



**TECNOLÓGICO
DE MONTERREY**

Biblioteca
Campus Ciudad de México

154-8

Hacemos constar que en la Ciudad de México, el día 02 de Noviembre del 2011, el alumno:

Arturo Cortés Aguilar

Sustentó el Examen de Grado en defensa de la Tesis titulada:

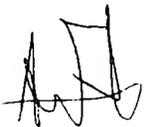
“Estimación del residual de un bono respaldado por hipotecas mediante un modelo de riesgo crédito: una comparación de resultados de la teoría de cópulas y el modelo IRB de Basilea II en datos del mercado hipotecario mexicano.”

Presentada como requisito final para la obtención del Grado de:

DOCTORADO EN CIENCIAS FINANCIERAS

Ante la evidencia presentada en el trabajo de tesis y en este examen, el *Comité Examinador*, presidido por el **Dr. Arturo Lorenzo Valdés**, ha tomado la siguiente resolución:

— APROBADO POR UNANIMIDAD —



Dr. Andrés Daniel Fundia Aizenstat
Director de Tesis



Dr. Igor Patricio Rivera González
Co-Director



Dr. Arturo Lorenzo Valdés
Lector



Dr. José Víctor Reynoso Vendrell
Lector



Dr. José Antonio Nuñez Mora
Director del Programa Doctoral



TECNOLÓGICO
DE MONTERREY

Instituto Tecnológico y de Estudios
Superiores de Monterrey
Campus Ciudad de México

Estimación del residual de un bono respaldado
por hipotecas mediante un modelo de riesgo
crédito: una comparación de resultados de la
teoría de cópulas y el modelo IRB de Basilea II en
datos del mercado hipotecario mexicano

TESIS QUE PARA RECIBIR EL TÍTULO DE
DOCTOR EN CIENCIAS FINANCIERAS

PRESENTA:

Arturo Cortés Aguilar

Director:

Dr. Andrés Daniel Fundia
Aizenstat

Co-Director:

Dr. Igor Patricio Rivera
González

Lector:

Dr. Arturo Lorenzo Valdés

Lector:

Dr. José Víctor Reynoso
Vendrell

México D.F., Noviembre 2011

kel

.b14584142

Texas

HG2040.S.M6

CG7

2011

A Dios sobre todas las cosas.

A mi amada esposa Yolanda e hijos Dana, Arturo y Héctor con todo mi cariño.

A ti...

ÍNDICE

ÍNDICE DE CUADROS	<i>vi</i>
ÍNDICE DE FIGURAS	<i>vii</i>
RESUMEN	<i>viii</i>
CAPÍTULO I	9
I.1 INTRODUCCIÓN.....	9
I.1.1 <i>MERCADO HIPOTECARIO MEXICANO</i>	9
I.1.2 <i>MERCADO DE BONOS RESPALDADOS POR HIPOTECAS</i>	11
I.1.3 <i>RIESGO CRÉDITO</i>	17
CAPÍTULO II	20
II.1 BONOS RESPALDADOS POR HIPOTECAS	20
II.1.1 <i>COLATERAL</i>	20
II.1.2 <i>PREPAGO</i>	21
II.1.3 <i>MODELO MULTIFACTORIAL DE PREPAGO</i>	23
II.1.4 <i>PORTAFOLIO DE CRÉDITOS SUJETO A BURSATILIZACIÓN</i>	26
II.1.4.1 <i>Flujos de Efectivo</i>	26
II.1.4.2 <i>Rendimiento</i>	28
II.2 <i>PARÁMETROS DE RIESGO CRÉDITO</i>	29
II.3 <i>MODELOS DE RIESGO CRÉDITO</i>	32
II.3.1 <i>MODELO DE MERTON</i>	34
II.3.2 <i>MODELO KMV</i>	37
II.3.3 <i>MODELO CREDITRISK*</i>	42
II.3.4 <i>MODELOS DE MEZCLA BERNOULLI</i>	45
II.3.4.1 <i>Representación del modelo CreditRisk+ como un modelo de mezcla Bernoulli</i>	46
II.3.5 <i>MODELO DE CALIFICACIONES INTERNAS DE BASILEA II</i>	46
CAPÍTULO III	50
III.1 <i>CÓPULAS</i>	50
III.2 <i>MEDIDAS DE DEPENDENCIA</i>	53
III.3 <i>COEFICIENTES DE DEPENDENCIA EN LA COLA</i>	56
III.4 <i>CÓPULAS ELÍPTICAS</i>	57
III.4.1 <i>CÓPULA NORMAL</i>	58
III.4.2 <i>CÓPULA t-STUDENT</i>	59
III.5 <i>CÓPULAS ARQUIMEDIANAS</i>	60
III.5.1 <i>CÓPULA CLAYTON</i>	61
III.5.2 <i>CÓPULA FRANK</i>	62
III.6 <i>CÓPULAS DE VALORES EXTREMOS</i>	62
III.6.1 <i>CÓPULA GUMBEL</i>	62
III.6.2 <i>CÓPULA GALAMBOS</i>	63
III.6.3 <i>CÓPULA HÜSLER REISS</i>	63
III.7 <i>CÓPULA EMPÍRICA</i>	64

CAPÍTULO IV.....	65
METODOLOGÍA	65
CAPÍTULO V.....	67
RESULTADOS.....	67
CAPITULO VI.....	88
CONCLUSIONES.....	88
LITERATURA CITADA	91
ANEXO I. RESULTADOS DEL AJUSTE DE CÓPULAS	A-1
ANEXO II CÓDIGO R	A-7

ÍNDICE DE CUADROS

Cuadro II.1 Indicadores en un grupo de créditos a tasa fija.....	26
Cuadro V.1 Grupos y probabilidad de incumplimiento resultado de la prueba CHAID.....	70
Cuadro V.2 Composición observada de la estructura de bursatilización.....	73
Cuadro V.3 Estimación de la pérdida esperada y no esperada, <i>a</i> -Cuantil y déficit esperado a diferentes cuantiles (<i>PE</i> , <i>UL_α</i> , <i>Q_α</i> , <i>ES_α</i> respectivamente) para el bono respaldado por hipotecas mediante simulación histórica	73
Cuadro V.4 Estimación de la pérdida esperada y no esperada a diferentes cuantiles (<i>PE</i> , <i>UL_α</i> , respectivamente) para el bono respaldado por hipotecas con el modelo de BASILEA II (BIS, 2006)	75
Cuadro V.5 Estimación del residual por el modelo de BASILEA II, expresión II.69 con parámetros de acuerdo al cuadro V.6	75
Cuadro V.6 Parámetros para la expresión II.69	76
Cuadro V.7 Estimación paramétrica de las marginales <i>t</i> -Student.....	82
Cuadro V.8 Estimación paramétrica de la cópula <i>t</i> -Student para el grupo Total	82
Cuadro V.9 Pérdida esperada y no esperada, estimación paramétrica de la cópula <i>t</i> -Student.....	84
Cuadro V.10 <i>a</i> -Cuantil (<i>Q_α</i>), estimación paramétrica de la cópula <i>t</i> -Student	84
Cuadro V.11 Déficit esperado (<i>ES_α</i>), estimación paramétrica de la cópula <i>t</i> -Student	85
Cuadro V.12 Pérdida esperada y pérdida no esperada a diferentes cuantiles para la cópula <i>t</i> -Student semi-paramétrica	86
Cuadro V.13 Pérdida esperada y pérdida no esperada a diferentes cuantiles para la cópula Normal semi-paramétrica	86
Cuadro V.14 Pérdida esperada y pérdida no esperada a diferentes cuantiles para la cópula Gumbel semi-paramétrica.....	86
Cuadro V.15 Comparativo de estimaciones	87

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura V.1 Segmentación del portafolio mediante la técnica CHAID	71
Figura V.2 Panel de amortización base: (Izquierda a derecha) residuales 1, 2 y residual 3 (abajo)	76
Figura V.3 Panel de amortización estresado: (Izquierda a derecha) residuales 1, 2 y (abajo) residual 3	80
Figura V.4 Panel de grupos de T_i y EAD . Densidades de las cópulas ajustadas	83

RESUMEN

En el presente trabajo se emplea la teoría de cópulas (Nelsen, 1999) para estimar la pérdida no esperada en un portafolio de créditos hipotecarios sujetos a bursatilización, con el objetivo de disminuir la porción de residual en la estructura y poder así incrementar la emisión de bonos, los resultados se comparan con los obtenidos bajo el modelo de calificaciones internas básico (BIS, 2006) considerando una correlación de 0.20 y la establecida en el mismo de 0.15, la información está compuesta por créditos hipotecarios agrupados por la razón crédito valor de garantía al momento de la originación (LTV de originación) aplicando la técnica de árboles de segmentación basados en pruebas χ^2 (CHAID), resultando en 5 grupos y se considera un sexto grupo formado por todo el portafolio. Las variables analizadas son la tasa de incumplimiento (T_i) que considera a créditos vencidos con más de tres atrasos en pago mensual y la exposición al incumplimiento (EAD) igual al saldo insoluto del crédito vencido. Las variables bajo estudio fueron modeladas ajustando paramétricamente una cópula t -Student bivariada y semi-paramétricamente la cópula t -Student, Normal y Gumbel y los resultados obtenidos muestran que al aplicar la teoría de cópulas (Nelsen, 1999) se obtienen estimaciones mayores a los obtenidos bajo el modelo de calificaciones internas e inferiores al residual real obtenido mediante análisis de escenarios.

CAPÍTULO I.

I.1 INTRODUCCIÓN

Un punto central en el análisis de cualquier estructura financiera es su valuación, dentro del mercado de bonos respaldados por hipotecas, han surgido un gran número de esfuerzos para obtener una buena estimación del valor de mercado, considerando la mayor información disponible y fundamentados principalmente en la teoría de ausencia de oportunidades de arbitraje. En el mercado mexicano, el originador de los créditos hipotecarios recurre a la estrategia de bursatilización traspasando activos crediticios a un fideicomiso con la finalidad de obtener más recursos para generar nuevos préstamos, al respecto, los agentes estructuradores están enfocados en resolver el problema de la falta de liquidez de los originadores de los créditos hipotecarios, más que en establecer juicios respecto al uso óptimo del capital, si se considera a la misma estructura de bursatilización como una entidad financiera, resultando en residuales que pueden sobre o sub valorar el riesgo de crédito de la estructura de acuerdo a lo que reflejaría un modelo de estimación de pérdidas esperadas y no esperadas.

I.1.1 MERCADO HIPOTECARIO MEXICANO

La oferta de vivienda en México es mucho menor que la demanda, ocasionando que la adquisición de una propiedad de uso habitación sea costosa¹. A diferencia de otros mercados, en el caso nacional, los créditos para adquisición de vivienda son a tasa fija, asimismo, los agentes originadores han desarrollado tanto esquemas de financiamiento, como sistemas de originación crediticia que permiten otorgar créditos de acuerdo a sus mejores estimados estadísticos sobre el perfil de riesgo crédito que tienen los individuos.

¹ Es decir, los altos precios para adquisición de vivienda se deben a la oferta y demanda y no a especulación.

En términos generales, las hipotecas generalmente se categorizan por el tipo de interés devengado y el tamaño del préstamo (Gangwani, 1998). Una hipoteca a tasa fija, como su nombre lo indica, tiene una tasa de interés fija por todo el plazo del crédito. Los plazos del crédito pueden variar de 15 años hasta 30 años, aunque pueden existir otras variaciones. Las hipotecas a tasa ajustable (ARM), tienen tasas de interés que varían de acuerdo al producto específico, estos créditos también se caracterizan por su tamaño. Una característica importante de los créditos hipotecarios es la razón deuda a valor de la garantía (LTV ó Loan to Value), la cual dice cuánto vale el préstamo contra el valor de mercado del colateral, en los créditos a plazo de 30 años, es común encontrar valores cercanos al 95% al momento de originar el crédito y se puede decir que el acreditado dio un enganche del 5%, el cual puede ser un porcentaje del valor de la vivienda más gastos administrativos. Independientemente del tipo de hipoteca, la mayoría tienen cláusulas contractuales similares, el propósito de estas cláusulas es establecer los derechos de propiedad tanto del acreditado como del prestamista. En un convenio hipotecario se establecen los acuerdos para que el acreditado mantenga la propiedad del bien, se asegure por daños a su patrimonio y evite realizar modificaciones estructurales que ocasionen efectos negativos en el valor de la vivienda. Las cláusulas legales de los convenios permiten acelerar el proceso legal en la recuperación de las garantías en los eventos de incumplimiento, además se establecen los privilegios de prepagó por parte de los deudores cuando optan por liquidar un crédito. Cuando un acreditado entra en incumplimiento, se conviene por lo general la adjudicación de la garantía mediante la cual, al recuperarla, los recursos provenientes del remate de ésta, son distribuidos de acuerdo a la subordinación establecida, es decir, de acuerdo a la prelación en el contrato. Asimismo en casos especiales, se le otorga al deudor la oportunidad de reestructurar su crédito o a entregar la garantía de forma voluntaria como pago del saldo adeudado, lo cual suele ocurrir cuando el LTV observado al momento del litigio es mayor o mucho mayor a 100%.

I.1.2 MERCADO DE BONOS RESPALDADOS POR HIPOTECAS

La demanda potencial de financiamiento para la adquisición de vivienda, a futuro, incrementa las expectativas de crecimiento de los participantes del mercado hipotecario, mismos que consideran recurrir a la emisión de bonos respaldados por hipotecas como una estrategia de solución a sus problemas de liquidez y que en algunos casos llega a ser una vía de financiamiento muy atractiva, cuando el mercado de deuda lo permite. Dentro de este mercado con expectativa de expansión, en un contexto general, la bursatilización puede estar motivada por aspectos financieros, regulatorios, fiscales, contables y estratégicos ya que puede verse como una venta de activos o un financiamiento y en muchos casos puede tener ambas características.

Los originadores de créditos recurren a la venta de sus activos hipotecarios para la emisión de bonos y así obtener recursos financieros y emplearlos para originar más créditos, dicho mercado ha sido el que más ha entrado en el negocio de la bursatilización. En el mercado Mexicano la bursatilización se lleva a cabo con transferencia de la propiedad de los activos a una entidad legalmente constituida y regulada llamada Fideicomiso, la cual es la responsable de la administración de los créditos transferidos y de la amortización de los bonos emitidos.

Si se considera que se ha realizado una bursatilización con transferencia de propiedad, el propietario cede completamente los activos, el cedente recibe el efectivo de los activos proveniente de los inversionistas que compran los bonos emitidos por el fideicomiso y los bonos son pagados mediante la amortización de los créditos hipotecarios.

En una estructura de bursatilización, la porción² que no forma parte de los bonos emitidos y constituye parte del capital del fideicomiso, funciona como una porción de seguro contra incumplimiento en los pagos de los créditos, esto significa que es la parte que absorbe las pérdidas y generalmente es posesión del cedente, esto quiere decir que como el cedente ya recibió el valor de los créditos al momento de la transferencia para la originación de nuevos créditos, con excepción de esa proporción, tiene un cambio en su exposición al riesgo crédito y este cambio se refleja en un menor requerimiento de capital en su balance general, sin embargo tiene la desventaja de tener un activo subordinado, el cual regresará a formar parte de su balance en el caso de que se cumplan las siguientes dos condiciones: los bonos emitidos deben estar completamente pagados y las pérdidas realizadas sean menores que el residual.

La emisión de estructuras financieras respaldadas por hipotecas requiere fundamentalmente de la estimación del valor de mercado de los créditos, para ello, es necesario obtener el valor presente de los flujos de efectivo futuros provenientes de la amortización de los créditos hipotecarios. Si los créditos hipotecarios no tienen un esquema de amortización conocido, los flujos de efectivo se generan mediante simulación, debido a que por lo general, son créditos con tasas de interés variable la cual depende de las condiciones del mercado en el futuro; en el caso de hipotecas a tasa fija, los flujos de efectivo se generan de acuerdo a la amortización programada y en ambos casos, se simulan las tasas de incumplimiento y prepago, se aplican curvas teóricas de prepagos e incumplimiento o se modelan estadísticamente. Para la estimación del valor presente se requiere de una definición de la estructura de plazos para descontar dichos flujos.

Un recurso a la definición de la tasa de descuento de los flujos de efectivo es el modelo de estructura de plazos de Cox-Ingerson-Ross (1985) empleado genéricamente para

² Comúnmente se le conoce como Firts Lost piece (FLP), (Davidson *et al*, 2003)

valuar mortgage backed securities (MBS)³, donde la tasa de corto plazo del mercado que determina el precio del bono, sigue un proceso estocástico con volatilidad constante y la ecuación diferencial de segundo orden que resulta del modelo, se resuelve vía métodos Monte Carlo. Sin embargo, este modelo estima el valor de un bono que no tiene riesgo de incumplimiento y es necesario considerarlo como punto de partida para poder incluir las características generales de un bono respaldado por hipotecas en el caso mexicano, a saber, riesgo de incumplimiento, opción de prepago por variables ajenas a las tasas de interés y otras características del crédito, como la tasa de amortización y su plazo.

El riesgo de incumplimiento de un bono respaldado por hipotecas resulta de una omisión de pagos del suficiente número de acreditados que impidan el cumplimiento del pago del cupón a los inversionistas, es decir, que la amortización de los créditos hipotecarios no es suficiente para afrontar el compromiso adquirido en la emisión del bono, este riesgo es absorbido por el residual y el papel que desempeña en la estructura impacta en la calificación del bono. Así como el incumplimiento, el prepago de los créditos afecta el rendimiento del inversionista, este evento de prepagar por parte del deudor, puede ser modelado como una opción de compra americana que depende del nivel de riqueza del acreditado (Merton, 1974) y puede o no depender de las tasas de interés del mercado, es decir, se pueden diferenciar prepagos influenciados por variables sensibles a las tasas de interés, como oportunidades de refinanciamiento; o por variables que no dependen de las tasas de interés, como muerte, daños a la garantía o prepagos parciales voluntarios. En el mercado de MBS se emplean curvas teóricas de prepago, sin embargo, de acuerdo a la literatura (Fabozzi, 2006), actualmente solo son convenciones del mercado ya que fueron generadas bajo ciertos ciclos de tasas de interés y aunque existe evidencia empírica que este benchmark ya no es tan apropiado,

³ Dunn y McConnell (1981) emplean el modelo CIR para valorar MBS de la agencia GNMA concluyendo que la amortización y el prepago tienen un impacto positivo, caso contrario a la opcionalidad de compra de los bonos y que estas tres características reducen el riesgo de tasa de interés del bono y consecuentemente su rendimiento.

continúa siendo usado en el análisis de flujos de efectivo de bonos respaldados por hipotecas de las agencias como GNMA (Government National Mortgage Association).

Así como un crédito puede ser prepago, dentro de un MBS puede ocurrir otro tipo de prepago, éste ocurre cuando el estructurador considera no realizar pagos al residual y todo el flujo de efectivo generado por la amortización del grupo de créditos hipotecarios, es empleado para repartir los pagos dentro de la cascada de flujos del bono, primero las comisiones y los cupones de acuerdo a la subordinación y el remanente se convierte en un tipo de prepago como un acelerador de amortización del bono pagando por anticipado una porción de su valor nominal.

Por otro lado, la valuación de los activos hipotecarios lleva a obtener el rendimiento del bono respaldado por hipotecas en el lado del pasivo del balance del fideicomiso, dado que los flujos de efectivo generados por la amortización de los créditos, menos los costos de administración, son empleados para pagar el cupón del bono, las variables empleadas para valorar los activos afectan al lado de los pasivos y capital. La mayoría de los modelos en la literatura para la valuación de bonos respaldados por hipotecas de Estados Unidos (por ejemplo Dunn y McConell, 1981), se enfocan principalmente en la valuación de la parte del pasivo, los bonos son valuados estableciendo que el valor se afecta principalmente por los prepagos ya que los bonos emitidos por las agencias administradoras como la Government National Mortgage Association (GNMA) están garantizados contra incumplimiento en pago de los acreditados, debido a que esto no ocurre en el mercado Nacional es necesario incluir este factor de riesgo en su valuación, otra diferencia importante se debe a que los créditos en Estados Unidos se emiten a tasa variable y por lo tanto es otro factor de riesgo debido a las oportunidades de refinanciamiento cuando la tasa contratada es mayor a la tasa del mercado; en Kariya *et al* (2002) se emplea un modelo de tres factores para la valuación de los bonos donde las oportunidades de refinanciamiento dependen de un índice de precios de

vivienda, los otros dos factores son la tasa del crédito y la tasa de descuento de los flujos de efectivo generados por la amortización de los créditos.

Boudoukh *et al* (1997) menciona que los niveles en las tasas de interés proporcionan un buen ajuste como variable proxy para la tasa esperada de prepago, la vida promedio de los flujos de efectivo y para observar que tanto está una opción dentro del dinero (moneyness), mientras que la pendiente de la estructura de plazos funciona como control para la tasa promedio a la cual estos flujos de efectivo tienen que ser descontados, mediante un modelo multivariado para valorar MBS en un ambiente de tasas de interés con multifactores. Carey (1998) analiza un portafolio de bonos de emisión privada mediante el incumplimiento, severidad y tasas promedio de pérdidas contra emisiones públicas y muestra que los bonos privados de unas clases de riesgo tienen mejor desempeño que sus similares emisiones públicas y en ambos casos, la diversificación y la aversión al riesgo individual influyen sobre la distribución de pérdidas.

Por otro lado, una característica relevante que es considerada con detenimiento es lo que se refiere la garantía (vivienda), ya que desde la originación del crédito determina que impacto tendría en caso de incumplimiento; Chan y Thakor (1987) prueban equilibrio en contratos de crédito y colocaciones bajo diferentes especificaciones competitivas y explican los roles económicos del colateral considerando riesgo moral y selección adversa, un principal resultado es que a mayor sea conceptualizado el equilibrio competitivo entre oferentes de crédito, afecta más la caracterización de equilibrio en contratos de crédito que llevan a cabo los prestamistas y prestatarios.

Chan y Kanatas (1985) investigan que papel cumple el colateral en los contratos de crédito, ya que en garantías por incumplimiento, el prestamista requiere establecer cuidadosamente sus intereses para que en el evento de un incumplimiento de su contraparte, no se vean severamente afectados sus rendimientos. A esto concluyen que

eliminando el riesgo moral, para que el colateral juegue un papel significativo debe haber, o un mercado de crédito imperfectamente competitivo o que los prestamistas sean adversos al riesgo o que existan valuaciones asimétricas entre los prestamistas y prestatarios. En este mismo sentido, Bester (1994) hace un análisis de la función del colateral en un modelo de renegociación de deuda, esto es, que en los contratos de crédito, el prestamista impone sus condiciones para el evento de bancarrota o incumplimiento, teniendo con esto un contrato óptimo en el cual, el acreditado tenga incentivos para establecer acuerdos con el prestamista de acuerdo a las condiciones del contrato de crédito. Otro aspecto importante es el tema referente a la estructura de capital para analizar la emisión de deuda mediante bursatilización y al respecto, Bolton y Freixas (2000) proponen un modelo de equilibrio entre el mercado y un ambiente corporativo considerando información asimétrica y la inexistencia de impuestos, con la finalidad de que la emisión de capital, deuda bancaria y financiamiento mediante la emisión de bonos puedan estar en equilibrio.

Al estructurar un grupo de créditos hipotecarios, el tamaño del residual determina la calificación del bono y el rendimiento prometido al inversionista, por ejemplo, se obtendría una calificación AAA, haciendo el residual suficientemente grande como para solo tener un tramo de la estructura equivalente a bonos que sean amortizados en su totalidad de acuerdo a lo programado o con amortización anticipada, esto impacta a los ingresos que por la venta o traspaso de las hipotecas obtendría el originador de los créditos (sin considerar la afectación en su balance); en el caso contrario, el bono obtendría una calificación muy baja lo que resultaría en un cupón más caro para satisfacer el apetito de riesgo-rendimiento del inversionista. Así, si ambos participantes del mercado conocen la misma información y no existen oportunidades de ganancias extraordinarias, el residual sería establecido por el riesgo crédito de los colaterales, comprometiendo los flujos de acuerdo a la subordinación definida siguiendo los criterios que marcaría un agente calificador para el efecto de un alto grado de inversión, en este negocio el originador que se queda con el residual, visto como un

inversionista que compra una nota subordinada no calificada, estaría dispuesto a obtener el diferencial entre las pérdidas esperadas y las pérdidas realizadas o cero en el escenario extremo por tener esta nota.

I.1.3 RIESGO CRÉDITO

Por definición, el riesgo crédito proviene del incumplimiento de una promesa de pago por la contraparte en un contrato de crédito o en la contratación o compra de un instrumento financiero riesgoso (Marrison, 2002). Es medido mediante la estimación de la probabilidad de que la contraparte incumpla su promesa de pago, de la exposición que se tiene en el evento de que ocurra el incumplimiento y de la pérdida que ocurriría si el incumplimiento sucediera considerando que exista alguna garantía de la contraparte y que ésta pueda ser recuperada. Dentro de una institución financiera, este riesgo se cubre mediante una porción de capital que se mantiene de acuerdo a las pérdidas potenciales causadas por los factores que afectan a las transacciones realizadas por las instituciones, esto es, la pérdida esperada (*EL*), la cual se puede considerar como una prima de riesgo⁴ y está en función de una porción de pérdida que es observada mediante la experiencia por parte del originador del portafolio y que es conocida como pérdida dado que la contraparte incumplió (*LGD*), de la probabilidad de que la contraparte caiga en incumplimiento (*PD*) y de la exposición a un evento de incumplimiento (*EAD*), estos son entre otros factores, los que determinan la cantidad de capital necesario para proteger o respaldar a un portafolio de créditos (Bluhm, 2003). Básicamente, la noción de modelar el riesgo crédito, se debe a la necesidad de una protección contra pérdidas, esto es, la estimación de una prima por riesgo para cada crédito y administrarlas dentro de una cuenta interna llamada reservas por riesgo crédito, estas reservas tendrán la función de cubrir las pérdidas ocasionadas por incumplimiento en los créditos; en este sentido, el capital económico tiene la función

⁴ Esto se debe a que la pérdida esperada, de acuerdo a los mejores estimados de las instituciones, puede ser equivalente a la misma cantidad de recursos que éstas mantienen como protección, es decir, como un seguro contra incumplimiento.

de proporcionar cierta protección en los eventos en los que la estimación del riesgo crédito sea excedida por otra pérdida.

Dado que el objetivo del residual en la estructura de un bono respaldado por hipotecas, es absorber las pérdidas realizadas por los incumplimientos de los acreditados, debe reflejar el riesgo crédito de la estructura, en este sentido y al hacer la generalización de que se trata de una entidad financiera, el residual toma el papel del capital requerido para cubrir en un caso extremo, que las mejores estimaciones de pérdidas esperadas de la institución emisora sean excedidas. Los recursos que se mantienen como residuales, están congelando recursos que pudieran ser empleados para incrementar la emisión de bonos de lo que se desprende que al mantener una cantidad de capital para proteger completamente a un portafolio de créditos, sería ineficiente ya que, el evento de que ocurra una pérdida total es un evento muy extremo convirtiendo a esta estrategia económicamente ineficiente, por tal motivo, las instituciones financieras tienen incentivos para minimizar su requerimiento de capital y así poder liberar recursos económicos que pueden ser invertidos en proyectos rentables. Sin embargo, al mantener menos capital aumenta la probabilidad de que no se cumplan las obligaciones contraídas por parte de la institución, en el caso de que sus pérdidas superen sus mejores estimados llegando a provocar insolvencia.

Si se define al capital económico dentro del marco conceptual del *VaR* se puede decir que una institución mantiene capital con el objetivo de sostener una cierta calificación en su deuda y asociada a esta calificación está una probabilidad de sobrevivencia (denotada q), lo que quiere decir que la empresa debe mantener suficientes reservas y capital para cubrir el q -ésimo cuantil de la distribución de pérdidas sobre un horizonte de tiempo dado (por ejemplo, el cuantil 99.9 % en un año). Sin embargo y debido a lo anterior, el *VaR* no provee información de la magnitud de la pérdida incurrida en un

evento que sobrepase el capital mantenido⁵. Una medida de riesgo más robusta es el déficit esperado o *ES* (Expected Shortfall) el cual es la pérdida esperada condicionada a estar en la cola de la distribución de pérdidas del portafolio.

Asimismo, Frey y McNeil (2002) señalan dos aspectos importantes de este problema, el primero se refiere a que la suma del *VaR* de dos portafolios estimados individualmente, podría no producir una frontera superior del *VaR* de un portafolio combinado; por otro lado, al optimizar un portafolio para minimizar el *VaR* podría producir una estrategia altamente riesgosa. Argumentan también que en la práctica se le resta importancia, lo cual podría ser cierto para un portafolio sujeto solo a riesgo mercado, mostrando el peligro de esta aseveración en un portafolio sujeto a riesgo de crédito donde las distribuciones de pérdidas son sesgadas.

Gordy (2003) demuestra que las reglas de capital basadas en calificaciones, incluyendo las de BASILEA II (BIS, 2006), pueden ser conciliadas con los modelos generales de credit *VaR*. La contribución al *VaR* de cada exposición es portafolio-invariante solo si se cumplen dos principales consideraciones: a) la dependencia entre exposiciones es conducida por un solo factor de riesgo sistemático y b) ninguna exposición contabiliza más de una porción arbitrariamente pequeña de la exposición total del portafolio. Para construir la distribución de pérdidas de un portafolio, se debe determinar la distribución conjunta de pérdidas a nivel de cada instrumento. Los modelos ampliamente usados proporcionan una estructura a este problema asumiendo que las correlaciones entre acreditados en un evento de crédito se ocasionan debido a una dependencia común de un conjunto de factores de riesgo sistemático. Una propiedad natural en estos modelos es que el capital marginal requerido por un crédito depende de cómo afecta la diversificación y por lo tanto también depende de que otros instrumentos estén presentes en el portafolio.

⁵ Esto se debe a que el *VaR* no es una medida coherente de riesgo ya que no cumple la propiedad de subaditividad, lo cual se ha mostrado en la literatura bajo los axiomas de Artzner *et al* (1999) y se puede referir a Frey y McNeil(2001) entre otras fuentes.

CAPÍTULO II.

II.1 BONOS RESPALDADOS POR HIPOTECAS

La bursatilización en el mercado mexicano se lleva a cabo mediante el traspaso de un grupo de créditos hipotecarios a un fideicomiso, el cual emitirá bonos cuyos pagos están respaldados por la amortización de los créditos hipotecarios. El fideicomiso se crea mediante un contrato bilateral, el cual es un acuerdo escrito entre el cedente de la cartera y una compañía que la administrará conocida como fiduciario, el acuerdo es conocido como escritura del fideicomiso. Consiste en que el cedente asigna al fiduciario para que represente a los tenedores de bonos. De acuerdo a la estrategia de bursatilización, se definen los fideicomisos y su función proporciona seguridad a los inversionistas al momento de recibir el pago. Un concepto clave para valorar una bursatilización en el contexto de los bonos respaldados por hipotecas es entender las características de los flujos de efectivo de los activos subyacentes. Los flujos de efectivo representan la interacción entre las características contractuales del crédito subyacente y el acreditado. En las siguientes secciones se esbozará de manera general algunas de las principales características de los bonos respaldados por hipotecas y para mayor profundidad en el tema, puede recurrirse a Fabozzi (2006).

II.1.1 COLATERAL

Los pagos realizados a tasa fija tienen dos características principales: nivel de pagos y pagos a plazo vencido. Una hipoteca estándar permite al acreditado hacer el mismo pago cada mes durante la vida del préstamo, una porción de este pago se refiere al interés y el resto al principal. Inicialmente, la cantidad correspondiente a cubrir los intereses es mayor a la parte del principal que se incrementa gradualmente al paso del tiempo. Los pagos a plazo vencido se refieren a que la amortización del crédito inicia

un mes después de otorgado. Para un crédito a tasa fija, el factor de pago mensual esta determinado mediante la relación siguiente:

$$f_p = \frac{\frac{i}{12} \left(1 + \frac{i}{12}\right)^n}{\left(1 + \frac{i}{12}\right)^n - 1} \quad (\text{II.1})$$

Donde:

f_p = Factor de pago mensual

i = Tasa de interés anual

n = Plazo en meses

Partiendo de lo anterior se observa que el pago mensual $m = f_p \times M_n$ está compuesto por:

$$m = m(i) + m(p) \quad (\text{II.2})$$

Donde $m(p)$ es la porción pagada a capital y $m(i)$ es la proporción pagada por interés y está en función del monto del crédito M en el mes n , es decir:

$$m(i) = \frac{i}{12} \times M_n \quad (\text{II.3})$$

II.1.2 PREPAGO

Los acreditados generalmente tienen el derecho de prepagar sus créditos en cualquier momento, una parte o por completo y en la mayoría de casos, sin penalización. En el caso del pago de una parcialidad, no afecta los pagos programados, únicamente

disminuye el saldo del crédito así como su plazo. En la práctica, los créditos que tienen características similares se combinan para formar grupos homogéneos los cuales son posteriormente bursatilizados, en este sentido entender este grupo de créditos como uno solo tiene algunas consideraciones, pues el efecto que tiene el prepago de un crédito individual no es el mismo que se tendría si uno o más créditos dentro del conjunto de créditos son prepagados. El prepago se puede definir como la diferencia entre el balance actual del grupo de créditos comparado con el balance esperado debido a la amortización normal esperada y para describir esta actividad, se han desarrollado diferentes modelos en el mercado mediante el concepto de porcentaje de prepago o tasa de prepago bajo las siguientes convenciones:

- SMM (Single monthly mortality):
Mide el porcentaje de prepago en cualquier mes expresado como porcentaje del balance esperado de la hipoteca.
- CPR (Conditional prepayment rate):
Refleja el porcentaje de la tasa de prepago resultante de convertir la SMM a una tasa anual. La CPR se entiende mejor como el porcentaje del balance no amortizado prepago sobre una base anual.
- PSA (Public Securities Association):
Es una convención adoptada en la industria por la Public Securities Association en la cual la tasa de prepago, expresada en CPR se asume que sigue una trayectoria estándar en el tiempo, la cual considera que la tasa de prepago para el portafolio de créditos se incrementa gradualmente en los primeros 30 meses y después los niveles terminan a una tasa constante y horizontal. Una curva PSA de 100% inicia en 0.2% de CPR en el primer mes y sube 0.2% de CPR por mes hasta el mes 30 y luego siguen constantes a 6% de CPR.

- SDA (Standard Default Assumption):

También modelo de PSA ahora llamada Bond Market Assosiation (BMA), asume que la tasa de incumplimiento será de 0.02% por año del monto de créditos hipotecarios en el primer mes posterior a la originación y se incrementará a una tasa de 0.02% por mes hasta alcanzar 0.6% en el treintavo mes y permanecerá constante hasta el mes sesenta donde empieza a declinar a una tasa de 0.0095% por mes hasta alcanzar 0.03% y permanecerá constante por el plazo remanente.

Para estimar la curva SMM se emplea la siguiente relación:

$$SMM = 100 \times \frac{(B_p - B_i)}{B_i} \quad (II.4)$$

Donde B_p se refiere al balance⁶ esperado por la amortización normal del portafolio de créditos y B_i es el balance actual. Asimismo, la curva CPR, como ya se mencionó, en función de la curva SMM se construye mediante la expresión siguiente:

$$CPR = 100 \left[1 - \left(1 - \frac{SMM}{100} \right)^{12} \right] \quad (II.5)$$

II.1.3. MODELO MULTIFACTORIAL DE PREPAGO

Wilmott (2000) señala que se puede incorporar el efecto de la tasa de interés para modelar la tasa de prepago, para esto, la tasa spot r y el tiempo t se consideran dos variables obvias y de la misma manera, M (balance actual) como la variable

⁶ El Balance se refiere al saldo insoluto M del grupo de créditos por lo tanto se usara indistintamente para referirse a ambas cantidades.

dependiente, considerando también el porcentaje de créditos hipotecarios (Q) que de acuerdo a la amortización del grupo de créditos, todavía permanecen dentro del portafolio. Por lo tanto, se puede establecer la siguiente expresión para estimar el precio de un bono respaldado por hipotecas (MBS):

$$P_{MBS} = V(r, M, Q, t) \quad (\text{II.6})$$

Considerando el problema más simple, un grupo de créditos que consiste de hipotecas con la misma edad y madurez y el mismo cupón fijo, asumiendo pagos constantes por toda la vida del crédito. El balance en términos de pagos continuos x está definido por la expresión:

$$M = x \int_0^T e^{-r(\tau-t)} d\tau \quad (\text{II.7})$$

Donde T es la fecha de madurez; el pago x de una hipoteca con valor de 1\$ en el tiempo $t = 0$ está dado por:

$$x = \frac{1}{\int_0^T e^{-r\tau} d\tau} \quad (\text{II.8})$$

Si todo permanece igual, el cambio en el balance será:

$$dM = (rM - x)dt \quad (\text{II.9})$$

Lo cual es completamente determinista en ausencia de prepago.

Introduciendo la parte remanente de hipotecas, Q :

$$M = Qx \int_0^T e^{-r(\tau-t)} d\tau \quad (\text{II.10})$$

La dinámica de M está dado por:

$$dM = (rM - xQ)dt + \frac{M}{Q} dQ \quad (\text{II.11})$$

Si se supone un prepago promedio de la forma:

$$a(t)f(r)dt \quad (\text{II.12})$$

Durante un intervalo dt , en el tiempo t y cuando la tasa de interés de corto plazo es r , esto es, la fracción del balance que es prepago y por lo tanto la fracción del grupo de créditos que desaparece, así:

$$dQ = -a(t)f(r)Qdt \quad (\text{II.13})$$

Reescribiendo:

$$dM = (rM - xQ + a(t)f(r)M)dt \quad (\text{II.14})$$

Lo cual combina el cambio esperado debido a los pagos regulares y el cambio inesperado por un pronto prepago.

II.1.4 PORTAFOLIO DE CRÉDITOS SUJETO A BURSATILIZACIÓN

Un portafolio de créditos sujeto a bursatilización es un conjunto que cumple con ciertas características estándar como pueden ser tasa, plazo, etc. Sin embargo, no importando lo estandarizado que sea el conjunto, existen otras diferencias entre los grupos como puede ser la capacidad de que cierto acreditado pueda pagar el monto programado de determinado grupo al cual fue categorizado o que el crédito no tenga la misma madurez que los demás, estas diferencias tienen un efecto importante que tiene que ser considerado en el cálculo de los flujos de efectivo. Algunos de estos indicadores pueden encontrarse en la cuadro II.1 siguiente:

Madurez Ponderada (WAM o WARM)	Remanente Promedio	Promedio Ponderado	Plazo remanente promedio de los créditos en el grupo, ponderado basado en el balance actual.
Cupón (WAC)	Promedio	Ponderado	Representa el pago mensual que hace el acreditado ponderado por el balance actual.
Edad del Crédito			Se refiere a los meses desde la originación del crédito.
Cupón neto			Cupón pagado al inversionista del grupo de créditos bursatilizado.
Cuotas de administración⁷			Es la diferencia entre el WAC y el cupón neto, igual a las cuotas pagadas a la agencia administradora.

Cuadro II.1 Indicadores en un grupo de créditos a tasa fija.

II.1.4.1 *Flujos de Efectivo*

Los flujos de efectivo generados por la amortización de los créditos, se estiman mediante el cálculo de los indicadores mencionados en la cuadro II.1 anterior, así como de las ecuaciones para estimar las curvas de prepago mediante dos aproximaciones, por un lado se pueden calcular los flujos mes a mes aplicando los prepagos a cada mes u obteniendo los flujos para todos los meses y escalándolos mediante los prepagos. Para efectuar el cálculo mes a mes se pueden seguir los siguientes puntos:

⁷ Este flujo es pagado de la amortización del grupo de créditos y está compuesto por dos partes, la primera es la cuota por servicio ya que el administrador del fideicomiso, recaba los pagos mensuales de los deudores y distribuye los flujos a los inversionistas. La otra parte corresponde generalmente al pago de una garantía (cuando ésta existe), es decir al pago de la prima de un seguro contra incumplimiento del acreditado.

- i. Se inicia con el monto actual del portafolio de créditos y con el pago mensual ponderado (WAC), el cupón neto, el plazo remanente promedio ponderado (WAM) y el tiempo que ha transcurrido desde la originación (edad).
- ii. Se calcula el pago programado del crédito de acuerdo al monto, el WAC y WAM al inicio del periodo.
- iii. Se calculan los pagos por interés y al principal.
- iv. Se estiman las cuotas administrativas y el interés neto
- v. Se calcula el monto del principal programado
- vi. Se calcula la cantidad de prepago
- vii. Se deduce el principal programado y la cantidad de prepago para determinar el monto principal al inicio del siguiente periodo.
- viii. Se calcula el flujo del grupo bursatilizado como la suma del principal programado, el principal prepago y los flujos de efectivo neto de interés.
- ix. Se actualiza el WAM y el tiempo desde la originación y se repite para cada periodo hasta que el monto del grupo de créditos se reduce a cero.

Asumiendo que se conoce la curva SMM , esto es suponiendo valores, se puede estimar el monto actual mediante la siguiente expresión:

$$B_t = B_p \times \left(1 - \frac{SMM}{100} \right) \quad (II.15)$$

Debido a que el monto actual del portafolio de créditos ahora es B_t , se puede estimar el balance o monto para el siguiente periodo empleando la nueva estimación y el plazo remanente, por lo tanto, generalizando la ecuación anterior a t periodos se tiene:

$$B_i = B_{pi} \times \left(1 - \frac{SMM}{100}\right)^i \quad (\text{II.16})$$

Y para el caso donde la curva *SMM* no es constante se tiene:

$$B_i = B_{pi} \times \prod_{t=1}^i \left(1 - \frac{SMM_t}{100}\right) \quad (\text{II.17})$$

Donde $n = (1, \dots, i)$ es decir, desde la originación hasta la fecha actual.

II.1.4.2 Rendimiento

Suponiendo la semejanza del portafolio de créditos a un bono que es colocado a par y donde su precio es la suma de sus cupones a valor presente, se tiene lo siguiente:

$$P = \frac{Flujo_1}{(1 + r_B/12)^{T_1}} + \dots + \frac{Flujo_{WAM}}{(1 + r_B/12)^{T_{WAM}}} = \sum_{i=1}^{WAM} \frac{Flujo_i}{(1 + r_B/12)^{T_i}} \quad (\text{II.18})$$

El rendimiento r_B se puede considerar como la *TIR* y es común llamarlo rendimiento equivalente hipotecario o *MEY* (Mortgage Equivalen Yield). En la estimación anterior no se está considerando, por supuesto, los retrasos en los pagos, para considerarlos es necesario incluir la fecha valor al día de pago para los flujos de efectivo, con lo cual se considera el interés devengado, por lo que se está obteniendo un precio sucio, el precio limpio se estima mediante la diferencia del precio sucio y el interés devengado y el interés devengado es calculado como el interés a tasa cupón sobre una base 30/360, es decir:

$$ID = B_i \times i/12 (S_D - 1) \quad (\text{II.19})$$

Donde S_D es la fecha valor, B_i es el monto del portafolio de créditos e i es la tasa cupón. La mayoría de los bonos cuponados en el mercado, hacen pagos semestrales, por lo que resulta necesario convertir el rendimiento de las hipotecas a una base semestral, es decir a una base equivalente a un bono con cupones semestrales. Para convertir esta tasa de rendimiento r_B a una tasa equivalente semestral r_e es necesario estimar que tasa cupón daría el mismo rendimiento anual, es decir:

$$(1 + r_B)^2 = (1 + r_e)^2 = 1 + r_A \quad (\text{II.20})$$

Donde r_A se refiere a la tasa anual equivalente.

II.2 PARÁMETROS DE RIESGO CRÉDITO

El riesgo crédito resulta de toda transacción cuando existe la posibilidad de que alguna de las partes de la operación no cumpla con la promesa convenida, en este sentido, el riesgo crédito abarca el riesgo de incumplimiento que se refiere básicamente a la asignación de una probabilidad de que la contraparte falle en el cumplimiento de sus obligaciones financieras; por otra parte, también contempla el riesgo de mercado que mide la pérdida financiera si la contraparte incumple.

La variable de *pérdida* se define como:

$$\tilde{L} = EAD \times LGD \times 1_D \quad (\text{II.21})$$

Donde 1_D es la función indicadora del evento incumplimiento, es decir:

$$1_D = \begin{cases} 1 & \text{incumplimiento} & P(i) \\ 0 & \text{no - incumplimiento} & 1 - P(i) \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

Asimismo, la pérdida esperada (EL) asociada a la variable de pérdida de un acreditado es:

$$EL = E[\tilde{L}] = EAD \times LGD \times P(i) \quad (\text{II.23})$$

Donde:

$P(i)$: Probabilidad de incumplimiento, en la práctica, la asignación de una probabilidad de incumplimiento a un acreditado se realiza mediante dos aproximaciones, un primer caso se tiene mediante la calibración de la tasa de incumplimiento a partir de datos de mercado, como es el caso de los modelos estructurales como los que se desprenden del modelo de Merton (1974) y el otro se realiza mediante el monitoreo de la calidad crediticia basado en calificaciones.

EAD : Exposición al incumplimiento, especifica la parte del portafolio que está sujeta a riesgo de incumplimiento, en el caso particular de créditos hipotecarios, la exposición es el saldo del crédito.

LGD : Pérdida dado que ocurre el evento de incumplimiento, cuantifica la porción de pérdida que el portafolio sufre en el caso de incumplimiento, su estimación depende entre otros factores del tipo de garantía del colateral, la prelación sobre el reclamo de las garantías, etc. En algunos casos es conveniente considerarla como una variable aleatoria descrita por la severidad de la pérdida, en tal caso estaría definida como el valor esperado de la severidad, esto es:

$$E[Sev] = LGD \quad (\text{II.24})$$

La pérdida esperada, previamente definida por la expresión II.23 puede verse como un seguro o como una reserva de recursos para cubrir las pérdidas esperadas de acuerdo a la experiencia de incumplimientos, sin embargo estas reservas pueden resultar insuficientes puesto que solo protegen en el promedio de la curva de la distribución de pérdidas, así sería conveniente incrementar esas reservas para las pérdidas que exceden al promedio, es decir, para las pérdidas no esperadas. Una selección natural para las desviaciones al promedio de las pérdidas es la desviación estándar de la distribución de pérdidas definida en II.21, por lo que se define a la pérdida no esperada de acuerdo a lo siguiente:

$$UL = \sqrt{V[\tilde{L}]} = \sqrt{V[EAD \times SEV \times L]} \quad (II.25)$$

Aún definir la pérdida no esperada como el capital en riesgo reservado para casos de estrés financiero, no es la mejor opción, puesto que existe una probabilidad significativa de que las pérdidas esperadas puedan ser excedidas por más de una desviación estándar y es por esto que es necesario contar con un capital en riesgo a un nivel de confianza estadísticamente elegido y la forma común de hacerlo es mediante el capital económico (EC_α) el cual se define como el α -cuantil de la distribución de pérdidas menos la pérdida esperada, es decir:

$$EC_\alpha = q_\alpha - EL \quad (II.26)$$

Dónde:

$$q_\alpha = \inf \{q > 0 | P[\tilde{L} \leq q] \geq \alpha\} \quad (II.27)$$

En la práctica, es común considerar a q_α como el VaR de crédito y al capital económico como el nivel de reservas para cubrir las pérdidas no esperadas, por lo que

estos conceptos se consideraran de manera indistinta en el presente trabajo y al referirse a la pérdida no esperada se hará pensando en capital económico y viceversa.

II.3 MODELOS DE RIESGO CRÉDITO

Partiendo de un marco conceptual general, se define que una pérdida crediticia ocurre debido a un evento de incumplimiento por parte del obligado, es decir, se ignoran cambios en el mercado debidos a cambios en la calificación crediticia. Denotando a un conjunto de factores de riesgo sistemático por X , los cuales pueden ser identificados por variables observables, como macroeconómicas o indicadores de desempeño de la industria o podrían no estar identificados. Sin importar su identidad, se asume que toda dependencia entre eventos de crédito se debe a la sensibilidad común de estos factores. Condicionando a X , el riesgo crediticio restante del portafolio es idiosincrásico de cada acreditado, mientras que se define a $p_i(x)$ como la probabilidad de incumplimiento del acreditado i condicionado a la realización del evento x de X .

Por otra parte, si se define que el evento de incumplimiento ocurre cuando el rendimiento de los activos del acreditado es menor a cierto umbral y que este rendimiento está sujeto a riesgo sistemático y riesgo idiosincrásico o específico, como se señaló previamente, se puede establecer la siguiente relación:

$$R_i = w_i X + \eta_i \varepsilon_i \quad (\text{II.28})$$

Donde X es un conjunto de factores de riesgo sistemático y ε es el riesgo específico de cada acreditado, asimismo, w y η son ponderadores que indican la importancia relativa de cada factor de riesgo. X tiene distribución normal con media cero y matriz de varianza-covarianza Ω con unos en la diagonal, es decir, la varianza es uno; ε se

distribuye $N(0, 1)$ y por lo tanto, sin pérdida de generalidad se impone que R se distribuye normal con media cero y varianza:

$$Var[R_i] = w_i' \Omega w_i + \eta_i^2 = 1 \quad (\text{II.29})$$

Partiendo de la definición anterior de incumplimiento, se establece que una pérdida i ocurre si R_i cae por debajo del umbral u_i , es decir, el incumplimiento ocurre si:

$$w_i X + \eta_i \varepsilon_i < u_i \quad (\text{II.30})$$

Por lo tanto, el incumplimiento ocurre sí y solo sí:

$$\varepsilon_i < (u_i - w_i X) / \eta_i \quad (\text{II.31})$$

Debido a que ε es una variable normal estándar, el evento de incumplimiento ocurre con probabilidad condicional:

$$p_i(x) = \Phi((u_i - w_i X) / \eta_i) \quad (\text{II.32})$$

Por otra parte, sea A_i la exposición del acreditado i y U_i su pérdida unitaria, así, para un portafolio de n acreditados, la razón de pérdida total está definida por:

$$L_n \equiv \frac{\sum_{i=1}^n U_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (\text{II.33})$$

Nótese que $U_i = 0$ en el caso de que no exista incumplimiento y en el caso contrario es el porcentaje de pérdida dado incumplimiento (*LGD*) de la exposición.

II.3.1 MODELO DE MERTON

La mayoría de los modelos y metodologías de riesgo crédito empleados en la práctica, están basados en el modelo de Merton (1974), el cual emplea el enfoque de valuación de activos mediante el principio contable de que el incumplimiento ocurre en el momento en el cual, el valor de los activos es menor al de los pasivos de cierta empresa. Este modelo parte de la aproximación de la idea básica de valuación de opciones de Black-Scholes (1973) y la extensión de esta teoría por Merton (1973), desarrollando así, la teoría de valuación de pasivos corporativos, considerando los siguientes supuestos:

- i.* No hay costos de transacción, impuestos, ni problemas con activos indivisibles.
- ii.* Hay un número suficiente de inversionistas y se puede comprar y vender sin límite a precio de mercado.
- iii.* Existe un mercado de intercambio para prestar y pedir prestado a la misma tasa de interés.
- iv.* Se permite la venta en corto.
- v.* El intercambio se da en tiempo continuo.
- vi.* Se mantiene el teorema de Modigliani-Miller
- vii.* La tasa de interés es constante y conocida.
- viii.* El valor de la firma V sigue un proceso estocástico definido mediante la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dV = (\alpha V - C)dt + \sigma V dz \quad (\text{II.34})$$

Donde:

- α : Tasa de interés instantánea de rendimiento esperada.
- C : Pago realizado de la firma a los accionistas o a los tenedores de bonos si es positivo ó pago recibido por nuevo financiamiento si es negativo.

σ^2 : Varianza instantánea del rendimiento de la firma.

dz : Movimiento Browniano estándar.

Se supone que existe un activo cuyo valor de mercado es Y y está en función del valor de la firma y el tiempo $Y = F(V, t)$, donde la dinámica del precio de este activo está definido por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dY = (\alpha_v Y - C_v)dt + \sigma_v Y dz_v \quad (\text{II.35})$$

Donde las variables α_v , C_v , σ_v^2 y dz_v se definen bajo los mismos conceptos anteriores estando en función del activo Y .

Dada la relación funcional entre el valor de la empresa y el valor del activo $Y = F(V, t)$, la aplicación del lema de Itô resulta en la siguiente expresión:

$$dY = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + (\alpha V_t - C) \frac{\partial F}{\partial V_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 V_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial V_t^2} \right] dt + \sigma V_t \frac{\partial F}{\partial V_t} dz \quad (\text{II.36})$$

Asimismo, definiendo a $Y = \ln V$ se tiene que de la ecuación anterior resulta:

$$d \ln V_t = \left[(\alpha V_t - C) \frac{1}{V_t} - \frac{1}{2} \sigma^2 V_t^2 \frac{1}{V_t^2} \right] dt + \sigma V_t \frac{1}{V_t} dz \quad (\text{II.37})$$

Simplificando e integrando en el intervalo $(0, t)$ se tiene:

$$\ln V_t = \left[\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] t + \sigma z_t \Rightarrow V_t = e^{\left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma z_t} \quad (\text{II.38})$$

Donde se está considerando que $C = 0$ y $z \sim N(0,1)$.

Dado que el valor de la empresa es una variable aleatoria, en el tiempo t se puede observar que los activos de la empresa sean mayores a sus pasivos o viceversa, por consiguiente, estos eventos conducen a:

- i.* $V_t > B$ En este caso no existe el incumplimiento por lo que la contraparte recibe el pago B .
- ii.* $V_t \leq B$ En este caso existirá incumplimiento por lo que la contraparte ejecutará la estrategia de recuperar lo más posible, por lo que recibe $\min(V_t, B)$.

Lo anterior, se puede traducir en términos de una opción de compra, cuyo valor está definido como (S_t) mediante la siguiente relación:

$$S_t = \max(V_t - B, 0) \quad (\text{II.39})$$

Donde el valor B es el precio de ejercicio.

En este contexto, la probabilidad de que S_t sea menor o igual a cero, equivalente a que exista incumplimiento, está definida mediante:

$$P[V_t \leq B] = \Phi \left[\frac{\ln\left(\frac{B}{V_t}\right) - \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \right] \quad (\text{II.40})$$

Donde Φ es la distribución acumulada normal estándar.

II.3.2 MODELO KMV

El modelo Credit Monitor desarrollado por la empresa KMV⁸ perteneciente ahora a Moody's permite estimar la frecuencia de incumplimiento esperada (*EDF*) y está diseñado para transformar la información contenida en el precio de una acción en una medida de riesgo de incumplimiento mediante el análisis de la información de mercado de los activos y del capital de una empresa.

Originalmente, el modelo fue desarrollado por Vasicek y Kealhofer como una extensión del modelo de Black-Scholes (1973) – Merton (1973). Este modelo asume que el capital de la empresa es una opción perpetua con un punto de incumplimiento que actúa como una barrera absorbente para los activos de la empresa, cuando los activos golpean ese punto, se considera el evento de incumplimiento.

Para estimar la probabilidad de incumplimiento en este modelo se consideran los siguientes tres pasos:

- ***Estimación del valor de activos y su volatilidad.***

En esta etapa, el valor de los activos, así como su volatilidad son estimados a partir de su valor de mercado, de la volatilidad del capital y del valor en libros de los pasivos.

- ***Cálculo de la distancia al incumplimiento.***

⁸ Aunque la información referente a este modelo es confidencial, puede consultarse Vasicek (2002) para los fundamentos teóricos o Crosbie (2003) como referencia práctica del funcionamiento del modelo.

La distancia al incumplimiento (*DD* por sus siglas en inglés) es calculada a partir del valor de los activos y de la volatilidad de los activos (estimados en el primer paso) y del valor en libros de los pasivos.

- *Cálculo de la probabilidad de incumplimiento.*

Se determina directamente de la distancia al incumplimiento (*DD*) y de la tasa de incumplimiento para ciertos niveles de *DD*.

Dentro del desarrollo teórico de este modelo y dado que ya se comentó que es una extensión del modelo de Merton (1974), se mantienen los supuestos previos y se define que el valor de los activos del acreditado sigue un proceso estocástico descrito por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dA_i = \mu_i A_i dt + \sigma_i A_i dx_i \quad (\text{II.41})$$

La aplicación del Lema de Itô e integrando resulta:

$$\ln A_i(T) = \ln A_i + \mu_i T - \frac{1}{2} \sigma_i^2 T + \sigma_i \sqrt{T} X_i \quad (\text{II.42})$$

Donde la variable aleatoria X_i tiene distribución normal estándar con media cero y varianza uno. De la misma manera que el desarrollo del modelo de Merton (1974), se tiene que la probabilidad de que el *i-ésimo* crédito incumpla es:

$$p_i = P[A_i(T) < B_i] = P[X_i < c_i] = N(c_i) \quad (\text{II.43})$$

Donde:

$$c_i = \left(\frac{\ln\left(\frac{B_i}{A_i}\right) - \left(\mu_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)T}{\sigma_i\sqrt{T}} \right) \quad (\text{II.44})$$

Cabe señalar que dentro de lo que es el modelo, la variable importante a determinar es la distancia a incumplimiento (DD)⁹, la cual se desprende de la ecuación II.44 anterior y se define como:

$$DD = \frac{\ln\left(\frac{A_i}{X_i}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)t}{\sigma_A\sqrt{t}} \quad (\text{II.45})$$

Haciendo una extensión del modelo, si se considera que en la ecuación II.42, X representa a un conjunto de variables aleatorias con distribución conjunta normal estándar y correlaciones ρ y que puede representarse como:

$$X_i = \sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho}Z_i \quad (\text{II.46})$$

Donde Y , y Z_1, Z_2, \dots, Z_n son variables normal estándar mutuamente independientes y se refieren a factores de riesgo común y riesgo específico, respectivamente.

Por lo tanto, el incumplimiento ocurre si $\sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho}Z_i < u_i$, equivalentemente $\sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho}Z_i < N^{-1}[p_i]$, es decir, el incumplimiento ocurre sí y solo sí:

⁹ Nótese que aquí se está considerando que $\ln\left(\frac{B_i}{A_i}\right) = -\ln\left(\frac{A_i}{B_i}\right)$, además que dado los factores de riesgo X , la probabilidad de incumplimiento de que los activos sean menores a los pasivos es:

$$P[A_i < X_i] = \Phi(-DD) = 1 - \Phi(DD)$$

$$z_i < (N^{-1}[p_i] - \sqrt{\rho}Y) / \sqrt{1-\rho} \quad (\text{II.47})$$

Considerando que z_i es una variable normal estándar, el evento de incumplimiento ocurre con probabilidad condicional:

$$p_i(Y) = P[L_i = 1|Y] = N\left(\frac{N^{-1}[p_i] - \sqrt{\rho}Y}{\sqrt{1-\rho}}\right) \quad (\text{II.48})$$

Estableciendo que para un portafolio con m créditos, la exposición total se incrementa a medida que el número de individuos se incrementa y que cada exposición individual se diluye a medida que el tamaño del portafolio tiende a infinito, es suficiente para garantizar que en el límite, la pérdida total del portafolio $L^{(m)}$ y la esperanza condicional de la pérdida $E[L^{(m)}|Y]$ son iguales *a.s.* tal que:

$$P\left[\lim_{m \rightarrow \infty} (L^{(m)} - E[L^{(m)}|Y]) = 0\right] = 1 \quad (\text{II.49})$$

Cuando:

$$\sum_{i=1}^m EAD_i \uparrow \infty \quad (m \rightarrow \infty) \quad \text{y} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{EAD_m}{\sum_{i=1}^m EAD_i} \right)^2 < \infty \quad (\text{II.50})$$

Así:

$$L^{(m)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} = p(Y) = N\left(\frac{N^{-1}[p_i] - \sqrt{\rho}Y}{\sqrt{1-\rho}}\right) \quad a.s. \quad (\text{II.51})$$

Ahora, si se tiene que $P[L \leq x] = P[p(Y) \leq x]$, se sigue que:

$$\begin{aligned} P[L \leq p(-q_\alpha(Y))] &= P[p(Y) \leq p(-q_\alpha(Y))] = P[Y \geq -q_\alpha(Y)] \\ &= P[-Y \leq q_\alpha(Y)] \end{aligned} \quad (\text{II.52})$$

Donde $Y \sim N(0,1)$ y $q_\alpha(Y)$ es el α -cuantil de la distribución normal estándar.

Por lo tanto, se tiene que el cuantil α de las pérdidas del portafolio está definido mediante:

$$q_\alpha(L) = p(-q_\alpha(Y)) = N\left(\frac{N^{-1}[p_i] + \sqrt{\rho}q_\alpha(Y)}{\sqrt{1-\rho}}\right) \quad (\text{II.53})$$

De la expresión anterior se desprende el modelo de capital económico de Basilea II considerando la severidad de la pérdida (*LGD*) y la pérdida esperada como $P_i \times LGD$ a un cuantil del 99.9%, este modelo se define mediante la expresión II.69.

II.3.3 MODELO CREDITRISK⁺.

Este modelo desarrollado por Credit Suisse Financial Products (1997) es un modelo estadístico que no hace ningún supuesto sobre las causas del incumplimiento, considera la tasa de incumplir como variable aleatoria continua y contempla su volatilidad con la finalidad de capturar su incertidumbre.

Para derivar la distribución de pérdidas del portafolio, las exposiciones se dividen en bandas, donde el nivel de exposición de cada banda se aproxima al número entero próximo, esto es, cada exposición se divide entre una cantidad constante, por ejemplo, un millón y se redondea al entero próximo. Dentro del modelo se considera la siguiente notación:

A : Acreditado

L_A : Exposición del acreditado A

P_A : Probabilidad de incumplimiento para el acreditado A

$$\lambda_A = L_A \times P_A: \text{Pérdida esperada} \quad (\text{II.54})$$

Asimismo, cada banda es vista como un portafolio de préstamos independiente, para el cual se define:

$$\varepsilon_j = v_j \times \mu_j \quad (\text{II.55})$$

ó

$$\mu_j = \frac{\varepsilon_j}{v_j} \quad (\text{II.56})$$

y

$$\varepsilon_A = \frac{\lambda_A}{L} \quad (\text{II.57})$$

Donde:

v_j : Exposición común en la banda j en unidades de L .

μ : Número esperado de defaults en la banda j

ε : Pérdida esperada en la banda j en unidades de L .

Así:

$$\varepsilon_j = \sum_{A:v_A=v_j} \varepsilon_A \quad (\text{II.58})$$

De la expresión II.56, la pérdida esperada por año dentro de la banda j es:

$$\mu_j = \frac{\varepsilon_j}{v_j} = \sum_{A:v_A=v_j} \frac{\varepsilon_A}{v_j} = \sum_{A:v_A=v_j} \frac{\varepsilon_A}{v_A} \quad (\text{II.59})$$

Para extender lo anterior a todo el portafolio, se emplea la función generadora de la distribución acumulativa de probabilidades Poisson para cada banda:

$$G_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\text{Pérdida} = nL)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} P(n \text{ incumplimientos})z^{nv_j} \quad (\text{II.60})$$

Donde las pérdidas están expresadas en unidades de exposición (L).

Asumiendo que el número de defaults sigue una distribución Poisson se tiene:

$$G_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu_j} \mu_j^n}{n!} z^{n\nu_j} = \exp\{-\mu_j + \mu_j z^{\nu_j}\} \quad (\text{II.61})$$

Por lo tanto, haciendo el producto para cada banda se obtiene:

$$G(z) = \prod_{j=1}^m \exp\{-\mu_j + \mu_j z^{\nu_j}\} = \exp\left\{-\sum_{j=1}^m \mu_j + \sum_{j=1}^m \mu_j z^{\nu_j}\right\} \quad (\text{II.62})$$

La función de distribución de probabilidad está definida como:

$$P(\text{pérdida} = nL) = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n G(z)}{dz^n} \right|_{z=0} \quad (\text{II.63})$$

Si se denota a A_n como la probabilidad de que la pérdida agregada del portafolio sea igual a nL , después de desarrollar y simplificar la expresión II.63 se obtiene la siguiente expresión recursiva:

$$A_n = \sum_{j:\nu_j \leq n} \frac{\varepsilon_j}{n} A_{n-\nu_j} \quad (\text{II.64})$$

Donde el primer término está definido por:

$$A_0 = G(0) = F(P(0)) = e^{-\mu} = e^{-\sum_{j=1}^m \varepsilon_j} \quad (\text{II.65})$$

El cual expresa la probabilidad de que no exista incumplimiento.

II.3.4 MODELOS DE MEZCLA BERNOULLI

Frey y McNeil (2001) emplean un método mediante el cual los modelos CreditRisk⁺, CreditMetrics, CreditPortfolio View y el modelo KMV se pueden representar mediante modelos de mezcla del tipo Bernoulli.

Sea un portafolio de m acreditados en un periodo de tiempo fijo $[t, t + \Delta t]$ donde Δt es típicamente un año. Se asume que en el tiempo t todos los créditos están en un estado de cumplimiento; para $1 \leq i \leq m$ sea Y_i el indicador de incumplimiento del acreditado i en el tiempo $t + \Delta t$ tomando valores en $\{0,1\}$, es decir:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{incumplimiento} \\ 0 & \text{no - incumplimiento} \end{cases} \quad (\text{II.66})$$

Como particularidad se considera que una pérdida ocurre solo en un evento de incumplimiento ignorando así el efecto por pérdida de calificación. Se considera también que la probabilidad de incumplimiento de un acreditado depende de un conjunto de factores en común, los cuales se interpretan como variables macroeconómicas.

Definición 1. Modelo de mezcla Bernoulli

Dada alguna $p < m$ y un vector aleatorio p -dimensional $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_p)$, el vector aleatorio $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$ sigue un modelo de mezcla Bernoulli con vector de factores Ψ , si hay funciones $Q_i: \mathbb{R}^p \rightarrow [0,1]$, $1 \leq i \leq m$, tal que condicionado a Ψ el indicador de default \mathbf{Y} es un vector de variables aleatorias Bernoulli con $P(Y_i = 1 | \Psi) = Q_i(\Psi)$

II.3.4.1 Representación del modelo CreditRisk+ como un modelo de mezcla Bernoulli

En este caso, la distribución de los indicadores de incumplimiento está dada por:

$$P(Y_i = 1 | \Psi) = Q_i(\Psi) \quad (\text{II.67})$$

y

$$Q_i(\Psi) = 1 - \exp(-\mathbf{w}_i' \Psi) \quad (\text{II.68})$$

Donde $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_p)$ es un vector de factores macroeconómicos *i.i.d.* con distribución gama con $p < m$ y $\mathbf{w}_i = (w_{i,1}, \dots, w_{i,p})$ es un vector de factores de ponderación constantes.

II.3.5 MODELO DE CALIFICACIONES INTERNAS DE BASILEA II

La metodología propuesta por el Bank for International Settlement (conocida como BASILEA II (BIS 2006)), considerada como la mejor práctica para instituciones financieras, descompone el cálculo de pérdida esperada $E[L]$ (siendo L la pérdida de un crédito individual) de la misma manera que la expresión II.23.

Uno de los métodos de BASILEA para estimar el capital es el basado en calificaciones internas de la cartera de créditos, con este método se busca generar una probabilidad de incumplimiento para el portafolio, donde lo más empleado son los modelos de regresión Logit o regresiones logísticas. Las probabilidades así obtenidas se emplean para estimar el capital requerido por los activos sujetos de estudio, considerados como exposiciones a riesgo crédito. Para la porción del portafolio de créditos que no están en

incumplimiento y que están cubiertas o parcialmente cubiertas por hipotecas residenciales, el capital requerido se estima mediante la expresión II.69¹⁰:

$$K = LGD \times N \left[(1 - R)^{-0.5} \times G(P_r) + \left(\frac{R}{1 - R} \right)^{0.5} \times G(0.999) \right] - P_r \times LGD \quad (\text{II.69})$$

Siendo:

K = Requerimiento de capital.

P_r = Probabilidad de incumplimiento

X = Exposición

LGD = Pérdida dado que hubo incumplimiento o severidad de la pérdida

R = Coeficiente de correlación, establecida en 0.15 para préstamos hipotecarios

$N(x)$: Denota la función de distribución acumulativa Normal estándar.

$G(z)$: Denota la función de distribución acumulativa inversa para una variable aleatoria Normal estándar.

La expresión anterior proporciona como resultado el capital económico para cubrir pérdidas no esperadas, al percentil 99.9%.

Respecto al tema de bursatilización de activos en general, BASILEA II, para el cálculo del capital neto, recomienda que al calcular los activos ponderados por su nivel de riesgo, la institución originadora podrá excluir las posiciones bursatilizadas sólo si se satisfacen los siguientes requisitos. Las instituciones que cumplan estas condiciones deberán seguir manteniendo el capital regulador correspondiente a cualquier posición de bursatilización que conserven:

¹⁰ El desarrollo de esta expresión está basado en el modelo de Merton (1974) y para su implementación en BASILEA II puede consultarse (BIS, 2005) o Gordy (2003)

- a) Se ha transferido a uno o varios terceros una parte sustancial del riesgo de crédito asociado a las posiciones bursatilizadas.
- b) La entidad que transfiere (cesionista) no mantiene un control efectivo ni indirecto sobre las posiciones transferidas. Los activos han sido aislados del cesionista a efectos jurídicos (por ejemplo, a través de la venta de activos o mediante subparticipación) de tal forma que las posiciones están fuera de su alcance y del de sus acreedores, incluso en el caso de quiebra o intervención judicial. Estas condiciones deberán estar avaladas por el dictamen de un asesor jurídico cualificado. Se considera que el cesionista mantiene el control efectivo de las exposiciones al riesgo de crédito transferidas si:
- i.* tiene la capacidad de recomprar al cesionario las posiciones previamente transferidas al objeto de realizar sus beneficios, o
 - ii.* está obligado a conservar el riesgo de las posiciones transferidas. El mantenimiento por parte del cesionista de los derechos de administración de las posiciones no constituirá necesariamente un control indirecto sobre las posiciones.
- c) Los valores emitidos no son obligaciones del cesionista. Así pues, los inversionistas que compren los valores sólo tendrán derechos frente al conjunto subyacente de posiciones.
- d) El cesionario es un vehículo de propósito especial (SPE) y los titulares de los derechos de usufructo sobre esa sociedad también tendrán la prerrogativa de comprometerlos o intercambiarlos sin restricción alguna.

e) Las opciones de exclusión deberán satisfacer las condiciones estipuladas en el acuerdo de BASILEA II (BIS, 2006).

f) La bursatilización no incorpora cláusulas que:

- i.* obliguen al originador a alterar sistemáticamente las posiciones subyacentes al objeto de mejorar la calidad crediticia media ponderada del conjunto de posiciones, a menos que esto se logre mediante la venta a precios de mercado de activos a terceros independientes y no afiliados;
- ii.* permitan incrementos de una posición de primera pérdida conservada o de una mejora crediticia provista por el originador después del inicio de la operación; o aumenten el rendimiento pagadero a las partes distintas del banco originador, como pueden ser los inversionistas y terceros proveedoras de mejoras crediticias, en respuesta a un deterioro de la calidad crediticia del conjunto subyacente de posiciones.

CAPÍTULO III.

III.1 CÓPULAS

La teoría de cópulas es el fundamento de modelos de riesgo crédito tal como los basados en calificaciones internas (BIS, 2006) y otros modelos estructurales derivados del modelo de Merton (1974), (Vasicek 2002), sin embargo, una característica principal de dichos modelos es el supuesto de un solo factor de riesgo sistemático (ASRF, por sus siglas en Inglés). Puesto que la estructura de dependencia que se trata de capturar a través del modelo de cópula Gaussiana, se obtiene de la correlación entre los activos de las entidades bajo estudio, surge la necesidad de retomar los fundamentos de esta teoría para extender a otros factores de riesgo cuando no es posible observar la variable de activos, más aún, cuando se desea considerar la existencia de eventos extremos, los cuales no pueden ser modelados bajo el escenario de normalidad.

En varios campos de estudio, el uso de cópulas ha sido una herramienta muy útil para el análisis de dependencia entre vectores aleatorios que tienen una función de distribución conjunta, la cual está definida por las distribuciones marginales de cada uno de los vectores considerados, particularmente en riesgo crédito, los nuevos enfoques para valuación de activos financieros sujetos a riesgo de incumplimiento, han mostrado mejores resultados empleando cópulas para obtener la estructura de dependencia entre dos eventos de incumplimiento conjunto (Li, 2000) para la valuación de derivados de crédito, estimación del requerimiento de capital o pérdida no esperada (Gordy 2003) y para una colocación eficiente de capital mediante el estudio de la dependencia de índices de mercado (Cherubini y Luciano, 2000), entre otras aplicaciones.

Una Cópula n -dimensional es una función de distribución multivariada con distribuciones marginales estándar $C:[0,1]^d \rightarrow [0,1]$, es decir, una función de n dimensiones que mapea desde el cubo unitario de n dimensiones al intervalo unitario y que está caracterizada por las siguientes tres propiedades:

1. $C(u_1, \dots, u_d)$ es creciente en cada componente u_i .
2. $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i, \forall i \in \{1, \dots, d\}, u_i \in [0, 1]$.
3. Para todo $(a_1, \dots, a_d), (b_1, \dots, b_d) \in [0, 1]^d$ con $a_j \leq b_j$ se tiene:

$$\sum_{i_1}^2 \dots \sum_{i_d}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_d} C(u_{1, i_1}, \dots, u_{d, i_d}) \geq 0$$

Con $u_{j1} = a_j$ y $u_{j2} = b_j$ para todo $j \in \{1, \dots, d\}$

Así, si se supone un vector aleatorio $X = (X_1, \dots, X_d)$ con distribución conjunta F y marginales continuas F_1, \dots, F_d , aplicando una transformación adecuada se obtiene un vector de la forma $(F_1(X_1), \dots, F_d(X_d))$ cuya función de distribución es por definición una cópula, la cual se denota por C . lo anterior queda establecido mediante el teorema de Sklar (Nelsen, 2006).

Teorema de Sklar. Sea H una función de distribución n -dimensional con marginales F_1, F_2, \dots, F_n entonces existe una cópula C n -dimensional tal que para todo x en \bar{R}^n ,

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) \quad (\text{III.1})$$

Si F_1, F_2, \dots, F_n son continuas, entonces C es única, de lo contrario C está definida únicamente sobre $\text{Ran}F_1 \times \text{Ran}F_2 \times \dots \times \text{Ran}F_n$. Recíprocamente, si C es una cópula n -dimensional y F_1, F_2, \dots, F_n son funciones de distribución, entonces la función H definida en III.1 es una función de distribución n -dimensional con marginales F_1, F_2, \dots, F_n .

Un método de construcción de cópulas se deriva directamente del teorema de Sklar, invirtiendo las distribuciones marginales en III.1, es decir:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = H(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_n^{-1}(u_n)) \quad (\text{III.2})$$

Donde F_i^{-1} es la *quasi-inversa*¹¹ de F_i con dominio $\text{Dom} F_i^{-1} \in I^n$ tal que si $u_i \in \text{Ran}F_1 \times \text{Ran}F_2 \times \dots \times \text{Ran}F_n$, entonces $F_i^{-1}(u_i)$ es cualquier número x_i en $\bar{R}^n \therefore \forall F_i(x_i) = u_i$, es decir $F_i(F_i^{-1}(u_i)) = u_i$. Si $u_i \notin \text{Ran}F_1 \times \text{Ran}F_2 \times \dots \times \text{Ran}F_n$, entonces $F_i^{-1}(u_i) = \inf\{x_i | F_i(x_i) \geq u_i\} = \sup\{x_i | F_i(x_i) \leq u_i\}$.

Una propiedad atractiva de las cópulas se deriva del hecho de que la dependencia capturada por este tipo de distribuciones es invariante respecto a transformaciones continuas y crecientes de las distribuciones marginales, es decir, que la misma cópula

¹¹ El término quasi-inversa se refiere al hecho de que la distribución marginal puede no ser estrictamente creciente.

puede ser usada para el par de variables aleatorias X_1, X_2 y para su transformación $\ln X_1, \ln X_2$ sin afectar el resultado de la cópula¹².

III.2 MEDIDAS DE DEPENDENCIA

Una de las materias ampliamente estudiadas en estadística se refiere a la relación de dependencia entre variables aleatorias, en lo que se refiere a la distribución normal, la dependencia es medida mediante el coeficiente de correlación de Pearson o correlación lineal, sin embargo han surgido una variedad de medidas alternativas de dependencia y en el campo de Cópulas, la τ de Kendall y ρ de Spearman son las más citadas como medidas de asociación, donde la concordancia es el equivalente a dependencia.

Se dice que las observaciones (x_{1i}, x_{2i}) y (x_{1j}, x_{2j}) de los vectores aleatorios (X_1, X_2) son concordantes si $x_{1i} < x_{1j}$ y $x_{2i} < x_{2j}$ o si $x_{1i} > x_{1j}$ y $x_{2i} > x_{2j}$. Similarmente, se dice que son discordantes si $x_{1i} < x_{1j}$ y $x_{2i} > x_{2j}$ o si $x_{1i} > x_{1j}$ y $x_{2i} < x_{2j}$. Análogamente se puede establecer que las observaciones concordantes si $(x_{1i} - x_{1j})(x_{2i} - x_{2j}) > 0$ y discordantes si $(x_{1i} - x_{1j})(x_{2i} - x_{2j}) < 0$.

¹² Supóngase α y β funciones estrictamente crecientes sobre $\text{Ran}X_1$ y $\text{Ran}X_2$ respectivamente y F_1, G_1, F_2 y G_2 funciones de distribución de $X_1, X_2, \alpha(X_1), \beta(X_2)$ respectivamente, entonces $F_2(x_1) = P[\alpha(X_1) \leq x_1] = P[X_1 \leq \alpha^{-1}(x_1)] = F_1(\alpha^{-1}(x_1))$, similarmente $G_2(x_2) = F_2(\beta^{-1}(x_2))$, así para cualquier x_1, x_2 en \overline{R} se define la cópula:

$$\begin{aligned} C_{\alpha(X_1)\beta(X_2)}(F_2(x_1), G_2(x_2)) &= P[\alpha(X_1) \leq x_1, \beta(X_2) \leq x_2] = P[X_1 \leq \alpha^{-1}(x_1), X_2 \leq \beta^{-1}(x_2)] \\ &= C_{X_1, X_2}(F_1(\alpha^{-1}(x_1)), G_2(\beta^{-1}(x_2))) = C_{X_1, X_2}(F_2(x_1), G_2(x_2)) \end{aligned}$$

Así, si se tiene n observaciones de los vectores aleatorios (X_1, X_2) , hay $\binom{n}{2}$ pares distintos de observaciones (x_{1i}, x_{2i}) y (x_{1j}, x_{2j}) siendo cada par o concordante o discordante. De esta manera, la τ de Kendall se define como la probabilidad de concordancia menos la probabilidad de discordancia:

$$\tau = P[(X_{1i} - X_{1j})(X_{2i} - X_{2j}) > 0] - P[(X_{1i} - X_{1j})(X_{2i} - X_{2j}) < 0] \quad (\text{III.3})$$

Dado que (X_1, X_2) son variables aleatorias continuas, de la ecuación III.3 se tiene:

$$\tau = 2P[(X_{1i} - X_{1j})(X_{2i} - X_{2j}) > 0] - 1 \quad (\text{III.4})$$

Asimismo:

$$P[(X_{1i} - X_{1j})(X_{2i} - X_{2j}) > 0] = P[X_{1i} > X_{1j}, X_{2i} > X_{2j}] + P[X_{1i} < X_{1j}, X_{2i} < X_{2j}] \quad (\text{III.5})$$

Integrando el primer término del lado derecho de la expresión III.5, se tiene que:

$$P[X_{1i} > X_{1j}, X_{2i} > X_{2j}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P[X_{1j} \leq x_1, X_{2j} \leq x_2] dF(x_1, x_2) \quad (\text{III.6})$$

Dado que (X_1, X_2) tienen distribuciones marginales continuas $F(x_1)$ y $G(x_2)$ en $[0,1]$ respectivamente, se tiene que $P[X_{1j} \leq x_1, X_{2j} \leq x_2] = C(F(x_1), G(x_2))$ por lo tanto:

$$P[X_{1i} > X_{1j}, X_{2i} > X_{2j}] = \int_0^1 \int_0^1 C(F(x_1), G(x_2)) dC(F(x_1), G(x_2)) \quad (\text{III.7})$$

Análogamente, el segundo término del lado derecho de la expresión III.5 queda expresado como:

$$P[X_{1i} < X_{1j}, X_{2i} < X_{2j}] = \int_0^1 \int_0^1 C(F(x_1), G(x_2)) dC(F(x_1), G(x_2)) \quad (\text{III.8})$$

Por lo tanto, de III.6 se tiene:

$$P[(X_{1i} - X_{1j})(X_{2i} - X_{2j}) > 0] = 2 \int_0^1 \int_0^1 C(F(x_1), G(x_2)) dC(F(x_1), G(x_2)) \quad (\text{III.9})$$

Finalmente, sustituyendo III.9 en III.4 y haciendo $u_1 = F(x_1), u_2 = G(x_2)$ se tiene:

$$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1 \quad (\text{III.10})$$

Otra medida de asociación basada en la probabilidad de concordancia y discordancia es la ρ de Spearman, la cual está definida como:

$$\rho = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) du_1 du_2 - 3 \quad (\text{III.11})$$

Alternativamente:

$$\rho = 12 \int_0^1 \int_0^1 [C(u_1, u_2) - u_1 u_2] du_1 du_2 \quad (\text{III.12})$$

III.3 COEFICIENTES DE DEPENDENCIA EN LA COLA

Los coeficientes de dependencia en la cola superior λ_u e inferior λ_l son las probabilidades condicionales límite de que las marginales de los vectores aleatorios (X_1, X_2) excedan un cuantil determinado, dado que una marginal lo hace. Estos coeficientes proveen medidas de dependencia asintótica en las colas de la distribución bivariada de (X_1, X_2) .

El coeficiente de dependencia en la cola superior se define como:

$$\lambda_u = \lim_{q \rightarrow 1} P\left(\left(X_2 > F_2^{-1}(q)\right) \middle| X_1 > F_1^{-1}(q)\right) \quad (\text{III.13})$$

Siempre que el límite $\lambda_u \in [0,1]$ exista.

De manera similar, el coeficiente de dependencia en la cola inferior es:

$$\lambda_l = \lim_{q \rightarrow 0} P\left(\left(X_2 \leq F_2^{-1}(q)\right) \middle| X_1 \leq F_1^{-1}(q)\right) \quad (\text{III.14})$$

Siempre que el límite $\lambda_i \in [0,1]$ exista.

Así como la τ de Kendall y ρ de Spearman, estos coeficientes dependen sólo de la cópula C de (X_1, X_2) , por lo tanto:

$$\lambda_u = \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{\bar{C}(q, q)}{1 - q} \quad \text{y} \quad \lambda_l = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{\bar{C}(q, q)}{q} \quad (\text{III.15})$$

Considerando que \bar{C} es la cópula de sobrevivencia, es decir:

$$\bar{C}(1 - u_1, 1 - u_2) = 1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2) \quad (\text{III.16})$$

III.4 CÓPULAS ELÍPTICAS

Las cópulas elípticas son cópulas de distribuciones elípticas las cuales comparten muchas propiedades de la distribución normal multivariada. Si \mathbf{X} es un vector aleatorio n -dimensional y para alguna $u \in \mathfrak{R}^n$ y para una matriz $n \times n$ simétrica Σ definida no negativa, la función característica $\varphi_{\mathbf{X}-\mu}(\mathbf{t})$ de $\mathbf{X} - \mu$ es una función de la forma cuadrática $\mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t}$, $\varphi_{\mathbf{X}-\mu}(\mathbf{t}) = \phi(\mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t})$, se dice que \mathbf{X} tiene una distribución elíptica con parámetros μ , Σ y ϕ y se escribe $\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$.

Teorema 1. $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$ Con $\text{rango}(\Sigma) = k$ si y solo si existe una variable aleatoria $R \geq 0$ independiente de U , un vector aleatorio k dimensional uniformemente distribuido sobre la hiperesfera unitaria $\{z \in \mathbb{R}^k | z^T z = 1\}$ y una matriz A $n \times k$ con $AA^T = \Sigma$, tal que:

$$X = \mu + RAU \quad (\text{III.17})$$

La cópula normal y la t -Student son ejemplos de cópulas elípticas, este hecho proporciona el siguiente resultado para la τ de Kendall:

$$\tau(X_i, X_j) = \frac{2}{\pi} \arcsin(R_{ij}) \quad (\text{III.18})$$

La prueba de este resultado se puede consultar en Lindskog, McNeil y Schmock (2001).

III.4.1 CÓPULA NORMAL

Una de las cópulas más usadas en finanzas es la cópula normal, el modelo de calificaciones internas de BASILEA II (BIS, 2006) se fundamenta en el supuesto de un solo factor de riesgo sistemático (ASRF por sus siglas en inglés), mismo que se distribuye normal con media cero y varianza uno. La cópula normal se define como:

$$C_\rho^N(u_1, \dots, u_d) = \Phi_\rho(\Phi_\rho^{-1}(u_1), \dots, \Phi_\rho^{-1}(u_d)) \quad (\text{III.19})$$

Donde Φ es la distribución normal multivariada estándar, Φ^{-1} la distribución normal univariada estándar inversa, \mathbf{P} es la matriz de correlaciones con 1 en la diagonal y ρ (la correlación del vector u_i) fuera de la diagonal, así para el caso bivariado, la expresión III.19 toma la forma siguiente:

$$C_{\rho}^N(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left[-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right] dx dy \quad (\text{III.20})$$

III.4.2 COPULA t -STUDENT

Ésta Cópula es estudiada con gran detalle en Demarta y Mcneil (2004) donde se definen algunas variantes importantes como la cópula t -Student agrupada y la de valores extremos, esto debido a la habilidad de la cópula t de capturar mejor el fenómeno de dependencia de valores extremos, la cópula t -Student está definida mediante la expresión III.21:

$$C_{v,P}^t(u_1, \dots, u_d) = t_{v,P}(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_d)) \quad (\text{III.21})$$

En la expresión III.21 anterior, t_v^{-1} es la inversa de la distribución t -Student univariada o función de cuantiles, mientras que $t_{v,P}$ es la distribución t -Student multivariada con v grados de libertad, media cero y matriz de correlaciones \mathbf{P} , la cual se define como:

$$t_d(v, 0, P) = \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_d)} \frac{\Gamma\left(\frac{v+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \sqrt{(\pi v)^d |P|}} \left(1 + \frac{\mathbf{x}' P^{-1} \mathbf{x}}{v}\right)^{-\frac{v+d}{2}} dx \quad (\text{III.22})$$

Donde $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)'$ es un vector aleatorio de mezcla normal en varianza definido como:

$$\mathbf{X}^d = \boldsymbol{\mu} + \sqrt{W} \mathbf{Z} \quad (\text{III.23})$$

Donde $\mathbf{Z} \sim N_d(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ y W es independiente de \mathbf{Z} y satisface $v/W \sim \chi_v^2$, equivalentemente W tiene distribución gamma inversa $W \sim I_g(v/2, v/2)$.

Para el caso particular de dos factores de riesgo o dos variables aleatorias de interés con distribuciones marginales t -Student, la cópula t -Student bidimensional, está definida mediante la distribución t -Student bivariada:

$$C'(u_1, u_2; \theta_1, \theta_2) = \int_{-\infty}^{\Phi_{\theta_1}^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi_{\theta_2}^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\theta_2^2)^{1/2}} \left[1 + \frac{s^2 - 2\theta_2 st + t^2}{v(1-\theta_2^2)} \right]^{-(\theta_1+2)/2} ds dt \quad (\text{III.24})$$

Donde θ_1 son los grados de libertad, el cual controla el peso de la cola y si $\theta_1 \rightarrow \infty, C'(u_1, u_2; \theta_1, \theta_2) \rightarrow \Phi_N(u_1, u_2; \theta_2)$, θ_2 es el parámetro de dependencia o correlación.

III.5 CÓPULAS ARQUIMEDIANAS

Esta clase particular de cópulas son construidas usando una función generadora $\phi: [0,1] \rightarrow [0,\infty]$ continua, estrictamente decreciente, convexa y $\phi(1)=0$. Dada esta

función ϕ , una cópula arquimediana puede ser generada mediante la siguiente expresión:

$$C(u_1, u_2) = \phi^{-1}[\phi(u_1) + \phi(u_2)] \quad (\text{III.25})$$

Donde ϕ^{-1} es la inversa de ϕ .

Dentro de esta familia de cópulas se encuentran la cópula Gumbel, Clayton y Frank entre otras, (para otras cópulas de esta familia, puede consultarse Nelsen, 1999; págs. 94:97).

III.5.1 CÓPULA CLAYTON

La cópula Clayton se conoce también como la cópula Kimeldorf-Sampson y solo muestra dependencia en la cola inferior.

$$C_{\alpha}^C(u_1, u_2) = \max\left[\left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1\right)^{-1/\alpha}, 0\right] \quad (\text{III.26})$$

Para $\alpha \in [-1, 0) \cup (0, +\infty)$

III.5.2 CÓPULA FRANK

$$C_{\alpha}^F(u_1, u_2) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left\{ 1 + \frac{[\exp(-\alpha u_1) - 1][\exp(-\alpha u_2) - 1]}{\exp(-\alpha) - 1} \right\} \quad (\text{III.27})$$

Para $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Esta cópula no presenta dependencia en las colas.

III.6 CÓPULAS DE VALORES EXTREMOS

III.6.1 CÓPULA GUMBEL

La cópula Gumbel es la más común de las cópulas de valores extremos y está definida mediante la expresión:

$$C_{\alpha}^G(u_1, u_2) = \exp \left\{ - \left[(-\ln u_1)^{\alpha} + (-\ln u_2)^{\alpha} \right]^{1/\alpha} \right\} \quad (\text{III.28})$$

Para $\alpha \in [1, +\infty)$.

El parámetro α controla el grado de dependencia y cuando es igual a uno, la dependencia no existe, si $\alpha = +\infty$ hay dependencia perfecta.

III.6.2 CÓPULA GALAMBOS

La cópula Galambos, con parámetro δ está definida por la siguiente expresión:

$$C(u_1, u_2) = u_1 u_2 \exp \left\{ \left[-\ln(u_1)^{-\delta} - \ln(u_2)^{-\delta} \right]^{-1/\delta} \right\} \quad (\text{III.29})$$

Con $0 \leq \delta \leq \infty$

Esta cópula tiene el siguiente parámetro de dependencia:

$$A(t) = 1 - \left[t^{-\delta} + (1-t)^{-\delta} \right]^{-1/\delta} \quad (\text{III.30})$$

III.6.3 CÓPULA HÜSLER REISS

Está definida para el parámetro δ en $0 \leq \delta < \infty$ cómo:

$$C(u_1, u_2) = \exp \left\{ -\tilde{u} \Phi \left[\frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \delta \ln \left(\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}} \right) \right] - \tilde{v} \Phi \left[\frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \delta \ln \left(\frac{\tilde{v}}{\tilde{u}} \right) \right] \right\} \quad (\text{III.31})$$

Donde $\tilde{u} = -\ln u_1$, $\tilde{v} = -\ln u_2$ y Φ es la función de distribución normal estándar. La función de dependencia de esta cópula es la siguiente:

$$A(t) = t \Phi \left[\frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \delta \ln \left(\frac{t}{1-t} \right) \right] + (1-t) \Phi \left[\frac{1}{\delta} - \frac{1}{2} \delta \ln \left(\frac{t}{1-t} \right) \right] \quad (\text{III.32})$$

III.7 CÓPULA EMPÍRICA

Las cópulas empíricas son empleadas para realizar pruebas de independencia no paramétricas y para la estimación no paramétrica de cópulas.

Sean $u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n$ y $v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_n$ los estadísticos de orden de muestras univariadas de la copula C , la cópula empírica \hat{C} se define en los puntos $\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$ por:

$$\hat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{\{u_k \leq u_i, v_k \leq v_j\}} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{III.33})$$

Así mismo, \hat{C} converge uniformemente a C , cuando el tamaño de la muestra tiende a infinito. La cópula empírica de frecuencia \hat{c} está dada por la siguiente expresión:

$$\hat{c}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } (u_i, v_i) \text{ son elementos de la muestra} \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases} \quad (\text{III.34})$$

CAPÍTULO IV

METODOLOGÍA

La base de datos se segmentó a través de la técnica CHAID con la finalidad de determinar perfiles de riesgo de acuerdo a la razón crédito a valor de la garantía y como factor crítico se consideró la probabilidad de incumplimiento, esta segmentación ayuda a separar a grupos que pudieran tener una menor probabilidad de incumplimiento o que pertenezcan a cierto nivel de riesgo, de otros con mayor riesgo. Los insumos para la estimación del presente trabajo son, la tasa de incumplimiento que será estimada como la razón de créditos incumplidos a créditos totales definida en la expresión V.4 y la exposición al momento de incumplimiento como el saldo insoluto de los créditos vencidos.

Teniendo los factores de riesgo (T_i, EAD) se ajustaron las cópulas t -Student, Normal y Gumbel, la primera de ellas mediante la estimación paramétrica de las marginales al ajustarles la distribución t -Student aplicando un proceso de optimización a la expresión V.3 y posteriormente con los parámetros estimados, se ajustó la cópula deseada, todo esto se realiza en el paquete estadístico de libre acceso R y siguiendo el código expuesto en el anexo II.

Para el caso de las cópulas Normal y Gumbel, se realizó el ajuste a los vectores aleatorios semi-paramétricamente, es decir, se considera la distribución empírica de las marginales y se estiman con estas los parámetros de la cópula, esto se realizó también para la cópula t -Student .

Teniendo ajustadas las cópulas se procede a la simulación de los parámetros de riesgo a fin de obtener las pérdidas simuladas y con ellas obtener la pérdida esperada, α -cuantil y principalmente la pérdida no esperada (expresiones II.23, II.27 y II.26, respectivamente).

Adicionalmente se estimó el capital económico mediante la expresión II.69 empleando una correlación de 0.20 y la especificada por el modelo (0.15), los

resultados obtenidos a un nivel $\alpha = 99.9\%$, son comparados con el nivel del residual real al que fue emitido el bono respaldado por hipotecas analizado con el objetivo de mostrar que el empleo de cópulas permiten establecer un requerimiento de capital inferior al que resulta de la simulación de escenarios.

CAPÍTULO V.

RESULTADOS

En el presente trabajo, se empleó la teoría de cópulas para el caso bivariado, para las variables de exposición (*EAD*) y tasa de incumplimiento (*Ti*) en créditos hipotecarios que respaldan una estructura de bursatilización, el resultado buscado fue la estimación de la pérdida no esperada con el fin de establecer el residual del bono respaldado por hipotecas bajo el concepto del capital económico que requiere una entidad financiera para cubrir este tipo de pérdidas; por otra parte, se emplea el modelo de capital económico propuesto por BASILEA II (BIS, 2006) y se compara con los obtenidos de la simulación de la cópula ajustada a los datos, considerando que la correlación es mayor a la definida por el mismo modelo de BASILEA II (0.15); con la finalidad de probar la sensibilidad de este modelo al parámetro de correlación se emplea para éste parámetro un valor de 0.20 y se comparan los resultados, bajo el supuesto de que en un portafolio de créditos hipotecarios se presenta un incremento en la tasa de incumplimiento conjunta, sobre todo en el caso donde se concentran individuos en sectores económicos más susceptibles a los efectos negativos del mercado, como incremento en la tasa de desempleo principalmente, soportando la hipótesis de que la correlación en incumplimientos es mayor al parámetro establecido de 0.15. Una diferencia fundamental entre a modelación de cópulas en riesgo crédito y el de BASILEA II (BIS, 2006) radica en que éste último modelo se basa en el supuesto de un solo factor de riesgo sistemático y está definido bajo la distribución normal mientras que la teoría de copulas permite además de incorporar varios factores de riesgo, modelarlos mediante varias distribuciones de probabilidad inclusive las de valores extremos.

Desde el punto de vista de regulación bancaria, el modelo de BASILEA II puede emplearse en dos enfoques, el primero (básico) solo se requiere obtener la probabilidad de incumplimiento mediante un sistema de calificaciones, en este punto, los modelos logísticos han sido los mayormente empleados; el segundo enfoque es el avanzado, donde se requiere estimar la severidad de la pérdida adicional a estimar la probabilidad de incumplimiento.

Los modelos de cópulas permiten incorporar otros factores de riesgo y capturan mejor la dependencia entre los mismos, otra característica es la modelación de eventos extremos lo cual no puede ser observado con la distribución normal. La cópula hereda la dependencia de las distribuciones marginales, por lo que si se emplea una distribución de colas pesadas, la cópula resultante también será de colas pesadas, aunado a esto, se supone que la correlación entre los factores de riesgo que se modelan en la cópula, es la misma entre ellos por lo tanto se obtiene una matriz cuadrada $R^{m \times m}$ con unos en la diagonal y ρ fuera de ella mediante los estimadores muestrales ya sea de la $\hat{\tau}$ de Kendall o la $\hat{\rho}$ de Spearman, entre otros.

En el presente trabajo de investigación, se analiza un bono respaldado por hipotecas a través de la aplicación del modelo de calificaciones internas básico (BIS, 2006) y la teoría de cópulas aplicados a la tasa de incumplimiento y exposición al momento de incumplimiento estimadas a los créditos hipotecarios que respaldan dicha estructura financiera, estimando el residual mediante un nivel de capital económico (UL_α) resultado de ambos modelos, se lleva a cabo la comparación de estos resultados con el residual real con el que fue emitido el bono el cual está definido mediante un modelo de simulación que considera niveles de riesgo aceptados por una agencia calificadora para establecer el grado de inversión de la estructura, esta comparación tiene la intención de mostrar que la modelación con cópulas de los factores de riesgo permite

establecer niveles teóricos de pérdida esperada menores que lo que muestran los escenarios de simulación, esperando con esto que se conviertan en un apoyo en la toma de decisiones que permitan crear estructuras más eficientes en lo que se refiere a la razón bonos emitidos *versus* residual.

Para estimar los parámetros de riesgo crédito del portafolio, éste se segmentó mediante la técnica de árboles de segmentación basados en pruebas χ^2 (CHAID), para esto se consideró la razón monto financiado a valor de la garantía (*LTV*) en el momento de la originación del crédito y de acuerdo con Kaskowitz *et al* (2002), se consideró una ventana de 5 años para observar el incumplimiento, mismo que ocurre si los créditos que tenían un atraso igual o menor a 3 meses al inicio del periodo de observación, al final de 5 años tienen más de tres meses de atraso, esta segmentación se realizó en el paquete estadístico SPSS© y el árbol resultante se puede observar en la figura V.1, la razón por la cual se considera al *LTV* como variable de segmentación se debe a su relevancia, ya que en el caso de una estructura bursatilizada, es indispensable que los créditos empaquetados sean de la mejor calidad crediticia, una característica fundamental es la misma razón deuda a garantía, lo que ayuda a que exista una mayor recuperación en el caso de un incumplimiento que ocasione el reclamo del colateral por parte de la institución financiera originadora del crédito, quien tiene mayor prelación de derechos sobre la vivienda mientras existe el financiamiento y mientras estos créditos no se hayan vendido a un fideicomiso, ya que en este caso es el fideicomiso quien tiene los derechos de cobro.

Puede observarse que los dos primeros grupos no tienen una diferencia significativa en probabilidad de incumplimiento y además como es de esperarse tienen la probabilidad de incumplimiento más baja ya que un acreditado tiene incentivos para seguir pagando cuando la razón deuda a garantía es más pequeña puesto que su inversión de capital es

mayor; por otro lado, los dos últimos grupos tampoco tienen una diferencia significativa de probabilidad, sin embargo estos grupos no cumplen con lo esperado debido a que deberían tener una mayor probabilidad de incumplimiento que los demás grupos dado que son los que tienen una razón deuda a garantía de originación más alto.

De acuerdo a lo anterior, se decidió considerar los siguientes 6 grupos, que se muestran en el cuadro V.1.

Grupos	Pi
LTV ≤ 80	7.70%
80 < LTV ≤ 90	9.70%
90 < LTV ≤ 100	12.10%
100 < LTV ≤ 110	13.10%
110 < LTV	10.60%
Total	10.80%

Cuadro V.1 Grupos y probabilidad de incumplimiento resultado de la prueba CHAID

Posterior a la segmentación, se construyeron los vectores de tasas de incumplimiento históricas por grupo mostradas, considerando el incumplimiento con atraso en el pago mayor a 3 meses en un año, esta estimación es consistente con la probabilidad de incumplimiento anual que se obtiene en los métodos de calificaciones internas.

Así, el incumplimiento está definido por:

$$\hat{I}_{it} = \sum_{i=1}^n 1_{Dit} \quad \text{V.1}$$

Donde:

$$1_{Dit} = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{atraso} > 3\text{meses} \\ 0 & \text{si } \text{atraso} \leq 3\text{meses} \end{cases} \quad \text{V.2}$$

Para cada periodo de observación t .

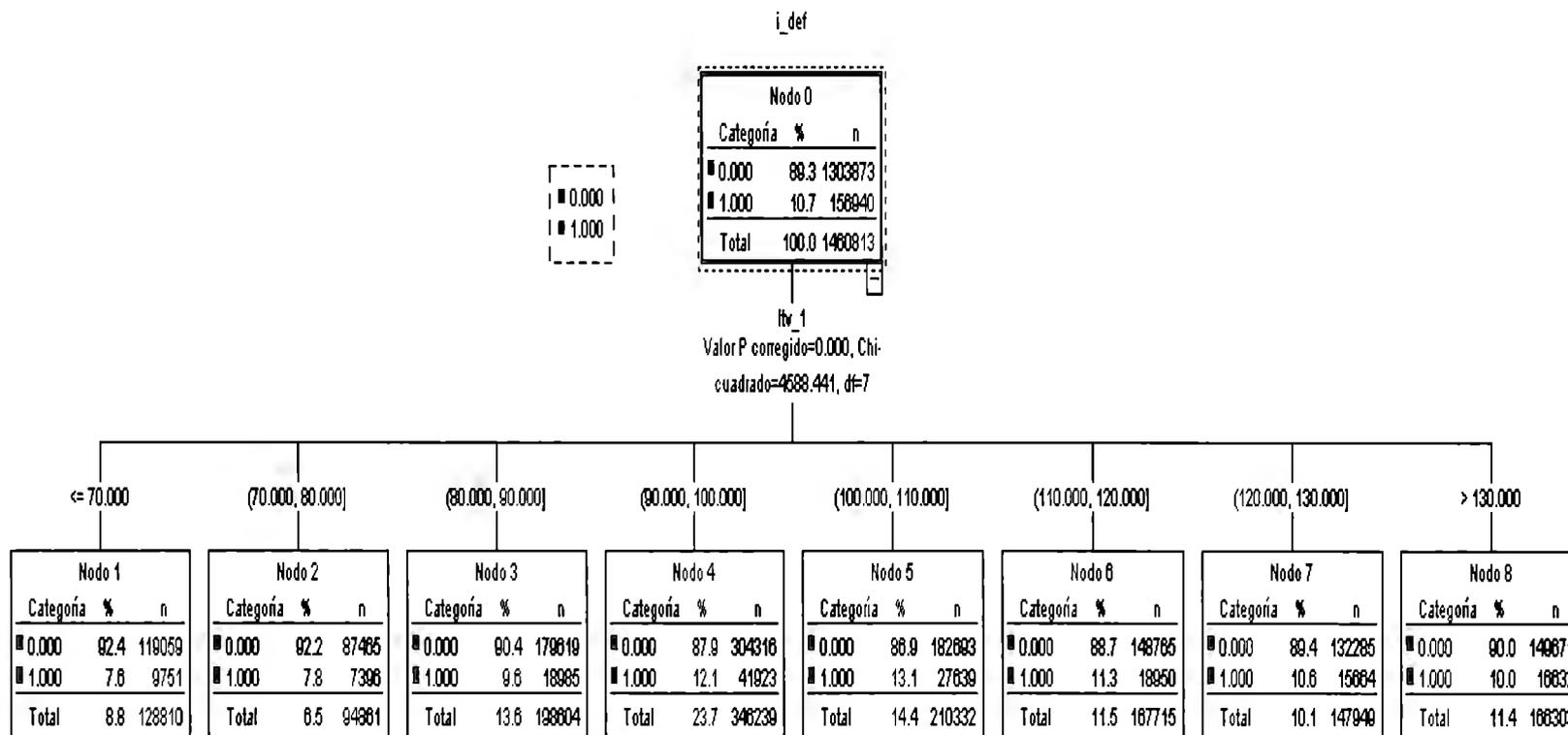


Figura V.1 Segmentación del portafolio mediante la técnica CHAID

Dado lo anterior, la tasa de incumplimiento está definida como la razón de incumplimientos a total de observaciones de acuerdo a lo siguiente:

$$Ti_t = \frac{\hat{I}_{it}}{N_t} \quad \text{V.3}$$

Donde Ti_t es la tasa de incumplimiento observada en el periodo t y N_t el número total de créditos hipotecarios (vigentes y vencidos).

En la práctica, el indicador de incumplimiento es 3 pagos atrasados o más, en el caso específico de este trabajo, se empleará > 3 considerando un mayor periodo de observación antes de definir a un crédito con estatus de incumplimiento.

La composición de la estructura de bursatilización se muestra en el cuadro V.2, la primera estimación se realizó mediante simulación histórica de las pérdidas obteniéndose la pérdida esperada, pérdida no esperada, α -Cuantil y déficit esperado (PE , UL_α , Q_α , ES_α respectivamente) en lo que respecta al UL_α , α -Cuantil y al ES_α , se obtuvieron para $\alpha = 99.9\%$ que es el equivalente a la calificación BBB en escala global de un bono y también a manera de comparación se presentan valores α de 99% y 99.5%, el residual va a estar definido mediante el resultado del α -Cuantil menos la pérdida esperada, dado que la tasa activa¹³ de un crédito incluye la estimación de este tipo de pérdida como un costo a ser cubierto, este resultado es el concepto de capital económico. Estos resultados se muestran en el cuadro V.3, se

¹³ En términos generales, la tasa activa podría definirse como la tasa de interés que cobra una institución al financiar a una contraparte, la cual incluye el costo de financiamiento de la institución, el riesgo crédito, un margen financiero, entre otros conceptos.

observa que los créditos con un mayor requerimiento de capital son aquellos que se originan con una razón deuda a garantía mayor al 100%, una capitalización al nivel del déficit esperado (ES_α), daría mayor seguridad a una estructura de bursatilización, sin embargo la simulación histórica está muy lejos de lo que un modelo teórico podría sustentar, por lo que se estimaran estos parámetros mediante el modelo de BASILEA II (BIS, 2006).

Grupo	Volumen	Exposición*
≤ 80	2,314	11.28%
$80 < LTV \leq 90$	1,850	11.22%
$90 < LTV \leq 100$	5,180	32.27%
$100 < LTV \leq 110$	7,321	45.23%
$110 < LTV$	0	0.00%
Total	16,665	100%

Cuadro V.2. Composición observada de la estructura de bursatilización.

*La exposición es la proporción del saldo del grupo respecto al total

Grupo	PE	UL _{99%}	UL _{99.5%}	UL _{99.9%}	Q _{99%}	Q _{99.5%}	Q _{99.9%}	ES _{99%}	ES _{99.5%}	ES _{99.9%}
LTV ≤ 80	2.12%	13.86%	15.01%	21.02%	15.98%	17.13%	23.14%	19.01%	21.37%	25.17%
$80 < LTV \leq 90$	2.03%	13.55%	15.69%	16.38%	15.58%	17.72%	18.41%	17.40%	18.20%	18.62%
$90 < LTV \leq 100$	2.19%	14.96%	18.50%	22.35%	17.16%	20.70%	24.54%	21.22%	23.14%	24.64%
$100 < LTV \leq 110$	2.05%	12.53%	15.18%	18.87%	14.58%	17.23%	20.92%	17.67%	18.89%	21.93%
Total	2.10%	7.48%	8.37%	10.59%	9.58%	10.48%	12.69%	10.95%	11.77%	13.55%

Cuadro V.3. Estimación de la pérdida esperada y no esperada, α -Cuantil y déficit esperado a diferentes cuantiles (PE , UL_α , Q_α , ES_α respectivamente) para el bono respaldado por hipotecas mediante simulación histórica

El modelo de BASILEA II (BIS, 2006) de la expresión II.69, se desarrolla en un mundo normal y está basado en la cópula normal de dimensión uno, donde se establece que el incumplimiento ocurre cuando los activos de la institución o individuo caen por debajo de cierto umbral, así mismo, los incumplimientos conjuntos ocurren con correlación ρ cuyo estimador insesgado $\hat{\rho}$, es la correlación de los mismos activos. Dentro del enfoque regulatorio y de mejores prácticas

bancarias, la correlación es un parámetro exógeno establecido, para el caso de créditos hipotecarios este valor es 0.15 y la probabilidad de incumplimiento se puede obtener mediante un modelo que asigne una calificación o probabilidad de acuerdo a ciertas características de segmentación, la severidad de la pérdida puede ser obtenido también mediante un modelo estadístico o puede considerarse como un parámetro establecido de acuerdo a si se trabajará bajo el enfoque avanzado o estándar, respectivamente.

En este caso, se empleará la probabilidad promedio de cada grupo de segmentación como insumo para el modelo de capital económico; la severidad se considera un parámetro constante en 50%. Adicionalmente, se incrementa el supuesto de correlación entre incumplimientos para obtener una estimación más severa de la pérdida no esperada, es decir, se prueba con una correlación de 0.20 para probar los resultados del modelo con el supuesto del 0.15.

Los resultados de estas estimaciones considerando una correlación de 0.15 y severidad del 50%, a partir de la probabilidad de incumplimiento estimada mediante el promedio de la tasa de incumplimiento anual de la expresión (V.3), se muestran en el cuadro V.4, donde puede observarse que se obtienen resultados muy inferiores a los históricos, la probabilidad del grupo “Total” también representa la razón de créditos en incumplimiento, pero sin ninguna segmentación. Si el residual fuera estimado mediante las probabilidades calculadas aquí, estaría determinado por la suma del capital de cada grupo y no por la curva “Total”, dando así un residual de aproximadamente 9.15% (ponderado por la exposición de cada grupo) del total de la emisión para un cuantil del 99.9%, esto sería muy atractivo, puesto que los emisores tienen incentivos financieros para disminuir el residual tanto como el mercado lo

permita, sin embargo, este nivel impactaría de manera importante en la calificación de la emisión.

Grupo	PE	UL _{99%}	UL _{99.5%}	UL _{99.9%}
≤ 80	1.11%	4.62%	5.70%	8.34%
80 < LTV ≤ 90	1.01%	4.31%	5.33%	7.86%
90 < LTV ≤ 100	1.02%	4.34%	5.37%	7.91%
100 < LTV ≤ 110	1.66%	6.11%	7.43%	10.56%
Total	2.02%	6.97%	8.41%	11.77%

Cuadro V.4. Estimación de la pérdida esperada y no esperada a diferentes cuantiles (*PE*, *UL_α*, respectivamente) para el bono respaldado por hipotecas con el modelo de BASILEA II (BIS, 2006)

Como ya se mencionó previamente, se estima el residual considerando una correlación de 0.20 y se compara con los resultados del parámetro 0.15, estas estimaciones se muestran en el cuadro V.5 donde se observa que la correlación impacta en el nivel de capital requerido como se menciona en la teoría de riesgo crédito proporcionando una estimación más conservadora.

Grupos	Pi		A		B	
	5 años	Promedio	K _{A1}	K _{A2}	K _{B1}	K _{B2}
		anual				
LTV ≤ 80	7.70%	2.22%	16.22%	8.34%	20.14%	10.96%
80 < LTV ≤ 90	9.70%	2.02%	17.95%	7.86%	22.01%	10.37%
90 < LTV ≤ 100	12.10%	2.04%	19.54%	7.91%	23.64%	10.43%
100 < LTV ≤ 110	13.10%	3.33%	20.10%	10.56%	24.20%	13.65%
Total	10.80%	4.04%	18.70%	11.77%	22.79%	15.09%

Cuadro V.5. Estimación del residual por el modelo de BASILEA II, expresión II.69 con parámetros de acuerdo al cuadro V.6

Donde **K** se refiere al capital (Residual de la estructura) y los parámetros de la estimación se muestran en el cuadro V.6 siguiente de acuerdo a los subíndices de **K**:

Parámetro	Valor del escenario*			
	A1	A2	B1	B2
Pi	5 años	1 año	5 años	1 año
ρ	0.15	0.15	0.2	0.2

Cuadro V.6. Parámetros para la expresión II.69

*El nombre del escenario no tiene relación con calificaciones crediticias

El bono bajo análisis, fue emitido con un residual igual al 27.9% de toda la estructura, está respaldado por hipotecas a 30 años y formado por un tramo senior, un tramo subordinado y el residual que tiene la menor subordinación en la estructura. El residual resultante al estimarlo mediante el modelo de calificaciones internas para un cuantil del 99.9%, su valor máximo es del 23.3% considerando la probabilidad de incumplimiento en 5 años y correlación de 0.20, resultando menor al valor real al que fue estructurado, este 23.3% resulta del promedio ponderado por exposición de cada grupo de riesgo.

De los resultados del cuadro V.5 se consideraron los valores menor, medio y máximo (promedio ponderado por exposición de K_{A2} , K_{A1} y K_{B1} respectivamente) como residuales, para realizar las pruebas de amortización de la estructura y saber cómo se comportaría el bono en estos tres escenarios de residual. Estos resultados se muestran en el panel de la figura V.2 siguiente donde el eje x representa la línea de tiempo en meses durante la vida de la estructura, se observa que en los tres escenarios, la estructura paga en tiempo y forma los cupones del bono en el primer tramo de la estructura (senior) y del tramo subordinado, así como el residual de acuerdo a la cascada de flujos, de igual manera se observa que la sobrecolateralización que se consigue en la estructura proporciona una amplia holgura sobre la generación de flujos para la amortización del primer bono.

Los siguientes supuestos que establecen los escenarios de amortización, son públicos y se pueden consultar en los suplementos informativos de las emisiones

que se quieran analizar a través de la página de la Bolsa Mexicana de Valores (www.bmv.com.mx) o en la página del emisor. Para este caso, se empleó un escenario base de amortización el cual considera lo siguiente:

- i.* Una tasa constante de 0.20% que considera que se deja de recibir este flujo mensual por incumplimiento.
- ii.* Una inflación del 4.5% anual, incremento en el salario mínimo de 4.5%

Estos supuestos del escenario permiten ver que en condiciones no agresivas del mercado, la estructura tiene un desempeño deseable, el residual en los tres casos es capaz de absorber las pérdidas durante la vida del bono e incluso amortiza antes de los 13 años de vida, lo anterior se debe a que esta estructura fue emitida con la característica de que el exceso de flujo de efectivo posterior al pago de cupón, es empleado para adelantar pagos al principal del bono (amortización anticipada). Mientras existan oportunidades de inversión, esto no afectaría al tenedor del bono por recibir flujos anticipadamente pues los podría invertir e incrementar su rentabilidad sin embargo sigue teniendo esta estrategia la característica de generar riesgo de prepago, aunque esta fuera del alcance de este trabajo el establecer una estrategia que minimice este tipo de riesgo, es posible que pudiera implementarse una estrategia de mantener un nivel adecuado de sobrecolateralización y permitir pagos al siguiente bono, lo que beneficiaría al tenedor de este tramo y disminuiría el riesgo de prepago para el primer tramo, una herramienta útil y usada en la práctica es el uso de disparadores (triggers) que ejecutan ciertas tareas dadas las condiciones que se establezcan, en este caso, podría ser que al llegar a cierto nivel de sobrecolateralización se realicen pagos al siguiente tramo en prelación hasta regresar a un nivel de sobrecolateralización deseado, sin embargo profundizar en este tema será parte de una investigación futura.

Debido a que el escenario base no es garantía del desempeño del bono, se realiza un escenario más agresivo, el cual define la calificación del bono de acuerdo a los siguientes supuestos:

- i. Se considera una tasa de incumplimiento anual del 22% en los primeros 6 años.
- ii. La tasa anual de prepago es 0.2% constante.
- iii. La tasa de inflación es de 4.5% y el crecimiento en el salario mínimo es de 3% durante los primeros 5 años y se mantiene constante al 4.5% para el resto de la vida del bono.

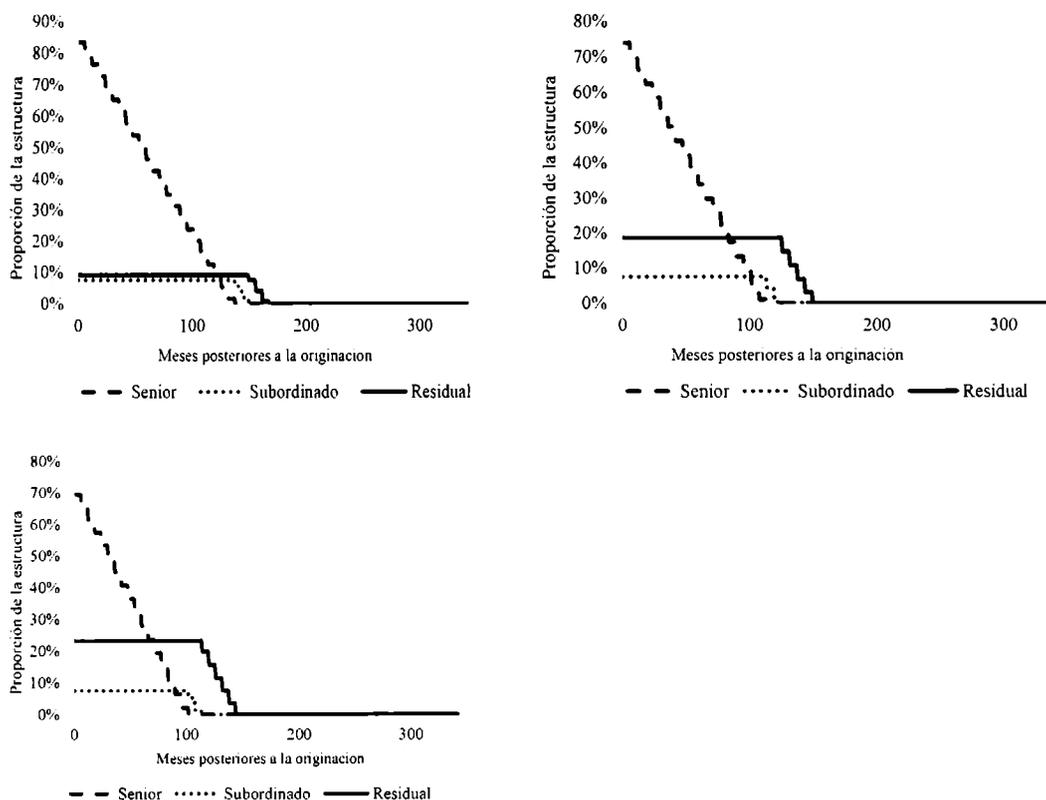


Figura V.2. Panel de amortización base: (izquierda a derecha) residuales 1,2 y residual 3 (abajo)

Es importante observar que este escenario considera que todo lo malo ocurre al inicio de la emisión, la tasa de incumplimiento después del año 6 disminuye a 0% de acuerdo al modelo de amortización.

Los resultados del escenario extremo o estresado se muestran en la figura V.3 donde se observa que en los tres casos la estructura financiera falla pues no termina de pagar el subordinado en ninguno de ellos, mientras que el tramo de mayor prelación, sólo termina de amortizar para el residual de mayor tamaño (tercer caso), aquí nuevamente se toca el tema de la particularidad de la estructura de adelantar el pago del principal, esto afecta a que no se realice nunca el pago de cupón del tramo subordinado. Dado que los créditos que respaldan la emisión incumplen al principio, su plazo de amortización se extiende por mucho en el supuesto de que se recuperen del incumplimiento y continúen pagando, mientras que todos los créditos que definitivamente dejan de pagar, generan flujos que entran al fideicomiso después del tiempo que dure el proceso legal de recuperación, donde estos flujos van descontados por gastos de cobranza, judiciales, de subasta de la garantía, entre otros, mismos que forman parte de la severidad de la pérdida. Desafortunadamente esta recuperación no se incluye en el modelo de amortización lo que lo hace más estresado puesto que se asume una pérdida del 100% de los créditos que incumplen.

El residual original de la estructura está formado por la porción mínima que soportaría este escenario extremo con cierta holgura, por lo que un residual propuesto menor al real mostrará incumplimiento en alguno de los tramos de la estructura, pero son escenarios (what if) que permiten estresar variables de impacto en el modelo y como éste se pueden establecer cualquiera posible.

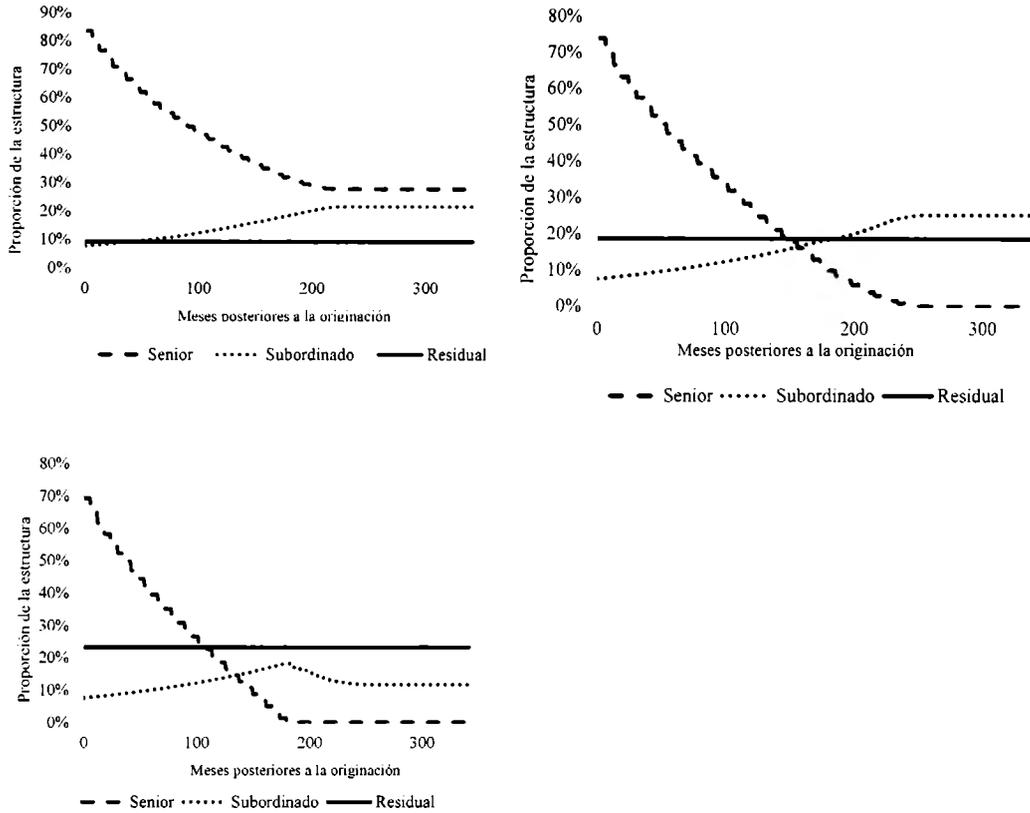


Figura V.3. Panel de amortización estresado: (Izquierda a derecha) residuales 1, 2 y (abajo) residual 3.

El análisis siguiente que se presenta, se desarrolló con el sistema estadístico de libre acceso R (Development Core Team, 2010), empleando el paquete *copula* (Kojadinovic y Yan 2010) y de acuerdo a la teoría expuesta en el capítulo III, se modela la cópula *t*-Student bivariada como primer caso, que como ya se comentó en dicho apartado, supone que las marginales univariadas son *t*-Student con ν grados de libertad, por lo que es preciso estimar los parámetros de la cópula (α) y de las marginales (β) de la expresión III.21, partiendo de la misma, la expresión de log-verosimilitud es la siguiente:

$$\ell(\theta) = \log c(t_1(X_i, \beta), t_1(X_i, \beta); \alpha) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \log(t_j(X_i, \beta)) \quad \dots V.3$$

Dónde:

$\theta = (\beta^T, \alpha^T)^T$, es el vector de parámetros a ser estimados.

Así mismo, el estimador de máxima verosimilitud está dado por:

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg \max_{\theta \in \Theta} \ell(\theta) \quad \dots V.4$$

La estimación de los parámetros de las cópulas y las marginales es un proceso numérico complicado si se quiere llevar a cabo en un solo paso, por lo que se implementó máxima verosimilitud en dos etapas, es decir primero se estiman los parámetros de las marginales *t*-Student y en una segunda etapa se estiman los parámetros de la copula *t*-Student bivariada.

En el anexo II se presenta el código R que se implementó para llevar a cabo la modelación de esta sección, los resultados paramétricos de la copula *t*-Student para cada uno de los grupos analizados se presentan en el anexo I, a manera de análisis de los mismos en esta sección se muestran solamente los correspondientes al grupo 5 (grupo total).

Para llevar a cabo la estimación de parámetros en la primera etapa, se crea en R la función a maximizar que en este caso se podrá ver en el código con el nombre de *L_beta* y se optimiza para cada una de las variables T_i y EAD_i , para $i=1, \dots, 5$; esta función obtiene el valor de los parámetros de las marginales y con estos se estiman los parámetros de las cópulas mediante el empleo de la función *fitCopula(...)*, por lo

que se tiene una estimación paramétrica de las marginales y paramétrica para las cópulas.

Parámetros de las marginales (gl)*		
Grupo	Ti	EAD
≤ 80	66.459	0.043
$80 < LTV \leq 90$	140.682	0.044
$90 < LTV \leq 100$	137.65	0.042
$100 < LTV \leq 110$	120.391	0.041
Total	51.821	0.038

* grados de libertad

Cuadro V.7. Estimación paramétrica de las marginales *t*-Student

Los resultados del ajuste paramétrico de la cópula *t*-Student para el grupo Total, se muestran en el cuadro V.8, puede referirse al anexo I para los resultados de todos los grupos analizados.

The estimation is based on the maximum likelihood and a sample of size 89.				
	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
rho.1	0.25271	0.02610	9.68397	0.00000
df	213.20929	84.22154	2.53153	0.01136

The maximized loglikelihood is 42.50128

The convergence code is 1

Cuadro V.8. Estimación paramétrica de la cópula *t*-Student para el grupo Total

Puede observarse que el parámetro de correlación es superior al supuesto del modelo IRB, sin embargo los grados de libertad sugieren normalidad, por lo que más adelante se probará con la cópula Normal, las densidades de las cópulas ajustadas se muestran en la figura V.6, misma que muestra colas más pesadas para la cópula del par *Ti* y *EAD* que representa al total del portafolio de créditos hipotecarios (grupo Total).

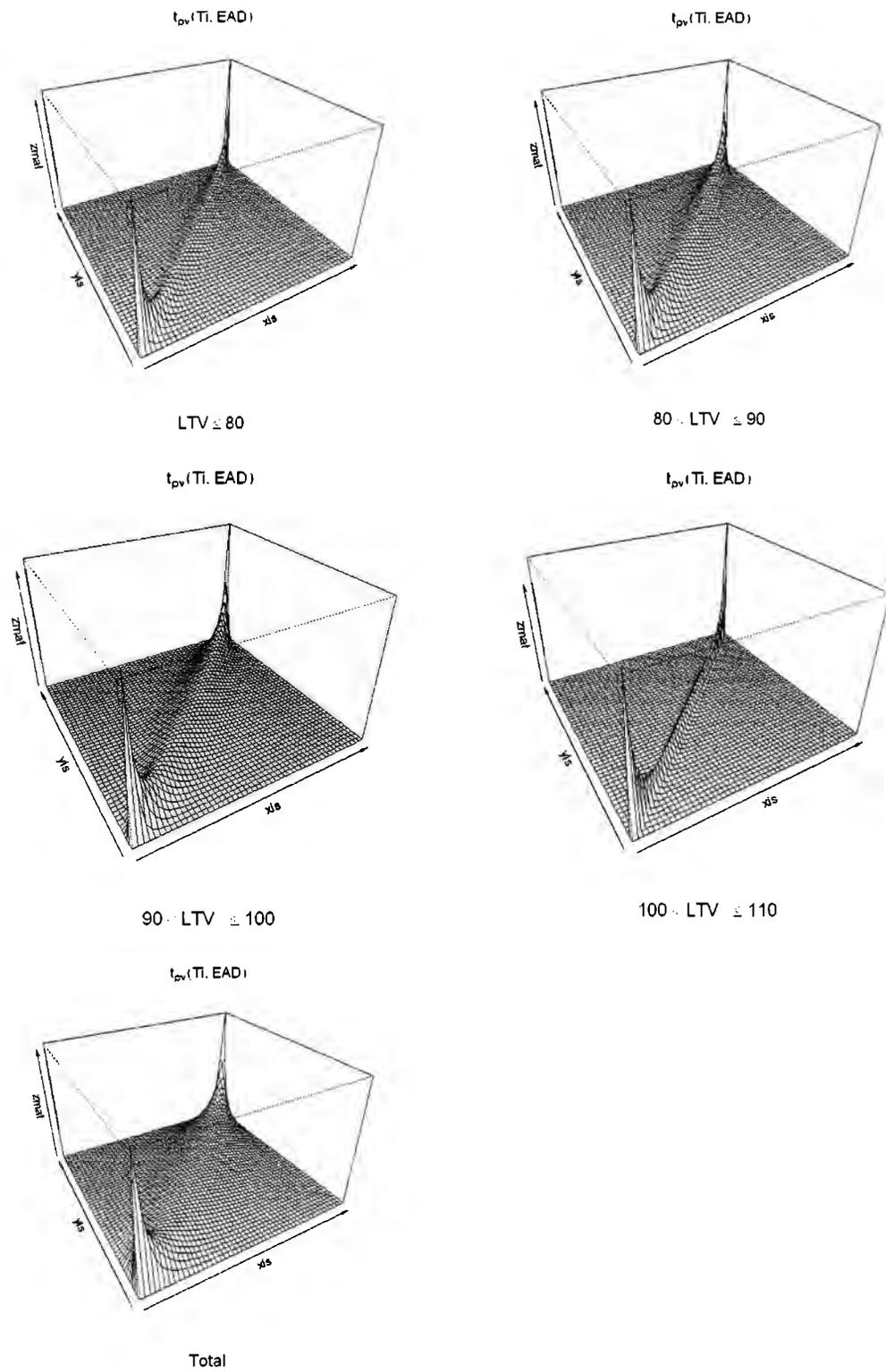


Figura V.4. Panel de grupos de Ti y EAD . Densidades de las cópulas ajustadas

Teniendo ajustada la cópula a los datos, se procede a simular las pérdidas históricas y a obtener la pérdida esperada (PE), pérdida no esperada (UL_α), α -cuantil (Q_α) y el déficit esperado (ES_α) para cada uno de los pares de variables Ti_i , EAD_i . Los valores de pérdida no esperada, Valor en Riesgo y déficit esperado o pérdida condicional en la cola de la distribución, se estimaron para los cuantiles 95% que es el cuantil al que se define el VaR , al 99.9% que es la probabilidad a la cual se asigna la calificación BBB en escala global a un bono y también a manera de comparación se consideran 99% y 99.5%, estos resultados se muestran en los cuadros V.9 a V.11 respectivamente.

Grupo	EL	UL_α			
		95%	99%	99.50%	99.90%
≤ 80	10.16%	18.23%	22.62%	23.33%	24.44%
$80 < LTV \leq 90$	10.04%	18.31%	22.80%	23.57%	24.64%
$90 < LTV \leq 100$	10.23%	18.03%	22.58%	23.39%	24.33%
$100 < LTV \leq 110$	9.53%	17.38%	22.55%	23.56%	24.72%
Total	9.42%	16.97%	22.41%	23.31%	24.78%

Cuadro V.9. Pérdida esperada y no esperada, estimación paramétrica de la cópula t -Student

Se puede notar que para el caso del grupo con mayor LTV, se obtiene una menor pérdida esperada, esto se debe a que la correlación estimada resulto menor en comparación con los otros grupos (ver anexo I), aunque no hay diferencia significativa respecto a las pérdidas no esperadas para todos los grupos.

Grupo	Q_α			
	95%	99%	99.50%	99.90%
≤ 80	28.39%	32.78%	33.50%	34.60%
$80 < LTV \leq 90$	28.35%	32.85%	33.61%	34.68%
$90 < LTV \leq 100$	28.25%	32.81%	33.62%	34.56%
$100 < LTV \leq 110$	26.91%	32.08%	33.09%	34.24%
Total	26.39%	31.84%	32.73%	34.20%

Cuadro V.10. α -cuantil (Q_α), estimación paramétrica de la cópula t -Student

Grupo	ES _α			
	95%	99%	99.50%	99.90%
≤ 80	31.06%	33.63%	34.11%	34.74%
80 < LTV ≤ 90	31.11%	33.78%	34.31%	34.85%
90 < LTV ≤ 100	31.05%	33.69%	34.20%	34.83%
100 < LTV ≤ 110	29.98%	33.23%	33.83%	34.60%
Total	29.62%	33.00%	33.69%	34.44%

Cuadro V.11. Déficit esperado (ES_{α}), estimación paramétrica de la cópula t -Student

Como segundo caso, se lleva a cabo la estimación semi-paramétrica de las cópulas t -Student, Normal y Gumbel, de acuerdo con Neelsen (1999) y Genests y Favre (2007), dentro del análisis de cópulas se presenta el problema de subestimación de las marginales ajustadas a los datos bajo estudio, este problema se minimiza empleando la distribución empírica de las marginales, obteniendo con esto la cópula empírica la cual está definida de acuerdo a la expresión III.33, este análisis se refiere a la estimación no paramétrica de cópulas que de acuerdo a la sección III, dada la continuidad del par de vectores aleatorios (X, Y) , existe una única cópula asociada a dicho vector la cual es invariante bajo transformaciones monótonas no decrecientes de las marginales, es decir, $\hat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) \rightarrow C(X, Y)$ cuando $n \rightarrow \infty$, así la dependencia entre (X, Y) es capturada por la cópula empírica \hat{C} como la mejor representación muestral de la cópula teórica C . En este sentido, se desarrolla el siguiente análisis mediante la estimación no paramétrica de las cópulas t -Student, normal y Gumbel a los vectores (T_i, EAD) .

Los resultados del ajuste semi-paramétrico de las cópulas bajo estudio se muestran en el anexo I, en el anexo II se incluye el código R y fue realizado de acuerdo a la teoría desarrollada en el capítulo III, considerando la distribución empírica de las marginales mediante los estadísticos de orden que permiten estimar la cópula empírica, en los cuadros V.12 a V.14 se muestran los resultados para pérdida

esperada y no esperada para las cópulas t -Student, Normal y Gumbel, respectivamente.

Grupo	EL	UL _α			
		95%	99%	99.50%	99.90%
≤ 80	9.88%	17.87%	22.68%	23.40%	24.44%
80 < LTV ≤ 90	10.24%	18.46%	22.70%	23.53%	24.21%
90 < LTV ≤ 100	10.31%	18.45%	22.98%	23.52%	24.35%
100 < LTV ≤ 110	10.29%	18.43%	23.08%	23.67%	24.35%
Total	10.25%	18.35%	22.49%	23.27%	24.24%

Cuadro V.12. Pérdida esperada y pérdida no esperada a diferentes cuantiles para la cópula t -Student semi-paramétrica.

Grupo	EL	UL _α			
		95%	99%	99.50%	99.90%
≤ 80	9.97%	18.24%	22.71%	23.59%	24.46%
80 < LTV ≤ 90	10.23%	18.48%	22.79%	23.62%	24.31%
90 < LTV ≤ 100	10.32%	18.74%	22.73%	23.63%	24.40%
100 < LTV ≤ 110	10.45%	18.70%	22.85%	23.47%	24.19%
Total	10.32%	18.61%	22.76%	23.40%	24.29%

Cuadro V.13. Pérdida esperada y pérdida no esperada a diferentes cuantiles para la cópula Normal semi-paramétrica.

Grupo	EL	UL _α			
		95%	99%	99.50%	99.90%
≤ 80	9.90%	19.18%	23.84%	24.49%	24.96%
80 < LTV ≤ 90	10.39%	19.40%	23.57%	24.04%	24.45%
90 < LTV ≤ 100	10.53%	19.78%	23.64%	24.03%	24.40%
100 < LTV ≤ 110	10.73%	19.80%	23.41%	23.85%	24.15%
Total	10.15%	19.61%	23.80%	24.21%	24.68%

Cuadro V.14. Pérdida esperada y pérdida no esperada a diferentes cuantiles para la cópula Gumbel semi-paramétrica.

Definiendo al residual como el resultado de los modelos analizados para un cuantil del 99.9% para el caso de las cópulas (UL_{99.9%}), se obtiene un nivel inferior al residual real con el que se emitió la estructura de bursatilización que fue del 27.9%,

éste comparativo puede observarse en el cuadro V.15, donde los resultados para las cópulas, son una ponderación entre los niveles de $UL_{99.9\%}$ de los cuadros V.9, V.12 a V.14 y el cuadro V.2 respectivamente, estos resultados son ligeramente mayores y por consiguiente más conservadores que los resultados obtenidos por el modelo de calificaciones internas (BIS 2006), cuyo valor máximo fue de 23.3%. Se notará que para el caso de las cópulas el resultado no tiene gran variación, esto indica que los parámetros de riesgo considerados son poco sensibles respecto a la cópula empleada.

Método	Nivel[†]
Residual real	27.90%
Basilea II (K_{B1})[*]	23.30%
<i>t</i>-Student paramétrica	24.55%
<i>t</i>-Student semi-paramétrica	24.34%
Normal	24.30%
Gumbel	24.36%

* Refiérase al cuadro 4 para los parámetros del escenario

† Para las cópulas, el nivel es $UL_{99.9\%}$.

Cuadro V.15. Comparativo de estimaciones.

CAPITULO VI

CONCLUSIONES

La intención de establecer un residual menor al que originalmente tiene la estructura financiera bajo estudio, es proponer una liberación de recursos para la emisión de más bonos que permita un mayor financiamiento para la parte emisora, el empleo de la teoría de cópulas muy utilizada en el campo de finanzas, permitirá en estudios más profundos ganar confianza a los análisis de escenarios que normalmente se llevan a cabo para establecer las constancias en los bonos respaldados por hipotecas, la capacidad que muestran en capturar la dependencia entre factores de riesgo resulta en estimados mayores a medir esta dependencia con la correlación lineal.

El manejo de cópulas de dimensiones mayores a dos no es sencillo y como en el caso de la cópula *t*-Student se complica más al tener que resolver una integral doble, para esto, existen paquetes estadísticos que ya tienen integrados módulos para la construcción de cópulas como el empleado en el presente trabajo.

La importancia de trabajar con el modelo de BASILEA II (BIS, 2006), es acercarse a la práctica regulatoria internacional, en el presente trabajo, el empleo de una correlación diferente a la definida por el modelo, muestra lo sensible que es a este supuesto, el residual obtenido considerando el modelo de calificaciones internas (BIS 2006) con una correlación de 0.20 y la probabilidad promedio estimada de 5 años, resultante en 23.3% de la estructura, sería suficiente para ciertos escenarios de amortización, aquí no se puede observar la ventaja de establecer un mínimo de capital requerido, puesto que al emplear el modelo que definió el residual real como

el valor mínimo para superar ese estrés, cualquier nivel inferior a éste, resultará en falla.

Se concluye que los resultados de la aplicación de cópulas para las variables (T_i , EAD) proporcionan una pérdida no esperada ligeramente mayor a los obtenidos por el modelo de calificaciones internas pero menores al residual que se estableció en la estructura real. Como lo establece la teoría de cópulas (Nelsen, 1999), estos modelos son capaces de capturar mejor la dependencia que existe entre las variables que se analicen, en este estudio de cartera hipotecaria sujeta a bursatilización, los resultados obtenidos muestran que al aplicar ésta teoría se obtienen estimaciones mayores del parámetro de dependencia al establecido bajo el modelo de calificaciones internas.

Además, en el cuadro V.15 se observa que las estimaciones basadas en el modelo de Basilea II y Cópulas son inferiores al residual real con el que fue emitida la estructura, esto sugiere que el empleo del modelo de la agencia calificadora pudiera sobreestimar el riesgo crédito de la estructura, es decir, sería posible disminuir el tamaño del residual obteniendo aún así una sobrecolateralización que proporcione un desempeño satisfactorio de la estructura, ya que los modelos que se emplearon en el presente trabajo, utilizan variables estadísticas que miden el riesgo crédito de los activos subyacentes de los bonos respaldados por hipotecas, de permitirse un residual menor, el beneficio sería incrementar la emisión de bonos, es decir, el originador de los créditos podría obtener un mayor financiamiento al recurrir al mercado de deuda mediante la estrategia de bursatilización de sus activos.

Finalmente, considerando que el plazo legal de la emisión es superior a los 25 años, la estrategia de realizar pagos al principal de los bonos en los casos donde se presentan excesos de flujos posteriores al pago de los respectivos cupones,

disminuye significativamente el plazo de la estructura que de acuerdo a las características del escenario base del bono, puede llegar a ser hasta de 10 años generando un riesgo de prepago, mismo que se presenta al amortizar anticipadamente el principal del bono cuando las tasas de inversión en el mercado son inferiores a la que paga dicho instrumento financiero. Esta particularidad disminuye el riesgo de crédito del bono respaldado por hipotecas, ya que al amortizar anticipadamente las obligaciones del fideicomiso, disminuye la exposición que éste tiene ante un eventual incremento de la tasa de incumplimiento de los activos subyacentes de la estructura en el futuro.

LITERATURA CITADA

- ARTZNER, P.; Delbaen, F.; Eber, J. M.; Heat, D. 1999. "*COHERENT MEASURES OF RISK*". Mathematical Finance.
- BANK FOR INTERNATIONAL SETTLEMENT (BIS). 2006. "*INTERNATIONAL CONVERGENCE OF CAPITAL MEASUREMENT AND CAPITAL STANDARDS*". Basel Committee on Banking Supervision.
- BANK FOR INTERNATIONAL SETTLEMENT (BIS). 2005. "*AN EXPLANATORY NOTE ON THE BASEL II IRB RISK WEIGHT FUNCTIONS*". Basel Committee on Banking Supervision. Pag. 1-15.
- BESTER, Helmut. 1994. "*THE ROLE OF COLLATERAL IN A MODEL OF DEBT RENEGOTIATION*". Journal of Money, Credit and Banking.
- BLACK, Fisher; Scholes, Myron. 1973. "*THE PRICING OF OPTIONS AND CORPORATE LIABILITIES*". Journal of Political Economy.
- BLUHM, Christian; Overbeck, Ludber; Wagner, Christoph. 2003. "*AN INTRODUCTION TO CREDIT RISK MODELING*". Chapman & Hall/CRC.
- BOLTON, Patrick; Freixas, Xavier. 2000. "*EQUITY, BONDS AND BANK DEBT: CAPITAL STRUCTURE AND FINANCIAL MARKET EQUILIBRIUM UNDER ASYMMETRIC INFORMATION*". Journal of Political Economy.
- BOUDOUKH, Jacob; Whitelaw, Robert F.; Richardson, Mattew; Stanton, Richard. 1997. "*PRICING MORTGAGE-BACKED SECURITIES IN A MILTIFACTOR INTEREST RATE ENVIRONMENT: A MULTIVARIATE DENSITY ESTIMATION APROACH*". The Review of Financial Studies.
- CAREY, Mark. 1998. "*CREDIT RISK IN PRIVATE DEBT PORTFOLIOS*". The Journal of Finance.

- CHAN, Yuk-Shee; Kanatas, George. 1985. "*ASYMMETRIC VALUATIONS AND THE ROLE OF COLLATERAL IN LOAN AGREEMENTS*". Journal of Money, Credit and Banking.
- CHAN, Yuk-Shee; Thakor, Anjan V. 1987. "*COLLATERAL AND COMPETITIVE EQUILIBRIA WITH MORAL HAZARD AND PRIVATE INFORMATION*". The Journal of Finance.
- CHERUBINI, U; Luciano, E. 2000. "*VALUE AT RISK TRADE-OFF AND CAPITAL ALLOCATION WITH COPULAS*". Turin.
- COX, J. C.; J. E. Ingersoll; S. A. Ross. (1985). "*A THEORY OF THE TERM STRUCTURE OF INTEREST RATES*". Econometrica.
- CREDIT SUISSE.1997. "*CREDITRISK⁺ A CREDIT RISK MANAGEMENT FRAMEWORK*". Credit Suisse-First Boston.
- CROSBIE, Peter. 2003. "*MODELING DEFAULT RISK*". Moody's/KMV
- DAVIDSON, Andrew; Sanders, Anthony; Wolff, Lan-Ling; Ching, Anne. 2003. "*SECURITIZATION: STRUCTURING AND INVESTMENT ANALYSIS*". Wiley.
- DEMARTA, Stefano; McNeil, Alexander J. 2004. "*THE t COPULA AND RELATED COPULAS*". Department of Mathematics ETHZ Zürich.
- DOHERTY, Neil A.; Richter, Andreas. 2002. "*MORAL HAZARD, BASIS RISK AND GAP INSURANCE*". The journal of Risk and Insurance.
- DUNN, Kenneth B.; McConnell, John J. 1981. "*VALUATION OF GNMA MORTGAGE-BACKED SECURITIES*". The Journal of Finance.
- EMBRECHTS, Paul; Lindskog, Filip; McNeil, Alexander. 2001. "*MODELLING DEPENDENCE WITH COPULAS AND APPLICATIONS TO RISK MANAGEMENT*". Department of Mathematics ETHZ Zürich.
- FABOZZI, Frank J.; Goodman, Laurie S. 2001. "*INVESTING IN COLLATERALIZED DEBT OBLIGATIONS*". Frank J. Fabozzi Associates.

- FABOZZI, Frank J. 2006. *"THE HANDBOOK OF MORTGAGE-BACKED SECURITIES"*. McGraw-Hill.
- FREY, Rüdiger; McNeil, Alexander J; Nyfeler, Mark A. 2001. *"COPULAS AND CREDIT MODELS"*.
- FREY, Rüdiger; McNeil, Alexander J. 2001. *"MODELING DEPENDENT DEFAULTS"*.
- FREY, Rüdiger; McNeil, Alexander J. 2002. *"VaR AND EXPECTED SHORTFALL IN PORTFOLIOS OF DEPENDENT CREDIT RISKS: CONCEPTUAL AND PRACTICAL INSIGHTS"*.
- GENEST, Christian; Favre, Anne-Catherine. 2007. *"EVERYTHING YOU ALWAYS WANTED TO KNOW ABOUT COPULA MODELING BUT WERE AFRAID TO ASK"*. Journal of Hydrologic Engineering. Pag 347-368.
- GORDY, Michael B. 2003. *"A RISK-FACTOR MODEL FOUNDATION FOR RATINGS-BASED BANK CAPITAL RULES"*. Journal of Financial Intermediation. Pag. 199-232.
- GANGWANI, Sunil. 1998. *"MBS STRUCTURING: CONCEPTS AND TECHNIQUES"*. Deloitte and Touche LLP.
- HAN, Li-Ming; Lai, Gene C. 1995. *"AN ANALYSIS OF SECURITIZATION IN THE INSURANCE INDUSTRY"*. The Journal of Risk and Insurance.
- KOJADINOVIC, Ivan, Yan, Jun. (2010). *"MODELING MULTIVARIATE DISTRIBUTIONS WITH CONTINUOUS MARGINS USING THE COPULA R PACKAGE"*. Journal of Statistical Software, 34(9), 1-20. URL <http://www.jstatsoft.org/v34/i09/>.
- KARIYA, Takeaki; Ushiyama, Fumiaki; Pliska, R. Stanley. 2002. *"A 3-FACTOR MODEL FOR MORTGAGE-BACKED SECURITIES (MBS)"*.
- KRASKOWITZ, David; Kipkalov, Alexander; Lundstedt, Kyle; Mongo, John. 2002. *"BEST PRACTICES IN MORTGAGE DEFAULT RISK MEASUREMENT AND ECONOMIC CAPITAL"*. Washington Mutual Inc.

- LI, David X. 2000. "*ON DEFAULT CORRELATION: A COPULA FUNCTION APPROACH*". The RiskMetrics Group.
- MARRISON, Chris. 2002. "*THE FUNDAMENTALS OF RISK MEASUREMENT*". McGraw Hill.
- MERTON, Robert C. 1973. "*A RATIONAL THEORY OF OPTION PRICING*". Bell Journal of Economics and Management Science.
- MERTON, Robert C. 1974. "*ON THE PRICING OF CORPORATE DEBT: THE RISK STRUCTURE OF INTEREST RATES*". Journal of Finance. Pag. 449-470.
- NELSEN, Roger B. 1999. "*AN INTRODUCTION TO COPULAS*". Springer.
- PHOA, Wesley. 1998. "*ADVANCED FIXED INCOME ANALYTICS*". Frank J. Fabozzi Associates.
- PLATEN, Eckhard; Heath, David. 2007. "*A BENCHMARK APPROACH TO QUANTITATIVE FINANCE*". Springer.
- R Development Core Team (2010). "*R: A LANGUAGE AND ENVIRONMENT FOR STATISTICAL COMPUTING*". R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>.
- VASICEK, Oldrich Alfons. 2002. "*THE DISTRIBUTION OF LOAN PORTFOLIO VALUE*".
- WILMOTT, Paul. 2000. "*PAUL WILMOTT ON QUANTITATIVE FINANCE*". John Wiley & Sons. Vol. 2
- YAN, Jun (2007). "*ENJOY THE JOY OF COPULAS: WITH A PACKAGE COPULA*". Journal of Statistical Software, 21(4), 1-21. URL <http://www.jstatsoft.org/v21/i04/>.

ANEXO I. Resultados del ajuste de cópulas

Estimación paramétrica de la cópula *t*-Student

Ajuste paramétrico de la Cópla *t*-Student para el grupo
 $LTV \leq 80\%$

**The estimation is based on the maximum likelihood
and a sample of size 89.**

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
rho.1	0.45762	0.04064	11.26049	0.00000
df	217.45019	182.44090	1.19189	0.23330

The maximized loglikelihood is 47.67852

The convergence code is 1

Ajuste paramétrico de la Cópla *t*-Student para el grupo
 $80\% < LTV \leq 90\%$

**The estimation is based on the maximum likelihood
and a sample of size 89.**

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
rho.1	0.48817	0.04239	11.51611	0.00000
df	121.19623	76.59794	1.58224	0.11360

The maximized loglikelihood is 46.44706

The convergence code is 1

Ajuste paramétrico de la Cópla *t*-Student para el grupo
 $90\% < LTV \leq 100\%$

**The estimation is based on the maximum likelihood
and a sample of size 89.**

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
rho.1	0.46279	0.04188	11.05168	0.00000
df	237.85981	203.45480	1.16910	0.24236

The maximized loglikelihood is 44.44276

The convergence code is 1

Ajuste paramétrico de la Cópula t-Student para el grupo
 $100\% < LTV \leq 110\%$

**The estimation is based on the maximum likelihood
and a sample of size 89.**

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
rho.1	0.27297	0.02953	9.24410	0.00000
df	197.31350	86.46604	2.28198	0.02249

The maximized loglikelihood is 38.54238

The convergence code is 1

Ajuste paramétrico de la Cópula t-Student para el grupo
Total

**The estimation is based on the maximum likelihood
and a sample of size 89.**

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
rho.1	0.25271	0.02610	9.68397	0.00000
df	213.20929	84.22154	2.53153	0.01136

The maximized loglikelihood is 42.50128

The convergence code is 1

Estimación semi-paramétrica de la cópula t-Student

Ajuste semi-paramétrico de la Cópula t-Student para el
grupo $LTV \leq 80\%$

**The estimation is based on the maximum likelihood
and a sample of size 89.**

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
rho.1	0.39638	0.08834	4.48691	0.00001
df	98.83165	168.74928	0.58567	0.55810

The maximized loglikelihood is 6.561461

The convergence code is 1

Ajuste semi-paramétrico de la Cópula t-Student para el
grupo $80\% < LTV \leq 90\%$

**The estimation is based on the maximum likelihood
and a sample of size 89.**

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
rho.1	0.51129	0.07335	6.97094	0.00000
df	88.00877	145.94071	0.60304	0.54648

The maximized loglikelihood is 11.98998

The convergence code is 1

Ajuste semi-paramétrico de la Cópula t-Student para el grupo $90\% < LTV \leq 100\%$

The estimation is based on the maximum likelihood and a sample of size 89.

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
rho.1	0.54125	0.06918	7.82424	0.00000
df	88.00833	156.07099	0.56390	0.57282

The maximized loglikelihood is 13.80794

The convergence code is 1

Ajuste semi-paramétrico de la Cópula t-Student para el grupo $100\% < LTV \leq 110\%$

The estimation is based on the maximum likelihood and a sample of size 89.

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
rho.1	0.60192	0.06028	9.98517	0.00000
df	88.01306	126.37363	0.69645	0.48615

The maximized loglikelihood is 18.07617

The convergence code is 1

Ajuste semi-paramétrico de la Cópula t-Student para el grupo Total

The estimation is based on the maximum likelihood and a sample of size 89.

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
rho.1	0.53035	0.07031	7.54259	0.00000
df	97.82821	138.05959	0.70859	0.47858

The maximized loglikelihood is 13.01045

The convergence code is 1

Estimación semi-paramétrica de la cópula Normal

Ajuste semi-paramétrico de la Cópula Normal para el grupo $LTV \leq 80\%$

The estimation is based on the maximum likelihood and a sample of size 89.

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
rho.1	0.40026	0.08737	4.58106	0.00000

The maximized loglikelihood is 6.732212

The convergence code is 0

Ajuste semi-paramétrico de la Cópla Normal para el grupo $80\% < LTV \leq 90\%$

The estimation is based on the maximum likelihood and a sample of size 89.

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
rho.1	0.51561	0.07201	7.16050	0.00000

The maximized loglikelihood is 12.17444

The convergence code is 0

Ajuste semi-paramétrico de la Cópla Normal para el grupo $90\% < LTV \leq 100\%$

The estimation is based on the maximum likelihood and a sample of size 89.

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
rho.1	0.54510	0.06785	8.03374	0.00000

The maximized loglikelihood is 13.96917

The convergence code is 0

Ajuste semi-paramétrico de la Cópla Normal para el grupo $100\% < LTV \leq 110\%$

The estimation is based on the maximum likelihood and a sample of size 89.

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
rho.1	0.60565	0.05912	10.24365	0.00000

The maximized loglikelihood is 18.31967

The convergence code is 0

Ajuste semi-paramétrico de la Cópla Normal para el grupo Total

The estimation is based on the maximum likelihood and a sample of size 89.

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
rho.1	0.53392	0.06944	7.68954	0.00000

The maximized loglikelihood is 13.26635

The convergence code is 0

Estimación semi-paramétrica de la cópula Gumbel

Ajuste semi-paramétrico de la Cópla Gumbel para el grupo $LTV \leq 80\%$

The estimation is based on the maximum likelihood and a sample of size 89.

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
rho.1	1.35504	0.10453	12.96303	0.00000

The maximized loglikelihood is 9.483262
The convergence code is 0

Ajuste semi-paramétrico de la Cópla Gumbel para el grupo $80\% < LTV \leq 90\%$

The estimation is based on the maximum likelihood and a sample of size 89.

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
rho.1	1.55751	0.12703	12.26126	0.00000

The maximized loglikelihood is 16.91603
The convergence code is 0

Ajuste semi-paramétrico de la Cópla Gumbel para el grupo $90\% < LTV \leq 100\%$

The estimation is based on the maximum likelihood and a sample of size 89.

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
rho.1	1.66120	0.13735	12.09427	0.00000

The maximized loglikelihood is 21.37752
The convergence code is 0

Ajuste semi-paramétrico de la Cópla Gumbel para el grupo $100\% < LTV \leq 110\%$

The estimation is based on the maximum likelihood and a sample of size 89.

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
rho.1	1.72688	0.14247	12.12112	0.00000

The maximized loglikelihood is 22.70651
The convergence code is 0

Ajuste semi-paramétrico de la Cópula Gumbel para el grupo Total

The estimation is based on the maximum likelihood and a sample of size 89.

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
rho.1	1.52061	0.12129	12.53689	0.00000

The maximized loglikelihood is 14.82293

The convergence code is 0

ANEXO II

Código R

```
#### Se cargan las librerías necesarias para las cópulas
#### y otros análisis

library(mvtnorm)
library(scatterplot3d)
library(mnormt)
library(apspline)
library(sn)
library(copula)
library(zoo)
library(xts)
library(PerformanceAnalytics)

## Máxima verosimilitud en dos etapas

#### Se estimarán los grados de libertad mediante máxima verosimilitud
para cada una de las marginales t bivariadas (5 en total)

#### Valores iniciales de la optimización

### curva 1
b1.1 <- length(ti1[,1])-1      ## grados de libertad
b2.1 <- length(ead1[,1])-1    ## grados de libertad
a.1 <- sin(cor(ti1, ead1, method = "kendall") * pi/2) ## correlación

### curva 2
b1.2 <- length(ti2[,1])-1      ## grados de libertad
b2.2 <- length(ead2[,1])-1    ## grados de libertad
a.2 <- sin(cor(ti2, ead2, method = "kendall") * pi/2) ## correlación

### curva 3
b1.3 <- length(ti3[,1])-1      ## grados de libertad
b2.3 <- length(ead3[,1])-1    ## grados de libertad
a.3 <- sin(cor(ti3, ead3, method = "kendall") * pi/2) ## correlación

### curva 4
b1.4 <- length(ti4[,1])-1      ## grados de libertad
b2.4 <- length(ead4[,1])-1    ## grados de libertad
a.4 <- sin(cor(ti4, ead4, method = "kendall") * pi/2) ## correlación

### curva 6
b1.6 <- length(ti6[,1])-1      ## grados de libertad
b2.6 <- length(ead6[,1])-1    ## grados de libertad
a.6 <- sin(cor(ti6, ead6, method = "kendall") * pi/2) ## correlación

##### Primera etapa: Estimación de parámetros de las marginales

## Marginal a optimizar

loglik.marg <- function(b, x) sum(dt(x, df = b[1], log = TRUE)) ctrl <-
list(fnscale = -1) ## define la función "optim" en maximizar
```

```

### curva 1

blhat1 <- optim(b1.1, fn = loglik.marg, x = ti1[,1],method="BFGS",
control = ctrl)$par ## estimación de parámetros de la marginal 1
b2hat1 <- optim(b2.1, fn = loglik.marg, x = ead1[,1],method="BFGS",
control = ctrl)$par ## estimación de parámetros de la marginal 2

### curva 2

blhat2 <- optim(b1.2, fn = loglik.marg, x = ti2[,1],method="BFGS",
control = ctrl)$par ## estimación de parámetros de la marginal 1
b2hat2 <- optim(b2.2, fn = loglik.marg, x = ead2[,1],method="BFGS",
control = ctrl)$par ## estimación de parámetros de la marginal 2

### curva 3

blhat3 <- optim(b1.3, fn = loglik.marg, x = ti3[,1],method="BFGS",
control = ctrl)$par ## estimación de parámetros de la marginal 1
b2hat3 <- optim(b2.3, fn = loglik.marg, x = ead3[,1],method="BFGS",
control = ctrl)$par ## estimación de parámetros de la marginal 2

### curva 4

blhat4 <- optim(b1.4, fn = loglik.marg, x = ti4[,1],method="BFGS",
control = ctrl)$par ## estimación de parámetros de la marginal 1
b2hat4 <- optim(b2.4, fn = loglik.marg, x = ead4[,1],method="BFGS",
control = ctrl)$par ## estimación de parámetros de la marginal 2

### curva 6

blhat6 <- optim(b1.6, fn = loglik.marg, x = ti6[,1],method="BFGS",
control = ctrl)$par ## estimación de parámetros de la marginal 1
b2hat6 <- optim(b2.6, fn = loglik.marg, x = ead6[,1],method="BFGS",
control = ctrl)$par ## estimación de parámetros de la marginal 2

##### Segunda etapa: estimación de parámetros de las cópulas

### curva 1
datos1 <- cbind(pt(ti1[,1]*100,b1hat1),pt(ead1[,1]*100,b2hat1))

copt1 <- tCopula(a.1[,1])

fitcop1 <- fitCopula(copula=copt1,data=datos1,method =
"ml",start=c(0.5,4))

### curva 2
datos2 <- cbind(pt(ti2[,1]*100,b1hat2),pt(ead2[,1]*100,b2hat2))

copt2 <- tCopula(a.2[,1])

fitcop2 <- fitCopula(copula=copt2,data=datos2,method =
"ml",start=c(0.5,4))

```

```

### curva 3
datos3 <- cbind(pt(ti3[,1]*100,b1hat3),pt(ead3[,1]*100,b2hat3))

copt3 <- tCopula(a.3[,1])

fitcop3 <- fitCopula(copula=copt3,data=datos3,method =
"ml",start=c(0.5,4))

### curva 4
datos4 <- cbind(pt(ti4[,1]*100,b1hat4),pt(ead4[,1]*100,b2hat4))

copt4 <- tCopula(a.4[,1])

fitcop4 <- fitCopula(copula=copt4,data=datos4,method =
"ml",start=c(0.5,4))

### curva 6
datos6 <- cbind(pt(ti6[,1]*100,b1hat6),pt(ead6[,1]*100,b2hat6))

copt6 <- tCopula(a.6[,1])

fitcop6 <- fitCopula(copula=copt6,data=datos6,method =
"ml",start=c(0.5,4))

#### Cópulas ajustadas
fitcop1@copula
fitcop2@copula
fitcop3@copula
fitcop4@copula
fitcop6@copula

##### Simulaciones

sim1 <- rcopula(fitcop1@copula,10000)
sim2 <- rcopula(fitcop2@copula,10000)
sim3 <- rcopula(fitcop3@copula,10000)
sim4 <- rcopula(fitcop4@copula,10000)
sim6 <- rcopula(fitcop6@copula,10000)

##### Pérdida histórica (Ti*EAD*LGD)

PEh1 <- sim1[,1]*sim1[,2]*.5
PEh2 <- sim2[,1]*sim2[,2]*.5
PEh3 <- sim3[,1]*sim3[,2]*.5
PEh4 <- sim4[,1]*sim4[,2]*.5
PEh6 <- sim6[,1]*sim6[,2]*.5

#### Cuantiles (Qalpha)

Q1 <- quantile(PEh1,c(0.95,0.99,0.995,0.999))
Q2 <- quantile(PEh2,c(0.95,0.99,0.995,0.999))
Q3 <- quantile(PEh3,c(0.95,0.99,0.995,0.999))
Q4 <- quantile(PEh4,c(0.95,0.99,0.995,0.999))
Q6 <- quantile(PEh6,c(0.95,0.99,0.995,0.999))

```

```

    VaR(-PE1, p=.95, method="historical") ## Genera el mismo resultado

#### Pérdida esperada (EL) y no esperada (UL= Qalpha - EL)

EL1 <- mean(PEh1)
EL2 <- mean(PEh2)
EL3 <- mean(PEh3)
EL4 <- mean(PEh4)
EL6 <- mean(PEh6)

UL1 <- Q1-PE1
UL2 <- Q2-PE2
UL3 <- Q3-PE3
UL4 <- Q4-PE4
UL6 <- Q6-PE6

#### ESq

ES1_0.95 <- ES(-PEh1, p=.95, method="historical")
ES1_0.99 <- ES(-PEh1, p=.99, method="historical")
ES1_0.995 <- ES(-PEh1, p=.995, method="historical")
ES1_0.999 <- ES(-PEh1, p=.999, method="historical")

ES2_0.95 <- ES(-PEh2, p=.95, method="historical")
ES2_0.99 <- ES(-PEh2, p=.99, method="historical")
ES2_0.995 <- ES(-PEh2, p=.995, method="historical")
ES2_0.999 <- ES(-PEh2, p=.999, method="historical")

ES3_0.95 <- ES(-PEh3, p=.95, method="historical")
ES3_0.99 <- ES(-PEh3, p=.99, method="historical")
ES3_0.995 <- ES(-PEh3, p=.995, method="historical")
ES3_0.999 <- ES(-PEh3, p=.999, method="historical")

ES4_0.95 <- ES(-PEh4, p=.95, method="historical")
ES4_0.99 <- ES(-PEh4, p=.99, method="historical")
ES4_0.995 <- ES(-PEh4, p=.995, method="historical")
ES4_0.999 <- ES(-PEh4, p=.999, method="historical")

ES6_0.95 <- ES(-PEh6, p=.95, method="historical")
ES6_0.99 <- ES(-PEh6, p=.99, method="historical")
ES6_0.995 <- ES(-PEh6, p=.995, method="historical")
ES6_0.999 <- ES(-PEh6, p=.999, method="historical")

##### Estimación semi-paramétrica empleando estadísticos
##### de orden para la cópula empírica
#### Definiendo U como vector de Ti y V como vector de EAD
#### Ti y EAD tienen la misma longitud

n <-length(sv1[,1]) + 1

U1<-apply(ti1,2,rank)/n
U2<-apply(ti2,2,rank)/n
U3<-apply(ti3,2,rank)/n
U4<-apply(ti4,2,rank)/n

```

```

U6<-apply(ti6,2,rank)/n

V1<-apply(ead1,2,rank)/n
V2<-apply(ead2,2,rank)/n
V3<-apply(ead3,2,rank)/n
V4<-apply(ead4,2,rank)/n
V6<-apply(ead6,2,rank)/n

UV1 <- cbind(U1,V1)
UV2 <- cbind(U2,V2)
UV3 <- cbind(U3,V3)
UV4 <- cbind(U4,V4)
UV6 <- cbind(U6,V6)

##### Cópulas y valores iniciales arbitrarios

CopGumb1 <- gumbelCopula(1, dim=2)
CopGumb2 <- gumbelCopula(1, dim=2)
CopGumb3 <- gumbelCopula(1, dim=2)
CopGumb4 <- gumbelCopula(1, dim=2)
CopGumb6 <- gumbelCopula(1, dim=2)

CopNorm1 <- normalCopula(a.1[,1], dim=2)
CopNorm2 <- normalCopula(a.2[,1], dim=2)
CopNorm3 <- normalCopula(a.3[,1], dim=2)
CopNorm4 <- normalCopula(a.4[,1], dim=2)
CopNorm6 <- normalCopula(a.6[,1], dim=2)

CopStud1 <- tCopula(0.5,dim=2,df=4)
CopStud2 <- tCopula(0.5,dim=2,df=4)
CopStud3 <- tCopula(0.5,dim=2,df=4)
CopStud4 <- tCopula(0.5,dim=2,df=4)
CopStud6 <- tCopula(0.5,dim=2,df=4)

fitGumb1 <- fitCopula(CopGumb1,UV1,method="ml")
fitGumb2 <- fitCopula(CopGumb2,UV2,method="ml")
fitGumb3 <- fitCopula(CopGumb3,UV3,method="ml")
fitGumb4 <- fitCopula(CopGumb4,UV4,method="ml")
fitGumb6 <- fitCopula(CopGumb6,UV6,method="ml")

fitNorm1 <- fitCopula(CopNorm1,UV1,method="ml")
fitNorm2 <- fitCopula(CopNorm2,UV2,method="ml")
fitNorm3 <- fitCopula(CopNorm3,UV3,method="ml")
fitNorm4 <- fitCopula(CopNorm4,UV4,method="ml")
fitNorm6 <- fitCopula(CopNorm6,UV6,method="ml")

fitStud1 <- fitCopula(CopStud1,UV1,method="ml",start=c(a.1,b1.1))
fitStud2 <- fitCopula(CopStud2,UV2,method="ml",start=c(a.2,b1.1))
fitStud3 <- fitCopula(CopStud3,UV3,method="ml",start=c(a.3,b1.1))
fitStud4 <- fitCopula(CopStud4,UV4,method="ml",start=c(a.4,b1.1))
fitStud6 <- fitCopula(CopStud6,UV6,method="ml",start=c(a.6,b1.1))

##### Simulaciones

set.seed(123)
##tStudent
simSt1 <- rcopula(fitStud1@copula,10000)

```

```

simSt2 <- rcopula(fitStud2@copula,10000)
simSt3 <- rcopula(fitStud3@copula,10000)
simSt4 <- rcopula(fitStud4@copula,10000)
simSt6 <- rcopula(fitStud6@copula,10000)
##Normal
simN1 <- rcopula(fitNorm1@copula,10000)
simN2 <- rcopula(fitNorm2@copula,10000)
simN3 <- rcopula(fitNorm3@copula,10000)
simN4 <- rcopula(fitNorm4@copula,10000)
simN6 <- rcopula(fitNorm6@copula,10000)
##Gumbel
simG1 <- rcopula(fitGumb1@copula,10000)
simG2 <- rcopula(fitGumb2@copula,10000)
simG3 <- rcopula(fitGumb3@copula,10000)
simG4 <- rcopula(fitGumb4@copula,10000)
simG6 <- rcopula(fitGumb6@copula,10000)

#### Pérdida histórica (Ti*EAD*LGD)

##Student
PEhSt1 <- simSt1[,1]*simSt1[,2]*.5
PEhSt2 <- simSt2[,1]*simSt2[,2]*.5
PEhSt3 <- simSt3[,1]*simSt3[,2]*.5
PEhSt4 <- simSt4[,1]*simSt4[,2]*.5
PEhSt6 <- simSt6[,1]*simSt6[,2]*.5
##Normal
PEhN1 <- simN1[,1]*simN1[,2]*.5
PEhN2 <- simN2[,1]*simN2[,2]*.5
PEhN3 <- simN3[,1]*simN3[,2]*.5
PEhN4 <- simN4[,1]*simN4[,2]*.5
PEhN6 <- simN6[,1]*simN6[,2]*.5
##Gumbel
PEhG1 <- simG1[,1]*simG1[,2]*.5
PEhG2 <- simG2[,1]*simG2[,2]*.5
PEhG3 <- simG3[,1]*simG3[,2]*.5
PEhG4 <- simG4[,1]*simG4[,2]*.5
PEhG6 <- simG6[,1]*simG6[,2]*.5

#### Cuantiles (Qalpha)

##Student
QSt1 <- quantile(PEhSt1,c(0.95,0.99,0.995,0.999))
QSt2 <- quantile(PEhSt2,c(0.95,0.99,0.995,0.999))
QSt3 <- quantile(PEhSt3,c(0.95,0.99,0.995,0.999))
QSt4 <- quantile(PEhSt4,c(0.95,0.99,0.995,0.999))
QSt6 <- quantile(PEhSt6,c(0.95,0.99,0.995,0.999))
##Normal
QN1 <- quantile(PEhN1,c(0.95,0.99,0.995,0.999))
QN2 <- quantile(PEhN2,c(0.95,0.99,0.995,0.999))
QN3 <- quantile(PEhN3,c(0.95,0.99,0.995,0.999))
QN4 <- quantile(PEhN4,c(0.95,0.99,0.995,0.999))
QN6 <- quantile(PEhN6,c(0.95,0.99,0.995,0.999))
##Gumbel
QG1 <- quantile(PEhG1,c(0.95,0.99,0.995,0.999))
QG2 <- quantile(PEhG2,c(0.95,0.99,0.995,0.999))
QG3 <- quantile(PEhG3,c(0.95,0.99,0.995,0.999))
QG4 <- quantile(PEhG4,c(0.95,0.99,0.995,0.999))

```

```
QG6 <- quantile(PEhG6,c(0.95,0.99,0.995,0.999))
```

```
#### Pérdida esperada (EL=mean(PEh))
```

```
##Student
```

```
ELSt1 <- mean(PEhSt1)
```

```
ELSt2 <- mean(PEhSt2)
```

```
ELSt3 <- mean(PEhSt3)
```

```
ELSt4 <- mean(PEhSt4)
```

```
ELSt6 <- mean(PEhSt6)
```

```
##Normal
```

```
ELN1 <- mean(PEhN1)
```

```
ELN2 <- mean(PEhN2)
```

```
ELN3 <- mean(PEhN3)
```

```
ELN4 <- mean(PEhN4)
```

```
ELN6 <- mean(PEhN6)
```

```
##Gumbel
```

```
ELG1 <- mean(PEhG1)
```

```
ELG2 <- mean(PEhG2)
```

```
ELG3 <- mean(PEhG3)
```

```
ELG4 <- mean(PEhG4)
```

```
ELG6 <- mean(PEhG6)
```

```
##### Pérdida no esperada (UL= Qalpha - EL)
```

```
##Student
```

```
ULSt1 <- QSt1-ELSt1
```

```
ULSt2 <- QSt2-ELSt2
```

```
ULSt3 <- QSt3-ELSt3
```

```
ULSt4 <- QSt4-ELSt4
```

```
ULSt6 <- QSt6-ELSt6
```

```
##Normal
```

```
ULN1 <- QN1-ELN1
```

```
ULN2 <- QN2-ELN2
```

```
ULN3 <- QN3-ELN3
```

```
ULN4 <- QN4-ELN4
```

```
ULN6 <- QN6-ELN6
```

```
##Gumbel
```

```
ULG1 <- QG1-ELG1
```

```
ULG2 <- QG2-ELG2
```

```
ULG3 <- QG3-ELG3
```

```
ULG4 <- QG4-ELG4
```

```
ULG6 <- QG6-ELG6
```