

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS
SUPERIORES DE MONTERREY

CAMPUS MONTERREY

DIVISION DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
PROGRAMA DE GRADUADOS EN INGENIERIA



TECNOLÓGICO
DE MONTERREY

DETERMINACION DE LAS ZONAS DE ESTABILIDAD EN
OPERACIONES DE CORTE ORTOGONAL USANDO
LA FUNCION DE LAMBERT

TESIS

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS
CON ESPECIALIDAD EN SISTEMAS DE MANUFACTURA

POR:

EVA MARIA SALOME DELGADILLO MOLINA

MONTERREY, N. L.

AGOSTO DE 2005

**INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS
SUPERIORES DE MONTERREY**

CAMPUS MONTERREY

**DIVISION DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
PROGRAMA DE GRADUADOS EN INGENIERIA**



**TECNOLÓGICO
DE MONTERREY**

**DETERMINACION DE LAS ZONAS DE ESTABILIDAD EN
OPERACIONES DE CORTE ORTOGONAL USANDO
LA FUNCION DE LAMBERT**

T E S I S

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE:**

MAESTRO EN CIENCIAS

CON ESPECIALIDAD EN SISTEMAS DE MANUFACTURA

POR:

EVA MARIA SALOME DELGADILLO MOLINA

MONTERREY, N. L.

AGOSTO DE 2005

**INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS
SUPERIORES DE MONTERREY**

CAMPUS MONTERREY

**DIVISIÓN DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA
PROGRAMA DE GRADUADOS EN INGENIERÍA**



**TECNOLÓGICO
DE MONTERREY®**

**DETERMINACIÓN DE LAS ZONAS DE ESTABILIDAD EN
OPERACIONES DE CORTE ORTOGONAL USANDO
LA FUNCIÓN DE LAMBERT**

TESIS

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA
OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
CON ESPECIALIDAD EN SISTEMAS DE MANUFACTURA**

POR:

EVA MARÍA SALOMÉ DELGADILLO MOLINA

MONTERREY, N.L.

AGOSTO DE 2005

DEDICATORIA

A mis abuelitas Cruz y Lola por todo su cariño.

A mis padres, María Francisca Molina y Francisco Delgadillo por estar siempre conmigo y apoyarme incondicionalmente en el logro de mis metas personales y profesionales.

A mis hermanos Irene y Paco y mi cuñado Tavo por ser ejemplo de superación y porque en todo momento me mostraron su apoyo.

A Víctor por los ánimos y sus palabras de aliento para seguir adelante.

AGRADECIMIENTOS

A mi asesor, Dr. Alex Elías por la confianza depositada en mí desde que inicié la maestría, por su dedicación y apoyo en el desarrollo de esta tesis.

Al Dr. Ciro Rodríguez por la oportunidad de participar en uno de sus proyectos de investigación.

Al Ing. Abiud Flores por su guía, consejos y apoyo para enriquecer este trabajo.

Al Dr. Horacio Ahuett por su participación como sinodal de esta tesis y por su enseñanza desde la carrera.

A los profesores del Departamento de Ingeniería Mecánica del ITESM por su disposición y trato amable durante mis estudios.

A Víctor Flores por su valiosa colaboración y a mis compañeros y amigos, Gabriel Soto, Francisco Jasso, David Reyes, Francisco Araya, Alex Martínez, Víctor Dávila, Samantha Rodríguez, Gloria López, Stephania Poulis, Ana Laura y Rociohelí, por todos los momentos agradables que pasamos dentro y fuera del Laboratorio de Mecánica.

Quiero agradecer también a Kathia, Lissi, Paco y Memo Monroy, Vane, Raúl y Pepe por su amistad y por tantos recuerdos divertidos a su lado.

RESUMEN

El presente trabajo de tesis está enfocado a investigar la aplicación del método desarrollado por Asl y Ulsoy para obtener los lóbulos de estabilidad en operaciones de maquinado en corte ortogonal y torneado. También, se desarrollan las expresiones matemáticas en las que se incluyen los efectos de desgaste de la herramienta y la fuerza de Coriolis. Además se presenta el desarrollo del procedimiento matemático requerido para obtener las zonas de estabilidad aplicando la función de Lambert. Para comprobar la validez de los resultados obtenidos mediante las soluciones desarrolladas, se comparan las gráficas de estabilidad con aquellas generadas al emplear los métodos clásicos de solución. Los resultados numéricos indican que las gráficas de estabilidad basadas en la función de Lambert tienden a predecir en operaciones de maquinado en corte ortogonal y torneado, mayores profundidades de corte que aquellas obtenidas mediante los métodos clásicos.

PRINCIPALES CONTRIBUCIONES

Las principales aportaciones científicas de la presente tesis son las siguientes:

- I. Extender la aplicación de la función de Lambert a través del método desarrollado por Asl y Ulsoy para determinar las zonas de estabilidad en operaciones de maquinado en corte ortogonal y torneado.
- II. Corrección y solución de las ecuaciones matemáticas utilizadas para modelar los efectos de desgaste de la herramienta y fuerza de Coriolis en operaciones de maquinado.
- III. Derivación de las ecuaciones $\frac{1}{T}W(\Lambda_{11}) = 2\xi\omega_n + k_{fd} + m_f - 2\lambda\Omega$ y $\frac{1}{T}W(\Lambda_{11}) = 2\xi\omega_n$ las cuales permiten establecer la máxima profundidad de corte que puede asignarse a operaciones de maquinado sin generar *chatter* en el sistema.

TABLA DE CONTENIDO

DEDICATORIA	iii
AGRADECIMIENTOS	iv
RESUMEN	v
PRINCIPALES CONTRIBUCIONES	vi
TABLA DE CONTENIDO	vii
ÍNDICE DE FIGURAS	ix
NOMENCLATURA	xi
CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN	13
1.1 Objetivos de la investigación.....	16
1.2 Motivación y Justificación.....	17
1.3 Revisión de la literatura.....	17
CAPITULO 2. ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DEL PROCESO DE MAQUINADO EN CORTE ORTOGONAL	19
2.1 Modelación dinámica del corte ortogonal.....	19
2.2 La Función de LAMBERT	22
Curvas de estabilidad en corte ortogonal.....	23
Procedimiento de solución.	23
2.3 Resultados Numéricos	31
Caso I	32
Caso II	35
CAPITULO 3. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD CONSIDERANDO DESGASTE EN LA HERRAMIENTA Y EL EFECTO DE CORIOLIS	38
3.1 Modelación dinámica del proceso de corte con desgaste en la herramienta.....	39

3.2 Solución de la ecuación (3.12).	44
3.3 Solución de la ecuación de desgaste mediante la función de Lambert.	47
3.4 Resultados Numéricos	48
Caso III	49
Caso IV	50
Caso V	51
CONCLUSIONES	54
TRABAJO A FUTURO	55
BIBLIOGRAFÍA	56
ANEXO A. SOLUCIÓN TRADICIONAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES CON RETRASO (“<i>DELAY</i>”)	58
ANEXO B. Método computacional utilizando la función <i>gap</i>	63
ANEXO C. Artículo	69

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Representación del sistema dinámico de corte ortogonal [14].	19
Figura 2. Diagrama de cuerpo libre de un sistema masa-resorte-amortiguador.....	20
Figura 3. Ramas reales de la función de Lambert, —, $W_0(x)$; ----, $W_{-1}(x)$	28
Figura 4. Lóbulos de estabilidad para un proceso de corte ortogonal con $\zeta=0.01$, $\omega_n=150$ rad/seg y $\mu=1$	33
Figura 5. Lóbulos de estabilidad para corte ortogonal con $\zeta=0.05$, $\omega_n=150$ rad/seg y $\mu=1$	34
Figura 6. Lóbulos de estabilidad para corte ortogonal con $\zeta=0.025$, $\omega_n=84.1$ Hz, $\mu=0.8$, $k=97$ N μ m ⁻¹ y masa total del sistema es $m=346$	36
Figura 7. Representación del sistema dinámico en un proceso de torneado [14].	39
Figura 8. Diagrama del volumen de material removido por debajo de la herramienta [2].	41
Figura 9. Fuerza de contacto resultante del movimiento relativo entre la herramienta y la pieza [2].	42
Figura 10. Aproximación de primer orden de $\frac{e^{-s(\pi 2\omega)}}{1 + e^{-s(\pi \omega)}}$	45
Figura 11. Lóbulos de estabilidad para un proceso de torneado sin considerar desgaste ni efecto de Coriolis, $\theta = 90^\circ$	49
Figura 12. Lóbulos de estabilidad para un proceso de torneado considerando el efecto de Coriolis, $\theta = 30^\circ$	51
Figura 13. Aproximación de Lambert considerando el efecto de Coriolis, sin desgaste (rojo) y con desgaste (azul) en la herramienta.	52
Figura 2A. Gráfica de estabilidad en función de parámetros del sistema.....	62
Figura 2B. Gráfica de la función $gap(\nu)$ para un modelo de un grado de libertad.	67

Figura 3B. Gráfica de estabilidad para un modelo de un grado de libertad
usando la función *gap* 68

NOMENCLATURA

B, A	matrices de coeficientes linearizadas
Λ	matriz diagonalizada de $-ATe^{Bt}$
V	matriz de vectores de $-ATe^{Bt}$
a	profundidad de corte
a_{lim}	límite de corte máximo
c	coeficiente de amortiguamiento
F	fuerza de corte normal
F_{co}	fuerza de Coriolis
F_f, F_x	fuerza de corte en la dirección radial
F_u	fuerza de contacto
$h(t)$	dinámica general del espesor de la viruta
h_0	espesor de viruta programado
k	rigidez de la herramienta
K	razón de rigidez
K_f, k_c	coeficiente de corte en la dirección radial
k_L	rama de la función de Lambert
k_m	rigidez estructural
k_{sp}	fuerza específica de contacto
l_w	longitud de desgaste en la herramienta
m	masa de la herramienta
n	número secuencial
s_l	pendiente de la trayectoria entre la cara de corte y la superficie de la pieza
t	tiempo actual
T	tiempo que tarda en dar una revolución
v	velocidad de corte

V	volumen de material removido
V_f	velocidad de avance
w_d	ancho de corte
$W(x)$	función de Lambert
$x(t)$	desplazamiento en función del tiempo de la herramienta desde la condición de equilibrio
$x(t - T)$	desplazamiento de la herramienta en el tiempo $t - T$,
λ	razón de velocidades radial y tangencial
ω_c	frecuencia de <i>chatter</i>
ω_n	frecuencia natural del sistema
Ω	velocidad de giro, $1/T$
θ	ángulo de inclinación de la cara de corte
μ	factor de traslape
ξ	razón de amortiguamiento del sistema

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

Es bien sabido que un gran número de empresas basan sus procesos de manufactura en operaciones de maquinado para fabricar una amplia variedad de componentes. Por razones económicas, las empresas manufactureras demandan que sus procesos de producción sean eficientes y que los productos sean desarrollados en el menor tiempo posible y que a su vez cumplan con las especificaciones de diseño en cuanto a dimensiones, acabados superficiales y demás. Estos procesos de maquinado involucran una máquina-herramienta como el torno y la fresa, en la cual se sujeta una herramienta y una pieza de trabajo y a su vez se realiza un movimiento relativo entre ambas. Dichas operaciones implican una remoción de material de la pieza de trabajo de manera que el objetivo de producir piezas tan rápido como sea posible se obtiene maximizando la razón de material removido, lo cual puede obtenerse incrementando el tamaño de la viruta que se está retirando o elevando la velocidad de la máquina. También, las empresas están interesadas en operar sus máquinas con el mínimo tiempo muerto para reparaciones o cambios de herramienta y que estas realicen operaciones estables. Sin embargo, en muchas ocasiones no es posible evitar efectos no deseados como las vibraciones las cuales, si no son controladas o eliminadas oportunamente, generan productos de baja calidad ya que en la mayoría de los procesos de maquinado, la herramienta remueve por lo menos una parte de la superficie que fue previamente maquinada. Por lo tanto, si la pieza tiene una superficie ondulada, el espesor de la viruta que se está generando por la herramienta será variable. Esta variación de espesor causará a su vez variaciones en las fuerzas de corte ejercidas en la herramienta por la pieza haciendo oscilar nuevamente a la herramienta. En algunos casos la magnitud de las oscilaciones decaerá con cada paso de la herramienta debido al amortiguamiento en el proceso o estructura. En otros casos, la amplitud de las oscilaciones puede crecer con los siguientes pasos de la herramienta de corte. Este es un tipo de inestabilidad conocido como traqueteo (*chatter* en la literatura escrita en el idioma Inglés), el cual puede ocasionar desgaste prematuro en las herramientas y calidad superficial muy pobre.

Puesto que las marcas severas de *chatter* son difíciles de remover de la pieza, en ocasiones es preferible dejarla como desperdicio y comenzar una nuevamente.

Como resultado de esta problemática, la predicción de las condiciones que generan el *chatter* se ha convertido en un tema importante para la industria manufacturera. El límite de estabilidad es afectado por diversos factores como la profundidad de corte, la geometría de la herramienta, la velocidad de avance así como la rigidez y el amortiguamiento de la máquina-herramienta. Desde el punto de vista de planeación de la producción, las gráficas de estabilidad representan una herramienta muy útil para seleccionar parámetros de corte apropiados que permitan realizar operaciones eficientes de maquinado.

Por otra parte, el *chatter* puede ser modelado matemáticamente mediante ecuaciones diferenciales con retraso (DDE, por sus siglas en inglés), las cuales son un caso especial de las ecuaciones diferenciales llamadas ecuaciones diferenciales funcionales y tienen aplicaciones importantes en problemas físicos en donde una acción pasada altera la respuesta del sistema cuando se intenta repetir esa misma acción. Desde el punto de vista de operaciones de maquinado, puede decirse que en una rotación de la pieza, la viruta que no fue removida por la herramienta genera que las fuerzas de contacto en la rotación siguiente sean diferente de la anterior lo cual dinámicamente genera vibraciones en la máquina [1].

Existen varias técnicas para resolver las DDE dentro de las que destacan las soluciones asintóticas, métodos numéricos o bien, herramientas gráficas. Es conocido que el análisis matemático de las DDE es complicado ya que no existe una solución cerrada al problema que permita describir con precisión el comportamiento cualitativo y cuantitativamente del sistema en estudio. Por ejemplo, se ha encontrado que las gráficas de estabilidad obtenidas por los métodos tradicionales [2,3] para predecir el límite de estabilidad del proceso de maquinado presentan algunas diferencias significativas al comparar sus resultados numéricos con los datos experimentales, lo cual indica que estas soluciones son factibles de mejorarse.

El presente trabajo de tesis revisa la aplicación del procedimiento matemático empleado por Altintas [4], Le-Ngoc [5] y Stepan [6] para obtener la solución de las ecuaciones diferenciales con retraso que modelan las operaciones de maquinado en corte ortogonal así como la metodología citada en dichos artículos para obtener los lóbulos de estabilidad.

Dado que la función de Lambert permite encontrar las soluciones exactas de ecuaciones diferenciales que no pueden resolverse con funciones matemáticas comunes, es importante explorar si empleando dicha función y siguiendo el procedimiento propuesto por Asl y Ulsoy en [7,8], pueden obtenerse nuevas condiciones de estabilidad al considerar efectos tales como el desgaste en la herramienta y la fuerza de Coriolis en las ecuaciones dinámicas desarrolladas por Chiou en [2,3].

1.1 Objetivos de la investigación

Los objetivos del presente trabajo de investigación son:

1. Ampliar la aplicación de la función de Lambert para obtener la solución de las ecuaciones diferenciales con retraso que modelan las operaciones de maquinado en corte ortogonal.
2. Comparar las gráficas de estabilidad que se obtienen al emplear la función de Lambert (a través del método de Asl y Ulsoy) con aquellas obtenidas empleando la solución clásica de Tobias (de aquí en adelante denominada la solución tradicional).
3. Establecer, a partir de la solución basada en la función de Lambert, las condiciones de estabilidad para los procesos de maquinado de torneado y de corte ortogonal.
4. Corregir el modelo matemático desarrollado por Chiou en el cual se consideran los efectos de desgaste de la herramienta y de la fuerza de Coriolis. Además, se obtendrán las correspondientes gráficas de estabilidad mediante el empleo de la función de Lambert.

1.2 Motivación y Justificación

Debido a la importancia de conocer con mayor precisión la capacidad de producción de las máquinas-herramienta para cumplir con ciertos requerimientos de tiempo y calidad surge la necesidad de contar con centros de maquinado que incorporen algoritmos de control capaces de detectar por si mismos la presencia de *chatter* en el proceso y que además puedan reajustar los parámetros como la velocidad de giro o la profundidad de corte.

Para que los centros de maquinado lleguen a este grado de automatización se requiere de nuevos modelos matemáticos que entre otros factores, permitan conocer los límites de estabilidad de una manera más exacta.

Por lo tanto, haciendo uso de la función de Lambert se busca presentar un nuevo modelo que permita predecir las zonas de estabilidad de los procesos de corte ortogonal en forma diferente a la solución tradicional.

1.3 Revisión de la literatura

La modelación matemática del problema de *chatter* se remonta a los años 50, cuando la teoría de las DDE iniciaba su desarrollo en las matemáticas. Desde entonces, las investigaciones realizadas por investigadores como Tobias [9] se han mantenido como referencia principal para los métodos de solución de la ecuación de *chatter*.

En la literatura es posible hallar un sinnúmero de ecuaciones matemáticas que son empleadas para caracterizar la dinámica del proceso de maquinado. Algunos investigadores han incluido en dichas ecuaciones efectos no lineales los cuales pueden estar relacionados con la rigidez del sistema máquina-herramienta-pieza de trabajo.

Una recopilación de los diversos trabajos de investigación que se han desarrollado para estudiar la respuesta dinámica de las operaciones de maquinado en corte ortogonal fue realizada por Thomas [10]. En esta referencia se citan los trabajos desarrollados por autores como Tlustý y Stepan entre otros.

La aplicación de la función de Lambert [11,12] para la solución de DDE es de particular interés para el estudio de la dinámica de las máquinas-herramientas a partir de que esta función satisface $W(x)e^{W(x)} = x$. En este contexto, Chen y Moore han desarrollado la solución analítica para encontrar los límites de estabilidad de DDE lineales de segundo orden con polos repetidos [13].

Además, el concepto de la matriz de transición en ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE) puede ser generalizado para las DDE usando la función de Lambert. La simplicidad de esta aproximación, comparada con otras técnicas de solución analíticas, radica fundamentalmente en que el procedimiento de solución de las DDE es análogo al que se sigue durante la obtención de la solución general de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Basados en esta idea, Asl y Ulsoy introdujeron el uso de la función de Lambert para obtener las zonas de respuesta estable de la ecuación diferencial con retraso que se emplea para estudiar las vibraciones que aparecen durante operaciones de maquinado en corte ortogonal [7,8].

En el presente trabajo se investiga la extensión del procedimiento desarrollado por Asl y Ulsoy, el cual está basado en la función de Lambert, para obtener los lóbulos de estabilidad y como la variación en el valor de los parámetros de maquinado alteran la estabilidad del sistema.

CAPITULO 2. ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DEL PROCESO DE MAQUINADO EN CORTE ORTOGONAL

Este capítulo estará enfocado a modelar y estudiar el comportamiento dinámico de los procesos de maquinado realizados comúnmente en corte ortogonal. Esta operación tiene gran relevancia industrial debido a que el desarrollo de productos involucran operaciones de maquinado de esta naturaleza. Por otro lado, es conocido que durante dichas operaciones se generan comportamientos dinámicos inestables cuando los parámetros de corte se modifican. Por esta razón es importante conocer la relación que existe entre estos ya que esto permite generar mecanismos de control para garantizar operaciones de maquinado eficientes.

A continuación se procederá con la derivación del modelo matemático que describe el comportamiento físico del proceso de corte ortogonal. La segunda parte del capítulo será enfocada a analizar la solución de las ecuaciones dinámicas resultantes mediante la función de Lambert.

2.1 Modelación dinámica del corte ortogonal.

Este proceso de corte se ilustra en la Figura 1 en la cual se supone por simplicidad que el modelo de comportamiento dinámico del mismo puede ser representado como un sistema dinámico de un grado de libertad [14].

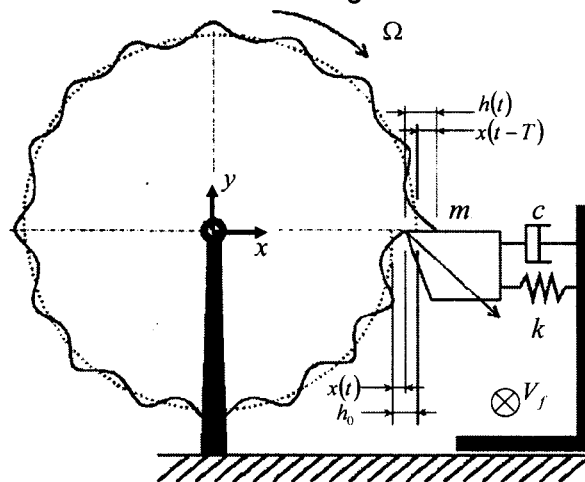


Figura 1. Representación del sistema dinámico de corte ortogonal [14].

Para derivar la ecuación de movimiento, se procede a dibujar el diagrama de cuerpo libre del sistema mostrado en la Figura 1. Advierta, en la Figura 2, que en este diagrama de cuerpo libre están incluidas las fuerzas que actúan en la herramienta así como el efecto de las fuerzas que se generan durante el contacto herramienta-pieza de trabajo.

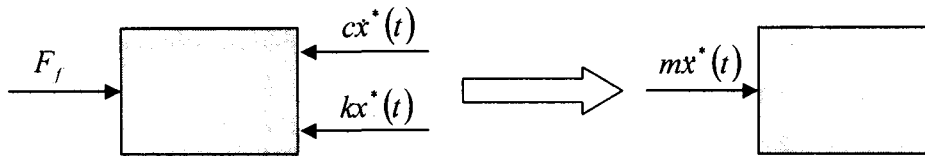


Figura 2. Diagrama de cuerpo libre de un sistema masa-resorte-amortiguador.

A partir del diagrama de cuerpo libre mostrado en la Figura 2 y empleando la segunda Ley de Newton, se obtiene la siguiente ecuación de movimiento para la herramienta:

$$m\ddot{x}^*(t) + c\dot{x}^*(t) + kx^*(t) = F_f(t) = K_f ah(t), \quad (1.1)$$

en la que m representa la masa, c es el coeficiente de amortiguamiento y k es la rigidez. K_f representa el coeficiente de corte en la dirección radial, a es el ancho de corte ("depth of cut"), F_f es la componente radial de la fuerza de corte, y $h(t)$ es un parámetro que está relacionado con el espesor de la viruta y que describe la cantidad de la misma que no fue removida por la herramienta en una revolución previa de la pieza de corte. Su ecuación viene dada como:

$$h(t) = h_0 - [x^*(t) - \mu x^*(t - T)], \quad (1.2)$$

en la que h_0 representa el espesor de la viruta el cual es igual a la alimentación programada de la máquina, $x^*(t) - \mu x^*(t - T)$ es el espesor dinámico resultante de la viruta generado por las vibraciones actuales, en el tiempo t , y por las producidas durante la revolución previa de la pieza, durante el periodo T (conocido también retraso) y μ es el factor de traslape, el cual representa físicamente la proporción que cubren los cortes subsecuentes.

En el caso de fresado, la mayoría del material de la viruta es removido por el segundo diente de la herramienta por lo cual el factor de traslape puede tomar valores menores a 1. Sin embargo, para el análisis estándar de las vibraciones de *chatter* este valor es considerado igual a 1 [6].

Sustituyendo la ecuación (1.2) en la ecuación (1.1), se obtiene

$$m\ddot{x}^*(t) + c\dot{x}^*(t) + kx^*(t) = K_f a [h_0 - x^*(t) + \mu x^*(t - T)]. \quad (1.3)$$

Esta ecuación (1.3) puede escribirse de forma diferente si todos los términos de la misma se dividen por m , esto es:

$$\ddot{x}^*(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}^*(t) + x^*(t)\omega_n^2(1 + K) = C + K\omega_n^2\mu x^*(t - T), \quad (1.4)$$

en la que

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}; \quad 2\xi\omega_n \equiv \frac{c}{m}; \quad K \equiv \frac{K_f a}{k}; \quad C \equiv \frac{K_f a h_0}{m}. \quad (1.5)$$

Aquí, ξ representa la relación de amortiguamiento, ω_n es la frecuencia natural del sistema, K es la razón de rigidez y C es una constante. Si se hace el cambio de variable $x(t) = x^*(t) - C/\omega_n^2$ la ecuación (1.4) puede ser escrita como:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + x(t)\omega_n^2(1 + K) = K\omega_n^2\mu x(t - T) \quad (1.6)$$

la cual es la ecuación que comúnmente se emplea para modelar el comportamiento dinámico en corte ortogonal [4]. Con algunas modificaciones, la ecuación (1.6) permite incorporar los efectos de desgaste en la herramienta de corte como se muestra en [2,3]. Estos serán analizados en el Capítulo 3 del presente trabajo.

A continuación se procede a desarrollar la solución de la ecuación (1.6) empleando la función de Lambert para posteriormente en la sección 2.3 comparar esta solución con la llamada solución tradicional desarrollada en el Anexo A del trabajo.

2.2 La Función de LAMBERT

Introducción.

Como la mayoría de las funciones propuestas para obtener la solución analítica de las ecuaciones diferenciales con retraso están basadas en funciones exponenciales, la función de Lambert W adquiere una gran relevancia debido a que por definición ésta satisface la relación:

$$W(x)e^{W(x)} = x \quad (2.1)$$

Esta función ha sido aplicada con éxito para resolver en forma exacta ecuaciones diferenciales que modelan diversos problemas de la física-matemática [11,12]. En este contexto, puede demostrarse que la función de Lambert puede ser empleada para obtener en forma exacta los límites de comportamiento estable de la ecuación (1.6) siempre y cuando las raíces de su ecuación característica sean repetidas [13]. En otras palabras siempre y cuando $\omega_n^2 = 2\xi\omega_n / 4$. Como podrá verse, esta condición difícilmente se cumple cuando se establecen los valores de los parámetros para un cierto proceso de maquinado en corte ortogonal. Sin embargo, y motivados por la posibilidad de obtener límites de estabilidad más precisos que los generados por otros métodos, a continuación detallaremos la aplicación de la función de Lambert para obtener los límites de estabilidad de la ecuación (1.6).

Este análisis permitirá definir bajo que condiciones, el proceso de corte ortogonal es óptimo; esto es, bajo que condiciones es posible especificar una mayor profundidad de corte en la pieza de trabajo sin que se presente *chatter*.

Curvas de estabilidad en corte ortogonal.

En esta parte del presente trabajo, se describe el método desarrollado por Asl y Ulsoy [7] en el que mediante la aplicación de la función de Lambert se pueden establecer los límites analíticos de las curvas de estabilidad de ecuaciones diferenciales con retraso (DDE). La ventaja de este método comparado con otros, según Asl y Ulsoy, consiste en que la forma de la solución generada es semejante a la solución general obtenida en ecuaciones diferenciales ordinarias por lo que el concepto de la matriz de transición aplicado a estas ecuaciones puede extrapolarse a las DDE. Cabe destacar que aunque Asl y Ulsoy ya emplearon su método para determinar las curvas de estabilidad en operaciones de maquinado, en los artículos publicados por ambos autores los valores de los parámetros empleados no se corresponden con casos prácticos. En este contexto, aquí presentaremos diversos casos en los que mostraremos las curvas de estabilidad empleando la función de Lambert para bajas y altas velocidades de operación con valores de los parámetros más cercanos a aplicaciones de manufactura de corte ortogonal. Los resultados encontrados nos llevarán a establecer las diferencias en las regiones de estabilidad que tiene este procedimiento comparado con otros tradicionales.

Procedimiento de solución.

El primer paso en la aplicación de la función de Lambert para establecer los límites de estabilidad de la ecuación (1.6), consiste en representar esta ecuación en espacio de estado y después escribirla en forma matricial; esto es:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\mu K \omega_n^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t-T) \\ x_2(t-T) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ (1+K)\omega_n^2 & 2\xi\omega_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.2)$$

donde $\dot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t)$ y $\dot{x}_2(t) = \dot{x}_1(t)$; o bien como:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{Ax}(t-T) + \mathbf{Bx}(t) = 0, \quad (2.3)$$

en la que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\mu K \omega_n^2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ (1+K)\omega_n^2 & 2\xi\omega_n \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Suponiendo una solución del tipo $\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}e^{st}$ donde \mathbf{c} es un vector de constantes y s es un exponente característico, y sustituyendo esta solución en la ecuación (2.3), se genera la siguiente ecuación característica:

$$s\mathbf{I} + \mathbf{A}e^{-sT} + \mathbf{B} = 0, \quad (2.5)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad. Si se multiplican ambos lados de la ecuación (2.5) por T , se tiene:

$$(sT)\mathbf{I}e^{sT} = (-\mathbf{A})T - \mathbf{B}Te^{sT}. \quad (2.6)$$

De las propiedades de matrices, es fácil demostrar que

$$\mathbf{I}(e^{sT}) = e^{(sT)\mathbf{I}}; \quad \mathbf{A}(e^{sT}) = \mathbf{A}e^{sT} = \mathbf{A}e^{(sT)\mathbf{I}}. \quad (2.7)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.7) en la ecuación (2.6), se obtiene

$$(sT)\mathbf{I}e^{(sT)\mathbf{I}} = (-\mathbf{A})T - \mathbf{B}Te^{sT} \quad (2.8)$$

y por lo tanto

$$(s\mathbf{I} + \mathbf{B})Te^{(sT)\mathbf{I}} = (-\mathbf{A})T. \quad (2.9)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación (2.9) por $e^{\mathbf{B}T}$ se tiene:

$$(s\mathbf{I} + \mathbf{B})Te^{(s\mathbf{I} + \mathbf{B})T} = (-\mathbf{A})Te^{\mathbf{B}T}. \quad (2.10)$$

Advierta que la ecuación (2.10) sigue la definición de Lambert, ecuación (2.1), por lo que esta puede ser escrita en forma equivalente como

$$(s\mathbf{I} + \mathbf{B})T = \mathbf{W}(-\mathbf{A}Te^{\mathbf{B}T}), \quad (2.11)$$

en la que $\mathbf{W}(-\mathbf{A}T e^{\mathbf{B}T})$ es una matriz cuadrada de 2×2 . Advierta que las raíces de la ecuación característica (2.11) proporcionan las condiciones del comportamiento dinámico del sistema, esto es, si el sistema tiene comportamiento estable o inestable. Por lo tanto, es de interés para el análisis que se está realizando determinar las raíces características y con ello conocer los límites entre ambas regiones, lo cual se puede lograr a través de la siguiente ecuación:

$$s\mathbf{I} = \frac{1}{T} \mathbf{W}(-\mathbf{A}T e^{\mathbf{B}T}) - \mathbf{B}. \quad (2.12)$$

Si se supone que s es una variable compleja dada por $s = \alpha + j\omega_c$, entonces el comportamiento del sistema puede resumirse en los siguientes casos:

Caso		Observación
1	$\alpha > 0$	Si la parte real es positiva, las vibraciones de <i>chatter</i> crecerán indefinidamente y el sistema será inestable.
2	$\alpha < 0$	Una raíz real negativa indica que el sistema es estable.
3	$\alpha = 0$	Cuando la parte real es cero, el sistema es críticamente estable y se encuentra oscilando con una frecuencia de <i>chatter</i> ω_c .

También, es posible determinar las zonas de estabilidad del sistema haciendo uso del determinante de la ecuación (2.12)

$$\det\left(s\mathbf{I} - \frac{1}{T} \mathbf{W}(-\mathbf{A}T e^{\mathbf{B}T}) + \mathbf{B}\right) = 0. \quad (2.13)$$

El procedimiento para aplicar la función de Lambert a la matriz $-\mathbf{A}T e^{\mathbf{B}T}$ en las ecuaciones (2.12) y (2.13), esto es $\mathbf{W}(-\mathbf{A}T e^{\mathbf{B}T})$, se simplifica si se obtiene la matriz diagonal de $-\mathbf{A}T e^{\mathbf{B}T}$ la cual será representada por la matriz Λ .

$$\mathbf{W}(-\mathbf{A}T e^{\mathbf{B}T}) = \mathbf{V} \mathbf{W}(\Lambda) \mathbf{V}^{-1}, \quad (2.14)$$

donde V es una matriz invertible compuesta por los vectores característicos.

Por conveniencia, el procedimiento para determinar $W(-\mathbf{A}Te^{\mathbf{B}T})$ se detalla a continuación.

En general, las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} en los problemas de corte ortogonal descritos por la ecuación (2.4) tienen la forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

en las que

$$a_{21} = -\mu K \omega_n^2; \quad b_{12} = -1; \quad b_{21} = (1 + K) \omega_n^2; \quad b_{22} = 2\xi \omega_n. \quad (2.16)$$

Puesto que T es un escalar, entonces se puede suponer que el término $Te^{\mathbf{B}T}$ es igual a

$$Te^{\mathbf{B}T} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

en la que

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{R \left[e^{\frac{1}{2}(b_{22}+R)T} + e^{\frac{1}{2}(b_{22}-R)T} \right] + b_{22} \left[e^{\frac{1}{2}(b_{22}-R)T} - e^{\frac{1}{2}(b_{22}+R)T} \right]}{2R} T; \\ E_{12} &= \frac{-b_{12} \left[e^{\frac{1}{2}(b_{22}-R)T} - e^{\frac{1}{2}(b_{22}+R)T} \right]}{R} T; \\ E_{21} &= \frac{-b_{21} \left[e^{\frac{1}{2}(b_{22}-R)T} - e^{\frac{1}{2}(b_{22}+R)T} \right]}{R} T; \\ E_{22} &= \frac{R \left[e^{\frac{1}{2}(b_{22}+R)T} + e^{\frac{1}{2}(b_{22}-R)T} \right] - b_{22} \left[e^{\frac{1}{2}(b_{22}-R)T} - e^{\frac{1}{2}(b_{22}+R)T} \right]}{2R} T; \\ R &= b_{22}^2 + 4b_{12}b_{21} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Multiplicando Te^{BT} por la matriz de coeficientes A , se obtiene lo siguiente

$$-ATE^{BT} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{21}E_{11} & a_{21}E_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Por lo tanto, los valores característicos de la matriz dada en (2.19) pueden calcularse a partir del siguiente determinante:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{21}E_{11} & a_{21}E_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (2.20)$$

Desarrollando el determinante, los siguientes valores característicos de la matriz $-ATE^{BT}$ corresponden a:

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = a_{21}E_{12}. \quad (2.21)$$

El siguiente paso consiste en encontrar los vectores característicos de la matriz $-ATE^{BT}$ empleando los valores característicos λ_1 y λ_2 mediante la siguiente ecuación

$$\left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{21}E_{11} & a_{21}E_{12} \end{bmatrix} - \lambda_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

lo cual genera la matriz de los vectores característicos V dada por

$$V = \begin{bmatrix} 0 & E_{12} & E_{11} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Advierta que la inversa de la matriz V es

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 1 \\ E_{11} & E_{12} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

por lo que la matriz diagonal de $-ATE^{BT}$ está dada por

$$\Lambda = V^{-1}(-ATE^{BT})V = \begin{bmatrix} E_{11}/E_{12} & 1 \\ E_{11}/E_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{21}E_{11} & a_{21}E_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & E_{12} & E_{11} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

en la que $\Lambda_{11} = a_{21}E_{12}$.

Por lo tanto, la función de Lambert aplicada a la matriz diagonal Λ genera

$$W_{k_L}(\Lambda) = \begin{bmatrix} W_{k_L}(\Lambda_{11}) & W_{k_L}(0) \\ W_{k_L}(0) & W_{k_L}(0) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

en la que el subíndice k_L representa un número real ($k_L = -\infty \dots \infty$) el cual se corresponde con el valor de la rama de la función de Lambert que se desee calcular. Este valor se deriva de la definición del logaritmo complejo $p = \log z$ [11]. Adverta que si se emplea el procedimiento descrito anteriormente a la matriz resultante $-\mathbf{A}T e^{\mathbf{B}T}$ es posible verificar que la siguiente igualdad se cumple: $W_{k_L}(-\mathbf{A}T e^{\mathbf{B}T}) e^{W_{k_L}(-\mathbf{A}T e^{\mathbf{B}T})} = -\mathbf{A}T e^{\mathbf{B}T}$. Además, la evaluación numérica de la función de Lambert con diferentes ramas depende del valor del argumento de $W(x)$. Si x es real, entonces para $-1/e \leq x < 0$ existen dos posibles valores reales de $W(x)$ como se muestra en la Figura 3.

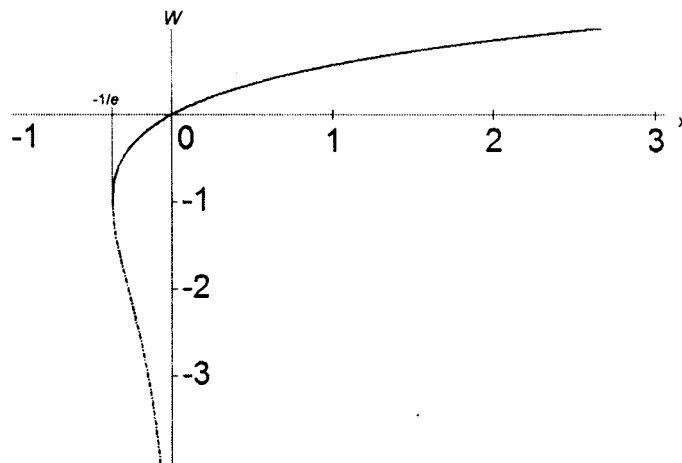


Figura 3. Ramas reales de la función de Lambert, —, $W_0(x)$; ----, $W_{-1}(x)$

Se denomina $W_{-1}(x)$ a la rama que satisface $W(x) < -1$ y $W_0(x)$ o simplemente $W(x)$ a la rama que cumple con $-1 \leq W(x)$. A la rama $k_L = 0$ se le conoce como rama principal.

En el caso particular de $x = 0$, la función de Lambert es analítica para la rama principal, $k_L = 0$, y por lo tanto su valor es $W(0) = 0$. Sin embargo, para casos en los que se emplea una rama diferente de la principal, esto es $k_L \neq 0$, la función de Lambert toma valores de infinito, esto es, $W_{k_L}(0) = \pm\infty$.

Considerando solo la rama principal de la función de Lambert y al evaluar la matriz diagonal dada por la ecuación (2.26), se puede observar que en dicha matriz, tres de sus elementos son cero, esto es:

$$W(\Lambda) = \begin{bmatrix} W(\Lambda_{11}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

De esta forma, al sustituir las matrices correspondientes en la ecuación (2.12), se tiene que

$$\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \frac{1}{T} \begin{bmatrix} W(\Lambda_{11}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.28)$$

La ecuación (2.28), se puede simplificar llegando a la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} s - \frac{1}{T}W(\Lambda_{11}) & b_{12} \\ b_{21} & s + b_{22} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.29)$$

Por lo tanto, las raíces características de la ecuación (2.12) que representan las condiciones dinámicas del sistema se pueden obtener a través del determinante de la matriz (2.29), el cual al desarrollarse queda expresado como un polinomio de segundo orden dado por:

$$s^2 + \left(b_{22} - \frac{1}{T}W(\Lambda_{11}) \right) s + \left(-\frac{1}{T}W(\Lambda_{11})b_{22} - b_{21}b_{12} \right) = 0, \quad (2.30)$$

cuyas raíces están dadas por:

$$s = \frac{-P \pm \sqrt{P^2 - 4Q}}{2} \quad (2.31)$$

en la que

$$P = \left(b_{22} - \frac{1}{T} W(\Lambda_{11}) \right); \quad Q = \left(-\frac{1}{T} W(\Lambda_{11}) b_{22} - b_{21} b_{12} \right). \quad (2.32)$$

Debido a que los puntos críticos de estabilidad se presentan cuando la parte real de las raíces características es cero, lo que se busca es determinar para que valores de los parámetros del sistema se cumple la condición $P = 0$: eso es

$$b_{22} - \frac{1}{T} W(\Lambda_{11}) = 0, \quad (2.33)$$

por lo tanto, la condición que permite conocer los límites de estabilidad del sistema empleando la función de Lambert y usando la metodología propuesta por Asl y Ulsoy, es la siguiente

$$\frac{1}{T} W(\Lambda_{11}) = 2\xi\omega_n, \quad (2.34)$$

en la que de acuerdo a la ecuación (2.16)₄ $b_{22} = 2\xi\omega_n$. Recordando la ecuación (1.5)₃ y observando la ecuación (2.34), resulta evidente que el límite de estabilidad en corte ortogonal está relacionado directamente con la profundidad de corte a del material. Cabe mencionar que la condición (2.34) es válida para cualquier proceso de maquinado en el que sus características dinámicas estén matemáticamente descritas por una ecuación semejante a la ecuación (2.3) y en la que las matrices **A** y **B** tengan la forma descrita por la ecuación (2.4). Es importante destacar que la condición de estabilidad descrita por la ecuación (2.34) para corte ortogonal es diferente a la condición tradicional publicada por diversos autores como Merrit [15] la cual establece que el límite de corte máximo posible se puede encontrar igualando a cero la parte real de la ecuación característica, expresado por la ecuación:

$$a_{\text{lim}} = \frac{-1}{2K_f G(\omega_c)}, \quad (2.35)$$

en la que a_{lim} representa la máxima profundidad de corte máximo que puede asignarse para garantizar operaciones de maquinado estables, K_f representa la constante de corte en la dirección de la alimentación, $G(\omega_c)$ es la parte real de la función de transferencia del sistema y ω_c es la frecuencia de *chatter*.

En la siguiente sección, se comparan los lóbulos de estabilidad generados mediante el uso función de Lambert y los obtenidos mediante el método tradicional [5] para diversos valores de los parámetros del sistema.

2.3 Resultados Numéricos

En esta sección se procede a la comparación de la solución de la ecuación (2.3) obtenida mediante la función de Lambert con la solución tradicional siguiendo el procedimiento de Le-Ngoc [5] para predecir las zonas de estabilidad en el proceso de maquinado de corte ortogonal. Cabe mencionar que los detalles relacionados con la solución de la ecuación (2.3) empleando el método tradicional se presenta en el Anexo A.

Las representaciones gráficas de las zonas de estabilidad que se encuentran en la literatura para los procesos de corte relacionan parámetros que corresponden a la máquina-herramienta con parámetros propios de la operación por lo que es común encontrar gráficas que relacionen la profundidad de corte, o la razón de rigidez con la velocidad de corte en pies por minuto (*fpm*) o bien, con la velocidad de giro, ya sea en revoluciones por segundo (RPS) o revoluciones por minuto (RPM).

Se verá en los casos que se presentan a continuación que algunas gráficas relacionan la razón de rigidez con la velocidad de giro en RPS y otras relacionan la razón de rigidez con la velocidad de corte en *fpm* . Para propósitos de análisis, ambas gráficas proporcionan condiciones del sistema en los cuales un proceso de corte ortogonal puede trabajar libre de *chatter*, es decir, en condiciones estables.

Caso I

Este caso tienen el propósito fundamental de comparar los resultados numéricos obtenidos mediante la solución desarrollada aquí con los publicados por Asl y Ulsoy [7]. Sin embargo, y para corroborar la validez de nuestros resultados numéricos, en primer instancia procederemos a comparar los lóbulos de estabilidad obtenidos empleando la ecuación (2.12) con aquellos generados por el método tradicional¹. Para esto se consideran los siguientes valores de $\xi = 0.01$ y $\omega_n = 150$ rad/seg. De los resultados mostrados en la Figura 4, se puede concluir que la gráfica de estabilidad obtenida con la función de Lambert genera el mismo valor mínimo para la razón de rigidez K que el obtenido mediante la solución tradicional. También se observa que los lóbulos de estabilidad obtenidos mediante la ecuación (2.34) predicen fronteras más estrechas que las generadas al emplear las ecuaciones (A10) y (A11) de la solución tradicional. Desafortunadamente, no se tiene suficiente evidencia experimental para determinar cual método es el de mejor predicción.

¹ Por conveniencia en el Anexo B se detalla el método *gap* el cual se basa en un algoritmo computacional. Este método genera resultados similares a los obtenidos por la aproximación tradicional.

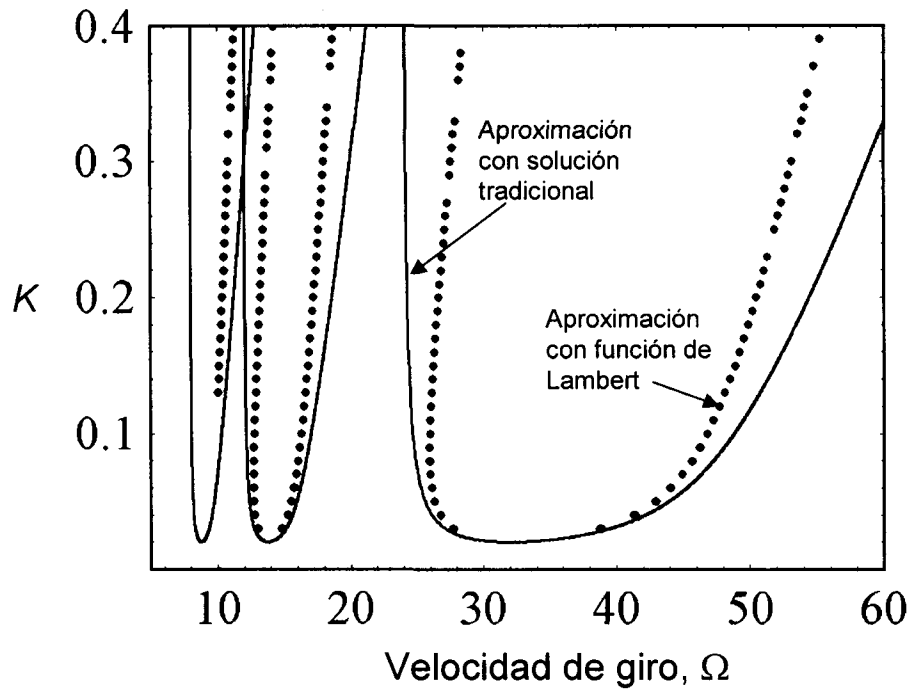


Figura 4. Lóbulos de estabilidad para un proceso de corte ortogonal con $\zeta=0.01$, $\omega_n=150$ rad/seg y $\mu=1$.

Considerando ahora los parámetros $\xi = 0.05$ y $\omega_n = 150$ rad/seg, los cuales se corresponden con los valores utilizados por Asl y Ulsoy en [7], las gráficas de estabilidad generadas por la ecuación (2.34) y la ecuaciones (A10) y (A11) presentan ahora una mayor discrepancia entre si, tal y como se ilustra en la Figura 5. En esta Figura 5, se puede apreciar que el valor mínimo para la razón de rigidez K obtenido mediante la solución con la función de Lambert es mayor comparado con el valor que genera la solución tradicional. Nuevamente la zona de inestabilidad según la solución con la función de Lambert, es más reducida que la estimada por la solución tradicional. Los lóbulos de estabilidad de Lambert mostrados en la Figura 5, tienen valores diferentes que los mostrados en la Figura 9 del artículo publicado por Asl y Ulsoy [7]. En dicha figura se aprecia una menor discrepancia entre los lóbulos de estabilidad obtenidos mediante ambas aproximaciones.

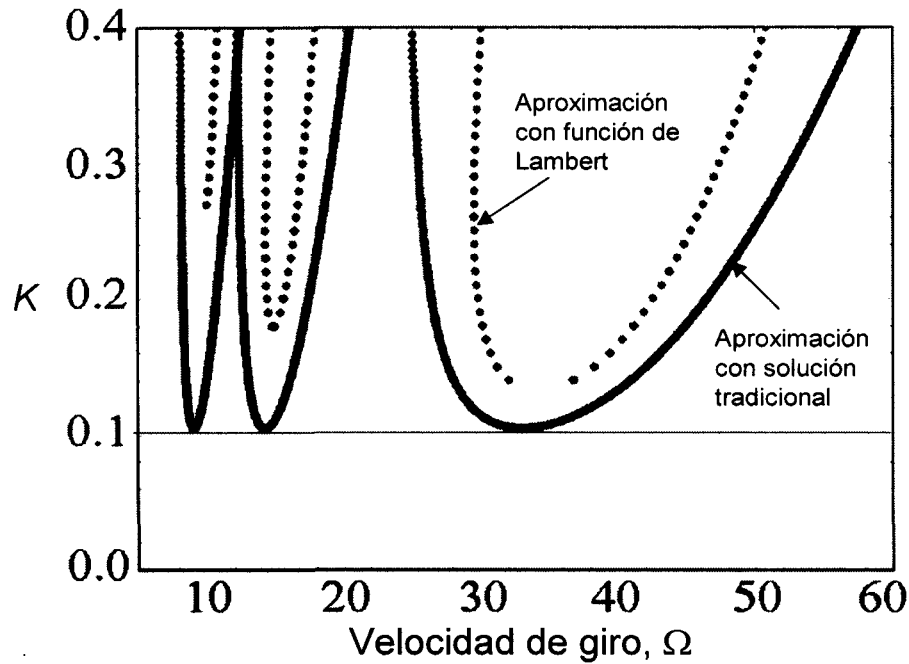


Figura 5. Lóbulos de estabilidad para corte ortogonal con $\zeta=0.05$, $\omega_n=150$ rad/seg y $\mu=1$.

La diferencia mostrada entre las Figuras 5 y 9 puede deberse al método numérico empleado por Asl y Ulsoy para obtener los lóbulos. Sin embargo, los puntos de estabilidad obtenidos para la ramas $k_L = 1$ y $k_L = -1$ por Asl y Ulsoy a nuestro juicio, representan un error de apreciación por parte de dichos autores ya que $W_{-1}(0) = \infty$ y $W_1(0) = \infty$ lo cual genera que no existan valores característicos con raíces cuya parte real sea negativa o cero. En otras palabras, no es posible generar lóbulos de estabilidad empleando la función de Lambert para ramas diferentes de la principal si el argumento es cero.

También, se observa en la Figura 5 que no existe ningún desfaseamiento relacionado con la velocidad de giro, y que mientras va incrementando la razón de amortiguamiento, el valor mínimo de la razón de rigidez es mayor con la función de Lambert, lo cual y según la solución obtenida mediante la función de Lambert, haría posible que en un proceso de corte ortogonal se especificaran profundidades de corte mayor que aquellas estimadas por la solución tradicional. Además, los lóbulos de estabilidad generados con la función de Lambert predicen regiones más amplias de comportamiento estable a bajas velocidades de operación. Desde el punto de vista práctico, no nos fue posible comprobar experimentalmente estos resultados debido a la falta de equipo de medición.

Caso II

En este caso se estudia el efecto que el factor de traslape μ ($\mu \leq 1$) tiene en la estabilidad de ecuación (2.3). Como se mencionó previamente, el factor de traslape es considerado en la mayoría de las soluciones tradicionales con valor $\mu = 1$. Sin embargo hay operaciones de corte en las que μ adquiere valores diferentes de la unidad. Por ejemplo, en los estudios realizados por Stepan en [3] encontró que al considerar su valor real los límites de estabilidad tienen a ser mayores entre un 10 y 15% con relación a aquellos cuando se considera $\mu = 1$. De acuerdo a lo anterior, es de interés práctico explorar situaciones en las que $\mu \neq 1$. Por esta razón, se seleccionan los valores de $\zeta=0.025$, $\omega_n=84.1$ Hz, $m=346$ kg, $k=97$ N μ m⁻¹ y $\mu = 0.8$ propuestos por Stepan en [3] para determinar las zonas de estabilidad empleando la función de Lambert.

La Figura 6 muestra los lóbulos de estabilidad generados por la solución tradicional y aquellos generados por Lambert. De esta Figura 6 se puede concluir que el valor mínimo de la relación de rigidez obtenido mediante la función de Lambert, para el intervalo mostrado de la velocidad de giro, es mayor que el valor pronosticado por la solución tradicional. Así mismo y considerando altas velocidades, la función de Lambert pronostica zonas de comportamiento inestable más estrechas; en cambio, a bajas velocidades las zonas de estabilidad de la solución de Lambert son mucho mayores que las pronosticadas por la solución tradicional.

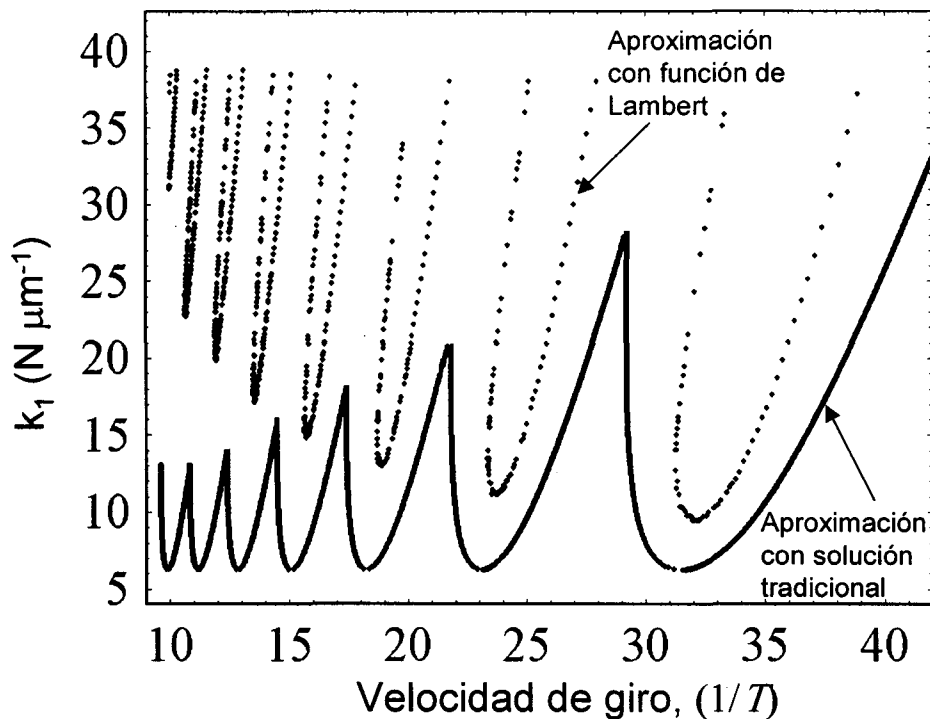


Figura 6. Lóbulos de estabilidad para corte ortogonal con $\zeta=0.025$, $\omega_n=84.1$ Hz, $\mu=0.8$, $k=97 N \mu m^{-1}$ y masa total del sistema es $m=346$.

Resulta de especial interés saber si la diferencia que ambas aproximaciones han mostrado en la determinación de los lóbulos de estabilidad se presenta cuando se considera en la ecuación de movimiento el desgaste de la herramienta, y cuales son sus características más notorias. Dada la relevancia industrial que los resultados obtenidos pueden tener, es importante considerar los elementos básicos y la influencia que el desgaste de la herramienta tiene durante la operación de corte ortogonal. Por esta razón, en el siguiente capítulo se revisarán los elementos más importantes considerados en el modelo de desgaste propuesto por Chiou en [2,3] y como la función de Lambert puede ser empleada para obtener las zonas de estabilidad de la ecuación diferencial resultante.

CAPITULO 3. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD CONSIDERANDO DESGASTE EN LA HERRAMIENTA Y EL EFECTO DE CORIOLIS

Existen diversos factores que pueden estar afectando la forma de las gráficas de estabilidad, algunos por condiciones que van cambiando durante el proceso de corte como el desgaste en la herramienta, el juego mecánico en los husillos, el comportamiento no lineal de algunos componentes estructurales, etc., y otros por las simplificaciones que se hacen durante la derivación de la modelación matemática del problema.

La primera parte de este capítulo estará enfocada a presentar la modelación del comportamiento dinámico de los procesos de maquinado considerando la presencia no solo de la fuerza de corte sino también la fuerza de contacto y el efecto de Coriolis, además de involucrar los efectos de desgaste en la herramienta. Para esto, nos basaremos en la metodología propuesta por Chiou [2,] debido a que en la misma se explica en forma concisa el efecto del desgaste y la determinación de las fuerzas que interfieren en la dinámica de vibración de la máquina. Este análisis está desarrollado para procesos que manejan herramientas de corte delgadas y largas como es el caso del torneado interno. En la segunda parte del capítulo se mostrarán algunas correcciones que se deben realizar a las ecuaciones propuestas por Chiou y que generarán resultados diferentes a los obtenidos por este autor en algunas de sus publicaciones. Finalmente, se obtendrá la solución de las ecuaciones resultantes utilizando la función de Lambert y se compararán sus resultados numéricos con los resultados obtenidos mediante la solución tradicional.

3.1 Modelación dinámica del proceso de corte con desgaste en la herramienta.

El proceso de torneado que se ilustra en la Figura 7 supone por simplicidad que el modelo de comportamiento dinámico del mismo puede ser representado como un sistema dinámico de un grado de libertad, donde la pieza de trabajo se considera como un sistema flexible vibrando normal a la dirección de la alimentación y de la velocidad de corte. Los ejes x y y representan el desplazamiento en función del tiempo de la pieza de trabajo en la dirección radial y tangencial, respectivamente.

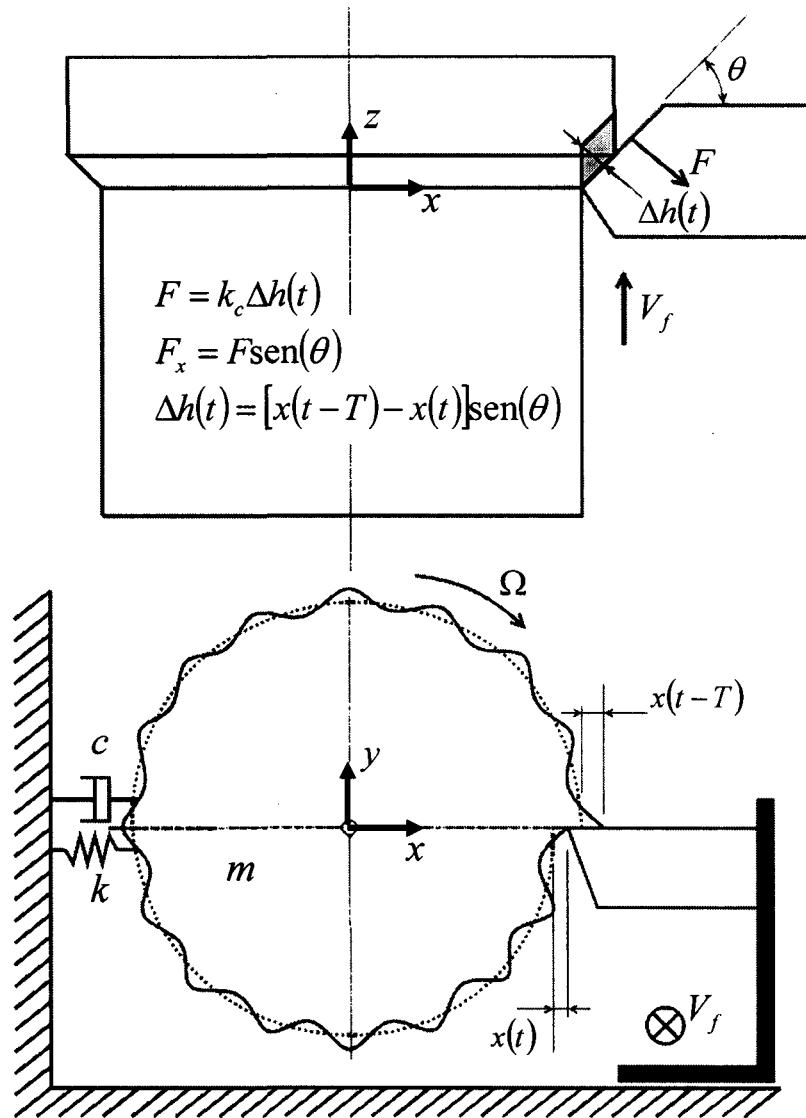


Figura 7. Representación del sistema dinámico en un proceso de torneado [14].

La ecuación de movimiento en la dirección radial sin considerar desgaste en la herramienta está dada en términos del ángulo de inclinación de la cara de corte por [2]:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k_m x = k_c \Delta h(x) \text{sen}(\theta), \quad (3.1)$$

en la que m representa la masa, c es el coeficiente de amortiguamiento, k_m es la rigidez estructural y k_c es el coeficiente de corte en la dirección radial. $\Delta h(x)$ corresponde a la variación del espesor de la viruta y su ecuación es:

$$\Delta h(x) = [x(t-T) - x(t)] \text{sen}(\theta). \quad (3.2)$$

Sustituyendo la ecuación (3.2) en la ecuación (3.1) y haciendo uso de las siguientes relaciones

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_m}{m}}, \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{k_m m}}, \quad H_r = \frac{k_c}{k_m}, \quad (3.3)$$

la ecuación (3.1) puede ser escrita en forma equivalente como,

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = \omega_n^2 H_r [x(t-T) - x(t)] \text{sen}^2(\theta). \quad (3.4)$$

En la ecuación (3.4) no está considerado el efecto de las fuerzas que se generan en el plano x-z (en especial, la fuerza relacionada con el desgaste en el flanco de la herramienta ya que su dirección es perpendicular a la cara principal del plano de corte). Como este es un rubro de importancia que afecta el desempeño de los centros de maquinado durante la manufactura de productos, en este trabajo se tesis se considerará dicho efecto, a partir del modelo propuesto por Chiou.

Según Chiou [2], la ecuación que modela las operaciones de corte en las que se incluye el efecto de la fuerza de contacto F_u está dada por:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + k_m x(t) = k_c \Delta h(x) \text{sen}(\theta) + F_u \text{sen}(\theta), \quad (3.5)$$

en la que se supone que la magnitud de F_u es directamente proporcional al volumen total de material removido V [6,7] esto es,

$$F_u = k_{sp} V, \quad (3.6)$$

donde k_{sp} representa la fuerza específica de contacto.

Para determinar el volumen de material removido según el modelo propuesto por Chiou, se emplea un esquema de linearización de tal forma que para amplitudes de vibración pequeñas el volumen puede obtenerse aproximadamente a través de la siguiente expresión:

$$V \cong \frac{1}{2} w_d l_w^2 s_l = \frac{-w_d l_w^2 x \text{sen}(\theta)}{2v} \quad (3.7)$$

en la que w_d es el ancho de corte, l_w es la longitud del desgaste en la herramienta, s_l es la pendiente de la trayectoria de la cara de corte de la herramienta sobre la superficie de la pieza, como se ilustra en la Figura 8 y v es la velocidad de corte.

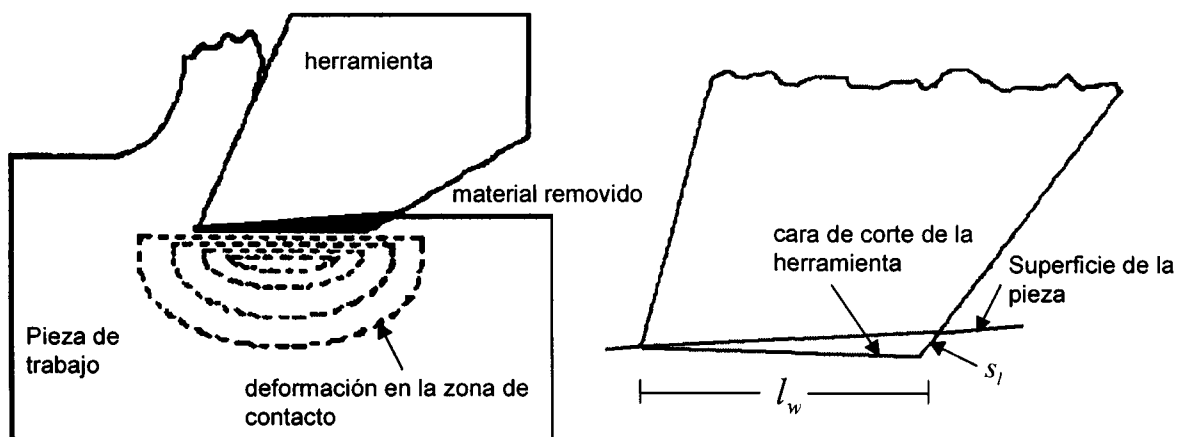


Figura 8. Diagrama del volumen de material removido por debajo de la herramienta [2].

Sustituyendo la ecuación (3.7) en la ecuación (3.6), se tiene

$$F_u = f_u = k_{sp} V = -k_f x, \quad (3.8)$$

en la que el término k_f está dado por,

$$k_f = \frac{k_{sp} w_d l_w^2 \sin(\theta)}{2v} \quad (3.9)$$

Advierta de las ecuaciones (3.8) y (3.9) lo complejo que resulta establecer la relación dinámica que tiene la fuerza de contacto con respecto al desplazamiento relativo que experimenta la herramienta con respecto a la pieza de trabajo. Si se considera que la fuerza de contacto es siempre de compresión y que su magnitud se incrementa cuando la pieza se mueve contra la herramienta y disminuye en caso contrario, la primera mitad del movimiento ascendente y la última mitad del movimiento descendente están asociados con valores nulos de ésta tal y como se muestra en la Figura 9.

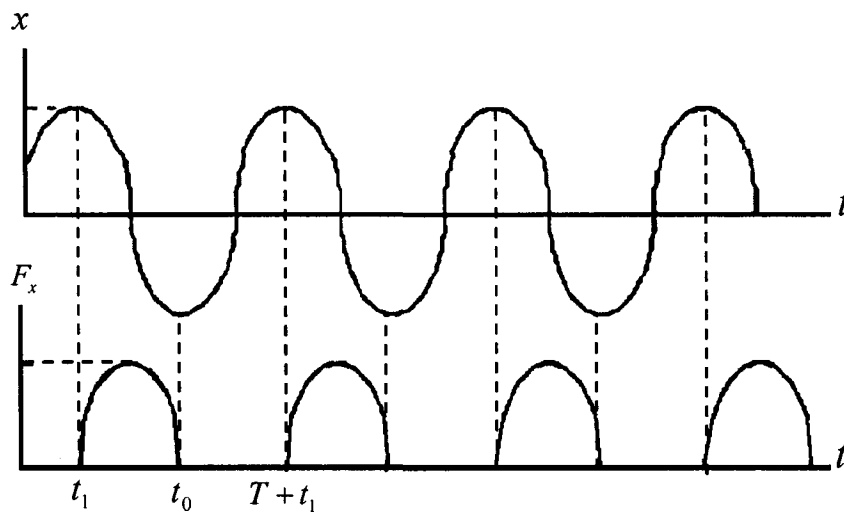


Figura 9. Fuerza de contacto resultante del movimiento relativo entre la herramienta y la pieza [2].

Con base a esta Figura 9, las condiciones para que exista la fuerza de contacto entre la herramienta y la pieza están dadas por:

$$\begin{aligned} F_u(t) = f_u(t) &= -k_f \dot{x}, & t_1 + nT \leq t < t_0 + nT, n = 0, 1, 2, \dots \\ &= 0, & \text{en cualquier otro tiempo, } t \end{aligned} \quad (3.10)$$

Además de la fuerza de contacto y la fuerza de corte, otra posible causa de vibración entre la herramienta y la pieza de trabajo es debida a la fuerza de Coriolis la cual está asociada con el movimiento giratorio de la pieza en el proceso de torneado.

Cabe recordar que la fuerza de Coriolis o efecto de Coriolis, descrita por el científico francés Gaspard-Gustave Coriolis, en 1835 es la fuerza producida por la rotación de la Tierra en el espacio, que tiende a desviar la trayectoria de los objetos que se desplazan sobre la superficie terrestre. Esta fuerza no sólo aparece durante la rotación de la Tierra sino, en general, para cualquier objeto con masa que se desplaza a una determinada velocidad sobre otro objeto en rotación.

La fuerza de Coriolis en el proceso de torneado se encuentra presente a lo largo del eje x y su magnitud depende de la masa efectiva m , la velocidad de giro, Ω y la velocidad tangencial de la pieza. Según Chiou, los resultados experimentales evidencian que las velocidades de la pieza en la dirección radial y tangencial están en fase, por lo tanto, la razón de las dos velocidades es constante, esto es $\lambda = \dot{y} / \dot{x}$.

Así, la fuerza de Coriolis en el proceso de corte ortogonal puede ser calculada mediante la ecuación,

$$F_{co} = 2m\lambda\Omega\dot{x}, \quad (3.11)$$

De esta forma, considerando la fuerza de corte, la fuerza de contacto y la fuerza de Coriolis, la ecuación que describe la dinámica del proceso de corte está representada por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k_m x = k_c \delta(x) \sin(\theta) + F_u \sin(\theta) + F_{co} \quad (3.12)$$

La solución de esta ecuación propuesta por Chiou se basa en escribir esta ecuación (3.12) en el dominio de Laplace y después determinar sus zonas de estabilidad empleando un esquema análogo al seguido por la solución tradicional descrita en el Anexo A.

En la siguiente sección se presentan los detalles de dicho análisis así como algunas modificaciones que se introducen para corregir errores detectados en el mismo al momento de suponer una aproximación conveniente para simplificar la ecuación de la fuerza de contacto.

3.2 Solución de la ecuación (3.12).

Para obtener la solución aproximada de la ecuación (3.12) es necesario representar el efecto de la fuerza de contacto, descrito por la ecuación (3.10), durante el movimiento en el dominio de Laplace. Los detalles de dicho procedimiento pueden encontrarse en [2,3]. Aquí solo nos limitamos a reproducir el resultado final en el que la transformada de Laplace de $F_u(t)$ está dada por

$$F_u(s) = f_u(s) \frac{e^{-s t_1} - e^{-s t_0}}{1 - e^{-s T}}. \quad (3.13)$$

Es simple establecer que $f_u(s) = -k_f s x(s)$, por lo que la ecuación (3.13) se puede escribir como:

$$F_u(s) = -k_f s \frac{e^{-s(\pi/2\omega)}}{1 + e^{-s(\pi/\omega)}} x(s) \quad (3.14)$$

Observe que los términos exponenciales en la ecuación (3.14) introducen un grado de complejidad que hace muy difícil obtener una solución analítica para la ecuación (3.12). Para sortear esta dificultad, Chiou se basó en la aproximación de primer orden de $e^{-sT} \cong 1 - sT$. Por lo que los términos exponenciales de la ecuación (3.14), según este autor, pueden ser escritos en forma equivalente como

$$\frac{e^{-s(\pi/2\omega)}}{1 + e^{-s(\pi/\omega)}} \cong \left(1 - \frac{\pi}{4\omega} s \right) \quad (3.15)$$

Al comparar la aproximación con la expresión exacta puede observarse en la Figura 10 que existe una gran discrepancia ya que en $s = 0$ la forma exacta tiene el valor de 0.5 mientras que la forma aproximada descrita por la ecuación (3.15) tiene el valor de 1. Es posible que esto se deba a un error involuntario de Chiou al desarrollar la forma aproximada de la ecuación (3.15) mediante series de Taylor.

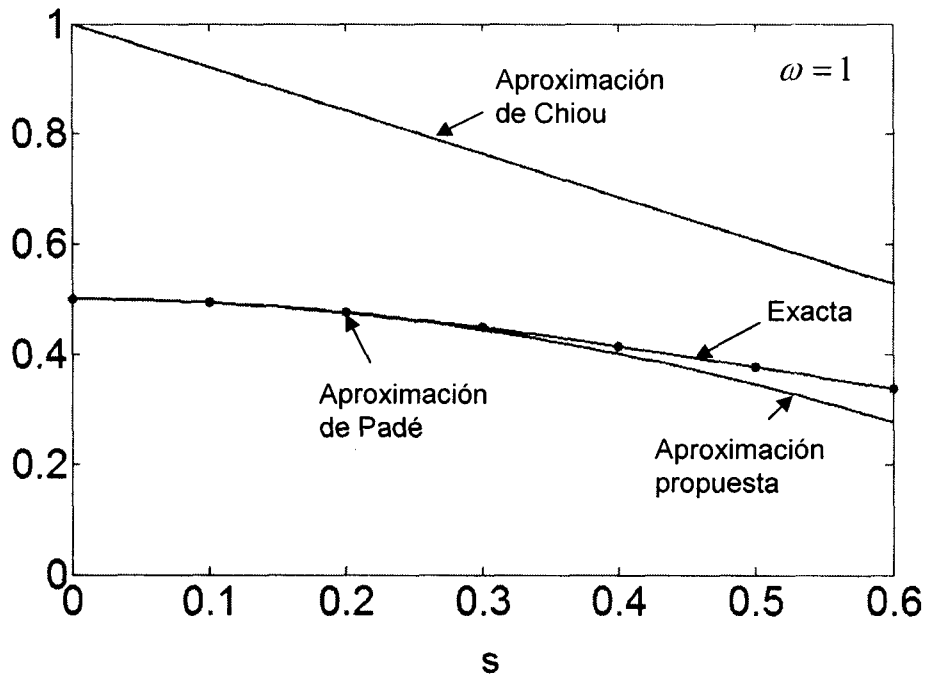


Figura 10. Aproximación de primer orden de $\frac{e^{-s(\pi \cdot 2\omega)}}{1 + e^{-s(\pi \cdot \omega)}}$

Este error indudablemente afecta el desarrollo y solución de las ecuaciones de movimiento que este autor desarrolló en varios de sus artículos en los que se consideran las fuerzas de desgaste en la herramienta [2,3]. Con el propósito de corregir el error en la aproximación dada por la ecuación (3.15), en el presente trabajo de investigación se propone una aproximación diferente, obtenida mediante series de Taylor, y en la que los términos exponenciales pueden ser representados como

$$\frac{e^{-s(\pi \cdot 2\omega)}}{1 + e^{-s(\pi \cdot \omega)}} \cong \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{16} \frac{\pi^2}{\omega^2} s^2 \right) \quad (3.16)$$

Esta aproximación de primer orden según se ve en la Figura 10, es más cercana a la función analítica exacta por lo que será empleada de aquí en adelante². Sustituyendo la ecuación (3.16) en la ecuación (3.14), la fuerza de contacto en el dominio de Laplace puede ser escrita como:

$$F_u(s) \cong -k_f s \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{16} \frac{\pi^2}{\omega^2} s^2 \right) x(s) \cong -\frac{k_f}{2} s x(s) + \frac{k_f \pi^2}{16 \omega^2} s^3 x(s) \quad (3.17)$$

Puesto que la componente efectiva de la fuerza de contacto está dada por $F_u \text{sen}(\theta)$ la ecuación (3.17) puede describirse como:

$$F_u(s) \text{sen}(\theta) \cong -\frac{\omega_n^2 k_f}{2 k_c} H_r \text{sen}(\theta) s x(s) + \frac{\omega_n^2 \pi^2 k_f}{16 \omega^2 k_c} H_r \text{sen}(\theta) s^3 x(s) \quad (3.18)$$

Considerando los efectos del desgaste en la herramienta así como la fuerza de Coriolis, la ecuación de movimiento en el dominio de Laplace para un proceso de torneado es

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = \omega_n^2 H_r (e^{-Ts} - 1) \text{sen}^2(\theta) - k_{fd} s + \frac{m_f}{\omega^2} s^3 + 2\lambda\Omega s \quad (3.19)$$

en la que,

$$k_{fd} = \frac{\omega_n^2}{2} H_f \text{sen}(\theta); \quad m_f = \frac{\omega_n^2}{16} \pi^2 H_f \text{sen}(\theta); \quad H_f = \frac{k_f}{k_m} = \frac{k_f}{k_c} H_r \quad (3.20)$$

Advierta que los lóbulos de estabilidad de la ecuación (3.19) pueden obtenerse, según la solución tradicional, de forma simple si se efectúa la siguiente sustitución $s = j\omega$ por lo tanto, la ecuación (3.19) se transforma en

$$\omega_n^2 - \omega^2 + j(2\zeta\omega_n + k_{fd} + m_f - 2\lambda\Omega)\omega = \omega_n^2 H_r \text{sen}^2(\theta) [\cos(\omega T) - 1] - j\omega_n^2 H_r \text{sen}^2(\theta) \quad (3.21)$$

la cual es empleada directamente para determinar las zonas de estabilidad del sistema en estudio.

² Es importante añadir que pueden emplearse aproximaciones más exactas a la aquí propuesta. Por ejemplo, empleando las series de Padé se tendría: $\frac{e^{-s(\pi/2\omega)}}{1 + e^{-s(\pi/\omega)}} \cong \frac{-8\pi^2 s^2 \omega^2 + 960\omega^4}{3\pi^4 s^4 + 224\pi^2 s^2 \omega^2 + 1920\omega^4}$.

Por otra parte, es posible también desarrollar la solución de la ecuación (3.21) empleando la función de Lambert. Este procedimiento se detalla a continuación.

3.3 Solución de la ecuación de desgaste mediante la función de Lambert.

Para emplear el procedimiento de solución propuesto por Asl y Ulsoy, y el cual está basado en la función de Lambert, es necesario que la ecuación de movimiento sea representada en espacio de estado. En el problema que se está analizando, es posible aplicar la transformada inversa de Laplace a la ecuación (3.19) para conocer la ecuación diferencial de movimiento

$$x(t) + (2\xi\omega_n + k_{fd} + m_f - 2\lambda\Omega)x(t) + (\omega_n^2(1 + H_r \text{sen}^2(\theta)))x(t) = \omega_n^2 H_r \text{sen}^2(\theta)x(t-T) \quad (3.22)$$

Observe que esta ecuación (3.22) puede ser escrita ahora en forma matricial como:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\omega_n^2 H_r \text{sen}^2(\theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t-T) \\ x_2(t-T) \end{Bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ (1 + H_r \text{sen}^2(\theta))\omega_n^2 & 2\xi\omega_n + k_{fd} + m_f - 2\lambda\Omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

en la que $\dot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t)$ y $\dot{x}_2(t) = \dot{x}_1(t)$; o bien como:

$$\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}\mathbf{x}(t-T) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t) = 0, \quad (3.24)$$

Aquí,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\omega_n^2 H_r \text{sen}^2(\theta) & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ (1 + H_r \text{sen}^2(\theta))\omega_n^2 & 2\xi\omega_n + k_{fd} + m_f - 2\lambda\Omega \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Puesto que los elementos de las matrices **A** y **B** son conocidos, entonces el procedimiento desarrollado por Asl y Ulsoy, también descrito en el Capítulo 2 de esta tesis, puede ser empleado para determinar las zonas de estabilidad del sistema. En la siguiente sección, se comparan los lóbulos de estabilidad generados mediante el uso de la función de Lambert y los obtenidos mediante el método tradicional [5] para diversas condiciones de maquinado³.

3.4 Resultados Numéricos

En esta parte del capítulo 3 se procede a la comparación de la solución de la ecuación (3.24) obtenida mediante la función de Lambert con la solución tradicional para predecir las zonas de estabilidad en el proceso de maquinado.

Los casos que se analizan a continuación se corresponden a un mismo proceso de maquinado considerando condiciones de operación diferentes esto es, herramienta nueva o usada e inclusión o no del efecto de Coriolis.

Las zonas de estabilidad obtenidas para cada caso están basadas en gráficas de razón de rigidez $\frac{k_c}{k_m}$ versus la velocidad de corte v en *fpm* (pies por minuto).

Recordando la relación entre los parámetros, tenemos que

$$H_r = \frac{k_c}{k_m}; \quad k_c = C_t w_d; \quad \Omega = \frac{v}{d\pi} \frac{12}{60} \quad (3.26)$$

Donde k_c es la rigidez de la herramienta, C_t es una constante relacionada con la presión de corte, w_d es el ancho de corte y Ω es la velocidad de giro dada en rev/s.

³ Observe que la ecuación $\frac{1}{T} W(\Lambda_{11}) = 2\xi\omega_n + k_{fd} + m_f - 2\lambda\Omega$ permite establecer la máxima profundidad de corte que puede asignarse en operaciones de maquinado en donde los efectos de desgaste de la herramienta y fuerza de Coriolis son incluidos.

Caso III

Aquí se considera que en la ecuación (3.22) no se incluyen los efectos de la fuerza de contacto ni de Coriolis. Los parámetros a emplear en dicha ecuación son los valores experimentales que Chiou obtuvo en [2]; esto es: $k_c=1800$ lb/pulg, $\xi=0.0312$, $\omega_n=183$ Hz. Para cuestión de análisis se considerará un ángulo $\theta=90^\circ$. Las dimensiones de la pieza de trabajo son 14.76 pulg. de largo y 1.97 pulg de diámetro.

Como puede verse en la Figura 11, los lóbulos de estabilidad obtenidos empleando la aproximación de Lambert establecen que a ciertos rangos de velocidad, la razón de rigidez se incrementa de manera significativa ampliando con ello la zona estable. En esta Figura 11, se puede apreciar también que el valor mínimo para la razón de rigidez obtenido mediante la solución con la función de Lambert es mayor comparado con el valor que genera la solución tradicional. Nuevamente presenta zonas inestables más reducidas que las estimadas por la solución tradicional.

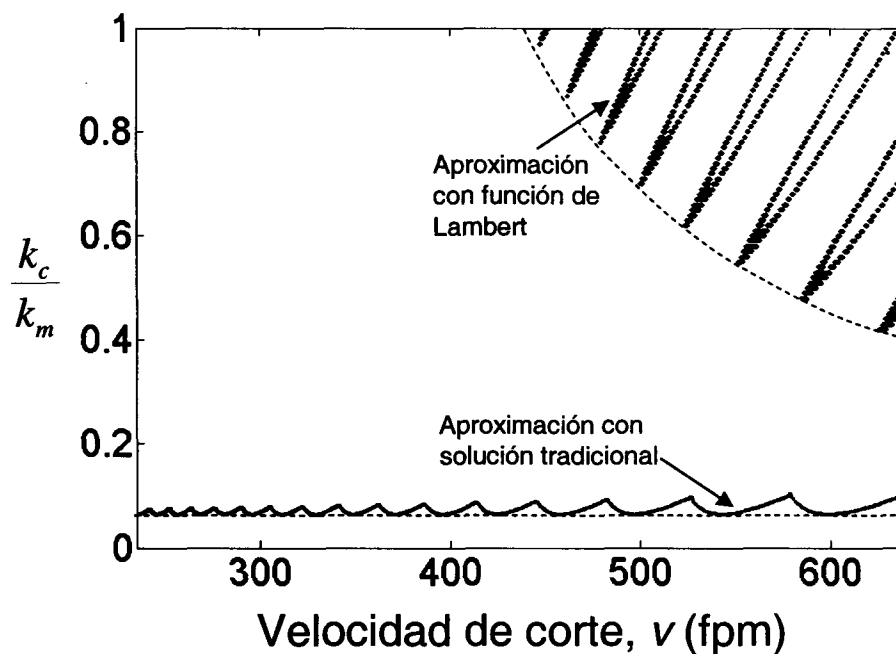


Figura 11. Lóbulos de estabilidad para un proceso de torneado sin considerar desgaste ni efecto de Coriolis, $\theta=90^\circ$.

Es importante observar que la solución con la función de Lambert permite apreciar claramente la tendencia de la curva envolvente que cubre el valor máximo de k_c/k_m antes de pasar a la zona inestable a diferencia de la obtenida con la solución tradicional la cual indica que para cualquier valor de velocidad, existe un valor máximo de k_c/k_m constante bajo estas condiciones (sin desgaste y sin Coriolis).

La falta de datos experimentales nos impide determinar cual método es el de mejor predicción.

Caso IV

En este caso se estudia el efecto que la fuerza de Coriolis tiene en la estabilidad de la ecuación (3.22). Los parámetros a emplear son $k_c=1800$ lb/pulg, $\xi=0.0312$, $\omega_n=183$ Hz y un ángulo $\theta=30^\circ$. La razón de las dos velocidades (radial y tangencial), según los resultados experimentales obtenidos por Chiou, se encuentra en un rango de $1.25 \leq \lambda \leq 1.35$ para velocidades de corte entre 268 y 560 *fpm*.

La Figura 12 muestra los resultados obtenidos con la función de Lambert y con la solución tradicional. De esa Figura 12 es posible observar que la curva envolvente indica que los límites de estabilidad obtenidos con la ecuación (3.22) presentan zonas estables más amplias a velocidades bajas comparadas con la zonas que se obtienen con la solución tradicional.

Como puede verse en la Figura 12 los lóbulos de ambas soluciones limitan a un valor de k_c/k_m menor comparado con el obtenido en la Figura 11 debido a la fuerza de Coriolis y al ángulo de inclinación. Este efecto representa un impacto negativo para el proceso ya que se amplían las zonas en las que éste puede estar en condiciones inestables por la presencia de *chatter*. La inclinación de los lóbulos de estabilidad se debe al cambio de ángulo a $\theta=30^\circ$, valor que es más común en procesos de torneado.

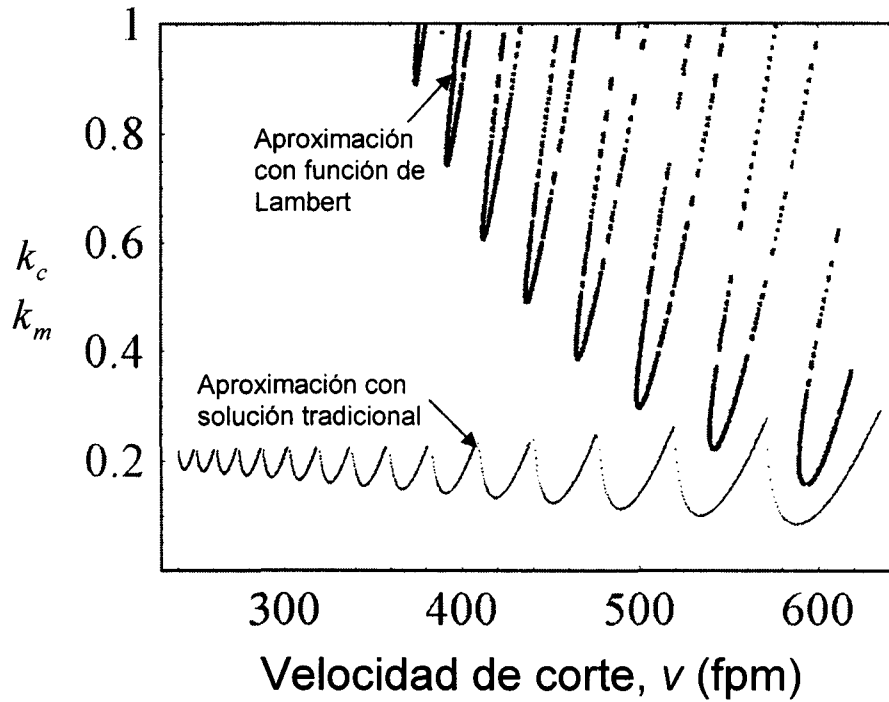


Figura 12. Lóbulos de estabilidad para un proceso de torneado considerando el efecto de Coriolis, $\theta = 30^\circ$.

Caso V

Este caso tiene el propósito de analizar el efecto de desgaste en la herramienta además de la fuerza de Coriolis en la solución de la ecuación (3.21). Se considera una longitud de desgaste de $l_w = 0.002$ pulg, un ancho de corte constante igual a $w_d = 0.01$ pulg. y una fuerza específica de contacto de $k_{sp} = 6.5 \times 10^7$ lb/pulg³. Se mantiene el ángulo de corte $\theta = 30^\circ$, $\xi = 0.0312$, y $\omega_n = 183$ Hz.

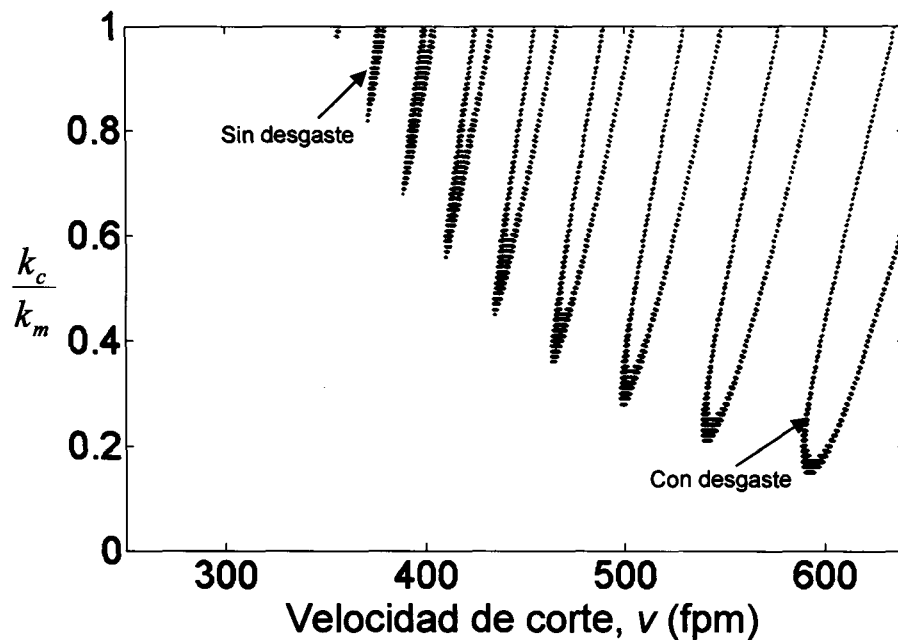


Figura 13. Aproximación de Lambert considerando el efecto de Coriolis, sin desgaste (rojo) y con desgaste (azul) en la herramienta.

A simple vista la solución con la función de Lambert mostrada en las Figuras 12 y 13 pudieran contener gráficas iguales, sin embargo, existe una ligera elevación de los lóbulos que aparecen en la Figura 13 debido al desgaste en la herramienta.

Según Chiou, el desgaste en la herramienta genera un efecto de amortiguamiento en el sistema, el cual permite alcanzar profundidades de corte mayores [2,3]. Este efecto aparece en ambas soluciones sin embargo se hace más notorio a bajas velocidades como se muestra en la Figura 13.

De los tres últimos casos que fueron analizados en esta sección es posible concluir que la función de Lambert también es aplicable a casos en los que se consideren otros tipos de fuerzas presentes en la modelación del comportamiento dinámico de los procesos de maquinado como la fuerza de contacto y la fuerza de Coriolis. Esto permite ampliar los casos en los que la función de Lambert genera resultados interesantes tanto para procesos de corte ortogonal como para los que presenten un ángulo de inclinación oblicuo.

CONCLUSIONES

En este trabajo se estudia la aplicación de la función de Lambert para determinar los límites de estabilidad en operaciones de maquinado en corte ortogonal. Durante el análisis de los resultados obtenidos en el caso I, se pudo observar la función de Lambert parece generar, con valores pequeños de amortiguamiento ($\xi = 0.01$) el mismo valor mínimo para la razón de rigidez K que aquel que se obtiene empleando la solución tradicional; sin embargo, sus lóbulos de estabilidad son más estrechos que los obtenidos con la solución tradicional lo cual incrementa la región en donde los parámetros de corte generan operaciones de maquinado estable. Al aumentar el valor del amortiguamiento ($\xi = 0.05$), la metodología de Asl y Usoy genera un valor mínimo de K es cual es mayor que el obtenido mediante la solución tradicional. Se encontró también que en los casos II y III los lóbulos de estabilidad empleando el método de Asl y Usoy producen zonas de estabilidad muy diferentes a las generadas por la solución tradicional. Es interesante resaltar que aun y cuando las soluciones obtenidas mediante el empleo de la función de Lambert desde el punto de vista matemático es correcta, la inclinación mostrada por los lóbulos de estabilidad graficados en los casos III, IV y V para procesos de torneado no han sido reportados en la literatura.

Se observó también en los diagramas de estabilidad de los casos IV y V que los efectos por desgaste en la herramienta y fuerza de Coriolis generan diagramas de estabilidad en los que los lóbulos tienden a pronosticar una mayor profundidad de corte y áreas de estabilidad más amplias a bajas velocidades de operación.

En todos los casos analizados en el presente trabajo resultó evidente que los diagramas de estabilidad aplicando el procedimiento de Asl y Usoy tienden a mostrar marcadas diferencias con respecto a los lóbulos obtenidos mediante la solución tradicional. Esta variación en los resultados nos lleva a concluir que se requiere de apoyarnos en mayor evidencia experimental para establecer bajo que condiciones la función de Lambert podría ser válida.

Una vez comprobados estos resultados, el impacto que se tendrá a nivel industrial se reflejará en el incremento de la tasa de material removido debido a que se permiten mayores profundidades de corte en menores tiempos de proceso ya que se puede trabajar con velocidades de corte más altas.

TRABAJO POSTERIOR

Es indudable que los resultados logrados durante el desarrollo de la presente tesis generan áreas de oportunidad para continuar profundizando en:

1. las aplicaciones del método de Asl y Ulsoy en otras operaciones de maquinado, i. e. operaciones de fresado, mandrinado y demás.
2. el estudio cuantitativo y cualitativo de las gráficas de estabilidad y su validación a través de datos experimentales.
3. la generación de soluciones de ecuaciones diferenciales con retraso en las que efectos no lineales sean considerados.
4. el empleo de otros métodos alternos de solución basados en la función de Lambert.

Una vez comprobados estos resultados, el impacto que se tendrá a nivel industrial se reflejará en el incremento de la tasa de material removido debido a que se permiten mayores profundidades de corte en menores tiempos de proceso ya que se puede trabajar con velocidades de corte más altas.

TRABAJO POSTERIOR

Es indudable que los resultados logrados durante el desarrollo de la presente tesis generan áreas de oportunidad para continuar profundizando en:

1. las aplicaciones del método de Asl y Ulsoy en otras operaciones de maquinado, i. e. operaciones de fresado, mandrinado y demás.
2. el estudio cuantitativo y cualitativo de las gráficas de estabilidad y su validación a través de datos experimentales.
3. la generación de soluciones de ecuaciones diferenciales con retraso en las que efectos no lineales sean considerados.
4. el empleo de otros métodos alternos de solución basados en la función de Lambert.

ANEXO A. SOLUCIÓN TRADICIONAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES CON RETRASO (“DELAY”)

El procedimiento de solución de ecuaciones diferenciales con retraso que generalmente se utiliza para predecir las zonas de estabilidad se resume en forma simple en el artículo escrito por Le-Ngoc [5]. En este método se parte de la suposición de que la fuerza dinámica df , que se genera durante la operación de maquinado ortogonal, está dada por

$$df = -K[x(t) - x(t - T)] \quad (A1)$$

en la que K es una constante llamada factor de fuerza de corte, $x(t)$ es el desplazamiento de la herramienta en función del tiempo desde la condición de equilibrio, $x(t-T)$ es el desplazamiento de la herramienta en el tiempo $t - T$, donde T es el tiempo de retraso.

La ecuación de movimiento de la herramienta considerando que la operación de maquinado correspondiente pueda ser modelada como un sistema de un grado de libertad es escrita generalmente como

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = -K[x(t) - x(t - T)], \quad (A2)$$

en la que m , c y k representan la masa, el coeficiente de amortiguamiento y la rigidez de la herramienta, respectivamente. Dividiendo ambos lados de la ecuación (A2) por m , ésta puede expresarse de la siguiente forma:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = -Y\omega_n^2[x(t) - x(t - T)] \quad (A3)$$

en la que $\omega_n = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia natural, $\xi = c/c_{crit}$ es la razón de amortiguamiento, $c_{crit} = \sqrt{4mk}$ es el coeficiente de amortiguamiento crítico y $Y = K/k$ es la relación de rigideces (ganancia) expresada en forma adimensional.

Suponiendo que la solución de la ecuación (A2) es de la forma $x = Ae^{\lambda t}$, donde λ es el valor característico complejo y A una constante a ser determinada, y sustituyendo esta relación en la ecuación (A3), se obtiene la ecuación característica

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2 + Y\omega_n^2[1 - e^{-\lambda T}] = 0, \quad (\text{A4})$$

en la que el valor característico λ puede ser representado como un número complejo $\lambda = \alpha + i\omega$, donde α se le conoce como la razón de decaimiento y a ω como la frecuencia angular.

Sustituyendo $\lambda = \alpha + i\omega$ en la ecuación (A4) y separando la parte real e imaginaria, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\alpha^2 - \omega^2 + 2\xi\omega_n\alpha + \omega_n^2 + Y\omega_n^2(1 - e^{-\alpha T} \cos \omega T) = 0 \quad (\text{A5.1})$$

$$2\alpha\omega + 2\xi\omega_n\omega + Y\omega_n^2 e^{-\alpha T} \sin \omega T = 0 \quad (\text{A5.2})$$

Introduciendo las siguientes variables $D = \alpha/\omega_n$, $W = \omega/\omega_n$ y $\tau = T\omega_n$ las ecuaciones anteriores pueden ser escritas en forma adimensional como:

$$D^2 - W^2 + 2\xi D + 1 + Y\omega_n^2(1 - e^{-D\tau} \cos W\tau) = 0 \quad (\text{A6.1})$$

$$2DW + 2\xi W + Y e^{-D\tau} \sin W\tau = 0 \quad (\text{A6.2})$$

Estas dos ecuaciones simultáneas representan el comportamiento dinámico de la herramienta sujeta a la relación de rigidez Y , al tiempo de retardo τ y al amortiguamiento del sistema ξ . Las características dinámicas de la respuesta están representadas por la razón de decaimiento D y la frecuencia de *chatter* W . Se dice que el sistema es estable si D toma solo valores negativos e inestable en caso contrario. La frontera entre las regiones estables e inestables pueden obtenerse haciendo $D = 0$ en las ecuaciones A6.1 y A6.2; esto permite conocer las condiciones para determinar los límites de estabilidad en el sistema

$$-W^2 + 1 + Y\omega_n^2(1 - \cos W\tau) = 0 \quad (\text{A7.1})$$

$$2\xi W + Y\text{sen}W\tau = 0 \quad (\text{A7.2})$$

Para la obtención de los límites de estabilidad empleando las ecuaciones (A7.1) y (A7.2), el procedimiento seguido Le-Ngoc consiste en manipular algebraicamente dichas ecuaciones en la forma siguiente:

De la ecuación (A7.2) se tiene que

$$Y = \frac{-2\xi W}{\text{sen}W\tau} \quad (\text{A8})$$

Si se sustituye la ecuación (A8) en la ecuación (A7.1) se obtiene

$$-W^2 + 1 - 2\xi W \tan \frac{W\tau}{2} = 0 \quad (\text{A9})$$

Por lo que el retraso τ puede calcularse a partir de

$$\tau = \frac{2}{W} \left[\tan^{-1} \left(\frac{1-W^2}{2\xi W} \right) + n\pi \right] \quad n = 0,1,2,\dots,\infty \quad (\text{A10})$$

en la que n define la rama de estabilidad que desee conocerse. Relacionando las ecuaciones (A7.1) y (A7.2) se encuentra una expresión explícita para determinar Y :

$$Y = \frac{-(1-W^2)^2 - (2\xi W)^2}{2(1-W^2)} \quad (\text{A11})$$

Como la razón de amortiguamiento ξ es constante en el estudio dinámico de un sistema en particular, las ecuaciones (A10) y (A11) representan un conjunto de ecuaciones paramétricas que permiten conocer los límites de estabilidad en términos de τ y Y .

Las gráficas de estabilidad que se pueden obtener a partir de estas ecuaciones permiten conocer, en operaciones de maquinado, la profundidad de corte y la velocidad de operación óptimas. Como ejemplo ilustrativo de la forma que toman las zonas de estabilidad, suponga el valor de $\xi = 0.05$ por lo que de las ecuaciones (A10) y (A11), se obtienen los lóbulos de estabilidad mostrados en la Figura 1A en la que se ha graficado $X = 2\pi/\tau$ versus $Y = K/k$.

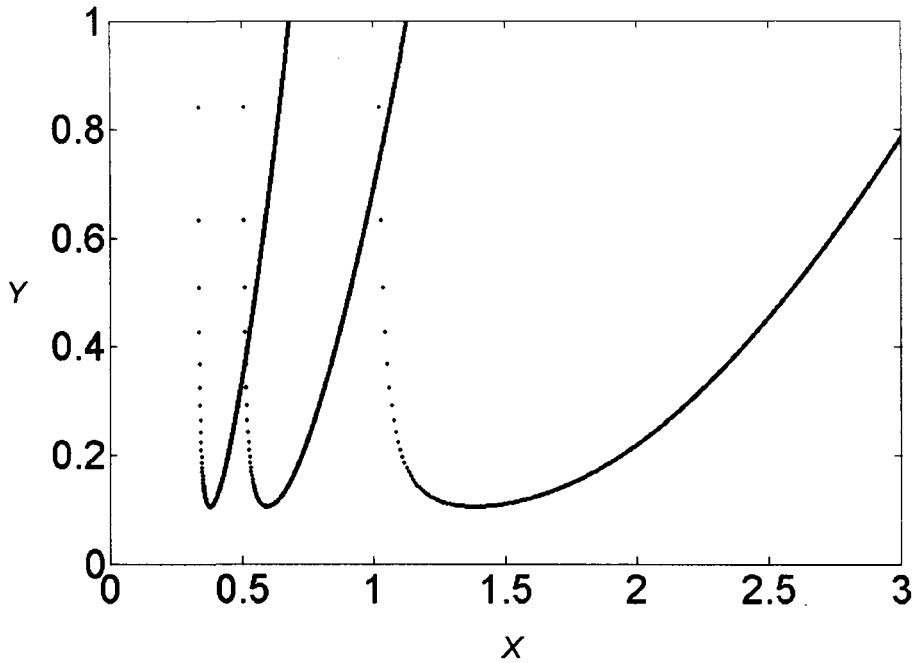


Figura 1A. Gráfica de estabilidad adimensional para un sistema retroalimentado.

En la Figura 2A se muestran los lóbulos de estabilidad para los valores de $\omega_n = 150$ rad/seg, $\xi = 0.05$ y considerando las ramas $n = 1, 2$ y 3 . Este tipo de gráficas es empleada comúnmente para determinar las condiciones de corte.

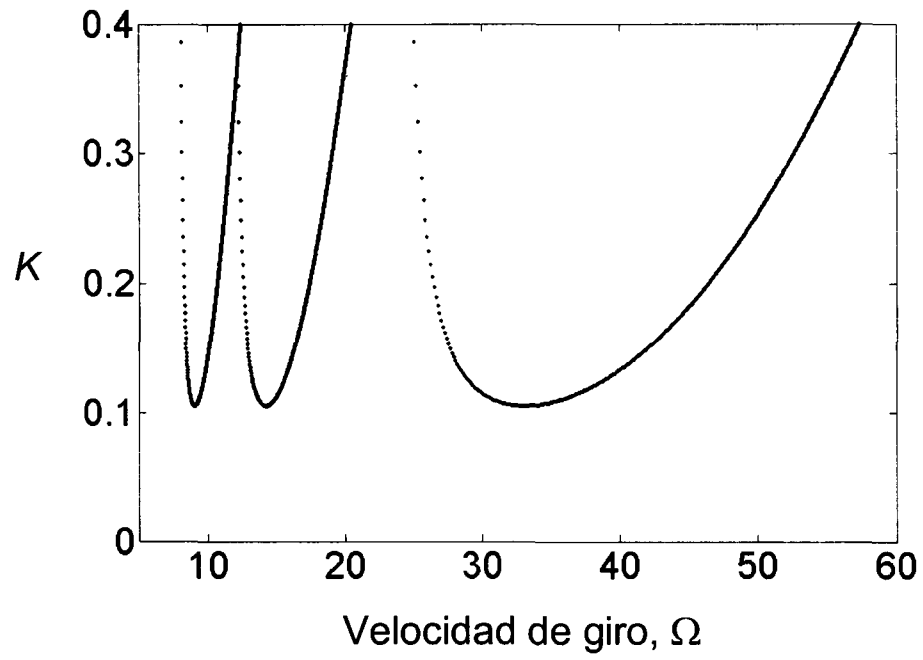


Figura 2A. Gráfica de estabilidad en función de parámetros del sistema.

ANEXO B. Método computacional utilizando la función *gap*

Con el propósito de evitar largas manipulaciones algebraicas para derivar la ecuación característica, Chen y Ulsoy desarrollaron en [16] un método general, llamado método *gap*, introduciendo una nueva función dependiente de una sola variable con límites bien definidos. A continuación se presenta un resumen de dicha formulación.

De acuerdo con Chen y Ulsoy, la formulación del método *gap* inicia con la representación en espacio de estado del modelo matemático del sistema, el cual es expresado por un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales con retraso (DDE); esto es

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}_1 x(t) + \mathbf{A}_2 x(t - T), \quad (\text{B1})$$

en la que T es el tiempo (periodo) requerido para efectuar una revolución (también se le conoce como el inverso de la velocidad de giro); \mathbf{A}_1 y \mathbf{A}_2 son las matrices de coeficientes linealizadas formadas por los parámetros estructurales de la herramienta y la pieza de trabajo. Para un sistema de un grado de libertad las matrices están dadas por:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(1 + \frac{k_c}{k_m}\right)\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mu \frac{k_c}{k_m} \omega_n^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B2})$$

Suponiendo una solución del tipo $\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}e^{st}$ donde \mathbf{c} es un vector de constantes y s es un exponente característico, y sustituyendo esta solución en la ecuación (B1), se genera la siguiente ecuación característica:

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 e^{-sT} = 0, \quad (\text{B3})$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad.

Si se supone que s es una variable compleja dada por $s = \alpha + j\omega_c$, donde la parte real es igual a cero (sistema críticamente estable), el determinante de la ecuación (B3) se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$\det(j\omega_c I - \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 e^{-j\omega_c T}) = 0 \quad (\text{B4})$$

La ecuación (B4) es la que se utiliza generalmente para determinar los límites de estabilidad. Sin embargo, Chen y Ulsoy introdujeron algunos cambios de variable para evitar manipulaciones simbólicas innecesarias mediante las siguientes definiciones.

Definición 1

Dado que el término $e^{-j\omega_c T}$ es de magnitud unitaria, se define

$$2\pi(m + \nu) = T\omega_c, \quad (\text{B5})$$

donde m es un número natural, y los valores de la variable ν se limita al siguiente intervalo $0 \leq \nu < 1$.

Después de reemplazar el término $T\omega$ por $2\pi(m + \nu)$, la ecuación (B4) está ahora en función de una variable con límites definidos. Esto es,

$$\det(j\omega_c I - \mathbf{A}_e(\nu)) = 0 \quad 0 \leq \nu < 1 \quad (\text{B6})$$

en la que $\mathbf{A}_e(\nu) = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 e^{-2\pi j(m + \nu)}$ y ω_c es la frecuencia de *chatter*. Puesto que el término $e^{-2\pi j(m + \nu)}$ es una función periódica para $m = 0, 1, 2, \dots$ la matriz $\mathbf{A}_e(\nu)$ se puede expresar simplemente como $\mathbf{A}_e(\nu) = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 e^{-2\pi j\nu}$.

Tradicionalmente la ecuación (B6) se resuelve igualando a cero la parte real y la imaginaria generando dos ecuaciones simultaneas en función de dos variables independientes ω_c y ν .

Puesto que la frecuencia de *chatter* ω_c está relacionada con valores cercanos a la frecuencia natural del sistema, la selección apropiada del dominio de ω_c representa un problema específico para cada sistema. Para evitar esa situación se propone una aproximación diferente introduciendo una nueva variable mediante la siguiente ecuación:

$$\det(\lambda I - \mathbf{A}_e(\nu)) = 0 \quad 0 \leq \nu < 1 \quad (\text{B7})$$

en la que λ es una variable compleja dada por $\lambda = \alpha + j\omega_c$.

La idea principal del algoritmo propuesto es identificar los valores de ν que se encuentren en $0 \leq \nu < 1$ los cuales generen valores de λ en el eje imaginario positivo para $\mathbf{A}_e(\nu)$.

Advierta que para un valor de ν , resolver λ es equivalente a obtener los valores característicos de la matriz $\mathbf{A}_e(\nu)$. Para identificar si λ es un número imaginario se presenta la siguiente definición.

Definición 2

Se define la función $gap(\nu)$ que corresponde a la parte real del valor característico λ_i que tenga la distancia más corta al eje imaginario. Esto es,

$$gap(\nu) = \min_{\lambda_i} (\text{Re}(\lambda_i)), \quad (\text{B8})$$

en la que λ_i corresponde a todos los valores característicos de $\mathbf{A}_e(\nu)$. Con la ecuación (B8) se pueden determinar aquellos valores de λ que sean imaginarios si $gap(\nu) = 0$ para un ν específico.

Dado que el escalar $e^{-2\pi\nu j}$ es el complejo conjugado de $e^{-2\pi(1-\nu)j}$, la matriz $A_e(\nu)$ es por definición un complejo conjugado de $A_e(1-\nu)$. Para cada ν en $0.5 \leq \nu < 1$ donde existan valores característicos en el eje imaginario positivo en $A_e(\nu)$, existe uno correspondiente en $0 < w \leq 0.5$ ($w = 1 - \nu$) que conduce a valores característicos en el eje imaginario negativo en $A_e(w)$.

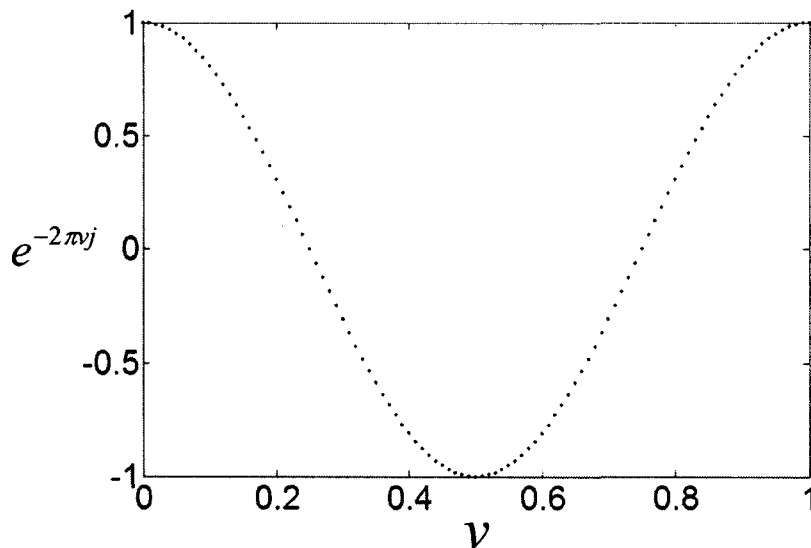


Figura 1B. Representación de la función $e^{-2\pi\nu j}$

De esta forma, el problema para obtener la solución de la ecuación (B7) se convierte en un problema de una sola variable.

$$gap(\nu) = 0, \quad 0 \leq \nu \leq 0.5 \quad (\text{B9})$$

La Figura 2B muestra la forma típica de la función $gap(\nu)$ para un modelo de un grado de libertad. Se puede observar que en esta gráfica existen dos soluciones para $gap(\nu) = 0$.

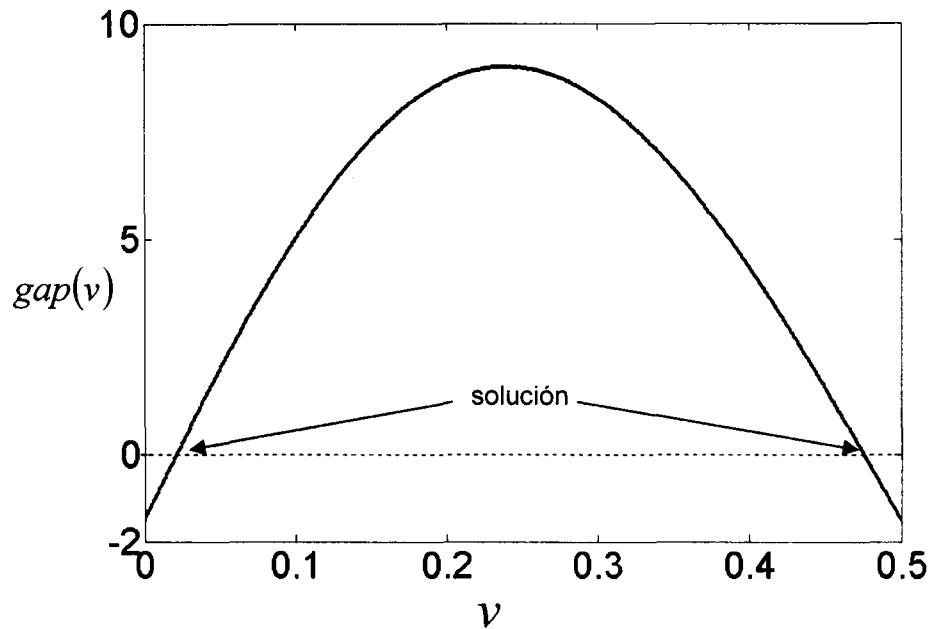


Figura 2B. Gráfica de la función $gap(\nu)$ para un modelo de un grado de libertad.

Después de resolver la ecuación (B9), los valores obtenidos de ν que hagan $gap(\nu) = 0$ son utilizados como parámetros para determinar las frecuencias de *chatter* ω_c así como las velocidades de giro $\frac{1}{T}$.

La frecuencia de *chatter* ω_c es equivalente a la magnitud de la parte imaginaria de la solución en la ecuación (B7), $\text{Im}(\lambda)$. Con este valor, la velocidad de giro se puede obtener mediante:

$$\frac{1}{T} = \frac{\text{Im}(\lambda)}{(m + \nu)2\pi}, \quad \text{Im}(\lambda) \geq 0$$

$$\frac{1}{T} = \frac{-\text{Im}(\lambda)}{(m + 1 - \nu)2\pi}, \quad \text{Im}(\lambda) < 0$$

(B10)

Como ya se había mencionado anteriormente, m corresponde a un número natural.

La representación de los lóbulos de estabilidad mediante este método se puede observar en la Figura 3B los cuales corresponden a un sistema de una grado de libertad con valores de $\omega_n = 150 \text{ rad/seg}$ y $\xi = 0.05$. La variable m tomó los valores de 0, 1 y 2.

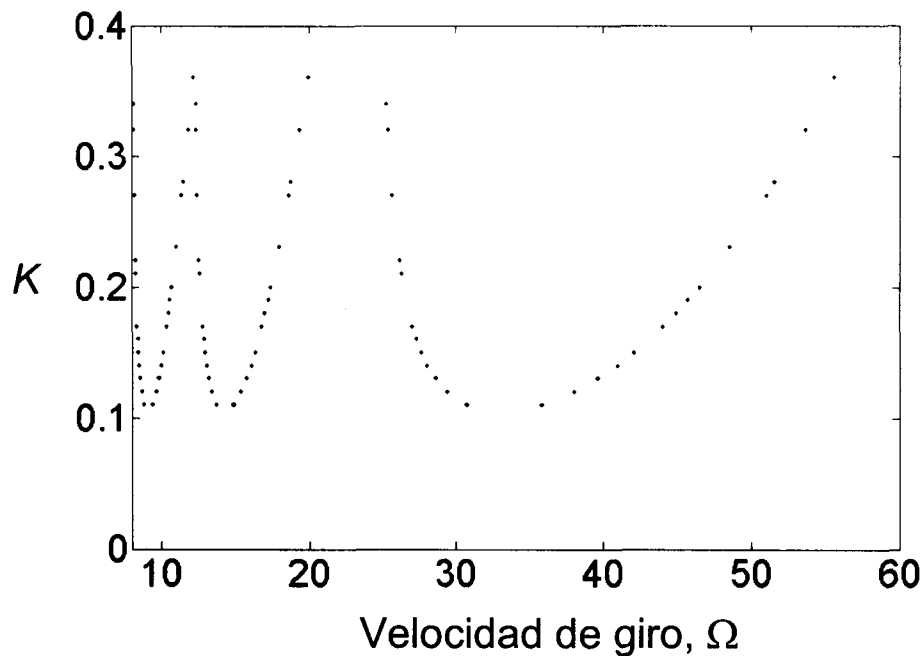


Figura 3B. Gráfica de estabilidad para un modelo de un grado de libertad usando la función *gap*

De la Figura 3B se puede concluir que no existe diferencia significativa entre los lóbulos generados con el método tradicional [5] en la Figura 5 y los obtenidos con este nuevo procedimiento.

Básicamente lo que aporta este método, como bien lo menciona en su título, es un análisis computacional general para no tener problemas en encontrar el dominio de la frecuencia de *chatter* para cada sistema dinámico específico.

ANEXO C. Artículo

El siguiente artículo fue enviado para su participación en el Congreso Internacional de Ingeniería Mecánica de la ASME que se llevará acabo en los días 5-11 de Noviembre de 2005 en Orlando, Florida USA.

IMECE2005-81951

CHATTER PREDICTION IN ORTHOGONAL CUTTING BASED ON LAMBERT FUNCTION

Alex Elias
Professor

Department of Mechanical Engineering

Ciro A. Rodriguez
Professor

Center for Innovation in Design and Technology

Eva Delgadillo, Alejandro Martinez, Francisco Araya, & Victor Flores
Graduate Research Assistants
Department of Mechanical Engineering

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Monterrey, NL MEXICO

ABSTRACT

This paper will illustrate the application of the Lambert Function, as originally proposed by Asl and Ulsoy, to obtain the stability lobes in orthogonal cutting operations. The Lambert function approach will be compared to the classical approach. It will be shown that the stability lobes obtained with this procedure match with those obtained with the classical approach, under certain system parameter values.

Keywords: Orthogonal cutting; Stability lobes; Chatter; Lambert function.

NOMENCLATURE

a	width of cut
\mathbf{A}	2 X 2 matrix
\mathbf{B}	2 X 2 matrix
c	damping coefficient of the tool
F_f	radial component of the resultant cutting force
H_r	stiffness ratio
h_0	static chip thickness
k	stiffness of the tool
k_c	cutting coefficient
K_f	cutting coefficient in the radial direction
k_m	structural stiffness of the workpiece vibration system
k_1	cutting coefficient
m	mass of the system

μ	overlap factor
θ	side cutting edge angle
ω_n	natural frequency
$x(t)$	time-dependent displacement of the tool at the present time
$x(t-T)$	displacement of the tool one spindle revolution period T before
ξ	damping coefficient of the tool

INTRODUCTION

It is well known that the Lambert W function has many applications in pure and applied mathematics since it provides the analytical solution of delayed differential equations [1]. The application of the Lambert function to the solution of linear delay differential equations is of particular interest to the machine tool dynamics community since it satisfies $W(x)e^{W(x)} = x$. In this context, Chen and Moore have developed the analytical solution to find the stability limits of second-order linear delay differential equations with repeating poles [2].

The concept of the state transition matrix in ordinary differential equations can be generalized to delay differential equations using Lambert function. The simplicity of this approach, compared to other available analytical solution techniques, lies in the fact that the solution is analogous to the general solution form of ordinary differential equations. Based

on this idea, Asl and Ulsoy introduced the use of the Lambert function to solve the transcendental characteristic equation of a system of delay differential equations that models the chatter vibrations in orthogonal cutting [3]. In this case, once the Lambert function was introduced, a numerical method was required to obtain the stability limits of the system. In the present paper, we investigate the application of Asl and Ulsoy approach to obtain the stability lobes of orthogonal cutting by considering a wider range of system parameters.

FUNDAMENTALS

Machine tool chatter results from a self-excitation mechanism in the chip generation process. In this section we explain the main characteristics of regenerative chatter vibrations by using a simple orthogonal cutting process. It is well-known that the resulting dynamic chip thickness [4], in orthogonal cutting, varies as a function of the vibrational frequency and the rotational speed of the workpiece.

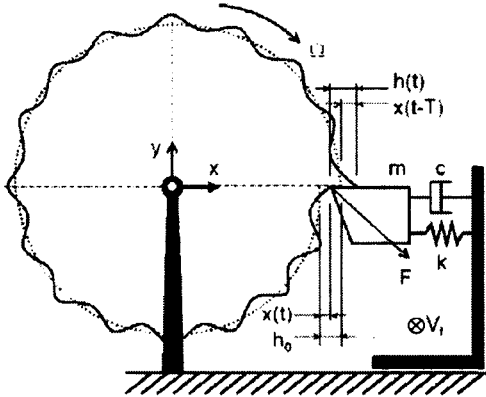


Figure 1. Schematic representation of the dynamic system in orthogonal cutting.

Thus, the general dynamic chip thickness can be determined as follows

$$h(t) = h_0 - [x(t) - x(t-T)], \quad (2.1)$$

Where h_0 is the static chip thickness, which is proportional to the feed per revolution, $x(t)$ is the time-dependent displacement of the tool at the present time t , $x(t-T)$ is the displacement of the tool one spindle revolution period T (time delay) before. If we assume that the dynamics behavior of this machine operation is described by a single degree of freedom system [4] in the radial direction, then the equation of motion of the tool can be written as:

$$\begin{aligned} mx(t) + cx(t) + kx(t) &= F_f(t) = K_f ah(t) \\ &= K_f a [h_0 - [x(t) - x(t-T)]] \end{aligned} \quad (2.2)$$

Where m , c , and k are the mass, damping coefficient and stiffness of the tool, F_f represents the radial component (x direction) of the resultant cutting force (F), K_f is the cutting coefficient in the radial direction, and a represents the width of cut. Equation (2.2) may be written as

$$x(t) + 2\xi\omega_n x'(t) + x(t)\omega_n^2(1+K) = C + K\omega_n^2 x(t-T), \quad (2.3)$$

where

$$2\xi\omega_n \equiv \frac{c}{m}; \quad K \equiv \frac{K_f a}{k}; \quad C \equiv \frac{K_f a h_0}{m}; \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m}, \quad (2.4)$$

Here ξ represents the damping coefficient of the tool. Thus, (2.4) reduces to the familiar delay differential equation

$$x^*(t) + 2\xi\omega_n x^*(t) + x^*(t)\omega_n^2(1+K) = C + K\omega_n^2 x^*(t-T), \quad (2.5)$$

in which the transformation $x^*(t) = x(t) - C/\omega_n^2$ has been introduced.

By following Asl and Ulsoy procedure as described in [3] (a similar procedure is also shown in [5]), we write Equation (2.5) in its matrix form:

$$\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{A}\mathbf{x}^*(t-T) + \mathbf{B}\mathbf{x}^*(t) = 0, \quad (2.6)$$

where \mathbf{A} and \mathbf{B} are 2×2 matrices given by

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\mu K \omega_n^2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \omega_n^2(1+K) & 2\xi\omega_n \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

and $x^*(t)$ and $\dot{x}^*(t)$ are 2×1 vectors. The solution of Equation (2.6) is of the form $x^* = D e^{\lambda t}$; where D is an arbitrary constant and λ is the characteristic value. Substituting $x = D e^{\lambda t}$ into Equation (2.6), gives the following characteristic equation:

$$\lambda \mathbf{I} e^{\lambda T} = -\mathbf{A} - \mathbf{B} e^{\lambda T}, \quad (2.8)$$

Where \mathbf{I} is the identity matrix. Thus, Equation (2.8) can be written in the form

$$(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{B}) T e^{(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{B}) T} = -(\mathbf{A}) T e^{\mathbf{B} T}. \quad (2.9)$$

This equation (2.9) has the form of the Lambert Function

$$W(-\mathbf{A}) e^{W(-\mathbf{A})} = -\mathbf{A}. \quad (2.10)$$

Using the generalized matrix Lambert function, Equation (2.9) becomes

$$(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{B}) T = W(-\mathbf{A} T e^{\mathbf{B} T}) \quad (2.11)$$

The characteristic roots of Equation (2.11) that describe the stability of the vector delay differential equation (2.6) can be obtained by finding the roots of

$$\det \left\{ \lambda \mathbf{I} - \left(\frac{1}{T} \mathbf{W} \left(-\mathbf{A} T e^{\mathbf{B}T} \right) + \mathbf{B} \right) \right\} = 0. \quad (2.12)$$

It is important to note that Equations (2.6) to (2.12) are the same as those derived by Asl and Ulsoy in reference [3]. In the following section, we illustrate the application of Asl and Ulsoy approach (based on the Lambert function) to the study of the stability limits in orthogonal cutting.

RESULTS

Case I

The stability lobes associated with the principal branch of the Lambert function may be obtained by numerically solving Equation (2.12). To illustrate this approach, we chose the following parameter values $\xi = 0.01$ and $\omega_n = 150$ rad/sec. Figure 2 shows a comparison between the stability charts obtained by the principal branch of the Lambert function with those obtained by the classical procedure describe in the literature, (such as Stepan in [6] or Ngoc in [7]).

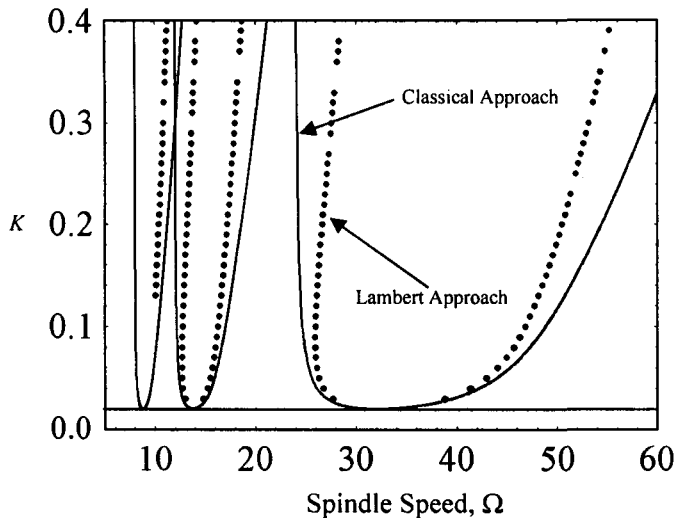


Figure 2. Stability lobes for orthogonal cutting and parameter values of $\xi = 0.01$, and $\omega_n = 150$ rad/sec .

It is clearly seen in Figure 2 that the Lambert stability charts provides the same minimum value for stiffness ratio (k_c/k_m) but their stability lobes are narrower than those of the classical approach. However, using the parameter values of $\xi = 0.05$ and $\omega_n = 150$ rad/sec. (as those used by Asl and Ulsoy in [2]), Figure 3 shows that the minimum value for the stiffness ratio is higher compared to that obtained by the classical approach. Therefore, according to the results obtained with Lambert approach in Figure 3, the maximum width of cut for the stable region would be larger than that of the critical value first derived by Tlustý and Tobias [4]. The discrepancy between the results shown in Figure 3 and those obtained by Asl and Ulsoy in Figure 9 of reference [3] is probably due to the numerical approach used to solve Equation (2.12).

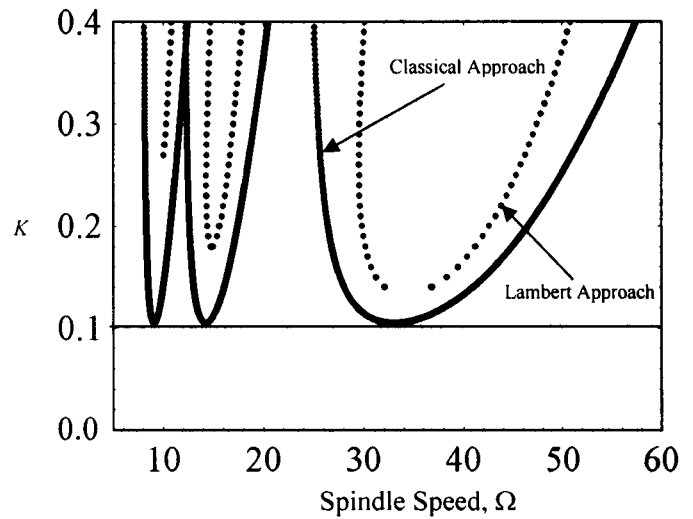


Figure 3. Stability lobes for orthogonal cutting and parameter values of $\xi = 0.05$, and $\omega_n = 150$ rad/sec .

Case II

In this case, we use Lambert approach to obtain the stability lobes of a machine tool vibration problem first analyzed analytically and experimentally by Stepan in [6]. Although Stepan deals with a boring operation, the problem is formulated as a turning operation and its equation of motion assumes the form

$$x(t) + 2\xi\omega_n x(t) + \omega_n^2(1 + K)x(t) = K\omega_n^2 \mu \alpha(t - T), \quad (3.1)$$

where $K \equiv k_f/k$, and $k_f = (3/4) K k_f a h_0^{-1/4}$. The natural frequency in the workpiece radial direction is 84.1Hz. The damping coefficient ξ , the overlap factor μ , the mass of the chock and other oscillating parts m , the cutting coefficient k_f , and the stiffness of the shaft and the soft supports k have the value, respectively, of 0.025, 0.8, 346 kg, $8.5 \text{ N } \mu\text{m}^{-1}$, and $97 \text{ N } \mu\text{m}^{-1}$. Figure 4 compares the stability lobes obtained by using the Lambert approach and the classical solution. We may see from Figure 4 that the classical approach provides stability lobes that deviate from those of the Lambert approach. Clearly, there is more research to be conducted in order to establish the conditions under which the Lambert approach is valid. This motivates the study of the following case III that is related to a turning operation in which the Coriolis effect is included.

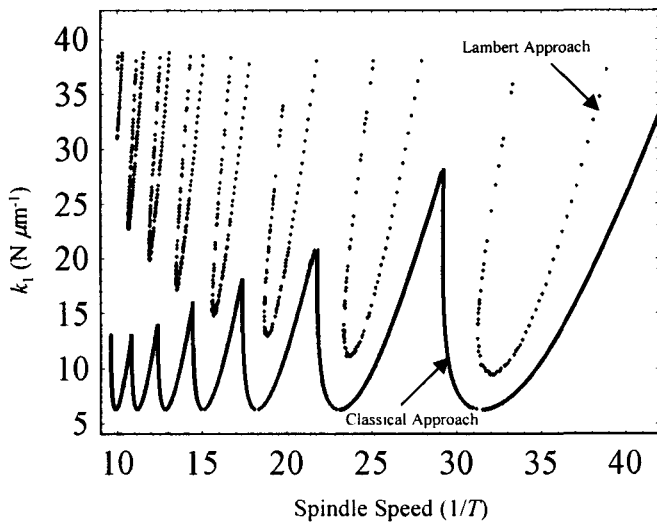


Figure 4. Stability lobes for orthogonal cutting and parameter values of $\omega_n=84.1$ Hz, $\xi=0.025$, $\mu=0.8$, the system total mass $m=346$ kg, and $k=97$ N μm^{-1} .

Case III

This case study is based on the work of Chiou with turning operations of a slender workpiece (length of 14.76 in and diameter of 1.97 in) shown in Figure 5 [8]. Since the Coriolis force associated with the spinning of the workpiece in turning is considered, the equation of motion that describes this turning operation is given by

$$x(t) + \dot{x}(t)(2\xi\omega_n - 2\lambda\Omega) + x(t)\omega_n^2(1 + H_r) = \omega_n^2 H_r \sin^2 \theta x(t-T), \quad (3.2)$$

where

$$2\xi\omega_n \equiv \frac{c}{m}; \quad H_r \equiv \frac{k_c}{k_m}; \quad \omega_n^2 = \frac{k_m}{m}; \quad \lambda = \frac{y}{x}. \quad (3.3)$$

Here x and y are the time displacement of the workpiece in the radial and tangential direction, respectively; k_c is the cutting coefficient, k_m is the structural stiffness of the workpiece vibration system, m is the workpiece mass, c is the structural damping coefficient of the workpiece vibration system, ω_n represents the natural frequency of the workpiece, θ is the side cutting edge angle, and ξ is the damping ratio of the workpiece.

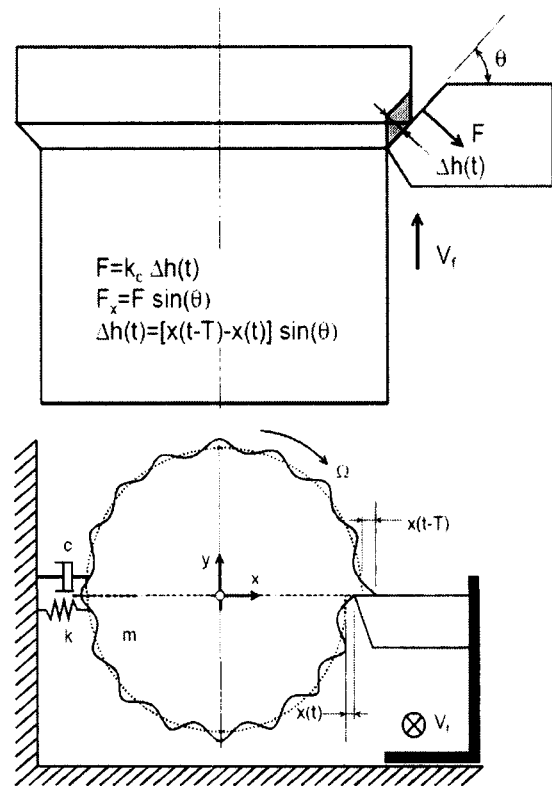


Figure 5. Schematic representation of the dynamic system in a turning operation with slender workpiece.

The system parameter values were determined experimentally in Chiou's study ($k_c=1800$ lb/in, $\xi=0.0312$, $\omega_n=183$ Hz, $1.25 \leq \lambda \leq 1.35$ for cutting speed between 268 to 560 ft-min⁻¹, and $\theta=30^\circ$). Figure 6 shows the stability lobes with Lambert and the classical approaches considering the Coriolis effect ($\lambda=1.25$). In this case, Lambert approach overestimates stability limits for low cutting velocity values compared with the classical approach.

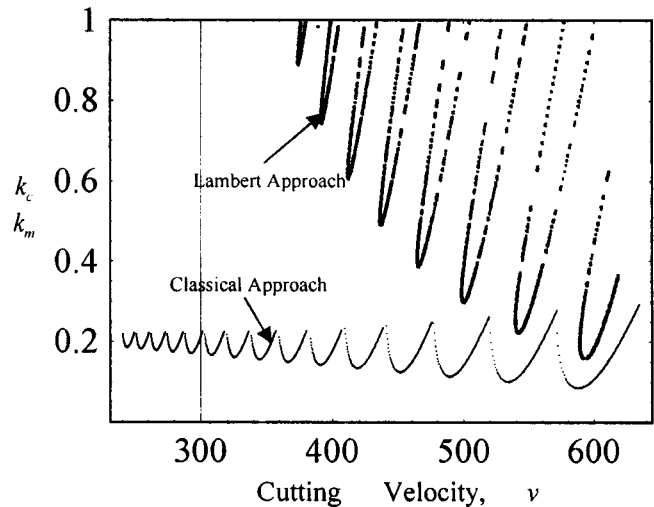


Figure 6. Stability lobes for a turning operation and parameter values of $\omega_n=183$ Hz, $\xi=0.0312$, $k_c=1800$ lb/in, and $\lambda=1.25$.

CONCLUSIONS

In this work we present the application of Lambert approach to study the stability limits in orthogonal cutting. We observe that in case I, Lambert approach virtually gives, for small damping ratio, the same minimum value for the stiffness ratio, but their stability lobes are narrower than those of the classical approach. As the values of ξ increase, Lambert approach provides a minimum value for the stiffness ratio that is larger to that of the classical solution. We have also found that in Cases II and III the stability lobes of Lambert approach deviate significantly from the classical approach. It is interesting to note that while the Lambert solution is correct from the mathematical point of view, having stability lobes with an inclination (as shown in Figure 6) in turning operations has not been reported in the literature, to the best of authors' knowledge. The differences that Lambert approach exhibit with respect to the classical solution in the above cases suggest that more fundamental and experimental research needs to be conducted to establish the conditions under which Lambert approach could be valid.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was partially funded by the Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Monterrey through the Research Chair in Mechatronics.

References

- [1] Corless, R. M., Gonnet, G. H., Hare, D. E. G., Jeffrey, D. J., & Knuth, D. E., 1996, "On the Lambert W function", *Advances in Computational Mathematics*, Vol. 5, 329-359.
- [2] Chen Y. Q. and Moore K. L., 2002, "Analytical stability bound for delayed second-order systems with repeating poles using Lambert function W", *Automatica*, Vol. 38, 891-895.
- [3] Asl M. and Ulsoy A. G., 2003, "Analysis of a System of Linear Delay Differential Equations", *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 125, 215-223.
- [4] Altintas Y., Weck M., 2004, "Chatter stability of metal cutting and grinding", *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 53 (2): 619-642.
- [5] Li C. J., Ulsoy A. G., Endres WJ, 2003, "The effect of flexible-tool rotation on regenerative instability in machining", *Journal of Manufacturing Science and Engineering - Transactions of the ASME* 125 (1): 39-47.
- [6] Stepan G, 2001, "Modelling nonlinear regenerative effects in metal cutting", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A - Mathematical Physical and Engineering Sciences* 359 (1781): 739-757.
- [7] Le-Ngoc L. 2002, "Simple stability analyses of a regenerative chatter problem and of a time-delayed displacement feedback sdof system", 258 (2), 373-384.
- [8] Chiou Y.S., Chung E. S., Liang S.Y., 1995, "Analysis of Tool Wear Effect on Chatter Stability in Turning", *International Journal of Mechanical Sciences* 37 (4): 391-404

Centro de Información-Biblioteca



3000200659664