

Visualización matemática con realidad aumentada: Cálculo multivariado

Linda Margarita Medina Herrera, linda.medina@item.mx; Gerardo Aguilar Sánchez, gerardo.aguilar@itesm.mx; Lino Andrea Angelo Notarantonio, lino@itesm.mx; Sergio Ruiz Loza, sergio.ruiz.loza@itesm.mx; Moisés Alencastre Miranda, malencastre@itesm.mx; Lourdes Muñoz Gómez, lmunoz@itesm.mx; Martín Pérez Díaz, martin.perez@itesm.mx; Marlene Aguilar Abalo, maaguila@itesm.mx; Cecilia Silva Muñoz, cecisilvamunoz@gmail.com; Zaira Grostieta Domínguez, zairaled@gmail.com; Alexis Matuk Molina, A01021143@itesm.mx; Catalina Peralta Hoghooghi, A01021472@itesm.mx; Omar Sanseviero Gúezmes, A01021626@itesm.mx; Arthur Alves Araujo Ferreira, A01022593@itesm.mx; Diana Margarita Ramos Fusther Correa, A01015893@itesm.mx; Ludovic Cyril Michel, A00819447@itesm.mx
Tecnológico de Monterrey, Escuela de Ingeniería,
Campus Ciudad de México, Campus Santa Fe

Resumen

En este artículo se muestran las principales características de la visualización matemática y cómo el uso de la tecnología puede ayudar a desarrollar habilidades de visualización en el espacio tridimensional. Específicamente se muestra cómo mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje de importantes conceptos de cálculo de varias variables, mediante la visualización 3D de las superficies y sus operaciones en una aplicación móvil y mediante el uso de realidad aumentada. Presentamos una aplicación para dispositivos móviles y web que permite visualizar superficies cuádricas y además cuenta con una serie de actividades de realidad aumentada, cada una con sus objetivos particulares, que pueden usarse para desarrollar actividades dentro y fuera del salón de clase.

Palabras clave:

realidad aumentada, espacio tridimensional, matemáticas, aplicación móvil

1.Introducción

Uno de los principales problemas que presentan los estudiantes en los cursos de matemáticas tiene que ver con un tratamiento inadecuado del pensamiento espacial. El estudio del espacio tridimensional requiere que el estudiante desarrolle habilidades de visualización. La visualización tiene que ver con los procesos y capacidades de los individuos para realizar tareas que requieren ver o imaginar mentalmente objetos geométricos espaciales, así como relacionar y realizar operaciones o transformaciones geométricas con los mismos.

Se ha desarrollado un *software* de realidad virtual y aumentada especialmente diseñado para trabajar con estudiantes de cálculo multivariado, que conjuga lo mejor de los graficadores existentes con operaciones booleanas, cálculo y realidad aumentada. La herramienta cuenta con visualizador de superficies cuádricas, las cuales se pueden ver y manipular de distintas formas y aplicarles operaciones booleanas. Para complementar la herramienta tecnológica se ha diseñado un conjunto

de actividades con tarjetas de realidad aumentada que tienen la intención de desarrollar las habilidades de visualización en cálculo multivariado. La herramienta tecnológica ha sido desarrollada por profesores de computación expertos en realidad aumentada y videojuegos. Las actividades pedagógicas han sido desarrolladas por un equipo de profesores con experiencia impartiendo cálculo multivariado, teniendo en cuenta las dificultades en el proceso enseñanza aprendizaje de dicha materia y con la intención específica de desarrollar la inteligencia espacial y las habilidades de visualización matemática.

1.1 Planteamiento del problema

En la teoría de las múltiples inteligencias de Howard Gardner (1983) se establece la inteligencia espacial como una de estas inteligencias. Gardner afirma que el pensamiento espacial es esencial para el desarrollo del pensamiento científico, ya que es usado para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas. Se estima que la mayoría de las profesiones, tales como Ingeniería, Arquitectura y Diseño, Medicina, y muchas disciplinas científicas como Química, Física y Matemáticas, requieren personas que tengan un alto desarrollo de inteligencia espacial. Las personas que tienen desarrollada su inteligencia espacial pueden resolver problemas de ubicación, orientación y distribución de espacios y de datos.

En los cursos de Cálculo multivariado es evidente la falta de desarrollo de inteligencia espacial. Se ha encontrado que los estudiantes carecen de un desarrollo adecuado de las siguientes habilidades espaciales:

- 1) Imaginar la rotación de un objeto, desenrollar un sólido, y visualizar los cambios relativos de la posición de un objeto en el espacio.
- 2) Concebir un arreglo en el cual hay movimiento entre sus partes.
- 3) Comprender movimientos imaginarios en tres dimensiones y manipular objetos en la imaginación.
- 4) Manipular o transformar la imagen de un patrón espacial en otro arreglo.
- 5) Determinar relaciones entre diferentes objetos en el espacio.
- 6) Reconocer la identidad de un objeto cuando se ve desde diferentes ángulos, o cuando el objeto es movido.
- 7) Considerar relaciones espaciales donde la orientación del cuerpo del observador es esencial.
- 8) Percibir patrones espaciales y compararlos unos con otros.
- 9) No confundirse cuando se cambia la orientación en la que se presenta un objeto espacial.
- 10) Percibir patrones espaciales o de mantener la orientación respecto a objetos en el espacio.

La tecnología juega un papel fundamental al permitir reproducir imágenes tridimensionales mediante realidad virtual o realidad aumentada. Y esta herramienta tecnológica no solo podrá ayudar a adquirir y desarrollar la inteligencia espacial, sino que también puede ser aprovechada como un elemento motivador para los estudiantes de la generación milenio.

1.2 Objetivo de la investigación

Objetivo general:

- Determinar las habilidades de visualización que pueden ser desarrolladas en los estudiantes, mediante el uso de la realidad aumentada en al menos el 50% de los cursos de Cálculo multivariado ofrecidos en la zona metropolitana de la Ciudad de México del periodo enero-diciembre de 2016 en adelante.
- Establecer el impacto del uso de la realidad aumentada en la evaluación final de los estudiantes en al menos el 50% de los cursos de cálculo multivariado ofrecidos en la zona metropolitana de la Ciudad de México desde el periodo enero-diciembre de 2016.

Objetivos específicos:

- Desarrollar un *software* de realidad virtual que permita la visualización y manipulación de superficies cuádricas en un espacio tridimensional, así como el cálculo de operaciones booleanas entre las superficies.
- Diseñar actividades de visualización en el contexto del Cálculo multivariado con el uso del *software* de realidad aumentada.

2. Desarrollo

2.1 Marco teórico

La inteligencia espacial corresponde a una de las ocho inteligencias del modelo propuesto por Howard Gardner (1983) en la teoría de las inteligencias múltiples. El término visualización según Fischbein (1998) es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, de la interpretación, del uso y de la reflexión sobre cuadros, imágenes y diagramas, en nuestras mentes, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información y desarrollar ideas previamente desconocidas.

En el campo de la Educación Matemática el tema de la visualización y orientación espacial ha recibido y recibe mucha atención (Arcavi, 2003; Bishop, 1989; Clements y Battista, 1992; Gutiérrez, 1996; Presmeg, 1986; Battista, 2007). Gutiérrez (1996) considera que la geometría puede ser vista como el origen de la visualización en matemáticas. Bishop (1989) reconoce dos habilidades en la visualización: “El proceso visual” y la “interpretación de la figura.

Kosslyn (1980) identifica cuatro procesos aplicables a la visualización e imágenes mentales: Generar una imagen mental a partir de cierta información; inspeccionar la imagen mental para observar su posición o la presencia de partes de elementos; transformar la imagen mental con rotaciones, traslaciones, escalamiento o descomposición; usar la imagen mental para responder preguntas.

Hay evidencias empíricas, que muestran que algunos estudiantes desarrollan espontáneamente la capacidad de mover las figuras en sus mentes, para estirarlas y encogerlas, rotarlas, verlas interactuar, y por lo tanto resolver problemas mediante el uso de este tipo de técnica (Harel y Sowder, 1998; Presmeg, 1986; Goldenberg, 1992, Medina, 2013). El *software* puede ser utilizado para construcciones laboriosas, mientras que el estudiante puede centrarse en relaciones más específicas (Tall, 1991, 1993).

El Instituto Visual de Matemáticas tiene un estudio (Miller, 2015) cuyo objetivo es adecuar un sistema de visualización, utilizando hardware (lentes de realidad virtual) y *software*, para poder desarrollar habilidades de visualización en los alumnos de las materias de Matemáticas, ya que la educación matemática carece de imágenes visuales adecuadas a cada tema, lo cual es un obstáculo para la enseñanza. El estudio muestra que no todos los alumnos desarrollan la capacidad de visualización y se necesitan gráficos interactivos y animaciones en 3D, que son esenciales y preferibles que imágenes estáticas 2D. Nuestro proyecto incluye las animaciones y modelos 3D, con la ventaja de ser en realidad aumentada, los alumnos pueden visualizar los objetos y animaciones por todos los ángulos, dando un mejor entendimiento y comprensión de los temas, se facilita el desarrollo de las habilidades de visualización, además de ser para dispositivos móviles, puede ser utilizado fuera del salón de clases. Otro estudio (Schrier, 2006, Coimbra, 2015) demuestran que el uso de realidad aumentada puede ayudar a desarrollar habilidades que se requieren en este siglo, tales como interpretación, pensamiento multimodal, solución de problemas, uso de diferentes perspectivas y visualización. Los alumnos pueden interactuar con el contenido e interpretar los resultados desde una perspectiva práctica y relacionándolos con los conceptos teóricos.

No existen muchas aplicaciones previamente desarrolladas que contengan visualizaciones de superficies y cálculo vectorial. Un ejemplo de éstas es Construct3D (Kaufmann, 2003), una herramienta de construcción tridimensional en realidad aumentada diseñada para la educación de matemáticas y geometría, su trabajo se concentra en desarrollar un sistema que ayude al mejoramiento de habilidades espaciales. La integración de esta aplicación a nivel preparatoria y universidad aún está siendo discutido, a diferencia de nuestra aplicación, que ya está desarrollada para nivel universitario.

Existe un prototipo didáctico que permite la enseñanza de ciertos problemas de cálculo, también en realidad aumentada, que permite desarrollar habilidades para construir modelos mentales de objetos matemáticos, a través de un proceso dinámico que incluye la interacción de objetos reales y virtuales (Quintero, 2015).

2.2 Diseño metodológico

No tenemos conocimiento de la existencia de un *software* de realidad aumentada que permita la visualización y manipulación de superficies en un espacio tridimensional, así como el cálculo de áreas, volúmenes y operaciones booleanas entre las superficies, proyecciones sobre planos, curvas y vectores. Todo esto en una misma aplicación que funcione en diferentes plataformas (Android y iOS). La aplicación móvil desarrollada en este proyecto cuenta con dos secciones que permiten realizar diferentes ejercicios y operaciones sobre cálculo multivariado (ver Figura 1).

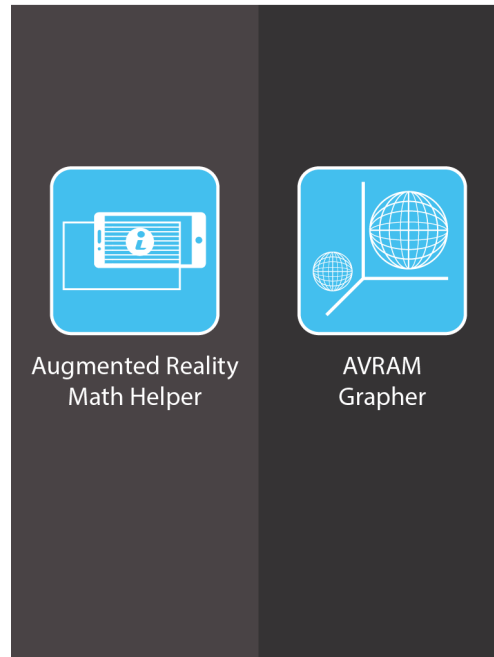


Figura 1. Menú principal desde donde pueden accederse a ambas secciones de la aplicación.

La primera sección está enfocada en poder desplegar superficies de acuerdo a la ecuación que sea ingresada en el sistema. Los alumnos pueden ingresar una ecuación que describe una superficie cuádrica y posteriormente interactuar con la misma. La plataforma permite rotar las superficies para poder visualizarlas desde todos sus ángulos, y permite visualizarlas ya sea como una superficie sólida o bien como una malla. Además, permite realizar diferentes operaciones como intersección, unión y diferencia entre dos superficies seleccionadas y así poder visualizar el resultado de la operación. Esta herramienta se puede usar para que el profesor desarrolle sus propias actividades escribiendo de una manera sencilla las ecuaciones a graficar y el tipo de operaciones y cálculos deseados (ver Figura 2).

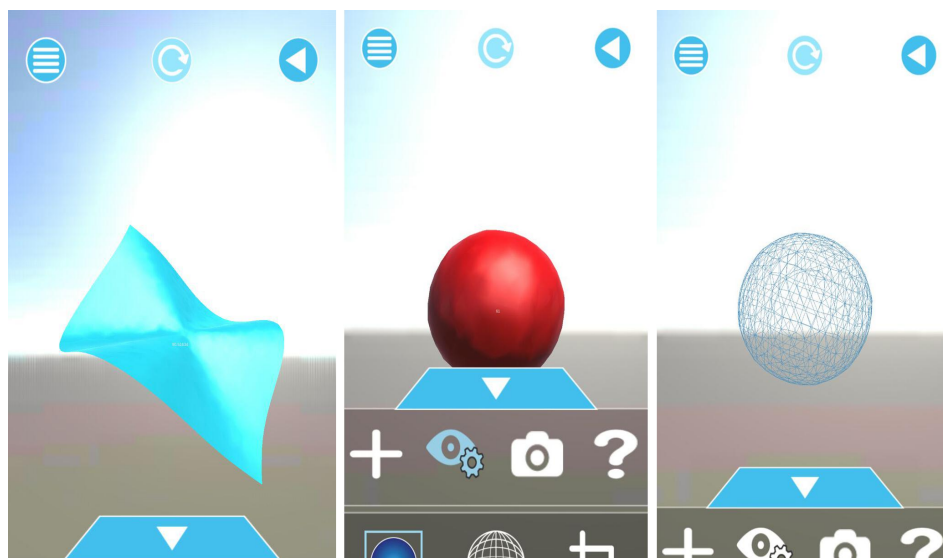


Figura 2. AVRAM Grapher permite visualizar superficies de acuerdo a una ecuación escrita por el usuario.

La segunda sección de la aplicación consta de diez ejercicios diferentes con realidad aumentada, que servirán a los alumnos como complemento durante sus materias para poder comprender de mejor manera ciertos temas, y sobre todo poder visualizar la figura y desarrollar su inteligencia espacial (ver Figura 3).



Figura 3. Augmented reality math helper cuenta con diez ejercicios diferentes con realidad aumentada

Mediante el uso de marcadores de Realidad Aumentada (RA) implementados con la plataforma de RA Vuforia (AR for the Enterprise - Now Easier than Ever, 2016), el equipo de desarrollo tecnológico ha adaptado la plataforma de creación de videojuegos Unity3D (Unity - Game Engine, 2016) para construir una aplicación móvil capaz de aumentar el despliegue tradicional de la cámara de video de un dispositivo electrónico con una representación computacional gráfica en tres dimensiones de superficies geométricas, misma que se adapta en tiempo real al cambio de perspectiva gracias a la acción de los sensores activos (como acelerómetros y giroscopios) presentes en la mayoría de los dispositivos electrónicos modernos.

De manera particular, se desarrollaron tarjetas de realidad aumentada donde aparecen objetos específicos, realizando acciones concretas. Las tarjetas de realidad aumentada tienen el objetivo general de desarrollar las habilidades de visualización. Las tarjetas podrán ser impresas por estudiantes y alumnos, y con la ayuda de un dispositivo móvil iOS o Android se puede visualizar y realizar las actividades dentro y fuera del salón de clase.

A continuación se describen los diez ejercicios de realidad aumentada desarrollados para la aplicación móvil:

Superficies cuádricas

Es un conjunto de siete tarjetas, una para cada superficie cuadrática típica (elipsoide, cono, paraboloides elíptico, hiperboloides de una hoja, hiperboloides de dos hojas, paraboloides hiperbólicos) y

una general: En las seis primeras aparece el dibujo de la gráfica de la superficie y su ecuación, con las siguientes características: a) Se ve claramente los ejes coordenados y los puntos de intersección con los ejes b) Tiene un botón que permite cambiar los valores de los coeficientes de las ecuaciones de las cónicas. Al cambiar los coeficientes, la gráfica de la superficie cambia. c) Tiene un botón que permite graficar los planos $x=t$, $y=t$, $z=t$ para diferentes valores de t , junto con la superficie mostrando resaltadas las curvas de intersección.

$$\pm \frac{x^2}{4} \pm \frac{y^2}{9} \pm \frac{z^2}{16} = c$$

La séptima tarjeta de este grupo presenta la gráfica de la superficie con un botón que permite seleccionar el signo (+ o -) de cada coeficiente y el valor de $c=1,0$.

Objetivos: 1) Que los alumnos reconozcan las ecuaciones de las cuádricas básicas y las relaciones con sus respectivas gráficas. 2) Que identifiquen el efecto de los coeficientes en las ecuaciones cuadráticas y los tengan en cuenta al momento de graficar. 3) Que identifiquen las secciones transversales de las cuádricas. (ver Figura 4)

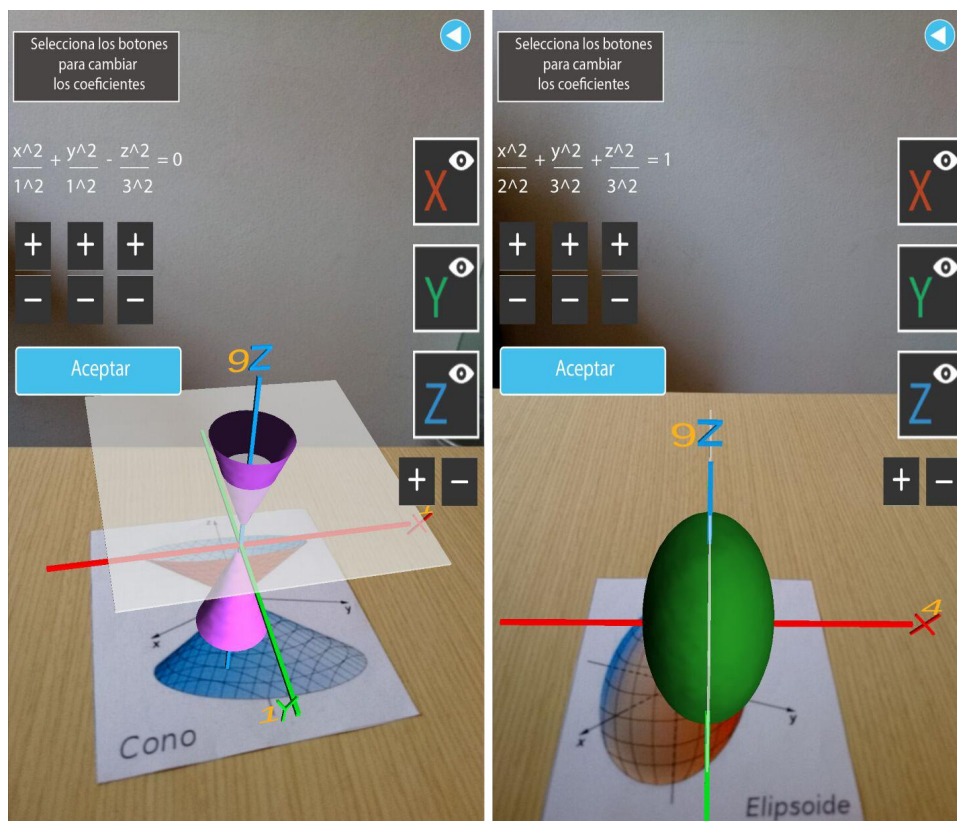


Figura 4. El ejercicio de superficies cuádricas permite visualizar ciertas superficies en realidad aumentada y cambiar sus coeficientes.

Curvas de nivel

Es un conjunto de dos tarjetas. La primera contiene las ecuaciones de cinco superficies. Se ve una cada vez y la tarjeta contiene un botón para seleccionar la superficie. La ventaja de esta forma de ver

la superficie es que el alumno puede observar desde diferentes ángulos con solo girar su dispositivo o tarjeta. La segunda tarjeta contiene las curvas de nivel de las superficies anteriores (nuevamente con un botón para navegar entre las opciones de curvas de nivel). La actividad con estas tarjetas consiste en que el estudiante pueda emparar cada superficie con sus respectivas curvas de nivel. En caso de que coincida la superficie con sus curvas de nivel, las gráficas de ambas se iluminarán. El objetivo de esta actividad es que los alumnos reconozcan las curvas de nivel de una superficie dada su gráfica en 3D. (ver Figura 5).

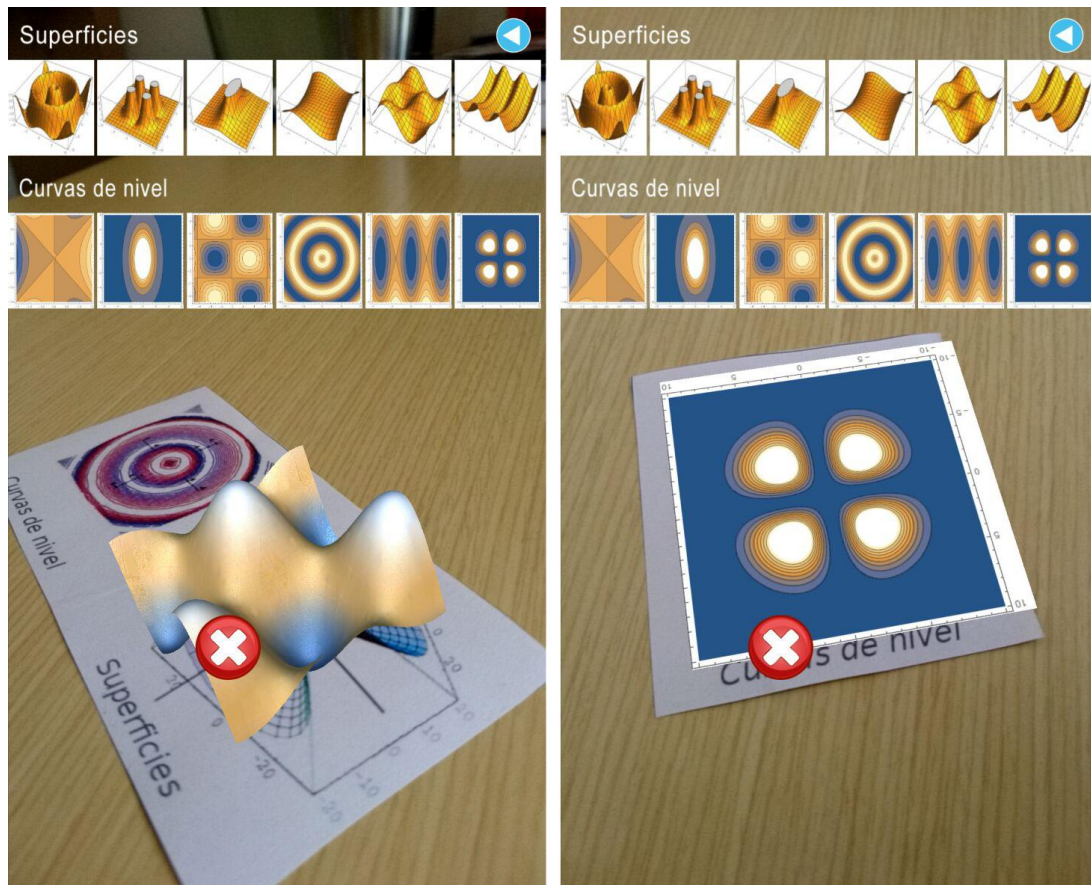


Figura 5. El ejercicio de curvas de nivel permite relacionar ciertas superficies con sus curvas de nivel. Si la relación se realiza de forma adecuada, una animación modifica la superficie para mostrar cómo empara con la curva de nivel

Lanzamiento de proyectiles. Curvas y rectas en el espacio.

Es una tarjeta que contiene cinco diferentes trayectorias de un asteroide: dos en línea recta y tres parabólicas. Para cada trayectoria del asteroide, se tiene un punto inicial del cual partirá el misil. El alumno debe determinar una trayectoria recta que intercepte al asteroide. La respuesta no es única. La tarjeta contiene la opción para comprobar las trayectorias con movimientos del asteroide y del misil. Si hay colisión, se verá en la animación. Objetivos: a) Que el alumno identifique la diferencia entre dos trayectorias rectas, identificando cómo interviene el parámetro de sus ecuaciones. b) Que el alumno determine una trayectoria recta de un misil para que impacte a un asteroide. c) Que el alumno compruebe visualmente su propuesta de trayectoria.

Funciones vectoriales: Hélice circular y esférica

Es un conjunto de dos tarjetas, una para la hélice circular y otra para la la hélice esférica: cada tarjeta muestra en cilindro o la esfera, una partícula en movimiento genera la hélice y en cada punto se puede ver el vector posición, velocidad y aceleración. Objetivos: a) Que los alumnos puedan visualizar curvas en en el espacio. b) Que puedan relacionar los cambios en el parámetro con los vectores posición, velocidad y aceleración (ver Figura 6).

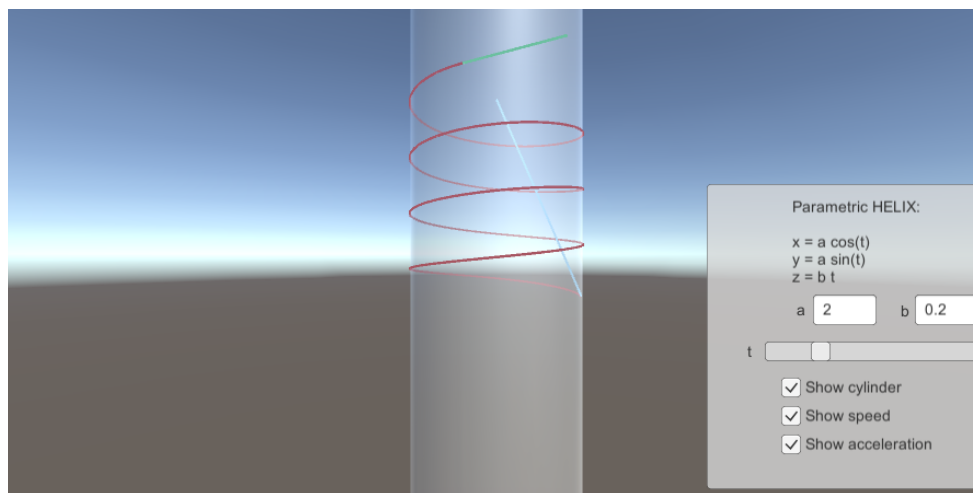


Figura 6. Una partícula en movimiento genera la hélice y en cada punto se puede ver el vector posición, velocidad y aceleración

Derivada direccional

Es una tarjeta que permite seleccionar entre seis superficies, cada una de ella con un punto fijo. Al seleccionar una superficie se despliega: a) la superficie b) el punto fijo (a,b,c) sobre la superficie c) el vector direccional $u=xi+yj$ en el plano xy con la cola en el punto (a,b) . d) La recta tangente a la superficie en el punto (a,b,c) en dirección al vector u e) El valor de la derivada direccional de f en dirección u en el punto (a,b,c) . Objetivo: Que los alumnos entiendan el concepto de derivada direccional al observar las rectas tangentes a un punto en dirección al vector u , el vector u y el valor de la derivada direccional.

Gradiente, planos tangentes y rectas normales

Es una tarjeta que permite seleccionar entre seis superficies, cada una de ella con un punto fijo. Al seleccionar una superficie se despliega: a) La gráfica de la superficie b) El punto fijo (a,b,c) sobre la superficie c) Al oprimir un botón aparece el vector gradiente en el punto (a,b,c) c) al oprimir un botón aparece el plano tangente a la superficie en el punto. Los valores de a,b y c se pueden cambiar. Objetivo: Que los alumnos observen el gradiente, el plano tangente y la recta normal de una superficie en un punto.

Máximos y mínimos con restricción.

La tarjeta contiene cinco funciones de dos variables, cada una con dos o tres opciones de restricción. En cada opción, el alumno puede visualizar la superficie y la restricción en 3D, pero también en 2D, puesto que esta última forma de ver las superficies y su restricción da lugar al método analítico-algebraico de los multiplicadores de Lagrange. No todas las opciones tienen máximo y mínimo, algunas solo tienen máximo o sólo mínimo y algunas ninguno de los dos. Objetivos: a) Que el alumno identifique gráficamente los extremos de una función de dos variables dada una restricción. b) Que el alumno visualice la relación entre restricción y curvas de nivel en extremos de una función de dos variables dada una restricción. c) Que el alumno compruebe gráficamente sus cálculos analítico-algebraicos.

Regiones en el espacio: Integrales dobles y triples en coordenadas cartesianas

Es una tarjeta que permite seleccionar entre cuatro regiones en el espacio, limitadas por superficies. Al seleccionar una región se despliega: a) la gráfica de la región b) el volumen de la región limitada por las superficies. Resaltan las diferentes superficies, y la curva de intersección de las mismas. c) Un botón que permite obtener las proyecciones sobre los planos coordenados xy , xz , yz , de la región considerada. Objetivo: visualizar regiones en el espacio y describir sus proyecciones sobre los planos coordenados.

Coordenadas polares

Es una tarjeta que permite graficar funciones polares de manera tal que puedan cambiar los parámetros de las mismas utilizando sólo el eje polar y con los ejes cartesianos.

Coordenadas cilíndricas y esféricas.

Es una tarjeta que permite seleccionar entre cuatro regiones en el espacio, limitadas por superficies en coordenadas cilíndricas o esféricas. Al seleccionar una superficie se despliega: a) Las gráficas de las regiones en el espacio y el volumen de la región b) Un botón que permite obtener las proyecciones sobre los planos coordenados xy , xz , yz . Objetivos: a) Que el alumno pueda visualizar la región de integración en coordenadas cilíndricas y esféricas. b) Que el alumno pueda escribir los límites de integración en coordenadas cilíndricas y esféricas.

2.3 Uso de herramientas

Ambas secciones de la aplicación fueron desarrolladas utilizando el game engine Unity 3D versión 5. Las imágenes, sprites, menús y botones fueron hechos en Adobe Illustrator y Adobe Photoshop.

La aplicación está desarrollada de forma responsiva, de manera que el ambiente, los elementos, menús y botones se adecúan automáticamente al tamaño de la pantalla. Se hicieron dos versiones de cada videojuego (Android y iOS) y fueron instalados en los dispositivos de los alumnos para que puedan utilizarlo en cualquier momento.

Para la generación de las superficies cuádricas, se desarrolló un analizador de la sintaxis de las ecuaciones (parser) que determina si la ecuación fue escrita de manera correcta. Este parser fue desarrollado en C# utilizando el algoritmo “shunting-yard” (Dijkstra, 1961) y la forma en la cual se deben escribir las ecuaciones es la siguiente:

$$A * (x - DX) ^ EXPX + B * (y - DY) ^ EXPY + C * (z - DZ) ^ EXPZ = ISO$$

Una vez que la ecuación fue escrita correctamente, la aplicación (móvil o web) se conecta a un servidor de web, donde existen programas escritos en php, que se comunicarán con un programa escrito en C++ que se encarga de generar los modelos 3D correspondientes a la ecuación (Ver Figura 7).

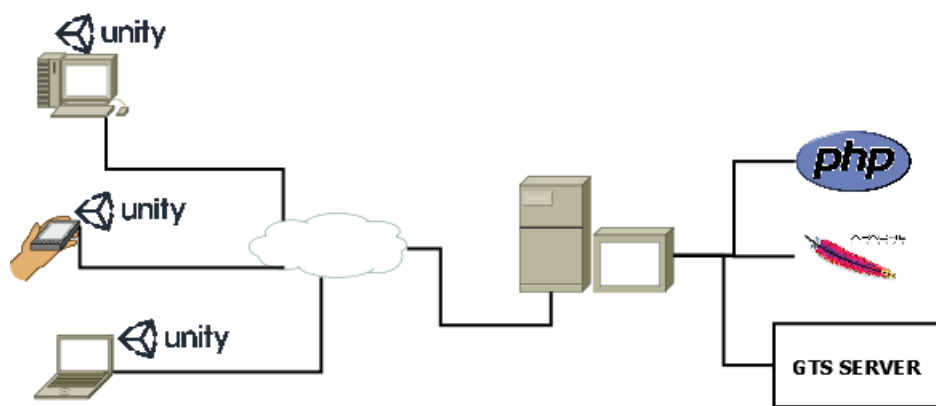


Figura 7. Esquema cliente-servidor para generar los modelos 3D de las superficies cuádricas.

Los programas de php, son los de pasar la información necesaria al programa en C++ y además administran cuáles son las ecuaciones que ha escrito cada usuario, de manera que cada tablet o teléfono que se conecte al servidor, tiene un directorio distinto donde se almacenan los modelos 3D que desde ahí se han generado.

El programa escrito en C++, utiliza la librerías llamadas GTS (GNU Triangulated Surface Library, 2016) para generar los modelos 3D, en formato OBJ, de las superficies cuádricas a partir de los parámetros enviados por el programa en php. Estos archivos OBJ, son enviado a la aplicación (móvil o web) para que se visualicen en el ambiente virtual o en algunas de las actividades de realidad aumentada.

2.4 Resultados

Las pruebas iniciales de esta herramienta con grupos de estudiantes se realizará en los campus Santa Fe y Ciudad de México. Se empleará una metodología pre-test/post-test en grupos experimentales y de control para medir el impacto del uso de esta herramienta en el desempeño académico de nuestros alumnos de Matemáticas III.

Conclusiones

Este proyecto es un claro ejemplo del uso de las más avanzadas tecnologías: en este caso la realidad virtual y aumentada como herramienta de apoyo al aprendizaje. La aplicación ha sido especialmente diseñada para trabajar con estudiantes de Cálculo multivariado, conjuga lo mejor de los graficadores existentes con operaciones booleanas, cálculo y realidad aumentada, convirtiéndolo en único. La herramienta quedaría incompleta sin un conjunto de actividades diseñadas con la intención de desarrollar las habilidades de visualización mediante el uso de la realidad aumentada, así que en este artículo hemos presentado un conjunto de actividades pedagógicas para realizar dentro y fuera del salón de clase en un curso de cálculo multivariado. Planeamos implementar una metodología pre-test/post-test en grupos experimentales y de control que permita cuantificar el impacto que tiene el uso de la plataforma tecnológica y las actividades de visualización en el desempeño académico de nuestros alumnos, medido a través de la comprensión de conceptos y la habilidad de resolución de problemas.

Referencias

- Abraham, R., Miller, M., & Miller, J. (2005, July). Emerging 4D graphics for math and science education. In *ACM SIGGRAPH 2005 Educators program*(p. 22). ACM.
- AR for the Enterprise - Now Easier than Ever. (2016, June 20). Retrieved from Home: <http://www.vuforia.com>
- Arcavi, A. (2003). *The role of visual representations in the learning of mathematics*. Educational Studies in Mathematics, 52.
- Battista, M. T. (2007). *The development of geometric and spatial thinking*. Second Handbook of Research on Mathematics. Teaching and Learning. Information Age Publishing, Charlotte, NC.
- Bishop, A. J. (1989). *Review of research on visualization in mathematics education*. Focus on Learning Problems in Mathematics, 11 (1).
- Clements, D. H. y Battista, M. (1992). *Geometry and spatial reasoning*. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.
- Coimbra, M. T., Cardoso, T., & Mateus, A. (2015). Augmented Reality: An Enhancer for Higher Education Students in Math's Learning?. *Procedia Computer Science*, 67, 332-339.
- Dijkstra, E.W. (1961) *Making a Translator for ALGOL 60* . ALGOL Bulletin Supplement no. 10 pp. 21-32.
- Fischbein, E. Nachlieli, T. (1998) *Concepts and figures in geometrical reasoning*. International Journal in Science Education, 20 (10), 1193-1211.
- Gardner, Howard. (1983). *Inteligencias múltiples*. ISBN: 84-493-1806-8 Paidos
- Goldenberg, E., P., (1992). *Ruminations about Dynamic Imagery (and a strong plea for research)*. *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education*. NATO Advanced Research Workshop, Oxford, 1993.

- GTS Library (2016), <http://gts.sourceforge.net/>
- Gutiérrez, A. (1996). *Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework*. Proceedings of the 20th PME Conference 1.
- Harel, G. & Sowder, L. (1998). *Student proof schemes result from exploratory studies*. Research in Collegiate Mathematics III, American Mathematical Society.
- Kaufmann, H., & Schmalstieg, D. (2003). Mathematics and geometry education with collaborative augmented reality. *Computers & Graphics*, 27(3), 339-345.
- Kosslyn, S. M. (1980). *Image and mind*. London: Harvard University Press.
- Medina, L. M. & Hernández, B. (2013) AVRAM. *Una herramienta para visualizar superficies en el espacio tridimensional*. Congreso de Innovación educativa. Monterrey 2013.
- Presmeg, N. (1986). *Visualisation and mathematical giftedness*. Educational Studies in Mathematics, 17.
- Quintero, E., Salinas, P., González-Mendivil, E., & Ramírez, H. (2015). Augmented Reality app for Calculus: A Proposal for the Development of Spatial Visualization. *Procedia Computer Science*, 75, 301-305.
- Schrier, K. (2006, July). Using augmented reality games to teach 21st century skills. In *ACM SIGGRAPH 2006 Educators program* (p. 15). ACM.
- Tall, D., O. (1993). *Interrelationships between mind and computer: processes, images, symbols*. In David L. Ferguson ed. *Advanced Technologies in the Teaching of Mathematics and Science*. New York: Springer-Verlag.
- Unity - Game Engine. (2016) Retrieved from Create and Connect with Unity: <https://unity3d.com>