

**INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY
CAMPUS ESTADO DE MÉXICO**



**UN MÉTODO NUMÉRICO PARA LA SOLUCIÓN DE
PROBLEMAS DE ELASTICIDAD DE CUERPOS CON
DEFECTOS E INCLUSIONES**

TESIS QUE PARA OPTAR EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS EN SISTEMAS DE MANUFACTURA
PRESENTA

JOSÉ FERNANDO GARCÍA PUERTOS

Asesor: Dr. SERGUEI KANAOUN MIRONOV

Comité de Tesis: Dr. OLEKSANDR TKACHENKO VASILIEVICH
Dr. SADEGH BABAI KOCHESERAI

Jurado: Dr. OLEKSANDR TKACHENKO VASILIEVICH	Presidente
Dr. SADEGH BABAI KOCHESERAI	Secretario
Dr. SERGUEI KANAOUN MIRONOV	Vocal

Atizapán de Zaragoza, Edo. Méx., 29 de Julio del 2005.

RESUMEN

La aplicación de un método para resolver problemas de elasticidad en cuerpos con defectos e inclusiones se muestra a lo largo de este trabajo. Estableciendo primeramente un modelo de ecuaciones integrales, el cálculo de las respectivas soluciones se realiza mediante una nueva clase de funciones de aproximación, que simplifican el proceso de construcción de la matriz final del sistema algebraico correspondiente. Estas funciones base (Gaussianas) centradas alrededor de cada punto del dominio, permiten obtener las densidades de potencial elástico en la ecuación integral a través de la aproximación de una serie de integrales que corresponden a los coeficientes del sistema, los cuales pueden determinarse analíticamente la mayor parte de las veces, y en el peor de los casos mediante una simple cuadratura.

La ventaja principal al usar estas funciones es que la acción de los operadores integrales sobre ellas puede ser presentada en una simple forma analítica (como combinaciones de unas cuantas funciones estándar), cuyos valores pueden ser tabulados y almacenados fácilmente para la solución posterior de cualquier problema de elasticidad. Además ya que los coeficientes del sistema resultante dependen únicamente de las coordenadas de un determinado número de puntos en que ha sido dividida la región por analizar, se vuelve innecesario definir los *elementos* (sub-regiones) requeridos por otros métodos.

Los resultados generados al emplear la técnica en varios problemas son comparados con las respectivas soluciones exactas, en el afán de identificar la influencia del tipo de malla usado, el contraste (diferencia entre las propiedades de la perturbación y el medio donde se encuentra) y la modificación de los parámetros propios de la técnica en los valores así calculados; así como el grado de precisión obtenido. Asimismo se utiliza la regularización de Tikhonov de manera auxiliar en algunos casos, donde las soluciones son producto de sistemas mal condicionados; provocados por las propiedades del problema considerado.

CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN	6
1.1. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS	7
1.2. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE FRONTERA	9
1.3. ECUACIONES INTEGRALES DE FÍSICA MATEMÁTICA	10
1.4. SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES INTEGRALES	11
1.5. PLAN DE TESIS	14
2. ECUACIONES INTEGRALES DEL PROBLEMA DE ELASTICIDAD PARA INCLUSIONES EN UN MEDIO ELÁSTICO	15
3. REGULARIZACIÓN DE TIKHONOV.....	24
4. FUNCIONES DE APROXIMACIÓN DE GAUSS.....	26
4.1. PROPIEDADES DE APROXIMACIÓN POR MEDIO DE LAS FUNCIONES DE GAUSS	27
4.2. EJEMPLOS	27
5. DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES INTEGRALES DEL PROBLEMA DE ELASTICIDAD PARA UNA INCLUSIÓN.....	29
6. RESULTADOS NUMÉRICOS.....	36
6.1. INCLUSIÓN CIRCULAR CON PROPIEDADES CONSTANTES	37
6.2. INCLUSIÓN CIRCULAR CON PROPIEDADES CONSTANTES DENTRO DE UNA SUB-REGIÓN DETERMINADA POR EL VALOR DEL RADIO (ANILLOS O CAPAS).....	42
6.3. INCLUSIÓN CIRCULAR CON PROPIEDADES VARIABLES DE ACUERDO AL VALOR DE SU RADIO (FUNCIÓN PARABÓLICA)	46
7. CONCLUSIONES	51
REFERENCIAS.....	54
BIBLIOGRAFÍA.....	56
LIBROS	56
ARTÍCULOS	57
MANUALES	58
WEB RESOURCES	58

TABLA DE FIGURAS

CAPITULO 1

- Fig. 1. 1. 1** Discretización del dominio Ω , donde cada elemento es definido en el plano $n_1 \times n_2$ - FEM. **8**
Fig. 1. 2. 1 Discretización de la frontera - BEM. **9**

CAPÍTULO 4

- Fig. 4. 2. 1** Aproximación de la función $v(x) = (1+x^3)$, $|x| \leq 1$; $v(x) = 0$, $|x| > 1$. **28**

CAPITULO 6

- Fig. 6. 1** Mallas para el cálculo de los campos elásticos en una inclusión: (a) Estándar, (b) Circular. **37**
Fig. 6. 1. 1 Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con $\mu = 3$, $\lambda = 3$. - variación de **h** - **38**
Fig. 6. 1. 2 Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con $\mu = 3$, $\lambda = 3$. - variación de **H** - **38**
Fig. 6. 1. 3 Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con $\mu = 3$, $\lambda = 3$. - variación de γ - **39**
Fig. 6. 1. 4 Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con $\mu = 0.1$, $\lambda = 0.1$. - variación de **h** - **39**
Fig. 6. 1. 5 Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con $\mu = 0.1$, $\lambda = 0.1$. - variación de **H** - **40**
Fig. 6. 1. 6 Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con $\mu = 0.1$, $\lambda = 0.1$. - variación de γ - **40**
Fig. 6. 1. 7 Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con $\mu = 7$, $\lambda = 7$. - variación de **h** - **41**
Fig. 6. 1. 8 Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con $\mu = 7$, $\lambda = 7$. - variación de **H** - **41**
Fig. 6. 1. 9 Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con $\mu = 7$, $\lambda = 7$. - variación de γ - **41**
Fig. 6. 2. 1 (a) Solución de ϵ_{11} para una inclusión con capas: $\mu_{\text{int}} = 3$, $\mu_{\text{ext}} = 2$ con dos tipos de malla. **42**
 (b) Solución de ϵ_{11} para una inclusión con capas: $\mu_{\text{int}} = 3$, $\mu_{\text{ext}} = 2$ - variación de **h** -
Fig. 6. 2. 2 Solución de ϵ_{11} para una inclusión con capas: $\mu_{\text{int}} = 3$, $\mu_{\text{ext}} = 2$ - variación de **H** - **43**
Fig. 6. 2. 3 Solución de ϵ_{11} para una inclusión con capas: $\mu_{\text{int}} = 3$, $\mu_{\text{ext}} = 2$ - variación de γ - **43**
Fig. 6. 2. 4 (a) Solución de ϵ_{11} para una inclusión con capas: $\mu_{\text{int}} = 0.5$, $\mu_{\text{ext}} = 0.7$ con dos tipos de malla. **44**
 (b) Solución de ϵ_{11} para una inclusión con capas: $\mu_{\text{int}} = 0.5$, $\mu_{\text{ext}} = 0.7$ - variación de **h** -
Fig. 6. 2. 5 Solución de ϵ_{11} para una inclusión con capas: $\mu_{\text{int}} = 0.5$, $\mu_{\text{ext}} = 0.7$ - variación de **H** - **44**
Fig. 6. 2. 6 Solución de ϵ_{11} para una inclusión con capas: $\mu_{\text{int}} = 0.5$, $\mu_{\text{ext}} = 0.7$ - variación de γ - **44**
Fig. 6. 2. 7 (a) Solución de ϵ_{11} para una inclusión con capas: $\mu_{\text{int}} = 10$, $\mu_{\text{ext}} = 3$ con dos tipos de malla. **45**
 (b) Solución de ϵ_{11} para una inclusión con capas: $\mu_{\text{int}} = 10$, $\mu_{\text{ext}} = 3$ - variación de **h** -
Fig. 6. 2. 8 Solución de ϵ_{11} para una inclusión con capas: $\mu_{\text{int}} = 10$, $\mu_{\text{ext}} = 3$ - variación de **H** - **45**
Fig. 6. 2. 9 Solución de ϵ_{11} para una inclusión con capas: $\mu_{\text{int}} = 10$, $\mu_{\text{ext}} = 3$ - variación de γ - **46**
Fig. 6. 3. 1 (a) Solución de ϵ_{11} para una inclusión con $\mu_1 = \mu_0 (1-0.9 r^2)$, con dos tipos de malla. **46**
 (b) Solución de ϵ_{11} para una inclusión con $\mu_1 = \mu_0 (1-0.9 r^2)$ - variación de **h** -
Fig. 6. 3. 2 Solución de ϵ_{11} para una inclusión con $\mu_1 = \mu_0 (1-0.9 r^2)$ - variación de **H** - **47**
Fig. 6. 3. 3 Solución de ϵ_{11} para una inclusión con $\mu_1 = \mu_0 (1-0.9 r^2)$ - variación de γ - **47**
Fig. 6. 3. 4 (a) Solución de ϵ_{11} para una inclusión con $\mu_1 = \mu_0 (1 + 3 r^2)$, con dos tipos de malla. **48**
 (b) Solución de ϵ_{11} para una inclusión con $\mu_1 = \mu_0 (1 + 3 r^2)$ - variación de **h** -
Fig. 6. 3. 5 Solución de ϵ_{11} para una inclusión con $\mu_1 = \mu_0 (1 + 3 r^2)$ - variación de **H** - **48**
Fig. 6. 3. 6 Solución de ϵ_{11} para una inclusión con $\mu_1 = \mu_0 (1 + 3 r^2)$ - variación de γ - **48**
Fig. 6. 3. 7 (a) Solución de ϵ_{11} para una inclusión con $\mu_1 = \mu_0 (1 + 10 r^2)$, con dos tipos de malla. **49**
 (b) Solución de ϵ_{11} para una inclusión con $\mu_1 = \mu_0 (1 + 10 r^2)$ - variación de **h** -
Fig. 6. 3. 8 Solución de ϵ_{11} para una inclusión con $\mu_1 = \mu_0 (1 + 10 r^2)$ - variación de **H** - **49**
Fig. 6. 3. 9 Solución de ϵ_{11} para una inclusión con $\mu_1 = \mu_0 (1 + 10 r^2)$ - variación de γ - **50**

1. INTRODUCCIÓN

A diario se utilizan todo tipo de materiales en todos los sectores de la industria, y a pesar de los avances tecnológicos en los procesos de fabricación es inevitable que se presenten un cierto número de defectos en la estructura. Este tipo de características: vacancias, huecos, intersticios, etc. puede modificar el comportamiento elástico del material de manera perjudicial si no se tiene el control apropiado. Sin embargo, la inserción de “defectos” (como las inclusiones) se hace también de manera intencional con el propósito de variar las propiedades del material original; creando de este modo materiales compuestos a partir de la combinación de al menos dos elementos (tal es el caso de una matriz homogénea y un arreglo de inclusiones).

El comportamiento de esta clase de compuestos - usada en una amplia variedad de aplicaciones -, no puede ser descrito fielmente con la teoría clásica de elasticidad, porque al igual a lo ocurrido con los defectos, únicamente ha sido desarrollada para los problemas más sencillos. De modo que el cálculo de las ecuaciones que modelan las situaciones más complejas, cuya relevancia y/o aplicación son de particular interés, es un importante problema de la teoría de medios no homogéneos. Así por ejemplo, cuando un medio con una inclusión de geometría compleja es sujeta a un campo externo arbitrario, la respuesta del material sólo puede ser calculada de forma numérica.

En la búsqueda de dichas soluciones, los trabajos realizados no han servido únicamente para crear variantes de los métodos más comunes que si puedan realizar la tarea, sino también han guiado hacia nuevas herramientas cuya aplicación no se ha limitado al campo que les dio origen. Esto explica como a pesar de que el método de elementos finitos FEM (Finite Element Method) - considerado una de las herramientas más poderosas - no resulta muy útil en estos casos (debido a que al ocupar la matriz - medio de fondo - una región más grande que la de las inclusiones, se vuelve impráctico realizar el análisis), si ha servido de base para el XFEM (Extended Finite

Element Method), entre cuyas aplicaciones esta la del modelado de problemas de inclusiones y agujeros situados de forma arbitraria [1].

Por su parte, el método de elementos de frontera BEM (Boundary Element Method) - una de las alternativas al FEM para evitar el problema de discretización surgido en estas situaciones - ha sido también mejorado y aplicado en el caso de inclusiones circulares [2]. La diferencia con respecto al BEM convencional estriba en que se vuelve innecesario trabajar con las fronteras de las inclusiones, gracias a que la distribución potencial en la inclusión circular es aproximada por una simple serie de Fourier en la dirección angular y por un polinomio de segundo orden en la dirección radial. Con ello el número total de libertades sufre una reducción si se compara con el método convencional.

Ahora si a la generación de diferentes técnicas se refiere, merece cierta atención el nuevo método de aproximación propuesto por V. Maz'ya [3], [4], que se caracteriza por aproximaciones muy precisas en ciertos rangos útiles para los cálculos numéricos y que por lo general no converge fuera de ellos. Esto ha dado origen no sólo al nombre asignado a este tipo de procesos: *approximate approximations* [5]; sino también a una variante del BEM nombrada por su creador como BPM (Boundary Point Method) [6], [7]; debido a que los puntos de la frontera (nodos) realizan el papel de los elementos de frontera del BEM convencional.

Ahora bien si estos métodos son una muestra del interés que existe sobre el área referida, no bastan para ejemplificar la gran variedad de técnicas desarrolladas y aplicadas día con día, por lo que no debe extrañarse el hecho de encontrar otros métodos con características que ni siquiera han sido contempladas en este trabajo. De tal manera que la descripción que a continuación se presenta, sólo pretende dar una idea de algunas de los conceptos fundamentales de las técnicas más conocidas, obviando otros elementos cuyo conocimiento se considera es propio de quién esta interesado en este tipo de temas.

1.1. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Ante todo el objetivo de cualquier método es resolver el modelo planteado para un problema en particular, por ello no importando de cual se pretenda usar el primer paso es describir el fenómeno matemáticamente basándose en principios físicos básicos, para lo cual pueden usarse ecuaciones diferenciales. En lugar de esta *formulación diferencial*, el fenómeno puede describirse en términos de la minimización de la energía total del sistema (o *funcional*) asociado con el problema, la cual es llamada *formulación variacional* [8], [9]. La formulación de elementos finitos puede derivarse de esta formulación variacional tanto como exista un principio variacional correspondiente al problema de interés.

Por lo que si

$$L(\tilde{\phi}) = 0, \quad \text{Formulación diferencial} \quad (1.1.1)$$

y

$$\Pi(\tilde{\phi}(x)), \quad \text{Energía Total - Formulación Variacional} \quad (1.1.2)$$

se busca $\tilde{\phi}(x)$ para minimizar $\Pi(\tilde{\phi}(x))$, lo cual es una función de una función: *Funcional*.

El objetivo será en consecuencia encontrar una solución aproximada que minimice un funcional $\Pi(\tilde{\phi}(x))$. El FEM resulta ser por lo tanto un método que permite realizar este propósito, para lo cual en principio se debe discretizar el dominio de interés en W elementos (sub-regiones) - Fig. 1.1.1 -.

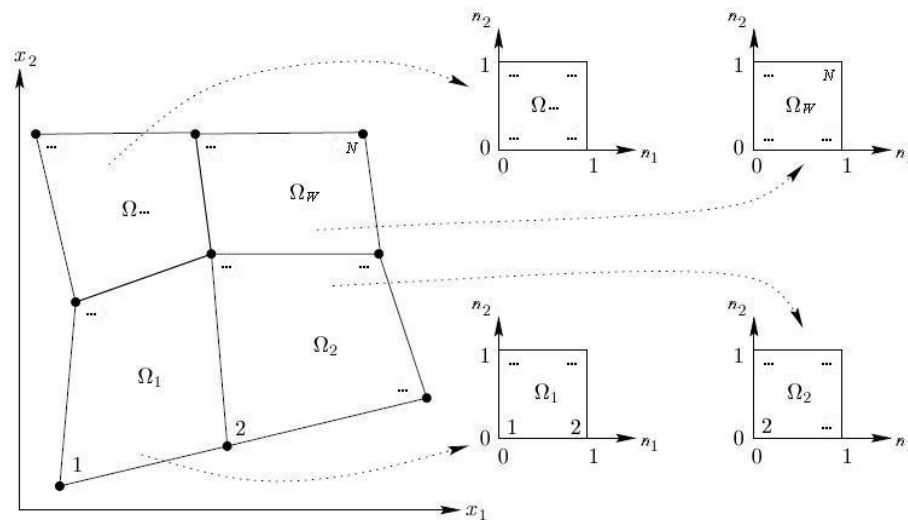


Fig. 1. 1. 1 Discretización del dominio Ω , donde cada elemento es definido en el plano $n_1 \times n_2$ - FEM.

Es importante seleccionar el elemento que más se ajuste al problema en cuestión (orden del polinomio en la interpolación - número de nodos en cada elemento -), y determinar las funciones de forma (interpolación, que dependen de las *coordenadas naturales* - o *nodales*, es decir, “dentro” de cada elemento -) para el tipo de elemento seleccionado, los cuales dependen de lo siguiente:

- Forma (*1D, 2D, 3D, triangular, cuadrilátero, tetrahedro, etc.*)
- Número y tipo de nodos (nodo-3, nodo-4, etc.)
- Tipo de variables nodales ($\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \text{etc.}$)
- Tipo de funciones de interpolación (polinomios de Lagrange, polinomios de Hermitian, etc.)

De este modo la variable de campo es representada en términos de series de polinomios con *coordenadas generalizadas* o *globales*: x_1, x_2 - Fig. 1.1.1 - ; las cuales no dependen del elemento y que no tienen significado físico. Por lo que de esta representación se puede derivar otra en términos de funciones de interpolación y grados físicos de libertad [8]. Esto significa representar funciones desconocidas por medio de funciones de aproximación estándar, generando un número de funciones locales que son mucho más simples que aquellas requeridas para representar la región entera.

$$\tilde{\phi}(\mathbf{x}) = I_i(\mathbf{x})\phi_i, \quad \text{Solución aproximada (FEM)} \quad (1.1.3)$$

ϕ_i valores nodales
 I_i funciones de forma

$$\Pi(\tilde{\phi}) = \Pi(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N), \quad \text{a ser minimizada} \quad (1.1.4)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \phi_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N : N \text{ ecuaciones para } N \text{ desconocidas } \phi_i \text{'s.} \quad (1.1.5)$$

Entonces el siguiente paso es analizar la respuesta de cada elemento, lo que genera una matriz cuyos coeficientes están en función de las derivadas de las funciones de forma con respecto a un sistema de coordenadas global, y ya que las funciones de forma suelen estar en términos de *coordenadas naturales* o *normalizadas*: n_1, n_2 - Fig. 1.1.1 - , porque suelen definirse de esa manera, es necesario realizar una conversión para llevar a cabo este proceso.

Por último, se debe resolver la matriz de ecuaciones para obtener las variables desconocidas en los nodos. Y con ello se pueden calcular los valores de interés de la solución aproximada, usando las funciones definidas anteriormente [9].

1.2. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE FRONTERA

En este caso el enfoque numérico es tal, que un fenómeno es descrito matemáticamente por sistemas de ecuaciones integrales, en vez de diferenciales (FEM) [6]. Esto da como consecuencia una cierta simplificación, debido a que sólo es necesario resolver las ecuaciones integrales sobre la frontera, en lugar de los elementos que componen toda la región. Por lo que para aproximar una geometría, la frontera Γ del dominio Ω es dividida en \mathcal{W} elementos de frontera - Fig. 1.2.1 - , los cuales tienen uno o más nodos.

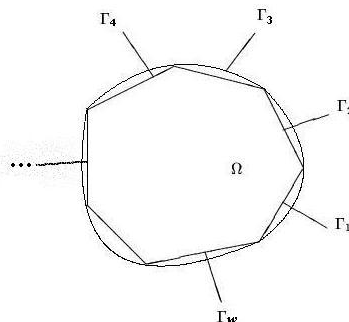


Fig. 1. 2. 1 Discretización de la frontera - BEM.

La información desconocida en la frontera puede calcularse empleando el método de colocación. El enfoque más simple es establecer un sistema de ecuaciones con tantas incógnitas como ecuaciones [10]. El principio de la técnica es la expresión de una función desconocida \mathbf{f} por la combinación lineal de un arreglo de funciones φ_n [11] (1.2.1), lo cual significa establecer el punto de carga secuencialmente en todos los nodos de la discretización, de modo tal que la variable de dominio en el punto de carga coincida con el valor nodal.

$$\mathbf{f} \approx \mathbf{f}^N = \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n \quad (1.2.1)$$

Ya que las funciones lineales y de alto orden polinomial producen nodos que pertenecen a más de un elemento, es conveniente generar una numeración global para los nodos ($n = 1, 2, 3, \dots, N$) la cual no dependa del elemento. De esta manera los coeficientes desconocidos c_n son determinados al satisfacer la ecuación integral exactamente en los N puntos de colocación. Así que al colocar el punto de carga sobre el primer nodo global, se obtiene la primera ecuación del sistema; mientras que al ubicarlo en los nodos del 2 al N , da como resultado las ecuaciones adicionales. Por lo tanto, la ecuación integral es convertida en un arreglo de ecuaciones integrales que puede ser escrito en forma matricial.

En consecuencia el problema es reducido a la solución de un sistema finito de ecuaciones lineales algebraicas, cuya matriz esta compuesta por integrales (como regla singulares) para cada uno de los elementos finitos (sub-regiones). Por lo que en el BEM la parte principal del tiempo de cómputo es utilizado para el cálculo de esas integrales [6]. Y aunque sólo puede ser aplicado a problemas lineales o de coeficientes constantes, la generación de malla (discretización del dominio) requerida para la solución es más sencilla que en el FEM, al mismo tiempo que las soluciones generadas por el BEM suelen ser más precisas que las obtenidas con el FEM.

1.3. ECUACIONES INTEGRALES DE FÍSICA MATEMÁTICA

Una ecuación en la que la función desconocida aparece bajo el signo de integración es llamada ecuación integral. Las ecuaciones integrales abarcan un gran número de áreas de la ciencia: acústica, elasticidad, mecánica de fluidos, etc. En muchos casos la ecuación integral se origina de la conversión de un problema de valores de frontera o un problema de valor inicial asociado con una ecuación diferencial parcial u ordinaria, pero otros tantos problemas llevan directamente a ecuaciones integrales y no pueden ser formulados en términos de ecuaciones diferenciales.

Existen diferentes tipos de ecuaciones integrales, la teoría clásica distingue dos tipos: de *Fredholm* y de *Volterra* [12], [13], [14], [15]. En la primera la región de integración es fija, mientras que en la segunda dicha región es variable. Por lo tanto, la expresión

$$cy(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(s, t, y(s)) ds, \quad a \leq t \leq b \quad (1.3.1)$$

es un ejemplo de una ecuación de Fredholm, mientras que

$$cy(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(s, t, y(s)) ds, \quad a \leq t \quad (1.3.2)$$

es un ejemplo de una ecuación de Volterra.

Aquí la función de ajuste $f(t)$ y el Kernel $K(s, t, y(s))$ están preestablecidas, en tanto que $y(t)$ es la función desconocida ha ser determinada. (Generalmente la integración y el dominio de la definición pueden extenderse a más de una dimensión). El parámetro λ usualmente es omitido; sin embargo, este tiene importancia en ciertas investigaciones teóricas (como la relativa a estabilidad) y en problemas de valores principales.

Si en (1.3.1) y en (1.3.2) $c = 0$, la ecuación integral es llamada de *primer tipo*. En el caso de que $c = I$, entonces la ecuación se dice es de *segundo tipo*.

Asimismo las ecuaciones (1.3.1) y (1.3.2) son lineales, si el kernel $K(s, t, y(s)) = k(s, t) y(s)$, de otra manera serán no lineales. Por lo que en el caso lineal suele referirse a $k(s, t)$ como el kernel de la ecuación.

Estos dos tipos de ecuaciones son análogos a los problemas de valor inicial y de frontera para una ecuación diferencial ordinaria (ODE, Ordinary Differential Equation); por lo tanto la ecuación de Volterra, caracterizada por un límite de integración superior variable, se puede someter a la solución por métodos progresivos, mientras que muchos de los métodos para las ecuaciones de Fredholm llevan a la solución de un sistema aproximado de ecuaciones algebraicas simultáneas [16].

1.4. SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES INTEGRALES

El punto de partida de las técnicas encaminadas a la solución es establecer una relación entre las fuentes conocidas y el campo generado por ellas en la forma de un operador integro-diferencial que actúe sobre los términos conocidos. La ecuación integral es entonces obtenida por la selección de las condiciones de frontera adecuadas y de un esquema de discretización para resolverla.

Una técnica que tiene este último propósito es el método de colocación, antes mencionado (1.2). Al establecer un sistema de ecuaciones con tantas incógnitas como ecuaciones [10], la función desconocida \mathbf{f} es expresada por la combinación lineal de un arreglo de funciones φ_n [11] (1.2.1). Esto equivale a establecer el punto de carga en todos los nodos de la discretización de manera secuencial, haciendo coincidir la variable de dominio con el valor nodal en el punto de carga.

De esta forma los coeficientes desconocidos c_n son determinados al satisfacer la ecuación integral exactamente en los N puntos de colocación. Así que al colocar el punto de carga sobre los N nodos, se obtiene el sistema de ecuaciones lineales algebraicas, cuya solución permite resolver el problema propuesto en principio.

Otro esquema de discretización para ecuaciones de la forma

$$\mathbf{L} \mathbf{f} = \mathbf{g}, \quad (1.4.1)$$

es el Método de Momentos (MoM, Method of Moments) [17], donde \mathbf{L} es un operador integro-diferencial; mientras \mathbf{g} y \mathbf{f} son funciones: la primera conocida y la última a ser determinada. El primer paso en el MoM es aproximar la función desconocida \mathbf{f} por una combinación lineal de funciones conocidas φ_n , $n = 1, 2, \dots, N$.

Así la aproximación es

$$\mathbf{f} \approx \mathbf{f}^N = \sum_{n=1}^N I_n \varphi_n, \quad (1.4.2)$$

para la cual I_n corresponde a los coeficientes desconocidos a ser determinados. Las funciones φ_n son conocidas como funciones base o funciones de expansión. En problemas prácticos es indispensable usar un número finito N de modo tal que \mathbf{f} es aproximada en el sub-espacio finito-dimensional abarcado por las funciones base. Entonces definiendo al residuo empleando la linealidad del operador:

$$\mathbf{r}^N = \mathbf{g} - \mathbf{L} \mathbf{f}^N = \mathbf{g} - \sum_{n=1}^N I_n \mathbf{L} \varphi_n. \quad (1.4.3)$$

Dicho residuo es forzado a ser ortogonal a otro sub-espacio dimensional- N abarcado por un arreglo de funciones \mathbf{t}_m , $m = 1, 2, \dots, N$. Esta condición es expresada como

$$\langle \mathbf{t}_m, \mathbf{r}^N \rangle = \mathbf{0}, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (1.4.4)$$

en la que el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es igual a

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_S \mathbf{f}' \cdot \mathbf{g} dS, \quad (1.4.5)$$

siendo $'$ la denotación del complejo conjugado. Estas funciones \mathbf{t}_m son llamadas de prueba. Insertando la ecuación (1.4.4) en la (1.4.5) resulta la siguiente ecuación matricial

$$\mathbf{Z} \mathbf{I} = \mathbf{V}, \quad (1.4.6)$$

donde \mathbf{Z} y \mathbf{V} tienen los siguientes elementos

$$Z_{mn} = \langle \mathbf{t}_m, \mathbf{L} \varphi_n \rangle, \quad (1.4.7)$$

$$V_m = \langle \mathbf{t}_m, \mathbf{g} \rangle. \quad (1.4.8)$$

Así los elementos I_n de \mathbf{I} son los coeficientes deseados en (1.4.3). Y ya que todas las funciones base interactúan con todas las otras funciones base, la matriz producida por el MoM es una matriz completa. Todo esto permite afirmar que el MoM es un método de proyección, debido a que proyecta una función desconocida dentro de un subespacio dimensional- N abarcado por las funciones base.

En cuanto a la memoria necesaria en el CPU para almacenar esta matriz, esta es del orden de $O(N^2)$; mientras que el tiempo necesario para resolverla está en el orden de $O(N^3)$ u $O(N^2)$, lo cual depende del método de solución: directo o iterativo, respectivamente. El MoM es particularmente ventajoso para configuraciones que involucran regiones homogéneas o regiones abiertas ya que sólo las fronteras necesitan ser discretizadas. Sin embargo, también ha sido usado para resolver ecuaciones integrales volumétricas para regiones no homogéneas.

El Método de Nyström [17] es otro esquema de discretización el cual no requiere de funciones base pero emplea una regla de cuadratura para aproximar todas las integrales directamente. Y aunque el método básico de Nyström no puede manejar kernels integrales singulares, esto es remediado por correcciones locales de la regla de cuadratura al incorporar la naturaleza singular del kernel. En cuanto a la memoria y el tiempo requeridos en el CPU por esta técnica están en los mismos ordenes que las correspondientes al MoM.

Por su parte el Método de Multipolos Rápido de Niveles Múltiples (MLFMM, Multilevel Fast Multipole Method) [17] es un intento de mejorar los esquemas del MoM y Nyström, los cuales permiten a todos los términos fuente interactuar con todos los otros términos fuente. En el MLFMM las zonas lejanas de interacción son reunidas en grupos y se calcula un nivel grupo a grupo. Una vez que las interacciones entre grupos son determinadas las contribuciones a los términos fuente individuales pueden ser encontradas.

Ahora bien entre las características no tan deseables, debe mencionarse que las interacciones entre grupos son tan sólo una aproximación, aceptable y controlable (en términos del error) hasta cierto punto. Además la baja complejidad computacional no garantiza que el método requiera menor uso del CPU (tiempo y memoria) que el usado por un esquema de MoM convencional. Sin embargo, el tiempo de procesamiento y la memoria empleada en el CPU del orden de $O(N \log(N))$, ha dado a este método y otros similares el nombre de *métodos rápidos*.

Por último, hay que referirse a los métodos híbridos originados por la combinación de las características sobresalientes de dos técnicas distintas [17], y de aquellas variantes o modificaciones hechas sobre las técnicas “originales” [1], [2]. A partir de esto es fácil inferir que no existe un método capaz de resolver todos los problemas. Por lo que la selección óptima de uno de ellos para resolver un caso en particular está gobernado por muchos factores, tales como requerimientos de exactitud, fácil implementación y disponibilidad del equipo de cómputo.

1.5. PLAN DE TESIS

Para llevar a cabo el objetivo propuesto se desarrollarán los elementos necesarios a lo largo de varios capítulos. De este modo, el segundo capítulo servirá para establecer las ecuaciones integrales para inclusiones en un medio elástico [18] partiendo de la definición de la región por analizar, para poder describir entonces sus características y comportamiento. Las condiciones para la existencia de soluciones únicas de estas ecuaciones [19] son contempladas también en esta parte, así como la técnica de regularización de Thikonov [20], la cual será objeto del tercer capítulo. En este se retomarán algunos de sus puntos principales a la vez que se muestra su desarrollo a lo largo del tiempo. La solución de estas ecuaciones se aproximará mediante el uso de funciones Gaussianas [6], desarrolladas en los trabajos de V. Maz'ya y G Schmidt [3], [4], [6]; por lo que en el cuarto capítulo se presentarán sus propiedades, auxiliándose para ello de algunos ejemplos.

Así en el quinto capítulo se podrá desarrollar la solución numérica [6], [19] de las ecuaciones planteadas, la cual podrá implementarse con un lenguaje de programación. Para que a continuación, el resultado generado por la aplicación del método a varios problemas de elasticidad se compare con la solución exacta u otra calculada por otro medio en el capítulo sexto, a fin de observar el grado de precisión obtenido y la influencia de la modificación de los parámetros propios de esta técnica en las soluciones calculadas. Para que finalmente, las conclusiones resultantes de la aplicación del método, su desarrollo posterior y aplicaciones sean tema del último capítulo - el séptimo - .

2. ECUACIONES INTEGRALES DEL PROBLEMA DE ELASTICIDAD PARA INCLUSIONES EN UN MEDIO ELÁSTICO

Las ecuaciones integrales permiten establecer el modelo de un medio elástico homogéneo en términos del esfuerzo y la deformación. Para establecer estas relaciones en el problema propuesto se parte de las ecuaciones clásicas de elasticidad [18]

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_j}{\partial t^2} - \nabla_i \mathbf{C}_{ijkl}(x) \nabla_l \mathbf{u}_k = \mathbf{q}(x, t), \quad \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (2.1)$$

donde ρ es la densidad, \mathbf{C}_{ijkl} es el tensor de constantes elástico, $\mathbf{u}(x, t)$ corresponde al vector de desplazamiento y $\mathbf{q}(x, t)$ corresponde al vector de fuerzas - todos pertenecientes a un medio homogéneo -. De modo que x_i corresponde a las coordenadas cartesianas de un punto del dominio ($i = 1, 2, 3$ para el caso tridimensional; o $i = 1, 2$ para el bidimensional); teniéndose la sumatoria respecto a índices repetidos implicada:

$$a_i b_i = \sum_{i=1}^{n=3} a_i b_i. \quad (2.2)$$

De modo que limitándose al caso estático entonces (2.1) se convierte en

$$-\nabla_i \mathbf{C}_{ijkl}(\mathbf{x}) \nabla_l \mathbf{u}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_j(\mathbf{x}), \quad (2.3)$$

asumiendo también que este medio es infinito, el tensor $\mathbf{C}_{ijkl} = \mathbf{C}_0$ es constante y que $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ decrece lo suficientemente rápido en el infinito; entonces bajo estas condiciones la solución de (2.3), la cual tiende a cero en el infinito, es única y representable en la forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{q}, \quad (2.4)$$

o de manera más detallada (2.4) puede describirse como

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{x}) = \int \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{q}_j(\mathbf{x}') dx', \quad (2.5)$$

donde \mathbf{G}_{ij} es el tensor de la función de Green, la cual satisface la ecuación

$$\nabla_i \mathbf{C}_0{}_{ijkl} \nabla_k \mathbf{G}_{lm}(\mathbf{x}) = -\delta_{ij} \delta(\mathbf{x}), \quad (2.6)$$

en la que δ_{ij} es la función Kronecker delta, y $\delta(\mathbf{x})$ es la función delta Dirac. La función de Green tiene asimismo una transformada de Fourier que resulta en una representación en el espacio \mathbf{k} .

$$\tilde{\mathbf{G}}_{lm}(\mathbf{k}) = [k_i k_j \mathbf{C}_{iljs}]^{-1}, \quad k = |\mathbf{k}|. \quad (2.7)$$

En cuanto al tensor del módulo elástico, este puede ser asociado al operador de energía interna ϕ para un medio isotrópico [18], el cual es construido por las principales combinaciones del tensor δ_{ij} y los componentes del vector \mathbf{k} . De este modo

$$\mathbf{C}_{0ijkl}(\mathbf{k}) = \lambda_0(\mathbf{k}) \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_0(\mathbf{k}) (\delta_{jl} \delta_{ik} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (2.8)$$

por lo que en un medio isotrópico; este se convierte en

$$\mathbf{C}_0 = 2\mu_0 \mathbf{E}_1 + \lambda_0 \mathbf{E}_2, \quad (2.9)$$

en el que \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 son los tensores de constantes isotrópicas definidos como:

$$\mathbf{E}_{1ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad \mathbf{E}_{2ijkl} = \delta_{ij} \delta_{kl}, \quad (2.10)$$

y λ_0 , μ_0 son las constantes de Lamé. La expresión así generada para $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{k})$ coincide con

$$\tilde{\mathbf{G}}_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{k^2 \mu_0} \left(\delta_{ij} - \frac{\lambda_0 + \mu_0}{\lambda_0 + 2\mu_0} \frac{k_i k_j}{k^2} \right), \quad (2.11)$$

la cual resulta de reemplazar las constantes de Lamé en el tensor de Green de la teoría local de elasticidad por los correspondientes operadores [18]:

$$\tilde{\mathbf{G}}_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{k^2 \mu_0} \left(\delta_{ij} - \kappa_0 \frac{k_i k_j}{k^2} \right), \quad (2.12)$$

que para el caso tridimensional presenta

$$\kappa_0 = \frac{\lambda_0 + \mu_0}{\lambda_0 + 2\mu_0}, \quad (2.13)$$

mientras que para el problema bidimensional κ_0 puede tomar la forma

$$\kappa_0 = \begin{cases} \frac{1}{2(1-\nu_0)} & \text{para un estado de deformación plana,} \\ \frac{1}{2(1+\nu_0)} & \text{para un estado de esfuerzo plano.} \end{cases} \quad (2.14)$$

En el caso de un medio arbitrario anisotrópico

$$\tilde{\mathbf{G}}_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{\tilde{\mathbf{g}}_{ij}(\mathbf{n})}{k^2}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k}, \quad (2.15)$$

teniendo a k definido en (2.7) y a $\tilde{\mathbf{g}}_{ij}(\mathbf{n})$ como una función definida sobre una esfera unitaria en el espacio \mathbf{k} que puede obtenerse explícitamente por (2.7).

La expresión explícita para $\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x})$ sólo es conocida para un medio isotrópico y un medio con simetrías isotrópicas transversales y hexagonales. Sin embargo, en un número de casos importantes es suficiente con conocer las propiedades generales de $\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x})$ y su representación en el espacio \mathbf{k} . Así que en particular, puede derivarse de (2.7) que

$$\tilde{\mathbf{g}}_{ij}(\mathbf{n}) = \tilde{\mathbf{g}}_{ij}(-\mathbf{n}), \quad \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_{ij}(-\mathbf{x}). \quad (2.16)$$

Ahora bien para el caso de un medio con defectos, es conveniente tener un equivalente de las ecuaciones de elasticidad y sus soluciones no en términos del desplazamiento \mathbf{u}_i , sino de la deformación $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ o del esfuerzo $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$. Para este propósito, ahora se considera que el medio infinito homogéneo con un tensor elástico \mathbf{C}_0 antes contemplado, contiene una inclusión que ocupa una región V , cuya función característica es $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ y posee un tensor elástico $\mathbf{C}(\mathbf{x})$; con lo cual es posible definir estas regiones a través de

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{V}(x) = \mathbf{1} & \text{si } x \in V, \\ \mathbf{V}(x) = \mathbf{0} & \text{si } x \notin V. \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{C}_0 & \text{si } x \notin V, \\ \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1(x) & \text{si } x \in V. \end{cases} \quad (2.18)$$

Estas expresiones contienen el planteamiento de que el medio puede ser considerado como una adición de lo que ocurre en el medio sin la perturbación (\mathbf{V}), más el efecto que provoca ésta en el medio (2.18). De manera que usando las ecuaciones de elasticidad expresadas en desplazamientos para describir esta relación, se parte en un principio de

$$\nabla_i C_{ijkl}(\mathbf{x}) \nabla_k \mathbf{u}_l = 0, \quad (2.19)$$

condición dada por tratarse del campo original. Ahora si se sustituye (2.18) y la siguiente ecuación que corresponde al desplazamiento total en el medio (incluyendo la perturbación)

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{0i} + \mathbf{u}_{1i}, \quad (2.20)$$

debido a que \mathbf{u}_0 corresponde al estado del medio sin la perturbación y \mathbf{u}_1 a lo que acontece en la perturbación, y considerando que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \Rightarrow a_i b_i, \quad \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow C_{ijkl} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}, \quad (2.21)$$

se puede manipular (2.19) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1) : \nabla \mathbf{u} &= 0 \\ \nabla \cdot (\mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1) : \nabla (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1) &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{C}_0 \nabla (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1) &= -\nabla \cdot \mathbf{C}_1 : \nabla \mathbf{u} \end{aligned}$$

para obtener que

$$\nabla \mathbf{C}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_1 = -\nabla \cdot \mathbf{C}_1 : \nabla \mathbf{u}. \quad (2.22)$$

Considerando asimismo que en la perturbación

$$\nabla \mathbf{C}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_1 = \mathbf{q} = -\nabla \cdot \mathbf{C}_1 : \nabla \mathbf{u}, \quad (2.23)$$

entonces empleando (2.23) con el propósito de obtener una expresión para \mathbf{u}_1 , al sustituir estas expresiones en la solución (2.5) obtenida anteriormente entonces

$$\mathbf{u}_{1i} = \int \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla'_k C_{1klmn}(\mathbf{x}') \nabla'_n \mathbf{u}_m(\mathbf{x}') dx'. \quad (2.24)$$

Sin embargo, no sólo se quiere conocer el estado dentro de la inclusión, sino de todo el medio (con la inclusión) por lo que haciendo uso de (2.20) se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{1i} + \mathbf{u}_{0i} &= \int \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla'_k C_{1klmn}(\mathbf{x}') \nabla'_n \mathbf{u}_m(\mathbf{x}') dx' + \mathbf{u}_{0i} \\ \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) - \int \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla'_k C_{1klmn}(\mathbf{x}') \nabla'_n \mathbf{u}_m(\mathbf{x}') dx' &= \mathbf{u}_{0i}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2.25)$$

ahora considerando que

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{def } \mathbf{u} \Rightarrow \nabla_{(i} \mathbf{u}_{j)} \rightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i), \quad (2.26)$$

$$C_{kl ij} \nabla_{(i} \mathbf{u}_{j)} = C_{kl} \varepsilon_{ij}, \quad (2.27)$$

$$C_{klij} = C_{klji}, \quad (2.28)$$

resulta que al aplicar el operador **def** (2.26) a ambos lados de (2.25) y rescribiéndola haciendo uso de (2.27) y (2.28) se obtiene que

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) - \int \nabla_{(i} \mathbf{G}_{j)l}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla'_k [C_{1klmn}(\mathbf{x}') \varepsilon_{mn}(\mathbf{x}')] dx' = \varepsilon_{0ij}(\mathbf{x}), \quad (2.29)$$

en esta última expresión (2.29) la integral presente puede resolverse (usando el Teorema de Gauss) como

$$\begin{aligned} & \int \nabla_i \mathbf{G}_{jl}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') [\nabla'_k C_{1klmn}(\mathbf{x}') \varepsilon_{mn}(\mathbf{x}')] dx' = \\ & \int \nabla'_i [\nabla_i \mathbf{G}_{jl}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') C_{1klmn}(\mathbf{x}') \varepsilon_{mn}(\mathbf{x}')] dx' - \int \nabla'_i [\nabla_k \mathbf{G}_{jl}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] C_{1klmn}(\mathbf{x}') \varepsilon_{mn}(\mathbf{x}') dx', \end{aligned} \quad (2.30)$$

como siguiente paso esa segunda integral puede rescribirse, lo que origina el cambio de signo de la misma

$$\int \nabla'_i [\nabla_i \mathbf{G}_{jl}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') C_{1klmn}(\mathbf{x}') \varepsilon_{mn}(\mathbf{x}')] dx' + \int \nabla_i [\nabla_k \mathbf{G}_{jl}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] C_{1klmn}(\mathbf{x}') \varepsilon_{mn}(\mathbf{x}') dx',$$

mientras que la primera puede sustituirse (aplicando el Teorema de Gauss) por

$$\int_{\Omega} \mathbf{m} [\nabla_i \mathbf{G}_{jl}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') C_{1klmn}(\mathbf{x}') \varepsilon_{mn}(\mathbf{x}')] dx' + \int \nabla_i [\nabla_k \mathbf{G}_{jl}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] C_{1klmn}(\mathbf{x}') \varepsilon_{mn}(\mathbf{x}') dx',$$

esta integral se efectúa sobre la frontera Ω de V , donde \mathbf{m} es el vector normal situado en la frontera. Así considerando que sucede lejos del origen (centro de la inclusión): $(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rightarrow \infty$, $\mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rightarrow 0$; entonces el valor de esta integral tiende a 0 . Por lo tanto (2.30) es igual a

$$\int \nabla_i \mathbf{G}_{jl}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') [\nabla'_k C_{1klmn}(\mathbf{x}') \varepsilon_{mn}(\mathbf{x}')] dx' = \int \nabla_i \nabla_k \mathbf{G}_{jl}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') C_{1klmn}(\mathbf{x}') \varepsilon_{mn}(\mathbf{x}') dx', \quad (2.31)$$

De modo que finalmente sustituyendo el valor de esta integral (2.31) en (2.29) se obtiene

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) - \int_V \nabla_{(i} \nabla_k \mathbf{G}_{j)l}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') C_{1klmn}(\mathbf{x}') \varepsilon_{mn}(\mathbf{x}') dx' = \varepsilon_{0ij}(\mathbf{x}), \quad (2.32)$$

expresión que permite definir el siguiente operador

$$\mathbf{K}_{ijkl}(\mathbf{x}) = -\nabla_i \nabla_k \mathbf{G}_{jl}(\mathbf{x})|_{(ij)(kl)}, \quad (2.33)$$

por lo que la expresión (2.32) puede describirse como

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) + \int_V \mathbf{K}_{ijkl}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') C_{1klmn}(\mathbf{x}') \varepsilon_{mn}(\mathbf{x}') dx' = \varepsilon_{0ij}(\mathbf{x}), \quad (2.34)$$

esta última corresponde a la ecuación integral para la deformación de la región V ocupada por la inclusión. Es posible escribirla en forma de operadores

$$\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{K} \mathbf{C}_1 \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0. \quad (2.35)$$

Las condiciones para la existencia de soluciones únicas de esta ecuación (2.35) han sido discutidas en detalle [19], aunque puede establecerse que esto ocurrirá si $\mathbf{C}(\mathbf{x}) \neq 0, \infty$ dentro de V . Si por el contrario $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = 0$ ($\mathbf{C}_1 = -\mathbf{C}_0$), la ecuación (2.35) tendrán una clase de soluciones no triviales. De manera similar, si $\mathbf{C}(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ se presentará esta situación. Esto implica que las soluciones obtenidas para valores muy pequeños o muy grandes de $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ se convertirán en problemas mal condicionados.

Continuando con la derivación de la ecuación del esfuerzo se parte de la expresión obtenida para la deformación (2.35), que junto con la expresión para el esfuerzo $\boldsymbol{\sigma}$ derivada de las ecuaciones de elasticidad (2.3)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.36)$$

así al sumar \mathbf{C}_0 a ambos lados de la ecuación (2.35) y reemplazando el valor de $\boldsymbol{\varepsilon}$ obtenido de (2.36) en el segundo término del lado izquierdo de (2.35) se obtiene que

$$\mathbf{C}_0 \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{C}_0 \mathbf{K} \mathbf{C}_1 \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\varepsilon}_0,$$

si ahora se suma y resta $\mathbf{C}_1 \boldsymbol{\varepsilon}$ del lado izquierdo, y se usa (2.36) en el término negativo para sustituir $\boldsymbol{\varepsilon}$ entonces

$$\mathbf{C}_0 \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{C}_1 \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{C}_0 \mathbf{K} \mathbf{C}_1 \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{C}_1 \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\varepsilon}_0,$$

por lo que usando (2.36) puede apreciarse que los dos primeros términos de la última expresión corresponden a $\boldsymbol{\sigma}$, en tanto que el lado derecho es igual a $\boldsymbol{\sigma}_0$, de manera que reescribiendo la ecuación y reagrupando términos

$$\boldsymbol{\sigma} + (\mathbf{C}_0 \mathbf{K} \mathbf{C}_1 \mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}_1 \mathbf{C}^{-1}) \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0, \quad (2.37)$$

a continuación se manipula $\mathbf{C}_1 \mathbf{C}^{-1}$ con el objeto de obtener una expresión equivalente: en primer lugar se multiplica por $\mathbf{1}$, para después sustituir el valor de \mathbf{C}_1 (2.18); así después de reagrupar los términos

$$(\mathbf{1}) \mathbf{C}_1 \mathbf{C}^{-1} = (\mathbf{C}_0 \mathbf{C}_0^{-1}) \mathbf{C}_1 \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}_0 \mathbf{C}_0^{-1} (\mathbf{C} - \mathbf{C}_0) \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}_0 (\mathbf{C}_0^{-1} - \mathbf{C}^{-1}) = -\mathbf{C}_0 (\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}_0^{-1}) \quad (2.38)$$

con este resultado, se definen los siguientes tensores

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}, \quad (2.39)$$

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{C}_0^{-1}, \quad (2.40)$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B} - \mathbf{B}_0, \quad (2.41)$$

lo cual hace posible describir (2.37) como

$$\boldsymbol{\sigma} + (-\mathbf{C}_0 \mathbf{K} \mathbf{C}_0 \mathbf{B}_1 + \mathbf{C}_0 \mathbf{B}_1) \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0, \quad (2.42)$$

para que al definir el operador

$$\mathbf{S} = -\mathbf{C}_0 \mathbf{K} \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_0, \quad (2.43)$$

la ecuación (2.42) se convierta en

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}) + \int_V \mathbf{S}_{ijkl}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{B}_{1klmn}(\mathbf{x}') \boldsymbol{\sigma}_{mn}(\mathbf{x}') dx' = \boldsymbol{\sigma}_{0ij}(\mathbf{x}), \quad (2.44)$$

que corresponde a la ecuación integral del esfuerzo de la región V ocupada por la inclusión. Sin embargo, estas ecuaciones (2.34) y (2.44) pueden usarse para reconstruir los campos $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ y $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ de los medios, si es que los campos dentro de la región V son conocidos. Para esta última expresión rescrita en forma de operadores

$$\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0, \quad (2.45)$$

es posible establecer usando los tensores definidos para su construcción, al igual que con la ecuación (2.35) las condiciones que generan problemas mal condicionados; lo cual correspondería a cuando $\mathbf{B}_1(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ ($\mathbf{C}_1 = -\mathbf{C}_0$) y a si $\mathbf{B}_1(\mathbf{x}) = -\mathbf{B}_0$ ($\mathbf{C}(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$), situaciones que tienen su origen a partir de lo ya mencionado.

En el caso de los operadores integrales $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ sus transformadas de Fourier pueden definirse usando (2.7) como

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_{ijkl}(\mathbf{k}) &= k_{(i} \tilde{\mathbf{G}}_{j)(k} k_{l)} = k_i (k_m k_n \mathbf{C}_{0mjnk})^{-1} k_l, \\ \tilde{\mathbf{S}}_{ijkl}(\mathbf{k}) &= -\mathbf{C}_{0ijmn} \tilde{\mathbf{K}}_{monp}(\mathbf{k}) \mathbf{C}_{0opkl} + \mathbf{C}_{0ijkl}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

por lo que si bien se cuenta con estas definiciones para $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ - de acuerdo a su transformada inversa de Fourier (2.46) -; son las expresiones conforme a la segunda derivada de $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ (2.33), (2.43) las que se utilizan para efectos de la regularización auxiliar empleada para este propósito [18]. Esto significa que $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ puede descomponerse en una parte regular (funcional) y una singular, la cual es proporcional (por la constante \mathbf{a}) a $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x})$

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{x}) + \mathbf{a}\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}). \quad (2.47)$$

Para mostrar esto considérese una región V_E con una frontera suave Γ , un radio β y siendo $x = 0$ un punto interno de V_E . Entonces $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ actúa sobre la función $\varphi(\mathbf{x})$ de acuerdo a

$$(\widehat{\mathbf{K}}, \varphi)(\mathbf{x}) = \int_{V_E} \mathbf{K}(\mathbf{x})[\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(0)] dx + \int_{\bar{V}_E} \mathbf{K}(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) dx, \quad (2.48)$$

donde $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ está definido en (2.33) como la segunda derivada de $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ y \bar{V}_E es el complemento de V_E . A su vez la constante \mathbf{a} está dada por la expresión

$$\mathbf{a} = - \int_{\Gamma} \nabla \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{m}(\mathbf{x}) d\Gamma, \quad (2.49)$$

aquí $\mathbf{m}(\mathbf{x})$ es la normal a Γ en el punto x . Entonces haciendo uso del Teorema de Gauss sobre la expresión anterior (2.49), con el propósito de obtenerla en términos de \mathbf{k} , se introduce la función característica $V_E(\mathbf{x})$ de la región V_E . Por lo que tomando en cuenta la fórmula de Parseval entonces

$$\mathbf{a} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{V_E} \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{k}) \tilde{V}_E(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} \tilde{V}_E(|\mathbf{k}|) |\mathbf{k}|^2 d|\mathbf{k}| \int_{\Omega_1} \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{n}) d\Omega_1, \quad (2.50)$$

en la que \mathbf{n} está definido de acuerdo a (2.15), mientras que Ω_1 corresponde a la superficie de una esfera en el espacio \mathbf{k} . Es posible sustituir \mathbf{k} por $|\mathbf{k}|$ y después por \mathbf{n} debido que a la función en \mathbf{k} es homogénea de grado cero. Siendo además la función característica V_E igual a

$$V_E = \begin{cases} 1, & x \in V_E \\ 0, & x \notin V_E \end{cases} \quad (2.51)$$

entonces la integral que aparece en (2.50) es igual a

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} \tilde{V}_E(|\mathbf{k}|) |\mathbf{k}|^2 d|\mathbf{k}| = 2\pi^2, \quad (2.52)$$

y por lo tanto, la constante \mathbf{a} (2.49) es a su vez

$$\mathbf{a} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_1} \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{n}) d\Omega_1. \quad (2.53)$$

De este modo, ya que el funcional definido en (2.48) no depende de las dimensiones de la región V_E , es posible pasar al límite de contraer la región $V_E - \beta \rightarrow 0$ - a un punto (por conveniencia $x = 0$). Entonces la integral sobre V_E se desvanece, ya que $\mathbf{K}(\mathbf{x}) \sim |\mathbf{x}|^3$ y la segunda integral es expresada como una integral en el sentido del valor principal, la cual existe ya que el funcional está bien definido.

Así

$$(\widehat{\mathbf{K}}, \varphi)(\mathbf{x}) = \int_{\widehat{V}_E} \mathbf{K}(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) dx + \mathbf{a} \varphi(0) \Big|_{\beta \rightarrow 0} \quad (2.54)$$

en la que todos los elementos ya han sido definidos.

Un procedimiento similar se realiza con el operador $\widetilde{\mathbf{S}}$, por lo que la acción de esos operadores sobre una función suave $\varphi(\mathbf{x})$ con soporte finito esta definida como

$$\begin{aligned} (\widetilde{\mathbf{K}} \varphi)(\mathbf{x}) &= \int \widetilde{\mathbf{K}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varphi(\mathbf{x}') dx' = \mathbf{a} \varphi(\mathbf{x}) + v.p. \int \widetilde{\mathbf{K}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varphi(\mathbf{x}') dx', \\ (\widetilde{\mathbf{S}} \varphi)(\mathbf{x}) &= \int \widetilde{\mathbf{S}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varphi(\mathbf{x}') dx' = \mathbf{s} \varphi(\mathbf{x}) + v.p. \int \widetilde{\mathbf{S}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varphi(\mathbf{x}') dx', \end{aligned} \quad (2.55)$$

donde $v.p. \int \dots dx'$ es el valor principal de Cauchy de la integral y las constantes \mathbf{a} y \mathbf{s} tienen la forma [19]

$$\mathbf{a} = \frac{1}{Area(\Omega_1)} \int_{\Omega_1} \widetilde{\mathbf{K}}(\mathbf{k}) dk, \quad \mathbf{s} = \frac{1}{Area(\Omega_1)} \int_{\Omega_1} \widetilde{\mathbf{S}}(\mathbf{k}) dk, \quad (2.56)$$

donde Ω_1 es la superficie de una esfera unitaria en el espacio \mathbf{k} y $Area(\Omega_1)$ es el área de esta esfera. Si en cambio $\varphi(\mathbf{x})$ es una función suave con soporte no compacto que tiende a cero más rápido que cualquier potencia negativa de $|\mathbf{x}|$. La acción de los operadores \mathbf{K} y \mathbf{S} sobre tal función puede ser presentada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (\widetilde{\mathbf{K}} \varphi)(\mathbf{x}) &= \int \widetilde{\mathbf{K}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varphi(\mathbf{x}') dx' = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \widetilde{\mathbf{K}}(\mathbf{k}) \widetilde{\varphi}(\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) dk, \\ (\widetilde{\mathbf{S}} \varphi)(\mathbf{x}) &= \int \widetilde{\mathbf{S}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varphi(\mathbf{x}') dx' = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \widetilde{\mathbf{S}}(\mathbf{k}) \widetilde{\varphi}(\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) dk, \end{aligned} \quad (2.57)$$

en las cuales d corresponde a la dimensión espacial. Por lo que empleando (2.7) y (2.12) para el caso de un medio isotrópico es posible obtener el operador

$$\widetilde{\mathbf{K}}(\mathbf{n}) = \frac{1}{\mu} [\mathbf{E}_5(\mathbf{n}) - \kappa \mathbf{E}_6(\mathbf{n})], \quad (2.58)$$

en el que \mathbf{E}_5 y \mathbf{E}_6 son los tensores de constantes isotrópicos definidos como

$$\mathbf{E}_{5ijkl}(\mathbf{n}) = \frac{1}{4} (n_i n_k \delta_{jl} + n_i n_l \delta_{jk} + n_j n_k \delta_{il} + n_j n_l \delta_{ik}), \quad \mathbf{E}_{6ijkl}(\mathbf{n}) = n_i n_j n_k n_l, \quad (2.59)$$

μ es la constante de Lamé, κ está definido por (2.13) o (2.14) y \mathbf{n} corresponde a lo definido en (2.15). En consecuencia con las expresiones desarrolladas (2.55), (2.57); es posible obtener el operador \mathbf{S} correspondiente.

3. REGULARIZACIÓN DE TIKHONOV

Para los casos donde se tienen inclusiones muy rígidas o muy suaves, la solución de la ecuación (2.35) y (2.45) es un problema mal condicionado, para el que se emplea la técnica de regularización de Tikhonov [20]. Así el cálculo de la solución involucra una relación entre el “tamaño” de la solución regularizada y la calidad del ajuste que esta tiene a la información original. De esta manera, planteado un problema correspondiente a un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, - siendo A la matriz del sistema; mientras x , y b son los vectores columna del problema -, aplicar la regularización de Tikhonov equivale a resolver el problema de minimización

$$\Phi(x) = \|Ax - b\|^2 + \gamma^2 \|x\|^2, \quad (3.1)$$

donde γ es el parámetro real de regularización que debe ser seleccionado. El “tamaño” de la solución regularizada es medido por la norma $\|x\|$, mientras la medida del ajuste corresponde a la norma $\|Ax - b\|$ del vector residual. Así la solución de Tikhonov x_γ está dada formalmente como

$$(A^T A + \gamma^2 I)x_\gamma = A^T b, \quad (3.2)$$

siendo I la matriz identidad y \dots^T la transpuesta de una matriz. Cuando $\gamma = 0$, la solución corresponde a un ajuste de mínimos cuadrados en el caso de un problema sobredeterminado (mayor número de ecuaciones que incógnitas).

Añadir este proceso disminuye las contribuciones debidas a errores en los datos y al redondeo que dominan la solución del problema, manteniendo la norma de un tamaño razonable. Tal vez el primer autor que describe un esquema que es equivalente al de Tikhonov fue James Riley en 1955 [21], considerando sistemas mal condicionados $Ax = b$ con un coeficiente (semi)definido positivo simétrico, y propuso resolver en su lugar el sistema $(A + \alpha I)x = b$, donde α es una constante positiva.

Un documento posterior dedicado a problemas más generales fue publicado por D. Phillips en 1962 [21]. Aquí A es una matriz cuadrada obtenida de una ecuación integral de Fredholm de primer tipo por medio de una regla de cuadratura. De este modo Phillips obtiene una formulación sin la notación matricial, y propone calcular la solución regularizada como $x_\gamma = (A + \gamma^2 A^{-T})^{-1} b$.

En su documento de 1963 [21] S. Toney reformuló la expresión de Phillips y obtuvo la bien conocida expresión

$$x_\gamma = (A^T A + \gamma^2 I)^{-1} A^T b.$$

A. N. Tikhonov en 1963 [21], formuló en su documento el problema desde un enfoque más general: considerando $\kappa f = g$ donde f y g son funciones mientras que κ es un operador integral, con ello propuso la formulación

$$f_\gamma = \|\kappa f - g\|^2 + \gamma^2 \Omega(f), \quad (3.4)$$

con el funcional particular

$$\Omega(f) = \int_a^b (v(s)f(s)^2 + w(s)f'(s)^2) ds, \quad (3.5)$$

donde v y w son funciones de peso positivas.

De cualquier manera, retomando la solución regularizada presentada antes (3.2), la que se usará en el presente trabajo considera $\gamma = \gamma^2$, por lo que dicha expresión es ahora

$$x_\gamma = (A^T A + \gamma I)^{-1} A^T b, \quad (3.6)$$

alteración que debe tomarse en cuenta al momento de revisar los resultados.

4. FUNCIONES DE APROXIMACIÓN DE GAUSS

V. Maz'ya [3], [6] propuso hace algunos años (1991, 1994) un nuevo método de aproximación, caracterizado por obtener una aproximación muy precisa en un cierto rango relevante en los cálculos numéricos, pero que por lo general produce aproximaciones que no convergen. Por tal razón dichos procesos fueron llamados *approximate approximations* [4].

La idea inicial es representar una función arbitraria como una combinación lineal de funciones base, las cuales a diferencia de las splines, forman una partición de unidad. La aproximación obtenida por tanto no converge necesariamente conforme disminuye la distancia entre los puntos distribuidos sobre el dominio. Esta falta de convergencia es compensada, antes que nada por la flexibilidad en la selección de las funciones base y la simplicidad de la generalización para el caso multidimensional. Además de que cuentan con la posibilidad de obtener fórmulas explícitas para los valores de varios operadores integrales y pseudodiferenciales de física matemática aplicados a las funciones base [5].

Esta propiedad ha servido para resolver diferentes problemas mediante el uso de un esquema de discretización, donde los coeficientes del sistema algebraico resultante dependen solamente de las coordenadas de un número finito de puntos - distribuidos sobre el dominio -, y que pueden ser determinados analíticamente en muchos casos, o en el peor de ellos mediante una cuadratura simple. Esto último se traduce en una disminución en el tiempo e información necesaria para el cálculo en comparación con otros métodos.

La aproximación con funciones Gaussianas - $\exp(-|\mathbf{x}|^2)$ - es usualmente mencionada en la literatura, y aunque como cualquier proceso de este tipo, produce siempre algunas inexactitudes, los errores pueden hacerse arbitrariamente pequeños ya que los kernels - $\exp(-H^{-1}|\mathbf{x}|^2)$ - pueden reproducir las funciones de interés con mucha precisión [3]. De este modo estas funciones base localizadas, centradas alrededor de cada punto del dominio o que decrecen rápidamente conforme la distancia a este punto, son las densidades de potencial en la ecuación integral que se quiere aproximar.

4.1. PROPIEDADES DE APROXIMACIÓN POR MEDIO DE LAS FUNCIONES DE GAUSS

Para referirse a las propiedades de este tipo de aproximación, considérese una función finita uniforme $u(x)$ de una variable x en una región $-\infty < x < \infty$. Esta función puede ser aproximada por la siguiente serie:

$$u(x) \approx u_h(x) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbf{Z}^d} u_m \varphi(x - \mathbf{h}\mathbf{m}), \quad (4.1.1)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{(\pi H)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{Hh^2}\right).$$

Aquí $\mathbf{m} \in \mathbf{Z}^d$ es un vector d -dimensional con componentes enteros, $\mathbf{h}\mathbf{m}$ son las coordenadas de los nodos de aproximación, h es la distancia entre estos, $u_m = u(\mathbf{h}\mathbf{m})$ es el valor de la función $u(x)$ en el nodo $x = \mathbf{h}\mathbf{m}$, y H es un parámetro adimensional. Está demostrado que la siguiente estimación [19] se mantiene:

$$|u(x) - u_h(x)| \leq \beta h \|\nabla u\| + |u(x)| T(H), \quad T(H) = O(\exp(-\pi^2 H)), \quad (4.1.2)$$

donde $\|\nabla u\|$ es la norma en el espacio de las funciones continuas, $\beta = O(1)$. Por lo tanto, el error T de aproximación de (4.1.1) depende de dos parámetros: la dispersión H y el paso de aproximación h . Si h es lo suficientemente pequeño y $H = O(1)$ este error puede ser prácticamente despreciable.

Esta aproximación puede ser usada para una amplia clase de funciones, pero los errores pueden incrementarse si la función no satisface las condiciones arriba mencionadas.

4.2. EJEMPLOS

De este modo, considerando las peculiaridades de la aproximación en el caso unidimensional para la función $v(x)$.

$$v(x) = \begin{cases} 1 + x^3, & |x| \leq 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \quad (4.2.1)$$

La aproximación (4.1.1) de esta función es

$$v_h(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi H}} \sum_{i=1}^{N+1} v(x^{(i)}) \exp\left(-\frac{[x - x^{(i)}]^2}{Hh^2}\right), \quad (4.2.2)$$

y es presentada en las Figs. 4.2.1(a) y (b) para varios valores de los parámetros H y h . Las coordenadas de los nodos son escogidas en los puntos $x^{(i)} = -1 + h(i - 1)$, $i = 1, 2, \dots, N + 1$; $h = 2 / N$, donde $N + 1$ es el número de nodos dentro del intervalo $[-1, 1]$. Así las líneas de color amarillo en las Figs. 4.2.1(a) y (b) son la función (4.2.1). En tanto que las tres líneas de otro color (azul, rojo y verde) en la Fig. 4.2.1(a) corresponden a $h = 0.2$ y diferentes valores de $H = 0.3; 1;$ y 2 . Mientras que las tres líneas de color (azul, rojo y verde) en la Fig. 4.2.1(b) corresponden a diferentes valores de $h = 0.1; 0.2;$ y 0.5 con $H = 0.7$. A partir de esto se observa de las figuras que las funciones de aproximación gaussianas describen satisfactoriamente $v(x)$ en la región media del intervalo $[-1, 1]$ y cerca de la parte final izquierda ($x = -1$), donde $v(x)$ tiende a cero. En cambio, las vecindades de la parte final derecha del intervalo ($x = 1$), donde $v(x)$ presenta un salto finito, presentan el error de la aproximación (4.2.2) máximo. Este error disminuye cuando los valores de h y H disminuyen, pero para $H < 0.5$, el error de la aproximación en la mitad de la región del intervalo crece dramáticamente (ver oscilaciones de $v_h(x)$ para $H = 0.3$ en la Fig. 4.2.1(a)).

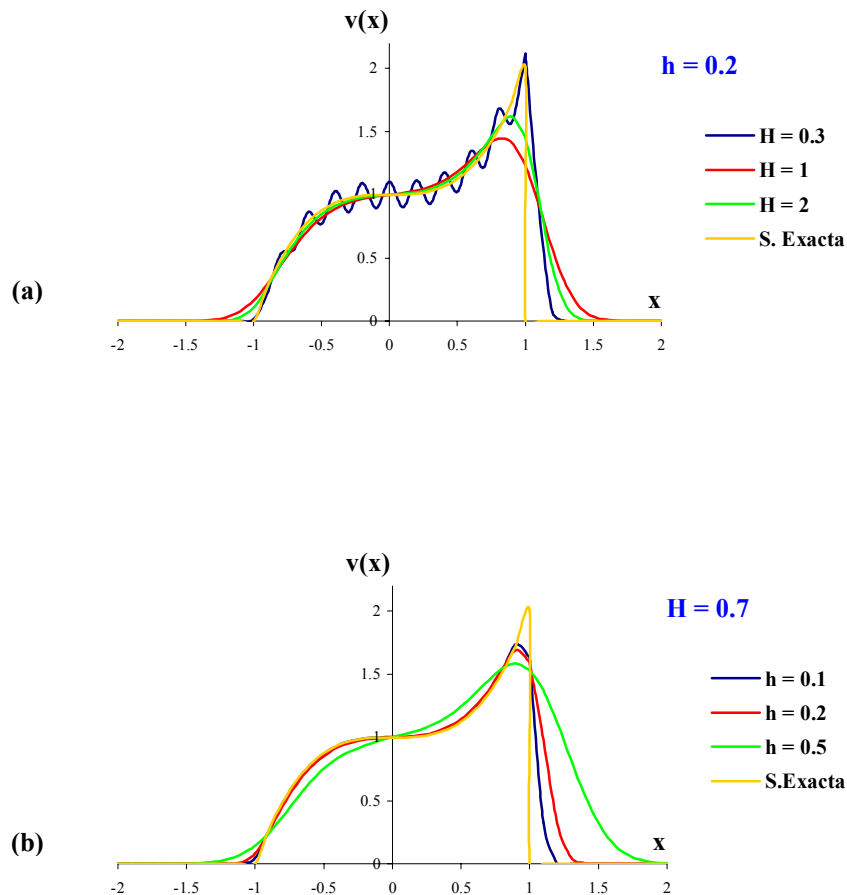


Fig. 4. 2. 1 Aproximación de la función $v(x) = (1+x^3)$, $|x| \leq 1$; $v(x) = 0$, $|x| > 1$ usando funciones gaussianas.

5. DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES INTEGRALES DEL PROBLEMA DE ELASTICIDAD PARA UNA INCLUSIÓN

Teniendo un medio isotrópico bidimensional con un tensor de constantes elástico \mathbf{C}_0 que contiene una inclusión que ocupa una región V (2.17), (2.18), con un tensor elástico de constantes \mathbf{C} , la solución de la ecuación integral para la deformación (2.34) dentro esta región puede ser encontrada usando una aproximación similar a (4.1.1) para $\boldsymbol{\varepsilon}$ de modo que

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) \approx \sum_{r=1}^N \boldsymbol{\varepsilon}^{(r)} \varphi(x - x^{(r)})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(r)} = \boldsymbol{\varepsilon}(x^{(r)}), \quad \varphi(x) = \frac{1}{\pi H} \exp\left(-\frac{|x|^2}{Hh^2}\right), \quad (5.1)$$

$$x^{(r)} \in V, \quad r = 1, 2, \dots, N, \quad x^{(r)} = \{x_1^{(r)}, x_2^{(r)}\}$$

donde $x^{(r)}$ es un conjunto de N nodos homogéneamente distribuidos en la región V . Así que después de sustituir la aproximación (5.1) en la ecuación (2.34) se obtiene la siguiente expresión

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{(s)} + \int \mathbf{K}_{ijkl}(x^{(s)} - x') \mathbf{C}_{1klmn} \sum_{r=1}^N \boldsymbol{\varepsilon}_{mn}^{(r)} \varphi(x' - x^{(r)}) dx' = \boldsymbol{\varepsilon}_{0ij}^{(s)} \quad (5.2)$$

$$s = 1, 2, \dots, N$$

aquí s se refiere al punto sobre el que se centrara la función de aproximación tomando en cuenta a los r puntos. Reordenando los términos en (5.2) entonces

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{(s)} + \sum_{r=1}^N \int \mathbf{K}_{ijkl}(x^{(s)} - x') \varphi(x' - x^{(r)}) dx' \mathbf{C}_{1klmn} \boldsymbol{\varepsilon}_{mn}^{(r)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{0ij}^{(s)} \quad (5.3)$$

las integrales resultantes pueden resolverse realizando en primera instancia un cambio de variable para simplificar el proceso

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}(x^{(s)} - x') \varphi(x' - x^{(r)}) dx' = \quad (5.4)$$

por lo que si

$$y = x' - x^{(r)}, \quad dy = dx', \quad (5.5)$$

$$R = x^{(s)} - x^{(r)}, \quad (5.6)$$

entonces después de sustituir las respectivas expresiones (5.5) y (5.6) en (5.4), se puede definir el tensor

$$\begin{aligned} & \int \mathbf{K}(x^{(s)} - x^{(r)} - y) \varphi(y) dy, \\ \mathbf{I}(R) &= \int \mathbf{K}(R - y) \varphi(y) dy. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Para obtener la solución de esta integral se parte de lo establecido en el segundo capítulo para el operador \mathbf{K} sobre una función (2.53), (2.54), (2.55), (2.56), (2.57); por lo que aplicando la transformada de Fourier a \mathbf{I} (5.7)

$$\mathbf{I}(R) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \tilde{\mathbf{K}}(k) \tilde{\varphi}(k) e^{-ik \cdot R} dk, \quad (5.8)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{n}) = \frac{1}{\mu} [\mathbf{E}_5(\mathbf{n}) - \kappa \mathbf{E}_6(\mathbf{n})],$$

$$\mathbf{E}_5_{ijkl}(\mathbf{n}) = \frac{1}{4} (n_i n_k \delta_{jl} + n_i n_l \delta_{jk} + n_j n_k \delta_{il} + n_j n_l \delta_{ik}), \quad \mathbf{E}_6_{ijkl}(\mathbf{n}) = n_i n_j n_k n_l,$$

haciendo uso de las propiedades μ , κ - (2.13) o (2.14) - y lo definido en (2.7), (2.15) junto con la siguiente expresión

$$\tilde{\varphi}(k) = h^2 \exp\left(-\frac{|k|^2 h^2 H}{4}\right), \quad (5.9)$$

resulta en las siguientes dos integrales requeridas para el cálculo de \mathbf{I} :

$$\int \tilde{\varphi}(k) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} e^{-ik \cdot R} dk = \int_0^{\infty} \tilde{\varphi}(k) k dk \int_0^{2\pi} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} e^{-i\alpha \cos \varphi} d\varphi \quad (5.10)$$

$$\int \tilde{\varphi}(k) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} e^{-ik \cdot R} dk = \int_0^{\infty} \tilde{\varphi}(k) k dk \int_0^{2\pi} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} e^{-i\alpha \cos \varphi} d\varphi \quad (5.11)$$

que emplean estas expresiones:

$$\begin{aligned}
 k \cdot \mathbf{R} &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e})k\|\mathbf{R}\|, \\
 \alpha &= |k\|\mathbf{R}\|, & \cos(\varphi) &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}, \\
 \mathbf{e} &= \frac{\mathbf{R}}{\|\mathbf{R}\|}, & \mathbf{e} &\rightarrow \{e_1, e_2\} & \text{Vector unitario} \\
 R &\rightarrow |x^r - x^s|, & \mathbf{R}^{(s,r)} &= (x_1^r - x_1^s)e_1 + (x_2^r - x_2^s)e_2, \\
 R &= \|\mathbf{R}^{(s,r)}\| = \sqrt{(x_1^r - x_1^s)^2 + (x_2^r - x_2^s)^2},
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

de modo que la segunda integral de (5.10) es igual a

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} e^{-i\alpha \cos \varphi} d\varphi = 2\pi \left[\frac{J_1(\alpha)}{\alpha} \mathbf{1} - J_2(\alpha) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \right], \tag{5.13}$$

donde $\mathbf{1}$ es el tensor unidad de rango 2; $\mathbf{1}_{ij} = \delta_{ij}$; mientras la correspondiente a (5.11) es

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} e^{-i\alpha \cos \varphi} d\varphi &= \frac{J_2(\alpha)}{\alpha^2} (\mathbf{E}_2(\mathbf{e}) + \mathbf{E}_1(\mathbf{e})) - \frac{J_3(\alpha)}{\alpha} (\mathbf{E}_3(\mathbf{e}) + \mathbf{E}_4(\mathbf{e}) + 4\mathbf{E}_5(\mathbf{e})) + \\
 &J_4(\alpha) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \otimes \mathbf{e},
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

usando ambas: $J_q(\alpha)$ es la función de Bessel de orden q , con argumento α . Todo ello permite calcular (5.10) y (5.11) al integrar sobre k , generándose así las funciones:

$$\Phi_0^{(s,r)} = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-k^2 a^2} J_1(k \cdot \mathbf{R})}{R} \right] dk = \frac{1}{R^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{R^2}{4a^2}\right) \right), \tag{5.15}$$

$$\Phi_1^{(s,r)} = \int_0^\infty e^{-k^2 a^2} J_2(k \cdot \mathbf{R}) k dk = \frac{1}{2R^2} \left(4 + \frac{\left(-4 - \frac{R^2}{a^2}\right)}{\exp\left(\frac{R^2}{4a^2}\right)} \right), \tag{5.16}$$

$$\Phi_2^{(s,r)} = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-k^2 a^2} J_2(k \cdot \mathbf{R})}{k R^2} \right] dk = \frac{1}{2R^4} \left(4a^2 \left(-1 + \exp\left(-\frac{R^2}{4a^2}\right) \right) + R^2 \right), \tag{5.17}$$

$$\Phi_3^{(s,r)} = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-k^2 a^2} J_3(k \cdot \mathbf{R})}{R} \right] dk = \frac{1}{R^4} \left(-8a^2 + R^2 + \frac{(8a^2 + R^2)}{\exp\left(\frac{R^2}{4a^2}\right)} \right), \quad (5.18)$$

$$\Phi_4^{(s,r)} = \int_0^\infty e^{-k^2 a^2} J_4(k \cdot \mathbf{R}) k dk = \frac{1}{2R^4} \left(-96a^2 + 8R^2 + \frac{(96a^4 + 16a^2 R^2 + R^4)}{a^2 \exp\left(\frac{R^2}{4a^2}\right)} \right), \quad (5.19)$$

cuyo argumento requiere

$$a = \frac{\sqrt{\hbar h}}{2}. \quad (5.20)$$

Por lo tanto, - omitiendo los índices - la expresión (5.8) es

$$\mathbf{I}_{ijkl}^{(s,r)} = \mathbf{I}(R), \quad (5.21)$$

$$\mathbf{I}_{ijkl}^{(s,r)} = \frac{1}{2\pi\mu_0} [\Phi_0 \mathbf{E}_1 - \Phi_1 \mathbf{E}_5(\mathbf{e}) - \kappa_0 [\Phi_2 (\mathbf{E}_2 + 2\mathbf{E}_1) - \Phi_3 (\mathbf{E}_3(\mathbf{e}) + \mathbf{E}_4(\mathbf{e}) + 4\mathbf{E}_5(\mathbf{e})) + \Phi_4 \mathbf{E}_6(\mathbf{e})]],$$

que hace uso de los tensores de constantes isotrópicos definidos en (2.10) y (2.59), además de

$$\mathbf{E}_{3ijkl}(\mathbf{n}) = \delta_{ij} n_k n_l, \quad (5.22)$$

$$\mathbf{E}_{4ijkl}(\mathbf{n}) = n_i n_j \delta_{kl}.$$

Para el cálculo de (5.21) por medio de los tensores referidos se hace uso nuevamente de lo definido en (5.12), que puede describirse más detalladamente como

$$\mathbf{e}^{(s,r)} = \frac{\mathbf{R}^{(s,r)}}{|\mathbf{R}^{(s,r)}|}, \quad e_1^{(s,r)} = \frac{(x_1^r - x_1^s)}{|\mathbf{R}^{(s,r)}|}, \quad e_2^{(s,r)} = \frac{(x_2^r - x_2^s)}{|\mathbf{R}^{(s,r)}|}, \quad (5.23)$$

entonces (5.3) puede describirse

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{(s)} + \sum_{r=1}^N \mathbf{I}_{ijkl}^{(s,r)} \mathbf{C}_{1klmn}^{(r)} \boldsymbol{\varepsilon}_{mn}^{(r)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{0ij}^{(s)} \quad (5.24)$$

por lo que el siguiente paso es efectuar

$$\mathbf{B}_{ijkl}^{(s,r)} = \mathbf{I}_{ijkl}^{(s,r)} \mathbf{C}_{1klmn}^{(r)}, \quad \mathbf{C}_{1klmn}^{(r)} = \mathbf{C}_{1klmn}(x^{(r)}), \quad (5.25)$$

este cálculo requiere el valor de \mathbf{C}_1 , definido en (2.9) y (2.18). De manera que la operación (5.25) resulta en

$$\mathbf{B}_{ijkl}^{(s,r)} = \frac{\mu_1^{(r)}}{\pi\mu_0} [\Phi_0 \mathbf{E}_1 - \Phi_1 \mathbf{E}_5(\mathbf{e}) - \kappa_0 [\Phi_2 (\mathbf{E}_2 + 2\mathbf{E}_1) - \Phi_3 (\mathbf{E}_3(\mathbf{e}) + \mathbf{E}_4(\mathbf{e}) + 4\mathbf{E}_5(\mathbf{e})) + \Phi_4 \mathbf{E}_6(\mathbf{e})]] + \frac{\lambda_1^{(r)}}{2\pi\mu_0} [\Phi_0 \mathbf{E}_2 - \Phi_1 \mathbf{E}_4(\mathbf{e}) - \kappa_0 [4\Phi_2 \mathbf{E}_2 - \Phi_3 (\mathbf{E}_2 + 3\mathbf{E}_4(\mathbf{e})) + \Phi_4 \mathbf{E}_4(\mathbf{e})]], \quad (5.26)$$

$$\mu_1^{(r)} = \mu_1(x^{(r)}), \quad \lambda_1^{(r)} = \lambda_1(x^{(r)}),$$

la sustitución de los índices correspondientes con la debida reagrupación de términos permite obtener los coeficientes

$$B_{1111}^{(s,r)} = b_1^{(s,r)} + b_2^{(s,r)} + b_3^{(s,r)} e_1^{(s,r)2} + b_4^{(s,r)} e_1^{(s,r)2} + b_5^{(s,r)} e_1^{(s,r)2} + b_6^{(s,r)} e_1^{(s,r)4}, \quad (5.27)$$

$$B_{1122}^{(s,r)} = b_2^{(s,r)} + b_4^{(s,r)} e_1^{(s,r)2} + b_3^{(s,r)} e_2^{(s,r)2} + b_6^{(s,r)} e_1^{(s,r)2} e_2^{(s,r)2}, \quad (5.28)$$

$$B_{1112}^{(s,r)} = 2b_3^{(s,r)} e_1^{(s,r)} e_2^{(s,r)} + b_5^{(s,r)} e_1^{(s,r)} e_2^{(s,r)} + 2b_6^{(s,r)} e_1^{(s,r)3} e_2^{(s,r)}, \quad (5.29)$$

$$B_{2211}^{(s,r)} = b_2^{(s,r)} + b_3^{(s,r)} e_1^{(s,r)2} + b_4^{(s,r)} e_2^{(s,r)2} + b_6^{(s,r)} e_1^{(s,r)2} e_2^{(s,r)2}, \quad (5.30)$$

$$B_{2222}^{(s,r)} = b_1^{(s,r)} + b_2^{(s,r)} + b_3^{(s,r)} e_2^{(s,r)2} + b_4^{(s,r)} e_2^{(s,r)2} + b_5^{(s,r)} e_2^{(s,r)2} + b_6^{(s,r)} e_2^{(s,r)4}, \quad (5.31)$$

$$B_{2212}^{(s,r)} = 2b_3^{(s,r)} e_1^{(s,r)} e_2^{(s,r)} + b_5^{(s,r)} e_1^{(s,r)} e_2^{(s,r)} + 2b_6^{(s,r)} e_1^{(s,r)} e_2^{(s,r)3}, \quad (5.32)$$

$$B_{1211}^{(s,r)} = b_4^{(s,r)} e_1^{(s,r)} e_2^{(s,r)} + \frac{1}{2} b_5^{(s,r)} e_1^{(s,r)} e_2^{(s,r)} + b_6^{(s,r)} e_1^{(s,r)3} e_2^{(s,r)}, \quad (5.33)$$

$$B_{1222}^{(s,r)} = b_4^{(s,r)} e_1^{(s,r)} e_2^{(s,r)} + \frac{1}{2} b_5^{(s,r)} e_1^{(s,r)} e_2^{(s,r)} + b_6^{(s,r)} e_1^{(s,r)} e_2^{(s,r)3}, \quad (5.34)$$

$$B_{1212}^{(s,r)} = b_1^{(s,r)} + 2b_6^{(s,r)} e_1^{(s,r)2} e_2^{(s,r)2} + \frac{1}{2} b_5^{(s,r)} (e_1^{(s,r)2} + e_2^{(s,r)2}), \quad (5.35)$$

definidos por las funciones b_i

$$b_1^{(s,r)} = \frac{\mu_1^{(r)}}{\mu_0\pi} [\Phi_0^{(s,r)} - 2\Phi_2^{(s,r)} \kappa_0] \quad (5.36)$$

$$b_2^{(s,r)} = \frac{1}{2\mu_0\pi} \left[\Phi_0^{(s,r)} \lambda_1^{(r)} + \kappa_0 \left(\Phi_3^{(s,r)} \lambda_1^{(r)} - 2\Phi_2^{(s,r)} \left[2\lambda_1^{(r)} + \mu_1^{(r)} \right] \right) \right] \quad (5.37)$$

$$b_3^{(s,r)} = \frac{\kappa_0 \mu_1^{(r)}}{\mu_0 \pi} \Phi_3^{(s,r)} \quad (5.38)$$

$$b_4^{(s,r)} = \frac{1}{2\mu_0\pi} \left[\Phi_1^{(s,r)} \lambda_1^{(r)} + \kappa_0 \left(\Phi_4^{(s,r)} \lambda_1^{(r)} - 2\Phi_3^{(s,r)} \left[3\lambda_1^{(r)} + \mu_1^{(r)} \right] \right) \right] \quad (5.39)$$

$$b_5^{(s,r)} = -\frac{\mu_1^{(r)}}{\mu_0 \pi} \left[\Phi_1^{(s,r)} - 4\Phi_3^{(s,r)} \kappa_0 \right] \quad (5.40)$$

$$b_6^{(s,r)} = -\frac{\kappa_0 \mu_1^{(r)}}{\mu_0 \pi} \Phi_4^{(s,r)} \quad (5.41)$$

con esto es posible describir la expresión (5.24)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{(s)} + \sum_{r=1}^N \mathbf{B}_{ijkl}^{(s,r)} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^{(r)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{(s)} \quad (5.42)$$

Este sistema puede ser reducido a un sistema canónico de ecuaciones lineales algebraicas

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (5.43)$$

cuya matriz de dimensión $(3N \times 3N)$ puede construirse a partir de los coeficientes $B_{ijkl}^{(s,r)}$ de acuerdo con

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{ccc} I + B_{1111} & B_{1122} & B_{1112} \\ B_{1122} & I + B_{2222} & B_{2212} \\ B_{1112} & B_{2212} & I + B_{1212} \end{array} \right\| \quad (5.44)$$

retomando la ecuación (2.35), rescrita de la siguiente forma

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} + \mathbf{K} \mathbf{C}_1) \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}_0, \\ (\mathbf{I} + \mathbf{B}) \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}_0, \end{aligned} \quad (5.45)$$

es posible apreciar que al resolverla para valores pequeños (como los que corresponden a la magnitud de las deformaciones), el valor del primer término $\boldsymbol{\varepsilon}$ del lado izquierdo puede aproximarse por la matriz identidad I . Por ello para los bloques de \mathbf{A} ubicados en la diagonal

$$A_{ssss} = B_{ssss} + G^{(s,r)}, \quad G^{(s,r)} = \delta_{sr}, \quad (5.46)$$

en caso de no aproximarse el valor de ese término de $\boldsymbol{\varepsilon}$ mediante la Función Kronecker presentada (5.46), se puede hacer mediante una Función de Gauss del tipo definido en (5.1)

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) \approx \sum_{r=1}^N \boldsymbol{\varepsilon}^{(r)} \boldsymbol{\varphi}(x - x^{(r)}), \quad \boldsymbol{\varphi}(x) = \frac{1}{\pi H} \exp\left(-\frac{|x|^2}{Hh^2}\right)$$

por lo que para los bloques de \mathbf{A} ubicados en la diagonal

$$A_{iiii}^{(s,r)} = B_{iiii}^{(s,r)} + G^{(s,r)}, \quad G^{(s,r)} = \frac{1}{\pi H} \exp\left(-\frac{|x^{(s)} - x^{(r)}|^2}{Hh^2}\right). \quad (5.47)$$

Con ello se tienen dos alternativas para obtener la mejor aproximación para la solución. Definiendo además el vector de incógnitas \mathbf{x} de dimensión $3N$

$$\mathbf{x} = \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_{11}^{(s)} & s \leq N, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{22}^{(s-N)} & N < s \leq 2N, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{12}^{(s-2N)} & 2N < s \leq 3N. \end{cases} \quad (5.48)$$

y el vector \mathbf{f} correspondiente al estado inicial

$$\mathbf{f} = \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_{011}^{(s)} & s \leq N, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{022}^{(s-N)} & N < s \leq 2N, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{012}^{(s-2N)} & 2N < s \leq 3N, \end{cases} \quad (5.49)$$

se cuenta con todos los elementos para resolver el problema. Ahora en caso de aplicar la regularización, entonces la ecuación regularizada correspondiente a la expresión (5.43) es

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \gamma \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{f} \quad (5.50)$$

siendo γ el parámetro de regularización (3.6) e \mathbf{I} la matriz identidad.

6. RESULTADOS NUMÉRICOS

La implementación de las funciones de aproximación se hizo con la ayuda de Mathematica 5.0, de manera que se realizaron varios problemas para probar la aplicación del método propuesto. Así se consideraron tres casos para una perturbación circular (región V) de $r = 1$ - radio medido a partir del origen -, cuyas propiedades son:

1. *Constantes para toda la región V .*

$$\mu_1 = \mu - \mu_0, \quad \lambda_1 = \lambda - \lambda_0$$

- I.** $\mu = 3, \quad \lambda = 3$
II. $\mu = 0.1, \quad \lambda = 0.1$
III. $\mu = 7, \quad \lambda = 7$

2. *Constantes dentro una sub-región de V determinada por el valor del radio, de acuerdo a esto se definen dos secciones concéntricas: un centro o capa interior y un anillo exterior.*

$$\begin{aligned} \mu_{1 \text{ int}} &= \mu_{\text{int}} - \mu_0, & \lambda_{1 \text{ int}} &= \lambda_{\text{int}} - \lambda_0 \\ \mu_{1 \text{ ext}} &= \mu_{\text{ext}} - \mu_0, & \lambda_{1 \text{ ext}} &= \lambda_{\text{ext}} - \lambda_0 \end{aligned}$$

- I.** $\mu_{\text{int}} = 3, \lambda_{\text{int}} = 3, \quad \mu_{\text{ext}} = 2, \lambda_{\text{ext}} = 2$
II. $\mu_{\text{int}} = 0.5, \lambda_{\text{int}} = 0.5, \quad \mu_{\text{ext}} = 0.7, \lambda_{\text{ext}} = 0.7$
III. $\mu_{\text{int}} = 10, \lambda_{\text{int}} = 10, \quad \mu_{\text{ext}} = 3, \lambda_{\text{ext}} = 3$

3. *Variables de acuerdo al radio de la región V , conforme a una función suave (Parábola).*

$$\mu_1 = \mu_0 (a + b r^2), \quad \lambda_1 = \lambda_0 (a + b r^2)$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2$$

- I.** $a = 1, \quad b = -0.9$
II. $a = 1, \quad b = 3$
III. $a = 1, \quad b = 10$

así que los correspondientes tensores elásticos C , pueden ser calculados a partir de estos valores y los del medio infinito homogéneo (propiedades constantes: $\mu_0 = 1, \lambda_0 = 1$) donde se sitúa V . El estado inicial planteado es igual a: $\epsilon_{011} = 1, \epsilon_{022} = 0, \epsilon_{012} = 0$; mientras que el origen del sistema de coordenadas empleado se ha ubicado en el centro de la perturbación.

Para el cálculo de las soluciones se emplearon dos arreglos de puntos para abarcar la región V : en el primero los puntos se sitúan separándolos una distancia h tanto en la dirección e_1 como e_2 - Fig. 6.1 (a) - dando como resultado una cuadrícula (malla estándar); mientras que en el segundo h separa una serie de círculos a lo largo de e_1 - Fig. 6.1 (b) -, estos últimos contienen a los puntos distribuidos manteniendo h entre ellos, originando una malla circular. Esto se traduce en un diferente número de puntos para los mismos valores de h , en la cuadrícula entonces a 0.2 se tienen 81 puntos, a 0.1 - 317 puntos, a 0.0625 - 797 puntos y a 0.05 - 1257 puntos; mientras que para el arreglo circular estos valores de h producen para 0.2 - 91 puntos, a 0.1 - 331 puntos, a 0.0625 - 817 puntos y a 0.05 - 1261 puntos. Este último arreglo se usó como alternativa cuando el primero no proporcionaba una buena aproximación para el caso en cuestión. En el caso del parámetro adimensional H se emplearon tres valores (0.7, 1.0 y 2.0), mientras el parámetro de regularización de Tikhonov γ^1 se varió entre cinco valores (1E-5, 1E-4, 1E-3, 0.01, 0.10).

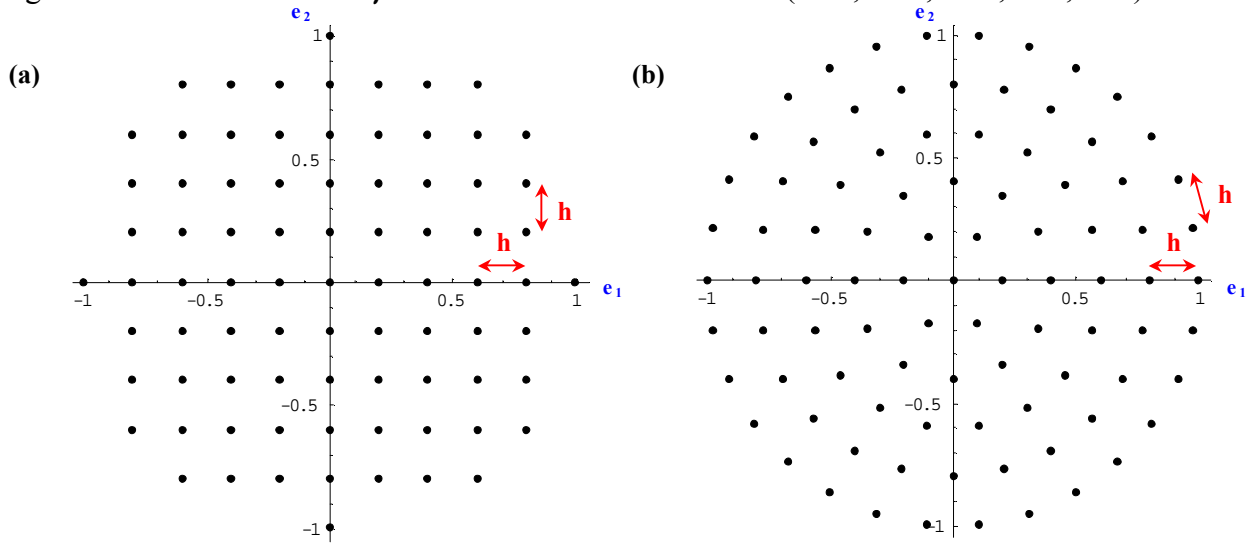


Fig. 6.1 Mallas para el cálculo de los campos elásticos en una inclusión circular: (a) Estándar, (b) Circular.

6.1. INCLUSIÓN CIRCULAR CON PROPIEDADES CONSTANTES

En el caso de una inclusión con propiedades constantes existe la solución exacta del problema:

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} + \mathbf{A} \mathbf{C}_1) \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}_0, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{L} \boldsymbol{\varepsilon}_0, \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(a) &= a \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{A} \mathbf{e} &= a_1 \mathbf{P}_1 + a_2 \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{C}_1 &= c_1 \mathbf{P}_1 + c_2 \mathbf{P}_2 \end{aligned} \quad \mathbf{L} \mathbf{e} = (\mathbf{U}(1) + \mathbf{A} \mathbf{e} \mathbf{C}_1)^{-1}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2 - \kappa_0}{4\mu_0} & a_2 &= \frac{1 - \kappa_0}{4\mu_0} \\ c_1 &= 2\mu_1 & c_2 &= \lambda_1 + \mu_1 \end{aligned}$$

¹ Los valores corresponden a γ^2 , de acuerdo a lo establecido en (3.6), (3.7). p. 24

P-base

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{E}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{E}_2 \qquad \mathbf{P}_2 = \mathbf{E}_2$$

\mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 corresponden a los tensores de constantes isotrópicos definidos en (2.10)

Por lo que la deformación ε_{11} calculada en la dirección e_1^2 del primer problema (\mathbf{I} , $\mu = 3$, $\lambda = 3$) presenta un comportamiento tal que al reducir el valor de h , la solución presenta una mayor convergencia - Fig. 6.1.1 -. Dicha disminución influye también de manera que la variación de H repercute menos en la solución - Fig. 6.1.2 (a) (b) -. Estos resultados son producto de la aplicación de una Función Kronecker (5.46) para el cálculo del término libre ε de la ecuación (2.35), ya que proporcionan una mejor aproximación que sus contrapartes realizadas con una Función de Gauss (5.47) - Fig. 6.1.3 (a) (b) -. Igualmente la regularización de Tikhonov (5.50) se vuelve innecesaria, debido al grado de ajuste a la solución exacta obtenido por la aplicación exclusiva del método, por lo que no se requiere emplearla. La situación de *contraste bajo* contemplada corresponde entonces a cuando las propiedades son similares en magnitud ($|\mu_1 / \mu_0| \approx 1$), es decir no existe una diferencia *muy grande* entre la “dureza” o “suavidad” de la inclusión y su medio.

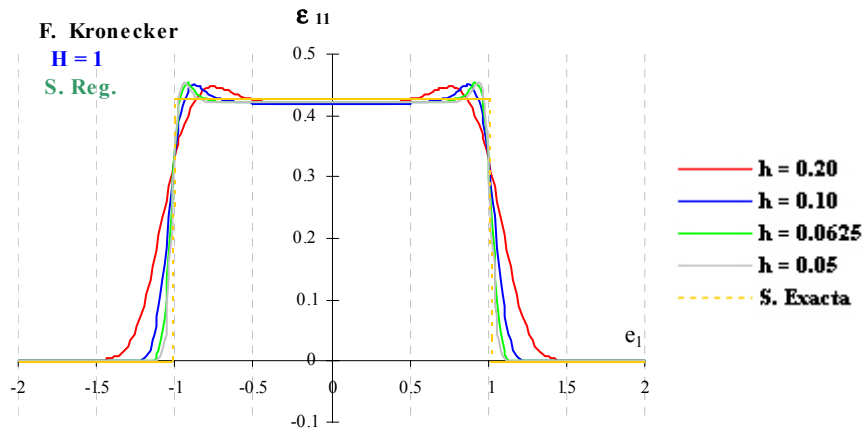


Fig. 6. 1. 1 Solución de ε_{11} para una inclusión circular con $\mu = 3$, $\lambda = 3$. - variación de h -

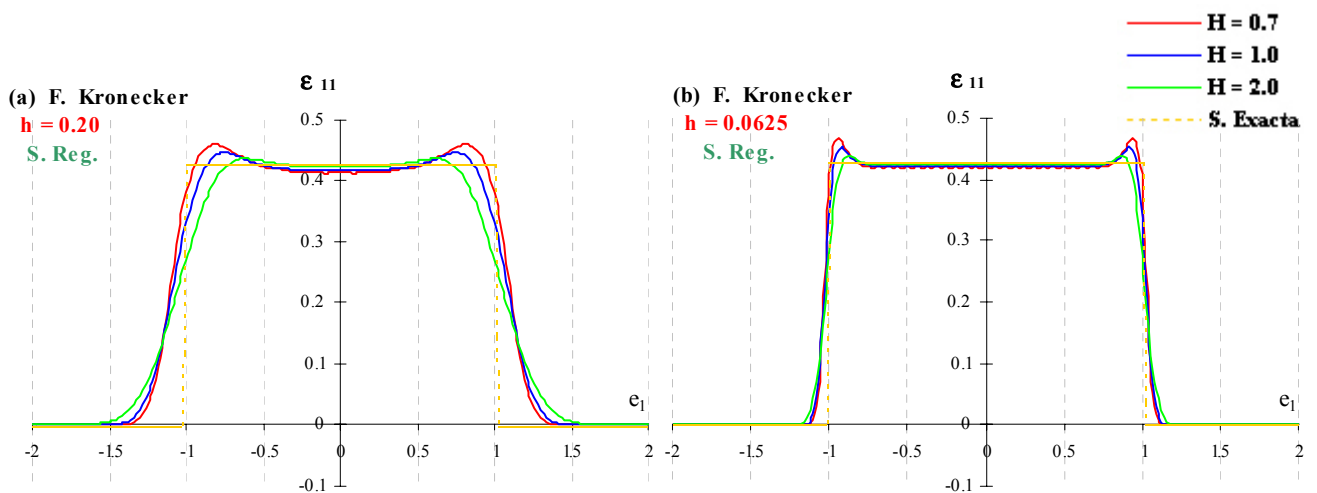


Fig. 6. 1. 2 Solución de ε_{11} para una inclusión circular con $\mu = 3$, $\lambda = 3$. - variación de H -

² La solución presentada de esta manera, fue calculada con $e_2 = 0$

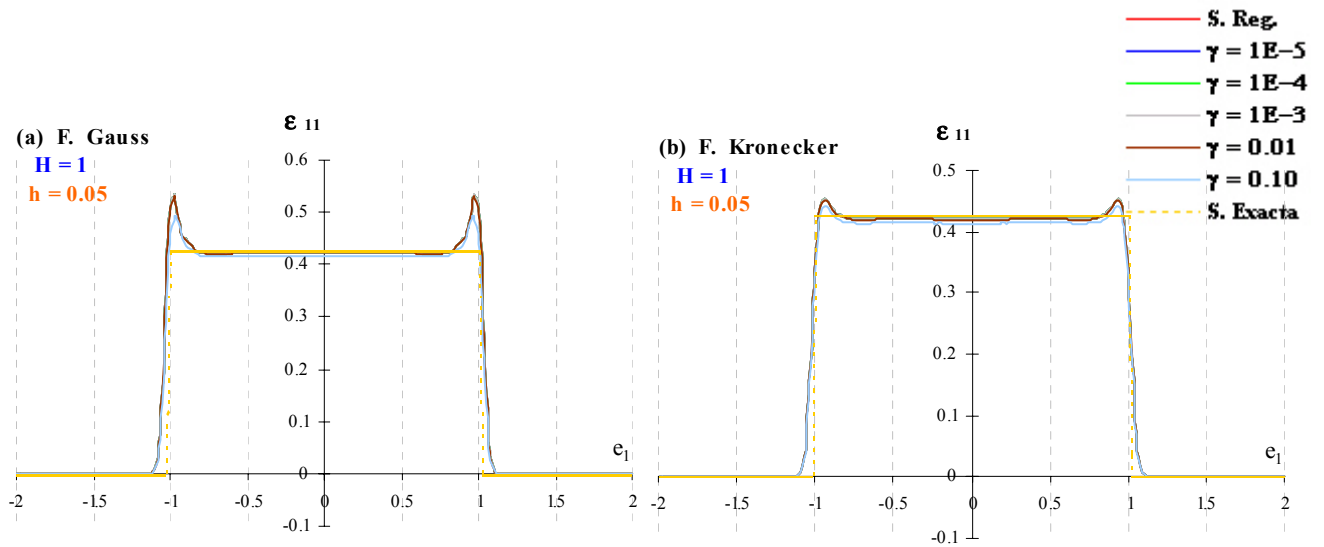


Fig. 6. 1. 3 Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con $\mu = 3, \lambda = 3$. - variación de γ -

En el segundo problema (II. $\mu = 0.1, \lambda = 0.1$) los resultados del cálculo de ϵ_{11} en la dirección e_1^3 presentan el mismo patrón descrito antes para la convergencia al disminuir h - Fig. 6.1.4 - y en la repercusión de esa reducción en la influencia de H sobre la solución - Fig. 6.1.5 (a) (b) -. Estos valores corresponden a lo obtenido mediante una Función Kronecker (5.46) que sigue proporcionando una mejor aproximación, sólo que también se utiliza un factor de regularización $\gamma = 0.01$ (5.50) - Fig. 6.1.6 -. Esto se debe a que no se tiene tan buen ajuste a la solución exacta como en el primer problema; sin embargo, se demuestra la efectividad del método en situaciones de *contraste alto* en que las propiedades de la perturbación son tales que $C(\mathbf{x}) \rightarrow 0, (C_1 = -C_0)$. Dicho contexto se presenta cuando se trabaja con porosidades o inclusiones *mucho más “suaves”* ($|\mu_1 / \mu_0| \ll 1$) que el medio donde se encuentran.

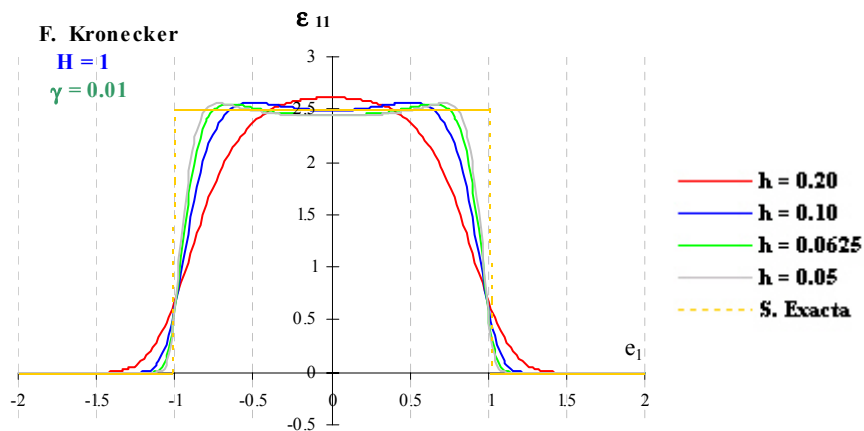


Fig. 6. 1. 4 Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con $\mu = 0.1, \lambda = 0.1$. - variación de h -

³ La solución presentada de esta manera, fue calculada con $e_2 = 0$

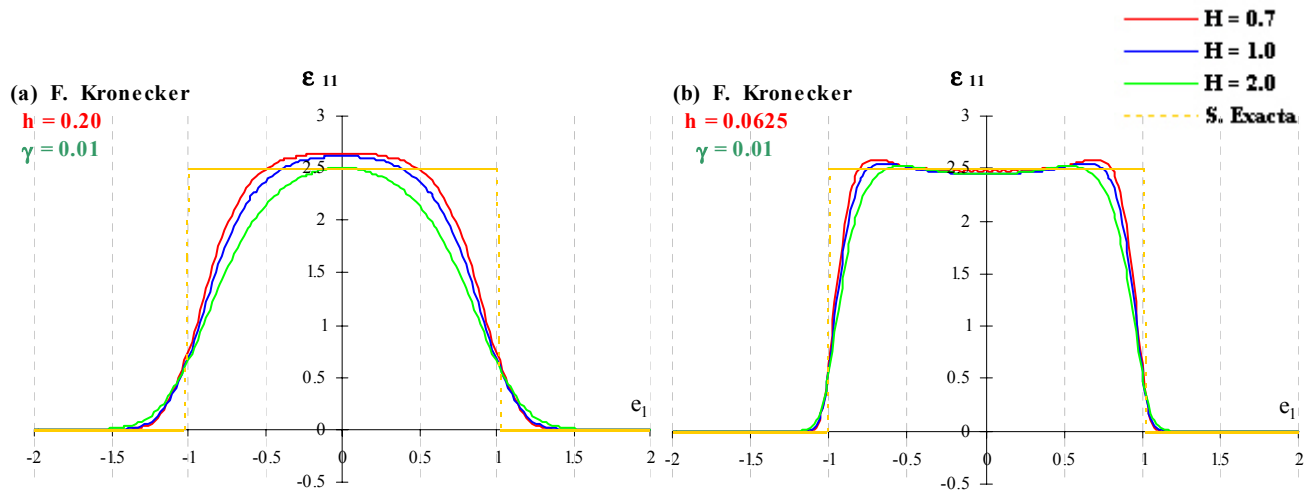


Fig. 6. 1. 5 Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con $\mu = 0.1, \lambda = 0.1$. - variación de H -

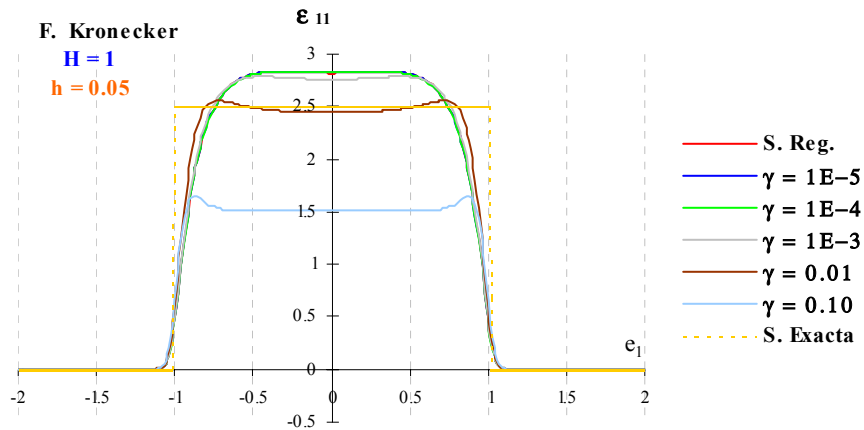


Fig. 6. 1. 6 Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con $\mu = 0.1, \lambda = 0.1$. - variación de γ -

La deformación ϵ_{11} en la dirección e_1^4 resultada para el tercer problema (III. $\mu = 7 \lambda = 7$), no presenta diferencias con respecto a los dos primeros problemas ni en la tendencia de convergencia para h - Fig. 6.1.7 - o en cómo su alteración afecta la influencia de H en la solución - Fig. 6.1.8 (a) (b) -. La aplicación de una Función Kronecker (5.46) sigue siendo la mejor opción para la aproximación, presentándose los resultados que corresponden a las soluciones obtenidas sin el uso de la regularización - Fig. 6.1.9 -. Las razones de ello coinciden en parte con lo expuesto en el primer problema; sólo que ahora se trata de una situación de *contraste alto* donde la inclusión es *mucho más “dura”* que el medio donde se encuentra ($|\mu_1 / \mu_0| \gg 1$). Este escenario crítico es opuesto a lo abordado en el problema anterior para la ecuación (2.35), es decir cuando, $C(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$.

⁴ La solución presentada de esta manera, fue calculada con $e_2 = 0$

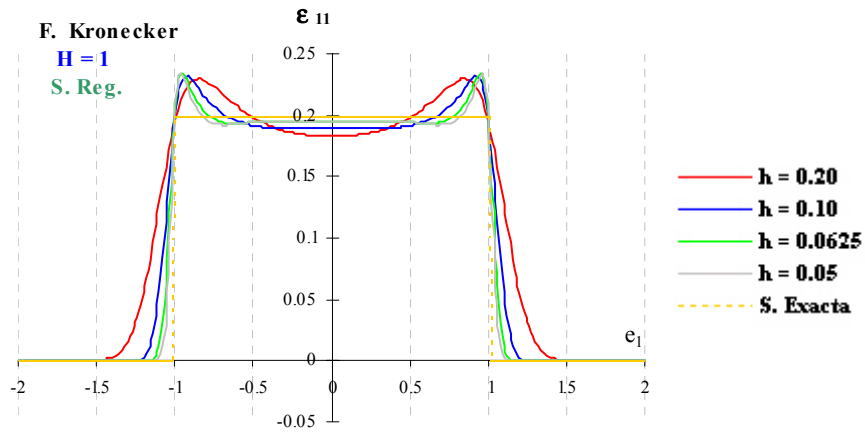


Fig. 6. 1. 7 Solución de ε_{11} para una inclusión circular con $\mu = 7$, $\lambda = 7$. - variación de h -

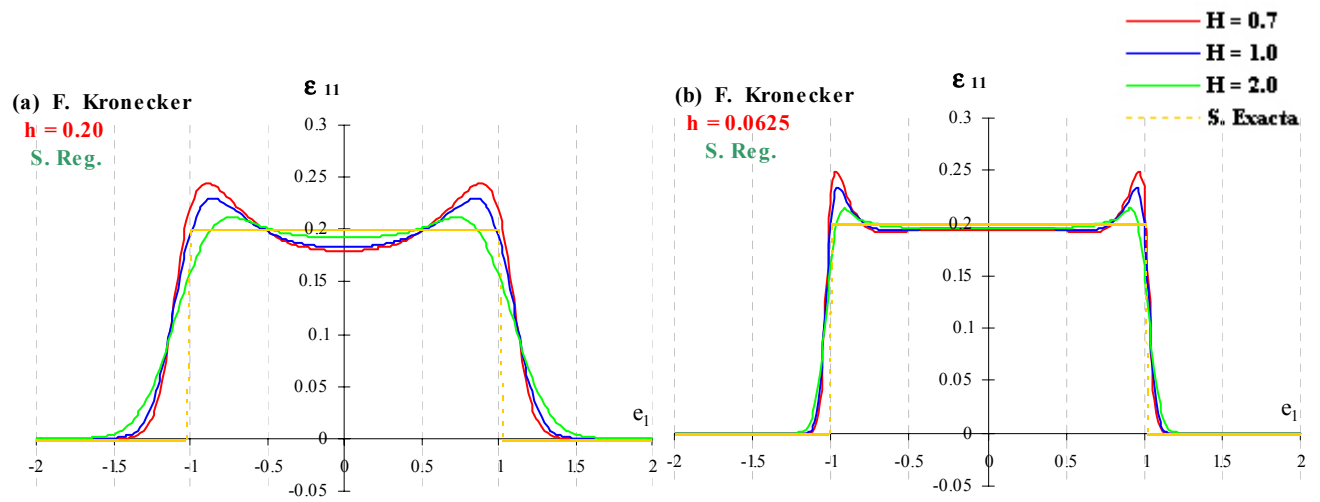


Fig. 6. 1. 8 Solución de ε_{11} para una inclusión circular con $\mu = 7$, $\lambda = 7$. - variación de H -

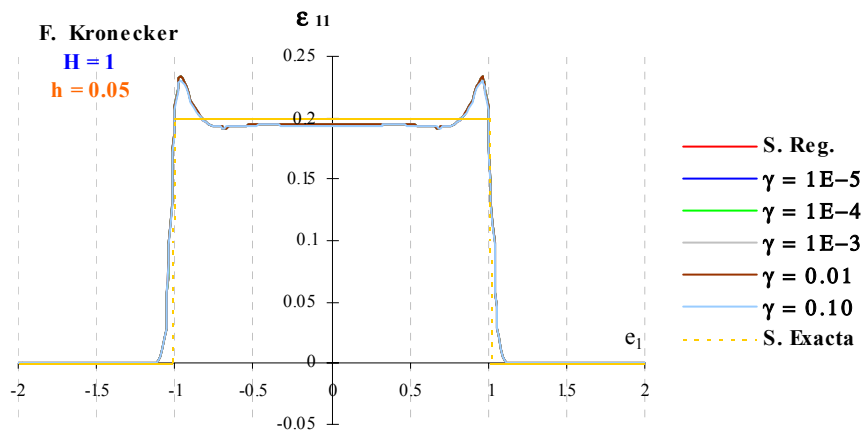


Fig. 6. 1. 9 Solución de ε_{11} para una inclusión circular con $\mu = 7$, $\lambda = 7$. - variación de γ -

De cualquier manera, no importando el problema del que se trate, la mayor magnitud en el error de la aproximación se presenta generalmente en los límites de la región V , acusando el efecto del fenómeno de Gibbs. La magnitud del *sobresalto* asociado (que evita la convergencia uniforme de la solución en un intervalo alrededor de esos puntos de discontinuidad) se ve afectada por el tipo de función que se utilice para calcular el valor del término libre ϵ de la ecuación (2.35), siendo para este caso (6.1) menor cuando se aplica una Función Kronecker (5.46) para ese cálculo.

6.2. INCLUSIÓN CIRCULAR CON PROPIEDADES CONSTANTES DENTRO DE UNA SUB-REGIÓN DETERMINADA POR EL VALOR DEL RADIO (ANILLOS O CAPAS)

En esta situación, la solución puede ser obtenida por medio del método desarrollado en Kanaoun et. al. (1989) [22], y a diferencia del caso anterior (6.1), se hizo necesario usar una malla circular para obtener una mejor aproximación que la generada con la malla estándar - Fig. 6.2.1 (a) -. Así la deformación ϵ_{11} obtenida en la dirección e_1^5 del primer problema (\mathbf{I} . $\mu_{\text{int}} = 3$, $\mu_{\text{ext}} = 2$) se comporta de modo que al reducir el valor de h la solución presenta una mayor convergencia - Fig. 6.2.1 (b) -. Esa disminución es causa también de que los cambios en H afecten menos la solución - Fig. 6.2.2 (a) (b) -. Los cálculos del término libre ϵ de la ecuación (2.35) fueron realizados ahora por medio de una Función de Gauss (5.47), ya que resultan mejor que los generados con una Función Kronecker (5.46). Y gracias al grado de ajuste obtenido por la aproximación a la solución exacta con la aplicación exclusiva del método - Fig. 6.2.3 -, la regularización de Tikhonov (5.50) es nuevamente innecesaria. Se tiene entonces una situación de *contraste bajo*, donde las propiedades son similares en magnitud ($|\mu_1 / \mu_0| \approx 1$), es decir no existe una diferencia *muy grande* entre la “dureza” o “suavidad” de las capas de la inclusión y su medio.

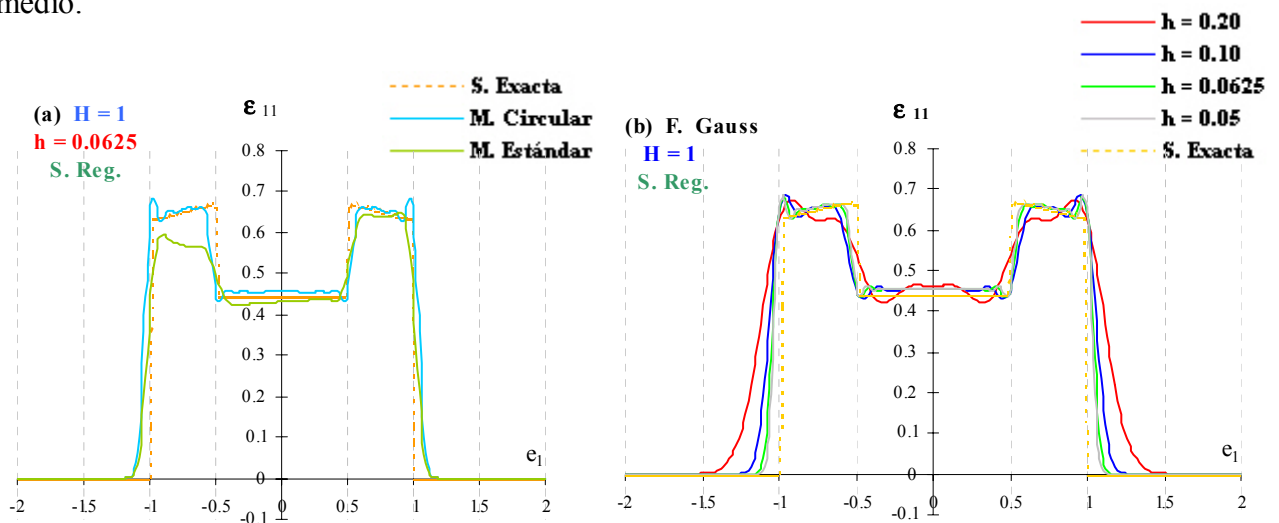


Fig. 6. 2. 1 (a) Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con capas: $\mu_{\text{int}} = 3$, $\mu_{\text{ext}} = 2$ con dos tipos de malla.
(b) Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con capas: $\mu_{\text{int}} = \lambda_{\text{int}} = 3$, $\mu_{\text{ext}} = \lambda_{\text{ext}} = 2$ - variación de h -

⁵ La solución presentada de esta manera, fue calculada con $e_2 = 0$

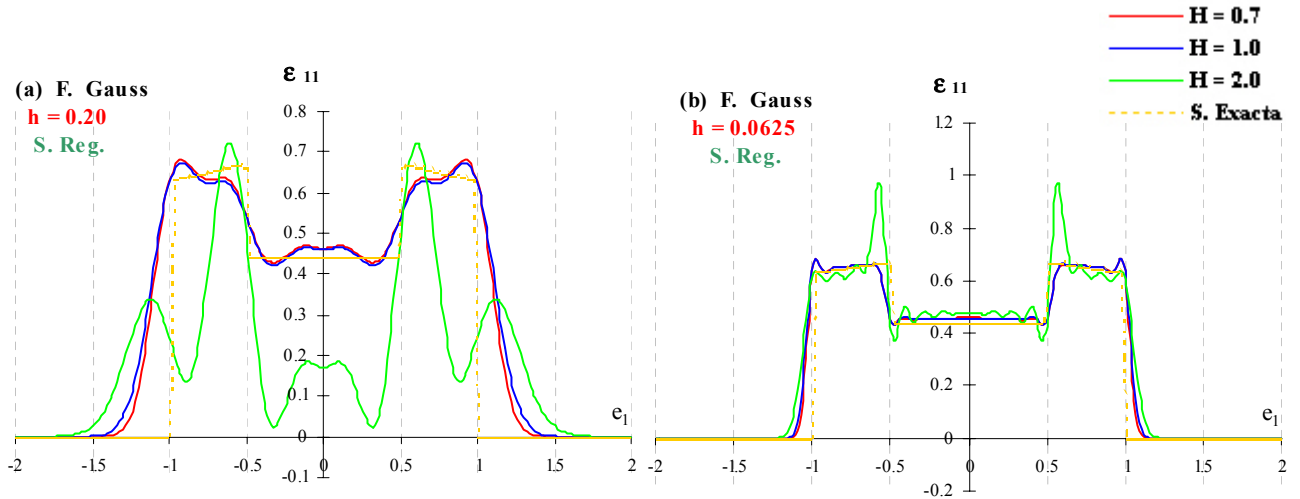


Fig. 6. 2. 2 Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con capas: $\mu_{int} = \lambda_{int} = 3$, $\mu_{ext} = \lambda_{ext} = 2$ - variación de H -

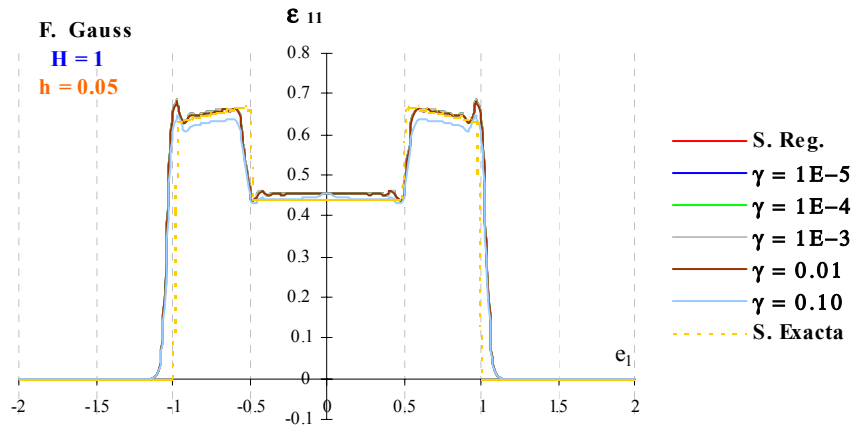


Fig. 6. 2. 3 Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con capas: $\mu_{int} = \lambda_{int} = 3$, $\mu_{ext} = \lambda_{ext} = 2$ - variación de γ -

Con una mejor aproximación de ϵ_{11} en la dirección e_1 ⁶ generada también gracias a una malla circular - Fig. 6.2.4 (a) -, el segundo problema (**II**. $\mu_{int} = 0.5$, $\mu_{ext} = 0.7$) posee el mismo patrón descrito antes para la convergencia cuando se reduce h - Fig. 6.2.4 (b) -, al tiempo que ese decremento produce que la alteración de H se vuelva irrelevante en el cálculo de la solución - Fig. 6.2.5 (a) (b) -. La Función de Gauss (5.47) se mantiene como la mejor elección para obtener el término libre de la ecuación (2.35) que produce el mejor resultado. Y aunque el uso de un factor de regularización $\gamma = 0.01$ (5.50) podría asociarse a un peor grado de ajuste a la solución exacta por la aplicación exclusiva del método, este resulta más bien por la mejora de la aproximación que puede obtenerse - Fig. 6.2.6 -. El contexto abordado es nuevamente del tipo de *contraste bajo*, sólo que ahora la inclusión tiene un centro “suave” y se “endurece” conforme se avanza hacia sus límites (la capa exterior es más dura), siendo las sub-regiones más “suaves” que el medio donde se encuentran. Este escenario es lo opuesto a lo presentado en el primer ejemplo (6.2.1) de este caso, donde el medio es más “suave” que las sub-regiones.

⁶ La solución presentada de esta manera, fue calculada con $e_2 = 0$

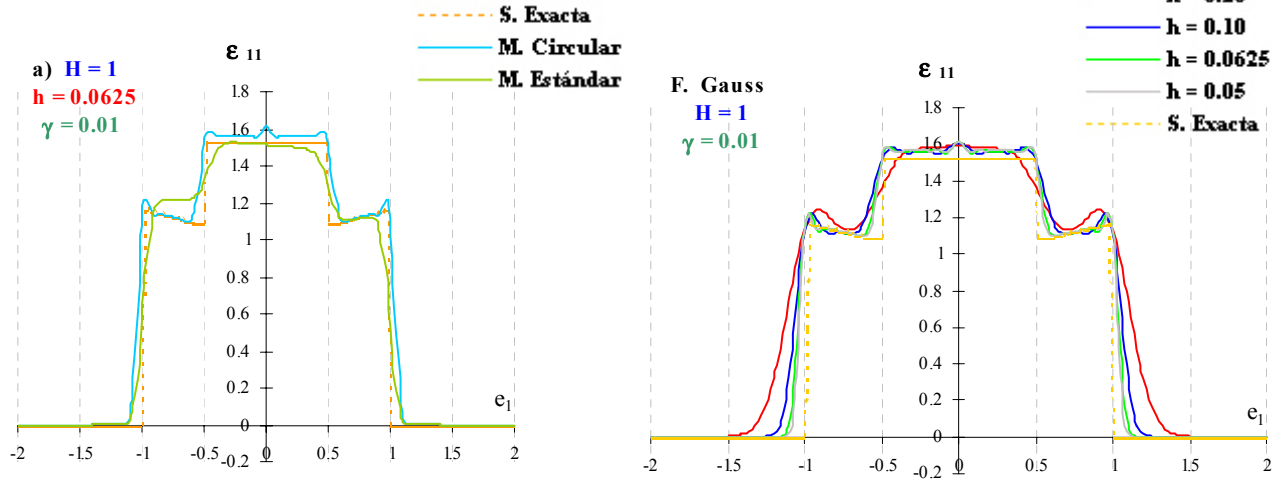


Fig. 6. 2. 4 (a) Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con capas: $\mu_{int} = 0.5, \mu_{ext} = 0.7$ con dos tipos de malla.
 (b) Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con capas: $\mu_{int} = \lambda_{int} = 0.5, \mu_{ext} = \lambda_{ext} = 0.7$ - variación de h -

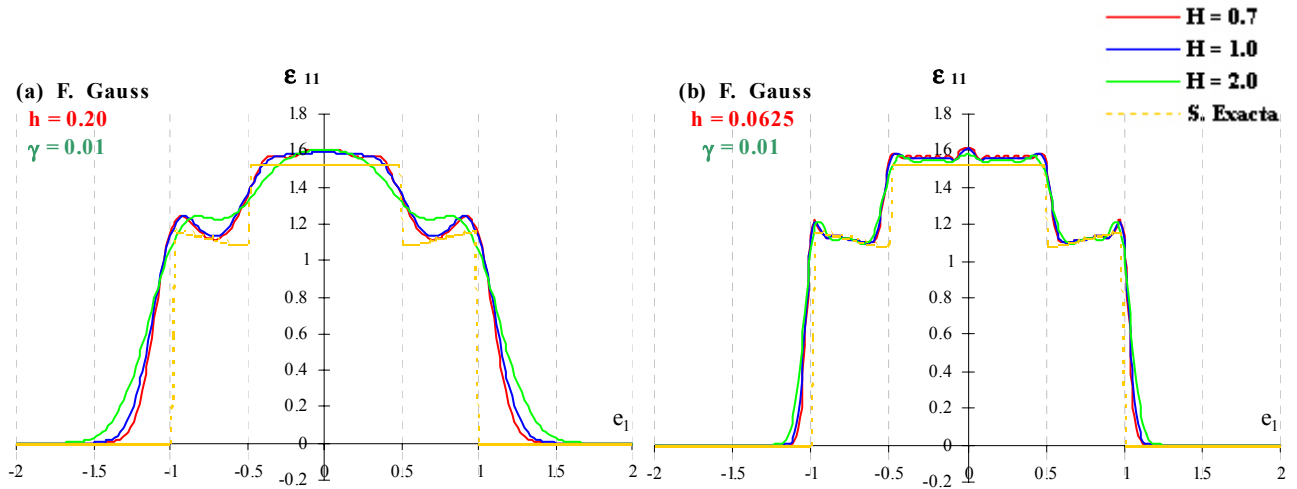


Fig. 6. 2. 5 Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con capas: $\mu_{int} = \lambda_{int} = 0.5, \mu_{ext} = \lambda_{ext} = 0.7$ - variación de H -

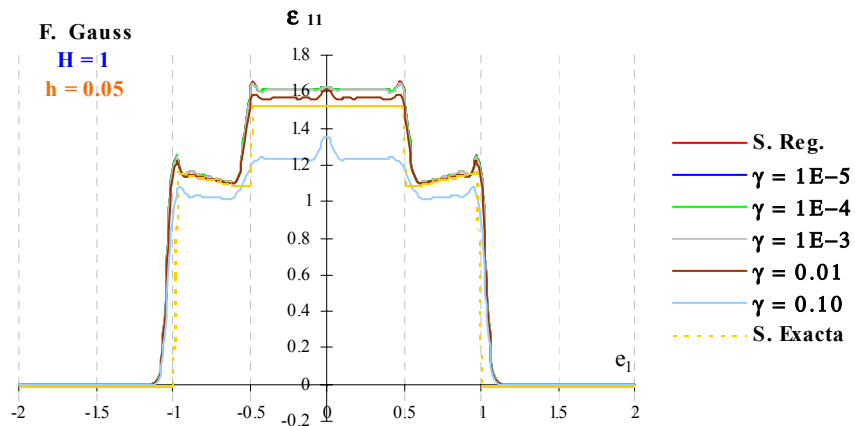


Fig. 6. 2. 6 Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con capas: $\mu_{int} = \lambda_{int} = 0.5, \mu_{ext} = \lambda_{ext} = 0.7$ - variación de γ -

El tercer problema (III. $\mu_{\text{int}} = 10, \mu_{\text{ext}} = 3$) no es la excepción del caso en cuanto a la selección de la malla (circular) - Fig. 6.2.7 (a) - para el cálculo de ϵ_{11} en la dirección e_1 ⁷ donde el comportamiento observado no presenta diferencias con respecto a los dos primeros. Tanto en la tendencia de convergencia para h - Fig. 6.2.7 (b) -, como en el efecto que la variación de este parámetro tenga para que un cambio de H modifique la solución - Fig. 6.2.8 (a) (b) -. Siendo la Función de Gauss (5.47) todavía la mejor opción para la aproximación, el ajuste obtenido con la regularización (5.50) - Fig. 6.2.9 -, no puede aún con su valor más alto proporcionar un ajuste a la solución exacta como los que se habían obtenido. El cambio estriba en que ahora se presenta un *contraste alto*, donde las propiedades no son similares en magnitud (no se tiene $|\mu_1 / \mu_0| \approx 1$), es decir, existe una diferencia *muy grande* entre la “dureza” o “suavidad” de las capas de la inclusión y su medio. Ahora bien en las situaciones presentadas para este caso (6.2) la mayor magnitud en el error se encuentra generalmente en el límite de la región V (inclusión) o en el existente entre la capa interior y exterior, los cuales corresponden a las discontinuidades que se tienen para la solución, que no está exenta del fenómeno de Gibbs mencionado anteriormente.

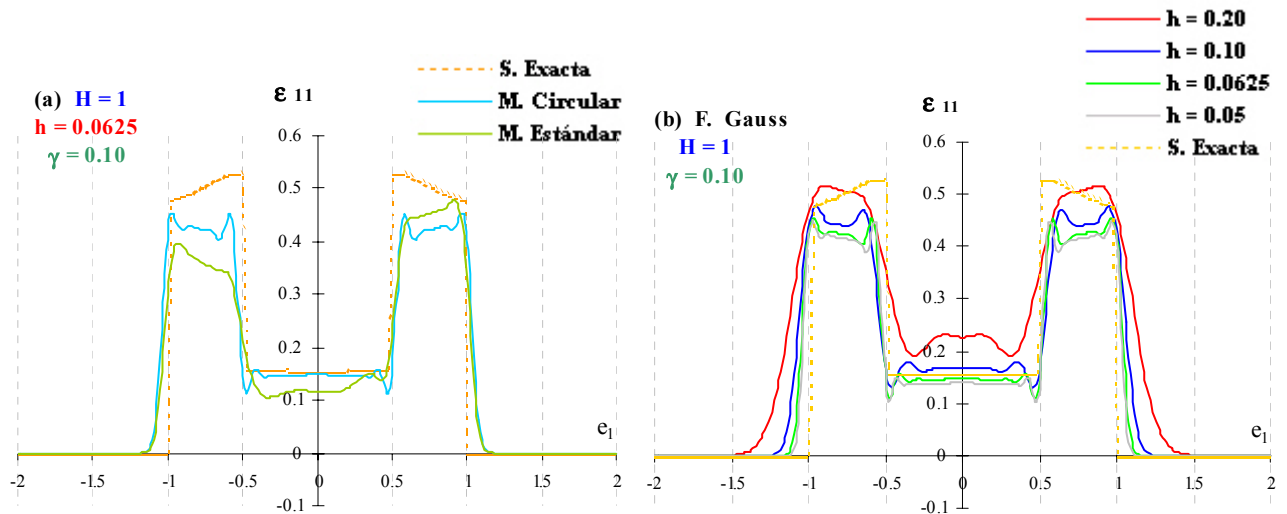


Fig. 6. 2. 7 (a) Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con capas: $\mu_{\text{int}} = 10, \mu_{\text{ext}} = 3$ con dos tipos de malla.
 (b) Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con capas: $\mu_{\text{int}} = \lambda_{\text{int}} = 10, \mu_{\text{ext}} = \lambda_{\text{ext}} = 3$ - variación de h -

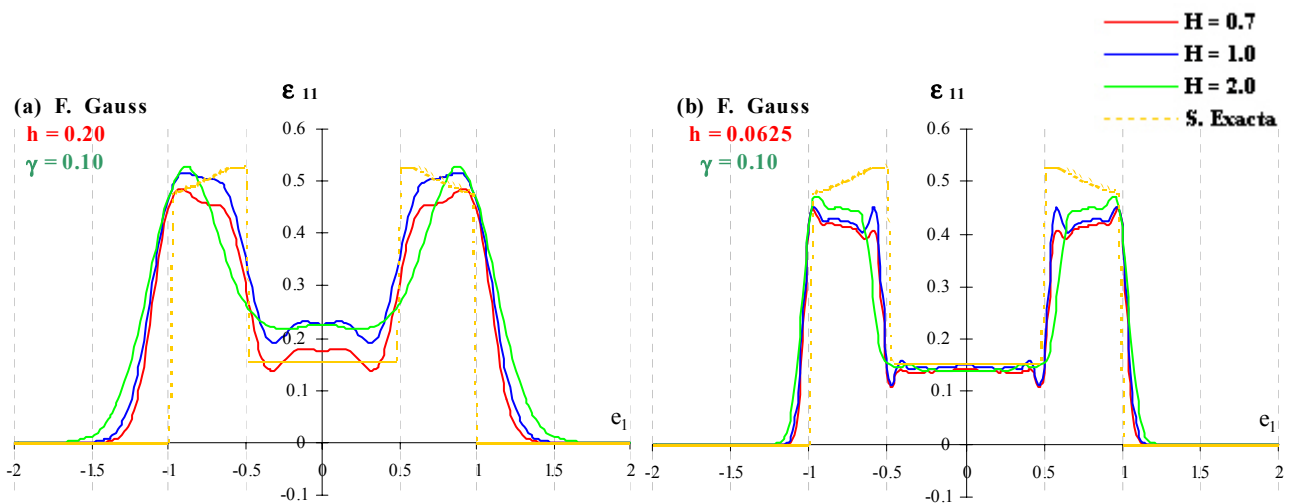


Fig. 6. 2. 8 Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con capas: $\mu_{\text{int}} = \lambda_{\text{int}} = 10, \mu_{\text{ext}} = \lambda_{\text{ext}} = 3$ - variación de H -

⁷ La solución presentada de esta manera, fue calculada con $e_2 = 0$

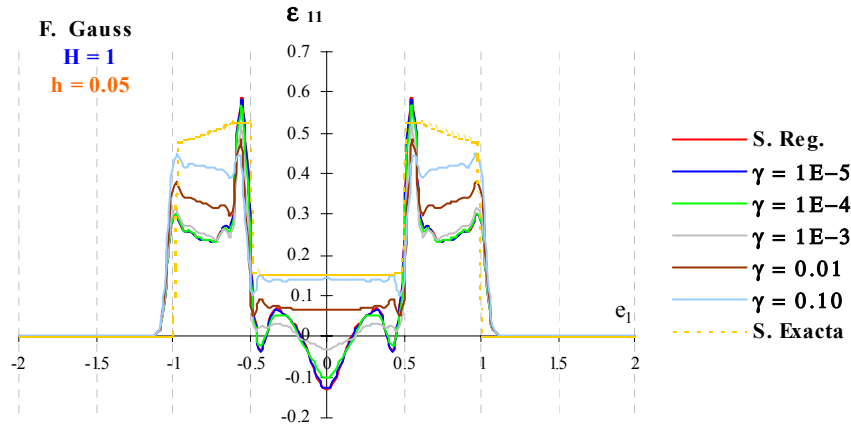


Fig. 6.2.9 Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con capas: $\mu_{int} = \lambda_{int} = 10$, $\mu_{ext} = \lambda_{ext} = 3$ - variación de γ -

6.3. INCLUSIÓN CIRCULAR CON PROPIEDADES VARIABLES DE ACUERDO AL VALOR DE SU RADIO (FUNCIÓN PARABÓLICA)

En este caso también es posible calcular la solución mediante el método desarrollado en Kanaoun et. al. (1989) [22], siendo la malla circular la que produce una vez más la mejor aproximación en comparación con una malla estándar - Fig. 6.3.1 (a) -. Así la deformación ϵ_{11} calculada en la dirección e_1 ⁸ del primer problema ($\mathbf{I} \cdot \mathbf{a} = 1$, $\mathbf{b} = -0.9$) tiene la tendencia - hasta ahora observada - de que al reducir el valor de h la solución presenta una mayor convergencia - Fig. 6.3.1 (b) -. Esa disminución resulta asimismo en que una variación de H origine menos cambios en los valores de la solución - Fig. 6.3.2 (a) (b) -. Teniéndose a la Función de Gauss (5.47) como la generadora del mejor resultado cuando se emplea para obtener el término libre ϵ de la ecuación (2.35). Y debido al grado de ajuste obtenido por la aplicación del método, la regularización de Tikhonov (5.50) no aporta mejoras importantes - Fig. 6.3.3 -. Ahora se está frente a un ejemplo con un *contraste bajo*, donde las propiedades son similares en magnitud ($|\mu_1 / \mu_0| \approx 1$), lo cual se puede traducir como una diferencia *pequeña* entre la “dureza” o “suavidad” - la cual puede estar comprendida por un máximo y/o un mínimo definido por la función seleccionada - de la inclusión y su medio.

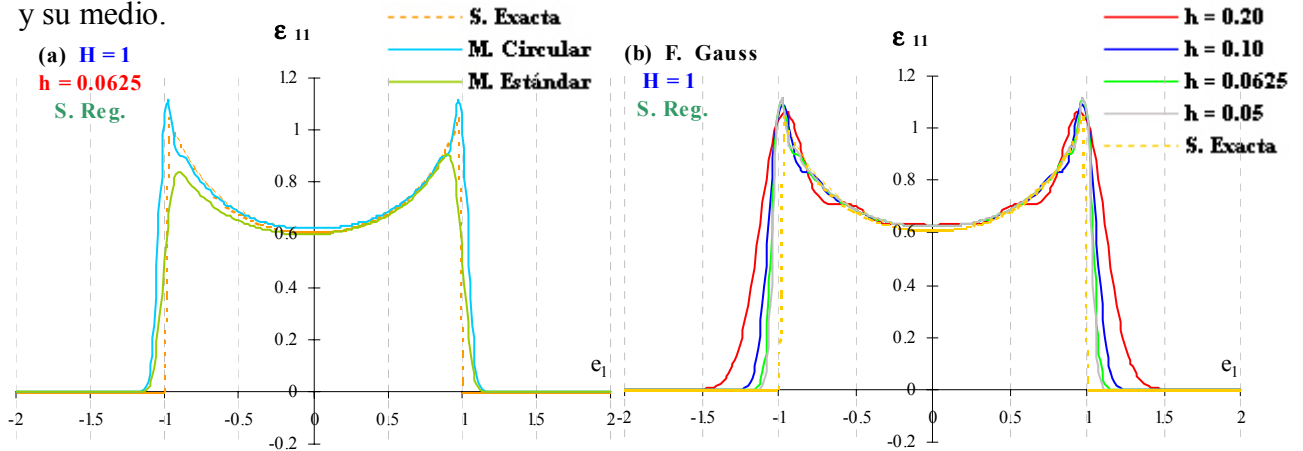


Fig. 6.3.1 (a) Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con $\mu_1 = \mu_0 (1 - 0.9 r^2)$, con dos tipos de malla. (b) Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con $\mu_1 = \mu_0 (1 - 0.9 r^2)$, $\lambda_1 = \lambda_0 (1 - 0.9 r^2)$ - variación de h -

⁸ La solución presentada de esta manera, fue calculada con $e_2 = 0$

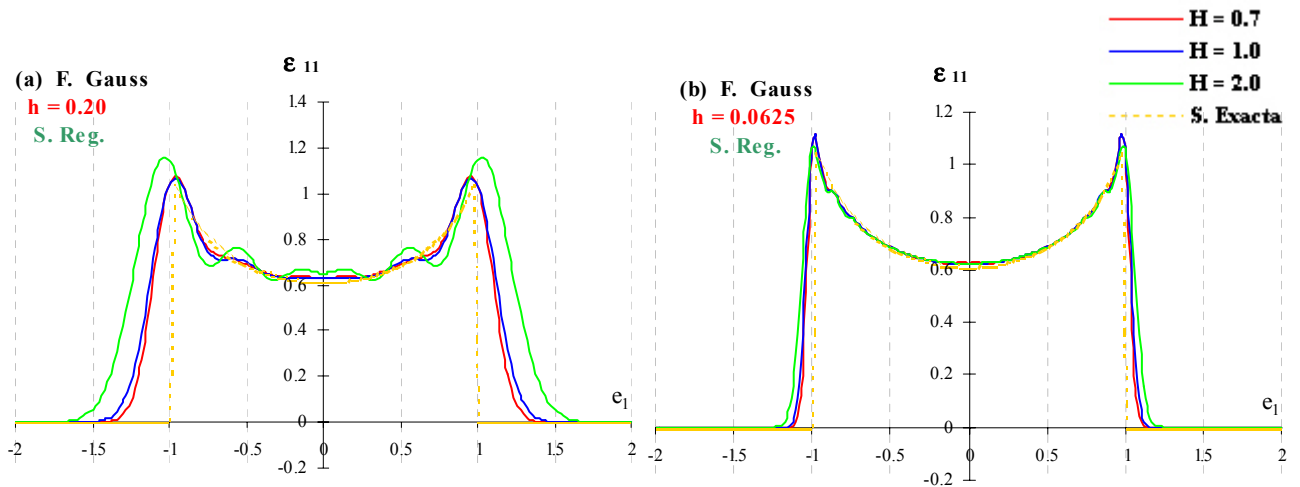


Fig. 6.3.2 Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con $\mu_1 = \mu_0 (1-0.9 r^2)$, $\lambda_1 = \lambda_0 (1-0.9 r^2)$ - variación de H -

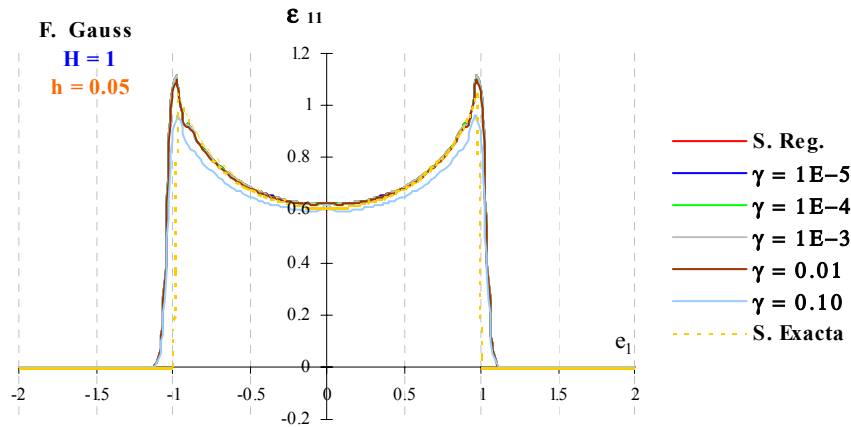


Fig. 6.3.3 Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con $\mu_1 = \mu_0 (1-0.9 r^2)$, $\lambda_1 = \lambda_0 (1-0.9 r^2)$ - variación de γ -

Para este problema (II. $a = 1$, $b = 3$) se observan las mismas relaciones y tendencias del último ejemplo (6.3.1) cuando se emplea una malla circular, que produce al igual que antes la mejor aproximación para la deformación ϵ_{11} en la dirección e_1^9 - Fig. 6.3.4 (a) -. Así como se mantiene el efecto de h en la convergencia de la solución - Fig. 6.3.4 (b) -, también permanece la influencia de h sobre los cambios en la solución que pudiera producir la variación del valor de H - Fig. 6.3.5 (a) (b) -. De igual forma el cálculo del término libre ϵ con una Función de Gauss (5.47) prevalece como la mejor opción. Y a pesar de que la regularización (5.50) no produce cambios muy grandes en la solución obtenida con el método, si sirve para conseguir un mejor ajuste a la solución exacta - Fig. 6.3.6 (a) -. Todo esto resulta del *contraste bajo* que se tiene nuevamente en esta ocasión, sólo que a diferencia de la situación que le precede, la inclusión es más “*dura*” que el medio que la contiene, lo cual resulta ser lo opuesto a la última situación considerada (6.3.2).

⁹ La solución presentada de esta manera, fue calculada con $e_2 = 0$

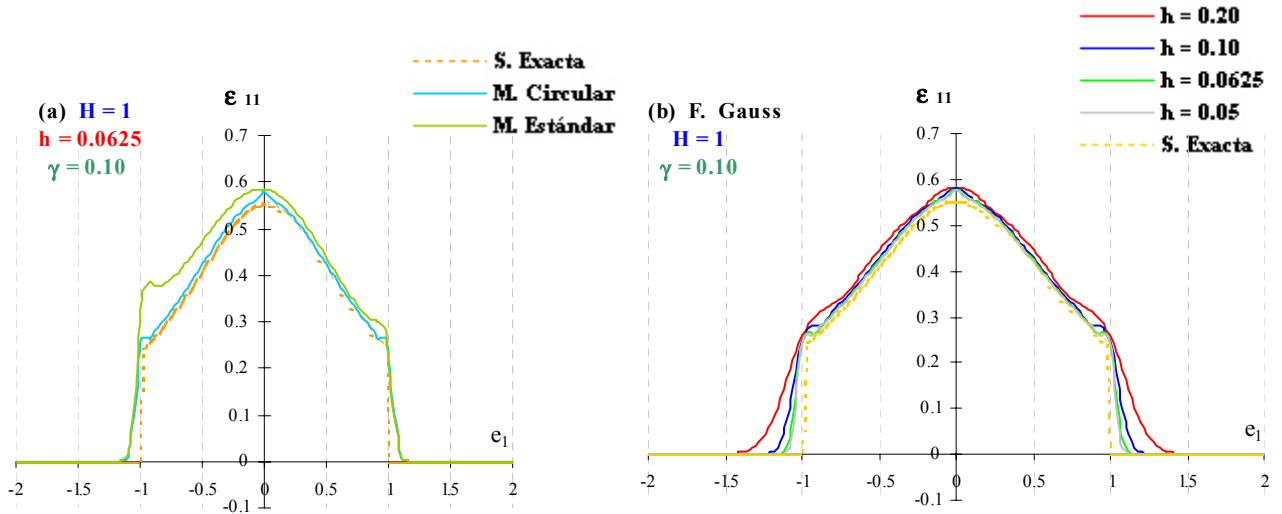


Fig. 6. 3. 4 (a) Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con $\mu_1 = \mu_0 (1 + 3 r^2)$, con dos tipos de malla. (b) Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con $\mu_1 = \mu_0 (1 + 3 r^2)$, $\lambda_1 = \lambda_0 (1 + 3 r^2)$ - variación de h -

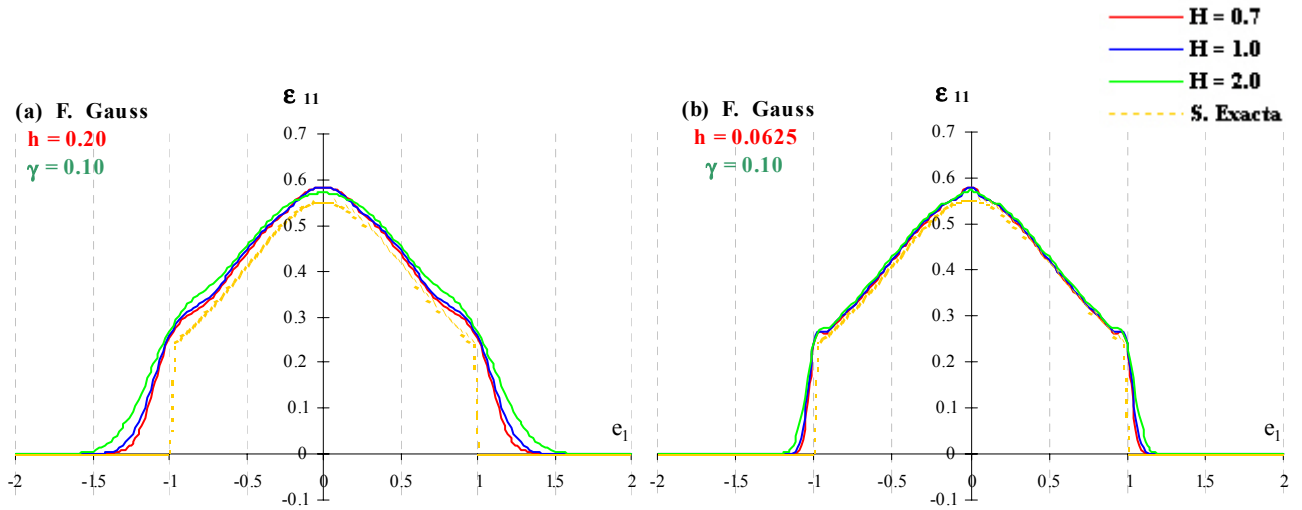


Fig. 6. 3. 5 Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con $\mu_1 = \mu_0 (1 + 3 r^2)$, $\lambda_1 = \lambda_0 (1 + 3 r^2)$ - variación de H -

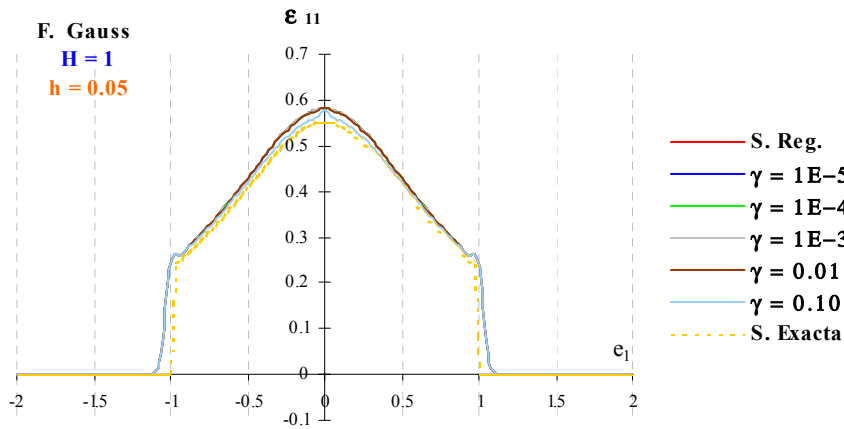


Fig. 6. 3. 6 Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con $\mu_1 = \mu_0 (1 + 3 r^2)$, $\lambda_1 = \lambda_0 (1 + 3 r^2)$ - variación de γ -

Aunque en el tercer problema (III. $a = 1, b = 10$) de este caso se aprecian los patrones descritos para los ejemplos previos, la aproximación no se comporta tan bien como hasta ahora. Porque si bien se obtiene la mejor aproximación para la deformación ϵ_{11} en la dirección e_1 ¹⁰ empleando una malla circular - Fig. 6.3.7 (a) -. Y se aprecia que una disminución en el valor de h produce una mayor convergencia de la solución - Fig. 6.3.7 (b) -, generando también que la variación de H termine por alterar cada vez menos los resultados - Fig. 6.3.8 (a) (b) -. Son estos últimos - generados por una Función de Gauss (5.47) para el término libre de la ecuación (2.35) - los que sufren de un ajuste a la solución exacta menor que el obtenido previamente; llegándose al punto de que ni siquiera con el mayor factor de regularización γ (5.50) se reduce el error de la aproximación en las zonas alejada de los bordes de la inclusión - Fig. 6.3.9 (a) -. Esto se debe al *contraste alto* propio de la situación planteada, que corresponde a una *gran* diferencia entre las propiedades de la inclusión y el medio donde se encuentra.

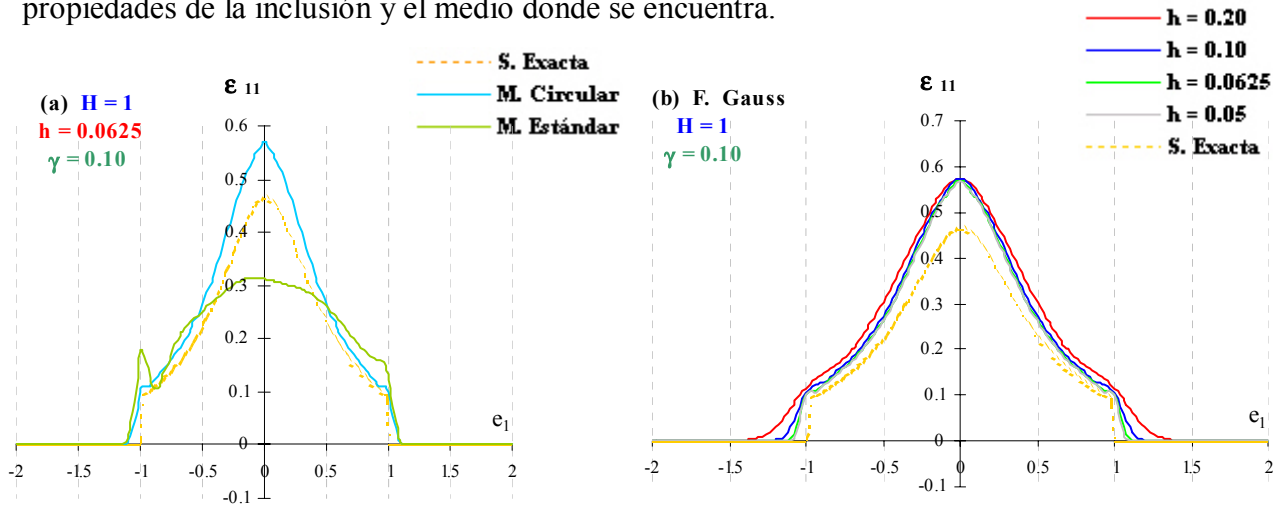


Fig. 6. 3. 7 (a) Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con $\mu_1 = \mu_0 (1 + 10 r^2)$, con dos tipos de malla. (b) Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con $\mu_1 = \mu_0 (1 + 10 r^2)$, $\lambda_1 = \lambda_0 (1 + 10 r^2)$ - variación de h -

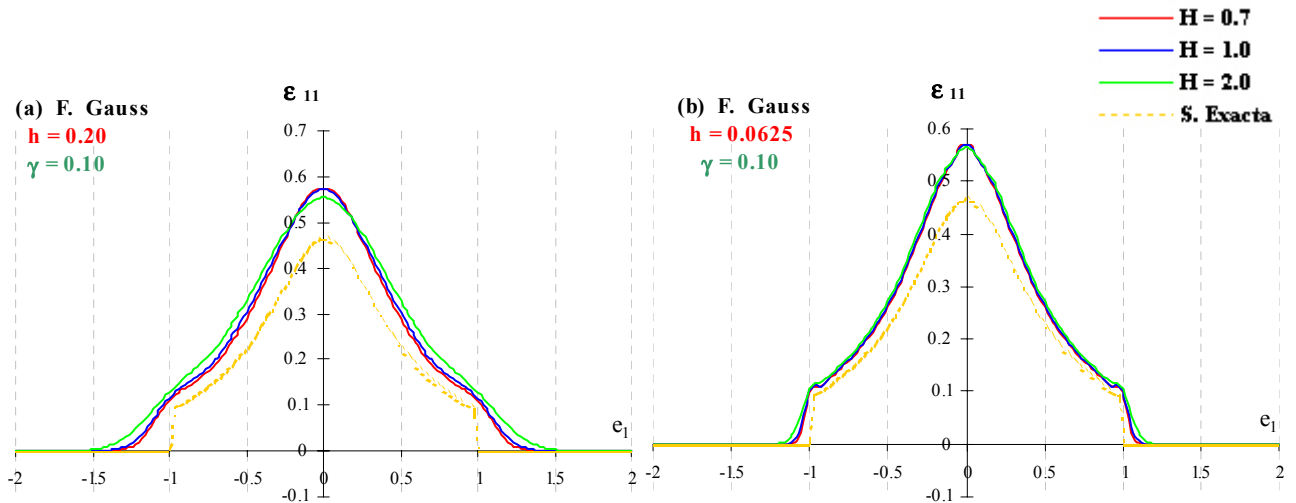


Fig. 6. 3. 8 Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con $\mu_1 = \mu_0 (1 + 10 r^2)$, $\lambda_1 = \lambda_0 (1 + 10 r^2)$ - variación de H -

¹⁰ La solución presentada de esta manera, fue calculada con $e_2 = 0$

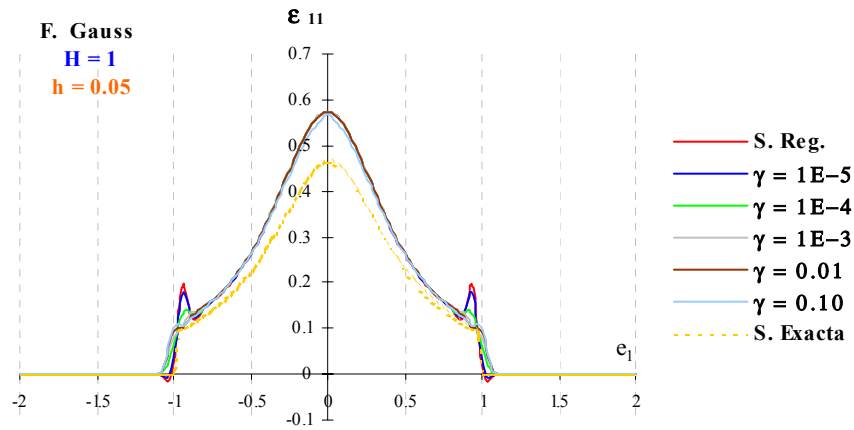


Fig. 6.3.9 Solución de ϵ_{11} para una inclusión circular con $\mu_1 = \mu_0 (1 + 10 r^2)$, $\lambda_1 = \lambda_0 (1 + 10 r^2)$ - variación de γ -

Al igual que con los casos anteriores se aprecia que la mayor magnitud del error se presenta generalmente en los límites de la inclusión, donde la solución presenta discontinuidad, acusando el fenómeno de Gibbs mencionado con anterioridad.

7. CONCLUSIONES

Existen varios elementos que afectan el comportamiento de las aproximaciones obtenidas mediante este método. Los principales factores responsables de ello son: el tipo de malla que se use para el cálculo y el tipo contraste (diferencia entre las propiedades de la inclusión y el medio donde se encuentra) que tenga el problema a resolver. Para el primero de ellos, se tiene que la geometría seleccionada para el arreglo de puntos (malla) resulta de suma importancia; ya que se pueden obtener formas y magnitudes para las soluciones calculadas totalmente diferentes a partir del mismo espaciamiento - h - (6.2) (6.3).

En cuanto al contraste se pueden definir dos casos: *bajo* ($|\mu_1 / \mu_0| \approx 1$) y *alto* ($|\mu_1 / \mu_0| \gg 1$ o $|\mu_1 / \mu_0| \ll 1$); con el primero se obtiene un ajuste a la solución exacta tal que la regularización de Tikhonov se vuelve prácticamente innecesaria, en tanto que con el segundo, se requieren de los cambios que produce el parámetro γ (5.50) para lograr un mejor resultado, que puede a pesar de esto no ser tan bueno como lo esperado - Fig. 6.2.9 -.

Además de esto, los parámetros h y H poseen un par de tendencias, que se encuentran vinculadas. Si bien un decremento en el valor de h produce una mayor convergencia en la aproximación, es causante asimismo que el efecto de un cambio H se haga despreciable. Las variaciones que se obtienen por la manipulación de estos elementos, si bien permiten obtener mejores ajustes, no producen modificaciones tan significativas como las obtenidas por la selección de malla y/o de un problema con cierto tipo de contraste.

En cualquier caso, la mayor magnitud para el error se presenta generalmente donde las soluciones presentan una discontinuidad, generándose una convergencia no uniforme en las zonas alrededor de dichos puntos, lo cual es síntoma del fenómeno de Gibbs. La elección de la función - Gauss (5.46) o Kronecker (5.47) - empleada para calcular el término libre de la ecuación (2.35), permite modificar dichos valores logrando producir soluciones diferentes.

También es posible aliviar esto mediante una modificación a las funciones gaussianas aquí propuestas, lo cual produce otro tipo de funciones de aproximación llamadas *de borde* [19]. Estas se definen de modo que disminuyen el error obtenido, al considerar la distancia mínima entre el punto donde se ubica la función con respecto al límite de la región y la normal a la tangente del punto sobre la frontera de la región que marca dicha distancia. Sin embargo, requieren también de la redefinición de los datos iniciales del problema, lo que se traduce en una mayor cantidad de información necesaria para su aplicación.

De cualquier forma, las funciones gaussianas empleadas permiten que la construcción del sistema sea un proceso simple que implica el uso de unas cuantas funciones estándar, que dependen únicamente de las coordenadas de los puntos distribuidos en la región por analizar. Lo que se traduce en una implementación sencilla, que no requiere de una gran capacidad de cómputo.

En conclusión, el método propuesto es una herramienta que permite el cálculo de los campos elásticos alrededor de los defectos e inclusiones en un medio no homogéneo. Ya que es capaz de generar resultados con un grado de ajuste a la solución exacta (por su aplicación exclusiva o con el auxilio de la técnica de regularización de Tikhonov) para casos diferentes que muestran el rango de aplicación y precisión que posee, junto con las ventajas sobre otras vías de solución.

REFERENCIAS

- [1] SUKUMAR, N. et. al. *Modeling Holes and Inclusions by Levels Sets in the Extended Finite Element Method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 190, Number 46-47, 2000. p. 6183-6200
- [2] MATSUMOTO, T; TANAKA, M. *An Efficient Boundary Element Method for Two Dimensional Potential Fields with Small Circular Inclusions*. Proceedings of 2nd BEM Technology Conference, Vol. 2, 1992. p. 45-50
- [3] MAZ'YA, Vladimir; SCHMIDT, S. *On approximate approximations using Gaussian kernels*. IMA Journal of Numerical Analysis, Vol. 16. 1996. p. 13-29
- [4] MAZ'YA, Vladimir; SCHMIDT, S. *Approximate Approximations and the Cubature of Potentials*. Linköping University, Sweden. WIAS Berlin, Germany. p. 1-20
- [5] MAZ'YA, V. *Approximate Aproximations, The Mathematics of Finite Elements and Aplications*. John Wiley & Sons, 1994. p.77-104
- [6] KANAUN, S. et. al. *A new numerical method for the solution of the second boundary value problem of elasticity for bodies with cracks*. Revista Mexicana de Física, Vol. 47. Agosto 2001. p. 309-323
- [7] WILLIAMS, John R; AMARATUNGA, Kevin. *Solution of Problems 2D Elasticity using the Boundary Point Method*.
- [8] KWON, T. H. *Introduction to Finite Element Method*. Pohang University of Science & Technology. 2005
- [9] ROBERTS, Stephen. *The Finite Element Method*. School of Mathematical Sciences, A. N. U. 2002 p.1-37
- [10] *The collocation method*.
http://www.bem.uni-stuttgart.de/bem_pages/node10.html
- [11] KREMP, T. et al. *Collocation Method for Nonlinear Optical Pulse Propagation*. University of Karlsruhe, Germany
- [12] GERLACH, Ulrich. *Types of Integral Equations*. 2004
<http://www.math.ohio-state.edu/~gerlach/math/Bvtypset/node96.html>

- [13] WEISSTEIN, Eric W. *Fredholm Integral Equation of the First Kind*. MathWorld
<http://mathworld.wolfram.com/FredholmIntegralEquationoftheFirstKind.html>
- [14] WEISSTEIN, Eric W. *Fredholm Integral Equation of the Second Kind*. MathWorld
<http://mathworld.wolfram.com/FredholmIntegralEquationoftheFirstKind.html>
- [15] TARANG, Mare. *Stability of the Spline Collocation Method for Volterra Integro-Differential Equations*. University of Tartu, Estonia. 2004. p. 1-87
- [16] NAG Fortran Library. *Integral Equations*.
- [17] JØRGENSEN, Erik. *Higher-Order Integral Equation Methods in Computational Electromagnetics*. Technical University of Denmark, May 2003. p. 1-157
- [18] KUNIN, Isaac A., *Elastic Media with Microstructure II Three Dimensional Models*. Springer-Verlag, Germany, 1983. 269 p.
- [19] KANAUN, S. K.; BABAII K., S. *A numerical method for the solution of thermo- and electro-static problems for a medium with isolated inclusions*. Journal of Computational Physics, 192. 2003. p. 471-493
- [20] *Tikhonov regularization*. WorldHistory
<http://www.worldhistory.com/>
- [21] HANSEN, P. C., *The L curve and its use in the numerical treatment of inverse problems*. Lyngby, Denmark, 2005. p 1-24
- [22] KANAUN, S. K.; KUDRYAVTSEVA, L. T. *Elastic and Thermoelastic Characteristics of Composites Reinforced with Unidirectional Fibre Layers*. PMM, 1989, Vol. 53, N° 5. p. 628-636

BIBLIOGRAFÍA

LIBROS

BECKER, A.A. *The Boundary Element Method in Engineering: a complete course*. McGraw Hill, New York, 1992. 337 p

BONNET, Marc., *Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids*. J. Wiley, New York, 1995. 391 p.

BONNET, Marc. et. al. *Mathematical Aspects of Boundary Element Methods*. Chapman&Hall / CRC, London, 2000. 305 p.

BREBBIA, C. A. *The Boundary Element Method for Engineers*. Pentech Press, London, 1984, 189 p.

CHEN, Gong. et. al. *Boundary Element Methods*. Academic, 1992. 646 p

KUNIN, Isaac A., *Elastic Media with Microstructure II Three Dimensional Models*. Springer-Verlag, Germany, 1983. 269 p.

LEWIS, P.E.; WARD, J.P. *The Finite Element Method: principles and applications*. Addison Wesley, England, 1991. 421 p.

MAZ'YA, V. *Approximate Aproximations, The Mathematics of Finite Elements and Aplications*. John Wiley & Sons, 1994. p.77-104

ZIENKIEWICZ, O.C. et. al. *The Finite Element Method*. Vol. 1. 5th ed., Oxford, 2000.

ARTÍCULOS

DAUX, C. et. al. *Arbitrary Branched and Intersecting Cracks with the Extended Finite Element Method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 48, 2000, p. 1741-1760

HANSEN, P. C., *The L curve and its use in the numerical treatment of inverse problems*. Lyngby, Denmark, 2005. p 1-24

JØRGENSEN, Erik. *Higher-Order Integral Equation Methods in Computational Electromagnetics*. Technical University of Denmark, May 2003. p. 1-157

KANAUN, Sergei. et. al. *A new numerical method for the solution of the second boundary value problem of elasticity for bodies with cracks*. Revista de Física Mexicana, Vol. 47. Agosto 2001. p. 309-323

KANAUN, S. K.; BABAII K., S. *A numerical method for the solution of thermo- and electro-static problems for a medium with isolated inclusions*. Journal of Computational Physics, 192. 2003. p. 471-493

KANAUN, S. K.; KUDRYAVTSEVA, L. T. *Elastic and Thermoelastic Characteristics of Composites Reinforced with Unidirectional Fibre Layers*. PMM, 1989, Vol. 53, N° 5. p. 628-636

KREMP, T. et al. *Collocation Method for Nonlinear Optical Pulse Propagation*. University of Karlsruhe, Germany

MATSUMOTO, T; TANAKA, M. *An Efficient Boundary Element Method for Two Dimensional Potential Fields with Small Circular Inclusions*. Proceedings of 2nd BEM Technology Conference, Vol. 2, 1992. p. 45-50

MATSUMOTO, T; TANAKA, M; ISHII, N. *An Efficient Boundary Element Method for Two Dimensional Potential Fields with Small Circular Inclusions*. Proc. 5th Japan China Symposium, Sapporo / Japan, 1993, June 1-4, p. 221-230

MAZ'YA, Vladimir; SCHMIDT, S. *On approximate approximations using Gaussian kernels*. IMA Journal of Numerical Analysis, Vol. 16. 1996. p. 13-29

MÖES, N; DOLBOW, J; BELYTSCHKO, T. *A Finite Element Method for Crack Growth Without Remeshing*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 46, Number 1, p. 131-150

ROBERTS, Stephen. *The Finite Element Method*. School of Mathematical Sciences, A.N.U. 2002 p.1-37

SUKUMAR, N. et. al. *Modeling Holes and Inclusions by Levels Sets in the Extended Finite Element Method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 190, Number 46-47, 2000. p. 6183-6200

TARANG, Mare. *Stability of the Spline Collocation Method for Volterra Integro-Differential Equations*. University of Tartu, Estonia. 2004. p. 1-87

MANUALES

NAG Fortran Library. Integral Equations.

WEB RESOURCES

The collocation method.

http://www.bem.uni-stuttgart.de/bem_pages/node10.html

GERLACH, Ulrich. *Types of Integral Equations*. 2004

<http://www.math.ohio-state.edu/~gerlach/math/Bvtypset/node96.html>

WEISSTEIN, Eric W. *Fredholm Integral Equation of the First Kind*. MathWorld

<http://mathworld.wolfram.com/FredholmIntegralEquationoftheFirstKind.html>

WEISSTEIN, Eric W. *Fredholm Integral Equation of the Second Kind*. MathWorld

<http://mathworld.wolfram.com/FredholmIntegralEquationoftheSecondKind.html>

Tikhonov regularization. WorldHistory

<http://www.worldhistory.com/>