

EGE00 00003293

QA

341

54

1000

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY

UNIVERSIDAD VIRTUAL



**FACTORES QUE FACILITAN EL APRENDIZAJE EN LA GRAFICACION
DE FUNCIONES ALGEBRAICAS**

TESIS

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL TITULO
DE MAESTRO EN EDUCACION CON ESPECIALIDAD EN
MATEMATICAS**

AUTOR:

ADALBERTO SEGOVIA LERMA

ASESOR: DR. ALEJANDRO E. MONTES Y GOMEZ DAZA

MAYO DE 1999

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY



UNIVERSIDAD VIRTUAL
CAMPUS CHIHUAHUA

019

ACTA DE EXAMEN Y AUTORIZACION DE LA EXPEDICION
DE GRADO ACADÉMICO

Los suscritos, miembros del jurado calificador del examen de grado sustentado hoy

por ADALBERTO SEGOVIA LERMA

en opción al grado académico de

MAESTRO EN EDUCACION, ESPECIALIDAD EN MATEMATICAS

hacemos constar que el sustentante resultó ^{APROBADO POR UNANIMIDAD}
~~no aprobado por unanimidad~~

ALEJANDRO MONTES Y GOMEZ DAZA, DR.

JUAN ANTONIO ALANIS RODRIGUEZ, DR.

RAUL FLORES HERRERA, MTR.

Hago constar que el sustentante, de acuerdo con documentos contenidos en su expediente, ha cumplido con los requisitos de graduación, establecidos en el Reglamento Académico de los programas de graduados de la Universidad Virtual.

LIC. MARIO MUÑOZ LICON
Director de Servicios Escolares

Expidase el grado académico mencionado, con fecha 25 de mayo de 1999.

ING. CARLOS CRUZ LIMON
Rector de la Universidad Virtual

LIC. SALVADOR GARZA BOARDMAN
Director General del Campus

Chihuahua, Chih., a 17 DE FEBRERO DE 1999.

**FACTORES QUE FACILITAN EL APRENDIZAJE EN LA GRAFICACIÓN
DE FUNCIONES ALGEBRAICAS.**

Tesis presentada

por

ADALBERTO SEGOVIA LERMA

**Presentada ante la Dirección Académica de la Universidad Virtual del
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
como requisito parcial para optar
al título de**

MAESTRO EN EDUCACIÓN

Diciembre de 1998

Maestría en Educación con Áreas de Especialización

**FACTORES QUE FACILITAN EL APRENDIZAJE EN LA GRAFICACIÓN
DE FUNCIONES ALGEBRAICAS**

Tesis presentada

por

ADALBERTO SEGOVIA LERMA

Aprobada en contenido y estilo por:



Dr. Alejandro E. Montes y Gómez Daza, asesor.

**Lic. Patricia Arísti R.
Maestría en Educación
Universidad Virtual**

RESUMEN

FACTORES QUE FACILITAN EL APRENDIZAJE EN LA GRAFICACIÓN DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

Diciembre de 1998

INGENIERO CIVIL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIHUAHUA

MAESTRO EN EDUCACIÓN
INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY

Dirigida por el Doctor Alejandro E. Montes y Gómez Daza

Este estudio de investigación tiene un especial interés en la búsqueda de mejores estrategias en la enseñanza-aprendizaje de la matemática en el aula, específicamente en el tercer año de nivel medio superior y especialmente para los programas de estudio de la Escuela Preparatoria Federal por Cooperación Activo 20-30, “Albert-Einstein” ubicada en Cd. Delicias, Chih.

La presente investigación es útil para cualquier persona interesada en la búsqueda de mejores alternativas en los procesos de enseñanza-aprendizaje, es un llamado a la reflexión de nuestros quehaceres educativos cotidianos, a repensar en nuestro papel de profesores; periódicamente recibimos a grupos de estudiantes que están a nuestro cargo durante un determinado tiempo y somos responsables de formarlos útiles a la sociedad, creativos, exitosos en sus estudios futuros, tolerantes, interesados en la investigación, respetuosos del medio en que vivimos y sobre todo inculcarles un espíritu de gusto y satisfacción por la preparación tanto humanística como académica que deben reunir en estos días en que

vivimos. O, actuar como otras veces lo hemos hecho, recibirlos, estar con ellos un semestre o dos y verlos partir con sus mismas vestiduras.

Por otro lado, este tema de investigación fue iniciado con la pregunta, **¿Cuáles son los factores que facilitan el aprendizaje en la graficación de funciones algebraicas en el tercer año de la Escuela Preparatoria Federal por Cooperación Activo 20-30, Albert-Einstein, de Cd. Delicias, Chih.?**

Los motivos principales que me llevaron a realizar esta investigación es el antecedente de la pobre cobertura sobre gráficas de funciones que un alto porcentaje de los estudiantes de preparatoria padecen y la gran importancia que éstas adquieren en el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral.

Este trabajo está dividido de la siguiente manera: El nombre del tema de investigación en donde se comenta todo lo que a él concierne desde el punto de vista educativo y académico; luego continúa con el planteamiento del problema de investigación, en donde se manifiesta el problema a estudiar y se le da una ubicación curricular específica. En este punto se hace hincapié en que el estudio se desarrolla con una población de 146 estudiantes que cursan el tercer año en la especialidad de fisico-matemáticas en la preparatoria antes mencionada, iniciado en el período escolar Agosto-Diciembre de 1997 y que se continuará en el período Febrero-Junio de 1998.

Otra parte de este trabajo la constituyen los objetivos de la investigación que en términos generales pretende analizar detalladamente aquellos factores que inciden de manera positiva en el aprendizaje de la graficación de funciones algebraicas con la finalidad de proporcionar algunas líneas didácticas que nos permitan facilitar este aprendizaje

Los factores a los cuáles se hace referencia son: exposición de los temas utilizando el aprendizaje significativo, la motivación y la retroalimentación. También interesa de manera muy particular el grado de incidencia que tendría en este tipo de aprendizaje la formación de un grupo de retroalimentación consolidado por los alumnos más destacados, cuya función será auxiliar a sus compañeros de más lento aprendizaje.

Otro aspecto importante de este estudio lo constituye la hipótesis de la investigación, ¿Qué es lo que se cree que va a pasar con la pregunta de investigación?. La hipótesis está formada por dos variables, una dependiente y otra independiente, se afirma que la graficación de funciones algebraicas dependerá de la calidad de los factores involucrados que facilitan ese aprendizaje.

Esta hipótesis está sustentada en un marco teórico que fue conformado con una investigación documental sobre textos, artículos y otros documentos que comentan y discuten las teorías que ayudan a resolver el problema, este estudio se enriquece gracias a investigaciones recientes en matemática educativa y en particular en la graficación de funciones , realizadas por investigadores del CINVESTAV en México, D.F.

Otro apartado de la investigación está conformado por la metodología, en donde se ubica en un tipo de investigación, con los consecuentes pasos metodológicos que éste señala para darle seguimiento y objetividad. También se hará mención de los instrumentos que nos permitirán recolectar datos e información acerca de nuestro problema de estudio.

Un último apartado lo componen los resultados y las conclusiones de esta investigación que gracias a la información y a los datos recolectados en el apartado anterior, se procederá a su análisis e interpretación, este proceso permitirá validar o invalidar nuestra hipótesis.

Esta investigación es importante ya que incide directamente en el desempeño académico de una institución educativa, y los resultados de este estudio pueden ser de gran utilidad a otras instituciones de nivel medio superior con programas similares. Se espera que los resultados de esta investigación proporcionen variados beneficios a las personas involucradas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de este tema de Matemáticas, medular en asignaturas tales como: Cálculo Diferencial y Cálculo Integral en el último año de preparatoria y en los primeros años de carrera profesional con estudios afines: Al docente puede proporcionarle un seguimiento didáctico y actualizado para que realice sus labores de una manera más eficiente, organizada y con un mayor nivel de calidad. Al estudiante le ofrece momentos para que aprenda a aprender, involucrándolo en aplicaciones a la vida real, haciendo que valore la necesidad de ser autodidacta y que se interese cada vez más en la investigación, como único recurso para demostrar la verdad, teniendo en cuenta que ésta es relativa.

Los resultados que se obtengan serán igualmente valiosos en el sentido de que siempre se aportarán líneas de investigación que conduzcan a mejores horizontes en la enseñanza-aprendizaje de la matemática en el aula y al abandono de metodologías viciadas por el tiempo y la costumbre que ya resultan anticuadas e infuncionales y que no son representativas de esta época próxima al siglo XXI.

ÍNDICE DE CONTENIDO

	Página
RESUMEN.....	i
ÍNDICE DE TABLAS.....	vii
Capítulo	
1. EL TEMA DE INVESTIGACIÓN.....	1
2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	8
3. OBJETIVOS.....	18
4. HIPÓTESIS.....	22
5. MARCO TEÓRICO.....	24
6. METODOLOGÍA.....	67
7. RESULTADOS Y CONCLUSIONES.....	82
 BIBLIOGRAFÍA.....	 107

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla	Página
7.1 Calificaciones del grupo control.....	90
7.2 Calificaciones de la primera evaluación del grupo control agrupadas en clases..	91
7.3 Calificaciones de la última evaluación del grupo control agrupadas en clases....	92
7.4 Calificaciones de los estudiantes.....	95
7.5 Calificaciones de la primera evaluación agrupadas en clases.....	97
7.6 Calificaciones de la última evaluación agrupadas en clases.....	99
7.7 Parámetros para el coeficiente lineal de Pearson.....	103

CAPÍTULO 1

EL TEMA DE INVESTIGACIÓN

La investigación que se presenta ha partido de la pregunta **¿Cuáles son algunos de los factores que facilitan el aprendizaje en la graficación de funciones algebraicas en el tercer año de Matemáticas en la Escuela Preparatoria Federal por Cooperación Activo 20-30, “Albert-Einstein” de Ciudad Delicias Chihuahua?** Los objetivos son identificar y mostrar algunos factores que facilitan este aprendizaje, de manera que un estudiante de tercer año vea de una manera más sencilla, este tema de matemáticas, proporcionándole herramientas para que él tenga un manejo más adecuado en la gráfica de una función, incluso de dotarlo de un procedimiento sencillo que le permita predecir el comportamiento de algunas gráficas tomando en cuenta una aritmética de funciones y le sirva para tener una idea de su resultado; esto, le permitirá al estudiante saber si su gráfica resultante, es o no la correcta. Otra intención de esta investigación es mostrar que este “tema” se le puede presentar al alumno relacionado con la realidad que vivimos, ubicar esta rama de las matemáticas en el contexto diario que vive el estudiante, hasta donde sea posible. Lo anterior nos lleva a profundizar en las diversas partes de este tópico, pero antes se hace referencia a que el estudio en cuestión es solamente sobre el tipo de funciones manejadas en el programa de Matemáticas correspondiente al tercer año en el nivel medio superior impartido en la escuela antes mencionada.

Respecto al concepto de **función** se puede indicar, que existe una gran variedad de definiciones proporcionadas por varios autores, algunos de los que más coinciden en este

concepto opinan que ...una función de una variable real con valores reales es una regla que a todo real de una parte D del conjunto de los números reales \mathbb{R} (y no es necesario que sea todo \mathbb{R}) asocia otro real (Andrés Sestier, 1978). Otra definición, “Una función es un conjunto de parejas ordenadas de números (x,y) en la cual dos parejas ordenadas distintas no tienen el mismo primer número. El conjunto de todos los valores posibles de “ x ” se llama el dominio de la función y el conjunto de todos los valores posibles de “ y ” se llama el rango de la función (Louis Leithold, 1972).

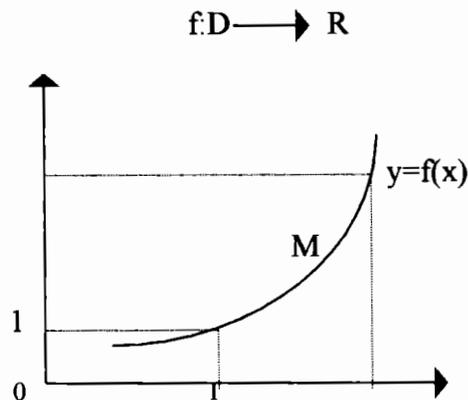
Pero existe una línea más moderna que expresa este concepto de manera muy similar, ...una función de valor real f definida sobre un conjunto D de números reales es una regla que asigna a cada número “ x ” de D un y sólo un número real $f(x)$ (Edwards y Penney, 1987).

Así que, como se puede notar todas las definiciones expresan la misma esencia del concepto. Por lo tanto se opta por la definición de Edwards y Penney, ya que expresa lo mismo que las anteriores y es más accesible a un estudiante de preparatoria. Por otro lado, una **función algebraica** ...es una función formada por un número finito de operaciones algebraicas de la función idéntica y la función constante (Louis Leithold, 1972). En donde una función idéntica se define como ...la función lineal particular definida por $f(x)=x$, es llamada la función idéntica (Louis Leithold, 1972), y la definición de función constante ...si el rango de una función f consiste de un solo número entonces f se llama una función constante (Louis Leithold, 1972).

Por lo tanto, si se conjuntan los conceptos revisados se puede decir que una función algebraica es aquella expresión formada por un número finito de operaciones de las

funciones constante e identidad, en donde se asigna a cada número x de D un y sólo un número real $f(x)$. La definición de función puede trasladarse a la realidad de muchas formas, por ejemplo, la estatura de una persona está en función de la edad de ésta, y gracias a la experimentación en esta área, se ha logrado ajustar funciones algebraicas a estas variaciones pudiéndose predecir en un determinado momento, con cierta precisión, la estatura de un niño a los doce años de edad, por mencionar un ejemplo; la longitud de una barra de metal depende de su temperatura, de aquí que al instalar vías para trenes, se diseñe un espacio libre entre uniones de vía, entre otros ejemplos.

Ahora bien, respecto al término **graficación de funciones algebraicas** se refiere a la manera de representar geoméricamente una función en un plano, algunos autores opinan al respecto ...la gráfica de una función f es la gráfica de la ecuación $y=f(x)$ (Edwards y Penney, 1987), otro autor opina que la gráfica de una función es una curva, la cual es el conjunto de todos los puntos en f cuyas coordenadas cartesianas están dadas por las parejas ordenadas de números (x,y) (Louis Leithold, 1972), otra definición, “Tomemos dos ejes de coordenadas rectangulares ox,oy . Elijamos la misma unidad de longitud en los dos ejes y consideremos una función:



Representamos en el eje ox el conjunto de los puntos de D ; a todo “ x ” de D asociemos el punto M del plano de abscisa “ x ” y ordenada $f(x)$. El conjunto de los puntos M constituye la representación gráfica de la función f , en donde a cada punto “ x ” de D no corresponde más que un solo punto de M (Andrés Sestier, 1978). Estas definiciones redondean el término graficación de funciones.

Ahora se profundizará en el concepto de **aprendizaje**, se puede decir que existen puntos de vista muy variados en la forma de definirlo por parte de los especialistas en este tema, según el enfoque conductista del aprendizaje ... el aprendizaje es un cambio en la conducta, en la forma como actúa una persona ante una situación particular (Anita E. Woolfolk, 1990), algunos teóricos son considerados psicólogos conductistas porque se han dedicado, exclusivamente, al estudio de las conductas observables y los cambios conductuales, entre ellos están, J. B. Watson, E. L. Thorndike y B. F. Skinner. En contraste, los psicólogos cognoscivistas, entre los cuáles se encuentra Jean Piaget, Robert Glaser, John Anderson, Jerome Bruner y David Ausubel que afirman ... el aprendizaje mismo es un proceso interno que no puede observarse directamente. El cambio ocurre en la capacidad de una persona para responder a una situación particular (Anita E. Woolfolk, 1990). Otros estudiosos en esta área opinan que ... una forma de entender el significado psicológico del aprendizaje es dándose cuenta de lo que no es. Primero, el aprendizaje no es algo que se encuentra únicamente en el salón de clase; ocurre en forma constante en cada día de nuestras vidas. Segundo, no sólo comprende lo que es “correcto”, si un estudiante escribe mal una palabra en un examen, no puede decirse que no haya aprendido a escribir bien esa palabra, sino que aprendió mal su ortografía. Finalmente, el aprendizaje no siempre implica

conocimiento o habilidades, como la ortografía o el tenis, las actitudes y las emociones también pueden ser aprendidas ... (Anita Woolfolk, 1990).

Esto nos muestra los esfuerzos de algunos psicólogos educativos por estudiar el aprendizaje y los procesos que influyen en él, así como los factores que de alguna manera están presentes tanto en el aprendiz como en el instructor y que moldean y dan forma a sus aprendizajes, entre ellos podemos mencionar: el grado de desarrollo personal, el grado de ansiedad, las diferencias individuales, la motivación, la planeación de la clase, entre otros.

También es parte de esta investigación analizar algunos de los **factores que facilitan el aprendizaje**, pero ¿Qué se entiende por facilitar? y ¿A cuáles factores se hace referencia? Estos términos denotan cuales son los elementos con causa que influyen en un determinado proceso y que lo hacen sencillo, fácil, cómodo y que parece haber sido hecho sin mucho esfuerzo. Los factores específicos a los que se refiere esta investigación y que facilitan el aprendizaje son: exposición de temas utilizando el aprendizaje significativo, motivación y retroalimentación.

Retomando la pregunta inicial, en torno a todas las consideraciones que se han realizado referentes a analizar los factores antes mencionados como elementos con causa que permiten realizar con más facilidad la graficación de algunas funciones algebraicas; con esto no se quiere decir que son los únicos factores que facilitan este aprendizaje, son aquellos factores que demuestran la relación entre ambas partes.

Por otro lado el tema elegido, cumple con las características que según Garza Mercado, Ario, maneja en su lectura “manual de técnicas de investigación para estudiantes de ciencias sociales”. El tema del aprendizaje en la graficación de funciones algebraicas resulta de **interés** porque el estudiante plasma en una gráfica sus habilidades algebraicas y técnicas relativas a cursos anteriores e interpreta y encuentra significados de una función durante el proceso de graficación. Impartir matemáticas es grato y más cuando se cuenta con herramientas que faciliten estos aprendizajes. Además, se considera **importante** ya que incide directamente en el desempeño académico de una institución educativa, y los resultados de este tema pueden ser de utilidad a otras instituciones de nivel medio superior con programas similares. Se ofrecen oportunidades en las cuales se puede probar la eficacia de algunos métodos y técnicas utilizados en la resolución de problemas. También es conveniente señalar que se dispone de información reciente del tema en cuestión, que existen personas preocupadas e interesadas por seguir investigando las diferentes facetas que se dan durante los procesos de enseñanza-aprendizaje. Existen investigadores en el área educativa que han proporcionado artículos recientes referentes al tema, entre otras personas, podemos mencionar a: José Contreras Domingo, Martha Cassarini, Gimeno Sacristán, L. Stenhouse, Anita Woolfolk, Francisco Cantoral, Rosa María Farfán, Francisco Cordero Osorio, entre otros, por lo que se considera que este tema es **novedoso**. También resulta **viable**, ya que es un problema muy específico y conocido por el gremio docente-matemático; se dispone de información y estudios de autores reconocidos que se mencionaron anteriormente. El tema es **original** ya que se propone demostrar algunas hipótesis basándonos en fuentes primarias que aún no han sido indagadas y que son relativas a esta área de estudio.

Además, es necesario comentar acerca de la **emotividad** del tema ya que será primordial impedir que nuestros sentimientos interfieran en la verdad, en la validez de las conclusiones, es decir, el análisis de los factores que facilitan el aprendizaje en la graficación de funciones algebraicas deberá expresar resultados y conclusiones que serán objetivas, respecto a la investigación.

CAPÍTULO 2

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El problema de investigación, se centra en la siguiente pregunta: ¿Cuáles son los factores que facilitan el aprendizaje en la graficación de funciones algebraicas en el tercer año de Matemáticas en la Escuela Preparatoria Federal por Cooperación Activo 20-30, “Albert-Einstein” de Cd. Delicias, Chihuahua?

Esta investigación tiene por objeto el analizar algunos de los factores que se cree inciden en el aprendizaje de la graficación de funciones algebraicas en el tercer año de nivel medio superior, por lo tanto, el **grado de precisión** para el análisis de este planteamiento ha de ser tal que se realice un reconocimiento de los antecedentes y las relaciones del problema, ubicándolo en un marco teórico dentro del cual pretende resolverse, reconociendo supuestos básicos, seleccionando los métodos y técnicas de investigación adecuadas y se formulen una o varias hipótesis de trabajo. También debe mostrar los objetivos, el alcance y las limitaciones del estudio, así como la identificación, localización y cuantificación de las fuentes de información.

Con la finalidad de analizar los componentes del problema de investigación, es importante expresar que cuando se habla de aprendizaje, el tema se **localiza en el ámbito de la psicología**, ya que ésta se ocupa de numerosos y variados factores relacionados con el ser humano, entre ellos estudia los procesos mentales que se realizan para producir aprendizajes, todo lo que tiene que ver con los procesos cognitivos que se generan en las

mentes de las personas cuando están ante un proceso de aprendizaje, pero más específicamente el tema se ubica dentro de la **psicología educativa**, pues son procesos que se refieren a la educación escolar, ... la psicología educativa es una rama de la psicología dirigida a generar conocimiento científico y comprensión de los problemas y retos que la educación plantea, procurando utilizar estos conocimientos para proponer soluciones cada vez mejores a tales problemas (Teresa Almaguer, 1995). Sobre este tema se han desarrollado diversos estudios, un antecedente remoto lo tenemos en Ausubel (1968), para él la psicología educativa está interesada ante todo en la naturaleza, condiciones, resultados y evaluación del aprendizaje, que tiene lugar en el salón de clases, otro estudio de este corte y época lo tenemos en Anderson y Faust (1969) ...plantean que el aprendizaje y la instrucción están en el corazón de la psicología educativa (Teresa Almaguer, 1995). Posteriormente surgieron otra serie de publicaciones ...Bergan y Dunn (1980), señalan que la psicología educativa tiene que ver en gran parte con la promoción de habilidades académicas básicas y con las oportunidades de los estudiantes para poder orientar su propio aprendizaje, tanto como en las maneras de alcanzarlos. En otra publicación posterior ...Good y Brophy (1983), plantean que la psicología educativa es la sistematización de información y conceptos que ayudan al maestro a comprender mejor la conducta escolar, a interpretar el sentido de la misma y a planear estrategias que logren los cambios deseados (Teresa Almaguer, 1995). Otro estudio un poco más moderno lo tenemos en ...Slavin (1988), propone que la psicología educativa es, en esencia, el estudio sistemático de los apéndices, el aprendizaje y la enseñanza (Teresa Almaguer, 1995). Y según una corriente un poco más actual expresa que “La psicología educativa es una disciplina avocada al estudio de los procesos de la enseñanza y el aprendizaje; aplica los

métodos y las teorías de la psicología y también tiene los propios (Anita E. Woolfolk, 1990).

En lo que respecta a la graficación de funciones algebraicas, el tema ocupa un lugar en el **ámbito de las Matemáticas** y específicamente en **Cálculo Diferencial**, dentro del cual pueden considerarse los aspectos relacionados con una función, en este caso, la **graficación de funciones algebraicas**. A continuación se discute lo concerniente a cada una de estas tres áreas específicas del conocimiento.

Las **Matemáticas** en general se consideran como la ciencia de las estructuras abstractas que constan de elementos sujetos a ciertas relaciones cuya totalidad define la estructura, abstractas, porque la naturaleza de los elementos se ignora y sólo se consideran sus relaciones mutuas, así se asocian reglas para el cálculo de superficies, volúmenes, perímetros, sumar, restar, multiplicar, dividir, generar polinomios, establecer una regla de correspondencia entre dos variables, es decir; crear funciones, y todo esto con el fin de interpretar mejor la naturaleza en que vivimos.

El Cálculo Diferencial es un tema de las Matemáticas que proporciona un sólido aparato simbólico para representar la variación y el cambio con el que se matematiza diversas clases de fenómenos naturales, amplía el universo de formas gráficas al asociar a cada expresión algebraica una representación geométrica. Se ofrece a estudiantes que hayan cursado álgebra y geometría analítica en el ciclo de enseñanza media superior y maneja temas tales como: los números reales, desigualdades, funciones y sus gráficas, límite de una función, valores máximo y mínimo de una función, entre otros. Un preámbulo a esta

materia se inicia en el cuarto semestre, en donde se otorga un mayor énfasis a que el estudiante recupere lo más significativo del Álgebra y de la Geometría Analítica que le servirá de soporte para iniciar con los aspectos más elementales de este tema de Matemáticas; pero es hasta el tercer año en donde es más probable que el estudiante reúna una mayor consolidación algebraica para empezar de lleno en este tema.

Retomando el planteamiento del problema nos obliga a reflexionar sobre la necesidad imperiosa de cumplir adecuadamente con esta parte del programa oficial de Matemáticas, que es la graficación de funciones algebraicas y de la responsabilidad que esto conlleva ya que durante el tercer año de estudio de esta Preparatoria, este tema será un soporte fundamental en el cálculo de áreas, volúmenes generados con funciones algebraicas, entre otros más; por otro lado, la **graficación de funciones algebraicas**, estudia los procesos que se llevan a cabo para la representación gráfica de una función algebraica y la interpretación de la misma en algunos aspectos relevantes, entre otros tenemos, intervalos donde es creciente o decreciente, sentido en la concavidad y puntos de inflexión.

Con esta información, es posible establecer una relación entre aprendizaje y lo referente a las funciones algebraicas, con el fin de identificar nexos entre ambos y comentar algunos estudios realizados en esta línea.

Por ejemplo, existe un estudio realizado en 1993 por el mexicano Ricardo Cantoral, titulado: “Hacia una didáctica del cálculo basada en la cognición”, en donde hace patentes algunas dificultades cognitivas generadas en el estudiante que se enfrenta al estudio del cálculo, además, de algunas evaluaciones sobre conocimientos y habilidades matemáticas de un grupo de estudiantes al ingresar a la educación superior en 1991-1992 y en 1992-

1993, que muestran algunas deficiencias en la cultura matemática de los estudiantes. Otro estudio referente a este tema es titulado: “Acerca de la noción de tangente”, que se encuentra en notas del departamento de matemáticas del ITAM (Alvarez, M. y Cantoral, R.,1992), este estudio es importante ya que uno de los conflictos con que se enfrenta el estudiante en la gráfica de una función es el manejo del concepto tangente, al intentar graficarla con algunos parámetros conocidos relacionados con el Cálculo Diferencial. Un estudio internacional aparece en : “The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy (Guershon Harel y Ed Dubinsky, 1992). Este estudio proporciona un marco de perspectivas recientes en investigación sobre las concepciones de función en estudiantes de nivel medio superior y superior en Estados Unidos de Norteamérica. Menciona algunas dificultades que se presentan al intentar resolver problemas de Cálculo debido a la pobre visualización de la situación gráfica que posee el estudiante y en ocasiones a la concepción errónea que se crea el estudiante del concepto de función. Esto proporcionado en muchas ocasiones, por la débil cátedra del profesor que en las más de las veces se aleja del contexto real en donde vive el estudiante, y en otras, no domina adecuadamente estos conceptos. Se consideran de suma importancia para esta investigación el estudio titulado: “Hacia una didáctica del cálculo basado en la cognición” y “The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy”, ya que reúnen evidencia de algunos aspectos en particular, que proporcionarán un fuerte soporte a este estudio.

Volviendo a hacer énfasis en el planteamiento del problema de investigación ¿Cuáles son los factores que facilitan el aprendizaje en la graficación de funciones algebraicas en el tercer año de Matemáticas en la Escuela Preparatoria Federal por Cooperación Activo 20-30, “Albert-Einstein de Cd. Delicias, Chihuahua?”, con el fin de delimitarlo, es oportuno,

expresar que el contexto más amplio en que se efectúa el estudio es el aprendizaje de las matemáticas y dentro de éste están los aprendizajes en los diferentes temas de matemáticas, entre los que se encuentra el aprendizaje de funciones algebraicas, y el caso específico es el aprendizaje en la graficación de funciones algebraicas en la Escuela Preparatoria Federal por Cooperación Activo 20-30, “Albert-Einstein” de Cd. Delicias, Chih., dentro del bachillerato con especialidades; específicamente en la especialidad de físico-matemático y concretamente a los terceros años ubicados en los grupos: C, D, G-I y J del ciclo escolar agosto-diciembre de 1997 y febrero-junio de 1998.

El tiempo real que se tiene planeado para este estudio es de un año, se analizará el ciclo escolar agosto-diciembre de 1997 y también el ciclo escolar febrero-junio de 1998 ya que la graficación de funciones algebraicas incide directamente en el aprendizaje de algunos temas básicos de la materia de Matemáticas en el último ciclo escolar.

A continuación se profundizará en algunas realidades específicas sobre las que se realiza este estudio.

El universo o muestra en donde se pretende realizar esta investigación se ubica en la Escuela Preparatoria Federal por Cooperación Activo 20-30, Albert-Einstein, su dirección, calle 21 norte y Ave. Carlos Blake no. 2100, en Cd. Delicias, Chihuahua. Esta institución pertenece al subsistema de Preparatorias Federales por Cooperación, que se fundaron en 1940 como una necesidad planteada por ciudades del país, que no eran capitales de estado, y que no contaban con el nivel medio superior, independiente del sistema universitario que

se encontraba establecido en las capitales de los estados. El proyecto fue aceptado por el entonces presidente de la república General Lázaro Cárdenas.

Ciudad Delicias se encuentra ubicada en la región centro sur del estado de Chihuahua a 88 km, al sur de la capital del estado. Cuenta con una población aproximada de 110,000 habitantes. La Escuela Preparatoria Activo 20-30 ofrece sus servicios a estudiantes de los municipios vecinos (Rosales, Meoqui, Julimes, Saucillo, Camargo, Parral, entre otros), de los cuales casi todos se concentran en el turno matutino.

Esta preparatoria se fundó en 1961, hasta la fecha ha ofrecido 34 generaciones de bachilleres a la sociedad del país, sus egresados están incluidos en el medio político, social y económico del mismo; se rige con el plan de estudios elaborado, programado y controlado por la Secretaría de Educación Pública, para el nivel medio superior.

Ofrece un bachillerato general, a partir de 1972 con capacitación para el trabajo, según el acuerdo 71 de la Asociación Nacional de Universidades e Institutos de Educación Superior, en reunión llevada a cabo en Villahermosa, Tabasco.

En 1993 se modificó el plan de estudios teniendo como resultado el currículum marco básico nacional, que permite al estudiante de los dos últimos semestres tomar asignaturas de fortalecimiento en el área propedéutica, en lugar de llevar una capacitación específica para el trabajo. En este plantel existen las capacitaciones para el trabajo de: Dibujo arquitectónico, laboratorio químico, contabilidad e informática, y en fortalecimiento se

ofrece el área físico-matemático y el área económico-administrativo-social, éstas se reciben a partir del quinto semestre.

La institución cuenta con una planta de personal conformada por un director, un subdirector, sesenta docentes, dos orientadores, un contralor, nueve administrativos, tres en servicio de prefectura y tres trabajadores manuales.

La planta física de la escuela la constituye un edificio de dos niveles, el inferior se conforma de oficinas y espacios para el cuerpo docente y administrativo y en el superior se encuentra la biblioteca que brinda un servicio normal a los estudiantes pero aparte se dispone de quince computadoras conectadas a internet para consulta de los mismos; 17 salones, una cafetería, una sala de conferencias, dos aulas de computación, una aula equipada para la asignatura de inglés y una aula remota del sistema SEIS (sistema de educación interactiva por satélite) del ITESM (Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey), en donde se imparte la maestría en educación que actualmente cursamos cinco profesores de esta escuela.

Para este ciclo escolar agosto-diciembre de 1997, se encuentran inscritos aproximadamente 1700 alumnos, ubicados en 12 grupos de primer semestre, 12 grupos de tercer semestre y 10 grupos de quinto semestre, repartidos en dos turnos.

El universo o muestra más específico de esta investigación lo constituye los alumnos de tercer año con especialidad en físico-matemáticas ubicados de la siguiente manera: el grupo C dentro del paquete I con capacitación compuesto por 30 alumnos, 17 en informática y 13 en dibujo arquitectónico y de construcción; el grupo D dentro del paquete

I con fortalecimiento, compuesto por 41 alumnos, el grupo G-I dentro del paquete I con fortalecimiento, compuesto por 22 alumnos del grupo G y 6 alumnos del grupo I; por último el grupo J dentro del paquete I con fortalecimiento, compuesto por 47 alumnos; los dos primeros grupos en el turno matutino y los restantes en el vespertino. Podemos decir entonces, que el universo total de este estudio lo conforman 146 estudiantes.

Por otro lado, el programa de Matemáticas de tercer año maneja temas ubicados en el Cálculo Diferencial, entre otros están, los números reales, desigualdades, funciones y sus gráficas, límite de una función, valores máximo y mínimo de una función y derivadas algebraicas.

Entre las competencias a desarrollar a través del programa de Cálculo Diferencial de tercer año de esta Preparatoria están:

- Reconocer el Cálculo Diferencial como una eficaz herramienta para abordar problemas de optimización.
- Reconocer la importancia del proceso de graficación de una función en la solución de problemas prácticos.
- Adquirir destreza en la resolución de derivadas de funciones de varios tipos.
- Aplicar en la vida cotidiana los conocimientos de las diferentes disciplinas y ciencias en la resolución de problemas con base en principios, leyes y conocimientos básicos.
- Interpretar de manera reflexiva y crítica, el quehacer científico, su importancia actual, futura, y tomando conciencia del impacto social, económico y ambiental del desarrollo tecnológico.

Se hace necesario, expresar que la muestra específica de esta investigación la constituyen los grupos C, D, G-I y J cuya especialidad se encuentra ubicada en fisico-matemático y la constituyen estudiantes con intenciones de continuar una carrera relacionada con áreas afines.

CAPÍTULO 3

OBJETIVOS

Objetivo General. Analizar detalladamente aquellos factores que inciden de manera positiva en el aprendizaje de la graficación de funciones algebraicas, tema que se imparte a los alumnos de quinto semestre del nivel de bachillerato en la escuela preparatoria federal por cooperación activo 20-30 de Cd. Delicias, Chih., con la finalidad de poder proporcionar algunas líneas didácticas que nos permitan facilitar este aprendizaje. Dichos factores que influyen en el aprendizaje de los alumnos son: el aprendizaje significativo, la motivación y la retroalimentación.

Al expresar “analizar detalladamente aquellos factores”, se quiere decir con ello que se llevará a cabo un estudio profundo de cada uno de los componentes que intervienen en estos factores con la finalidad de demostrar su relación con el aprendizaje en la graficación de funciones algebraicas. Es propósito de este objetivo general realizar un análisis cuidadoso y profundo de los factores considerados como facilitadores de este tipo de aprendizaje con la finalidad de conocer todas sus características y la forma de vincularlas para ponerlas en práctica y facilitar el aprendizaje de este tema en cuestión. Esto nos llevará a proporcionar algunos lineamientos didácticos que nos conduzcan a generar mejores aprendizajes en la graficación de este tipo de funciones.

Por un lado, se analizará el aprendizaje significativo como un agente de cambio necesario en la enseñanza moderna, en la cuál, los adelantos científicos y tecnológicos

requieren de una forma de aprender que provoque un cambio en la estructura cognitiva del estudiante, pero que ese cambio le sea significativo y duradero a largo plazo; se hace necesario analizar las funciones y las consecuencias que provoca la motivación que podamos brindarle al estudiante durante este proceso y por último se analizará la retroalimentación, como un proceso básico y necesario en la enseñanza de nuestros días, ya que ésta ofrece momentos muy valiosos que motivan la reflexión en el profesor, para establecer una búsqueda permanente de mejores estrategias didácticas, especialmente en los aspectos particularmente difíciles para el estudiante.

Es importante aclarar, que no se quiere decir que estos sean los únicos factores facilitadores de este aprendizaje, sino, son aquellos factores que desde nuestro punto de vista nos parece relevante el demostrar la relación entre ambas partes.

Por otro lado, el planteamiento del problema de investigación fracciona la realidad en los pensamientos del investigador con la finalidad de dirigir su atención a una parte específica de esa realidad ...el hombre de ciencia no puede investigar exhaustivamente la realidad concreta, puesto que la mente humana es finita, el acercamiento a los fenómenos tiene que ser selectivo (Pompeya Elvira García Alba, Bladimir Reyes Córdoba, 1990).

Objetivos específicos.-

- a) Diseñar de una manera adecuada aquellos instrumentos que nos permitan facilitar el aprendizaje en la graficación de funciones algebraicas en los alumnos de tercer año de preparatoria.

- b) Distinguir las diferencias individuales de aprendizaje en los alumnos que cursan el tercer año de preparatoria.
- c) Mejorar el nivel de aprovechamiento en el aprendizaje de la graficación de funciones algebraicas.

El primer objetivo consiste en formular un plan de estrategias que organizadas de manera adecuada nos conduzcan hacia nuestra meta, tomando en cuenta los factores antes mencionados y que consideramos facilitan este aprendizaje, que son: aprendizaje significativo, motivación y retroalimentación. Como se mencionó anteriormente, este plan debe ser flexible y debe irse adecuando de acuerdo al contexto real en que se lleve a cabo, debe irse enriqueciendo con todo aquello que resulte inesperado y que coopere de manera positiva al proceso de enseñanza-aprendizaje.

El segundo objetivo se refiere a la necesidad de conocer quiénes de nuestros alumnos tienen más habilidad para el aprendizaje de la graficación de funciones algebraicas, con el fin de utilizarlos como sub-guías de aprendizaje en los procesos de retroalimentación, o en los procesos diarios de clase. ¿Cuántas veces no sucede que varios alumnos consecutivamente terminan más rápido que otros los ejercicios que se dan en clase?. Estos alumnos podrían ser utilizados de manera adecuada para conducir ciertos procesos de enseñanza-aprendizaje donde resulten beneficiados ellos y sus compañeros de más lento aprendizaje.

El último objetivo refleja la interrelación de los objetivos anteriores y por ende la meta que se persigue, mejorar el nivel de aprovechamiento en el aprendizaje de la graficación de

funciones algebraicas, es decir, consolidar las herramientas necesarias en el estudiante que le permitan manejar una función algebraica desde la comprensión de la esencia de su expresión hasta su graficación en un sistema de ejes cartesianos, dando razón de su interpretación gráfica.

CAPÍTULO 4

HIPÓTESIS

El problema de investigación se inició con la pregunta ¿Cuáles son los factores que facilitan el aprendizaje en la graficación de funciones algebraicas en el tercer año de Matemáticas en la Escuela Preparatoria Federal por Cooperación Activo 20-30, Albert-Einstein de Cd. Delicias, Chih.?

La forma en que se pretende dar una respuesta a este problema es afirmando que existe una relación entre las variables del problema de investigación, y que también son las variables de la hipótesis.

La hipótesis queda: Los factores principales que facilitan el aprendizaje en la graficación de funciones algebraicas en el tercer año de Matemáticas en la Escuela Preparatoria Activo 20-30, Albert-Einstein de Cd. Delicias, Chih. son: aprendizaje significativo, motivación y retroalimentación.

Se conformará esta única hipótesis en donde existen dos variables, una independiente y la otra dependiente; los factores principales, forman la **variable independiente** y el aprendizaje en la graficación de funciones algebraicas en el tercer año de la Escuela Preparatoria Federal por Cooperación Activo 20-30, Albert-Einstein de Cd. Delicias, Chih. forma la **variable dependiente**; de tal manera que el aprendizaje en la graficación de las

funciones algebraicas dependerá de la calidad de los factores involucrados, se hace referencia a: aprendizaje significativo, motivación y retroalimentación.

Se consideran estos tres factores como facilitadores del aprendizaje en la graficación de funciones algebraicas. La exposición de los temas utilizando el aprendizaje significativo, la motivación que podemos brindar a nuestros alumnos como una fuente de energía necesaria en la resolución de gráficas de funciones y por último la retroalimentación como el proceso necesario y vital para asegurar en nuestros estudiantes un mejor logro de nuestros fines educativos, estos factores se comentarán con más profundidad en el siguiente apartado.

CAPÍTULO 5

MARCO TEÓRICO

Para resolver el problema de investigación nos apoyaremos fundamentalmente en dos teorías: “Aprendizaje Significativo” de Ausubel y “La teoría de la Motivación”, ésta última principalmente desde el enfoque cognoscitivo, realizaremos una recopilación documental sobre las opiniones de diversos autores, tanto de libros de texto, artículos y manuales que versan sobre el aprendizaje y sobre la graficación de funciones algebraicas que tanto influyen en el desarrollo del cálculo infinitesimal en el tercer año de bachillerato y en los primeros años de educación superior afines a esta disciplina; se efectuará un examen crítico de estas fuentes, teniendo presente que, ...cuando se utilizan datos que provienen de más de una fuente o de fechas diferentes, debe tenerse la seguridad de que sean comparables. Para evitar errores, recuérdese que no existe comparabilidad, al menos en estos casos: si se han usado diferentes definiciones. En ciertas estadísticas que se extienden a lo largo del tiempo, el cambio de definición rompe la continuidad de la serie... (Ander-Egg, Ezequiel, 1996).

Entre los autores que manejan el aprendizaje significativo de Ausubel y aspectos relacionados con la teoría de la motivación y la retroalimentación, tenemos a: Anita Woolfolk, Gimeno Sacristán, A. I. Pérez Gómez, Martha Cassarini, Orlich, Teresa Almaguer, Marisa Martín, Carlos Ornelas, entre otros. Se manejan estudios de investigación referentes al tema de graficación de funciones algebraicas realizadas por personal que pertenece al Cinvestav, dentro del área de matemática educativa en el IPN,

entre otros tenemos a: El curso de pre-cálculo: un enfoque gráfico (Rosa María Farfán, 1991), Variable y variación: estudio del envejecimiento de sus situaciones de enseñanza (Ricardo Cantoral, Evelia Reséndiz, 1995), ¿Qué es la matemática educativa? (Carlos Imaz, 1987), Ausencia de conceptos en los cursos de cálculo diferencial (Teresa C. Codocedo, 1992), Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo (Francisco Cordero, 1997) y Hacia una didáctica del cálculo basada en la cognición (Ricardo Cantoral, 1993).

A continuación se analizará cada parte del problema de investigación, tratando de darle una ubicación a cada una de ellas, relatando algunas de las teorías a que se hace referencia y finalmente se mostrará la relación o la aplicación directa que tienen en el problema.

Al mencionar los factores que facilitan el aprendizaje, se tendrá que realizar la siguiente pregunta, ¿Qué se entiende por factores?: el término factores denota cuáles son los elementos con causa, que influyen en un determinado proceso interviniendo sobre él y modificándolo de alguna manera. ¿A cuáles factores nos referimos?: existen múltiples factores que intervienen en un proceso de aprendizaje, algunos de ellos son: el clima en el salón de clases, planeación de la clase, maestros novatos y maestros expertos, la motivación, la retroalimentación, diferentes tipos de aprendizaje, diferencias individuales, nivel de maduración del estudiante, nivel de conocimientos previos, entre otros. Los factores específicos a los que se refiere la investigación y que facilitan el aprendizaje son: exposición de los temas utilizando el aprendizaje significativo, la motivación y la retroalimentación. Y qué se entiende por facilitar?: por facilitar se entiende el hacer posible

la ejecución de este proceso, es decir, hacerlo sencillo, cómodo, que suceda con mucha probabilidad y que parezca haber sido hecho sin mucho esfuerzo.

Antes que nada se tendrá que establecer ¿Qué es el aprendizaje?, el aprendizaje implica siempre un cambio en la persona que está aprendiendo, ...el aprendizaje es un cambio que ocurre en la persona como resultado de la experiencia (Anita Woolfolk, 1990), existen opiniones al respecto que toman en cuenta la conducta del individuo, ...el aprendizaje es un cambio en la conducta, en la forma como actúa una persona ante una situación particular (Anita Woolfolk, 1990). Otros autores, ...consideran el aprendizaje como un proceso de donación de sentido, de significado, a las situaciones en que se encuentra el individuo (J. Gimeno Sacristán, A. I. Pérez Gómez, 1995), otra opinión que considera el medio en que éste se lleva a cabo establece que, ...es un proceso de adquisición en el intercambio con el medio, mediatizado por estructuras reguladoras al principio hereditarias, posteriormente construidas con la intervención de pasadas adquisiciones (J. Gimeno Sacristán, A. I. Pérez Gómez, 1995). Lo anterior indica que existen puntos de vista muy variados respecto a la naturaleza del aprendizaje, es decir, existen varios enfoques o teorías sobre el aprendizaje; por propósitos particulares de nuestro estudio, centraremos nuestra atención a dos corrientes principales: la **conductista** y la **cognoscitivista**. El enfoque conductista, lo constituyen las teorías que se centran en la conducta observable, de acuerdo con este grupo, el aprendizaje es un cambio en la conducta, en la forma como actúa una persona ante una situación particular. Teóricos como J. B. Watson, E. L. Thorndike y B. F. Skinner son considerados psicólogos conductistas porque se han dedicado, casi en forma exclusiva, al estudio de las conductas observables y los cambios conductuales. Para ellos los aspectos que no pueden observarse directamente tales como

las emociones y el pensamiento no adquieren relevancia en un proceso de aprendizaje. La teoría conductista es una teoría unificada, en el sentido que sólo acepta un modelo de aprendizaje.

Las teorías cognoscitivistas son aquéllas que se centran en los aspectos mentales del individuo. Los teóricos cognoscitivistas creen que el aprendizaje es el resultado de nuestros intentos de darle sentido al mundo. Para esto, usamos todas las herramientas mentales a nuestro alcance. La forma en que pensamos acerca de las situaciones, además de nuestras creencias, expectativas y sentimientos, influyen en lo que aprendemos y en cómo lo aprendemos. Entre los teóricos cognoscitivistas tenemos a Jean Piaget, Robert Glaser, John Anderson, Jerome Bruner y David Ausubel.

El enfoque cognoscitivo no es una teoría unificada, como lo es el conductista, ...esto significa que los teóricos cognoscitivistas comparten nociones básicas acerca del aprendizaje y la memoria pero, de ninguna manera, concuerdan con la idea de un sólo modelo de aprendizaje (Anita Woolfolk, 1990).

En este sentido me avocaré más a las teorías cognoscitivistas, particularmente al aprendizaje significativo, sin descartar la posibilidad de utilizar en ocasiones algunas estrategias de la teoría conductista tales como la necesidad de elicitar algunas conductas a través del reforzamiento, esto nos será de gran utilidad en el aprendizaje de algunas gráficas sencillas indispensables para construir otras más complejas en el terreno del cálculo diferencial.

Los modelos cognoscitivos se ocupan del estudio de los procesos mentales del individuo cuando este interviene en un proceso de información, preguntas del tipo: ¿Cómo pensamos?, ¿Cómo recordamos?, ¿Cómo aprendemos? Y muchas otras han motivado una gran cantidad de investigación en el área de la cognición, en particular por la llamada Psicología Cognoscitiva, dentro del marco amplio de la Psicología Educativa, ...los modelos cognoscitivos se preguntan por las fases o etapas de desarrollo del individuo atendiendo a todos los cambios que ocurren como resultado no sólo de la edad, sino también del aprendizaje, ya que ambos factores son fuentes esenciales en el comportamiento humano. Bajo esta perspectiva, es de gran importancia el estudio de los procesos relacionados con la memoria, el razonar, el lenguaje, la creatividad y la habilidad para tomar decisiones y resolver problemas (Teresa Almaguer, 1996).

Otro autor establece que la teoría cognoscitiva, se empezó a reconocer como una de las grandes teorías en psicología en los años sesenta basándose en los principios de la escuela estructural funcionalista y en el método de investigación experimental que permitiera la explicación de los procesos subyacentes de comportamiento y se consagraron a la también investigación de los procesos cognoscitivos que presenta el ser humano, ...El cognoscitivismo, pues, asume como tarea el estudio científico de los procesos cognoscitivos que permiten al individuo el manejo y la asimilación de información, de manera objetiva y analítica, con la ayuda de una metodología que permita la comprobación experimental de las hipótesis apoyándose en una teoría de la medición que permita medir estos procesos (Estela Ruiz, 1995).

La teoría cognoscitiva considera la mente humana como un procesador de información activo e individual. Ciertamente, aquí se lleva a cabo el pensamiento activo, influido por sentimientos, creencias y conocimientos existentes, unidos a su vez, para actuar sobre la estructura de pensamientos nuevos. Este enfoque considera a la persona como un procesador de información activo cuyas experiencias lo lleven al conocimiento, a buscar información para la solución de problemas y reorganizar lo que ya sabe para adquirir nuevos conocimientos, ...El enfoque cognoscitivista sugiere también que una de las influencias más importantes en el proceso del aprendizaje es lo que el individuo aporta a la situación misma del aprendizaje. Los psicólogos cognoscitivistas se han interesado cada vez más en el papel del conocimiento previo en el aprendizaje. Lo que ya sabemos determina, en gran medida, lo que aprenderemos, recordaremos u olvidaremos...(Anita Woolfolk, 1990).

La graficación de funciones algebraicas, junto con el correspondiente análisis de los conceptos que se refieren a ella están presentes de manera continua en el nivel de bachillerato en los semestres quinto y sexto en Cálculo Diferencial e Integral, respectivamente, de ahí, la necesidad de que este aprendizaje se realice de manera que pueda perdurar por más tiempo en la memoria del estudiante y le sea significativo, por eso un factor que hemos considerado como facilitador del aprendizaje en la graficación de funciones algebraicas es la exposición de los temas utilizando el **aprendizaje significativo**. Ausubel se ocupó del aprendizaje escolar, fundamentalmente para él es ...un tipo de aprendizaje que alude a cuerpos organizados de material significativo...(Gimeno Sacristán, A. I. Pérez Gómez, 1995). El aprendizaje significativo, ya sea por recepción o por descubrimiento se opone al aprendizaje mecánico, repetitivo,

memorístico. Comprende la adquisición de nuevos significados, la clave de este aprendizaje reside en la vinculación sustancial de las nuevas ideas y conceptos con la información cognitiva del estudiante, ...la esencia del aprendizaje significativo reside en que las ideas expresadas simbólicamente sean relacionadas de modo no arbitrario, sino sustancial con lo que el alumno ya sabe. El material que aprende es potencialmente significativo para él (Gimeno Sacristán, A. I. Pérez Gómez, 1995).

El material aprendido en forma significativa es menos sensible a las interferencias a corto plazo y mucho más resistente al olvido.

En las materias de Cálculo Diferencial y Cálculo Integral el estudiante se encuentra ante ideas que requieren de símbolos, estrategias y concepciones nuevas, haciendo referencia particularmente al tema de función es uno de los que más simbolismos y concepciones nuevas contienen, desde este punto de vista, se recomienda que el profesor aborde estos temas utilizando el aprendizaje significativo, es tarea del profesor elaborar las actividades de enseñanza-aprendizaje en donde busque incorporar los conocimientos previos del estudiante sobre cierto tema en particular, en vez de que realice un trabajo expositivo empleando terminología que el estudiante desconoce, ...un profesor de cálculo a nivel de bachillerato (posiblemente egresado de una carrera de matemáticas o en ingeniería), va a tratar con sus alumnos el tema de continuidad; en el mejor de los casos motivará el tema con una discusión informal en el curso de la cual se manejarán ideas intuitivas del concepto, este tipo de ideas intuitivas suelen ser las mismas que matemáticos como Euler o Arbogast manejaron a nivel conceptual sin que el mundo se les viniera encima. Los alumnos generalmente captan la idea, pero el profesor no parará allí, quizá porque el

programa del curso así lo señala o quizá se siente obligado a poner al alcance de sus alumnos el concepto moderno de continuidad que a él le enseñaron, sea como fuere, pasará a la definición...” si dado ϵ arbitrario existe δ tal que”...los alumnos han dejado de entender, posiblemente se establezca una discusión que resulte generalmente estéril por lo poco que tiene de motivador para los alumnos y, en ocasiones, el profesor no tiene el concepto bien aclarado y sólo logra incrementar la confusión (Carlos Imaz, 1987).

Volviendo a hacer énfasis en el aprendizaje por repetición o mecánico (teoría conductista) con el afán de compararlo con una de las intenciones de este estudio, que es el aprendizaje significativo, se tiene que, el aprendizaje por repetición se da cuando la tarea de aprendizaje consta de puras asociaciones arbitrarias; si el alumno carece de conocimientos previos relevantes y necesarios para hacer que la tarea de aprendizaje sea potencialmente significativa; y también si el alumno adopta la actitud simple de internalizarla de modo arbitrario y al pie de la letra, tales como los símbolos utilizados para representar los elementos químicos o el vocabulario de un idioma extranjero, ...el aprendizaje por repetición, de listas de sílabas sin sentido o de adjetivos apareados arbitrariamente, podrá ser característico de muchos estudios de investigación efectuados en el laboratorio de psicología, pero representativo de muy pocas tareas reales dentro de los salones de clase modernos (David Ausubel, 1976). En contraparte, en el aprendizaje significativo se comprende la adquisición de nuevos significados, incorporando los conocimientos previos del estudiante, realizando un vínculo entre las nuevas ideas o conceptos y su estructura cognoscitiva.

En lo que concierne al aprendizaje en el salón de clases es evidente que el aprendizaje significativo es más importante que el aprendizaje por repetición. Lo mismo dentro que fuera del salón de clases, éste constituye el medio principal de adquirir grandes cuerpos de conocimiento.

Por ejemplo, pensemos que estamos impartiendo una clase en un curso de geometría analítica y específicamente ubiquémonos en el tema que trata la graficación de parábolas con vértice en el origen, si se muestra al alumno una serie de ecuaciones tales como, $y=x^2$, $2y=3x^2$, $ay=bx^2$, y se les menciona que estas formas, son típicas de parábolas con vértice en el origen y que abren hacia arriba, seguramente ellos internalizarán esta información tal cual es y si se les pide ellos generarán otras ecuaciones, pero hasta ahí ellos no han incorporado sus conocimientos previos, este es un ejemplo de aprendizaje repetitivo. Pero si se muestra cómo este aprendizaje puede ser más significativo para el estudiante, seguramente se observarán algunas diferencias:

Si se aprovechan los conocimientos previos del estudiante referentes a la ubicación de puntos en un sistema de coordenadas cartesiano y a la graficación de una línea recta con la relación directa del grado de su ecuación; esto es por cada “x”, resultará una “y” y por ende como resultado se tendrá una relación lineal en su gráfica. Así, aprovechando el grado de la ecuación de una parábola, ejemplo: $y=x^2$, se puede decir que por cada “y” positiva en la gráfica resultarán dos valores iguales (en valor absoluto) para “x”, originando así una parábola que abre hacia arriba, esto conllevará desde nuestro punto de vista a ser más significativo para el estudiante el reconocer o identificar una ecuación tal como $y=x^2$ relacionándola con su gráfica correspondiente. Esto seguramente servirá de

provecho para preguntarle al estudiante por las gráficas de otras ecuaciones afines, tales como, $y^2=x$ o $y^2=4x$.

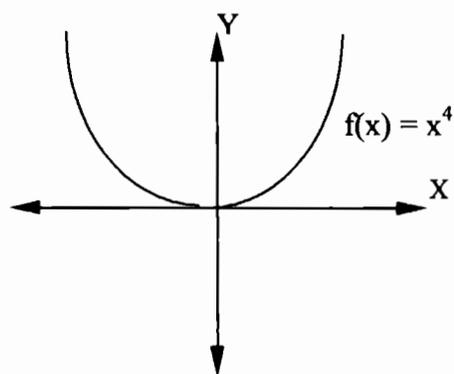
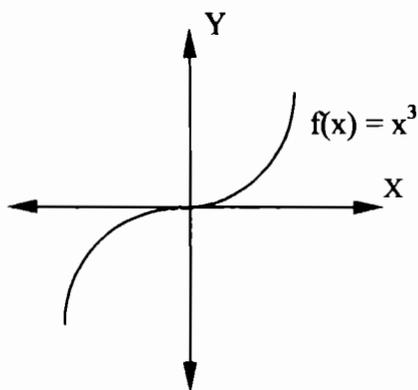
El aprendizaje significativo se divide en: aprendizaje significativo **por descubrimiento** y aprendizaje significativo **por recepción**. El rasgo esencial del aprendizaje por descubrimiento, es que el contenido principal de lo que va a ser aprendido no se da, sino que debe ser descubierto por el alumno antes de que pueda incorporar lo significativo de la tarea a su estructura cognoscitiva. En otras palabras, la tarea de aprendizaje distintiva y previa consiste en descubrir algo: la naturaleza exacta de la relación entre dos variables, por ejemplo. La primera fase del aprendizaje por descubrimiento involucra un proceso muy diferente al del aprendizaje por recepción. El alumno debe reordenar la información, integrarla con la estructura cognoscitiva existente, y reorganizar o transformar la combinación integrada de manera que se produzca el producto final deseado o se descubra la relación entre medios y fines que hacía falta. Después de realizado el aprendizaje por descubrimiento, el contenido descubierto se hace significativo.

Otro ejemplo, en donde he relacionado los conocimientos previos sobre algunas gráficas de funciones, intentando que el estudiante descubra una relación entre medios y fines, es el siguiente:

Dadas las funciones, $f(x) = x^3$ y $f(x) = x^4$, se trata de investigar, ¿Cuál es el efecto del parámetro “h” en las gráficas de $f(x) = (x+h)^3$ y $f(x) = (x+h)^4$?

El problema consiste en, indagar si este parámetro “h” altera totalmente el comportamiento gráfico de la función inicial, convirtiéndola en otra diferente; o, si resulta una gráfica similar. Consideremos $h=2$ para $f(x) = (x+h)^3$ y $h=-2$ para $f(x) = (x+h)^4$ con el fin de incluir otra variante en el ejercicio.

Las gráficas de las funciones iniciales son:

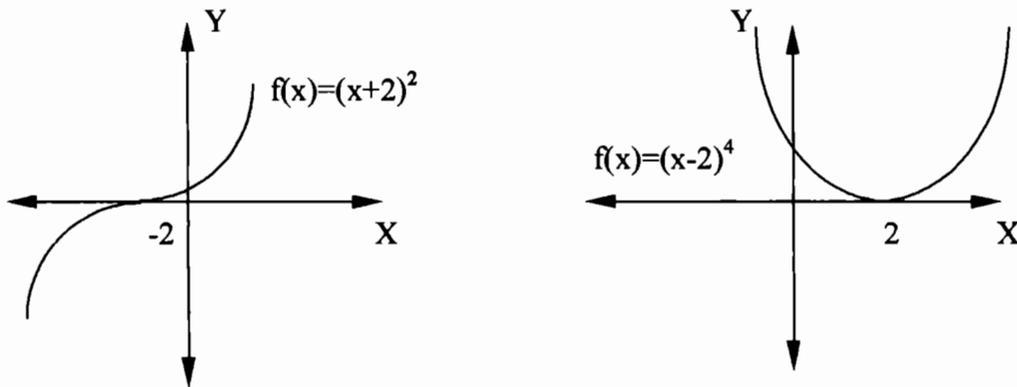


Aquí, los conocimientos previos a incorporar en el proceso, son básicamente las gráficas anteriores y sus respectivos mecanismos de construcción, se trata de que con esta información, el estudiante intente descubrir el efecto que le provoca a cada función la suma del parámetro “h” en la variable independiente; primero, graficando, después comentando entre sus compañeros y posteriormente, formalizando una discusión grupal, en donde por supuesto, el profesor juega un papel central, escuchando y valorando las respuestas de sus estudiantes.

Así, se ha de descubrir la relación entre $f(x) = x^3$ y $f(x) = (x+h)^3$ que en un principio nos propusimos, la cuál resulta en gráficas similares con desplazamientos horizontales respecto

de la función inicial. Según esta teoría de aprendizaje, el conocimiento descubierto resulta potencialmente significativo para el estudiante.

Las gráficas de $f(x) = (x+2)^3$ y $f(x) = (x-2)^4$ son:



Como se puede observar, estos desplazamientos horizontales resultan de la siguiente manera: si $h=2$, la gráfica de la función inicial se desplaza dos unidades hacia la izquierda y si $h=-2$, se desplaza dos unidades hacia la derecha.

En el aprendizaje por recepción, el contenido total de lo que se va a aprender se le presenta al alumno en su forma final. En la tarea de aprendizaje el alumno no tiene que hacer ningún descubrimiento independiente. Se le exige sólo que internalice o incorpore el material que se le presenta de modo que pueda recuperarlo o reproducirlo en fecha futura. En el aprendizaje por recepción significativo, la tarea o material potencialmente significativos son comprendidos durante el proceso de internalización. En este estudio sólo se hará referencia al aprendizaje por recepción ya que se considera potencialmente más importante para nuestras pretenciones que el aprendizaje por descubrimiento, ...la mayor parte de la enseñanza en el salón de clases está organizada conforme al aprendizaje por recepción (David Ausubel, 1976). No es nuestra intención que los alumnos realicen

ejercicios a la manera de seguir una receta de cocina, sin comprender los principios metodológicos y sustanciales subyacentes que intervienen; tampoco descubrir las respuestas correctas a problemas de matemáticas, sin entender lo que realmente se está haciendo. Muchos de los estudiantes logran esto último aprendiéndose “problemas-tipo” y procedimientos mecánicos para manipular símbolos algebraicos. Nos interesa que los procesos sean comprendidos de manera significativa por el estudiante y que perdure más tiempo en su estructura cognitiva, pero para que esto ocurra se deben satisfacer dos condiciones: primera, deben fundarse en conceptos y principios claramente comprendidos; y segunda, las operaciones constitutivas deben ser significativas por sí mismas. A continuación se analizará con más profundidad estas características del aprendizaje significativo.

Condiciones del aprendizaje significativo.

La esencia del proceso del aprendizaje significativo reside en que ideas expresadas simbólicamente son relacionadas de modo **no arbitrario** y **sustancial** (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe. Por relación sustancial y no arbitraria se quiere decir que las ideas se relacionan con algún aspecto existente específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición, ...el aprendizaje significativo **presupone** tanto que el alumno manifiesta una actitud de aprendizaje significativo; es decir, una disposición para relacionar sustancial y no arbitrariamente el nuevo material con su estructura cognoscitiva, como que el material que aprende es **potencialmente significativo** para él, es decir, relacionable con su estructura de conocimiento sobre una base no arbitraria y no al pie de la letra (Ausubel, 1961).

Así pues, independientemente de cuánto significado potencial sea inherente a la proposición particular, si la intención del alumno consiste en memorizar arbitraria y literalmente, tanto el proceso de aprendizaje como los resultados del mismo serán mecánicos y carentes de significado. Y, a la inversa, sin importar lo significativa que sea la actitud del alumno ni el proceso ni el resultado del aprendizaje serán posiblemente significativos si la tarea de aprendizaje no lo es potencialmente, y si tampoco es relacionable, intencionada y sustancialmente, con su estructura cognoscitiva.

De esta manera, para que la tarea de aprendizaje sea o no potencialmente significativa depende obviamente de dos factores principales: de la naturaleza del material que se va a aprender como de la naturaleza de la estructura cognoscitiva del alumno en particular. Retomando el **primer factor**, es decir, la naturaleza del material, éste debe tener significación lógica, esto es, que debe existir una relacionabilidad intencionada y sustancial del material de aprendizaje con las correspondientes ideas pertinentes que se hallan al alcance de la capacidad de aprendizaje del estudiante.

El **segundo factor** determinante de que el material de aprendizaje sea o no potencialmente significativo depende de la estructura cognoscitiva del alumno. Por consiguiente, para que ocurra realmente el aprendizaje significativo no basta con que el material nuevo sea intencionado y sustancialmente relacionable con las ideas correspondientes; es necesario también que tal contenido exista en la estructura cognoscitiva del alumno en particular, ...por lo que podemos afirmar, que la significatividad potencial del material de aprendizaje varíe no sólo con los antecedentes

educativos, sino con factores tales como la edad, disponibilidad, coeficiente intelectual, clase social y cultura determinada (David Ausubel, 1976).

Se considera importante realizar la siguiente pregunta ¿En qué momento el profesor hace explícita la dirección del aprendizaje? La respuesta sería, en los objetivos del programa, de ahí que un profesor ayude a la construcción de aprendizajes significativos a sus alumnos o sólo permita que se generen repeticiones de los conocimientos nuevos y a corto plazo se olviden. ¿Nos hemos planteado que nuestros alumnos sean autónomos? Este es un aprendizaje deseado por el maestro en base a las demandas sociales, o ¿Los conducimos a que sean conformistas?. El profesor, es un facilitador del proceso de aprendizaje, su meta establecida es el aprendizaje y esto implica un cambio que se da con una interacción en el medio de aprendizaje, de aquí que es responsabilidad del profesor ese cambio en el estudiante, por lo tanto deberá conducirlo en la dirección que considere la adecuada, ¿necesitamos formar alumnos que sólo repitan lo que aprenden? o ¿necesitamos formar alumnos participativos?.

Recapitulando, aprender significativamente es construir un significado propio y personal de un objeto de conocimiento que objetivamente existe a través de la conexión de los aprendizajes nuevos con los aprendizajes previos de la estructura cognoscitiva del alumno.

El segundo factor que analizaremos como facilitador del aprendizaje en la graficación de funciones algebraicas es la **motivación**. Respecto a la motivación, se puede decir que es ...la complacencia o gusto por dedicar una cierta cantidad de esfuerzo a realizar una tarea

(Marisa Martin, 1995). Otra opinión establece que ...la motivación se define usualmente como algo que energiza y dirige la conducta (Anita Woolfolk, 1990).

Los psicólogos que estudian la motivación se han centrado, por lo general, en tres preguntas: Primero, ¿Cuál es originalmente la causa de que una persona inicie alguna acción? Segundo, ¿qué provoca que una persona se dirija hacia una meta particular? Y Tercero, ¿por qué una persona persevera en sus intentos por alcanzar esa meta?

Se han sugerido respuestas muy diferentes que entremezclan distintos factores. Sin embargo, las principales explicaciones de la motivación tienden a caer en tres categorías: la cognoscitiva, la conductual y la humanística. A continuación se relatan estos tres puntos de vista:

Los **enfoques conductuales** de la motivación están basados en principios que fortalecen, mantienen o suprimen ciertas conductas, dependiendo del objetivo que se quiera conseguir. Este enfoque establece que si somos reforzados constantemente por ciertas conductas, podemos desarrollar hábitos o tendencias para actuar en cierta forma, ...por ejemplo: si a un estudiante se le recompensa repetidamente con afecto, dinero, felicitaciones o privilegios para obtener títulos de beisbol; pero recibe poco reconocimiento por estudiar, es probable que trabajará más tiempo y con más ahínco en perfeccionar su bola rápida que en entender geometría (Anita Woolfolk, 1990).

Esta motivación basada en la obtención de recompensas externas, es generalmente llamada motivación extrínseca. Otorgar puntos y calificaciones por aprender, es un intento por motivar a los estudiantes por medios extrínsecos o externos.

Por lo que respecta a los **enfoques cognoscitivistas** de la motivación, una de sus suposiciones centrales es que las personas no sólo responden a situaciones externas tal como lo maneja el enfoque conductual, sino que además también responden a sus percepciones de estas situaciones. En contraste con el enfoque anterior, el punto de vista cognoscitivista acentúa las fuentes intrínsecas (internas) de motivación, como la curiosidad, el interés por la tarea misma, la satisfacción de aprender y un sentimiento de triunfo.

Algunas teorías cognoscitivistas asumen que los humanos buscan un equilibrio en la necesidad de entender el ambiente que los rodea, el cuál, está basado en lo prioritario que resulta el asimilar información nueva y hacerla coherente con los esquemas cognoscitivos, es decir, con la necesidad de entender. En este enfoque las personas son consideradas como activas y curiosas, que buscan información para resolver problemas personales relevantes, que ignoran el hambre y soportan la incomodidad para centrarse en sus propias metas. La gente trabaja duro porque disfruta su trabajo y porque quiere entender.

Por último, los **enfoques humanísticos** de la motivación otorgan al igual que los cognoscitivistas, mucha importancia a la motivación intrínseca. Estas teorías humanísticas destacan el papel de las necesidades como un punto central, ...de acuerdo con Kolesnik (1978), una necesidad puede ser definida como “cualquier tipo de deficiencia en el

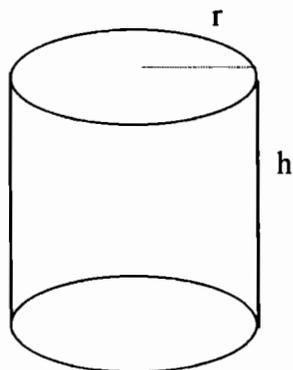
organismo humano o la ausencia de algo que la persona requiere, para su bienestar general” (Anita Woolfolk, 1990). Así estas teorías establecen que las conductas de los individuos pueden considerarse como el movimiento hacia las metas que se cree ayudarán a satisfacer esas necesidades. Una de las teorías humanísticas que trata este punto es la jerarquía de Maslow, Abraham Maslow sugirió que las necesidades humanas están jerarquizadas. Las necesidades del nivel más bajo, de sobrevivencia y seguridad, son las más esenciales. Es decir, una vez que estamos físicamente cómodos y seguros, somos estimulados para satisfacer las necesidades de los siguientes niveles cuando éstas están satisfechas, nos volvemos hasta lo que Maslow llama niveles de necesidades superiores, de logros intelectuales y finalmente la autorealización.

Esta teoría ha sido criticada, ya que las personas nos conducimos de maneras muy diferentes, existe gente que da la espalda a la seguridad o a la amistad para lograr conocimiento o mayor estima; pero también ha tenido implicaciones importantes para la educación. Es poco probable que los estudiantes que van a la escuela hambrientos o enfermos estén motivados para buscar conocimiento, lo mismo sucederá si el salón de clase es un lugar atemorizante, frío e impredecible, es probable que los estudiantes estén más preocupados por su seguridad que por aprender a graficar funciones algebraicas.

Después de analizar los tres enfoques, es necesario rescatar algunas partes de cada uno, ya que, resultan valiosas para este estudio de investigación. Por ejemplo, según el enfoque conductista se podría motivar a los alumnos otorgando recompensas (que pueden ser puntos sobre la calificación mensual) a quienes realizan muy buenas gráficas de funciones, claro que en este renglón el profesor debe cuidar los abusos; pero también, según el

enfoque cognoscitivista e incluso el humanístico, cuidar especialmente de aquellos estudiantes que fracasan en sus trabajos, destacando el progreso que el estudiante haya hecho en alguna área particular de su trabajo y fortalecer la conexión entre sus esfuerzos y sus realizaciones pasadas, es más probable que así el estudiante obtenga más control y confianza en sí mismo para sus trabajos futuros. Continuando con estos dos últimos enfoques, se hace necesario, que durante nuestra cátedra exista un clima de cordialidad, confianza y respeto, para que el estudiante se sienta seguro, tranquilo y probablemente más motivado hacia el aprendizaje. Así también dentro de este clima de clase, el profesor debe evitar a toda costa un clima tenso y rígido; él debe ser el primero en reflejar el gusto por la materia, pero no sólo un día o una semana, sino todos los días que se llame profesor, que aproveche su experiencia para relacionar los temas de matemáticas con la realidad en que vivimos, proporcionando así otro ingrediente de motivación hacia su materia.

Por ejemplo, el profesor puede hacer notar la relevancia que adquiere la gráfica de la función algebraica que se origina al formalizar la cantidad de material necesario para construir un bote cilíndrico de refresco (cerrado) de radio r y altura h , de 350 cm^3 de capacidad, de tal manera, que este material sea el mínimo empleado en su construcción. Sea “ M ” la cantidad de material empleado, se tiene:



$$M = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Realizando un cambio de variable, utilizando el volumen

$$M = 2\pi r^2 + 700r^{-1}$$

Los siguientes comentarios podrían ubicar a los estudiantes en este proceso de construcción:

Consideren una lata de refresco común y corriente, como las que conocen y supongan que se quieren construir dos latas más, una más alta que la anterior y otra más baja, pero que las tres conserven el mismo volumen; la pregunta sería: ¿ En las tres latas se utiliza el mismo material de construcción?

Las respuestas que más se escucharán, afirmarán que el material utilizado es el mismo, ya que las tres latas conservan el mismo volumen.

Esta es una buena oportunidad para demostrar lo contrario, acercarlos con las matemáticas a la realidad en que viven, y utilizar la gráfica de la función algebraica $M = 2\pi r^2 + 700r^{-1}$, así como su correspondiente proceso de derivación para hacer notar que con radio igual a $(175/\pi)^{1/3}$ centímetros se obtiene el bote óptimo (es decir, el que minimiza la superficie), mientras que con radio mayor o menor a éste, el material aumenta. Este ejemplo, nos muestra un clásico proceso de optimización, en donde algunas funciones algebraicas y sus respectivos desarrollos gráficos, se tornan centrales en su análisis e interpretación. Es, en este tipo de ejemplos, en donde el profesor, puede agregar

ingredientes motivacionales durante sus procesos de instrucción, logrando acercar al estudiante a una porción de la realidad en que vivimos.

Otro ejemplo, en donde he notado una particular motivación en algunos estudiantes, es el que se refiere al proceso mediante el cual se obtienen las ecuaciones que rigen el movimiento uniformemente acelerado de los cuerpos en la naturaleza, y que también son funciones algebraicas, en este caso, funciones que dependen del tiempo.

Podríamos iniciar nuestra plática, comentando a la derivada de una función como un proceso de variación, así, entender a la velocidad como la variación del desplazamiento con respecto al tiempo y a la aceleración, como la variación de la velocidad con respecto al tiempo. Consideremos un ejemplo típico de caída libre: un cuerpo cae libremente desde el reposo desde una cierta altura, considerando la aceleración de la gravedad a la constante $g = \pm 9.81 \text{ m / s}^2$, se trata de encontrar las ecuaciones que describan su movimiento, es decir, la velocidad y el desplazamiento como funciones del tiempo.

$$dv / dt = a$$

$$dv = a dt$$

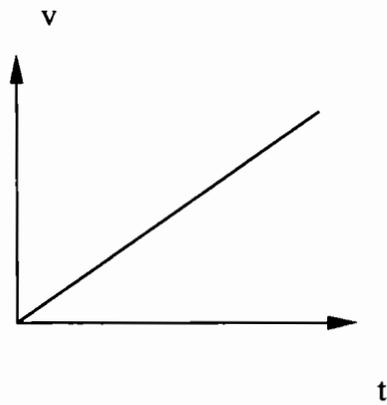
integrando se tiene

$$v = at + c_1$$

condición inicial para c_1 : $t=0$, $v=v_0$ (velocidad inicial), se obtiene

$$v = at + v_0,$$

su gráfica correspondiente considerando la aceleración positiva y $v_0=0$



de la misma manera

$$ds / dt = at + v_0$$

$$ds = (at + v_0) dt$$

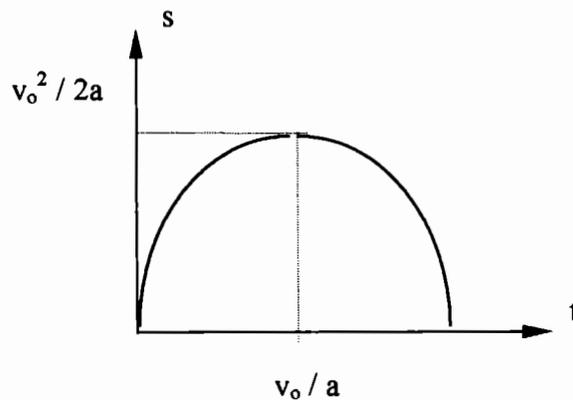
integrando se tiene

$$s = at^2 / 2 + v_0t + c_2$$

condición inicial para c_2 : $t=0, s=0$, resulta

$$s = v_0t + at^2 / 2, a = \pm 9.81 \text{ m} / \text{s}^2,$$

su gráfica correspondiente considerando un cuerpo lanzado hacia arriba ($v_0 \neq 0$)



Este es un buen momento para relacionar estas ecuaciones con funciones algebraicas, observar que una recta y una parábola representan el movimiento de los cuerpos en la naturaleza (con aceleración constante) y aprovechar sus contextos gráficos para obtener

algunos significados físicos, tales como, posiciones y velocidades después de “ t ” segundos, distancias recorridas en “ t ” segundos, alturas máximas alcanzadas, entre otros.

De esta manera, se pueden hacer notar algunas aplicaciones de las funciones algebraicas en algunos procesos de la realidad y se puede conseguir que las “ x ” y las “ y ” tradicionales en los procedimientos matemáticos cobren otro sentido y se tornen menos abstractos para nuestros estudiantes, así, ellos tendrán un panorama más fértil en significados; desde esta perspectiva, considero que existe una mayor probabilidad de que nuestros alumnos se encuentren más motivados durante los procesos de aprendizaje que intervienen en la graficación de funciones algebraicas.

Recordemos que esta investigación se realiza con estudiantes de nivel medio superior durante su último año de estudio, y que este tema de graficación de funciones algebraicas es básico para la interpretación de los problemas que aborda el Cálculo Infinitesimal, y que seguirá tratándose en los primeros años de sus carreras afines a esta asignatura, por lo que, ...la motivación, aunque no es indispensable para el aprendizaje limitado y de corto plazo, es absolutamente necesaria para el tipo sostenido de aprendizaje que interviene en el dominio de una disciplina de estudio dada (David Ausubel, 1976). Así, a largo plazo la motivación es fundamental, algunos de sus efectos son: persistencia hacia el trabajo, eficacia, aumento de la atención y tolerancia hacia la frustración.

El último factor que incide en este estudio como facilitador del aprendizaje en la graficación de funciones algebraicas es la **retroalimentación**. Este término es utilizado en educación y se refiere específicamente al proceso mediante el cual el profesor proporciona

un reforzamiento en los aspectos particulares en los que el estudiante no refleja un nivel de dominio adecuado en cualquier tarea o tema encomendado.

Dependiendo de la frecuencia con que se aplique, la retroalimentación puede ser continua o esporádica. En ocasiones, algunos procesos de enseñanza reclaman una retroalimentación continua, mientras que para otros no resulta tan necesaria esta continuidad, pudiéndose efectuar durante períodos más espaciados entre sí.

La forma en que se presenta la retroalimentación puede ser verbal o escrita, por ejemplo: puede existir retroalimentación verbal en un estudiante cuando éste realiza una pregunta sobre algo en particular y la respuesta del profesor le resulta satisfactoria, también cuando los estudiantes están resolviendo ejercicios y el profesor al pasar por sus lugares realiza algunas observaciones de sus trabajos y por último se puede recibir retroalimentación escrita cuando el profesor realiza comentarios en alguna tarea o evaluación destacando tanto los aspectos más sobresalientes como aquellos aspectos que el estudiante podría mejorar.

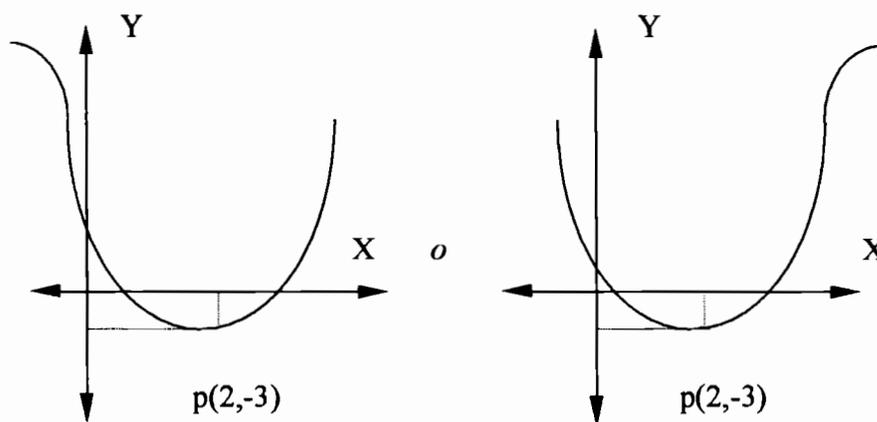
La retroalimentación es un factor útil e indispensable en el aprendizaje de cualquier materia, y en matemáticas lo es más desde el punto de vista del nivel de abstracción que posee y que no poseen las demás asignaturas. La retroalimentación, nos ofrece momentos muy valiosos, que reclaman una toma de conciencia por parte del profesor en la búsqueda permanente de mejores estrategias en la enseñanza-aprendizaje de los aspectos que son particularmente difíciles para el estudiante.

La retroalimentación es el proceso mediante el cual se acentúan los aciertos en la resolución de un cierto problema o ejercicio y se re-explican los aspectos necesarios para la corrección de las fallas en que se haya incurrido. Cuanto menos sepan los estudiantes de un determinado tema, más apoyo necesitarán. Por otro lado, es de vital importancia informar al estudiante que la retroalimentación se llevará a cabo en un clima de co-responsabilidad tanto de los estudiantes como del profesor.

El profesor conoce su materia y más cuando la ha impartido por algún tiempo, por lo tanto, el sabe dónde y cuándo es necesaria la retroalimentación; incluso, puede ser necesario en un determinado período, realizar una retroalimentación continua, esto dependerá de la dificultad del tema, de las condiciones de aprendizaje y de los individuos que se involucren en el proceso de enseñanza-aprendizaje, ...en un trabajo citado por Gagné (op. cit.) los profesores más efectivos hacen más preguntas que los profesores menos efectivos, situación que da oportunidades para que los estudiantes reciban retroalimentación e incrementa la probabilidad para que aprendan correctamente. También, los profesores efectivos plantean una segunda pregunta después de una respuesta correcta, al mismo estudiante, recompensándolo y estimulándolo a pensar más allá...(Teresa Almaguer, 1995). El maestro debe hacer un seguimiento activo del trabajo que realizan independientemente, moviéndose entre ellos, dándoles ayuda y obteniendo retroalimentación ...Jane Stallings (1976) descubrió que los maestros que permanecen en sus escritorios sin interactuar con sus alumnos mientras están trabajando en sus lugares hacen que haya más faltas de asistencia en sus grupos y obtienen menos logros en la lectura que hacen los estudiantes (Orlich, 1995).

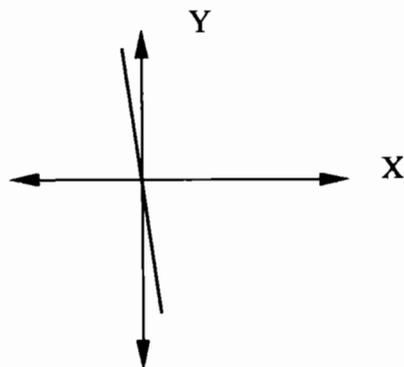
Con respecto a este seguimiento activo del profesor, hacia los procesos de graficación que realizan sus estudiantes, y más específicamente a sus primeras experiencias de graficación, tengo algunos comentarios que exponer.

No basta con que el profesor realice gráficas de funciones algebraicas y muestre sus virtudes y experiencia en esta área, para pensar que sus estudiantes lo imitarán al pie de la letra en sus desarrollos. Existen algunos de ellos que las entienden “a su manera” y lo peor de esto, es que ignoran que están equivocados; para ellos, un cambio en la concavidad de una gráfica, es un pequeño cambio que no merece atención, sin pensar que esto origina un punto de inflexión y con esto otra función diferente; por ejemplo, al pedirles la gráfica de la función $y = (x-2)^2 - 3$, con frecuencia se observan gráficas como las siguientes:

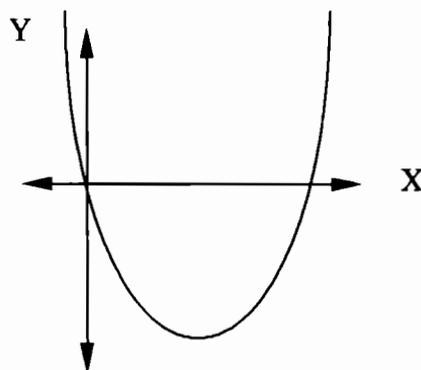


Para algunos estudiantes resulta muy fácil crear puntos de inflexión donde no existen, ocasionando con esto una gráfica que distorsiona a la real; es bien sabido que la gráfica de la función $y = (x-2)^2 - 3$ representa una parábola que abre hacia arriba y que carece de puntos de inflexión, y en las gráficas mostradas existe un cambio en la concavidad de la función.

Otro ejemplo que también reclama un seguimiento activo por parte del profesor, se encuentra en las gráficas de funciones similares a la siguiente: $y = x^2 - 10x$, en donde como se puede apreciar, se trata de una parábola que abre hacia arriba y tiene su vértice en el cuarto cuadrante en el punto $(5, -25)$, el problema en este caso reside en que, un gran número de estudiantes optan por una tabulación de valores del dominio entre -3 y 3 , por lo que obtienen como gráfica de la función $y = x^2 - 10x$ una pequeña línea decreciente que en nada se parece a la gráfica correspondiente de la función a graficar. En este ejemplo, una gran parte de los estudiantes no obtienen de manera satisfactoria la gráfica de esta función; de aquí la necesidad, de que el profesor realice una retroalimentación continua e individual, hasta donde sea posible, durante los procesos de aprendizaje en la graficación de funciones algebraicas en sus estudiantes, ayudándoles a recordar procesos más efectivos o compartiendo con ellos aquéllos que son del dominio del profesor y que ha acumulado a través de su experiencia. La gráfica que obtiene una gran parte de los estudiantes es:

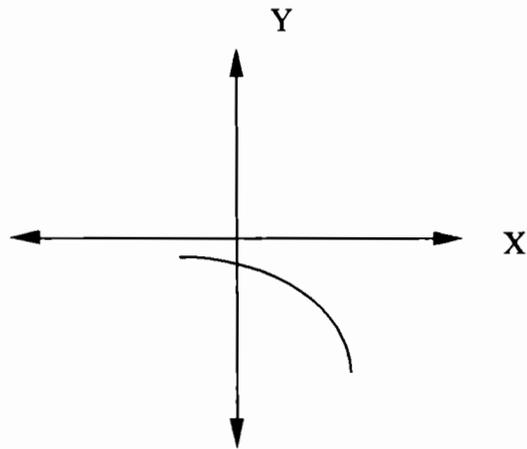


Mientras que, la gráfica correspondiente a la función $y = x^2 - 10x$ resulta:

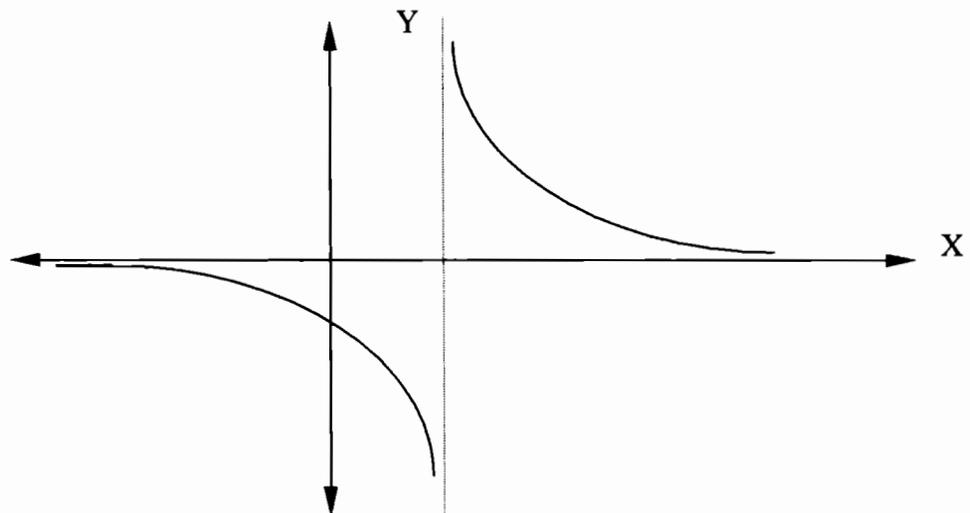


Un último ejemplo, que es importante destacar tiene que ver, con la gráfica de aquellas funciones algebraicas que manifiestan un comportamiento asintótico. En este renglón, algunos profesores descuidamos durante nuestra enseñanza aspectos que resultan fundamentales en la gráfica de una función asintótica, algunos de ellos son: identificar si una función, es o no asintótica; si es asintótica, identificar sus asíntotas (verticales, horizontales, oblicuas o alguna combinación de éstas), para así, poder proceder a dar un dominio que resulte adecuado y lograr una gráfica representativa de la función.

Por ejemplo, en la gráfica de la función $y = 1 / (x-6)$, muchos estudiantes optan por tabular valores del dominio entre -3 y 3 (situación que se observa demasiado común entre ellos), y lo que obtienen como gráfica, es un segmento de línea, que de nuevo, no tiene nada que ver con su gráfica correspondiente, ni tampoco se observa su comportamiento asintótico. La gráfica que generalmente obtienen de la función $y = 1 / (x-6)$, resulta:



Mientras que, la gráfica correspondiente de la función $y = 1 / (x-6)$ es:



Haciendo notar sus asíntotas vertical ($x=6$) y horizontal ($y=0$); desde esta perspectiva, un dominio que resulta adecuado sería aquél que partiera de $x=6$ hacia su izquierda y hacia su derecha.

No es mi intención, agotar la paciencia del lector con muchos ejemplos, sino más bien, tratar de mostrar aquéllos, que reclaman un seguimiento continuo por parte del profesor. Espero, que estos ejemplos que son algunos de los que he obtenido durante mi experiencia

docente sirvan para encausar con mayor éxito futuros procesos instruccionales en esta rama de las matemáticas.

Por otro lado, es un objetivo específico de esta investigación el conformar un grupo de estudiantes que son considerados sobresalientes en los aspectos que a este tema se refiere, con la intención de que ofrezcan procesos de retroalimentación a sus compañeros que así lo requieran. La palabra sobresaliente se refiere a aquellos estudiantes cuyas diferencias individuales durante un proceso de aprendizaje son notorias en favor de este aprendizaje durante las primeras clases de un curso; particularmente, en este estudio el reconocer estas características en los estudiantes resulta hasta cierto punto sencillo, ya que se tienen antecedentes de ellos desde semestres anteriores.

Estas retroalimentaciones pueden presentarse tanto en algunas clases mediante trabajos colaborativos como en algunos días inhábiles en el calendario escolar, siempre con la supervisión del profesor. No está de más el expresar que estos trabajos colaborativos serán considerados durante la planeación de clase del profesor y la retroalimentación en días inhábiles será llevada a cabo mediante una calendarización que tome en cuenta aspectos tales como: disponibilidad del tiempo tanto de los estudiantes como del profesor, fechas de exámenes parciales y finales, y todo aquello considerado como un obstáculo para el desarrollo óptimo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

También es necesario comentar que cuando el estudiante se enfrenta por vez primera a la gráfica de una función algebraica en donde tiene que aplicar toda una serie de conceptos tales como: función, rango, dominio, continuidad, discontinuidad, asíntotas, manejo de

escalas diferentes en los ejes cartesianos, intervalos de crecimiento, sentido en la concavidad, entre otros, resulta muy importante que el profesor realice una retroalimentación continua y mediante un proceso gradual, logre que sus alumnos sean cada vez, más independientes, ...indiscutiblemente, la retroalimentación (comentarios y respuestas dados a los estudiantes a partir del resultado de su evaluación) constituye otro aspecto crítico para el aprendizaje. Se considera que en el caso del conocimiento declarativo, la retroalimentación debe aumentar la organización de información o estimular a los estudiantes para que desarrollen estrategias de organización y elaboración verbal e imaginal (Marisa Martín, 1995).

Retomando el planteamiento del problema de investigación que hace referencia a los factores que facilitan el aprendizaje en la graficación de funciones algebraicas, profundizaremos ahora en la frase **graficación de funciones algebraicas**.

Se iniciará por el término **función**, ...sea X e Y dos conjuntos de números reales. Los elementos de estos conjuntos se designan con las letras “x” e “y” respectivamente. La correspondencia f, que asigna a cada número dado “x” del conjunto X un sólo número “y” del conjunto Y, se llama función del argumento “x” y se escribe $y=f(x)$, al mismo tiempo “x” se llama variable independiente, e “y”, variable dependiente; el conjunto X se llama dominio de la función $f(x)$, y el conjunto Y se llama rango de la función $f(x)$ (A. G. Tsipkin, 1985). Otra definición establece, ...una función es un conjunto de parejas ordenadas de números (x,y) en la cual dos parejas ordenadas distintas no tienen el mismo primer número. El conjunto de todos los valores posibles de “x” se llama el dominio de la función y el conjunto de todos los valores posibles de “y” se llama rango de la función

(Louis Leithold, 1972). Pero existe una línea más moderna que expresa, ...una función de valor real f definida sobre un conjunto D de números reales es una regla que asigna a cada número " x " de D un y sólo un número real $f(x)$. El conjunto D de todos los números reales para los cuales $f(x)$ está definido se llama dominio de la función f . El número $f(x)$, que se lee, " f de x " se llama valor de la función f en el número o punto " x ". El conjunto de todos los valores $y=f(x)$ se llama rango de f (Edwards y Penney, 1987). Otra definición de un corte más actual expresa, ...una función es una relación entre magnitudes variables, como un mapeo desde un conjunto a otro (Guershon Harel y Ed Dubinsky, 1992).

Por lo anterior se puede puntualizar que en las definiciones se recoge la misma esencia del concepto. Existen diversos tipos de funciones, entre ellos se tienen a las funciones pares e impares, algebraicas, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, compuestas, de una sola variable, multivariadas, periódicas, acotadas, monótonas y recíprocamente inversas. Este estudio nos limita sólo a las funciones algebraicas de una sola variable y máximo de cuarto grado. Con respecto a este tipo de función, tenemos que, una **función algebraica** ...es una función formada por un número finito de operaciones algebraicas de la función idéntica y la función constante (Louis Leithold, 1972). En donde una función idéntica se define como ...la función lineal particular definida por $f(x)=x$, es llamada la función idéntica (Louis Leithold, 1972), y para complementar esta información se tiene que la función constante ...si el rango de una función f consiste de un sólo número entonces f se llama una función constante (Louis Leithold, 1972).

Por lo tanto, si se reúnen los conceptos revisados, se puede establecer que una función algebraica es aquella expresión en donde la función identidad y la función constante

realizan un número finito de operaciones. Se pueden encontrar ejemplos de funciones algebraicas en una recta ($y=2x+1$), en una parábola ($y=x^2$), en una elipse ($x^2+2y^2=4$), en una de cuarto grado ($y=x^4-x$), entre otros; también el concepto de función algebraica resulta muy cómodo e ilustrativo al relacionarlo con la realidad, ya que muchos diseños que tratan con la cantidad de material óptimo necesario para la construcción de algún recipiente, tal como un tanque de almacenamiento de agua potable, una caja de cereal o un bote de refresco, se realizan utilizando este tipo de funciones.

Ahora bien, respecto al término **graficación de funciones algebraicas**, se refiere a la forma de representar geoméricamente una función en dos dimensiones en el tradicional sistema de coordenadas cartesiano; esta representación puede ser realizada en una hoja de papel o en el pizarrón del salón de clases. Con el afán de ubicar más a nuestro lector se recuerda que el sistema de coordenadas se origina si trazamos en un plano dos rectas mutuamente perpendiculares, una de ellas horizontal y la otra vertical, cuyo punto de intersección es el origen; a la derecha y hacia arriba de este origen se consideran los semiejes positivos “x” e “y”, respectivamente, y a la izquierda y hacia abajo los semiejes negativos “x” e “y”, respectivamente. En base a este planteamiento podemos decir que el punto origen (o) tiene de coordenadas cero en “x” y cero en “y”, esto se representa $o(0,0)$ siendo “x” el cero del lugar izquierdo. Así, dependiendo de las operaciones algebraicas que nos indique la función dada, podemos reunir un conjunto de puntos y ubicarlos en este sistema de coordenadas para unirlos mediante el trazo de una línea y dar origen a la gráfica de esta función. Algunos autores opinan al respecto, ...el lugar geométrico de todos los puntos, cuyas coordenadas resultan de evaluar la función, recibe el nombre de gráfica de la función (G. E. Shilov, I. P. Natanson, 1959). Otra definición rescatada de una fuente más

moderna a la anterior establece, ...la gráfica de la función f es el conjunto de todos los puntos del plano de la forma $(x, f(x))$, donde “ x ” pertenece al dominio de f (Edwards y Penney, 1987). Una última definición establece, ...una gráfica representa la función en una forma indirecta, de forma simbólica, es una representación estática la cual oculta todo el dinamismo de las funciones (Guershon Harel y Ed Dubinsky, 1992). Se puede notar, que las definiciones dadas anteriormente retoman el mismo significado.

Investigaciones recientes, realizadas en Estados Unidos de Norteamérica por Guershon Harel y Ed Dubinsky (1992) muestran que en estudiantes de nivel medio superior existe un obstáculo en identificar funciones con expresiones analíticas, según estos investigadores este obstáculo epistemológico es histórico y en la práctica de enseñanza se han encontrado formas degeneradas de funciones, debido a la confusión que provoca. Es decir, el profesor centra su enseñanza en las “ x ” y en las “ y ” de la función, alejándose del contexto diario del estudiante; en este sentido, se recomienda que el profesor se preocupe por diseñar ejemplos en donde se haga notar la naturaleza estática y dinámica del concepto de función en la vida real. Existen pocas áreas de la ciencia y de la vida cotidiana donde las gráficas no pueden tener alguna aplicación. Por ejemplo, existen gráficas que muestran las estadísticas de producción de alguna empresa, de los índices de contaminación en alguna región, de los registros de fenómenos naturales, entre otros. Tales gráficas tienen amplias aplicaciones, la gráfica de una función deducida de un proceso experimental mostrará objetivamente los resultados de dicho proceso y el científico o la persona encargada de dicho proceso podrá efectuar modificaciones a fin de obtener mejores resultados o predecir comportamientos tendenciales.

Existen investigaciones realizadas en estudiantes del nivel de bachillerato cuyos resultados muestran un cierto dominio algebraico por parte del estudiante pero una pobre cobertura en el contexto gráfico de las funciones, no se diga, de la casi nula interpretación gráfica de éstas, ...generalmente, logran un cierto desarrollo del álgebra de funciones en relación directa con su conocimiento algebraico precedente, aunque con muy poca capacidad para transitar entre contextos, conocen gráficas como la recta y la parábola, pero desconocen las formas de las cúbicas, cuárticas, etc.. Aunque tabulan, no siempre logran construir las gráficas. Suelen tener muy escaso éxito en la traducción de problemas verbales al simbolismo funcional por citar algunos de los resultados escolares (Ricardo Cantoral, 1993).

Investigaciones de este corte en el nivel bachillerato, dan cuenta de que la construcción de gráficas de funciones algebraicas y su tránsito entre los contextos gráfico y algebraico es accesible sólo para un porcentaje mínimo de la población estudiantil. Luego la búsqueda de estrategias nuevas para abordar el problema se justifica plenamente.

Por lo tanto es intención también de esta investigación, el mostrar un procedimiento ya elaborado pero poco conocido por el gremio docente llamado **aritmética de funciones**, el cual robustece y complementa las estrategias necesarias que debe reunir un estudiante al enfrentarse a un proceso de graficación de alguna función algebraica, este procedimiento es sencillo y muy eficaz en la construcción de gráficas de funciones, permite que el estudiante tenga una idea previa del resultado de la gráfica con un alto grado de confiabilidad, sin necesidad de tabulaciones, rangos, raíces del polinomio, máximos y mínimos, puntos de inflexión, sentido de crecimiento, entre otros factores.

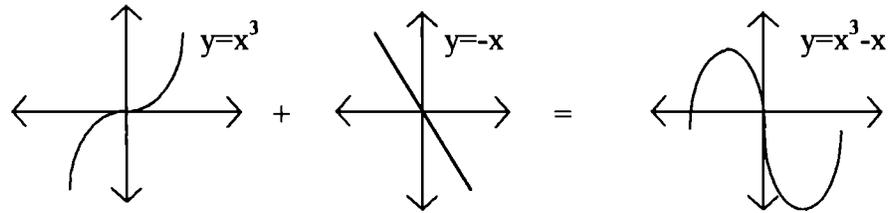
Se hace necesaria una aclaración que se considera muy importante, un planteamiento vertebral de esta investigación es el manejar los aspectos conceptuales que intervienen en la graficación de funciones algebraicas de manera significativa para el estudiante, motivarlo de manera adecuada y seguir de cerca su proceso de aprendizaje brindando una retroalimentación continua, por lo tanto, el procedimiento llamado aritmética de funciones se recomienda cuando todos los conceptos necesarios en la graficación de funciones algebraicas hayan sido trasladados al campo de la resolución de problemas que involucren la gráfica de la función y sean del dominio del estudiante; así la aritmética de funciones constituye un elemento primordial y de apoyo para que el alumno no navegue en el vacío sin tener una idea del resultado de la gráfica de alguna función y pueda saber en un determinado momento si su gráfica es errónea o no.

La aritmética de funciones consiste en la suma algebraica de funciones individuales, de tal manera que las gráficas de cada función se pueden “sumar” y obtener un gráfica resultante, ...al sumar dos funciones, algunas características de las gráficas individuales de estas funciones se conservan en la gráfica suma, esta última gráfica tendrá el siguiente comportamiento: se comportará cerca del origen de coordenadas como la función individual de menor exponente y lejos del origen como la función individual de mayor exponente... (Francisco Cordero, 1995).

Desde luego que esto motiva al estudiante a conocer las gráficas individuales de las funciones más conocidas, tales como: una recta, una parábola, una cúbica, una cuártica, etc.. A continuación se hará mención de algunos ejemplos de este tipo de graficación por medio de la aritmética de funciones:

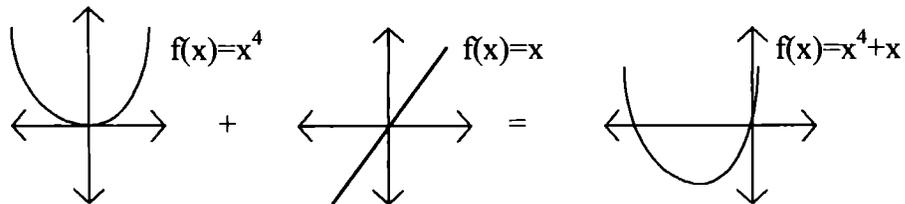
- Realizar la gráfica de la función $y=x^3-x$

Las gráficas individuales serían:

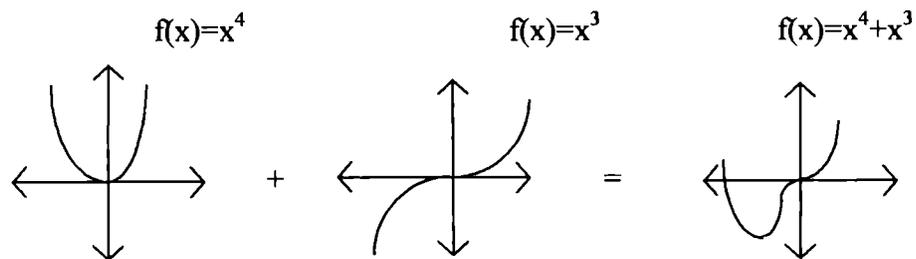


Nótese que el comportamiento de la gráfica $y =x^3-x$, es igual que la de x^3 lejos del origen y cerca del origen como $y=-x$.

- Otro ejemplo, graficar $f(x)=x^4+x$



- Otro más, $f(x)=x^4+x^3$



De nuevo, se sigue notando que el comportamiento tendencial que asume la aritmética de funciones se sigue cumpliendo, la gráfica suma o resultante, se comporta en el origen y

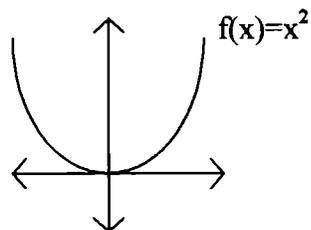
cerca de él como la gráfica individual de menor exponente y lejos del origen la gráfica suma se comporta como la gráfica individual de mayor exponente.

Se hace notar, que las gráficas mostradas hasta aquí corresponden a funciones en donde se carece de término independiente y además los coeficientes de los términos variables son 1 o -1. A continuación se explorarán algunas gráficas de funciones donde se vean afectadas por otro tipo de parámetro, para averiguar que efecto se le provoca a la gráfica resultante y ...se estudiarán funciones prototipo, en las que se explorará la variación de los parámetros de las mismas y la manera en que éstos influyen en la gráfica de la función. Así, el problema que se abordará consiste en dar valores a algún parámetro de la expresión $f(x)$ y encontrar las formas de la función para ése parámetro (Francisco Cordero, et al, 1997). Esto permitirá reunir mas elementos estratégicos respecto a la gráfica de una función algebraica ampliando el conocimiento y aplicación del método sugerido: aritmética de funciones o “suma” de gráficas.

Graficando $f(x)=ax^2$

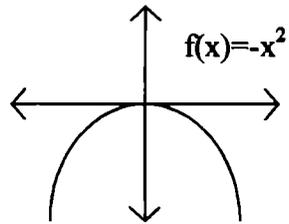
Trabajar con funciones de la forma $f(x)=ax^2$. Aquí la variación será **a**:

a) Si $a=1$



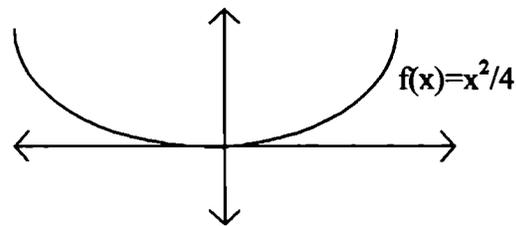
Resulta la gráfica patrón.

b) Si $a=-1$



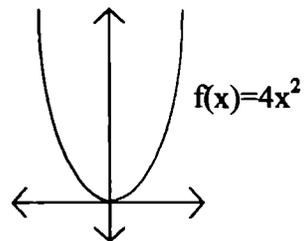
Se invierte el sentido de crecimiento de la gráfica patrón.

c) Si $0 < a < 1$



Se “dilata” la gráfica patrón.

d) Si $a > 1$

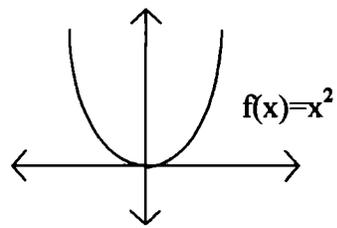


Se “comprime” la gráfica patrón.

Graficando $f(x)=x^2+k$

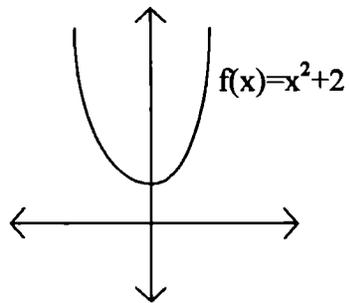
Trabajar con funciones de la forma $f(x)=x^2+k$. Aquí la variación será k .

a) Si $k=0$



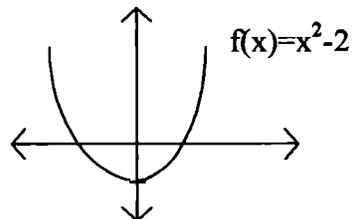
Resulta la gráfica patrón.

b) Si $k=2$



La gráfica patrón se trasladó verticalmente “k” unidades hacia arriba.

c) Si $k=-2$

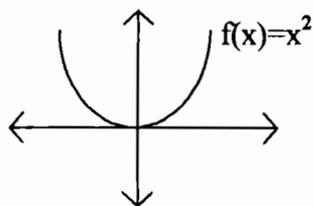


La gráfica patrón se traslada verticalmente “k” unidades hacia abajo.

Graficando $f(x)=(x+h)^2$

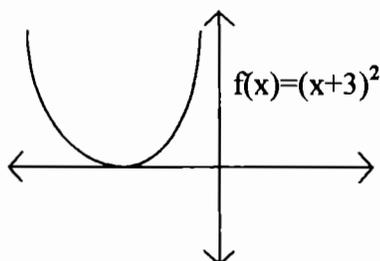
Trabajar con funciones de la forma $f(x)=(x+h)^2$. Aquí la variación será h.

a) Si $h=0$



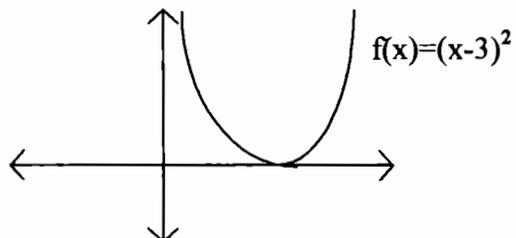
Resulta la gráfica patrón.

b) Si $h=3$



La gráfica patrón se traslada horizontalmente “h” unidades hacia la izquierda.

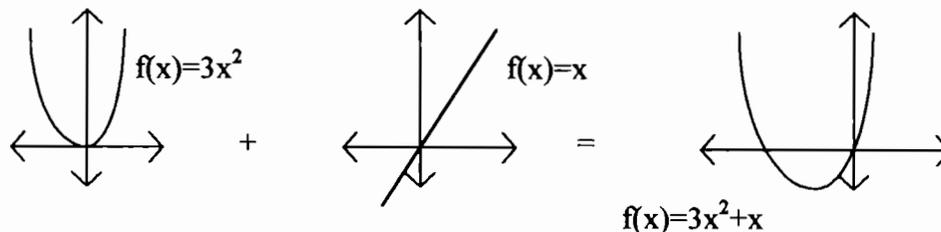
c) Si $h=-3$



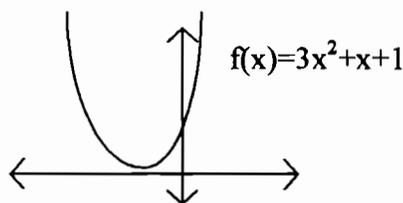
La gráfica patrón se traslada horizontalmente “h” unidades hacia la derecha.

Así, con estas estrategias se podrá incrementar el conocimiento en las gráficas de funciones individuales afectadas por este tipo de parámetros para aplicarlas al método de aritmética de funciones y generar gráficas de funciones resultantes, por ejemplo:

Encontrar la gráfica de $f(x)=3x^2+x+1$



Ahora sólo se traslada verticalmente la gráfica de $f(x)=3x^2+x$ una unidad hacia arriba:



También se recomienda, que se maneje y se practique este método con los estudiantes, el tiempo que sea necesario con el fin de que se obtengan resultados más satisfactorios en su dominio, ya que esto lo dotará de fuertes herramientas para afrontar en sus experiencias futuras la gráfica de una función algebraica.

Por otro lado, es muy importante indicarle al estudiante, y predicar con el ejemplo, que aplique su creatividad y “ensaye” con el método, es decir, existirán funciones que a primera vista sean muy complejas pero que mediante un “arreglo algebraico”, éstas se convertirán en funciones más simples, por ejemplo: $f(x)=x^3+3x^2+3x+1$, si notamos la expresión anterior es un producto notable, $f(x)=(x+1)^3$; por lo tanto su gráfica obedece a la de $f(x)=x^3$ sólo que se traslada horizontalmente una unidad hacia la izquierda. Otro ejemplo: $f(x)=x^3+3x^2+3x-2$, esta expresión es equivalente a $f(x)=(x+1)^3-3$, su gráfica

obedece a la de $f(x)=x^3$, trasladada una unidad hacia la izquierda y tres unidades hacia abajo.

De esta manera, se seguirán generando nuevos comportamientos tendenciales en muchos otros ejemplos. Es muy importante resaltar la siguiente aclaración: no se pretende, con las explicaciones anteriores dar una revisión exhaustiva al método al que se ha hecho referencia. La única intención es dar plausibilidad al comentario hecho en esta investigación de la necesidad de que el estudiante de bachillerato transite por los contextos algebraico y gráfico de una función con un buen dominio, dando razón de su interpretación gráfica mediante un procedimiento sencillo y a su alcance.

Ahora bien, todos los factores anteriores nos van a auxiliar para facilitar el aprendizaje en la graficación de funciones algebraicas en el tercer año de Matemáticas en la Escuela Preparatoria Federal por Cooperación Activo 20-30, Albert-Einstein de Cd. Delicias, Chih., entendiendo que la graficación consiste en representar geoméricamente una función en un plano, ...la gráfica de una función es una curva, la cual es el conjunto de todos los puntos en f cuyas coordenadas cartesianas están dadas por las parejas ordenadas de números (x,y) (Louis Leithold, 1972).

Por lo tanto se puede afirmar que los factores anteriormente descritos, así como sus características facilitan efectivamente el aprendizaje de la graficación de funciones algebraicas en el tercer año de Matemáticas en la Escuela Preparatoria Federal por Cooperación Activo 20-30, “Albert-Einstein” de Cd. Delicias, Chihuahua.

CAPÍTULO 6

METODOLOGÍA

En lo que respecta a la metodología ha utilizar; un tipo de investigación que se ajusta a este problema, es la que se califica como teórica, fundamental, pura, básica o desinteresada, ya que la intención es justamente el avance en el conocimiento de más y mejores estrategias didácticas, así como de las teorías que sustentan la investigación y facilitan el aprendizaje en la graficación de las funciones algebraicas en el último año de bachillerato de nuestra escuela preparatoria. A este tipo de investigación se le identifica con la investigación en humanidades, ciencias formales (lógica y matemáticas) y ciencias naturales, ...la investigación pura se ejercerá en las ciencias sociales cada vez que el investigador tenga más interés en el desarrollo de conceptos y teorías que en el mejoramiento de las condiciones de vida (Ario Garza, 1993).

Sin embargo, no se puede encasillar en un sólo tipo de investigación ya que tiene por objeto familiarizarnos con el problema de estudio y seleccionar, adecuar los recursos y los procedimientos para una investigación posterior, por lo que tiene un carácter de exploratoria. Se enmarca en una investigación sintética ya que se utilizarán los métodos deductivo e inductivo para demostrar la hipótesis. Es una investigación documental y de campo ya que se recurrirá a documentos escritos que respalden nuestra investigación auxiliados a la vez por instrumentos de recolección de datos tales como, la observación, la encuesta y el cuestionario.

Procedimientos para la recolección de datos.

Se considera necesario indicar que en esta investigación se parte del supuesto que el alumno ya conoce algunas funciones fundamentales tales como, la recta y la parábola en cuanto a su relación con una expresión analítica, identificándolas como funciones: $f(x)=x$, $f(x)=x^2$. Las cuáles serán el punto de partida para iniciar la construcción de las gráficas de nuevas funciones algebraicas hasta cumplir con las funciones de este tipo que maneja el programa de matemáticas del tercer año de bachillerato en la Escuela Preparatoria Federal por Cooperación Activo 20-30, “Albert-Einstein”, de Cd. Delicias, Chih., entre las cuáles se pueden mencionar: funciones lineales, cuadráticas, cúbicas, cuárticas y polinomiales que resultan de las combinaciones anteriores.

Se utilizará la técnica de la **observación** para intentar captar aquellos aspectos, hechos o realidades que resulten más significativos de nuestro problema de estudio con la intención de recopilar los datos que se estiman pertinentes, teniendo en cuenta que ...para que la observación tenga validez desde el punto de vista metodológico, esto es, para que sea sistemática y controlada, es menester que la percepción sea <<**intencionada e ilustrada**: intencionada o deliberada, porque se hace con un objetivo determinado; ilustrada, porque va guiada de algún modo por un cuerpo de conocimiento...(Ander-Egg, Ezequiel, 1996).

Para realizar una observación sistemática y controlada se establecerá el qué y para qué de la observación como un aspecto del qué y para qué de la investigación, se hará explícito el marco teórico referencial, para orientar la realización de las observaciones, se tendrá una lista de guía o control sobre los aspectos que se desea investigar, se determinarán los

instrumentos a utilizar para el registro de información y datos, se realizará el trabajo de manera responsable y sistemática, y se registrarán las observaciones por escrito lo antes posible.

Retomando el qué y para qué de la investigación, ¿Qué se investiga?: los factores que facilitan el aprendizaje en la graficación de funciones algebraicas, recordemos que estos son: retroalimentación, motivación y aprendizaje significativo; ¿Para qué se investiga?: para ver si en realidad afectan positivamente el aprendizaje en esta área de las matemáticas y poder recomendar algunas líneas didácticas que permitan ampliar los horizontes educativos del profesor. Por lo tanto, haciendo explícito el marco teórico referencial, ¿Qué se va a observar?: los diferentes indicadores de las variables de nuestro problema, los cuáles hemos considerado que son: el nivel de participación de los estudiantes, la dedicación de éstos durante los ejercicios en clase, la facilidad para realizar las gráficas, el clima en clase proporcionado por el profesor, la permanencia y duración en la memoria del estudiante de ciertos conocimientos a largo plazo y todo esto incorpora otro indicador que consiste en las calificaciones del estudiante, es decir, con los factores involucrados que son: aprendizaje significativo, retroalimentación y motivación deberá existir una mayor disposición del estudiante hacia la participación en clase y extra clase, también se reflejará una mayor facilidad en los procesos de graficación, una mayor retención de algunos conocimientos y por supuesto todo esto deberá incidir en el progreso de las calificaciones de los estudiantes. ¿Por qué se van a observar estos indicadores?: para poder otorgar una parte de la evidencia acerca de la influencia ejercida por estos factores en el aprendizaje de la graficación de funciones algebraicas, esta parte de evidencia deberá ser comparada con

la información que proporcionen otros instrumentos de recolección de datos que se utilizarán.

Según los medios utilizados, se realizará una **observación estructurada**, ya que se establecerán de antemano qué aspectos se han de estudiar, por lo tanto este tipo de observación es sistemática, así que, se tendrá cuidado de que al realizar observaciones se reúnan las características citadas anteriormente.

Según el papel de participación del observador, la observación será de **participación natural** ya que el observador pertenece al grupo que se investiga.

Según el número de observadores, la observación será **colectiva** ya que se cuenta con la ayuda de otras personas que de alguna manera u otra están relacionadas con nuestro objeto de investigación y que podrán aportar datos con la intención de tener más posibilidades de control con respecto de alguna distorsión que pudiera provocar la participación de un solo observador.

Según el lugar donde se realiza, las observaciones se efectuarán en la **vida real**, ya que día con día en nuestras labores cotidianas se podrá observar al grupo objeto de investigación.

Los instrumentos que se utilizarán para recolectar datos de nuestras observaciones serán el **cuaderno de notas** y el **diario**, el primero se llevará siempre consigo con la finalidad de anotar todo aquello que la memoria no puede retener con facilidad como cifras, fechas, opiniones textuales, etc. y en el segundo se anotarán la relación de los hechos observados

al finalizar el día o la tarea, tratando de hacerlo de manera objetiva, ordenada y clara, y además se tendrá en cuenta que ... el diario se enriquece y gana en objetividad si se vuelcan en él los datos recogidos en el cuaderno de notas (Ander-Egg, Ezequiel, 1996).

Por otro lado se tendrán presentes las dificultades que esta técnica implica, con el afán de que los datos, así como la interpretación de éstos, sean lo más objetivo posible para el objeto de la investigación; se tomarán en cuenta los aspectos que conciernen a lo que se ha denominado la ecuación personal, o a la proyección del observador sobre lo observado, a la capacidad de distinguir entre los hechos observados y la interpretación de esos hechos, aquí cabe mencionar que con frecuencia existe la tentación de anotar solamente la interpretación y no el hecho en sí; otro aspecto se refiere a la posible influencia del observador sobre el motivo de investigación y el peligro que reviste el hacer generalizaciones no válidas a partir de observaciones parciales o no representativas del conjunto.

Se considera necesario recordar que este estudio abarca quinto y sexto semestres del nivel de bachillerato en los grupos: C, D, G-I y J, iniciándose en agosto de 1997 y concluyendo en junio de 1998. Por lo que los datos aportarán evidencia desde agosto de 1997 hasta abril de 1998 por razones que obedecen a la entrega de este proyecto en inicios de mayo de 1998.

La intensidad en los indicadores de las variables recogidas mediante este instrumento de la observación durante este período, se dará a conocer en la sección de resultados.

Otro procedimiento que se utilizará para recolectar datos será la **entrevista estructurada**, tomando en cuenta que los encuestadores poseen un conocimiento previo del nivel de información y del lenguaje del cuestionario, se efectuará teniendo como base una lista de preguntas establecidas con anterioridad y estrictamente normatizadas; las respuestas se anotarán en un cuestionario de manera textual.

Un aspecto fundamental de la entrevista es su **preparación**; para esto, primero nos aseguraremos de que los elementos de la muestra sean lo suficientemente representativos de la población como para que nos permita hacer generalizaciones precisas de ella, se utilizará un método aleatorio utilizado en estadística, llamado muestreo aleatorio simple, ...el muestreo aleatorio le da a todos y cada uno de los miembros de la población igual oportunidad de ser seleccionados para la muestra (Jack Levin, 1979). Este muestreo se basa en una tabla de números aleatorios que ya existen en libros de estadística y que han sido determinadas mediante probabilidades, esta tabla se construye en forma tal que genere series de números sin ningún patrón u orden determinado, esto produce una muestra imparcial otorgando a todos los elementos de la población igual oportunidad de participar. Así, de la población conformada por 146 estudiantes se analizará una muestra de 58 estudiantes, correspondiendo aproximadamente a un 40% de la población. Se decidió utilizar una muestra y no a toda la población principalmente por dos razones: en primer lugar, porque las técnicas de muestreo utilizadas, van de la mano de la Estadística y éstas a su vez son avaladas por estudios científicos. Y en segundo lugar, por la enorme cantidad de tiempo y esfuerzo que significaría el entrevistar, cuestionar y analizar a toda la población; en algunas ocasiones el tiempo y las condiciones de trabajo resultan variables que condicionan la toma de decisiones en una investigación, pero esta última decisión debe

resultar juiciosa y razonable, esto es, el análisis estadístico deberá ir siempre de la mano del método científico, y así asegurar resultados que sean confiables a la investigación.

Retomando las características de la entrevista, se tendrán en cuenta los siguientes aspectos: anunciar nuestra visita explicando los motivos de la entrevista a los individuos seleccionados, concertar una cita, seleccionar el lugar de la entrevista, cuidar nuestro aspecto personal y establecer un clima de confianza y armonía antes y durante la entrevista, cuidar de no aparentar un interrogatorio, es decir, usar el cuestionario de manera informal, hablar de manera natural impidiendo gestos que denoten aprobación o desaprobación tanto en las preguntas formuladas como en las respuestas del entrevistado, formular las preguntas exactamente como están redactadas en el cuestionario, en el mismo orden y sólo una vez, dar el tiempo suficiente para pensar en las respuestas al entrevistado, al pasar de un tema a otro se podrían expresar frases como: “bueno”, “veamos”, ¿le parece que sigamos con...? Con el objeto de ubicar psicológicamente al sujeto y darle un lapso de descanso, también es importante expresar frases, tales como: “eso es”, “claro”, “sí”, esto manifiesta al entrevistado que sus comentarios interesan y nos resultan importantes, pero cuidando que esto no exprese ni aprobación ni desaprobación por su opinión.

Otro aspecto que consideramos importante es cómo obtener y completar respuestas, preguntas neutrales podrían ser: ¿Cuál es su idea sobre este punto?, ¿Cuál es la causa según su opinión?, ¿Por qué le parece que es así?; cuando el entrevistado contesta: no sé, estas frases nos podrían ayudar en la motivación de la respuesta, sin intentar orientarla: desearía conocer su opinión acerca del asunto, ya que ésta parece ser una cuestión en que la gente ordinariamente piensa.

El registro de las respuestas será en forma escrita, aunado a esto se procederá a ir registrando también de forma escrita gestos y actitudes del entrevistado que posean algún significado útil, tales como, encogimiento de hombros, entrecejo fruncido, etc., realizándolo de manera clara y legible.

Para terminar la entrevista, ésta se realizará en un clima de cordialidad y si se requiere una entrevista posterior, dejar las puertas abiertas para ella, ser amable y agradecido al finalizar.

Recapitulando sobre la entrevista, se desarrollará en base a estos puntos anteriores teniendo en cuenta todas sus limitaciones, tanto de la persona encuestada como del encuestador, para en lo que cabe, realizarlas de manera más objetiva.

La entrevista estará basada en las siguientes preguntas:

- a) ¿Cómo ha resultado para ti, que el profesor redacte en tus trabajos o exámenes alguna leyenda sobre tus aciertos y sobre aquellos aspectos que podrías mejorar?
- b) ¿Por qué piensas que es así?
- c) ¿Qué opinión tienes de la labor que desarrollan algunos compañeros en los grupos de retroalimentación?
- d) ¿Crees que esta labor afecte las calificaciones tuyas y de tus compañeros?
- e) ¿Por qué?
- f) Cuando estás trabajando en clase, ¿te encuentras realmente entregado a tu trabajo?
- g) Menciona algunas causas que expliquen tu respuesta anterior.

- h) Cuando el profesor expone algún tema o ejercicio, continuamente está pidiendo tu cooperación en relación a los conocimientos previos que tengas sobre ese tema. ¿Te parece adecuado?
- i) ¿Por qué tienes esta opinión?
- j) ¿Cuáles aspectos consideras que son los más difíciles para graficar una función?
- k) ¿Te ha resultado de provecho el método para graficar curvas, llamado aritmética de funciones?
- l) ¿Que ventajas observas en él?
- m) ¿Cómo es tu profesor cuando le manifiestas tus dudas en clase?
- n) ¿Te sientes con confianza para realizar preguntas a tu profesor?
- o) ¿Cuál es la causa según tu opinión?

Un gran porcentaje de las respuestas de los entrevistados se inclinan a favor de la incidencia positiva de los factores considerados en el aprendizaje de la graficación de funciones algebraicas. Estos resultados se presentarán un poco más adelante.

Una última técnica de recolección de datos que se utilizará en esta investigación será la elaboración de un **cuestionario**, para que éste cumpla con las exigencias del método científico debe cumplir con dos características: **validez** y **fiabilidad**, la primera indica que el cuestionario será válido si los datos obtenidos se ajustan a la realidad sin distorsión de los hechos y la segunda viene dada por la capacidad de obtener similares resultados aplicando las mismas preguntas acerca de los mismos hechos.

Además el cuestionario debe facilitar la tabulación de los datos recogidos y asegurar que las respuestas de las personas investigadas sean comparables.

Se utilizarán cuestionarios de **respuesta indirecta** ya que se va a utilizar la entrevista estructurada. En cuanto a la forma de las preguntas éstas serán del tipo **categorizadas** o de **elección múltiple** pero transformando el abanico de respuestas cerrado en “semi-abierto” con el fin de agregar la posibilidad de dar una respuesta libre distinta de las escritas para no limitar las respuestas al encuestado.

En cuanto al **tipo de preguntas** se realizarán: preguntas de acción, de opinión, introductorias o rompehielos y del tipo embudo de preguntas. En este cuestionario las dos primeras preguntas cumplen con la función de introductorias por lo que no serán tomadas en cuenta en el análisis estadístico.

Respecto a la **elección de preguntas** deben ser tales que nos revelen la naturaleza de la información que se desea obtener, deben incluir las variables buscadas y deben enmarcar las posibilidades y los límites de la investigación, éstas deben obtener respuestas que en lo posible arrojen datos que sean comparables, deben responderse sin dificultades y sin mucho trabajo y por último evitar preguntas indiscretas.

En relación a la **forma de redactar las preguntas**, éstas deben ser sencillas, claras, concretas, acordes con el vocabulario de los interrogados, no utilizar palabras que se presten a confusión o de doble sentido; la pregunta debe posibilitar una sola interpretación, no debe sugerir la respuesta, evitar términos vagos tales como, “mucho”, “poco”, “frecuente”, “regular”, “a veces”, ya que tienen alcances muy diferentes para las personas, cada pregunta debe contener una sola idea.

Otro aspecto importante que se vigilará lo conforma la **estructura de las preguntas**, algunos estudios demuestran que la forma de redactar alguna pregunta acompañada por un sincero gesto afirmativo de cabeza del encuestador, conllevan a respuestas llenas de subjetividad, es decir, a contestar sí aunque en realidad es no.

En cuanto al **número de preguntas**, algunos autores establecen como regla que no deben pasar de treinta, pero lo primordial consiste en hacerlas fáciles de entender y sencillas de contestar; otro aspecto importante será el preguntarnos: ¿Que haré con la respuesta a esta pregunta?, ¿Para qué me sirve?, no redactar preguntas por redactar.

En lo que respecta al **orden de las preguntas**, éste deberá ser apegado a un orden lógico y que prevea posibles inconvenientes psicológicos.

Se cuidará que las preguntas estén formuladas correctamente para evitar deformaciones en las respuestas, es decir, que no lleven una carga afectiva, que no aludan a personas, ni a ciertas palabras que provoquen rechazo, que no conduzcan a un simple sí o a un simple no.

Por último se introducirán en el mismo cuestionario preguntas control para verificar la consistencia de las respuestas, es decir, se introducirán preguntas similares pero redactadas de diferente forma y espaciadas entre sí, dentro del cuestionario.

El siguiente cuestionario se aplicó a una muestra de 58 estudiantes, en la misma institución aprovechando algunas horas de clase, consta de 21 preguntas, en donde, como se mencionó anteriormente la dos primeras son preguntas rompehielos o introductorias. El análisis estadístico de los datos se realizó aproximadamente en dos semanas. Los

resultados de este cuestionario se mostrarán en la siguiente sección. El formato es el siguiente:

Dirección General del Bachillerato
Secretaría de Educación Pública
Escuela Preparatoria Federal por Cooperación Activo 20-30. "Albert-Einstein"
Cd. Delicias, Chih.
Abril de 1998.

El presente cuestionario tiene la finalidad de conocer las opiniones y puntos de vista de los estudiantes de los grupos: C, D, G-I y J sobre la incidencia que tienen algunos factores en la graficación de funciones durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la materia Cálculo Integral con el objeto de mejorar las estrategias didácticas a fin de obtener mayores logros educativos.

Instrucciones.- Lea cuidadosamente cada pregunta y conteste según su criterio, marcando con una equis(x) en el círculo que considere adecuado, apegándose a la siguiente escala de medición: 1 indica NADA y corresponde al círculo de la izquierda, 2 indica POCO, 3 indica MEDIANAMENTE, 4 indica SUFICIENTE y 5 indica TOTALMENTE ubicándose en el círculo de la derecha.

1) ¿Consideras que el Cálculo Integral, se aplica a la vida cotidiana?

2) ¿Te consideras una persona optimista?

3) ¿El profesor te brinda apoyo en las dudas que surgen durante la clase?

4) Cuando están tú y tus compañeros resolviendo ejercicios en clase, ¿Cómo es su dedicación hacia estos ejercicios?

5) ¿La clase de Cálculo, se desarrolla en un ambiente de confianza, respeto y cordialidad por parte del profesor?

6) ¿Al iniciar un nuevo tema, ¿el profesor les hace recordar algunos conocimientos previos de temas anteriores que se relacionan con algún aspecto del tema nuevo?

7) ¿Te ha resultado de ayuda las explicaciones a tus dudas, de tus compañeros?

8) ¿El profesor es entusiasta en clase?

9) ¿El profesor recorre los espacios entre butacas y en ocasiones te hace ver alguna falla en tu ejercicio o te dice que vas en la dirección adecuada?

10) Muestra la facilidad y exactitud que para tí ha significado el método aritmética de funciones para presagiar el resultado de la gráfica de una función.

11) ¿Te ha resultado de provecho en tu aprendizaje, el participar durante la clase?

12) La calificación en Cálculo de un mes cualquiera, ¿se ha visto incrementada por tus participaciones?

13) ¿Sientes confianza para preguntarle a tu profesor si una gráfica la realizaste correctamente?

14) Durante este semestre, ¿Cómo consideras que ha mejorado tu capacidad de interpretación y de análisis en la gráfica de una función?

15) ¿Te ha resultado valioso que el profesor despeje tus dudas?

16) ¿Cuál ha sido el apoyo que has encontrado en los grupos de retroalimentación para solucionar tus dudas?

17) En este semestre actual, en que nivel ubicas tu recuerdo del método aritmética de funciones?

18) ¿Que nivel de beneficio te ha proporcionado éste método?

19) ¿En qué nivel consideras que este método te servirá en tus estudios superiores, si es que eliges alguna carrera que llevara temas afines?

20) ¿El profesor alguna vez te ha felicitado o te ha hecho sentir competente por realizar alguna buena participación?

21) Cuando el profesor les dicta ejercicios para resolverlos durante la clase, ¿Cómo es la dedicación de ustedes en el aula?

O O O O O

Como se mencionó anteriormente el análisis de los resultados que se encontraron con este cuestionario, se expone en la siguiente sección.

CAPÍTULO 7

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Este estudio pone a prueba el efecto que existe entre el aprendizaje significativo, la motivación en el aula y la retroalimentación sobre el aprendizaje en la graficación de funciones algebraicas. Un profesor de matemáticas puede influir en el trabajo de un estudiante por medio de una buena exposición de su clase, en forma significativa, con una motivación adecuada y realizando una buena retroalimentación en los aspectos que él considere críticos.

La hipótesis del estudio consiste en que un profesor puede mejorar el aprendizaje de un estudiante elevando la calidad de los factores involucrados. El resultado final esperado es un mejor desenvolvimiento en la graficación de funciones algebraicas por parte del estudiante, reflejado en la obtención de mejores calificaciones en la asignatura.

Estos resultados son probables ya que la investigación está sustentada en teorías que a su vez se respaldan en investigaciones y estudios experimentales que a través del tiempo han mostrado una sólida estructura en sus argumentos y posturas, y que, llevadas de la mano con el método científico proporcionan objetividad y confianza para generar conclusiones válidas respecto de los resultados de la investigación. Además, los resultados también son probables desde el punto de vista estadístico ya que después de un análisis riguroso y sistemático de la información recopilada con los diferentes instrumentos de recolección de datos, se utilizaron algunos de los teoremas fundamentales de esta rama de las

matemáticas. Con esta información es posible hacer afirmaciones probabilísticas sobre la verosimilitud de ciertos valores medios muestrales que ocurren cuando se seleccionan muestras de una población con media y desviación estándar conocidas; así se podrá establecer de manera fundamentada las conclusiones que sean pertinentes.

Antes de iniciar el tratamiento estadístico, conviene tener en cuenta que la Estadística es una rama de las Matemáticas que se encarga del estudio de agrupaciones de datos numéricos mediante el tratamiento de técnicas establecidas al respecto con la finalidad de obtener resultados orientativos. Se hizo todo el esfuerzo por apegarse al método científico durante el período de recolección de datos ya que esta investigación se desarrolla en el ámbito social, y el factor humano siempre está presente.

Se detallará el análisis estadístico llevado a cabo con la información obtenida durante la observación, las entrevistas, el cuestionario y por supuesto con las calificaciones de los estudiantes objeto de este estudio; además, con el fin de mostrar un panorama más claro de los efectos provocados por los factores analizados en esta investigación, se cuenta con las calificaciones de un grupo muestral que llamaremos **grupo comparativo de control**, el cuál no recibió los factores antes mencionados en su curso de Cálculo durante su tercer año de bachillerato. Esto permitirá obtener resultados y generar conclusiones respecto a la investigación.

Se hace necesario recordar que la población se compone por 146 estudiantes distribuidos en cuatro grupos de los cuáles se analiza una muestra de 58 estudiantes, esto es, aproximadamente un 40% de la población. Además, con el afán de proporcionar el grupo

comparativo de control antes mencionado, se tienen las calificaciones correspondientes a siete evaluaciones desde el mes de Agosto de 1996 hasta Abril de 1997, estos estudiantes recibieron el mismo curso, en la misma institución y con el mismo profesor, con la diferencia que estos estudiantes no recibieron los factores involucrados en esta investigación durante su período escolar. También se ha elegido el mismo tamaño de muestra (58 estudiantes) ya que la población constó de 145 estudiantes, aproximadamente igual a la que se analiza en este estudio. La elección de esta muestra control ha seguido el mismo patrón de comportamiento que la muestra de esta investigación.

Para evitar alguna confusión, resulta necesaria la siguiente aclaración: al hacer referencia a alguna característica del grupo control, ésta irá acompañada de las palabras “grupo control”; y al mencionar alguna característica de la muestra en estudio, simplemente se mencionará, calificación de la primera evaluación o calificación de la segunda evaluación, según sea el caso, o de una forma más simple: **calificaciones de los estudiantes.**

Las características en los indicadores de las variables, recolectadas con el instrumento de la observación durante el período de tiempo que abarca desde el mes de Agosto de 1997 hasta Abril de 1998 manifiestan una mayor participación y dedicación durante la clase por parte de los estudiantes conforme avanza el curso, también se observa la tendencia de que el estudiante va adquiriendo más confianza en sí mismo para desarrollar sus gráficas, para preguntar sus dudas, incluso para explicarles a otros compañeros, y por último se hace notar un nivel de ascenso en el progreso de la construcción de gráficas con el correspondiente ascenso en las calificaciones de los estudiantes. Haciendo referencia al

número de reprobados durante la primera y última evaluación se observa un cambio significativo a la baja, el tamaño de este cambio es el siguiente: de un 31.03% de reprobación en la primera evaluación se reduce a un 15.51% en la última evaluación, es decir, de 18 reprobados se reducen sólo a 9, de un número total de 58 estudiantes. Este progreso en las calificaciones será presentado estadísticamente más adelante.

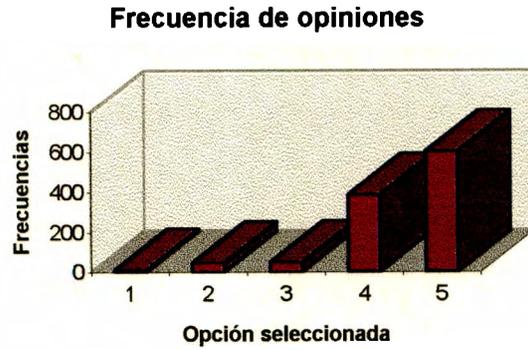
Pero siguen existiendo nueve estudiantes que aún con estas implementaciones o recursos del profesor continúan fracasando en este tema específico, es decir, no logran de manera integral el desarrollo de la gráfica de una función en particular, al menos, durante el período de duración del curso.

Con respecto a los resultados de las entrevistas, estos reúnen características muy similares a los recolectados durante la observación; una gran mayoría de entrevistados están a favor del aprendizaje significativo, la motivación y la retroalimentación como indicadores positivos en el aprendizaje de las gráficas de funciones algebraicas, con respuestas como las siguientes: nuestras calificaciones han ido mejorando conforme pasan los meses, los grupos de retroalimentación han resultado de mucho provecho, nunca habíamos tenido oportunidad de participar en un grupo de retroalimentación en períodos extraclases; el método **aritmética de funciones** es muy accesible y muy preciso, además de que con muy poco esfuerzo nos permite tener una idea del resultado de la gráfica de una función; las notas que recibimos por parte del profesor en nuestros exámenes o tareas nos permiten ubicar nuestras áreas de mejora y por otra parte nos motiva y alienta el que haga notar nuestro progreso; el profesor es accesible a dar respuestas a nuestras dudas; entre otras respuestas que hacen notar aproximadamente la misma línea de comportamiento.

Realizando una evaluación de las respuestas de los entrevistados, se encontró que aproximadamente un 86.2% de ellos opinan a favor de los factores involucrados, esto es, 50 estudiantes y aproximadamente un 13.8% se encuentran en escala de indiferentes y en contra de estos factores, esto es, 8 estudiantes.

Pero como se mencionó también en la observación, aún existen nueve alumnos que no logran un desarrollo aceptable en la gráfica de una función y por lo tanto sus calificaciones resultan por debajo del 6 (mínimo aceptable). Un balance en este aspecto académico se presentará un poco más adelante.

Por lo que se refiere a la información obtenida en el cuestionario, en donde se proporcionan cinco indicadores de selección (del 1 al 5) en los cuáles el 1 y el 2 prácticamente manifiestan un desacuerdo en la incidencia positiva de los factores involucrados en el proceso de aprendizaje en la gráfica de una función; el 3, ni acuerdo ni desacuerdo y por último el 4 y el 5 una marcada incidencia positiva de los factores hacia el proceso de aprendizaje. El cuestionario consta de 21 preguntas en las cuáles sólo 19 son significativas a nuestra investigación, los motivos de este particular han sido explicados anteriormente, por lo tanto en total serán 1102 respuestas; de las cuáles sólo se obtuvieron 1083 ya que un estudiante prefirió no contestarlo. Así, se obtuvieron los siguientes resultados: 10 frecuencias de la opción NADA, 46 frecuencias de la opción POCO, 47 frecuencias de la opción MEDIANAMENTE, 382 frecuencias de la opción SUFICIENTE y 598 frecuencias de la opción TOTALMENTE, completando 1083 frecuencias. Se presentarán estos resultados mediante una gráfica de barras, con el objeto de hacer más ilustrativa esta información.



De la muestra de 58 alumnos, 52 reflejan en términos generales su inclinación hacia la incidencia positiva de los factores involucrados en el aprendizaje de la graficación de funciones, es decir, su desenvolvimiento en la gráfica de una función se ha visto mejorado gracias a las condiciones que imperan en el salón de clases, estas son, la motivación, la retroalimentación y el aprendizaje significativo, naturalmente que esta mejora en el aprendizaje del estudiante se refleja en la obtención de mejores calificaciones. Tres estudiantes reflejan en sus respuestas que estos factores no los consideran como parámetros suficientes que incidan positivamente en este aprendizaje; dos alumnos que se pueden catalogar en escala de indecisos y un estudiante prefirió abstenerse a contestar el cuestionario.

A continuación se presentan las calificaciones del **grupo control** antes mencionado, correspondientes a 7 evaluaciones mensuales incluyendo la **media aritmética ponderada** de los 58 estudiantes que cursaron el tercer año desde Agosto de 1996 hasta Abril de 1997.

No. de alumno	1a. ev. Ago/96	2a. ev. Sept/96	3a. ev. Oct/96	4a. ev. Nov/96	5a. ev. Feb/97	6a. ev. Mar/97	7a. ev. Abr/97
1	6	7	6	6	6	7	6
2	4	5	3	5	4	4	4
3	8	10	6	9	7	8	10
4	7	6	8	9	9	5	7
5	3	3	4	4	5	4	4
6	4	6	4	4	3	4	4
7	7	9	7	10	7	10	7
8	4	4	4	4	3	5	4
9	7	7	9	10	7	10	10
10	6	8	8	8	10	5	10
11	8	10	9	7	10	8	8
12	9	8	8	7	6	7	7
13	4	6	4	6	6	7	5
14	9	9	8	7	7	7	6
15	6	7	7	9	5	6	5
16	7	6	8	7	6	5	7
17	6	6	6	6	6	7	6
18	5	5	6	8	8	6	7
19	7	7	8	7	6	6	7
20	3	4	3	4	3	7	5
21	3	4	4	5	6	6	7
22	7	6	6	4	3	3	5

23	8	8	7	7	5	5	7
24	5	6	9	8	6	7	5
25	4	3	3	4	6	6	7
26	6	6	6	9	7	7	6
27	3	3	4	3	4	3	6
28	6	5	6	7	6	6	6
29	6	6	6	7	6	6	5
30	4	7	6	7	7	7	6
31	5	5	5	7	7	6	6
32	7	7	6	6	8	5	7
33	3	4	6	6	6	7	6
34	4	3	3	3	3	5	3
35	3	3	5	4	6	6	6
36	7	5	7	6	8	6	5
37	4	4	4	4	3	3	5
38	6	7	7	8	7	6	6
39	4	4	3	3	4	7	6
40	9	8	7	8	8	6	6
41	3	4	3	4	4	3	4
42	10	9	7	9	5	6	6
43	7	7	7	7	7	7	5
44	5	4	3	3	4	7	5
45	7	7	5	7	7	6	9
46	8	9	10	8	7	5	5

47	7	6	6	8	5	5	7
48	9	7	5	6	6	9	5
49	7	8	6	7	7	7	6
50	8	7	7	7	6	6	7
51	7	6	6	7	7	6	7
52	6	8	9	5	6	7	6
53	8	7	7	8	7	7	7
54	6	5	6	9	7	6	6
55	6	6	6	5	5	7	7
56	3	4	4	4	5	6	6
57	3	4	4	3	4	4	5
58	7	7	7	6	7	5	6
Σ	314	352	344	366	346	350	354
\bar{x}	5.87	6.06	5.93	6.31	5.96	6.03	6.10

Tabla 7.1 Calificaciones del grupo control.

Cálculo de las Frecuencias de la primera evaluación del grupo control.

N= número de datos= 58

R= rango= 10-3= 7

Ancho de clase= $(1/10)(7) = 0.7$, se redondeará a 1 ya que se trabajará con puros datos enteros.

Límites inferior y superior de cada clase= Estos límites se escogerán de la manera siguiente: 2.9-3.9, 3.9-4.9, y así sucesivamente, con el fin de evitar tener datos iguales en diferentes clases. Haciendo referencia a los datos de la tabla 7.1, se tiene:

FC: Frecuencia de clase, FR: Frecuencia relativa, FRA: Frecuencia relativa acumulada.

Clases	FC	FR(%)	FRA(%)
2.9-3.9	9	15.51	15.51
3.9-4.9	9	15.51	31.02
4.9-5.9	4	6.89	37.91
5.9-6.9	11	18.96	56.87
6.9-7.9	14	24.13	81
7.9-8.9	6	10.34	91.34
8.9-9.9	4	6.89	98.23
9.9-10.9	1	1.72	100
suma	58		

Tabla 7.2 Calificaciones de la primera evaluación del grupo control agrupadas en clases.

Si se ordenan los 58 datos (calificaciones de la primera evaluación del grupo control) en forma ascendente, se puede observar que sus valores centrales están en los datos 29 y 30 correspondientes a 6 y 6, respectivamente, por lo tanto la **mediana** es igual a

$$\text{Mediana} = (6+6) / 2 = 6$$

Por otro lado, en la columna de FC de la tabla 7.2 se puede observar que la calificación 7 es la que tiene una mayor frecuencia (14) y no existe otra frecuencia igual, por lo tanto, esta agrupación de datos resulta ser unimodal y su **moda** es igual a 7.

$$\text{Moda} = 7$$

Cálculo de las frecuencias de la última evaluación del grupo control.

N= número de datos= 58

$$R = \text{rango} = 10 - 3 = 7$$

Ancho de clase = $(1/10)(7) = 0.7$, se redondeará a 1 ya que se trabajará con puros datos enteros.

FC: Frecuencia de clase, FR: Frecuencia relativa, FRA: Frecuencia relativa acumulada.

Clases	FC	FR(%)	FRA(%)
2.9-3.9	1	1.72	1.72
3.9-4.9	5	8.62	10.34
4.9-5.9	13	22.41	32.75
5.9-6.9	19	32.75	65.5
6.9-7.9	15	25.86	91.36
7.9-8.9	1	1.72	93.08
8.9-9.9	1	1.72	94.8
9.9-10.9	3	5.17	100
suma	58		

Tabla 7.3 Calificaciones de la última evaluación del grupo control agrupadas en clases.

Si se ordenan los 58 datos (calificaciones de la última evaluación del grupo control) en forma ascendente, se puede observar que sus valores centrales están en los datos 29 y 30 correspondientes a 6 y 6, respectivamente, por lo tanto la **mediana** es igual a

$$\text{Mediana} = (6 + 6) / 2 = 6$$

Por otro lado, en la columna FC de la tabla 7.3 se puede observar que la calificación 6 es la que tiene una mayor frecuencia (19) y no existe otra frecuencia igual, por lo tanto, esta agrupación de datos resulta ser unimodal y su **moda** es igual a 6.

$$\text{Moda} = 6$$

Enseguida se presenta una tabla con las calificaciones correspondientes a 7 evaluaciones mensuales incluyendo la **media aritmética ponderada** de los 58 estudiantes que cursaron los semestres V y VI desde Agosto de 1997 hasta Abril de 1998.

No. de alum.	1a. ev. Ago/97	2a. ev. Sept/97	3a. Ev. Oct/97	4a. ev. Nov/97	5a. ev. Feb/98	6a. ev. Mar/98	7a. ev. Abr/98
1	7	8	6	7	7	9	9
2	5	5	4	5	5	5	5
3	9	10	9	10	8	9	10
4	8	7	10	10	9	10	9
5	3	3	4	5	5	5	5
6	4	6	5	5	5	5	5
7	8	10	9	10	9	10	10
8	4	5	5	5	5	5	5
9	7	8	10	10	9	10	10
10	7	7	10	10	10	10	10
11	9	10	9	9	10	10	9
12	8	9	9	8	7	8	9
13	5	7	5	6	6	7	8
14	10	10	9	8	9	8	7
15	6	7	8	10	9	8	8
16	8	8	9	8	8	9	9

17	6	7	7	6	6	7	9
18	6	6	8	8	9	8	9
19	8	9	9	9	7	7	9
20	3	3	4	4	5	7	9
21	4	4	5	6	7	7	8
22	7	6	7	5	5	4	4
23	8	9	8	9	9	10	9
24	6	6	8	8	7	7	6
25	3	3	4	4	6	6	7
26	6	7	7	8	6	6	6
27	3	3	5	4	5	5	7
28	6	5	7	8	7	8	7
29	7	8	8	8	7	6	7
30	5	6	6	7	8	8	9
31	6	6	5	6	7	7	9
32	7	8	8	8	7	8	8
33	3	4	6	7	7	7	7
34	4	3	4	3	4	4	4
35	4	4	5	5	6	7	7
36	8	8	9	8	7	6	7
37	4	4	4	4	5	5	4
38	7	8	9	9	7	7	8
39	4	5	3	4	5	7	8
40	9	9	8	9	7	7	8

41	3	3	4	4	5	5	5
42	10	9	8	8	8	7	9
43	8	8	7	8	9	9	10
44	6	5	3	4	5	7	9
45	8	8	9	9	9	8	9
46	9	9	10	9	9	9	8
47	8	7	7	8	9	9	9
48	10	9	9	8	9	10	10
49	8	7	8	9	9	8	9
50	9	9	9	8	7	7	9
51	8	8	7	7	8	7	9
52	6	7	9	8	8	8	8
53	9	9	8	9	8	9	9
54	6	7	7	8	8	7	7
55	6	6	6	6	8	7	8
56	3	5	4	5	5	7	9
57	3	4	5	4	5	4	5
58	9	9	9	7	9	8	9
Σ	371	390	404	412	415	425	455
\bar{x}	6.39	6.72	6.96	7.103	7.15	7.32	7.84

Tabla 7.4 Calificaciones de los estudiantes.

Donde previamente se calculó la media aritmética ponderada de cada mes mediante la ecuación

$\bar{x} = \sum_i^n (x_i \cdot n) / N$, x_i es el dato i ; n = frecuencia del dato; N = número de datos de la muestra.

Con estas calificaciones se pretende analizar la primera evaluación correspondiente al mes de Agosto de 1997 y la última evaluación realizada en el mes Abril de 1998, con el fin de establecer comparaciones entre ellas utilizando algunos parámetros estadísticos para poder delinear las conclusiones que se hagan necesarias, además se establecerán comparaciones entre estas evaluaciones y la primera y última del grupo control, proporcionando así una información más integral para este análisis estadístico.

Cálculo del histograma y polígono de frecuencias de la primera evaluación.

N = número de datos=58

R = rango= 10-3=7

Ancho de clase= $(1/10)(7)$ =0.7, se redondeará a 1 ya que se trabajará con puros datos enteros.

Límites inferior y superior de cada clase= Estos límites se escogerán de la manera siguiente: 2.9-3.9, 3.9-4.9, y así sucesivamente, y no 3-4, 4-5,..., con el fin de evitar tener datos iguales en diferentes clases. Haciendo referencia a los datos de la tabla 7.4, se tiene:

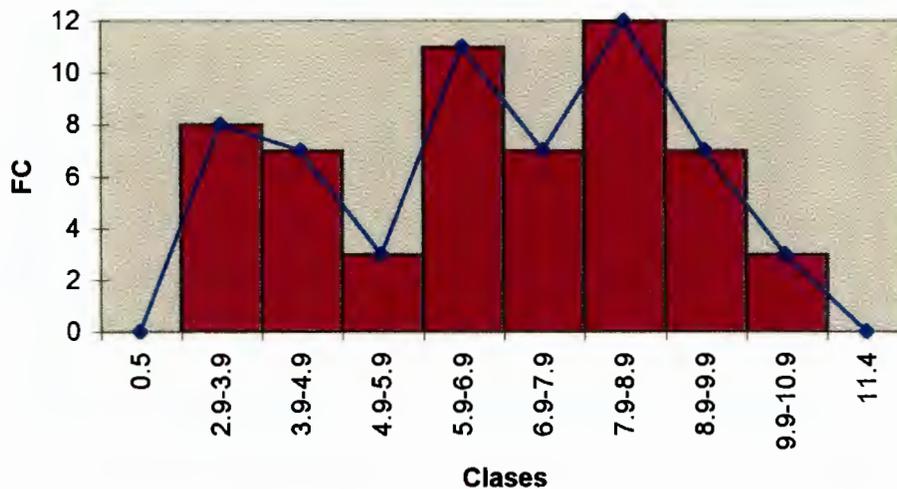
FC: frecuencia de clase, FR: frecuencia relativa, FRA: frecuencia relativa acumulada.

Clases	FC	FR(%)	FRA(%)
2.9-3.9	8	13.79	13.79
3.9-4.9	7	12.06	25.85
4.9-5.9	3	5.17	31.02

5.9-6.9	11	18.96	49.98
6.9-7.9	7	12.06	62.04
7.9-8.9	12	20.68	82.72
8.9-9.9	7	12.06	94.78
9.9-10.9	3	5.17	100
suma	58		

Tabla 7.5 Calificaciones de la primera evaluación agrupadas en clases.

Histograma de la Primera Evaluación



Si se ordenan los 58 datos (calificaciones de la primera evaluación) en forma ascendente, se puede observar que sus valores centrales están en los datos 29 y 30 correspondientes a 6 y 7, respectivamente, por lo tanto la **mediana** es igual a

$$\text{Mediana} = (6+7)/2 = 6.5$$

Por otro lado, en la columna de FC de la tabla 7.5 se puede observar que la calificación 8 es la que tiene una mayor frecuencia (12) y no existe otra frecuencia igual, por lo tanto, esta agrupación de datos resulta ser unimodal y su **moda** es igual a 8.

Moda= 8

Se encontrará también una medida de dispersión, la **desviación estandar** (σ) con el propósito de analizar que tan dispersas están las calificaciones del grupo muestral en estudio, con respecto a la media aritmética ponderada.

$$\sigma = [\sum_i^n (x_i - \bar{x})^2 (n) / N]^{1/2}$$

$$\sigma = [\{ (3-6.39)^2(8)+(4-6.39)^2(7)+(5-6.39)^2(3)+(6-6.39)^2(11)+(7-6.39)^2(7)+(8-6.39)^2(12)+(9-6.39)^2(7)+(10-6.39)^2(3) \} / 58]^{1/2}$$

$$\sigma = 2.7072, \text{ la tomaremos como } \mathbf{2.71}$$

Por lo tanto, lo más denso de las calificaciones está entre 6.39 ± 2.71 . Es decir, las frecuencias más significativas de las calificaciones se encuentran desde 3.68 hasta 9.1, tomando números enteros, están desde 4 hasta 9.

Cálculo del histograma y polígono de frecuencias de la última evaluación.

Haciendo referencia a los datos de la tabla 7.4 en su última columna se tiene que:

$$\text{Rango} = 10 - 4 = 6$$

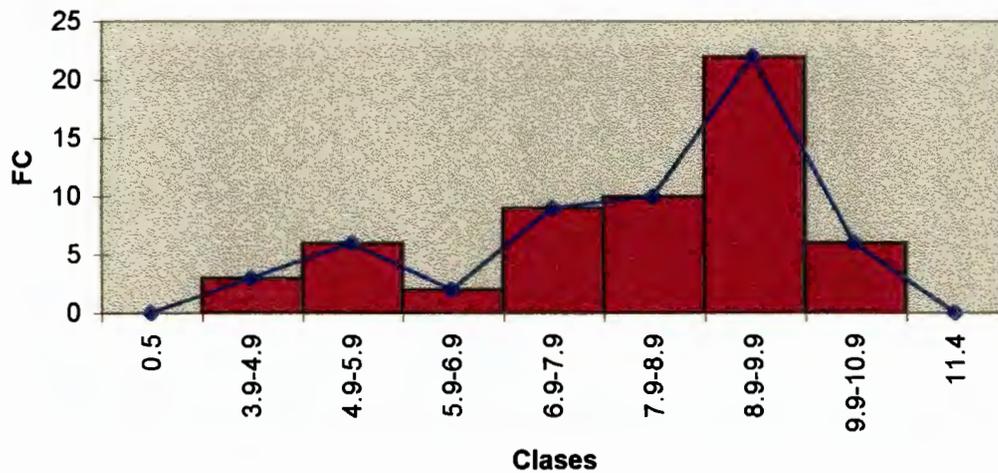
Ancho de clase = $(1/10)(6) = 0.6$, se redondeará a 1 ya que todos los datos son enteros.

Clases	FC	FR(%)	FRA(%)
3.9-4.9	3	5.17	5.17
4.9-5.9	6	10.34	15.51
5.9-6.9	2	3.44	18.96
6.9-7.9	9	15.51	34.48
7.9-8.9	10	17.24	51.72

8.9-9.9	22	37.93	89.65
9.9-10.9	6	10.34	100
suma	58		

Tabla 7.6 Calificaciones de la última evaluación agrupadas en clases.

Histograma de la última Evaluación



Si de nuevo se ordenan los 58 datos (calificaciones de abril de 1998) en forma ascendente, se observará que sus valores centrales están en los datos 29 y 30 correspondientes a 8 y 8, respectivamente, por lo que la **mediana** es igual a:

$$\text{Mediana} = (8+8)/2 = 8$$

Por otro lado, en la columna de FC de la tabla 7.6 se puede observar que la calificación 9 es la que tiene una mayor frecuencia y no existe otra frecuencia igual, por lo que de nuevo esta agrupación de datos es unimodal y su **moda** es igual a 9.

$$\text{Moda} = 9$$

La desviación estandar

$$\sigma = [\{ (4-7.84)^2(3) + (5-7.84)^2(6) + (6-7.84)^2(2) + (7-7.84)^2(9) + (8-7.84)^2(10) + (9-7.84)^2(22) + (10-7.84)^2(6) \} / 58]^{1/2}$$

$$\sigma = 1.6795, \text{ la tomaremos como } 1.68$$

Por lo tanto, lo más denso de las calificaciones de nuestra muestra ahora anda entre 7.84 ± 1.68 . Es decir, las frecuencias más significativas de las calificaciones están desde 6.16 hasta 9.52, tomando números enteros están desde 6 hasta 10.

Comparando el estudio estadístico de la primera evaluación en Agosto de 1997 y la última en Abril de 1998 se destacan algunas **conclusiones**:

- a) En las gráficas del histograma y polígono de frecuencias se destaca un notable ascenso en la mejoría de las calificaciones de los estudiantes, la mediana de 6.5 pasa a ser 8, la moda de 8 pasa a ser 9, es decir, existe una mayor concentración de estudiantes con mejores calificaciones.
- b) De alguna manera esta conclusión corrobora la anterior, ya que la desviación estandar en los dos histogramas hace manifiesta la permanencia de un mayor número de estudiantes con mejores calificaciones y aprobatorias, esto es, en la primera evaluación se tiene que las calificaciones más frecuentes están desde 4 hasta 9 y en la última evaluación están desde 6 hasta 10. Esto lógicamente indica una disminución en el número de reprobados, desde 18 que había al principio hasta 9 que quedaron al final.
- c) También consideramos conveniente resaltar el aumento en la calificación media de los 58 estudiantes, desde 6.39 hasta 7.84. Aunque se observa una gran mejoría en este renglón, es conveniente continuar con la investigación de los factores involucrados en

este proceso a fin de mejorar un poco más el desempeño del estudiante en la gráfica de una función y por ende, sus calificaciones en la asignatura.

Comparando el estudio estadístico de la primera y última evaluación del grupo control con el estudio correspondiente a la primera y última evaluación de los estudiantes que cursaron el ciclo escolar 1997-1998 se destacan las siguientes **conclusiones**:

- a) En el cálculo de las medidas de tendencia central, constituidas por la mediana y la moda del grupo control, no se nota ninguna mejoría, la mediana es 6 y la moda es 7 en la primera evaluación; mientras que en la última evaluación la mediana continúa siendo 6, pero la moda disminuye a 6. Esto indica una mayor concentración de frecuencias con calificaciones entre 6 y 7; mientras que, en la primera y última evaluación de los estudiantes que cursaron el ciclo escolar 1997-1998, la mediana de 6.5 pasa a ser 8 y la moda de 8 pasa a ser 9, es decir, existe una gran mejoría en las frecuencias de calificaciones entre 8 y 9.

- b) Haciendo referencia a las calificaciones medias mensuales de la primera y última evaluación: el grupo control obtiene una media de 5.87 en la primera evaluación y 6.10 en la última; mientras que el grupo muestral de los estudiantes que cursaron el ciclo escolar 1997-1998 obtiene una media de 6.39 en la primera evaluación y 7.84 en la última. Destacándose una mejoría notable en las calificaciones mensuales promedio de los estudiantes objetos de la investigación.

- c) Por último se hará mención del número de reprobados que existen mensualmente en estas evaluaciones: por lo que toca a la primera y última evaluación del grupo control

existen 22 y 19 reprobados, respectivamente. Mientras que, en el otro grupo de estudiantes existen 18 reprobados en la primera evaluación y 9 en la última. De nuevo es notorio el beneficio logrado con los factores involucrados en esta investigación en el grupo muestral que cursó el ciclo escolar 1997-1998.

Por último se agrega otro parámetro estadístico llamado **coeficiente de relación lineal de Pearson**, que proporciona una medida del grado de relación entre dos variables, y se calcula mediante la expresión

$$r = S_{(xy)} / [S_{(xx)} S_{(yy)}]^{1/2}$$

donde

$$S_{(xx)} = \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 / n$$

$$S_{(yy)} = \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2 / n$$

$$S_{(xy)} = \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i) / n, n = \text{número de parejas de datos, } S_{(xy)} = \text{covarianza.}$$

Se va a relacionar el tiempo de contacto (experiencia adquirida) en meses del estudiante en el curso de Cálculo y sus calificaciones mensuales promedio, con el fin de observar si en realidad existe una correlación positiva y aceptable en términos de los rangos que establece la Estadística.

Variable X: experiencia en meses con el curso en cuestión de los 58 alumnos.

Variable Y: calificación media mensual de los 58 alumnos.

Se considerarán las 7 evaluaciones mensuales, desde Agosto de 1997 hasta Abril de 1998, esto es, durante V y VI semestres.

X	1	2	3	4	5	6	7
Y	6.39	6.72	6.96	7.103	7.15	7.32	7.84

	X	Y	XY	X ²	Y ²
	1	6.39	6.39	1	40.832
	2	6.72	13.44	4	45.158
	3	6.96	20.88	9	48.441
	4	7.103	28.412	16	50.452
	5	7.15	35.75	25	51.122
	6	7.32	43.92	36	53.582
	7	7.84	54.88	49	61.465
Σ	28	49.483	203.672	140	351.055

Tabla 7.7 Parámetros para el coeficiente de relación lineal de Pearson.

Realizando operaciones, se tiene

$$S_{(xx)} = 28$$

$$S_{(yy)} = 0.12598$$

$$S_{(xy)} = 5.74$$

Valor del coeficiente de variación:

$$r = S_{(xy)} / [S_{(xx)} S_{(yy)}]^{1/2} = 5.74 / [28 (0.12598)]^{1/2} = 0.9664$$

$$r = 0.9664$$

La respuesta indica una correlación positiva, es decir, entre más experiencia o tiempo de contacto tenga el estudiante con el curso de Cálculo (y por ende con los factores involucrados en él que son: motivación, retroalimentación y aprendizaje significativo), mayor es la calificación promedio mensual de estos estudiantes. Por otro lado, el valor del coeficiente de relación igual a 0.9664 indica una correlación entre las dos variables clasificada como **fuerte** en términos estadísticos, esto es, $0.8 \leq r \leq 1$.

Este último parámetro estadístico viene a ratificar la evidencia de la incidencia positiva de los factores estudiados en esta investigación como facilitadores del aprendizaje en la graficación de funciones algebraicas manejadas en los programas de Matemáticas de V y VI semestres en la Escuela Preparatoria Federal por Cooperación Activo 20-30, “Albert-Einstein”.

Según el tipo de investigación realizada, se encontró que con la información recogida resulta que en efecto, el aprendizaje mejora, elevando la calidad de los factores involucrados en este proceso; por lo tanto las **conclusiones** son:

- a) Que el profesor evite a toda costa, el abuso en la actividad expositiva de sus clases y por ende la recepción pasiva del conocimiento por parte del alumno, logrando incrementar la participación de los estudiantes durante sus explicaciones. El profesor no debe enclaustrarse en intentar ser un expediente de verdades sino un facilitador del conocimiento, de tal forma, que facilite al estudiante la construcción de éste, en este sentido, se recomienda el aprendizaje significativo; lograr que el estudiante encuentre

significados en las gráficas de funciones para asegurar una mejor transferencia de este conocimiento y que resulte más duradero a largo plazo.

- b) Crear un clima adecuado en el salón de clases, que durante la cátedra del profesor predomine un ambiente de gusto por la impartición de la materia y un respeto hacia los demás. Generar una confianza bien entendida, que ésta no se preste a abusos de ninguna clase, por el contrario, que permita la generación de preguntas y comentarios que enriquezcan la discusión de un tema en particular. Lograr, con la motivación que el estudiante vaya desterrando gradualmente ese obstáculo histórico que se tiene de las Matemáticas por un gran porcentaje de ellos, y que en ocasiones no les deja crecer en todo su potencial.

- c) Resaltar las aplicaciones a la vida real de las gráficas de algunas funciones algebraicas, tales como, el diseño de una lata de refresco o un tanque de almacenamiento de agua potable, entre otros; con el propósito de que el estudiante encuentre un panorama más fértil en significados y menos árido en abstracciones.

- d) Tener en la retroalimentación, un proceso de mejora insustituible en el aprendizaje de la graficación de funciones algebraicas, resaltando los aspectos más sobresalientes, así como también, aquellos aspectos que el estudiante podría mejorar en la gráfica de una función. También se recomienda la utilización adecuada de los estudiantes más adelantados para la organización de grupos de retroalimentación que siempre resultarán de utilidad a los estudiantes de más lento aprendizaje; principalmente en algunas gráficas particularmente difíciles, por ejemplo, las que sólo poseen puntos de inflexión.

e) Experimentar con el método “aritmética de funciones”, con el fin de generar nuevos comportamientos tendenciales en las gráficas de funciones algebraicas y poder transmitir esta creatividad al estudiante; con el objeto de proporcionarle más recursos que le servirán de apoyo cuando enfrente un proceso de graficación en alguna función algebraica.

f) Este último punto, es quizá de igual o mayor importancia que los anteriores, se refiere a que todas estas estrategias, deberán estar en continua reflexión y análisis para que el profesor incorpore todos los aspectos valiosos que vaya descubriendo en sus experiencias escolares relativas a la graficación de funciones algebraicas y enriquezca su desempeño docente día con día.

BIBLIOGRAFÍA

Almaguer, Teresa (1995). Manual de psicología educativa. (2a. Ed.). Monterrey, Nuevo León: ITESM.

Álvarez, M. y Cantoral (1992). Acerca de la noción de tangente. Notas del depto. de matemáticas. México, D. F.: ITAM.

Ander-Egg, Ezequiel (1996). Técnicas de investigación social. (24a. Ed.). México, D. F.: Ed. El Ateneo.

Ario, Garza (1996). Técnicas de investigación para estudiantes de ciencias sociales. (6a. Ed.). México, D. F.: El colegio de México.

Ausubel, D.P., Novak, J.D. Hanesian, H. (1990). Psicología Educativa. (2a. Ed.). México, D.F.:Ed. Trillas.

Cantoral, Ricardo (1993). Hacia una didáctica del cálculo basada en la cognición. Programa editorial del dpto. de matemática educativa, 7, 1 a 7. México, D. F.: CINVESTAV.

Cantoral, Ricardo, Reséndiz, Evelia (1995). Variable y variación: estudio del envejecimiento de sus situaciones de enseñanza. Un acercamiento sistémico en el sistema escolar mexicano. Programa editorial del dpto. de matemática educativa, 9(2), 1 a 8. México, D.F.: CINVESTAV.

Cassarini, Martha (1996). Manual de teoría y diseño curricular. (2a. Ed.). Monterrey, N.L.: ITESM.

Codocedo, Teresa (1992). Ausencia de conceptos en los cursos de cálculo diferencial. Programa editorial del dpto. de matemática educativa, 2, 1 a 7. México, D.F.: CINVESTAV.

Cordero, Francisco, Solís, Miguel (1997). Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo. Programa editorial del dpto. de matemática educativa, 8(2), 1 a 9. México, D.F.: CINVESTAV.

Edwards y Penney (1987). Cálculo y Geometría analítica. (2a. Ed.). México, D.F.: Ed. PHH.

Farfán, Rosa María (1991). El curso de precálculo: un enfoque gráfico. Programa editorial del dpto. de matemática educativa, 5, 1 a 7. México, D.F.: CINVESTAV.

García Alba E., Reyes Córdoba Bladimir (1990). Ontología de lecturas de tesis I. Monterrey, N.L.: ITESM.

Guershon Harel y Ed Dubinsky (1992). The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy. Mathematical association of América (notes and report series #25). U.S.A.

Howson, A. G. y Kahane, J. P. (1990). Mathematics and cognition: a research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education. Cambridge university Press. U.S.A.

Imaz, Carlos (1987). ¿Qué es la matemática educativa?. Programa editorial del dpto. de matemática educativa, 1, 1 - 7. México, D.F.: CINVESTAV.

Klausmeieier-Goodwin (1966). Psicología Educativa. (2a. Ed.). Los Ángeles, California, U.S.A. : Ed. Harla.

Leithold, Louis (1972). El cálculo con geometría analítica. (2a. Ed.). México, D.F.: Ed. Harla.

Levin, Jack (1979). Fundamentos de Estadística en la investigación social. (2a. Ed.). New York, N.Y.: Ed. Harla.

Martin, Marisa (1995). Apuntes personales de la materia de Psicología Educativa. Monterrey, N.L.: ITESM.

Orlich (1995). Técnicas de enseñanza. (3a. Ed.). México, D.F.: Ed. Limusa.

Ornelas, Carlos (1995). El sistema educativo mexicano. (1a. Ed.). México, D.F.. Ed. Limusa.

Ruiz, Estela (1995). Apuntes de un diplomado en docencia. Chihuahua, Chih.: CID.

Sacristán J. Gimeno y Pérez Gómez A. I. (1995). Comprender y transformar la enseñanza. (4a. Ed.). Madrid, España: Ed. Morata.

Sestier, Andrés (1978). Diccionario enciclopédico de las matemáticas. (1a. Ed.). México, D.F.: Ed. Del valle de México.

Shilov, G.E. (1976). Cómo construir gráficas. (3a. Ed.). Moscú, U.S.S.R.: Ed. Limusa.

Tsipkin, A.G. (1985). Manual de Matemáticas para la enseñanza media. (1a. Ed.). Moscú, U.S.S.R.: Ed. Mir.

Woolfolk, Anita E. (1990). Psicología Educativa. (3a. Ed.). México, D.F.:Ed. PHH.

CURRÍCULUM DEL ALUMNO

- Nombre: Adalberto Segovia Lerma.

- Lugar de nacimiento: Chihuahua, Chihuahua., México.

- Estudios Académicos:
 - a) Educación Primaria en la Escuela Primaria Pedro Meoqui de ciudad Meoqui, Chihuahua.
 - b) Educación Secundaria en la Escuela Secundaria Tecnológica Agropecuaria de ciudad Delicias, Chihuahua.
 - c) Nivel Medio Superior en la Escuela Preparatoria Federal por Cooperación Activo 20-30 “Albert Einstein” de ciudad Delicias, Chihuahua.
 - d) Educación Superior en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Chihuahua (Ingeniero Civil).
 - e) Maestría en Educación con especialización en Matemáticas en el ITESM, campus Chihuahua.

- Lugar de Trabajo: Escuela Preparatoria Federal por Cooperación Activo 20-30 “Albert Einstein”. Ciudad Delicias, Chihuahua.

- Años de trabajo en dicha Institución: 15.

- Cargo: Docente en el área de Física y Matemáticas.