

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY

CAMPUS MONTERREY

DIVISIÓN DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA
MAESTRIA EN SISTEMAS DE MANUFACTURA



TECNOLÓGICO DE MONTERREY®

PROGRAMA DE GRADUADOS EN INGENIERÍA

MATERIA: ESTUDIO DIRIGIDO (M95-195)

Profesores:

Dr. Alex Elías Zúñiga

Dr. Ciro Rodríguez González

REPORTE FINAL: Análisis de Estabilidad en Operaciones de Torneado y Fresado

Alumnos:

ALEJANDRO MARTÍNEZ LÓPEZ

604889

FRANCISCO JAVIER ARAYA PEREZ

347470

JOVANNY PACHECO BOLÍVAR

793468

DICIEMBRE DE 2005

ÍNDICE

1 INTRODUCCIÓN	5
2 MECANISMO REGENERATIVO EN CORTE DE METAL	7
3 MODELOS MATEMÁTICOS	9
3.1 Métodos pseudo-espectrales: Modelo de Chebyshev	9
3.2 Función de Lambert.....	12
3.3 Método de Altintas	15
4 CONCLUSIONES.....	31
5 BIBLIOGRAFÍA.....	33

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1. LÓBULOS DE ESTABILIDAD PARA FRESADO 1 GDL	11
FIGURA 2. COMPARACIÓN LÓBULOS DE ESTABILIDAD FUNCIÓN DE LAMBERT Vs. MÉTODO TRADICIONAL	14
FIGURA 3. DIAGRAMA DE BLOQUES DEL PROCESO DE CORTE.....	15
FIGURA 4. MODELO 2 GDL TORNEADO	19
FIGURA 5. REPRESENTACIÓN DEL SISTEMA	25
FIGURA 6. LÓBULOS DE ESTABILIDAD SISTEMA 2 GDL.	26
FIGURA 7. LÓBULOS DE ESTABILIDAD PARA EL CASO 3D	30
FIGURA 8. LÓBULOS DE ESTABILIDAD PARA EL CASO 3D [20]	30

ÍNDICE DE TABLAS

TABLA 1. DATOS PARA EL MODELO EN LA FIGURA 4.....	19
TABLA 2. TABLA DE COEFICIENTES DE CORTE HERRAMIENTA TOROIDAL DE 2.5 MM	29
TABLA 3. PARÁMETROS DINÁMICOS DE LA HERRAMIENTA Y LA PIEZA DE TRABAJO	29

1 INTRODUCCIÓN

Los sistemas modelados por ecuaciones diferenciales con retraso son comunes en algunos campos de la ciencia y la ingeniería. Una de las aplicaciones más importantes dentro de la mecánica es en los procesos de corte dinámicos. Después de un extenso trabajo de investigación de *Tlusty* [1], *Tobias* [2] y *Kudinov* [3], el efecto regenerativo se ha convertido en la explicación más comúnmente aceptada para el fenómeno llamado *chatter*.

La vibración auto excitada o *chatter* reduce la productividad debido al panorama de acontecimientos tales como ondulaciones en las piezas de trabajo, incrementando el desgaste de la herramienta, logrando una pobre precisión dimensional y ocasionando inevitablemente la ruptura de la herramienta así como de componentes de la maquina lo cual al final repercute en altos costos de operación. Por esta razón el *chatter* es considerado un problema importante en la industria metal-mecánica.

Las vibraciones relativamente indeseables entre la herramienta de corte y la pieza de trabajo, comprometen la calidad de las superficies de maquinado. Si los parámetros modales tales como las frecuencias naturales, factores de amortiguamiento y modos de vibración, son identificados en la herramienta de corte y la fuerza de corte esta bien estimada, existe la posibilidad de predecir vibraciones y diseñar la tecnología necesaria para eliminar este tipo de fenómenos. Si estos métodos son ajustados en procesos de parámetros-optimización-tecnología y programas computacionales, grandes ahorros pueden ser alcanzados [4].

La predicción de vibraciones regenerativas es difícil en casos prácticos incluso cuando se han llevado a cabo satisfactoriamente análisis modales y estimaciones de fuerzas de corte, e incluso existen algunas diferencias metodológicas en los artículos de investigación publicados acerca del tema. A pesar que el análisis de estabilidad lineal de

corte estacionario bajo condiciones regenerativas puede ser considerado como un problema resuelto en niveles de investigación los resultados son aplicados en la práctica en rara ocasión, y los mayores esfuerzos están enfocados en el control adaptativo/activo del *chatter*. [5]

Los primeros estudios sobre el fenómeno de *chatter* fueron realizados por Tlustý, Tobias y Kudinov, Tobias (1974) desarrollo una teoría matemática para el fenómeno de *chatter* no-lineal, representando la estructura como un sistema de un solo grado de libertad (1 GDL) con características de rigidez no lineal, con este modelo pudo dar una explicación de las etapas en la cual se desarrolla el *chatter* desde el fenómeno de inestabilidad de amplitud finita. Otro modelo no lineal es introducido por Ulsoy (1996) [6], en el cual utiliza simulación en el dominio del tiempo y experimentación. Altintas y Budak (1998) [7] presentaron un método para obtener diagramas de estabilidad en torneado y fresado considerando el problema de 2 grados de libertad, validando los resultados con simulación en dominio del tiempo y soluciones analíticas. Altintas y Egin (2001) [8], plantean un modelo 3D para el caso de cortadores toroidales y herramientas de punta esférica. Por otra parte, otros investigadores siguen explorando el modelo unidimensional. Stepan (2002) [9] introdujo el llamado, método de semi- discretización en el dominio de la frecuencia. Stepan, también estudio las frecuencias en las cuales se presenta el fenómeno conocido como bifurcación en procesos de fresado. La llamada bifurcación de Hopf presentada por Stepan en 2002 es confirmada por Altintas y Merdol (2004) [8, 10].

2 MECANISMO REGENERATIVO EN CORTE DE METAL

El parámetro de corte más significativo y a la vez un factor decisivo para la generación de *chatter*, es la profundidad de corte o ancho de viruta a . Para espesores de viruta lo suficientemente pequeños el corte es estable, una vez que se va incrementando a , el fenómeno de vibración auto-excitada comienza en un cierto espesor de viruta límite a_{lim} y se vuelve más enérgico para valores de $a > a_{lim}$. El valor de a_{lim} depende de las características dinámicas de la estructura, del material de la pieza de trabajo, velocidad de corte y avance, así como de la geometría de la herramienta.

Existen dos fuentes de auto-excitación en el corte de metal:

1. Acoplamiento Modal
2. Regeneración de Ondulaciones

El *acoplamiento modal* es un mecanismo de auto-excitación que solo puede ser asociado con situaciones donde la vibración relativa entre la herramienta y la pieza de trabajo existe simultáneamente en al menos dos direcciones en el plano ortogonal de corte.

La *regeneración de ondulaciones* es posible debido a que en todas las operaciones de maquinado la herramienta remueve la viruta de una superficie que fue producida por la herramienta en un corte anterior, esto es, la superficie producida por el torneado durante una revolución anterior, o en el caso de fresado, un diente precedente del cortador. Si existe vibración relativa entre la herramienta y la pieza de trabajo se presentan ondulaciones en la superficie de corte. La herramienta en la siguiente pasada encuentra una superficie ondulada y remueve una viruta con un espesor periódicamente variable.

La base para estudiar el fenómeno de vibración regenerativa es analizar el modelo matemático el cual está representado en la forma de una ecuación diferencial con retraso en el tiempo (DDE), que es una clase especial de las ecuaciones diferenciales funcionales.

3 MODELOS MATEMÁTICOS

3.1 Métodos pseudo-espectrales: Modelo de Chebyshev

Los métodos espectrales son una herramienta poderosa cuando se trata de resolver problemas de ingeniería. Ya sea que se trate de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE), ecuaciones diferenciales parciales (PDE) o bien ecuaciones diferenciales con retraso en el tiempo (DDE). Normalmente, los métodos espectrales y pseudo-espectrales, tales como el método de colocación de Chebyshev, son comparados con el método de diferencias finitas (FDM) [11]. El método pseudo-espectral de colocación mediante polinomios de Chebyshev consiste en aproximar una función solución “ $u(x)$ ” mediante una serie de polinomios, ya sea conociendo sus coeficientes, o conociendo los zeros o puntos de intersección con el eje de las ordenadas de dichos polinomios, para evaluar la función que pasa por todos y cada uno de los puntos de Chebyshev; eso asegura que la función buscada $u(x)$ que se esta aproximando sea única. Las ventajas que ofrecen los métodos pseudo-espectrales en comparación con los métodos de diferencias finitas consisten en que los pasos de integración no son constantes, por lo que la convergencia es más rápida, además, basta conocer los puntos extremos de la función, y los zeros de la misma para encontrar una aproximación de la solución buscada. Las propiedades de ortogonalidad de los polinomios de Chebyshev permiten conocer no solo una función en un intervalo dado, sino también sus “ n ” derivadas, lo que lo convierte en un método poderoso.

Ejemplo. *Método de Chebyshev para fresado 1 GDL.*

Considerando un sistema de un solo grado de libertad para el proceso de fresado cuya ecuación general es:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_x \quad (1)$$

Además la ecuación de movimiento puede ser descrita según Butcher [12] como:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = -a\alpha_x(t)[x(t) - x(t - \tau)] \quad (2)$$

Al transformar la ecuación a espacio de estado

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{(k + a\alpha(t))}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{a\alpha(t)}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(t - \tau) \\ v(t - \tau) \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Cuya forma general esta definida por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{x}(t - \tau) \quad (4)$$

La cual está definida como una ecuación diferencial lineal con retraso, con coeficientes de tiempo periódicos. Utilizando la solución propuesta por Butcher [12] y Mason [11], se encuentra que:

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dx} x(t) \approx Dv_j \quad (5)$$

Donde la aproximación se obtiene mediante la siguiente relación que involucra la matriz de diferenciación D , así como v y w son aproximaciones numéricas.

$$Dv = M_A v + M_B w \quad (6)$$

Resolviendo se encuentra que:

$$U = [D - M_A]^{-1} M_B \quad (7)$$

Considerando que $N = 3$ y

$$\dot{x} = -x + \frac{1}{2}x(t-2) \quad (8)$$

Las matrices utilizadas para la solución del problema de fresado de un solo grado de libertad son las mostradas a continuación:

$$M_A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Por lo tanto encontramos la matriz solución U_N .

$$D_{N=} \begin{pmatrix} \frac{19}{6} & -4 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_N = \begin{pmatrix} 0.02058 & 0.2469 & 0.1152 & 0 \\ 0.1852 & 0.2222 & 0.2037 & 0 \\ 0.6626 & -0.1049 & 0.2510 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

La Figura 1 muestra las zonas de estabilidad del sistema.

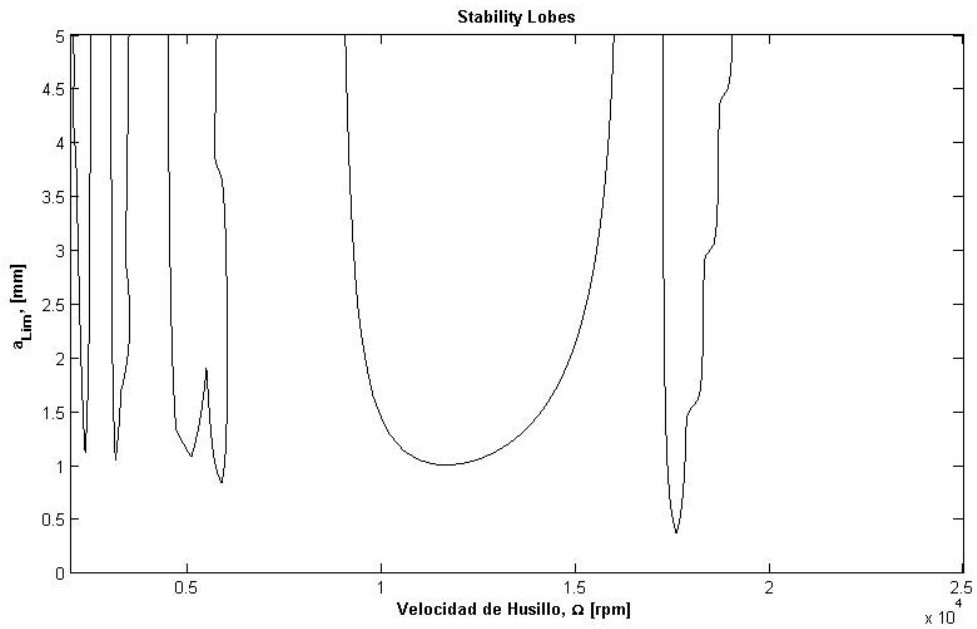


Figura 1. Lóbulos de Estabilidad para Fresado 1 GDL

3.2 Función de Lambert

La función de Lambert permite resolver problemas relacionados con ecuaciones diferenciales con retraso en el tiempo (DDE). Entre las diversas aplicaciones que tiene esta función, se encuentra el problema de *chatter* en procesos de torneado, para múltiples grados de libertad. Aunque la teoría de esta función tiene ya varios siglos [13], su aplicación a problemas en ingeniería es relativamente nueva. Aunque esta función viene incluida en la mayoría de los paquetes comerciales de manipulación numérica, los algoritmos usados para su cálculo no son lo suficientemente robustos en cuanto a la implementación de la función de Lambert.

La ventaja del método de la función de Lambert aplicado a problemas de *chatter* en procesos de torneado, consiste en que la forma de la solución generada es semejante a la solución obtenida en el estudio de ODE, por lo que el concepto de matriz de transición aplicado a estas ecuaciones puede usarse para las DDE (el caso de torneado).

La aplicación de la función de Lambert a la solución de ecuaciones lineales diferenciales con retraso es de particular interés para la dinámica de máquinas herramienta debido a que satisface la siguiente propiedad:

$$W(x)e^{W(x)} = x \quad (11)$$

El concepto de matriz de transición utilizado para resolver ODE's puede ser generalizado a DDE's utilizando la función de Lambert, la simplicidad de este acercamiento comparado con otras técnicas de solución analíticas reside en el hecho que es una solución análoga a la forma de solución general para ecuaciones diferenciales ordinarias [13]. Basados en esta idea, Asl y Ulsoy [14] introdujeron el uso de la función de Lambert para resolver la ecuación característica trascendental de un sistema de ecuaciones diferenciales con retraso que modelan vibraciones de *chatter* [15]. A continuación se presenta el método de solución de un sistema dinámico para corte ortogonal el cual sigue muy de cerca el trabajo de Elias, A. [15].

Función de Lambert en Torneado

La ecuación de movimiento de la herramienta esta determinada por:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = K_f a [h_0 - [x(t) - x(t-T)]] \quad (12)$$

donde la masa está representada por m , c y k representan el coeficiente de amortiguamiento y la rigidez de la herramienta. Considerando además a K_f como el coeficiente de corte en la dirección radial, a la profundidad de corte y h_0 el espesor de viruta dinámico. Se puede reescribir la ecuación de forma matricial siguiendo el procedimiento de solución de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) + \mathbf{A}\mathbf{x}^*(t-T) + \mathbf{B}\mathbf{x}^*(t) = 0 \quad (13)$$

Donde A y B son matrices de 2 x 2 denotadas por:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\mu K \omega_n^2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_n^2(1+K) & 2\xi\omega_n \end{pmatrix}; \quad (14)$$

Además $\dot{\mathbf{x}}^*(t)$ y $\mathbf{x}^*(t)$ son vectores de 2 x 1. La solución a la ecuación es de la forma $\mathbf{x}^* = D e^{\lambda t}$, donde D es una constante arbitraria y λ es un valor característico. Substituyendo la solución propuesta obtenemos el siguiente sistema:

$$\lambda \mathbf{I} e^{\lambda t} = -\mathbf{A} - \mathbf{B} e^{\lambda t} \quad (15)$$

el valor de \mathbf{I} es la matriz identidad, por lo tanto es posible expresar la ecuación de la siguiente forma

$$(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{B}) T e^{(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{B})T} = -(\mathbf{A}) T e^{\mathbf{B}T} \quad (16)$$

La ecuación (3.2.6) tiene la forma de la función de Lambert por lo tanto puede ser representada por:

$$\begin{aligned} W(-\mathbf{A}) e^{W(-\mathbf{A})} &= -\mathbf{A} \\ (\lambda \mathbf{I} + \mathbf{B}) T &= W(-\mathbf{A}) T e^{\mathbf{B}T} \end{aligned} \quad (17)$$

Las raíces características de la ecuación (3.2.7) describen la estabilidad del vector de retraso de la ecuación diferencial, por lo tanto las zonas de estabilidad del sistema se pueden obtener a partir de las raíces de:

$$\det \left\{ \lambda \mathbf{I} - \left(\frac{1}{T} W(\mathbf{A}T e^{\mathbf{B}T}) + \mathbf{B} \right) \right\} = 0 \quad (18)$$

Ejemplo: *Estabilidad de un sistema de torneado con 1 GDL.*

Los lóbulos de estabilidad asociados a la rama principal de la función de Lambert pueden ser obtenidos numéricamente a partir de la ecuación (3.2.8). Para ilustrar este método en la Figura 2 se utilizó $\xi = 0.05$ y $\omega_n = 150$ rad/sec.

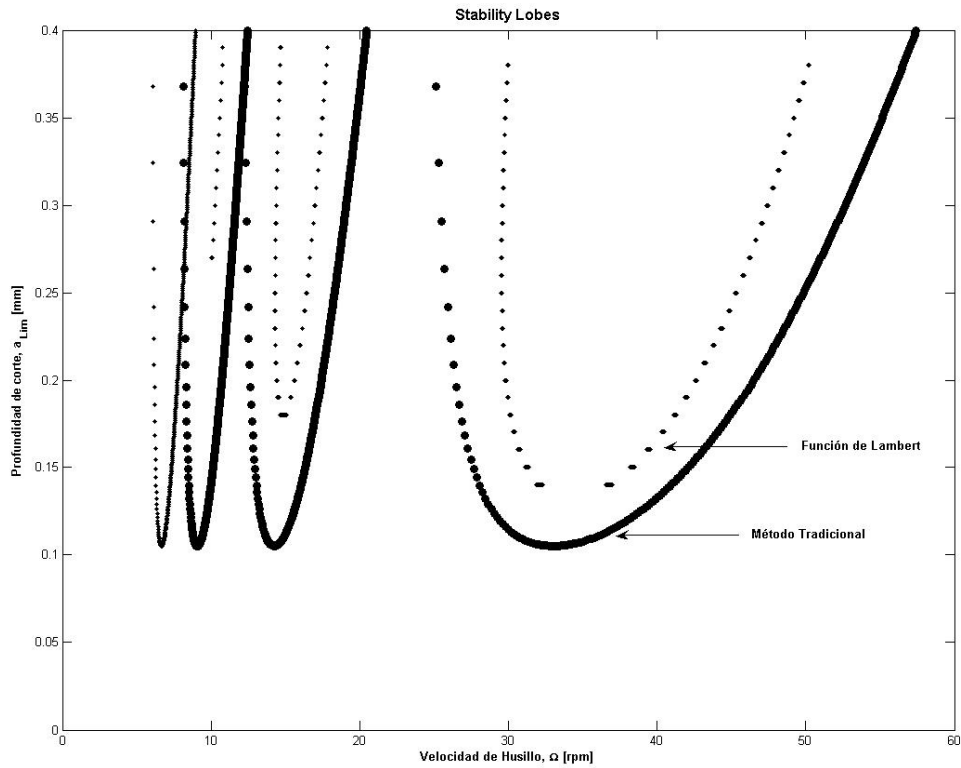


Figura 2. Comparación Lóbulos de Estabilidad Función de Lambert Vs. Método Tradicional

3.3 Método de Altintas

El *chatter* regenerativo es causado por una diferencia de fases entre las ondulaciones de vibración dejadas en ambos lados de la viruta y en muchos situaciones de maquinados ocurre antes del *chatter* de acoplamiento modal. A continuación se muestra los aspectos fundamentales de vibraciones de *chatter* utilizando un proceso de corte ortogonal como ejemplo, además se presenta en la Figura 3 el diagrama de bloques para el proceso de corte. [16]

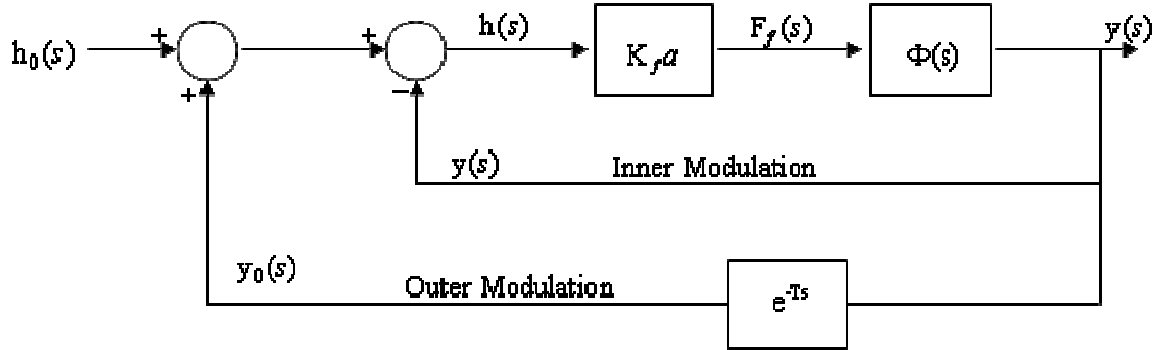


Figura 3. Diagrama de bloques del proceso de corte

El espesor dinámico de viruta puede ser expresado por:

$$h(t) = h_0 - [y(t) - y(t - T)] \quad (19)$$

Además la ecuación de movimiento del sistema se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} m_y \ddot{y}(t) + c_y \dot{y}(t) + k_y y(t) &= F_f(t) = K_f a h(t) \\ &= K_f a [h_0 + y(t - T) - y(t)] \end{aligned} \quad (20)$$

El espesor de viruta en el dominio de Laplace es:

$$h(s) = h_0 - y(s) + e^{-sT} y(s) = h_0 + (e^{-sT} - 1)y(s) \quad (21)$$

El cual produce una fuerza dinámica de corte

$$F_f(s) = K_f a h(s) \quad (22)$$

Las fuerzas de corte excitan la estructura y producen una vibración corriente

$$y(s) = F_f(s)\Phi(s) = K_f ah(s)\Phi(s) \quad (23)$$

Donde la función de transferencia para un solo grado de libertad se presenta como sigue:

$$\Phi(s) = \frac{y(s)}{F_f(s)} = \frac{\omega_n^2}{ky(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (24)$$

Sustituyendo $y(s)$ en $h(s)$

$$h(s) = h_0 + (e^{-sT} - 1)K_f ah(s)\Phi(s) \quad (25)$$

y la función de transferencia entre la carga dinámica y de la viruta queda de la siguiente forma:

$$\frac{h(s)}{h_0(s)} = \frac{1}{1 + (e^{-sT} - 1)K_f a\Phi(s)} \quad (26)$$

La estabilidad de esta función de transferencia es determinada por las raíces (s) de de su ecuación característica, esta es:

$$1 + (e^{-sT} - 1)K_f a\Phi(s) = 0 \quad (27)$$

Tomando las raíces de la ecuación de la forma:

$$s = \sigma + j\omega_c \quad (28)$$

Tenemos las siguientes opciones:

Si $\sigma > 0$, la solución en el dominio del tiempo crecerá exponencialmente, la vibración *chatter* crecerá indefinidamente y el sistema será inestable.

Si $\sigma < 0$, el sistema será estable, manteniendo una operación libre de *chatter*.

Si $\sigma = 0$, el sistema es críticamente estable y se mantendrá vibrando a una frecuencia ω_c

Para realizar el análisis de estabilidad crítica, hacemos $s=j\omega_c$

$$1 + (e^{-j\omega_c T} - 1)K_f a_{\text{lim}} \Phi(j\omega_c) = 0 \quad (29)$$

Donde a_{lim} es la máxima profundidad de corte axial para lograr una operación de mecanizado libre de *chatter*. La función de transferencia puede dividirse en una parte real y una imaginaria (por ejemplo $\Phi(j\omega_c) = G + jH$). Reordenando la ecuación característica separando la parte real e imaginaria queda:

$$\{1 + K_f a_{\text{lim}} [G(1 - \cos \omega_c T) - H \sin \omega_c T]\} + j \{K_f a_{\text{lim}} [G \sin \omega_c T + H(1 - \cos \omega_c T)]\} = 0 \quad (30)$$

Ambas partes de la ecuación deben ser cero, considerando primero la parte imaginaria:

$$K_f a_{\text{lim}} [G \sin \omega_c T + H(1 - \cos \omega_c T)] = 0 \quad (31)$$

Y

$$\tan \psi = \frac{H(\omega_c)}{G(\omega_c)} = \frac{\sin \omega_c T}{1 - \cos \omega_c T} \quad (32)$$

Donde ψ es en ángulo de fase de la función de transferencia de la estructura. Usando identidades trigonométricas tenemos:

$$\tan \psi = \frac{\cos(\omega_c T / 2)}{-\sin(\omega_c T / 2)} = \tan[(\omega_c T) / 2 - (3\pi) / 2] \quad (33)$$

El número de ondas de vibración dejadas en la superficie de la pieza de trabajo es:

$$2\pi f_c T = 2k\pi + \varepsilon \quad (34)$$

El correspondiente periodo T y por ende la velocidad del husillo en [rpm] puede hallarse de la siguiente expresión:

$$T = \frac{2k\pi + \varepsilon}{2\pi f_c} \rightarrow n = \frac{60}{T} \quad (35)$$

La profundidad de corte axial crítica, puede hallarse igualando a cero la parte real de la ecuación característica.

$$a_{\text{lim}} = \frac{-1}{K_f G [(1 - \cos \omega_c T) - (H/G) \sin \omega_c T]} \quad (36)$$

Substituyendo $(H/G) = \sin(\omega_c T)/(1 - \cos(\omega_c T))$ y reorganizando los términos queda:

$$a_{\text{lim}} = \frac{-1}{2K_f G(\omega_c)} \quad (37)$$

Hay que resaltar que siendo a_{lim} es una cantidad física debe ser positiva, lo que significa que la vibración por *chatter* se producirá en aquellas zonas en las que $G(\omega_c T)$ sea negativo.

La expresión anterior indica que la profundidad de corte axial crítica es inversamente proporcional a la flexibilidad de la estructura y a la constante de corte del material a cortar. A mayor dureza del material mayor K_f , esto reduce la profundidad de corte limite, de forma similar, una estructura de maquina herramienta mas flexible también reducirá la profundidad de corte y por ende la productividad. Estos resultados fueron obtenidos también por Tlustý y Tobias[1, 2].

El procedimiento para graficar los lóbulos de estabilidad puede resumirse así:

1. Seleccionar una frecuencia de *chatter* (ω_c) en la parte real negativa de la función de transferencia.
2. Calcular el ángulo de fase de la estructura a esa frecuencia.
3. Calcular la profundidad crítica de corte a_{lim}
4. Calcular la velocidad del husillo a esa frecuencia para cada lóbulo de estabilidad $k=0,1,2\dots$
5. Repetir el procedimiento barriendo las frecuencias de chatter cerca de la frecuencia natural de la estructura.

Ejemplo: Estabilidad de un sistema de torneado con 2 GDL

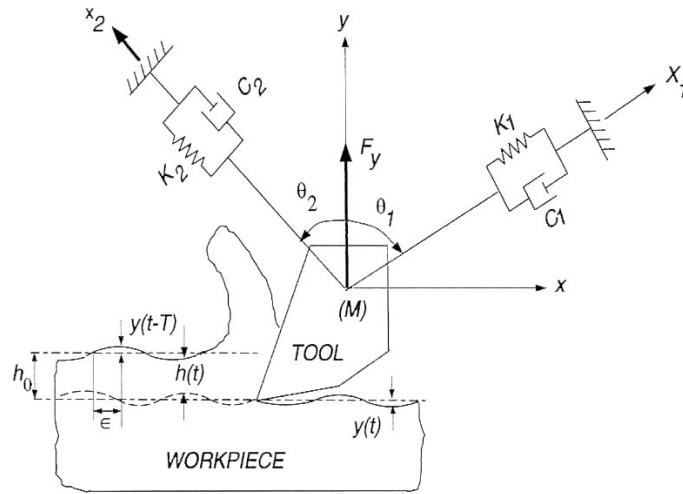


Figura 4. Modelo 2 GDL Torneado

Un proceso de torneado con un sistema de 2 GDL se muestra en la figura. Los parámetros en las direcciones x_1 y x_2 se muestran en la Tabla 1:

Tabla 1. Datos para el modelo en la Figura 4

Dirección	ω [Hz]	ζ	K [N/m]
x_1	250	1.2%	2.26×10^8
x_2	150	1.0%	2.13×10^8

La fuerza de corte es $F_y = K_t a h(t)$, donde la constante de corte $K_t = 1000$ MPa. Las flexibilidades están orientadas con $\theta_1 = 30^\circ$ y $\theta_2 = -45^\circ$ a partir del eje y . Graficar los lóbulos de estabilidad del sistema.

Para la solución del problema se procede considerando el sistema mostrado, se proyecta la fuerza aplicada en el eje y a los ejes de trabajo x_1 y x_2 :

$y = \frac{x_1}{\cos \theta_1}$ $F_{x_1} = F_y \cos \theta_1$	$y = \frac{x_2}{\cos \theta_2}$ $F_{x_2} = F_y \cos \theta_2$
---	---

$\frac{1}{\cos \theta_1} \left(m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 \right) = F_{x_1}$ $\frac{1}{\cos \theta_1} \left(\ddot{x}_1 + \frac{c_1}{m_1} \dot{x}_1 + \frac{k_1}{m_1} x_1 \right) = \frac{F_y}{m_1} \cos \theta_1$	$\frac{1}{\cos \theta_2} \left(m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 + k_2 x_2 \right) = F_{x_2}$ $\frac{1}{\cos \theta_2} \left(\ddot{x}_2 + \frac{c_2}{m_2} \dot{x}_2 + \frac{k_2}{m_2} x_2 \right) = \frac{F_y}{m_2} \cos \theta_2$
---	---

Luego, se sustituyen los parámetros del sistema y se transforman las ecuaciones diferenciales al dominio de Laplace; además bajo las consideraciones $m = \frac{k}{\omega_n^2}$, y

$\Phi = \frac{Y(s)}{F(s)}$, se tiene que:

$x_1(s) \left[s^2 + 2\zeta_1 \omega_{n_1} s + \omega_{n_1}^2 \right] = \frac{\cos^2 \theta_1}{m_1} F_y(s)$ $\frac{x_1(s)}{F_y(s)} = \frac{1}{m_1} \frac{1}{s^2 + 2\zeta_1 \omega_{n_1} s + \omega_{n_1}^2} \cos^2 \theta_1$ $\frac{x_2(s)}{F_y(s)} = \frac{\omega_{n_2}^2}{k_2 \left[s^2 + 2\zeta_2 \omega_{n_2} s + \omega_{n_2}^2 \right]} \cos^2 \theta_2$	$x_2(s) \left[s^2 + 2\zeta_2 \omega_{n_2} s + \omega_{n_2}^2 \right] = \frac{\cos^2 \theta_2}{m_2} F_y(s)$ $\frac{x_2(s)}{F_y(s)} = \frac{1}{m_2} \frac{1}{s^2 + 2\zeta_2 \omega_{n_2} s + \omega_{n_2}^2} \cos^2 \theta_2$ $\frac{x_1(s)}{F_y(s)} = \frac{\omega_{n_1}^2}{k_1 \left[s^2 + 2\zeta_1 \omega_{n_1} s + \omega_{n_1}^2 \right]} \cos^2 \theta_1$
---	---

Con ambas expresiones para los dos ejes representando ambos grados de libertad del sistema, se forma la función de transferencia global del sistema de 2 GDL:

$$\Phi(s) = \frac{\omega_{n_1}^2}{k_1 \left[s^2 + 2\zeta_1 \omega_{n_1} s + \omega_{n_1}^2 \right]} \cos^2 \theta_1 + \frac{\omega_{n_2}^2}{k_2 \left[s^2 + 2\zeta_2 \omega_{n_2} s + \omega_{n_2}^2 \right]} \cos^2 \theta_2 \quad (38)$$

La función de transferencia arriba mostrada se compone de una parte real y una imaginaria, sustituyendo $S = j\omega$, y manipulando la función de transferencia se obtienen

ambos términos para el sistema mostrado; considerando que $r = \frac{\omega}{\omega_n}$:

$$\begin{aligned}
G(j\omega) = \operatorname{Re}[\Phi(j\omega)] &= \frac{1-r_1^2}{k_1[(1-r_1^2)^2+(2\zeta_1r_1)^2]} \operatorname{Cos}\theta_1 + \frac{1-r_2^2}{k_2[(1-r_2^2)^2+(2\zeta_2r_2)^2]} \operatorname{Cos}\theta_2 \\
H(j\omega) = \operatorname{Im}[\Phi(j\omega)] &= \frac{-2\zeta_1r_1}{k_1[(1-r_1^2)^2+(2\zeta_1r_1)^2]} \operatorname{Cos}\theta_1 + \frac{-2\zeta_2r_2}{k_2[(1-r_2^2)^2+(2\zeta_2r_2)^2]} \operatorname{Cos}\theta_2
\end{aligned} \tag{39}$$

Se tiene que la fuerza de excitación y la viruta están representadas por las siguientes ecuaciones, respectivamente:

$F_y = K_f ah(t)$	$h(t) = h_0 + y(t-\tau) - y(t)$
$F_y(s) = K_f ah(s)$	$h(s) = h_0 + (e^{-sT} - 1)y(s)$

Sustituyendo $y(s) = F_y(s)\Phi(s)$ y $F_y(s)$ en la expresión de la viruta, se obtiene la expresión:

$$h(s) = h_0 + (e^{-sT} - 1)K_f ah(s)\Phi(s) \tag{40}$$

Factorizando $h(s)$, obtenemos:

$$\frac{h(s)}{h_0} = \frac{1}{1 + (1 - e^{-sT})K_f a\Phi(s)} \tag{41}$$

La relación $h(s)/h_0$ que contiene la ecuación característica del sistema considerando el retraso en el tiempo del que depende la expresión para el espesor de viruta, da la ecuación característica:

$$1 + (1 - e^{-sT})K_f a\Phi(s) = 0 \tag{42}$$

Se tienen las condiciones de estabilidad del sistema. Al sustituir las partes **[Re]** e **[Im]** de la función de transferencia $\Phi(s)$ y sustituyendo el término con retraso en el tiempo $e^{-\theta} = \operatorname{Cos}\theta - j\operatorname{Sin}\theta$, $\theta = \omega T$:

$$1 + K_f a \Phi(s) (1 + j \sin(\omega T) - \cos(\omega T)) = 0$$

$$1 + K_f a [\operatorname{Re}[\Phi(j\omega)] + \operatorname{Im}[\Phi(j\omega)]] (1 + j \sin(\omega T) - \cos(\omega T)) = 0 \quad (43)$$

Las partes real e imaginaria tienen la forma

[Re] $\operatorname{Re}[\Phi(j\omega)] = G_1 \cos^2 \theta_1 + G_2 \cos^2 \theta_2$	[Im] $\operatorname{Im}[\Phi(j\omega)] = H_1 \cos^2 \theta_1 + H_2 \cos^2 \theta_2$
---	---

Por lo tanto, la ecuación característica queda como sigue:

$$1 + K_f a \left[(G_1 \cos^2 \theta_1 + G_2 \cos^2 \theta_2) + j (H_1 \cos^2 \theta_1 + H_2 \cos^2 \theta_2) \right] [(1 - \cos(\omega T)) + j \sin(\omega T)] = 0 \quad (44)$$

Desarrollando los términos de la ecuación (3.3.26) y separando tanto la parte real como la parte imaginaria:

[Re]

$$1 + K_f a \left[(G_1 \cos^2 \theta_1 + G_2 \cos^2 \theta_2) (1 - \cos(\omega T)) - (H_1 \cos^2 \theta_1 + H_2 \cos^2 \theta_2) \sin(\omega T) \right] = 0 \quad (45)$$

[Im]

$$K_f a \left[(G_1 \cos^2 \theta_1 + G_2 \cos^2 \theta_2) \sin(\omega T) + (H_1 \cos^2 \theta_1 + H_2 \cos^2 \theta_2) (1 - \cos(\omega T)) \right] = 0 \quad (46)$$

Tomando la parte imaginaria de la ecuación:

$$\tan \psi = \frac{\operatorname{Im}[\Phi(j\omega)]}{\operatorname{Re}[\Phi(j\omega)]} = \frac{(H_1 \cos^2 \theta_1 + H_2 \cos^2 \theta_2)}{(G_1 \cos^2 \theta_1 + G_2 \cos^2 \theta_2)} = \frac{\sin(\omega T)}{(1 - \cos(\omega T))} \quad (47)$$

Considerando de la ecuación la parte real:

$$K_f a = \frac{-1}{\left[(G_1 \cos^2 \theta_1 + G_2 \cos^2 \theta_2) (1 - \cos(\omega T)) - (H_1 \cos^2 \theta_1 + H_2 \cos^2 \theta_2) \sin(\omega T) \right]} \quad (48)$$

Factorizando en el denominador:

$$K_f a = \frac{-1}{(G_1 \text{Cos}^2 \theta_1 + G_2 \text{Cos}^2 \theta_2) \left[(1 - \text{Cos}(\omega T)) - \frac{(H_1 \text{Cos}^2 \theta_1 + H_2 \text{Cos}^2 \theta_2)}{(G_1 \text{Cos}^2 \theta_1 + G_2 \text{Cos}^2 \theta_2)} \text{Sin}(\omega T) \right]} \quad (49)$$

Sustituyendo la razón $\frac{\text{Im}[\Phi(j\omega)]}{\text{Re}[\Phi(j\omega)]}$ de la ecuación (3.3.29) en el denominador y desarrollando el denominador de la expresión:

$$\begin{aligned} K_f a &= \frac{-1}{(G_1 \text{Cos}^2 \theta_1 + G_2 \text{Cos}^2 \theta_2) \left[(1 - \text{Cos}(\omega T)) - \frac{\text{Sin}^2(\omega T)}{(\text{Cos}(\omega T) - 1)} \right]} \\ &= \frac{-1}{2(G_1 \text{Cos}^2 \theta_1 + G_2 \text{Cos}^2 \theta_2)} \end{aligned} \quad (50)$$

De donde se obtiene la expresión para la profundidad de corte límite:

$$a_{\text{lim}} = \frac{-1}{2K_f (G_1 \text{Cos}^2 \theta_1 + G_2 \text{Cos}^2 \theta_2)} \quad (51)$$

Y $\tan \psi$ puede ser reducida a

$$\tan \psi = \frac{-2\zeta_1 r_1}{1 - r_1^2} + \frac{-2\zeta_2 r_2}{1 - r_2^2} \quad (52)$$

Para calcular la velocidad de husillo se calcula el salto de fase entre las ondas interna y externa. Este salto de fase es un ángulo que representa la diferencia de fases entre las modulaciones interna y externa, esto es, la diferencia entre las ondas internas y externas en la superficie de la viruta. La expresión para dicho ángulo es:

$$\varepsilon = 3\pi + 2\psi \quad (53)$$

El período correspondiente de la velocidad de husillo es

$$T = \frac{2\pi k + \varepsilon}{2\pi f_c} \quad (54)$$

Donde f_c es la frecuencia de chatter en [Hz], y k es un número entero para cada ciclo de vibración. $K = 1, 2, 3 \dots n$.

La velocidad de husillo en [rpm] es

$$n = \frac{60}{T} \quad (55)$$

Para obtener los lóbulos de estabilidad, se siguen los siguientes pasos:

- Seleccionar una frecuencia de chatter de la parte **[Re]** negativa de la función de transferencia
- Calcular el ángulo de fase ψ de dicha frecuencia
- Calcular la profundidad de corte crítica a_{lim}
- Calcular la velocidad de husillo siguiendo la secuencia ϵ, T, n para cada lóbulo ($k = 1, 2, 3 \dots i$)
- Repetir para todas las frecuencias de chatter cercanas a la(s) frecuencias natural(es) del sistema

La representación del sistema se muestra en la Figura 5. Donde se pueden apreciar los efectos de los modos dentro de la parte real e imaginaria del sistema, además se presenta el diagrama de fase del sistema y por último la parte real vs. la parte imaginaria.

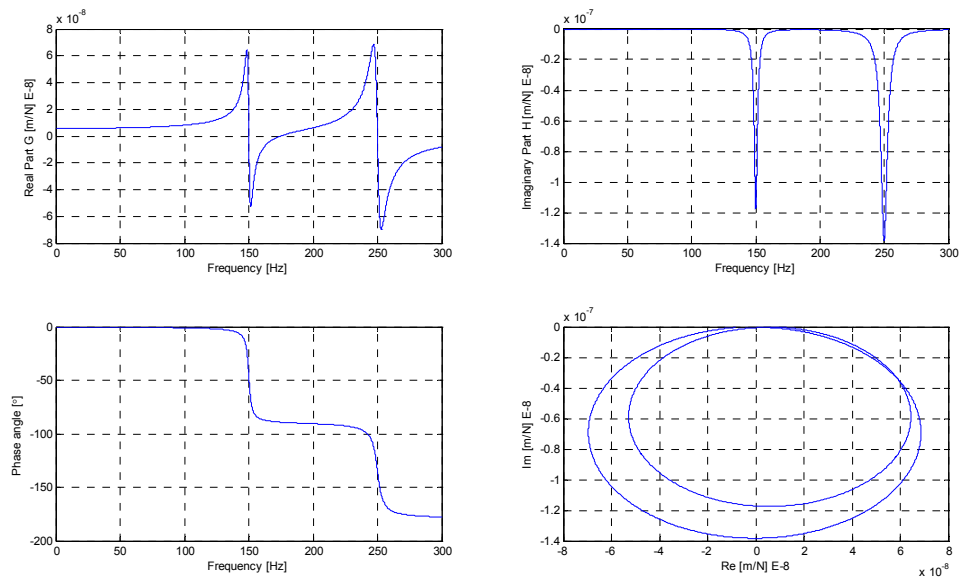


Figura 5. Representación del sistema

A continuación en la Figura 6 se muestra el diagrama de estabilidad, cuya solución nos permite alcanzar a reconocer que la profundidad de corte limite esta determinada por.

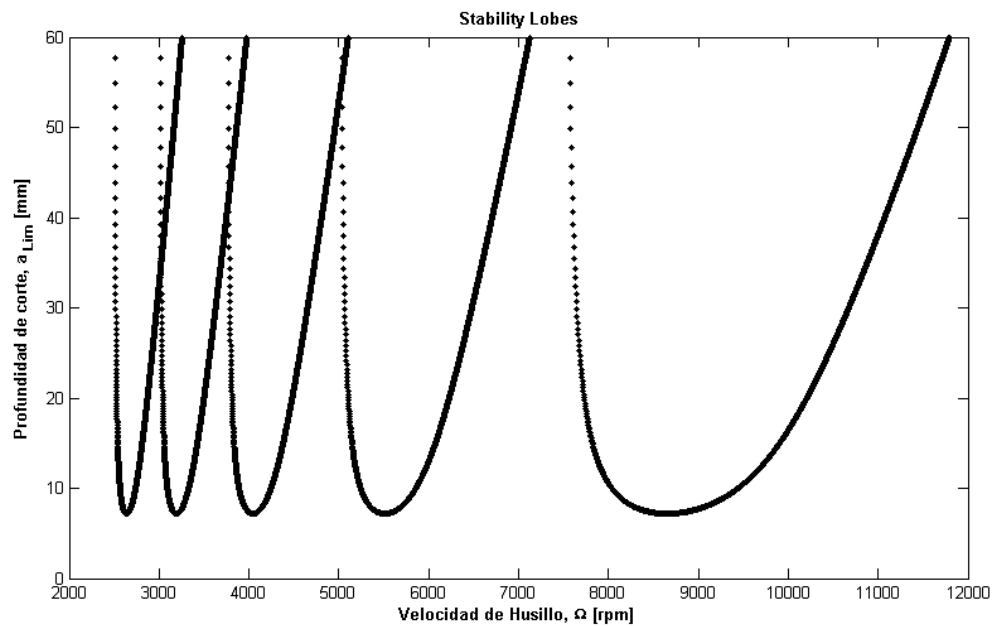


Figura 6. Lóbulos de Estabilidad Sistema 2 GDL.

Ejemplo: *Estabilidad de un sistema de fresado con 3 GDL.*

El cálculo de los lóbulos de estabilidad implica encontrar una relación directa entre las fuerzas de corte y los desplazamientos dinámicos. Esto es simplificando el modelo de fuerzas de corte reconociendo que las fuerzas varían linealmente con el espesor de viruta dinámico, el cual depende de los desplazamientos relativos entre la pieza de trabajo y la herramienta.

Utilizando la metodología de solución descrita en De la Calle [20], donde la caracterización de las fuerzas de los coeficientes de corte esta se basa en un modelo de fuerzas de corte que considera los coeficientes de fuerza axial, radial y tangencial. Las fuerzas de corte están definidas por

$$\begin{Bmatrix} F_t(j) \\ F_r(j) \\ F_a(j) \end{Bmatrix} = K_t a \begin{Bmatrix} 1 \\ K_r \\ K_a \end{Bmatrix} h_j(\phi_j) \quad (56)$$

Estas fuerzas de corte están proyectadas sobre los ejes cartesianos X, Y, y Z de la siguiente manera

$$\begin{Bmatrix} F_x(j) \\ F_y(j) \\ F_z(j) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \phi_j & -\sin \phi_j & \cos \phi_j \\ \sin \phi_j & -\cos \phi_j & \sin \phi_j \\ 0 & -\sin \gamma & -\cos \gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_t(j) \\ F_r(j) \\ F_a(j) \end{Bmatrix} \quad (57)$$

La ecuación se puede reducir sumando todas las fuerzas

$$\{F(t)\} = \frac{1}{2} a K_t [A(t)] \{\Delta(t)\} \quad (58)$$

Donde las fuerzas y desplazamientos están relacionados por la matriz de coeficientes direccionales $[A(t)]$. La matriz representa la variación en el dominio del tiempo de las proyecciones de fuerzas debidas a los desplazamientos sobre los ejes cartesianos.

El desplazamiento dinámico entre la herramienta y la pieza de trabajo en el instante t y $(t-T)$ es el siguiente

$$t : (\{r_t\} - \{r_w\}); \quad t-T : (\{r_t\} - \{r_w\})e^{-i\omega_c T} \quad (59)$$

La expresión $\omega_c T$ es la fase entre dos impactos de dientes consecutivos (periodo) suponiendo que el sistema hipotéticamente vibra a una frecuencia (tal vez chatter) ω_c . El desplazamiento incremental para un periodo determinado es

$$\{\Delta\} = (1 - e^{-i\omega_c T}) [G(i\omega_c)] \{F\} e^{i\omega_c t} \quad (60)$$

Donde $[G(i\omega_c)]$ se obtiene sumando la matriz que contiene todas las funciones de respuesta a la frecuencia de la herramienta y la pieza de trabajo $[G_t(i\omega_c)]$ y $[G_w(i\omega_c)]$, es decir, la función de transferencia relativa.

$$[G(i\omega_c)] = \begin{bmatrix} G_{xx_t}(i\omega_c) & G_{xy_t}(i\omega_c) & G_{xz_t}(i\omega_c) \\ G_{yx_t}(i\omega_c) & G_{yy_t}(i\omega_c) & G_{yz_t}(i\omega_c) \\ G_{zx_t}(i\omega_c) & G_{zy_t}(i\omega_c) & G_{zz_t}(i\omega_c) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{xx_w}(i\omega_c) & G_{xy_w}(i\omega_c) & G_{xz_w}(i\omega_c) \\ G_{yx_w}(i\omega_c) & G_{yy_w}(i\omega_c) & G_{yz_w}(i\omega_c) \\ G_{zx_w}(i\omega_c) & G_{zy_w}(i\omega_c) & G_{zz_w}(i\omega_c) \end{bmatrix} \quad (61)$$

Ahora introduciendo la ecuación (3.3.42), en la ecuación (3.3.40) la ecuación (3.3.44) es obtenida

$$\{F\} e^{i\omega_c t} = \frac{1}{2} aK_t (1 - e^{-i\omega_c t}) [A(t)] [G(i\omega_c)] \{F\} e^{i\omega_c t} \quad (62)$$

Para encontrar una solución analítica para la ecuación (3.3.44), la matriz de coeficientes direccionales debe ser constante en el dominio del tiempo, además se logra expandiendo la matriz en series de Fourier, sin embargo se utilizó una solución de monofrecuencia, la cual implica que la matriz de coeficientes es aproximada por su promedio en coeficiente de Fourier $[A_0]$. Por lo tanto los lóbulos de estabilidad serán precisos para inmersiones radiales mayores a aproximadamente el 10% del diámetro de la herramienta.

$$\{F\} e^{i\omega_c t} = \frac{1}{2} aK_t (1 - e^{-i\omega_c t}) [A_0] [G(i\omega_c)] \{F\} e^{i\omega_c t} \quad (63)$$

La ecuación (3.3.45) es resuelta como un problema de autovalores y la solución no trivial se encuentra cuando el determinante es igual a cero.

$$\det \left[[I] - \frac{1}{2} aK_t (1 - e^{-i\omega_c t}) [A_0] [G(i\omega_c)] \right] = 0 \quad (64)$$

Por lo tanto,

$$\det \left[[I] + \Lambda [G_0(i\omega_c)] \right] = 0 \quad (65)$$

La ecuación (3.3.47) representa la ecuación característica que define la estabilidad del sistema, donde el autovalor es:

$$\Lambda = -\frac{N}{2\pi} aK_t (1 - e^{-i\omega_c T}) \quad (66)$$

Operando con el determinante y resolviendo el problema de autovalor analíticamente se obtiene una función cúbica.

Es necesario considerar que se utilizó una herramienta toroidal de 2.5 mm. de radio y aluminio 7075 T6. En la Tabla 2 se presentan los coeficientes de corte para el material seleccionado.

Tabla 2. Tabla de coeficientes de corte herramienta toroidal de 2.5 mm[20]

Coefficiente	Parte Toroidal	Parte Frontal
K_r (N/mm ²)	558.35-198.93*a	65.495
K_t (N/mm ²)	1723.3-369.44*a	804.73
K_a (N/mm ²)	48.26+52.15*a	174.02

A continuación se presenta la Tabla 3 de parámetros para el ejemplo tridimensional de fresado.

Tabla 3. Parámetros dinámicos de la herramienta y la pieza de trabajo[20]

Parámetros Dinámicos Medidos en la Punta de la Herramienta			
	Frecuencia (Hz)	Rigidez (N/mm)	Coefficiente de Amortiguamiento
MODO X	373.0	19297178.4	0.086
	651.3	15909208.7	0.071
MODO Y	373.0	19297178.4	0.086
	651.3	15909208.7	0.071
Parámetros Dinámicos del Piso Delgado			
MODO Z	28.4	1718199.5	0.0107
	34.9	5880805.2	0.0108

Por último se presentan en la Figura 7 los lóbulos de estabilidad obtenidos.

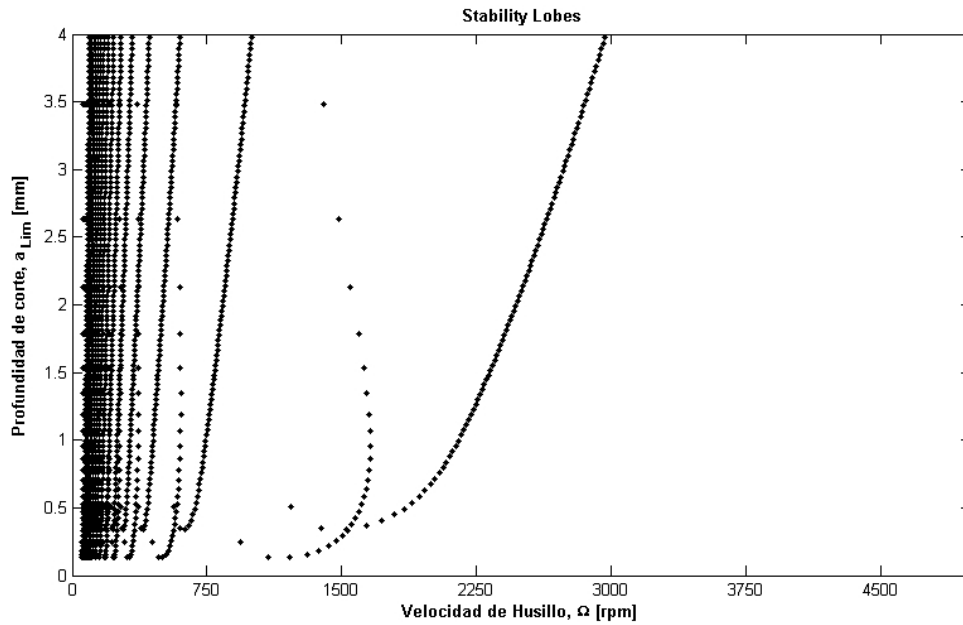


Figura 7. Lóbulos de Estabilidad para el caso 3D

VALIDATION OF STABILITY LOBES (50% radial immersion)

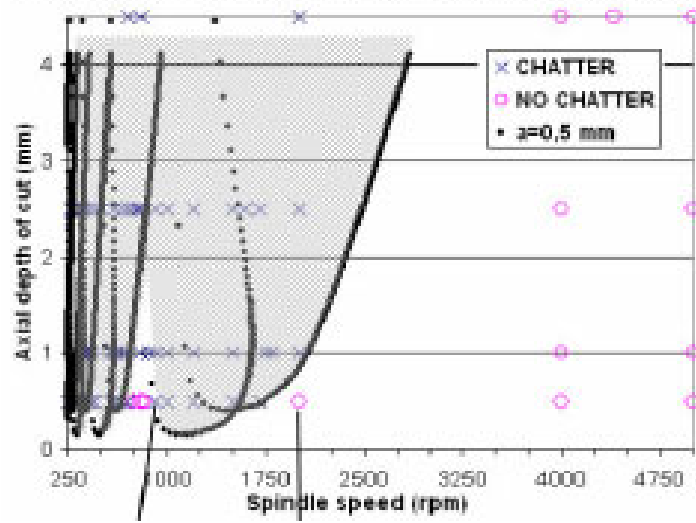


Figura 8. Lóbulos de estabilidad para el caso 3D [20]

4 CONCLUSIONES

Respecto a los métodos de solución basados en la función de Lambert:

Comparando las soluciones que presenta Elias. A [15] con la solución analítica de los lóbulos de estabilidad para el caso de torneado, se puede notar algunas diferencias en los resultados: los lóbulos tienen en general a ser mas angostos que los que exhiben soluciones analíticas como las propuestas por Stepan y Ngoc [16]. Estos resultados evidencian la necesidad de realizar pruebas experimentales con esta solución, en orden de establecer el campo de validez de soluciones basadas en Lambert, la cual desde el punto de vista matemático presenta una solución exacta a la Ecuación Diferencial con Retardo (DDE por sus siglas en ingles).

Otro de los retos importantes es mejorar los algoritmos de procesamiento numérico que se utilizan para calcular los valores de las diferentes ramas de la función de Lambert, con el fin de obtener soluciones en tiempos razonables a los que requieren otros métodos propuestos para obtener las zonas de estabilidad de la DDE

Respecto a los modelos para predecir zonas de estabilidad en Fresado

Comparando los diferentes modelos de fresado que se han revisado en este trabajo, cada uno aporta a diferentes aspectos específicos del problema de estabilidad en este proceso. El modelo presentado por Altintas [16], considera en primer lugar el efecto de la intermitencia del corte en cada diente y la variación en la dirección de las fuerzas de corte debidas a la rotación de la herramienta. Una de las grandes simplificaciones de este primer modelo para el caso bidimensional es la utilización de un solo termino en la expansión de Fourier para la matriz de coeficientes de direccionamiento, que tiende a omitir en las zonas de estabilidad el efecto de bifurcación de Hopf y Flip que se presenta principalmente a bajas inmersiones y es reseñado por otros autores como Stepan [18] y

que posteriormente es incluido por el mismo autor [10]. Uno de los grandes aportes de este modelo es la metodología para obtención de los lóbulos de estabilidad, que ha servido de base para otros autores como Bravo (2005) [19] y otros.

Contribuciones científicas.

Este trabajo ha permitido establecer el panorama actual de la investigación en el campo de las vibraciones auto-excitadas y la modelación del fenómeno de *chatter* en operaciones de mecanizado, que son un tema crítico cuando se trata de operaciones de alta velocidad. Este es un buen punto de partida para la definición de diferentes temas de investigación, tanto de maestría como a nivel doctoral. Este resultado se ha logrado gracias a una exhaustiva revisión de publicaciones en journals, libros tanto impresos como en formato electrónico y documentos disponibles en las bases de datos a las que tiene acceso el ITESM.

Además, los diferentes modelos matemáticos presentados por los diferentes investigadores fueron reproducidos y comparados tanto con los resultados del artículo publicado, como con datos experimentales y otros artículos sobre el mismo tema. De esta manera, se cuenta con una base de conocimiento y herramientas metodológicas y computacionales para ir generando nuevo conocimiento y nuevos métodos de análisis de estabilidad, ya que se ha visto que aun queda muchos casos por estudiar, como el modelo tridimensional y otros métodos matemáticos para hallar las zonas de estabilidad.

5 BIBLIOGRAFÍA

- [1] Tlustý, J., Poláček, A., and Danek, C., 1962, "Selbsterregte Schwingungen an Werkzeugmaschinen," VEB Verlag Technik, Berlin, pp 431
- [2] Tobias, S.A., 1965, "Machine Tool Vibration" New York, J. Wiley. pp 351
- [3] Kudinov, V.A., 1955, "Theory of vibration generated from metal cutting, New Technology of Mechanical Engineering," USSR Academy of Sciences Publishing House, Moscow, .
- [4] Halley, J. E., Helvey, A. M., and Smith, K. S., 1999, "*He Impact of High Speed Machining Technology on the Design and Fabrication of Aerospace Components*," Proc. 17th ASME Biennial Conf. on Vibration and Noise, Las Vegas, NV, Paper no. DETC99/VIB-8057.
- [5] Ganguli, A., Deraemaeker, A., and Horodinca, M., 2001, "*Active Damping of Chatter in Machine Tools*," Accepted, Journal of Systems and Control Engineering, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, vol 219, N°15, p. 359-369, 2005.
- [6] Landers, R. G., and Ulsoy, A. G., 1996, "*Machining Force Control Including Static Nonlinear Effects*," Proc. of the Japan-USA Symposium on Flexible Automation, .
- [7] Budak, E., and Altintas, Y., 1998, "*Analytical Stability Prediction and Design of Variable Pitch Cutters*," ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering, 120pp. 22-30.
- [8] Altintas, Y., 2001, "*Analytical Prediction of Three Dimensional Chatter Stability in Milling*," JSME International Journal Series C, 44(3) pp. 717-723.

[9] Insperger, T., Stepan, G., and Bayly, P. V., 2003, "*Multiple Chatter Frequencies in Milling Processes*," ASME Journal of Sound and Vibration, 262(2) pp. 333-345.

[10] Merdol, S. D., and Altintas, Y., 2004, "*Multi Frequency Solution of Chatter Stability for Low Immersion Milling*," ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering, 126(3) pp. 459-466.

[11] Mason, J.C., and Handscomb, D.C., 2003, "*Chebyshev polynomials*," Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Fla., pp. 341.

[12] Butcher, and Allen, E., 1997, "*A Symbolic Computational Technique for Stability and Bifurcation Analysis of Nonlinear Time-Periodic Systems*," .Ph.D. Thesis. Auburn University

[13] Chen, Y. Q., Xue, D., and Gu, J., 2003, "*Analytic and Numerical Computation of Stability Bound for A Class of Linear Delay Differential Equations Using Lambert Function*," http://www.csois.usu.edu/people/yqchen/paper/03C02_dcdis03_dde_lambert_s.pdf

[14] Asl, F. M., and Ulsoy, A. G., 2003, "*Analysis of a System of Linear Delay Differential Equations*," ASME Journal of Dynamics Systems, Measurements and Control, 125pp. 215-223.

[15] Elias, A., Rodriguez, C. A. et al., 2005, "*Chatter Prediction in Orthogonal Cutting Based on Lambert Function*," Proceedings of IMECE 2005 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition,.

[16] Altintas, Y., 2000, "*Manufacturing automation :metal cutting mechanics, machine tool vibrations, and CNC design*," Cambridge University Press, New York, pp. 286.

[17] Le-Ngoc, L., 2002, "*Simple stability analyses of a regenerative chatter problem and of a time-delayed displacement feedback sdof system,*" ASME Journal of Sound and Vibration, 258(2) pp. 373-384.

[18] Stepan, G., Szalai, R., and Mann, B. P., 2005, "*Nonlinear Dynamics of High-Speed Milling -Analyses, Numerics, and Experiments,*"ASME Journal of Vibration and Acoustics, 127(2) pp. 197-203.

[19] Bravo, U., Altuzarra, O., and Lopez de Lacalle, L. N. et al, 2005, "*Stability Limits of Milling Considering the Flexibility of the Workpiece and the Machine,*" International Journal of Machine Tools and Manufacture, 45(15) pp. 1669-1680.

[20] Campa, F.J.. Lopez De Lacalle, L.N. et al. 2005. "*Determination of cutting conditions for stable Milling of flexible parts by means of a three dimensional dynamic model,*" Proceedings of IMECE 2005 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition.

Nombre de los profesores: Dr. Alex Elias Zuñiga aelias@itesm.mx
Dr. Ciro Rodriguez ciro.rodriguez@itesm.mx

Asignatura: Estudio Dirigido M95-195

Categoría de participation: Postgrado

Calificación Otorgada: 100

Autores del trabajo:

Alejandro Martínez López (604889)
a00604889@itesm.mx

Francisco Javier Araya Perez (347470)
a00347470@itesm.mx

Jovanny Pacheco Bolívar(793468)
a00793468@itesm.mx

Estándar de estilo: ASME