.2763, -0.1404, 0.1382, 0.2807]^T \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$p = [100.0000, 100.0000, 100.0000, 100.0000]^T \text{ Pa}$$

Para éste ejemplo, el numero de ciclos realizados fue de $n = 100$. Sin embargo, de los resultados obtenidos, podemos ver como la solución exacta se obtiene a partir del segundo ciclo.

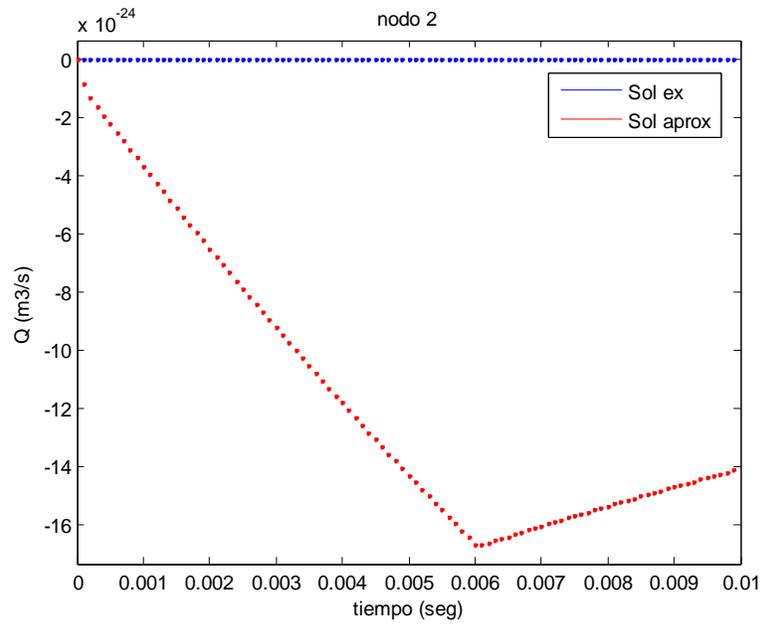


Fig. 5.11 Resultados para flujo

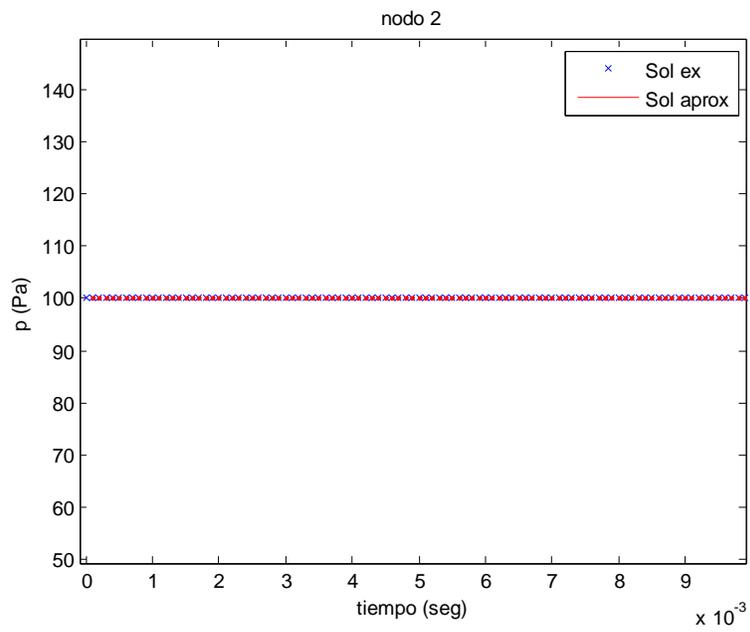


Fig. 5.12 Resultados para presión

5.2.2 Flujo constante

En el nodo 1 se aplica una presión constante mientras que en el nodo 4 la presión se mantiene en cero. Los resultados exactos implican una variación lineal de presión y flujo constante positivo.

Propiedades del fluido

$$\rho = 0.00106 \text{ kg/cm}^3$$

$$\mu = 0.000049 \text{ kg/cm-s}$$

Condiciones iniciales

$$Q = 0 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$p = 0 \text{ Pa}$$

$$\Delta t = 0.01 \text{ seg}$$

Condiciones de frontera

$$p(1,1) = 100 \text{ Pa}$$

$$p(4,1) = 0 \text{ Pa}$$

Resultados exactos

$$Q = 1e^{-2} [0.0065, 0.0065, 0.0065, 0.0065]^T \text{ m}^3/\text{s}$$

$$p = [100.0000, 66.6666, 33.3333, 0.0000]^T \text{ Pa}$$

Resultados aproximados

$$Q = 1e^{-4} [0.6495, 0.6495, 0.6495, 0.6495]^T \text{ m}^3/\text{s}$$

$$p = [100.0000, 66.6667, 33.3333, 0.0000]^T \text{ Pa}$$

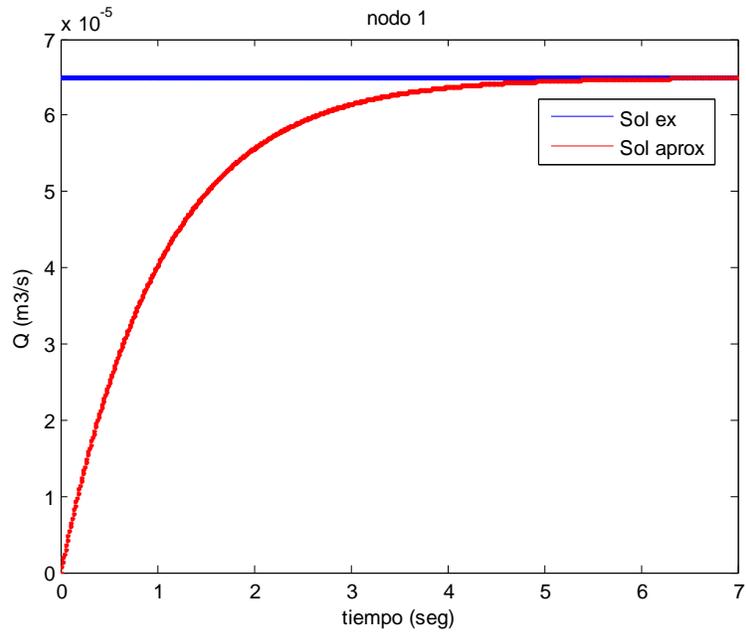


Fig. 5.13 Resultados para flujo

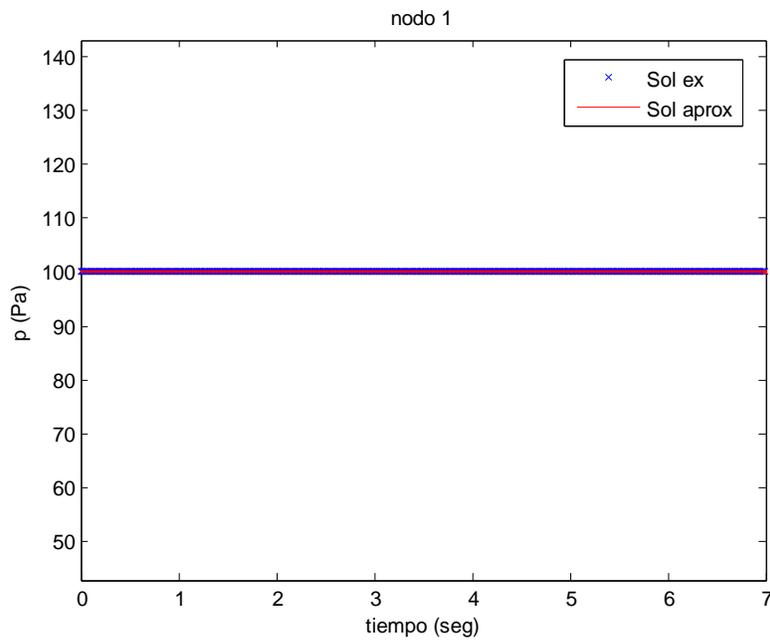


Fig. 5.14 Resultados para presión

Repetimos el ejemplo pero ahora aplicando presión constante en el nodo 4 y presión cero en el nodo 1. Los resultados exactos implican nuevamente una variación lineal de presión con flujo constante negativo.

Condiciones de frontera

$$p(1,1) = 0 \text{ Pa}$$

$$p(4,1) = 100 \text{ Pa}$$

Resultados aproximados

$$Q = 1e^{-4}[-0.6495, -0.6495, -0.6495, -0.6495]^T \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$p = [0.0000, 33.3333, 66.6667, 100.0000]^T \text{ Pa}$$

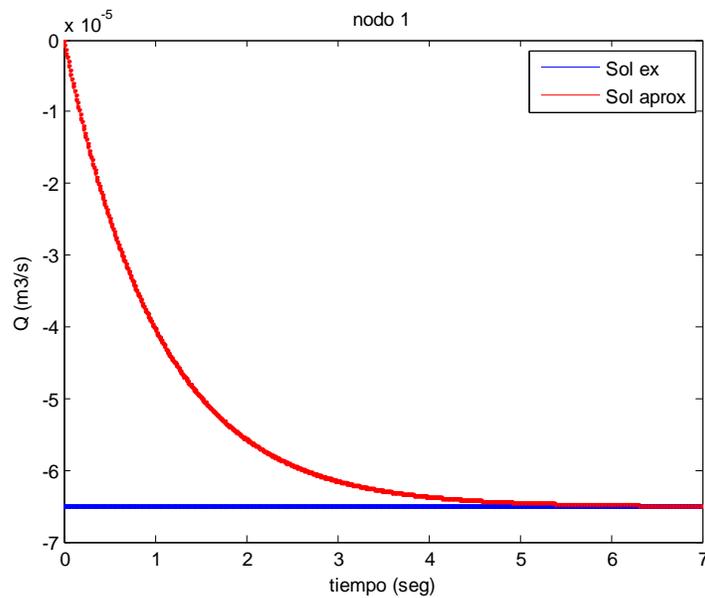


Fig. 5.15 Resultados para flujo

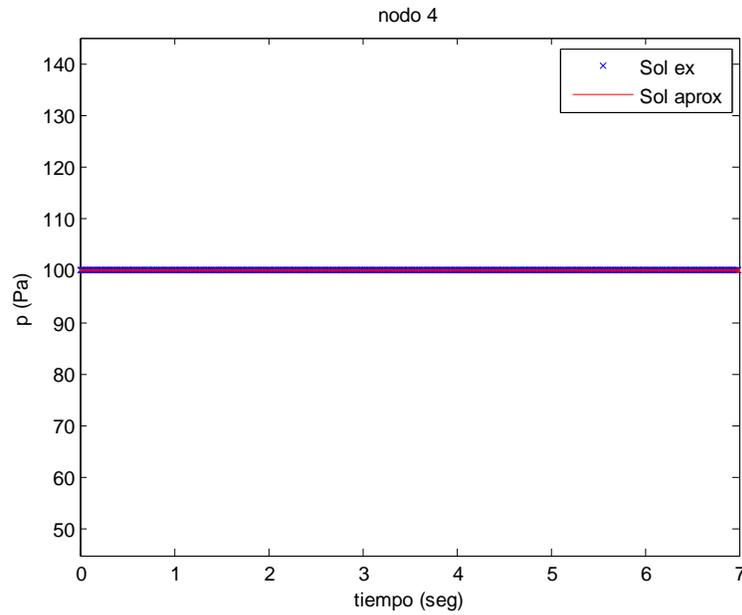
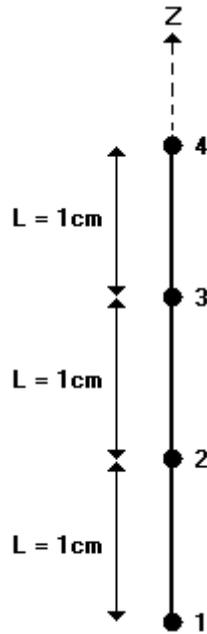


Fig. 5.16 Resultados para presión

Se observa en las figuras 5.13 y 5.15 como la solución para estado estable se presenta a un tiempo $t \approx 6.5$ seg, lo que equivale a un número de ciclos $n \approx 650$, presentándose un error máximo de 0.07%.

5.3 Prueba hidrostática

Para éste caso, se pretende calcular la variación de presión hidrostática partiendo de que existe una presión cero o atmosférica en la parte superior. La malla generada se muestra en la figura 5.17.

Fig. 5.17 Parcela de tres elementos, $S = 0.5\text{cm}^2$

En el nodo 4 se aplica una presión cero mientras que en el nodo 1 se especifica flujo igual a cero. Los resultados exactos implican una variación lineal de presión y flujo igual a cero.

Propiedades del fluido

$$\rho = 0.00106 \text{ kg/cm}^3$$

$$\mu = 0.000049 \text{ kg/cm-s}$$

Condiciones iniciales

$$Q = 0 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$p = 0 \text{ Pa}$$

$$\Delta t = 0.02 \text{ seg}$$

Condiciones de frontera

$$p(4,1) = 0 \text{ Pa}$$

$$Q(1,1) = 0 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Resultados exactos

$$Q = [0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000]^T \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$p = [311.958, 207.972, 103.986, 0.0000]^T \text{ Pa}$$

Resultados aproximados

$$Q = 1e^{-5} [0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000]^T \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$p = [311.9562, 207.9708, 103.9854, -0.0000]^T \text{ Pa}$$

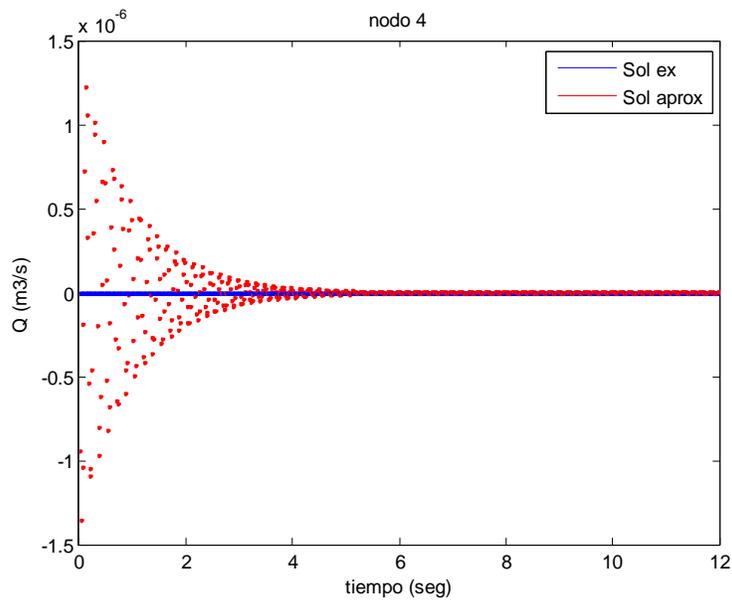


Fig. 5.18 Resultados para flujo

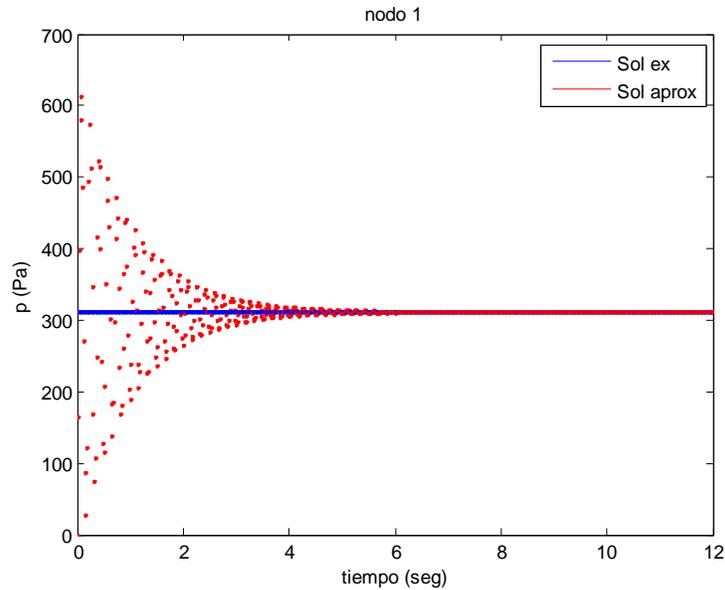


Fig. 5.19 Resultados para presión

En éste caso, de la figura 5.19 vemos como la solución en estado estable se obtiene para $t \approx 6$ seg, lo cual equivale a un número de ciclos $n \approx 300$. El error máximo presentado es de 0.0005%. Repetimos el ejemplo pero ahora aplicando presión constante en el nodo 4 y seguimos especificando flujo igual a cero en el nodo 1. Los resultados exactos implican la suma de la presión constante más la variación lineal de presión y flujo igual a cero.

Condiciones de frontera

$$p(4,1) = 100 \text{ Pa}$$

$$Q(1,1) = 0 \text{ cm}^3 / \text{s}$$

Resultados exactos

$$Q = [0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000]^T \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$p = [411.958, 307.972, 203.986, 100.0000]^T \text{ Pa}$$

Resultados aproximados

$$Q = 1e^{-5} [0.0000, -0.0000, 0.0000, -0.0000]^T \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$p = [411.9566, 307.9711, 203.9855, 100.0000]^T \text{ Pa}$$

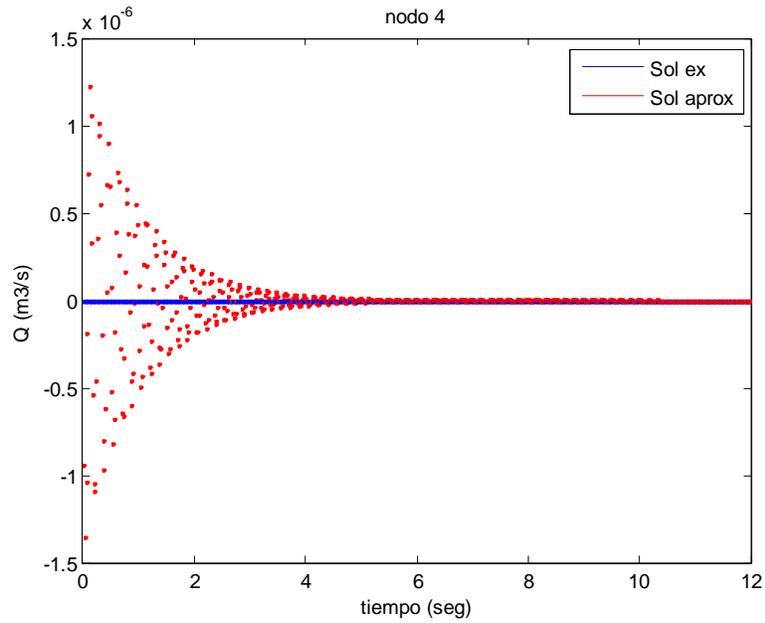


Fig. 5.20 Resultados para flujo

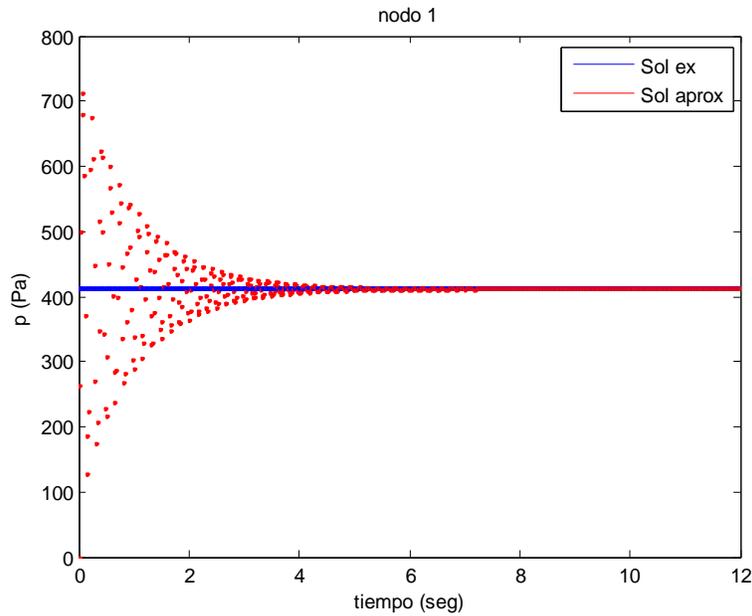


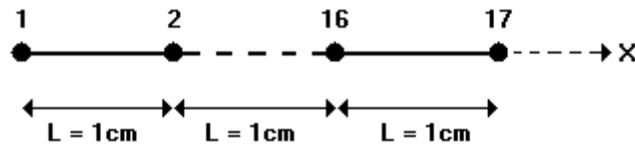
Fig. 5.21 Resultados para presión

De los resultados obtenidos, se observa como nuevamente la solución para estado estable se presenta a un tiempo $t \approx 6$ seg. El error máximo observado es de 0.0003%.

5.4 Validación a nivel sistema

Una vez verificado el funcionamiento de un elemento o un ensamble pequeño de elementos, se necesita verificar el comportamiento al ensamblar sistemas más grandes con condiciones de frontera más complejas.

Para este caso, se pretende calcular el flujo que resulta al aplicar diferentes tipos de presiones que varían con el tiempo en un extremo del conducto y presión cero en el otro. La malla generada se muestra en la figura 5.22.

Fig. 5.22 Ensamble de 16 elementos, $S = 0.5\text{cm}^2$

Los resultados exactos implican flujo constante para cada paso en el tiempo siguiendo el mismo patrón de variación que la presión y un decaimiento de la presión a medida que nos movemos a través de la malla.

5.4.1 Presión con variación lineal

En el nodo 1 se aplica una presión la cual varía de manera lineal con el tiempo mientras que en el nodo 17 especificamos presión igual a cero.

Propiedades del fluido

$$\rho = 0.00106 \text{ kg/cm}^3$$

$$\mu = 0.000049 \text{ kg/cm-s}$$

Condiciones iniciales

$$Q = 0 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$p = 0 \text{ Pa}$$

$$\Delta t = 0.01 \text{ seg}$$

Condiciones de frontera

$$p(1,1) = 100t + \Delta t \text{ Pa}$$

$$p(17,1) = 0 \text{ Pa}$$

Resultados

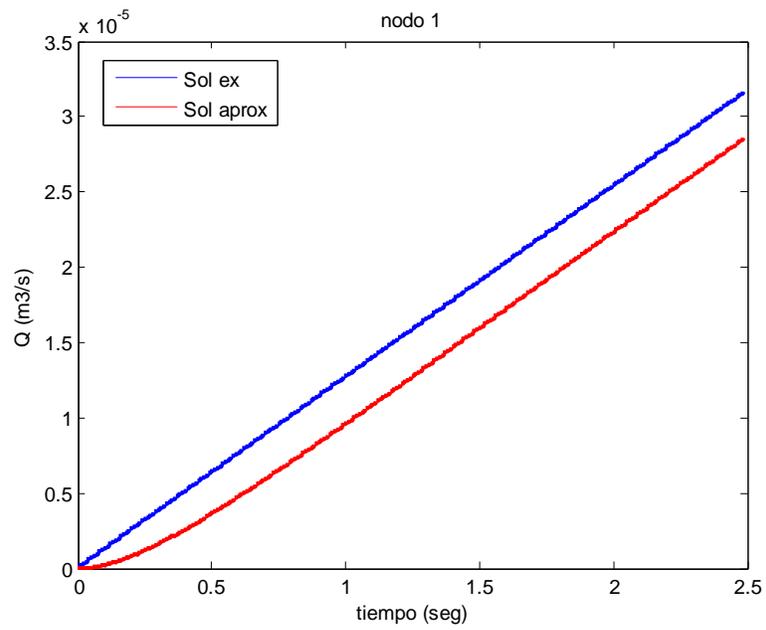


Fig. 5.23 Resultados para flujo

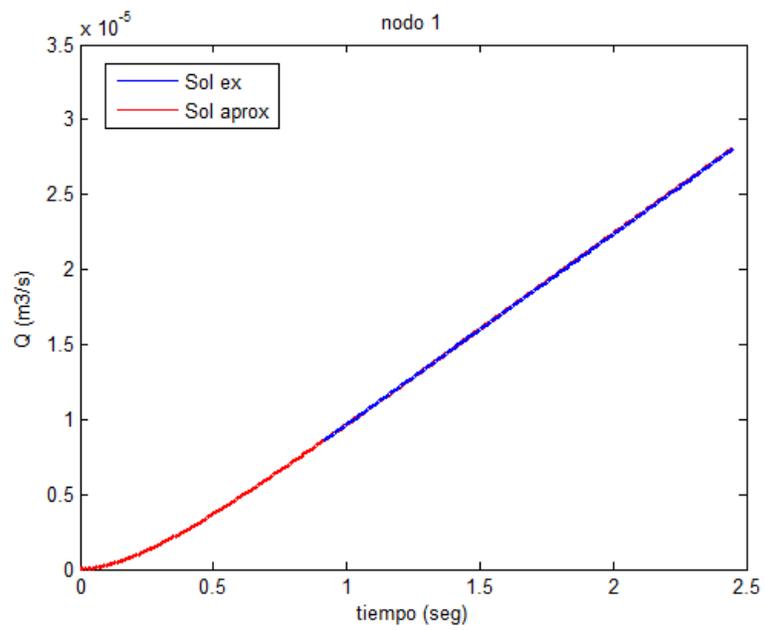


Fig. 5.24 Comparación para flujo en estado estable

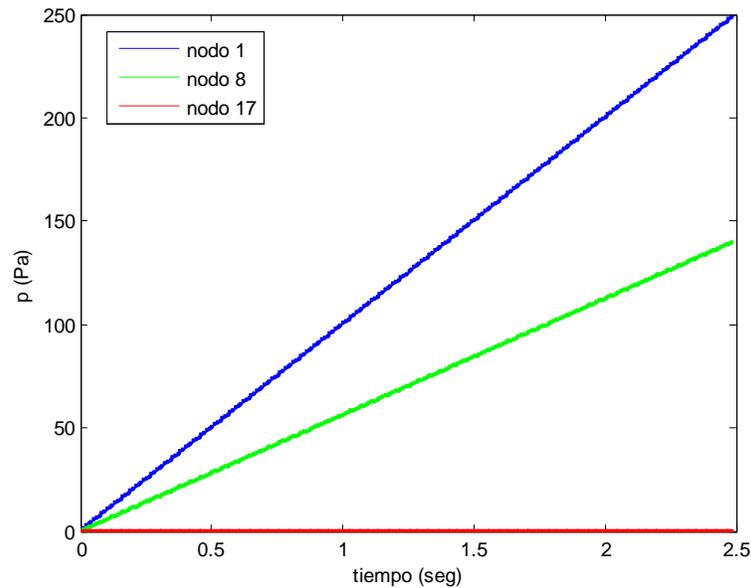


Fig. 5.25 Resultados para presión

En la figura 5.23 observamos como los resultados aproximados van siguiendo el mismo patrón de variación que los resultados exactos, después de que el estado transitorio ha terminado ($n \approx 100$ ciclos). En la figura 5.24 podemos ver una comparación entre ambas soluciones para un marco de referencia estable. Finalmente, en la figura 5.25 vemos como a medida que nos acercamos al nodo 17, la presión empieza a decaer hasta llegar a valores del orden de 1×10^{-3} .

5.4.2 Presión con variación parabólica

En el nodo 1 se aplica una presión la cual varía de manera parabólica con el tiempo mientras que en el nodo 17 especificamos presión igual a cero.

Propiedades del fluido

$$\rho = 0.00106 \text{ kg/cm}^3$$

$$\mu = 0.000049 \text{ kg/cm-s}$$

Condiciones iniciales

$$Q = 0 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$p = 0 \text{ Pa}$$

$$\Delta t = 0.01 \text{ seg}$$

Condiciones de frontera

$$p(1,1) = 100t^2 + \Delta t \text{ Pa}$$

$$p(17,1) = 0 \text{ Pa}$$

Resultados

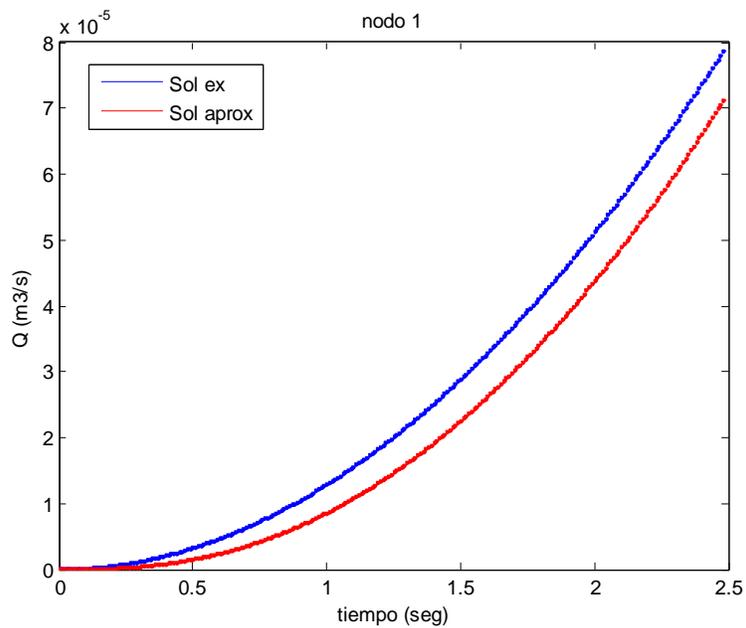


Fig. 5.26 Resultados para flujo

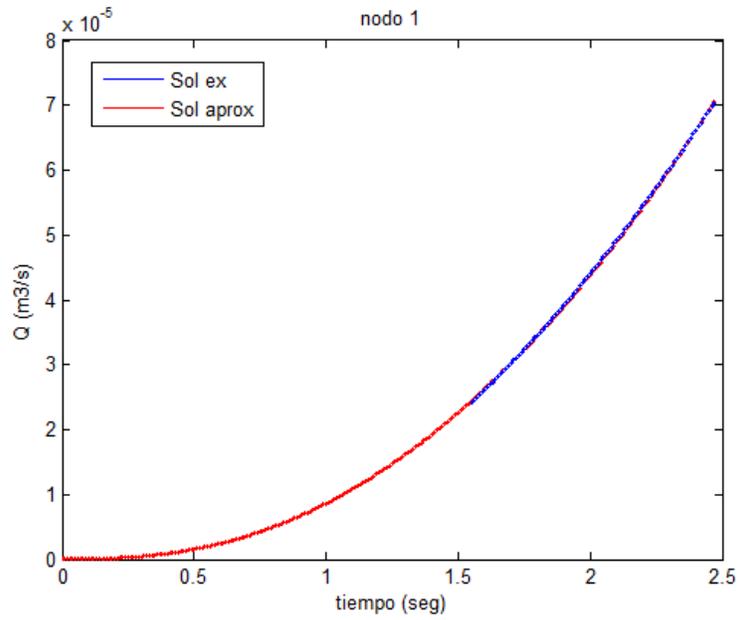


Fig. 5.27 Comparación para flujo en estado estable

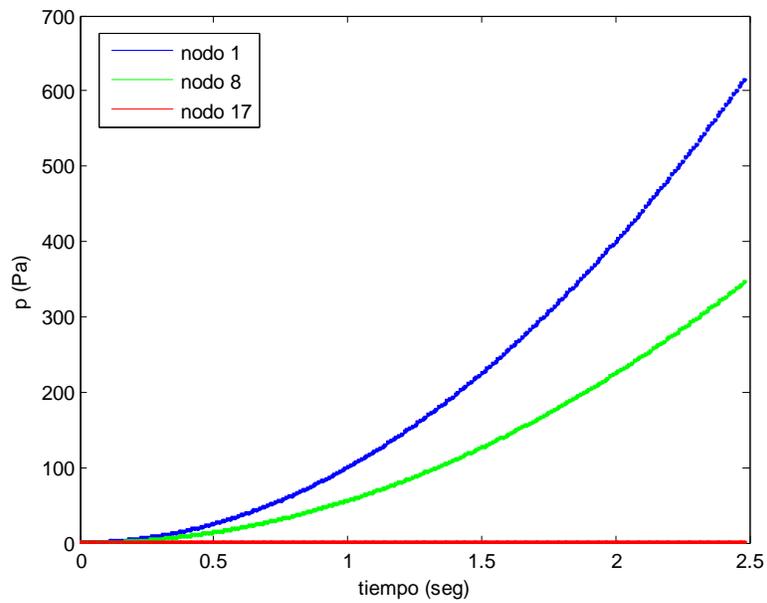


Fig. 5.28 Resultados para presión

De los resultados obtenidos vemos nuevamente como los valores aproximados van siguiendo el mismo patrón de variación que los valores exactos, después de que el

estado transitorio ha terminado. Para éste caso, el estado estable se presenta para un número de ciclos $n \approx 150$.

5.4.3 Presión con variación senoidal

En el nodo 1 se aplica una presión la cual sigue un patrón de variación de tipo senoidal, mientras que en el nodo 17 especificamos presión igual a cero.

Propiedades del fluido

$$\rho = 0.00106 \text{ kg/cm}^3$$

$$\mu = 0.000049 \text{ kg/cm-s}$$

Condiciones iniciales

$$Q = 0 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$p = 0 \text{ Pa}$$

$$\Delta t = 0.01 \text{ seg}$$

Condiciones de frontera

$$p(1,1) = 100 \text{ sen}(\pi t) + \Delta t \text{ Pa}$$

$$p(17,1) = 0 \text{ Pa}$$

Resultados

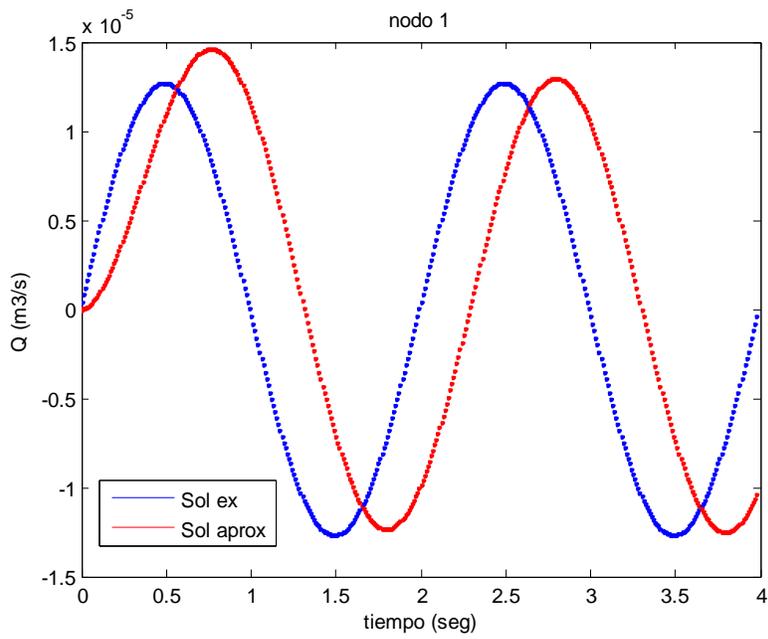


Fig. 5.29 Resultados para flujo

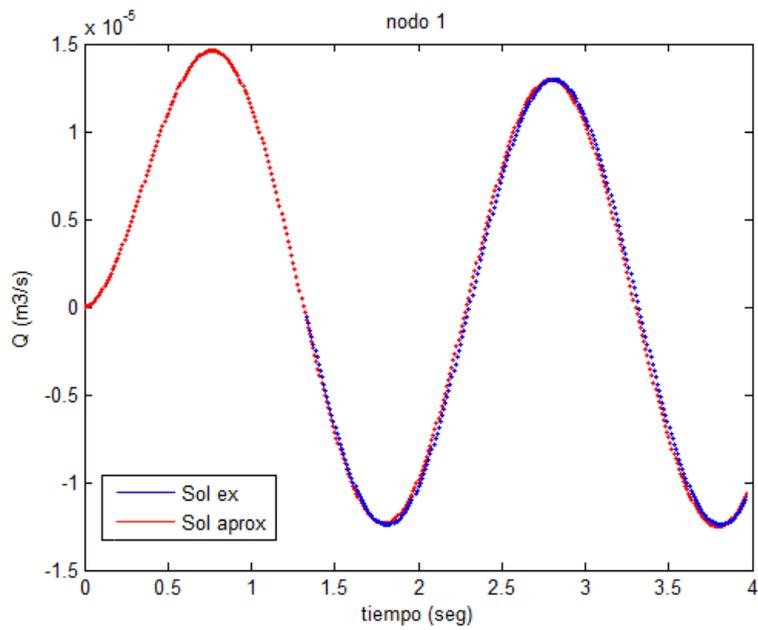


Fig. 5.30 Comparación para flujo en estado estable

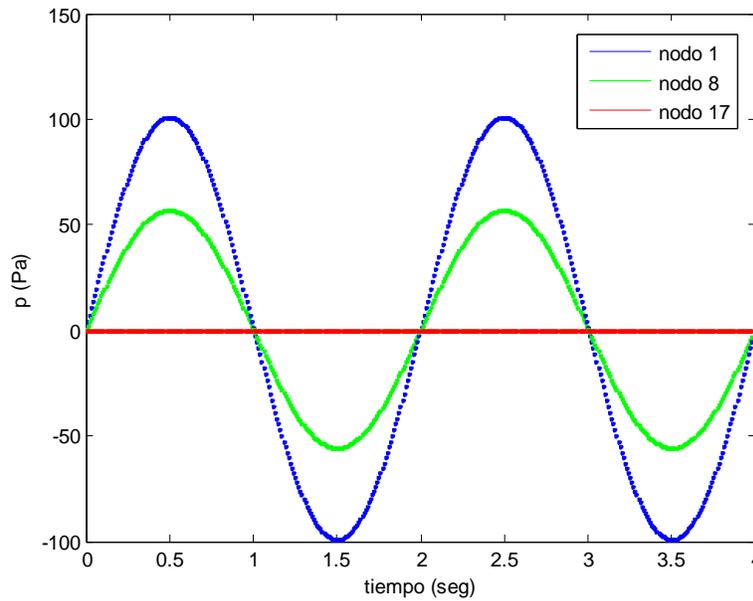


Fig. 5.31 Resultados para presión

Nuevamente podemos ver como los valores aproximados van siguiendo el mismo patrón de variación que los valores exactos y que la presión. En éste caso el estado estable se presenta para un tiempo $t \approx 1.3$ seg, lo cual equivale a un número de ciclos $n \approx 130$.

5.5 Sistema con elementos elásticos

Para poder observar la influencia de las arterias elásticas sobre el flujo sanguíneo, se repetirá el ejemplo presentado en la sección 5.4.3 incluyendo el efecto de la flexibilidad de las paredes bajo presión interna, mediante la utilización de la relación constitutiva.

Propiedades del fluido

$$\rho = 0.00106 \text{ kg/cm}^3$$

$$\mu = 0.000049 \text{ kg/cm-s}$$

Condiciones iniciales

$$Q = 0 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$p = 0 \text{ Pa}$$

$$\Delta t = 0.01 \text{ seg}$$

Condiciones de frontera

$$p(1,1) = 100 \text{ sen}(\pi t) + \Delta t \text{ Pa}$$

$$p(17,1) = 0 \text{ Pa}$$

Resultados

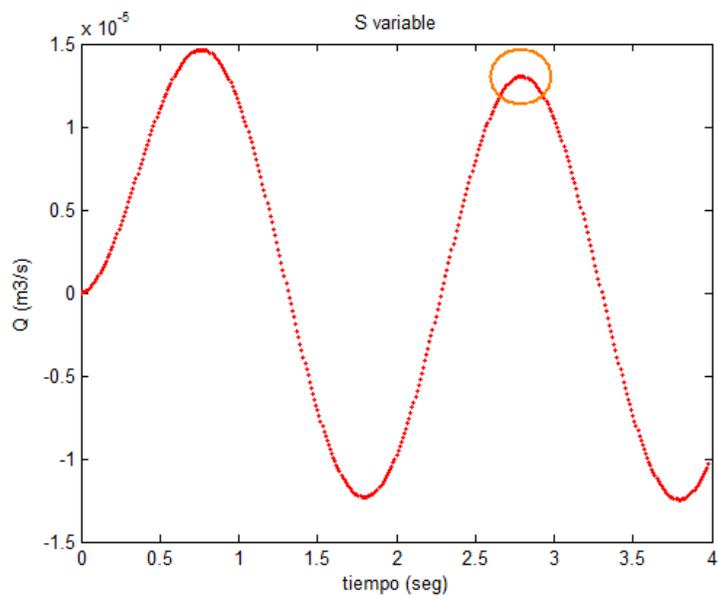


Fig. 5.32 Resultados para flujo

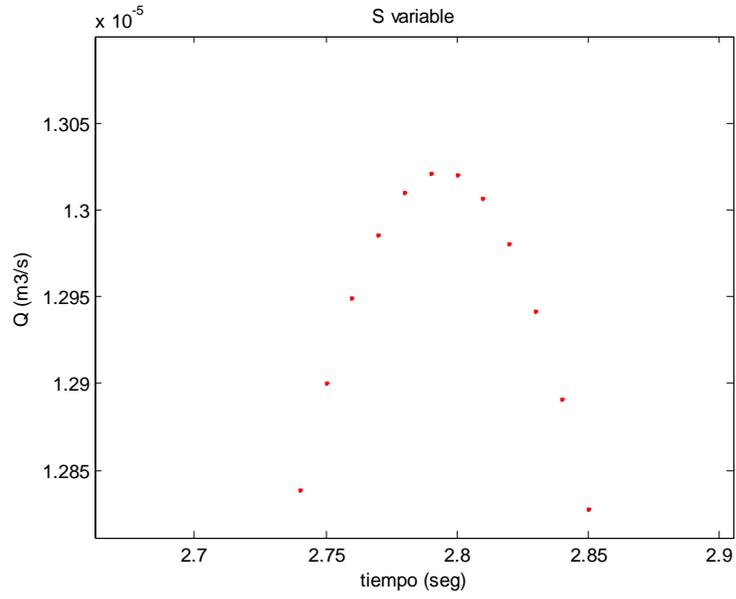


Fig. 5.33 Resultados para flujo en zona de interés, S variable

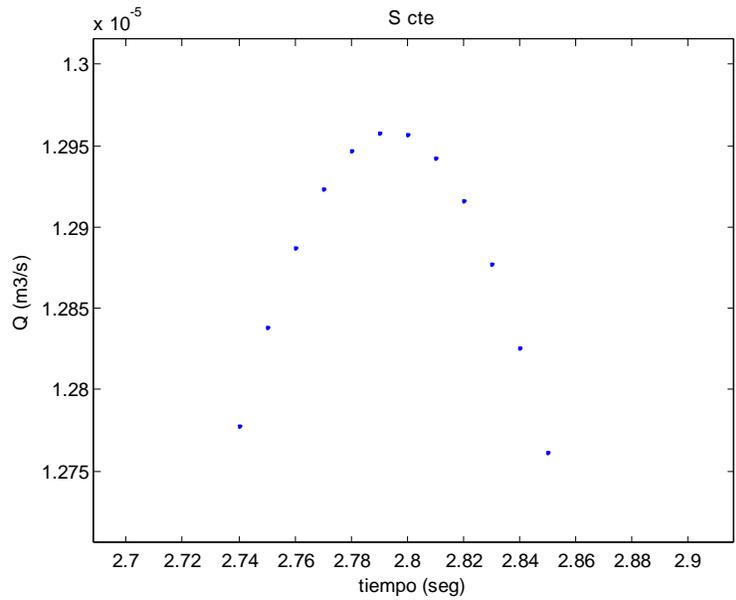


Fig. 5.34 Resultados para flujo en zona de interés, S constante

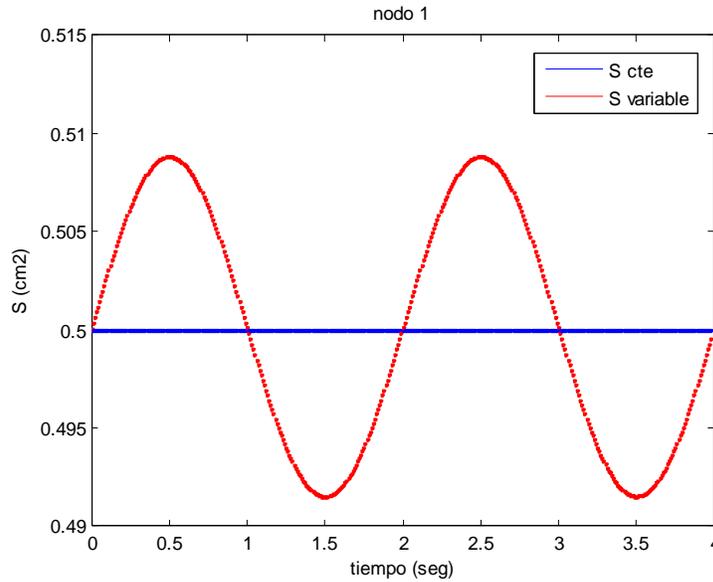


Fig. 5.35 Comparación para sección luminar

En la figura 5.32 podemos ver los resultados para el flujo, los cuales a primera vista aparentan ser los mismos obtenidos para el ejemplo de la sección 5.4.3. Acercándonos más a detalle en la zona encerrada por el círculo, podemos apreciar los valores para el flujo de una manera más detallada (figura 5.33), los cuales son ligeramente mayores que aquellos que se obtuvieron en la sección 5.4.3 (figura 5.34), ya que al aumentar la presión, el elemento arteria se expande permitiendo así un aumento en el flujo sanguíneo.

Finalmente, en la figura 5.35 se observa el cambio de la sección luminar a lo largo del tiempo.

Capítulo 6

Conclusiones

La formulación que se ha presentado satisface la conservación de momentum lineal y de masa en un conducto unidimensional. Además, es capaz de representar la flexibilidad de las paredes bajo presión interna. La introducción del término de fuerza viscosa de cuerpo permite representar la oposición al flujo por estenosis en el conducto, y la modificación de éste término junto con el término convectivo permite considerar la distribución no-uniforme de la velocidad a través de la sección transversal. Con estas características, el elemento desarrollado es capaz de representar el flujo sanguíneo a través de las arterias elásticas del cuerpo de forma simplificada.

La solución al problema de mecánica de fluidos se ve afectada por inestabilidades numéricas debido al carácter advectivo-difusivo de las ecuaciones gobernantes y la incompatibilidad entre los campos de presión y velocidad. El planteamiento del cálculo incremental finito (FIC) permite introducir los parámetros estabilizadores h y τ_Q en la formulación desde la forma fuerte del problema. El desarrollo de la forma débil y matricial, a partir de esta forma fuerte modificada, acarrea estos términos de una manera directa y permite desarrollar procedimientos numéricos estables. Además, la presencia del gradiente de presiones dentro de la forma alterna de la ecuación de continuidad permite que se puedan emplear interpolaciones idénticas para el flujo y para la presión.

El modelo es suficientemente completo, de manera que los elementos finitos que se desarrollaron sobre la formulación para resolver los ejemplos de validación presentados en el capítulo 5, fueron capaces de encontrar una solución para la simulación del flujo arterial. La forma matricial obtenida es prácticamente idéntica a la presentada anteriormente para la solución de problemas de fluidos [11,12], de manera que fue

posible emplear los procedimientos mostrados en esos trabajos para desarrollar el método de solución utilizado.

En cuanto a los resultados obtenidos para los ejemplos de validación, se observa una muy buena concordancia entre la solución analítica y la solución aproximada, presentándose errores máximos menores al 0.1%, lo cual para propósitos prácticos es muy aceptable. Durante el proceso de validación, se pudo observar el hecho de que el algoritmo utilizado presenta una alta sensibilidad a las condiciones iniciales especificadas así como a los parámetros de estabilización h , τ_Q y Δt , los cuales afectan de manera directa a muchos de los arreglos encontrados en la forma específica de las ecuaciones (véase capítulo 3). Además, se identificó también una importante influencia del perfil de velocidades asumido sobre la solución encontrada, por lo cual, se recomienda llevar a cabo un manejo muy cuidadoso de estos parámetros así como un estudio más a fondo sobre sus efectos en el algoritmo.

6.1 Investigación a futuro

Lo primero que habría que considerar es la necesidad de resolver más ejemplos de validación, de manera que se pueda identificar con mayor precisión qué parámetros tienen una alta influencia sobre la solución, de manera que se puedan establecer bases para la calibración de los mismos, ya sea mediante la utilización del algoritmo presentado o mediante la implementación de un método distinto de solución.

También, es necesario llevar a cabo un estudio más a fondo del tratamiento de las condiciones de frontera. Taylor y sus colaboradores [22] presentan un estudio sobre la aplicación de diferentes condiciones de frontera y su repercusión en la solución del problema. Además, se debe también considerar que método es necesario implementar en puntos de bifurcación, para poder representar el efecto de los árboles arteriales distales en el segmento de interés del análisis. Hughes y sus colaboradores [16] proponen la utilización de multiplicadores de Lagrange para obligar la continuidad de presión y

conservación de masa. Este método se puede utilizar para determinar el máximo o mínimo de una función de dos o más variables que no son independientes y que deben cumplir con ciertas relaciones prescritas.

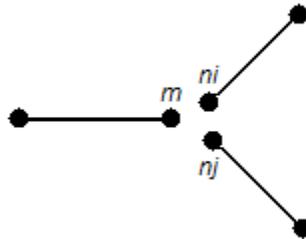


Fig. 6.1 Punto de bifurcación

Si al punto m se tiene una entrada y n salidas (figura 6.1), las siguientes restricciones se deben de cumplir:

$$Q_m - \sum_{i=1}^n Q_i = 0 \tag{6.1}$$

$$p_m - p_i^n = 0 \tag{6.2}$$

Para un sistema general de ecuaciones $[K]\{D\} = \{R\}$, se pueden escribir ecuaciones de restricción [23] que relacionan los grados de libertad en $\{D\}$ de la forma

$$[C]\{D\} - \{Q\} = 0 \tag{6.3}$$

en donde $[C]$ y $\{Q\}$ contienen restricciones. Para imponer estas restricciones utilizando multiplicadores de Lagrange, es necesario resolver el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{bmatrix} K & C^T \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R \\ Q \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

en donde λ_i se puede interpretar como fuerzas de restricción.

Entonces, para imponer las ecuaciones de restricción (6.1) y (6.2) sobre el algoritmo de solución utilizado haciendo uso del método de multiplicadores de Lagrange, se tendría que considerar lo siguiente:

a) Para la primera estimación de flujo (predictor), habría que agregar una ecuación adicional de restricción al sistema ensamblado $\hat{\mathbf{Q}}^n - \Delta t \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{g}^{n+1,i-1} - \mathbf{f}^{n+1})$, la cual sería la encargada de cumplir con la conservación de masa.

b) Para el cálculo del cambio de presión, se tendría que agregar una ecuación de restricción por cada salida existente, de modo que se obligue la continuidad de presión entre el punto de entrada y los puntos de salida.

c) Para el cálculo del flujo a partir de la nueva presión (corrector), se tendría que agregar de nuevo una ecuación adicional de restricción al sistema ensamblado $\Delta t \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{G}^{n+1,i-1} - \mathbf{G}_s^{n+1,i-1}) \delta \mathbf{p}^i$, de modo que al sumar el cambio de flujo a la predicción inicial, se siga cumpliendo con la conservación de masa.

Finalmente, sería recomendable transcribir el código presentado en MATLAB a un lenguaje de programación más eficiente tal como FORTRAN o C/C++ que no consuma tantos recursos computacionales. También, sería de mucha ayuda contar con una interfaz grafica para las fases de pre y post-procesamiento, de manera que la especificación de datos y lectura de resultados sea más eficiente.

Apéndice A

Programas en MATLAB

Se presentan aquí los códigos en MATLAB para los ejemplos resueltos en el capítulo 5, con el fin de tener una referencia y darse una idea del formato utilizado en la programación. Se recomienda también ver el disco compacto anexo a ésta tesis.

A 1. Pruebas de parcela

```
%Programa para la solucion del flujo de sangre en las arterias
%mediante el metodo de elementos finitos
```

```
%PRE-PROCESAMIENTO
%-----
```

```
clc
clear all
close all
```

```
%Discretizacion mediante elementos finitos
%-----
```

```
%numero de elementos
ef=3;
%numero de nodos
nodos=4;
%coordenadas nodales en X (global,cm)
X=[0 1 2 3];
%coordenadas nodales en Y (global,cm)
Y=[0 0 0 0];
%coordenadas nodales en Z (global,cm)
Z=[0 0 0 0];
%arreglo de destino
AD=[1 2;2 3;3 4];
```

```
for i=1:ef
    %longitud de cada elemento
    h(1,i)=sqrt((X(1,AD(i,2))-X(1,AD(i,1)))^2+(Y(1,AD(i,2))-
Y(1,AD(i,1)))^2+(Z(1,AD(i,2))-Z(1,AD(i,1)))^2); % (cm)
end
```

```

%factor de escala
%mejora el comportamiento del algoritmo
fe=1e-5;

%Parametros
%-----
%densidad del fluido
dro=0.001060; %(kg/cm3)@37°C [Olufsen, 2000]
%viscosidad del fluido
mu=0.000049; %(kg/cm-s)@37°C [Olufsen, 2000]
%viscosidad cinematica del fluido
nu=mu/dro; %(cm2/s)
%fuerza de cuerpo
%(solo es necesario especificar la gravedad)
f=-0; %(cm/s2)
f=f*fe;
%distribucion de velocidad sobre la seccion transversal
%[Taylor, 2002]
nprofile=1.33;
delta=1/(1+nprofile);
NB=-2*(nprofile+2)*pi*nu; %(cm2/s)

%Variables al tiempo t=0
%-----

%flujo inicial (cm3/s)
Qo=0*[1 1 1 1]';
%presion inicial (kg-cm/cm2-s2)
po=0*[0 0 0 0]';
%proyeccion del gradiente convectivo (cm3/s)
gc=[0 0 0 0]';
%proyeccion del gradiente de presion (kg-cm/cm2-s2)
gpi=0*[1 1 1 1]';
%seccion transversal del conducto (cm2)
So=0.5*[1 1 1 1]';

%PROCESAMIENTO
%-----

%Proceso de solucion
%-----
%contador de tiempo
tiempo=0; %(seg)
%tiempo maximo
tiempomax=30; %(seg)
%contador de iteraciones-->i
%numero de iteraciones max (convergencia)
imax=200;
%contador de pasos-->n
%numero de pasos max
nmax=700;
%tolerancia para flujo
tolQ=0.01; %(0.01=1%)
%tolerancia para presion
tolp=0.01; %(0.01=1%)

```

```

%Condiciones de frontera
%-----
%numero de puntos de control
puntosc=2;
%puntos de control (nodos)
PC=[1 4];

%Subrutinas para inicializar arreglos
%-----
[Mceros]=mceros(nodos);
[Vceros]=vceros(nodos);
%-----

%Guarda condiciones iniciales
for j=1:nodos
    Qnf(1,j)=Qo(j,1);
    pnf(1,j)=po(j,1);
end
vectiempo(1,1)=tiempo;

%comienza calculo de pasos en el tiempo
for n=1:nmax

    if n==1
        Sn=So;

        Qn=Qo;
        Qn1ia=Qn;
        pn=po;
        pn1ia=pn;
        gcn1=gc;
        gpin=gpi;
    else
        Qn1ia=Qn;
        pn1ia=pn;

        Sn=Sn1;
    end

    %incremento para el tiempo (seg)
    deltat=0.01;

    %presion en puntos de control
    %para cada paso en el tiempo
    CFp(1,n)=1; %(kg-cm/cm2-s2)
    CFp(1,n)=CFp(1,n)*fe;

    %comienza calculo de iteraciones
    for i=1:imax

        %inicializa matrices M,G,Gs,C,L,P,H y D globales
        MMg=Mceros;
        MGg=Mceros;
        MGsg=Mceros;

```

```

MCg=Mceros;
MLg=Mceros;
MPg=Mceros;
MHg=Mceros;
MDg=Mceros;

%inicializa vector f global
VFg=Vceros;

for j=1:ef
    %calcula matrices M y C
    %MM=h(1,j)*[1/3 1/6;1/6 1/3]; %Matriz consistente
    MM=h(1,j)*[1/2 0;0 1/2]; %Matriz concentrada
    MC=(1/2)*h(1,j)*[-1/2 1/2;-1/2 1/2];

    %calculo de S promedio
    Sm=(Sn(AD(j,1),1)+Sn(AD(j,2),1))/2;
    %calculo de Q promedio
    Qm=(Qn1ia(AD(j,1),1)+Qn1ia(AD(j,2),1))/2;
    %calculo de tq

tqm=((8*mu)/(3*h(1,j)^2))+((4*(1+delta)*dro)/h(1,j))*(Qm/Sm))^-1;

    %calcula matrices G,Gs,L,P,H,D y vector f
    MG=-(Sm/dro)*[-1/2 1/2;-1/2 1/2];
    MGs=0*[-1/2 1/2;-1/2 1/2]; %por el momento no se usa
    ML=((Sm*tqm)/h(1,j))*[1 -1;-1 1];
    MP=Sm*tqm*[-1/2 -1/2;1/2 1/2];
    MH=-Qm/Sm*[-1/2 1/2;-1/2 1/2]+2*delta*(Qm/Sm)*[-1/2 1/2;-
1/2 1/2]-(nu/h(1,j))*[1 -1;-1 1]+(dro/2)*(Qm/Sm^2)*[1 -1;-1 1];
    MD=Sm*(h(1,j)/dro)*0*[1/3 1/6;1/6 1/3]; %por el momento no
se usa
    VF=1*CFp(1,n)*(Sm/dro)*h(1,j)*[1/2 1/2]'+Sm*f*h(1,j)*[1/2
1/2]'+NB*Qm*h(1,j)*[1/2 1/2]'-0*[1/2 1/2]';

    %ensambla matrices M,G,Gs,C,L,P,H y D globales

[MMg, MGg, MGsg, MCg, MLg, MPg, MHg, MDg]=mensambla(j, AD, MMg, MGg, MGsg, MCg, MLg,
MPg, MHg, MDg, MM, MG, MGs, MC, ML, MP, MH, MD);

    %ensambla vector f global
    [VFg]=vensambla(j, AD, VFg, VF);
end

%calcula estimacion de flujo
Qestn1=Qn-(deltat*inv(MMg)*(MHg*Qn1ia-(MGg-MGsg)*pn+MCg*gc1-
VFg));

%calcula arreglos para cambio de presion
V1=MGg'*inv(MMg)*MGg;
V2=MGg'*inv(MMg)*MGsg;
deltapmat=(MLg+MDg*(1/deltat)+deltat*(V1-V2));
deltapvec=(MGg'*Qestn1+MLg*pn+MPg*gp);

%aplica condiciones de frontera esenciales para presion

```

```

valk=0;

for j=1:nodos
    if abs(deltapmat(j,j))>valk
        valk=abs(deltapmat(j,j));
    end
end

valk=valk*1e12;

if n==1
    deltapmat(PC(1,1),PC(1,1))=deltapmat(PC(1,1),PC(1,1))+valk;
    deltapvec(PC(1,1),1)=deltapvec(PC(1,1),1)+valk*-1*CFp(1,n);
    deltapmat(PC(1,2),PC(1,2))=deltapmat(PC(1,2),PC(1,2))+valk;
    deltapvec(PC(1,2),1)=deltapvec(PC(1,2),1)+valk*0*CFp(1,n);
else
    deltapmat(PC(1,1),PC(1,1))=deltapmat(PC(1,1),PC(1,1))+valk;
    deltapvec(PC(1,1),1)=deltapvec(PC(1,1),1)+valk*0*CFp(1,n);
    deltapmat(PC(1,2),PC(1,2))=deltapmat(PC(1,2),PC(1,2))+valk;
    deltapvec(PC(1,2),1)=deltapvec(PC(1,2),1)+valk*0*CFp(1,n);
end

%calcula cambio de presion
deltap=-inv(deltapmat)*deltapvec;

%calcula nueva presion
pnli=pn+deltap;

%corrige el valor del flujo
Qnli=Qestn1+deltat*inv(MMg)*(MGg-MGsg)*deltap;

%inicializa matrices B y E globales
MBg=Mceros;
MEg=Mceros;

for j=1:ef

    %calcula de S promedio
    Sm=(Sn(AD(j,1),1)+Sn(AD(j,2),1))/2;
    %calcula de Q promedio
    Qm=(Qnli(AD(j,1),1)+Qnli(AD(j,2),1))/2;
    %calcula de tq

tqm=((8*mu)/(3*h(1,j)^2))+(((4*(1+delta)*dro)/h(1,j))*(Qm/Sm))^(-1;

    MB=dro*(Qm/Sm^2)*[-1/2 1/2;-1/2 1/2];
    %ME=Sm*tqm*h(1,j)*[1/3 1/6;1/6 1/3]; %Matriz consistente
    ME=Sm*tqm*h(1,j)*[1/2 0;0 1/2]; %Matriz concentrada

    %ensambla matrices B y E globales
    [MBg,MEg]=mensambla2(j,AD,MBg,MEg,MB,ME);

end

```

```

%estima valores de los gradientes convectivo y de presion
gcnl=-inv(MMg)*MBg*Qnli;
gpil=-inv(MEg)*MPg'*pnli;

%calcula nuevos valores de S
Sn1=Sn; %por el momento S es constante

%verifica convergencia en flujo

if abs(norm(Qnli-Qnlia)/norm(Qnli))<=tolQ
    convQ=1;
else
    convQ=0;
end

%verifica convergencia en presion
if abs(norm(pnli-pnlia)/norm(pnli))<=tolp
    convp=1;
else
    convp=0;
end

%verifica que Q y p hayan convergido
if convQ==1
    if convp==1
        'Convergencia cumplida en'
        tiempo
        break
    else
        if i<imax
            else
                'Numero de iteraciones max alcanzado'
                'convergencia no cumplida en'
                tiempo
                break
            end
        end
    end
else
    if i<imax
        else
            'Numero de iteraciones max alcanzado'
            'convergencia no cumplida en'
            tiempo
            break
        end
    end
end

Qnlia=Qnli;
pnlia=pnli;
Sn=Sn1;

end

Qn=Qnli;
pn=pnli;

```

```

gpin=gpii;

%guarda resultados
for j=1:nodos
    Qnf(n+1,j)=Qn(j,1);
    pnf(n+1,j)=pn(j,1);
end

%incrementa el contador de tiempo
tiempo=tiempo+deltat;

%guarda intervalos de tiempo
vectiempo(n+1,1)=tiempo;

if tiempo>tiempomax
    'Tiempo max alcanzado'
    break
end
end

%POST-PROCESAMIENTO
%-----

%despliega resultados
Qnf*fe^-1*1e-7 %(m3/s)
pnf*fe^-1*100 %(Pa)

%grafica Q en puntos deseados

for n=1:n
    figure(1)
    plot(vectiempo(n,1),0.000065,'b',vectiempo(n,1),fe^-1*1e-
7*Qnf(n,1),'r');
    hold on
end

xlabel('tiempo (seg)')
ylabel('Q (m3/s)')
legend('Sol ex','Sol aprox')

%grafica p en puntos deseados

for n=1:n
    figure(4)
    plot(vectiempo(n,1),100,'bx',vectiempo(n,1),fe^-
1*100*pnf(n,1),'r');
    hold on
end

xlabel('tiempo (seg)')
ylabel('p (Pa)')
legend('Sol ex','Sol aprox')

```

A 2. Prueba hidrostática

```
%Programa para la solución del flujo de sangre en las arterias
%mediante el método de elementos finitos
```

```
%PRE-PROCESAMIENTO
%-----
```

```
clc
clear all
close all
```

```
%Discretización mediante elementos finitos
%-----
```

```
%numero de elementos
ef=3;
%numero de nodos
nodos=4;
%coordenadas nodales en X (global,cm)
X=[0 0 0 0];
%coordenadas nodales en Y (global,cm)
Y=[0 0 0 0];
%coordenadas nodales en Z (global,cm)
Z=[0 1 2 3];
%arreglo de destino
AD=[1 2;2 3;3 4];
```

```
for i=1:ef
    %longitud de cada elemento
    h(1,i)=sqrt((X(1,AD(i,2))-X(1,AD(i,1)))^2+(Y(1,AD(i,2))-
Y(1,AD(i,1)))^2+(Z(1,AD(i,2))-Z(1,AD(i,1)))^2); %(cm)
end
```

```
%factor de escala
%mejora el comportamiento del algoritmo
fe=1e-5;
```

```
%Parametros
%-----
%densidad del fluido
dro=0.001060; %(kg/cm3)@37°C [Olufsen, 2000]
%viscosidad del fluido
mu=0.000049; %(kg/cm-s)@37°C [Olufsen, 2000]
%viscosidad cinemática del fluido
nu=mu/dro; %(cm2/s)
%fuerza de cuerpo
%(solo es necesario especificar la gravedad)
f=-981; %(cm/s2)
f=f*fe;
%distribución de velocidad sobre la sección transversal
%[Taylor, 2002]
nprofile=1.33;
```

```

delta=1/(1+nprofile);
NB=-2*(nprofile+2)*pi*nu; %(cm2/s)

%Variables al tiempo t=0
%-----

%flujo inicial (cm3/s)
Qo=0*[1 1 1 1]';
%presion inicial (kg-cm/cm2-s2)
po=0*[1 1 1 1]';
%proyeccion del gradiente convectivo (cm3/s)
gc=0*[1 1 1 1]';
%proyeccion del gradiente de presion (kg-cm/cm2-s2)
gpi=0*[1 1 1 1]';
%seccion transversal del conducto (cm2)
So=0.5*[1 1 1 1]';

%PROCESAMIENTO
%-----

%Proceso de solucion
%-----
%contador de tiempo
tiempo=0; %(seg)
%tiempo maximo
tiempomax=12; %(seg)
%contador de iteraciones-->i
%numero de iteraciones max (convergencia)
imax=200;
%contador de pasos-->n
%numero de pasos max
nmax=700;
%tolerancia para flujo
tolQ=0.01; %(0.01=1%)
%tolerancia para presion
tolp=0.01; %(0.01=1%)

%Condiciones de frontera
%-----
%numero de puntos de control
puntosc=2;
%puntos de control (nodos)
PC=[1 4];

%Subrutinas para inicializar arreglos
%-----
[Mceros]=mceros(nodos);
[Vceros]=vceros(nodos);
%-----

%Guarda condiciones iniciales
for j=1:nodos
    Qnf(1,j)=Qo(j,1);
    pnf(1,j)=po(j,1);

```

```

end
vectiempo(1,1)=tiempo;

%comienza calculo de pasos en el tiempo
for n=1:nmax

    if n==1
        Sn=So;

        Qn=Qo;
        Qnlia=Qn;
        pn=po;
        pnlia=pn;
        gcn1=gc;
        gpin=gpi;
    else
        Qnlia=Qn;
        pnlia=pn;

        Sn=Sn1;
    end

    %incremento para el tiempo (seg)
    deltat=0.02;

    %flujo en puntos de control
    %para cada paso en el tiempo
    CFQ(1,n)=0; %(cm3/s)

    %presion en puntos de control
    %para cada paso en el tiempo
    CFp(1,n)=1; %(kg-cm/cm2-s2)
    CFp(1,n)=CFp(1,n)*fe;

    %comienza calculo de iteraciones
    for i=1:imax

        %inicializa matrices M,G,Gs,C,L,P,H y D globales
        MMg=Mceros;
        MGg=Mceros;
        MGsg=Mceros;
        MCg=Mceros;
        MLg=Mceros;
        MPg=Mceros;
        MHg=Mceros;
        MDg=Mceros;

        %inicializa vector f global
        VFg=Vceros;

        for j=1:ef
            %calcula matrices M y C
            %MM=h(1,j)*[1/3 1/6;1/6 1/3]; %Matriz consistente
            MM=h(1,j)*[1/2 0;0 1/2]; %Matriz concentrada
            MC=(1/2)*h(1,j)*[-1/2 1/2;-1/2 1/2];
        end
    end
end

```

```

%calculo de S promedio
Sm=(Sn(AD(j,1),1)+Sn(AD(j,2),1))/2;
%calculo de Q promedio
Qm=(Qnlia(AD(j,1),1)+Qnlia(AD(j,2),1))/2;
%calculo de tq

tqm=((8*mu)/(3*h(1,j)^2))+(((4*(1+delta)*dro)/h(1,j))*(Qm/Sm))^(-1);

%calcula matrices G,Gs,L,P,H,D y vector f
MG=- (Sm/dro)*[-1/2 1/2;-1/2 1/2];
MGs=0*[-1/2 1/2;-1/2 1/2]; %por el momento no se usa
ML=((Sm*tqm)/h(1,j))*[1 -1;-1 1];
MP=Sm*tqm*[-1/2 -1/2;1/2 1/2];
MH=-Qm/Sm*[-1/2 1/2;-1/2 1/2]+2*delta*(Qm/Sm)*[-1/2 1/2;-
1/2 1/2]-(nu/h(1,j))*[1 -1;-1 1]+(dro/2)*(Qm/Sm^2)*[1 -1;-1 1];
MD=Sm*(h(1,j)/dro)*0*[1/3 1/6;1/6 1/3]; %por el momento no
se usa
VF=0*CFp(1,n)*(Sm/dro)*h(1,j)*[1/2 1/2]'+Sm*f*h(1,j)*[1/2
1/2]'+NB*Qm*h(1,j)*[1/2 1/2]'-0*[1/2 1/2]';

%ensambla matrices M,G,Gs,C,L,P,H y D globales

[MMg, MGg, MGsg, MCg, MLg, MPg, MHg, MDg]=mensambla(j, AD, MMg, MGg, MGsg, MCg, MLg,
MPg, MHg, MDg, MM, MG, MGs, MC, ML, MP, MH, MD);

%ensambla vector f global
[VFg]=vensambla(j, AD, VFg, VF);
end

%calcula estimacion de flujo
Qestn1=Qn-(deltat*inv(MMg)*(MHg*Qnlia-(MGg-MGsg)*pn+MCg*gcnl1-
VFg));

%calcula arreglos para cambio de presion
V1=MGg'*inv(MMg)*MGg;
V2=MGg'*inv(MMg)*MGsg;
deltapmat=(MLg+MDg*(1/deltat)+deltat*(V1-V2));
deltapvec=(MGg'*Qestn1+MLg*pn+MPg*gp);

%aplica condiciones de frontera esenciales para presion
valk=0;

for j=1:nodos
    if abs(deltapmat(j,j))>valk
        valk=abs(deltapmat(j,j));
    end
end

valk=valk*1e12;

if n==1
    deltapmat(PC(1,2),PC(1,2))=deltapmat(PC(1,2),PC(1,2))+valk;
    deltapvec(PC(1,2),1)=deltapvec(PC(1,2),1)+valk*0*CFp(1,n);

```

```

%deltapmat(PC(1,2),PC(1,2))=deltapmat(PC(1,2),PC(1,2))+valk;
    %deltapvec(PC(1,2),1)=deltapvec(PC(1,2),1)+valk*0*CFp(1,n);
else
    deltapmat(PC(1,2),PC(1,2))=deltapmat(PC(1,2),PC(1,2))+valk;
    deltapvec(PC(1,2),1)=deltapvec(PC(1,2),1)+valk*0*CFp(1,n);

%deltapmat(PC(1,2),PC(1,2))=deltapmat(PC(1,2),PC(1,2))+valk;
    %deltapvec(PC(1,2),1)=deltapvec(PC(1,2),1)+valk*0*CFp(1,n);
end

%calcula cambio de presion
deltap=-inv(deltapmat)*deltapvec;

%calcula nueva presion
pnli=pn+deltap;

%calcula arreglos para cambio de flujo
deltaqmat=MMg*(MGg-MGsg);
deltaqvec=deltap;

%aplica condiciones de frontera esenciales para flujo
valk=0;

for j=1:nodos
    if abs(deltaqmat(j,j))>valk
        valk=abs(deltaqmat(j,j));
    end
end

valk=valk*1e12;

deltaqmat(PC(1,1),PC(1,1))=deltaqmat(PC(1,1),PC(1,1))+valk;
deltaqvec(PC(1,1),1)=deltapvec(PC(1,1),1)+valk*(CFQ(1,n)-
Qestn1(PC(1,1),1));

%corrige el valor del flujo
%Qnli=Qestn1+deltat*inv(MMg)*(MGg-MGsg)*deltap;
Qnli=Qestn1+(deltat*inv(deltaqmat)*deltaqvec);

%inicializa matrices B y E globales
MBg=Mceros;
MEg=Mceros;

for j=1:ef

    %calcula de S promedio
    Sm=(Sn(AD(j,1),1)+Sn(AD(j,2),1))/2;
    %calcula de Q promedio
    Qm=(Qn1ia(AD(j,1),1)+Qn1ia(AD(j,2),1))/2;
    %calcula de tq

tqm=((8*mu)/(3*h(1,j)^2))+(((4*(1+delta)*dro)/h(1,j))*(Qm/Sm))^(-1;

```

```

MB=dro*(Qm/Sm^2)*[-1/2 1/2;-1/2 1/2];
%ME=Sm*tqm*h(1,j)*[1/3 1/6;1/6 1/3]; %Matriz consistente
ME=Sm*tqm*h(1,j)*[1/2 0;0 1/2]; %Matriz concentrada

%ensambla matrices B y E globales
[MBg,MEg]=mensambla2(j,AD,MBg,MEg,MB,ME);

end

%estima valores de los gradientes convectivo y de presion
gcn1=-inv(MMg)*MBg*Qnli;
gp11=-inv(MEg)*MPg'*pnli;

%calcula nuevos valores de S
Sn1=Sn; %por el momento S es constante

%verifica convergencia en flujo

if abs(norm(Qnli-Qn1ia)/norm(Qnli))<=tolQ
    convQ=1;
else
    convQ=0;
end

%verifica convergencia en presion
if abs(norm(pnli-pn1ia)/norm(pnli))<=tolp
    convp=1;
else
    convp=0;
end

%verifica que Q y p hayan convergido
if convQ==1
    if convp==1
        'Convergencia cumplida en'
        tiempo
        break
    else
        if i<imax
            else
                'Numero de iteraciones max alcanzado'
                'convergencia no cumplida en'
                tiempo
                break
            end
        end
    end
else
    if i<imax
        else
            'Numero de iteraciones max alcanzado'
            'convergencia no cumplida en'
            tiempo
            break
        end
    end
end
end

```

```

        Qn1ia=Qn1i;
        pn1ia=pn1i;
        Sn=Sn1;

    end

    Qn=Qn1i;
    pn=pn1i;
    gpin=gpii;

    %guarda resultados
    for j=1:nodos
        Qnf(n+1,j)=Qn(j,1);
        pnf(n+1,j)=pn(j,1);
    end

    %incrementa el contador de tiempo
    tiempo=tiempo+deltat;

    %guarda intervalos de tiempo
    vectiempo(n+1,1)=tiempo;

    if tiempo>tiempomax
        'Tiempo max alcanzado'
        break
    end
end

%POST-PROCESAMIENTO
%-----

%despliega resultados
Qnf*fe^-1*1e-7 %(m3/s)
pnf*fe^-1*100 %(Pa)

%grafica Q en puntos deseados

for n=1:n
    figure(1)
    plot(vectiempo(n,1),0,'b',vectiempo(n,1),fe^-1*1e-7*Qnf(n,4),'r');
    hold on
end

xlabel('tiempo (seg)')
ylabel('Q (m3/s)')
legend('Sol ex','Sol aprox')

%grafica p en puntos deseados

for n=1:n
    figure(4)

```

```

    plot(vectiempo(n,1),311.96,'b',vectiempo(n,1),fe^-
1*100*pnf(n,1),'r');
    hold on
end

xlabel('tiempo (seg)')
ylabel('p (Pa)')
legend('Sol ex','Sol aprox')

```

A 3. Validación a nivel sistema

```

%Programa para la solución del flujo de sangre en las arterias
%mediante el método de elementos finitos

```

```

%PRE-PROCESAMIENTO

```

```

%-----

```

```

clc
clear all
close all

```

```

%Discretización mediante elementos finitos

```

```

%-----

```

```

%numero de elementos

```

```

ef=16;

```

```

%numero de nodos

```

```

nodos=17;

```

```

%coordenadas nodales en X (global,cm)

```

```

X=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16];

```

```

%coordenadas nodales en Y (global,cm)

```

```

Y=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];

```

```

%coordenadas nodales en Z (global,cm)

```

```

Z=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];

```

```

%arreglo de destino

```

```

AD=[1 2;2 3;3 4;4 5;5 6;6 7;7 8;8 9;9 10;10 11;11 12;12 13;13 14;14
15;15 16;16 17];

```

```

for i=1:ef

```

```

    %longitud de cada elemento

```

```

    h(1,i)=sqrt((X(1,AD(i,2))-X(1,AD(i,1)))^2+(Y(1,AD(i,2))-
Y(1,AD(i,1)))^2+(Z(1,AD(i,2))-Z(1,AD(i,1)))^2); % (cm)

```

```

end

```

```

%factor de escala

```

```

%mejora el comportamiento del algoritmo

```

```

fe=1e-5;

```

```

%Parametros

```

```

%-----

```

```

%densidad del fluido

```

```

dro=0.001060; %(kg/m3)@37°C [Olufsen, 2000]
%viscosidad del fluido
mu=0.000049; %(kg/cm-s)@37°C [Olufsen, 2000]
%viscosidad cinematica del fluido
nu=mu/dro; %(cm2/s)
%fuerza de cuerpo
%(solo es necesario especificar la gravedad)
f=-0; %(cm/s2)
f=f*fe;
%distribucion de velocidad sobre la seccion transversal
%[Taylor, 2002]
nprofile=11.33;
delta=1/(1+nprofile);
NB=-2*(nprofile+2)*pi*nu; %(cm2/s)

%Variables al tiempo t=0
%-----

%flujo inicial (cm3/s)
Qo=0*[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]';
%presion inicial (kg-cm/cm2-s2)
po=0*[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]';
%proyeccion del gradiente convectivo (cm3/s)
gc=0*[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]';
%proyeccion del gradiente de presion (kg-cm/cm2-s2)
gpi=0*[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]';
%seccion transversal del conducto (cm2)
So=0.5*[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]';

%PROCESAMIENTO
%-----

%Proceso de solucion
%-----
%contador de tiempo
tiempo=0; %(seg)
%tiempo maximo
tiempomax=20; %(seg)
%contador de iteraciones-->i
%numero de iteraciones max (convergencia)
imax=200;
%contador de pasos-->n
%numero de pasos max
nmax=400;
%tolerancia para flujo
tolQ=0.01; %(0.01=1%)
%tolerancia para presion
tolp=0.01; %(0.01=1%)

%Condiciones de frontera
%-----
%numero de puntos de control
puntosc=2;
%puntos de control (nodos)
PC=[1 17];

```

```

%Subrutinas para inicializar arreglos
%-----
[Mceros]=mceros(nodos);
[Vceros]=vceros(nodos);
%-----

%Guarda condiciones iniciales
for j=1:nodos
    Qnf(1,j)=Qo(j,1);
    pnf(1,j)=po(j,1);
end
vectiempo(1,1)=tiempo;

%comienza calculo de pasos en el tiempo
for n=1:nmax

    if n==1
        Sn=So;

        Qn=Qo;
        Qn1ia=Qn;
        pn=po;
        pn1ia=pn;
        gcn1=gc;
        gpin=gpi;
    else
        Qn1ia=Qn;
        pn1ia=pn;

        Sn=Sn1;
    end

    deltat=0.01;

    %presion en puntos de control
    %para cada paso en el tiempo
    CFp(1,n)=(1*tiempo)+deltat; % (kg-cm/cm2-s2)-lineal
    %CFp(1,n)=1*(tiempo^2)+deltat; % (kg-cm/cm2-s2)-parabolica
    %CFp(1,n)=1*sin(pi*tiempo)+deltat; % (kg-cm/cm2-s2)-senoidal
    CFp(1,n)=CFp(1,n)*fe; %factor de escalamiento

    %comienza calculo de iteraciones
    for i=1:imax

        %inicializa matrices M,G,Gs,C,L,P,H y D globales
        MMg=Mceros;
        MGg=Mceros;
        MGsg=Mceros;
        MCg=Mceros;
        MLg=Mceros;
        MPg=Mceros;
        MHg=Mceros;
        MDg=Mceros;
    end
end

```

```

%inicializa vector f global
VFg=Vceros;

for j=1:ef
    %calcula matrices M y C
    %MM=h(1,j)*[1/3 1/6;1/6 1/3]; %Matriz consistente
    MM=h(1,j)*[1/2 0;0 1/2]; %Matriz concentrada
    MC=(1/2)*h(1,j)*[-1/2 1/2;-1/2 1/2];

    %calculo de S promedio
    Sm=(Sn(AD(j,1),1)+Sn(AD(j,2),1))/2;
    %calculo de Q promedio
    Qm=(Qnlia(AD(j,1),1)+Qnlia(AD(j,2),1))/2;
    %calculo de tq

tqm=((8*mu)/(3*h(1,j)^2))+(((4*(1+delta)*dro)/h(1,j))*(Qm/Sm))^(-1;

    %calcula matrices G,Gs,L,P,H,D y vector f
    MG=- (Sm/dro)*[-1/2 1/2;-1/2 1/2];
    MGs=0*[-1/2 1/2;-1/2 1/2]; %por el momento no se usa
    ML=( (Sm*tqm)/h(1,j))*[1 -1;-1 1];
    MP=Sm*tqm*[-1/2 -1/2;1/2 1/2];
    MH=-Qm/Sm*[-1/2 1/2;-1/2 1/2]+2*delta*(Qm/Sm)*[-1/2 1/2;-
1/2 1/2]-(nu/h(1,j))*[1 -1;-1 1]+(dro/2)*(Qm/Sm^2)*[1 -1;-1 1];
    MD=Sm*(h(1,j)/dro)*0*[1/3 1/6;1/6 1/3]; %por el momento no
se usa
    VF=1*CFp(1,n)*(Sm/dro)*h(1,j)*[1/2 1/2]'+Sm*f*h(1,j)*[1/2
1/2]'+NB*Qm*h(1,j)*[1/2 1/2]'-0*[1/2 1/2]';

    %ensambla matrices M,G,Gs,C,L y P globales

[MMg, MGg, MGsg, MCg, MLg, MPg, MHg, MDg]=mensambla(j, AD, MMg, MGg, MGsg, MCg, MLg,
MPg, MHg, MDg, MM, MG, MGs, MC, ML, MP, MH, MD);

    %ensambla vector f global
    [VFg]=vensambla(j, AD, VFg, VF);
end

%calcula estimacion de flujo
Qestn1=Qn-(deltat*inv(MMg)*(MHg*Qnlia-(MGg-MGsg)*pn+MCg*gcnl-
VFg));

%calcula arreglos para cambio de presion
V1=MGg'*inv(MMg)*MGg;
V2=MGg'*inv(MMg)*MGsg;
deltapmat=(MLg+MDg*(1/deltat)+deltat*(V1-V2));
deltapvec=(MGg'*Qestn1+MLg*pn+MPg*gp);

%aplica condiciones de frontera esenciales para presion
valk=0;

for j=1:nodos
    if abs(deltapmat(j,j))>valk
        valk=abs(deltapmat(j,j));
    end
end

```

```

end

valk=valk*1e12;

deltapmat(PC(1,1),PC(1,1))=deltapmat(PC(1,1),PC(1,1))+valk;

deltapvec(PC(1,1),1)=deltapvec(PC(1,1),1)+valk*1*(pn(PC(1,1),1)-
CFp(1,n));
deltapmat(PC(1,2),PC(1,2))=deltapmat(PC(1,2),PC(1,2))+valk;

deltapvec(PC(1,2),1)=deltapvec(PC(1,2),1)+valk*0*(pn(PC(1,2),1)-
CFp(1,n));

%calcula cambio de presion
deltap=-inv(deltapmat)*deltapvec;

%calcula nueva presion
pnli=pn+deltap;

%corrige el valor del flujo
Qnli=Qestn1+deltat*inv(MMg)*(MGg-MGsg)*deltap;

%inicializa matrices B y E globales
MBg=Mceros;
MEg=Mceros;

for j=1:ef

%calculo de S promedio
Sm=(Sn(AD(j,1),1)+Sn(AD(j,2),1))/2;
%calculo de Q promedio
Qm=(Qnlia(AD(j,1),1)+Qnlia(AD(j,2),1))/2;
%calculo de tq

tqm=((8*mu)/(3*h(1,j)^2))+(((4*(1+delta)*dro)/h(1,j))*(Qm/Sm))^(-1);

MB=dro*(Qm/Sm^2)*[-1/2 1/2;-1/2 1/2];
%ME=Sm*tqm*h(1,j)*[1/3 1/6;1/6 1/3]; %Matriz consistente
ME=Sm*tqm*h(1,j)*[1/2 0;0 1/2]; %Matriz concentrada

%ensambla matrices B y E globales
[MBg,MEg]=mensambla2(j,AD,MBg,MEg,MB,ME);

end

%estima valores de los gradientes convectivo y de presion
gcnl=-inv(MMg)*MBg*Qnli;
gpil=-inv(MEg)*MPg'*pnli;

%calcula nuevos valores de S
Sn1=Sn; % por el momento constante

%verifica convergencia en flujo

```

```

    if abs(norm(Qnli-Qnlia)/norm(Qnli))<=tolQ
        convQ=1;
    else
        convQ=0;
    end

    %verifica convergencia en presion
    if abs(norm(pnli-pnlia)/norm(pnli))<=tolp
        convp=1;
    else
        convp=0;
    end

    %verifica que Q y p hayan convergido
    if convQ==1
        if convp==1
            'Convergencia cumplida en'
            tiempo
            break
        else
            if i<imax
            else
                'Numero de iteraciones max alcanzado'
                'convergencia no cumplida en'
                tiempo
                break
            end
        end
    else
        if i<imax
        else
            'Numero de iteraciones max alcanzado'
            'convergencia no cumplida en'
            tiempo
            break
        end
    end
end

Qnlia=Qnli;
pnlia=pnli;
Sn=Sn1;

end

Qn=Qnli;
pn=pnli;

%guarda resultados
for j=1:nodos
    Qnf(n+1,j)=Qn(j,1);
    pnf(n+1,j)=pn(j,1);
end

%incrementa el contador de tiempo
tiempo=tiempo+deltat;

```

```

    %guarda intervalos de tiempo
    vectiempo(n+1,1)=tiempo;

    if tiempo>tiempomax
        'Tiempo max alcanzado'
        break
    end
end

%POST-PROCESAMIENTO
%-----

%Solucion exacta
%-----

%Parametros
%-----

%densidad del fluido
dro=1060; %(kg/m3)@37°C [Olufsen, 2000]
%viscosidad del fluido
mu=0.0049; %(kg/m-s)@37°C [Olufsen, 2000]
%gravedad
grav=9.81; %(m/s2)
%seccion transversal
S=0.00005; %(m4)
diam=sqrt(4*S/pi); %(m)
%longitud
L=0.16; %(m)

%Solucion
%-----

nex=1;
tiempo=0;

while tiempo<tiempomax
    p1=(100*tiempo)+deltat; %(Pa)-lineal
    %p1=100*(tiempo^2)+deltat; %(Pa)-parabolica
    %p1=100*sin(pi*tiempo)+deltat; %(Pa)-senoidal
    hf=p1/(dro*grav);
    Qex(nex,1)=(pi*dro*grav*diam^4*hf)/(128*mu*L);

    nex=nex+1;
    tiempo=tiempo+deltat;
end

%grafica Q en puntos deseados

for n=1:n
    figure(1)

```

```

    plot(vectiempo(n,1),Qex(n,1),'b',vectiempo(n,1),fe^-1*1e-
7*Qnf(n,1),'r');
    hold on
end

xlabel('tiempo (seg)')
ylabel('Q (m3/s)')
legend('Sol ex','Sol aprox')

%grafica p en puntos deseados

for n=1:n
    figure(4)
    plot(vectiempo(n,1),fe^-1*100*pnf(n,1),'b',vectiempo(n,1),fe^-
1*100*pnf(n,8),'g',vectiempo(n,1),fe^-1*100*pnf(n,17),'r');
    hold on
end

xlabel('tiempo (seg)')
ylabel('p (Pa)')
legend('nodo 1','nodo 8','nodo 17')

```

A 4. Sistema con elementos elásticos

```

%Programa para la solucion del flujo de sangre en las arterias
%mediante el metodo de elementos finitos

%PRE-PROCESAMIENTO
%-----

clc
clear all
close all

%Discretizacion mediante elementos finitos
%-----
%numero de elementos
ef=16;
%numero de nodos
nodos=17;
%coordenadas nodales en X (global,cm)
X=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16];
%coordenadas nodales en Y (global,cm)
Y=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
%coordenadas nodales en Z (global,cm)
Z=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
%arreglo de destino
AD=[1 2;2 3;3 4;4 5;5 6;6 7;7 8;8 9;9 10;10 11;11 12;12 13;13 14;14
15;15 16;16 17];

```

```

for i=1:ef
    %longitud de cada elemento
    h(1,i)=sqrt((X(1,AD(i,2))-X(1,AD(i,1)))^2+(Y(1,AD(i,2))-
Y(1,AD(i,1)))^2+(Z(1,AD(i,2))-Z(1,AD(i,1)))^2); % (cm)
end

%factor de escala
%mejora el comportamiento del algoritmo
fe=1e-5;

%Parametros
%-----
%densidad del fluido
dro=0.001060; % (kg/m3)@37°C [Olufsen, 2000]
%viscosidad del fluido
mu=0.000049; % (kg/cm-s)@37°C [Olufsen, 2000]
%viscosidad cinematica del fluido
nu=mu/dro; % (cm2/s)
%fuerza de cuerpo
%(solo es necesario especificar la gravedad)
f=-0; % (cm/s2)
f=f*fe;
%distribucion de velocidad sobre la seccion transversal
%[Taylor, 2002]
nprofile=6;
delta=1/(1+nprofile);
NB=-2*(nprofile+2)*pi*nu; % (cm2/s)
%constantes para modulo de elasticidad tangencial
% [Olufsen, 2000]
k1=20000; %kg/(cm-s2)
k2=-22.53; %cm^-1
k3=865; %kg/(cm-s2)

%Variables al tiempo t=0
%-----

%flujo inicial (cm3/s)
Qo=0*[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]';
%presion inicial (kg-cm/cm2-s2)
po=0*[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]';
%proyeccion del gradiente convectivo (cm3/s)
gc=0*[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]';
%proyeccion del gradiente de presion (kg-cm/cm2-s2)
gpi=0*[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]';
%seccion transversal del conducto (cm2)
So=0.5*[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]';

%PROCESAMIENTO
%-----

%Proceso de solucion
%-----
%contador de tiempo
tiempo=0; % (seg)

```

```

%tiempo maximo
tiempomax=20; %(seg)
%contador de iteraciones-->i
%numero de iteraciones max (convergencia)
imax=200;
%contador de pasos-->n
%numero de pasos max
nmax=400;
%tolerancia para flujo
tolQ=0.01; %(0.01=1%)
%tolerancia para presion
tolp=0.01; %(0.01=1%)

%Condiciones de frontera
%-----
%numero de puntos de control
puntosc=2;
%puntos de control (nodos)
PC=[1 17];

%Subrutinas para inicializar arreglos
%-----
[Mceros]=mceros(nodos);
[Vceros]=vceros(nodos);
%-----

%Guarda condiciones iniciales
for j=1:nodos
    Qnf(1,j)=Qo(j,1);
    pnf(1,j)=po(j,1);
    Snf(1,j)=So(j,1);
end
vectiempo(1,1)=tiempo;

%comienza calculo de pasos en el tiempo
for n=1:nmax

    if n==1
        Sn=So;

        Qn=Qo;
        Qnlia=Qn;
        pn=po;
        pnlia=pn;
        gcn1=gc;
        gpin=gpi;
    else
        Qnlia=Qn;
        pnlia=pn;

        Sn=Sn1;
    end

    deltat=0.01;

```

```

%presion en puntos de control
%para cada paso en el tiempo
CFp(1,n)=1*sin(pi*tiempo)+deltat; %(kg-cm/cm2-s2)-senoidal
CFp(1,n)=CFp(1,n)*fe;

%comienza calculo de iteraciones
for i=1:imax

    %inicializa matrices M,G,Gs,C,L,P,H y D globales
    MMg=Mceros;
    MGg=Mceros;
    MGsg=Mceros;
    MCg=Mceros;
    MLg=Mceros;
    MPg=Mceros;
    MHg=Mceros;
    MDg=Mceros;

    %inicializa vector f global
    VFg=Vceros;

    for j=1:ef
        %calcula matrices M y C
        %MM=h(1,j)*[1/3 1/6;1/6 1/3]; %Matriz consistente
        MM=h(1,j)*[1/2 0;0 1/2]; %Matriz concentrada
        MC=(1/2)*h(1,j)*[-1/2 1/2;-1/2 1/2];

        %calculo de S promedio
        Sm=(Sn(AD(j,1),1)+Sn(AD(j,2),1))/2;
        %calculo de Q promedio
        Qm=(Qn1ia(AD(j,1),1)+Qn1ia(AD(j,2),1))/2;
        %calculo de tq
        tqm=((8*mu)/(3*h(1,j)^2))+(((4*(1+delta)*dro)/h(1,j))*(Qm/Sm))^(-1);

        %calcula matrices G,Gs,L,P,H,D y vector f
        MG=- (Sm/dro)*[-1/2 1/2;-1/2 1/2];
        MGs=0*[-1/2 1/2;-1/2 1/2]; %por el momento no se usa
        ML=((Sm*tqm)/h(1,j))*[1 -1;-1 1];
        MP=Sm*tqm*[-1/2 -1/2;1/2 1/2];
        MH=-Qm/Sm*[-1/2 1/2;-1/2 1/2]+2*delta*(Qm/Sm)*[-1/2 1/2;-
1/2 1/2]-(nu/h(1,j))*[1 -1;-1 1]+(dro/2)*(Qm/Sm^2)*[1 -1;-1 1];
        MD=Sm*(h(1,j)/dro)*0*[1/3 1/6;1/6 1/3]; %por el momento no
se usa
        VF=1*CFp(1,n)*(Sm/dro)*h(1,j)*[1/2 1/2]'+Sm*f*h(1,j)*[1/2
1/2]'+NB*Qm*h(1,j)*[1/2 1/2]'-0*[1/2 1/2]';

        %ensambla matrices M,G,Gs,C,L y P globales

        [MMg, MGg, MGsg, MCg, MLg, MPg, MHg, MDg]=mensambla(j, AD, MMg, MGg, MGsg, MCg, MLg,
MPg, MHg, MDg, MM, MG, MGs, MC, ML, MP, MH, MD);

        %ensambla vector f global
        [VFg]=vensambla(j, AD, VFg, VF);
    end
end

```

```

%calcula estimacion de flujo
Qestn1=Qn-(deltat*inv(MMg)*(MHg*Qn1ia-(MGg-MGsg)*pn+MCg*gcnl-
VFg));

%calcula arreglos para cambio de presion
V1=MGg'*inv(MMg)*MGg;
V2=MGg'*inv(MMg)*MGsg;
deltapmat=(MLg+MDg*(1/deltat)+deltat*(V1-V2));
deltapvec=(MGg'*Qestn1+MLg*pn+MPg*gp);

%aplica condiciones de frontera esenciales para presion
valk=0;

for j=1:nodos
    if abs(deltapmat(j,j))>valk
        valk=abs(deltapmat(j,j));
    end
end

valk=valk*1e12;

deltapmat(PC(1,1),PC(1,1))=deltapmat(PC(1,1),PC(1,1))+valk;

deltapvec(PC(1,1),1)=deltapvec(PC(1,1),1)+valk*1*(pn(PC(1,1),1)-
CFp(1,n));
deltapmat(PC(1,2),PC(1,2))=deltapmat(PC(1,2),PC(1,2))+valk;

deltapvec(PC(1,2),1)=deltapvec(PC(1,2),1)+valk*0*(pn(PC(1,2),1)-
CFp(1,n));

%calcula cambio de presion
deltap=-inv(deltapmat)*deltapvec;

%calcula nueva presion
pnli=pn+deltap;

%corrige el valor del flujo
Qnli=Qestn1+deltat*inv(MMg)*(MGg-MGsg)*deltap;

%inicializa matrices B y E globales
MBg=Mceros;
MEg=Mceros;

for j=1:ef

    %calcula de S promedio
    Sm=(Sn(AD(j,1),1)+Sn(AD(j,2),1))/2;
    %calcula de Q promedio
    Qm=(Qn1ia(AD(j,1),1)+Qn1ia(AD(j,2),1))/2;
    %calcula de tq

tqm=((8*mu)/(3*h(1,j)^2))+(((4*(1+delta)*dro)/h(1,j))*(Qm/Sm))^-1;

```

```

MB=dro*(Qm/Sm^2)*[-1/2 1/2;-1/2 1/2];
%ME=Sm*tqm*h(1,j)*[1/3 1/6;1/6 1/3]; %Matriz consistente
ME=Sm*tqm*h(1,j)*[1/2 0;0 1/2]; %Matriz concentrada

%ensambla matrices B y E globales
[MBg,MEg]=mensambla2(j,AD,MBg,MEg,MB,ME);

end

%estima valores de los gradientes convectivo y de presion
gcn1=-inv(MMg)*MBg*Qnli;
gp11=-inv(MEg)*MPg'*pnli;

%calcula nuevos valores de S
%Sn1=Sn; % por el momento constante
Sn1=Sn./((1-(fe^-1*10)*(pnli-
pnlia))*(3/4).*(k1*exp(k2*sqrt(Sn/pi))+k3).^-1).^2);

%verifica convergencia en flujo

if abs(norm(Qnli-Qnlia)/norm(Qnli))<=tolQ
    convQ=1;
else
    convQ=0;
end

%verifica convergencia en presion
if abs(norm(pnli-pnlia)/norm(pnli))<=tolp
    convp=1;
else
    convp=0;
end

%verifica que Q y p hayan convergido
if convQ==1
    if convp==1
        'Convergencia cumplida en'
        tiempo
        break
    else
        if i<imax
            else
                'Numero de iteraciones max alcanzado'
                'convergencia no cumplida en'
                tiempo
                break
            end
        end
    end
else
    if i<imax
        else
            'Numero de iteraciones max alcanzado'
            'convergencia no cumplida en'
            tiempo
            break
        end
    end
end

```

```

        end
    end

    Qnlia=Qnli;
    pnlia=pnli;
    Sn=Sn1;

end

Qn=Qnli;
pn=pnli;
Sn=Sn1;

%guarda resultados
for j=1:nodos
    Qnf(n+1,j)=Qn(j,1);
    pnf(n+1,j)=pn(j,1);
    Snf(n+1,j)=Sn(j,1);
end

%incrementa el contador de tiempo
tiempo=tiempo+deltat;

%guarda intervalos de tiempo
vectiempo(n+1,1)=tiempo;

if tiempo>tiempomax
    'Tiempo max alcanzado'
    break
end
end

%POST-PROCESAMIENTO
%-----

%Solucion exacta
%-----

%Parametros
%-----

%densidad del fluido
dro=1060; %(kg/m3)@37°C [Olufsen, 2000]
%viscosidad del fluido
mu=0.0049; %(kg/m-s)@37°C [Olufsen, 2000]
%gravedad
grav=9.81; %(m/s2)
%seccion transversal
S=0.00005; %(m4)
diam=sqrt(4*S/pi); %(m)
%longitud
L=0.16; %(m)

```

```

%Solucion
%-----

nex=1;
tiempo=0;

while tiempo<tiempomax
    p1=100*sin(pi*tiempo)+deltat; %(Pa)-senoidal
    hf=p1/(dro*grav);
    Qex(nex,1)=(pi*dro*grav*diam^4*hf)/(128*mu*L);

    nex=nex+1;
    tiempo=tiempo+deltat;
end

%grafica Q en puntos deseados

for n=1:n
    figure(1)
    plot(vectiempo(n,1),Qex(n,1),'b',vectiempo(n,1),fe^-1*1e-
7*Qnf(n,1),'r');
    hold on
end

xlabel('tiempo (seg)')
ylabel('Q (m3/s)')
legend('Sol ex','Sol aprox')

%grafica p en puntos deseados

for n=1:n
    figure(4)
    plot(vectiempo(n,1),fe^-1*100*pnf(n,1),'b',vectiempo(n,1),fe^-
1*100*pnf(n,8),'g',vectiempo(n,1),fe^-1*100*pnf(n,17),'r');
    hold on
end

xlabel('tiempo (seg)')
ylabel('p (Pa)')
legend('nodo 1','nodo 8','nodo 17')

%grafica S en puntos deseados

for n=1:n
    figure(8)
    plot(vectiempo(n,1),0.5,'b',vectiempo(n,1),Snf(n,1),'r');
    hold on
end

xlabel('tiempo (seg)')
ylabel('S (cm2)')
legend('S cte','S variable')

```

Apéndice B

Temas Adicionales

B 1. Teorema de transporte de Reynolds

Consideremos a F como una propiedad extensiva del medio continuo, y a μ la cantidad de F por unidad de masa. Si ρ es la densidad, entonces $\rho\mu$ será la cantidad de F por unidad de volumen. Siendo Ω_t un volumen de control y Γ_t la superficie al tiempo t , la cantidad de F que se encuentra en el volumen puede calcularse como

$$F_{(t)} = \int_{\Omega_t} \rho\mu d\Omega \quad (\text{B 1})$$

El cambio de F en el tiempo puede calcularse mediante la derivada material.

$$\begin{aligned} \frac{DF}{Dt} &= \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} \rho\mu d\Omega = \int_{\Omega_t} \left(\frac{D}{Dt} \rho\mu + \rho\mu \nabla \cdot \mathbf{v} \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega_t} \rho \frac{D\mu}{Dt} d\Omega \end{aligned} \quad (\text{B 2})$$

A la ecuación (B 2) se le conoce como el *Lema de Reynolds*.

En forma alternativa, la derivada material se puede evaluar como

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} \rho\mu d\Omega = \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho\mu + \nabla \cdot (\rho\mu\mathbf{v}) \right) d\Omega$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_t} \rho \mu d\Omega + \int_{\Gamma_t} \rho \mu \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (\text{B } 3)$$

Tomando en cuenta el *Lema de Reynolds* en el lado izquierdo de la ecuación (B 3) se obtiene la forma global final del *Teorema de Reynolds*.

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_t} \rho \mu d\Omega}_A = \underbrace{\int_{\Omega_t} \rho \frac{D\mu}{Dt} d\Omega}_B - \underbrace{\int_{\Gamma_t} \rho \mu \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma}_C \quad (\text{B } 4)$$

en donde A representa el cambio instantáneo de F en el tiempo t , B el cambio total de F en las partículas del volumen material y C el cambio de F por flujo convectivo saliente a través de la superficie.

B 2. Transporte por advección y difusión

Siempre que exista una diferencia de concentración entre dos o mas sustancias dentro de una mezcla de fluidos, se llevara a cabo un transporte o difusión de masa. Si consideramos un canal de longitud infinita lleno con agua y le inyectamos una gota de tinta al tiempo $t = 0$, la tinta se repartirá desde el punto de inyección hacia otras regiones del canal en las cuales no existe tinta. Después de un tiempo suficiente t_1 , cuando la concentración de tinta sea constante en todo el canal ($t > t_1$), el flujo neto de tinta será cero para cualquier sección del canal. La difusión de la tinta ocurre debido a un gradiente de concentración. Movimientos al azar de las moléculas de tinta y agua llevan, después de un tiempo suficiente, a tener una mezcla uniforme de ambas sustancias.

La masa de tinta que atraviesa un área unitaria por unidad de tiempo en la dirección x es proporcional al gradiente de la concentración de tinta en esa dirección. A lo anterior se le conoce como la primera ley de difusión de Fick, la cual matemáticamente se expresa como:

$$q_d = -\bar{k} \frac{dC}{dx} \quad (\text{B } 5)$$

En la ecuación (B 5), q_d es el flujo de la sustancia por difusión ($\text{Prop. subst.}/L^2T$), \bar{k} es el coeficiente de difusión de masa, con dimensiones (L^2/T), C es la concentración de la propiedad para la sustancia ($\text{Prop. subst.}/L^3$), y el signo menos implica que el transporte se lleva a cabo de zonas altas a zonas bajas en concentración.

El transporte de sustancias por difusión es una importante fuente de movimiento a nivel microscópico. Sin embargo, la difusión molecular es extremadamente lenta, por lo cual su importancia es significativa solo en distancias muy pequeñas o periodos de tiempo largos. Así pues, la difusión molecular, aunque esta presente, es dominada por un mecanismo de transporte más rápido generado por el mismo movimiento del fluido. A este tipo de transporte se le conoce como advección.

El transporte por advección se expresa en términos del vector de flujo a lo largo de un eje por unidad de área perpendicular a dicho eje. Entonces, el flujo por advección q_a ($\text{Prop. subst.}/L^2T$) en la dirección x es:

$$q_a = uC \quad (\text{B } 6)$$

en donde u es la velocidad del fluido en la dirección x (L/T) y C es la concentración de la sustancia. De aquí, se observa que el flujo total de transporte de masa q_T por advección y difusión es:

$$q_T = uC - \bar{k} \frac{dC}{dx} \quad (\text{B } 7a)$$

En 3D:

$$\mathbf{q}_T = \mathbf{u}C - \bar{k} \nabla C \quad (\text{B } 7b)$$

B 2.1 Transporte de masa

Consideremos a F como una propiedad extensiva del medio continuo, y a μ la cantidad de F por unidad de masa. Si ρ es la densidad, entonces $\rho\mu$ será la cantidad de F por unidad de volumen. Siendo Ω_t un volumen de control y Γ_t la superficie al tiempo t , la cantidad de F que se encuentra en el volumen puede calcularse como

$$F_{(t)} = \int_{\Omega_t} \rho\mu d\Omega \quad (\text{B } 8)$$

El cambio de F en el tiempo puede calcularse utilizando el *Teorema de Reynolds*, de modo que

$$\underbrace{\frac{DF}{Dt}}_A = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_t} \rho\mu d\Omega}_B + \underbrace{\int_{\Gamma_t} \rho\mu \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma}_C \quad (\text{B } 9)$$

en donde A representa el cambio total de F en las partículas del volumen material, B el cambio instantáneo de F en el tiempo t (acumulación) y C el cambio de F por flujo convectivo saliente a través de la superficie.

En forma alternativa, es posible obtener esta ecuación (B 9) desde un punto de vista físico del problema. Consideremos que la concentración de una sustancia la expresamos mediante $C = \rho\mu$ (*Prop. subst./L³*) y consideremos un volumen de control al tiempo t . Una expresión del balance de la concentración de la sustancia en este volumen se podría expresar mediante:

$$\text{Acumulación instantánea} = \text{entrada} - \text{salida} + \text{generación} - \text{degradación} \quad (\text{B } 10)$$

Si la variable Q representa la tasa de cambio de la propiedad de la sustancia por unidad de volumen ($Prop. subst./L^3T$) o tasa de la fuente de la propiedad, entonces podríamos evaluar el cambio total en la propiedad de la sustancia $\frac{DF}{Dt}$ mediante la tasa de generación de la sustancia r_g y la tasa de degradación de la sustancia r_d como

$$\begin{aligned} \frac{DF}{Dt} &= \int_{\Omega_t} Q d\Omega = \int_{\Omega_t} r_g d\Omega - \int_{\Omega_t} r_d d\Omega \\ &= \text{generación} - \text{degradación} \end{aligned}$$

Si se considera el movimiento de partículas a través de la superficie, entonces la entrada y salida de la propiedad de la sustancia estará asociada al movimiento de masa o flujo convectivo. Si \mathbf{q}_T es el vector de flujo de la propiedad por unidad de área por unidad de tiempo ($Prop. subst./L^2T$) y \mathbf{n} es el vector normal hacia fuera de la superficie, entonces el cambio en la propiedad de la sustancia por flujo convectivo será:

$$\text{Entrada} - \text{salida} = - \int_{\Gamma_t} \mathbf{q}_T \bullet \mathbf{n} d\Gamma$$

El signo negativo para el flujo convectivo se debe a que flujo que sale se considera negativo.

El cambio instantáneo en la propiedad de la sustancia o acumulación se puede expresar mediante

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial C}{\partial t} d\Omega = \text{Acumulación}$$

La ecuación de balance (B 10) se puede expresar entonces como

$$\int_{\Omega_i} \frac{\partial C}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Gamma_i} \mathbf{q}_T \bullet \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega_i} Q d\Omega \quad (\text{B 11})$$

Sustituyendo la ecuación (B 7b) en la ecuación (B 11), obtenemos

$$\int_{\Omega_i} \frac{\partial C}{\partial t} d\Omega = \int_{\Gamma_i} \bar{k} \nabla C \bullet \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Gamma_i} C \mathbf{u} \bullet \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega_i} Q d\Omega$$

Aplicando el *Teorema de Gauss* y simplificando, llegamos a la ecuación de transporte, la cual se expresa como

$$\int_{\Omega_i} \frac{\partial C}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Omega_i} \nabla \bullet (-\bar{k} \nabla C + C \mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Omega_i} Q d\Omega$$

(Ec. de
transporte)

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\nabla \bullet \mathbf{q}_T + Q \quad (\text{B 12})$$

B 2.2 Problema de transporte por advección y difusión en 1-D

Una forma alterna para obtener la ecuación de transporte en 1-D se obtiene de aplicar la ecuación de balance directamente sobre el elemento diferencial. Consideremos un dominio unidimensional de longitud L (figura B 1) y con condiciones de frontera aplicadas sobre la concentración y el flujo difusivo. El análisis de este tipo de problemas se realiza extrayendo un elemento diferencial, como el que se muestra en la figura B 2, con un segmento típico AB de longitud h .

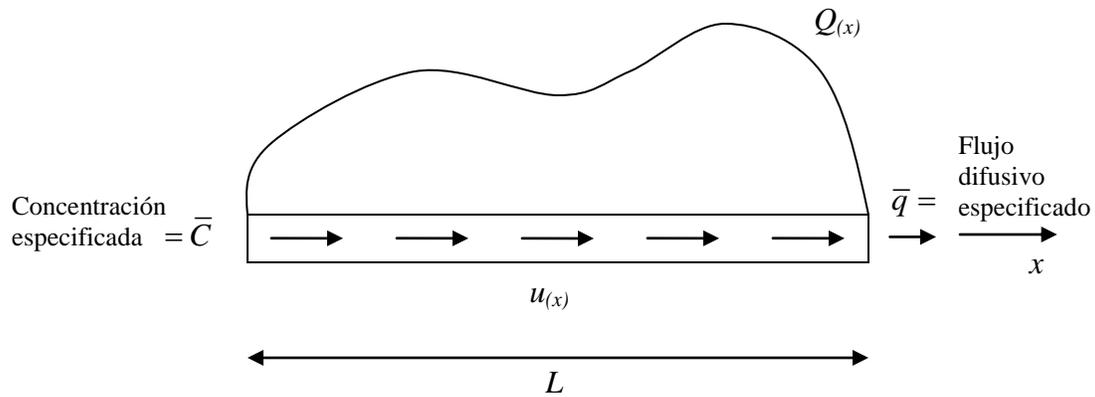


Fig. B 1. Problema de transporte en 1-D por advección y difusión.

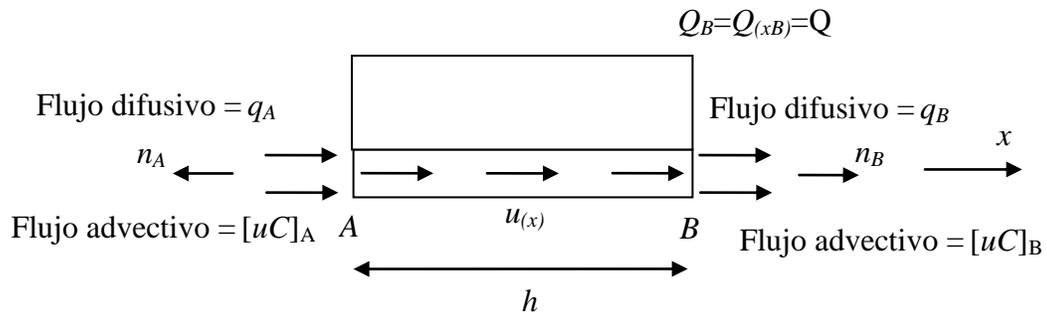


Fig. B 2. Balance de flujos sobre el segmento AB

Variables:

u : velocidad (L/T).

Q : Taza de cambio de la propiedad de la sustancia ($Prop. Sust./LT$).

q_A, q_B, \bar{q} : Flujos difusivos ($Prop. Sust./T$).

C_A, C_B, \bar{C} : Concentraciones por unidad de longitud ($Prop. Sust./L$).

El balance de flujos en el elementos diferencial se obtiene como

$$\frac{\partial C}{\partial t} h = (q_A + [uC]_A) - (q_B + [uC]_B) + Qh \quad (\text{B } 13)$$

Esta ecuación es completamente equivalente a la ecuación (B 12), pero en una dimensión.

La concentración de la propiedad de la sustancia por unidad de longitud C , frecuentemente se expresa en forma alterna, mediante el producto de un parámetro advectivo v y una función de concentración ϕ :

$$C = v\phi \quad (\text{B } 14)$$

Los valores del flujo difusivo q y el transporte advectivo uC en el punto A se pueden aproximar en términos de los valores en otro punto del dominio, digamos el punto B , utilizando series de Taylor de segundo orden, de manera que

$$q_A = q_B - h \left. \frac{dq}{dx} \right|_B + O(h^2) \quad (\text{B } 15)$$

$$[uC]_A = [uC]_B - h \left. \frac{d[uC]}{dx} \right|_B + O(h^2) \quad (\text{B } 16)$$

Sustituyendo en la ecuación de balance para el elemento diferencial, ecuación (B 13):

$$\int_0^h \frac{\partial C}{\partial t} dx = \left(q_B - h \left. \frac{dq}{dx} \right|_B + [uC]_B - h \left. \frac{d[uC]}{dx} \right|_B + O(h^2) \right) - (q_B + [uC]_B) + Qh$$

Considerando C como constante:

$$\frac{\partial C}{\partial t} h = -h \frac{dq}{dx} \Big|_B - h \frac{d[uC]}{dx} \Big|_B + O(h^2) + Qh \quad (\text{B 17})$$

$$C = v\phi \quad v \frac{\partial \phi}{\partial t} h = -h \frac{dq}{dx} \Big|_B - h \frac{v d[u\phi]}{dx} \Big|_B + Qh + O(h^2)$$

$$\div h, q_B \rightarrow q \quad v \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{dq}{dx} - \frac{v d[u\phi]}{dx} + Q + O(h)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} r \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial [u\phi]}{\partial x} \right) + \frac{\partial q}{\partial x} - Q = 0 \quad (\text{B 18})$$

Tomando q mediante la ley de difusión de Fick (ecuación B 5),

$$q = -\bar{k} \frac{v \partial \phi}{\partial x} = -K \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

la ecuación (B 18) se transforma finalmente en la ecuación de advección-difusión-transporte en su forma estándar.

$$r \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial [u\phi]}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - Q = 0 \quad (\text{B 19})$$

Condiciones de frontera de Dirichlet:

$$C = \bar{C} \text{ o bien } \phi = \bar{\phi} \text{ en } x = x_0, t = [0, t)$$

Condición de frontera de Neumann:

$$q_T = \bar{q} \Rightarrow q_d + q_a = \bar{q} \text{ en } x = x_L, t = [0, t)$$

O bien

$$-K \frac{d\phi}{dx} + uv\phi = \bar{q} \text{ en } x = x_L, t = [0, t)$$

B 2.3 Proceso de estabilización

Consideremos que pueden existir variaciones importantes en los términos difusivo y advectivo (ecuaciones B 15 y B 16) a lo largo del segmento de balance. Para poder tomar en cuenta estas variaciones, es necesario expandir ambos términos utilizando series de Taylor de tercer orden, de modo que

$$\begin{aligned}
 q_A &= q_B + (-h) \left. \frac{dq}{dx} \right|_B + \frac{1}{2} (-h)^2 \left. \frac{d^2q}{dx^2} \right|_B - O(h^3) \\
 &= q_B - h \left. \frac{dq}{dx} \right|_B + \frac{1}{2} h^2 \left. \frac{d^2q}{dx^2} \right|_B - O(h^3)
 \end{aligned}
 \tag{B 20}$$

De igual forma

$$\begin{aligned}
 [uC]_A &= [uC]_B + (-h) \left. \frac{d[uC]}{dx} \right|_B + \frac{1}{2} (-h)^2 \left. \frac{d^2[uC]}{dx^2} \right|_B - O(h^3) \\
 &= [uC]_B - h \left. \frac{d[uC]}{dx} \right|_B + \frac{1}{2} h^2 \left. \frac{d^2[uC]}{dx^2} \right|_B - O(h^3)
 \end{aligned}
 \tag{B 21}$$

Además, si asumimos que la fuente de generación Q actúa con una distribución lineal sobre el dominio (figura B 3), entonces, el balance de flujos se puede escribir como

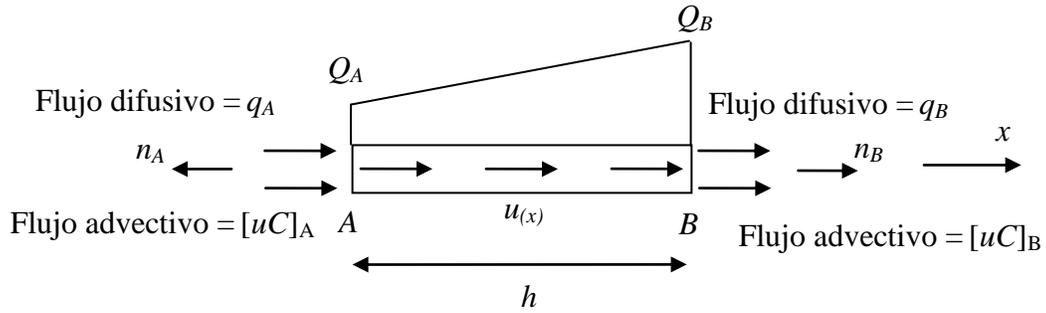


Fig. B 3. Balance de flujos sobre el segmento AB con fuente de generación lineal

De nueva cuenta se emplea la ecuación de balance pero tomando en cuenta la variación lineal de la fuente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{C_A + C_B}{2} \right) h = (q_A + [uC]_A) - (q_B + [uC]_B) + \frac{1}{2} (Q_A + Q_B) h \quad (B 22)$$

Nótese que en la ecuación (B 22) se están utilizando valores promedio para C y Q .

Empleando aproximaciones de primer orden para Q_A y C_A ,

$$Q_A = Q_B - h \left. \frac{dQ}{dx} \right|_B + O(h^2) \quad (B 23)$$

$$C_A = C_B - h \left. \frac{dC}{dx} \right|_B + O(h^2) \quad (B 24)$$

Sustituyendo las ecuaciones (B 23) y (B 24) en la ecuación (B 22), obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(C_B - \frac{1}{2} h \left. \frac{dC}{dx} \right|_B \right) h = \left(- \left. \frac{dq}{dx} \right|_B - \left. \frac{d[uC]}{dx} \right|_B \right) h$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\left. \frac{d^2 q}{dx^2} \right|_B + \left. \frac{d^2 [uC]}{dx^2} \right|_B - \left. \frac{dQ}{dx} \right|_B \right) \frac{h^2}{2} + Q_B h - O(h^3) \\
 \div h, \\
 O(h^3) \approx 0 \quad & 0 = -\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial [uC]}{\partial x} + Q - \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial [uC]}{\partial x} + Q \right) \quad (B 25)
 \end{aligned}$$

Si definimos a r y \hat{r} tal que:

$$r = -\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial [uC]}{\partial x} + Q \quad (B 26)$$

Entonces

$$\hat{r} = -\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial [uC]}{\partial x} + Q \quad (B 27)$$

$$= -\frac{\partial C}{\partial t} + r \quad (B 28)$$

entonces, la ecuación (B 25) se puede describir como

$$\hat{r} - \frac{h}{2} \frac{\partial \hat{r}}{\partial x} = 0 \quad (B 29)$$

Notemos que redefiniendo la ecuación (B 28) como:

$$\hat{r} = \frac{\partial C}{\partial t} - r \quad (B 30)$$

la ecuación de balance, la ecuación (B 29), no cambia.

Sustituyendo las ecuaciones (B 5) y (B 14) en la ecuación (B 30), se obtienen las mismas ecuaciones de balance que en la referencia [20].

$$\hat{r} = v \frac{\partial \phi}{\partial t} - r \quad (B 31)$$

Con

$$r = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - v \frac{\partial [u\phi]}{\partial x} + Q \quad (\text{B 32})$$

Nótese que en la ecuación (B 32) $K = \bar{k}v$

Debe notarse que la expansión linear de C y de Q es necesaria para obtener la forma final de las ecuaciones de balance, ecuación (B 30).

B 2.4 Condiciones de frontera (Dirichlet y Neumann)

Para completar el problema, es necesario aplicar condiciones de frontera espaciales y temporales. La condición de frontera esencial de Dirichlet para la ecuación (B 30) está dada por

$$\phi = \bar{\phi} \quad (\text{B 33})$$

en donde $\bar{\phi}$ es el valor prescrito de la variable transportada que se desconoce.

Para obtener la condición de frontera estabilizada de Neumann, es necesario escribir la ecuación de balance en un punto de la frontera (figura B 4). Se asigna la longitud $h/2$ porque con ese valor se eliminan algunos términos en la expansión.

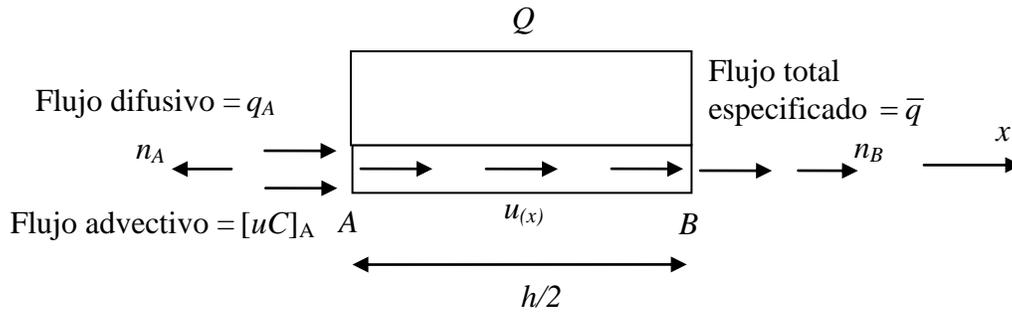


Fig. B 4. Segmento de balance cercano a una frontera de Neumann en el punto B

La ecuación de balance es ahora:

$$q_A + [uC]_A + Q \frac{h}{2} = \bar{q} \quad (\text{B } 34)$$

en donde \bar{q} es el flujo total prescrito.

Nótese que en la ecuación (B 34) la fuente de generación Q se asume constante y la longitud del segmento AB es la mitad para que posteriormente se puedan simplificar las ecuaciones.

Utilizando series de Taylor de primer orden

$$q_A = q_B - \frac{h}{2} \frac{dq}{dx} \Big|_B \quad (\text{B } 35)$$

$$[uC]_A = [uC]_B - \frac{h}{2} \frac{d[uC]}{dx} \Big|_B \quad (\text{B } 36)$$

Sustituyendo las ecuaciones (B 35) y (B 36) en la ecuación (B 34), y notando que la posición del punto B puede ser arbitraria

$$q + uC + \frac{h}{2} \left(-\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial [uC]}{\partial x} + Q \right) = \bar{q}$$
$$q + uC + \frac{h}{2} r = \bar{q} \quad (\text{B 37})$$

en donde r se define igual que en la ecuación (B 26) o (B 32).

Finalmente, describimos la ecuación (B 37) como

$$-K \frac{\partial \phi}{\partial x} + uv\phi + \frac{h}{2} r = \bar{q} \quad (\text{B 38})$$

Referencias

- [1] Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática, Estadísticas sociodemográficas, Dinámica de la población, Mortalidad 1990-2005, <http://www.inegi.gob.mx>.
- [2] Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática, Estadísticas sociodemográficas, Salud, Morbilidad 2000-2004, <http://www.inegi.gob.mx>.
- [3] Comunicado de prensa No. 50, Secretaría de Salubridad y Asistencia, 7/Febrero/2005, <http://www.salud.gob.mx>.
- [4] Comunicado de prensa No. 47, Secretaría de Salubridad y Asistencia, 6/Febrero/2005, <http://www.salud.gob.mx>.
- [5] “Economic burden of cardiovascular diseases in the enlarged European Union”, José Leal, Ramón Luengo-Fernández, Alastair Gray, Sophie Petersen, and Mike Rayner, *European Heart Journal* (2006) 27, 1610–1619.
- [6] Charles A. Taylor, Mary T. Draney, “Experimental and computational methods in cardiovascular fluid mechanics”, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **36**: 197-231 (2004).
- [7] Brooke N. Steele, Joy P. Ku, Mary T. Draney y Charles A. Taylor, “Internet based user interface for computer aided surgical planning”, *ASME Summer Bioengineering Conference*, BED-Vol **42**, 21-22 (1999).
- [8] J.R. Cebral, R. Löhner, O. Soto, P.L. Choyke y P.J. Yim “Image-based finite element modeling of hemodynamics in stenosed carotid artery”, *Proc. SPIE Medical Imaging*, Vol. **4683**, paper No. 34, San Diego, CA, February (2002).

- [9] S.A. Urquiza, P.J. Blanco, M.J. Ve'nere, R.A. Feijo' o, "Multidimensional modelling for the carotid artery blood flow", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **195** 4002–4017 (2006).
- [10] D. A. Steinman y C. Taylor, "Flow imaging and computing: Large artery hemodynamics", *Annals of Biomedical Engineering*, Vol. **33**, No. 12, 1704–1709 (2005).
- [11] Eugenio Oñate, "Finite calculus formulations for finite element analysis of incompressible flows. Eulerian, ALE and Lagrangian approaches", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **195** 3001-3007 (2006).
- [12] Eugenio Oñate, "A stabilized finite element method for incompressible viscous flows using a finite increment calculus formulation", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **182** 355-370 (2000).
- [13] Eugenio Oñate, "Derivation of stabilized equations for numerical solution of advective-diffusive transport and fluid flow problems", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **151** 233-265 (1998).
- [14] Christopher P. Cheng et al, "Quantification of wall shear stress in large blood vessels using Lagrangian interpolation functions with cine phase-contrast magnetic resonance imaging", *Annals of Biomedical Engineering*, Vol. **30**, 1020-1032 (2002).
- [15] Jin Suo, "Investigation of blood flow patterns and hemodynamics in the human ascending aorta and major trunks of right and left coronary arteries using magnetic resonance imaging and computational fluid dynamics", Dissertation, 2005.

- [16] Thomas J.R. Hughes, Charles A. Taylor et al, “A one-dimensional finite element method for simulation-based medical planning for cardiovascular disease”, *Computer Methods in Biomechanics & Biomedical Engineering*, Vol. **5**, 195-206 (2002).
- [17] Babuska & R. Narasimhan, “The Babuska-Brezzi condition and the patch test: an example”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **140**, No. 1, 183-199 (1997).
- [18] W. Flügge, “Stresses in shells”, 2ª edición, Springer-Verlag, 1973.
- [19] Mette S. Olufsen, “Numerical simulation and experimental validation of blood flow in arteries with structures-tree outflow conditions”, *Annals of Biomedical Engineering*, Vol. **28**, 1281-1299 (2000).
- [20] Sergio Gallegos Cazares, “Análisis estructural mediante el método de elementos finitos”, Apuntes, 2006.
- [21] Frank M. White, “Fluid mechanics”, Fourth edition, McGraw-Hill, 1999.
- [22] Charles A. Taylor, Irene E. Vignon, “Outflow boundary conditions for one-dimensional finite element modeling of blood flow and pressure waves in arteries”, *Wave Motion*, **39**, 361-374 (2004).
- [23] Robert D. Cook et al, “Concepts and applications of finite element analysis”, Fourth edition, John Wiley & Sons, Inc, 2002.
- [24] Eugenio Oñate, “Possibilities of finite calculus in computational mechanics”, 2003, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, **60**:255-281 (2004).

- [25] Merle C. Potter & David C. Wiggert, “Mechanics of fluids”, Second edition, Prentice Hall, 1997.
- [26] Ivan Alberto Pulido Banda, “Análisis de fluidos mediante una formulación Lagrangiana”, Tesis, 2004.
- [27] Charles A. Taylor, “Simulation-based medical planning for cardiovascular disease”, *Computer Aided Surg*, **5: 2**: 82-9 (2000).
- [28] O.C. Zienkiewicz & R.L. Taylor, “The finite element method”, Fifth edition, Oxford, 2000.
- [29] G. Thomas Mase & George E. Mase, “Continuum mechanics for engineers”, Second edition, CRC Press, 1999.
- [30] David A. Steinman, “Image-based computational fluid dynamics modeling in realistic arterial geometries”, *Annals of Biomedical Engineering*, Vol. **30**, 483-497 (2002).
- [31] Charles A. Taylor et al, “Improving geometric model construction for blood flow modeling”, *IEEE Eng Med Biol Mag*, **18: 6**: 33-9 (1999).
- [32] <http://grus.berkeley.edu/~jrg/ay202/node3.html>