

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS

SUPERIORES DE MONTERREY

CAMPUS CIUDAD DE MÉXICO



VALOR EN RIESGO DE BONOS CUPÓN CERO EN
EL MERCADO MEXICANO CON LOS MODELOS
VASICEK Y CIR: SIMULACIÓN MONTE
CARLO CON SALTOS DE POISSON
Y VALORES EXTREMOS

DOCTORADO EN CIENCIAS FINANCIERAS

TESIS PRESENTADA POR

FERNANDO CRUZ ARANDA

ASESOR

DR. FRANCISCO VENEGAS MARTÍNEZ



TECNOLÓGICO
DE MONTERREY.

BIBLIOTECA
Campus Ciudad de México

ENERO 2007

RESUMEN

En este trabajo de investigación se calcula el “Valor en Riesgo”, VaR, de un bono cupón cero usando distintas metodologías con datos del mercado Mexicano. La tasa corta es guiada por una ecuación diferencial estocástica, en particular, de los modelos de Vasicek y Cox-Ingersoll-Ross (CIR). La estimación de los parámetros se calcula por mínimos cuadrados ordinarios (MCO) para el modelo de Vasicek y para el CIR por el método generalizado de momentos así como por MCO. Asimismo, se determina la estructura de plazos del bono cupón cero. Además, se calcula el VaR del bono por simulación histórica (siendo una de las técnicas comunmente utilizadas por su simplicidad en el cálculo pero cuyo valor es una primera aproximación debido al ancho de la ventana de rendimientos o ventanas consideradas) y por teoría de valores extremos debido a que en el Mercado Mexicano el comportamiento de los rendimientos de un bono es raro que presenten una distribución de tipo normal como se supone tradicionalmente. En esta caso, por simulación histórica se obtuvo un VaR del bono a 10 días del 0.002% y del 0.006%, con un nivel de confianza del 95% y del 99% respectivamente, lo que da lugar a presentar ventajas y desventajas con otras metodologías utilizadas. Así, las distribuciones de los rendimientos del bono al presentar colas gordas o pesadas se analizan y se determinan los parámetros de la distribución: es decir, se ajustan funciones de densidad Kernel, se estima una distribución de colas pesadas que mejor ajusta a los datos, se grafican los cuantiles $Q-Q$ para comparar los datos de la muestra y los teóricos, se calcula el cuantil de la distribución que conduce al cálculo del VaR del Bono. La función de distribución de valores extremos EV (extreme value) resultó ser del tipo de Frèchet. Finalmente, se calcula el precio del bono a través de simulaciones Monte Carlo, en la que la dinámica de la tasa corta sigue un proceso estocástico del tipo de Vasicek y CIR, donde además se incorporan saltos de Poisson debido a que al considerar un banda de tasas de rendimiento (eventos) de un día a otro, se presentaron eventos por abajo del 5% y por arriba del 2% para el periodo considerado, y cuya intensidad del salto no impacto sustancialmente en el cálculo del VaR. Asimismo, se presentan dos cuadros comparativos que describen las ventajas y desventajas de manera precisa para calcular el Valor en Riesgo de bonos cupón cero con cada una de las metodologías utilizadas.

CONTENIDO

Pág.

INTRODUCCIÓN	i
1. FUNCIÓN DE BESSEL Y LA DISTRIBUCIÓN JI-CUADRADA	
NO CENTRAL.....	1
1.1 Función de Bessel	1
1.2 Función de Bessel y distribución ji-cuadrada no central	2
2. MODELOS DE TASA CORTA CON REVERSIÓN A LA MEDIA:	
VASICEK Y COX-INGERSOLL-ROSS	5
2.1 Introducción	5
2.2 Modelo de la tasa corta de Vasicek	7
2.3 Modelo de la tasa corta de Cox Ingersoll y Ross, CIR	22
2.4 Inversa de la función de distribución acumulada de una ji-cuadrada no central, CIR	29
2.5 Distribución de la tasa corta en el modelo CIR	30
2.6 Función de densidad y función de distribución acumulada para CETES 28	37
2.7 Análisis comparativo entre los modelos Vasicek y CIR	39
3. VALOR EN RIESGO:	
UNA APLICACIÓN AL CASO MEXICANO	41
3.1 Valor en riesgo.....	41
3.2 Introducción.....	41
3.3 Propiedades axiomáticas de una medida coherente de riesgo	48
3.4 Medidas de riesgo más usuales	49

3.5 Valor en riesgo de un bono cupón cero con tasa corta conducida por el modelo de Vasicek	49
3.6 Valor en riesgo de un bono cupón cero y el modelo de Vasicek	53
3.7 Valor en riesgo: Simulación histórica	54
3.8 Valor en riesgo: Teoría de valores extremos	57
4. SIMULACIONES MONTE CARLO: LOS MODELOS DE LA TASA CORTA DE VASICEK Y COX, INGERSOLL Y ROSS (CIR)	67
4.1 Simulación Monte Carlo	67
4.2 Introducción	67
4.3 Método de números pseudoaleatorios	68
4.4 Ventajas y desventajas del método de simulación Monte Carlo	69
4.5 Precio del bono cupón cero	70
4.6 Metodología para la simulación de la tasa corta y el cálculo del VaR	70
4.7 Simulación del precio de un bono cupón cero con el modelo de Vasicek	71
4.8 Dinámica de la tasa corta y saltos Poisson	74
4.9 Simulación del precio de un bono cupón cero con el modelo de CIR	76
4.10 Dinámica de la tasa corta y saltos Poisson, CIR	78
4.11 Resumen de resultados del valor en riesgo de un bono cupón cero con distintas metodologías	81
5. CONCLUSIONES	85
APÉNDICES	
A.1 Función de Bessel	90
A.2 Modelos relevantes de un sólo factor de riesgo	92

A.3 Ecuación diferencial parcial del comportamiento de un bono con tasa corta conducida por el modelo de Vasicek	93
BIBLIOGRAFÍA	97

LISTA DE FIGURAS Y CUADROS

A continuación se presenta la lista de figuras y cuadros que aparecen en el presente trabajo de investigación.

1. Figuras

Figura 3.1 Valor en riesgo de X al nivel $1 - q$, es decir $-\text{VaR}_{1-q}^X$.

2. Cuadros

Cuadro 1. Estimación de los parámetros a y b , para un periodo de la tasa corta del 03/mayo/2004 – 08/03/2006.

Cuadro 2. VaR por Vasicek.

Cuadro 3. VaR por simulación histórica.

Cuadro 4. Estadísticos calculados.

Cuadro 5. Ventajas y desventajas para calcular el Valor en Riesgo, $-\text{VaR}_{1-q}^{\Delta B/B}$, de bonos cupón cero con distintas metodologías. Note que $D \equiv$ Desventaja y $V \equiv$ Ventaja.

Cuadro 6. VaR utilizando valores extremos.

Cuadro 7. Ventajas y desventajas para calcular el Valor en Riesgo, $-\text{VaR}_{1-q}^{\Delta B/B}$, de bonos cupón cero con distintas metodologías, tomando como punto de referencia simulación histórica. Note que $D \equiv$ Desventaja y $V \equiv$ Ventaja.

Cuadro 8. Precio de un bono cupón cero

Cuadro 9. Valor en riesgo de un bono cupón cero determinado por simulación Monte Carlo del modelo Vasicek.

Cuadro 10. Precio del Bono cupón cero determinado por simulación Monte Carlo y bajo Vasicek con saltos de Poisson.

Cuadro 11. Valor en riesgo de un bono cupón cero determinado por simulación Monte Carlo del modelo Vasicek con saltos de Poisson.

Cuadro 12. Precio del Bono cupón cero.

Cuadro 13. Valor en riesgo de un bono cupón cero determinado por simulación Monte Carlo del modelo CIR con Poisson.

Cuadro 14. Precio del Bono cupón cero determinado por simulación Monte Carlo del modelo CIR.

Cuadro 15. Valor en riesgo de un bono cupón cero determinado por simulación Monte Carlo del modelo CIR con Poisson.

Cuadro 16. Resumen del Valor en Riesgo de un Bono cupón cero con distintas metodologías.

Cuadro 17. Resumen del Valor en Riesgo de 100,000 cetes a 28 días con distintas metodologías.

Cuadro 18. Ventajas y desventajas para calcular el Valor en Riesgo, $-\text{VaR}_{1-q}^{\Delta B/B}$, de bonos cupón cero a través de simulación Monte Carlo para los modelos de Vasicek y CIR. Note que $D \equiv$ Desventaja y $V \equiv$ Ventaja.

Cuadro 19. Ventajas y desventajas para calcular el Valor en Riesgo, $-\text{VaR}_{1-q}^{\Delta B/B}$, de bonos cupón cero con distintas metodologías, tomando como punto de referencia simulación histórica. Note que $D \equiv$ Desventaja y $V \equiv$ Ventaja.

Cuadro 20. Ventajas y desventajas para calcular el Valor en Riesgo, $-\text{VaR}_{1-q}^{\Delta B/B}$, de bonos cupón cero a través de simulación Monte Carlo para los modelos de Vasicek y CIR. Note que $D \equiv$ Desventaja y $V \equiv$ Ventaja.

Cuadro A.2.1 Resumen de casos particulares de la ecuación (2.2). •

INTRODUCCIÓN

En la literatura económica y financiera se presentan el desarrollo de varias clases de modelos que describen el comportamiento de la tasa corta. El objetivo que persiguen los modelos de tasa corta no es el de elaborar pronósticos precisos de su nivel, sino explicar en términos estadísticos el comportamiento del mercado. Por lo que, estos modelos intentan describir esencialmente propiedades estadísticas del mercado, entre las que se destacan: tendencia, reversión a la media, sesgo, curtosis, colas pesadas, intervalos de confianza, probabilidades de ocurrencia, precios promedio entre otras.

Por ejemplo, modelos con reversión a la media, entre los que destacan: el modelo de un solo factor desarrollado por Merton en el que la tasa corta es conducida por un proceso de difusión y volatilidad constante y deriva un modelo de valuación de un bono a descuento (1970, 1973), el modelo de Vasicek utiliza un proceso Ornstein-Uhlenbeck (1930) y deriva una forma general de la estructura de plazos (1977). Cox-Ingersoll-Ross (CIR) desarrollaron un modelo de valuación de activos en equilibrio para la estructura de plazos de tasas de interés no negativas (1985), Ho y Lee, a partir de una curva de rendimiento conocida, calibran para un tiempo posterior una curva de rendimiento factible (1986). De esta forma, los valores de la curva de rendimiento son consistentes con los valores teóricos obtenidos a través de la metodología propuesta. Esta es una de las razones por las que el modelo no pertenece a la clase de modelos de tasas de equilibrio general. En este, sólo el parámetro de volatilidad se estima con un registro histórico de la tasa corta y la curva de rendimiento se calibra ajustando información actual del mercado a la tendencia de la tasa corta. Además, se pueden producir valores negativos de la tasa corta, lo cual es una limitación seria (1986).

Lo anterior conduce a que la teoría y aplicación de modelos de tasa corta, es una de las áreas más importantes y fascinantes en las finanzas modernas. El desarrollo que se ha tenido en la dinámica de la tasa corta en los últimos treinta años, ha sido acompañado por la teoría de valuación de bonos cupón cero y la valuación de opciones así como el cálculo del valor en riesgo, el cual representa la máxima pérdida esperada de una inversión con un nivel de confianza y plazo determinado, que se puede presentar en cualquier momento. Este tipo de valuaciones son de suma importancia en la economía mundial; en particular podemos citar a bancos de inversión e instituciones financieras y entidades gubernamentales (oficinas

del tesoro).

Es por ello, que se requiere mayor conocimiento y por ende mayor exactitud y control en la valuación, coberturas, y de una adecuada administración de riesgos de las posiciones resultantes de que se dispongan en particular para el caso del sistema financiero mexicano.

En este sentido, se han desarrollado una amplia gama de metodologías que permiten calcular el valor en riesgo de un portafolio de inversión, entre las que destacan por su popularidad: simulación histórica en la cual se simulan cambios en las variables de mercado con base en la historia, en particular del factor de riesgo de la tasa corta, se revalúa el portafolio obteniéndose pérdidas y ganancias simuladas o bien rendimientos simulados los cuales son ordenados para finalmente calcular el VaR con un nivel de confianza, vea Crouhy M. et al. (2000), otro de los métodos tradicionales es simulación Monte Carlo que a diferencia del método por simulación histórica, en este se generan muchas trayectorias de los rendimientos del mercado. Además, también se puede utilizar la teoría de valores extremos para el cálculo del VaR.

En este sentido, la teoría de valores extremos, EVT (Extreme value theory, por sus siglas en inglés). ha surgido como uno de las disciplinas estadísticas aplicadas más importantes en las ciencias en los últimos cincuenta años, y de manera más reciente en el campo de las finanzas modernas. La peculiaridad de la EVT es cuantificar el comportamiento estocástico de un proceso a niveles grandes o pequeños de eventos poco comunes. En forma específica en la EVT se estima la probabilidad de eventos que son mas extremos que cualquier otro evento que se haya observado previamente. Por lo que es factible utilizar teoría de valores extremos en la que se hace uso de distribuciones generalizadas de pareto o de distribuciones de eventos extremos, EV, después de que se han determinado los rendimientos simulados del bono y finalmente calcular el valor en riesgo del bono.

Cabe mencionar, que entre algunas de las investigaciones desarrolladas está Fernández (2005) que aplica la teoría de valores extremos a mercados financieros, en particular calcula el VaR de portafolios de inversión dentro de los cuales están los bonos gubernamentales (Treasury bonds) de Estados Unidos. Mientras que Vlaar P. (2000) investiga el impacto de las dinámicas en la estructura de tasas de interés, en el gobierno Holandés, para comparar la exactitud de modelos de valor en riesgo de portafolios de bonos Holandeses, en la que utiliza las metodologías de simulación histórica, varianza-covarianza y simulación Monte Carlo,

dentro de un periodo de diez días (1999). Benninga y Wiener discuten y aplican las técnicas básicas de valor en riesgo, simulación histórica y simulación Monte Carlo para valorar un portafolio hipotético de una acción y un bono cupón cero en la que sus resultados son parecidos aunque no iguales (1998). Styblo calcula el VaR de tres portafolios hipotéticos utilizando simulación histórica y simulación Monte Carlo, en éste se resalta el hecho de como el VaR cambia significativamente en un mismo portafolio, es decir los resultados varían hasta por catorce veces, por lo que el requerimiento y necesidad de otros métodos o modelos del VaR que contribuyan a un mayor conocimiento del valor en riesgo de un determinado portafolio de inversión son necesarias (1995). Asimismo, el poder determinar correctamente la estructura de plazos permitiría conocer la tasa de interés para los distintos plazos de manera precisa.

Por lo anterior, el entusiasmo de calcular el valor en riesgo de bonos cupón cero, aplicando distintas metodologías, en México donde la tasa de interés corta sigue una dinámica estocástica y que permita obtener una buena aproximación del VaR de un bono cupón cero con datos reales del mercado, que a diferencia de otros mercados maduros como el de Estados Unidos de America y mercados Europeos, éste es un mercado en desarrollo.

En este trabajo de investigación se calcula el “Valor en Riesgo” de un bono cupón cero usando distintas metodologías y utilizando la tasa de rendimiento anualizada diaria de cetes a 28 días en el periodo del 3 de mayo de 2004 al 8 de marzo de 2006 para la economía mexicana. En un primer cálculo del VaR se considera el modelo de Vasicek en el que se supone que la tasa corta es guiada por una ecuación diferencial estocástica con reversión a la media y como segunda alternativa se utiliza el modelo de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) cuya dinámica de la tasa corta presenta raíces no negativas.

La estimación de los parámetros es por mínimos cuadrados ordinarios y por el método generalizado de momentos, respectivamente. Asimismo, se determina la estructura de plazos del bono cupón cero. Se calcula el precio del bono cupón cero por simulaciones Monte Carlo en la que la dinámica de la tasa corta sigue un proceso estocástico del tipo de Vasicek y CIR incorporando saltos de Poisson, debido a que al considerar un banda de tasas de rendimiento (eventos) de un día a otro, se presentan eventos por abajo del 5% y por arriba del 2% para el periodo considerado. Es importante señalar que el uso del modelo de Vasicek es debido a que es un modelo fácil de implementar pero con la

desventaja de que se pueden presentar tasas negativas, por lo que esto se soluciona con el modelo de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) proporcionando siempre tasas no negativas. Además, el modelo CIR es no lineal por lo que el modelo tiene asociado una distribución ji-cuadrada no central a diferencia de Vasicek cuya función de distribución es normal.

Además, se calcula el VaR de un bono cupón cero por simulación histórica, siendo una de las técnicas comúnmente utilizadas, y por teoría de valores extremos, EVT, a un nivel de confianza del 95% y del 99%. En EVT se cuantifica el comportamiento estocástico de un proceso y es posible que la distribución de los extremos se pueda aproximar bien con alguna de las distribuciones de eventos extremos tales como la: Gumbel, la Frèchet y la Weibull.

El documento está organizado de la siguiente forma: en el capítulo uno se presenta la herramienta matemática utilizada en este estudio, es decir, incorporando la llamada función de Bessel y su relación con la función de distribución ji-cuadrada no central. En el capítulo dos se estudian los modelos de la tasa corta de Vasicek y Cox-Ingersoll-Ross (CIR) en la que se expresa la función de densidad de la tasa corta en términos de la función de distribución gamma y la distribución ji-cuadrada no central. En el capítulo tres se realiza una revisión de medidas de riesgo, medidas coherentes de riesgo y se describe la metodología para calcular el valor en riesgo de un bono cupón cero con la tasa corta de Vasicek, en particular para cetes a 28 días. También, se determina el VaR del bono por simulación histórica y por teoría de valores extremos a nivel de confianza del 95% y 99%. En el capítulo cuatro se realizan simulaciones Monte Carlo donde la tasa corta es guiada por una ecuación diferencial estocástica del tipo de Vasicek y Cox-Ingersoll-Ross (CIR) en la que se incorporan saltos de Poisson cuya intensidad del salto se calculan considerando las tasas de rendimiento (eventos) de un día a otro que estuvieron por abajo del 5% y por arriba del 2% para el periodo dado, y cuya intensidad no impacto sustancialmente en el cálculo del VaR. Finalmente, se ofrecen una serie de conclusiones y recomendaciones acerca del cálculo de valor en riesgo en portafolios de inversión y de su cálculo utilizando diferentes dinámicas para la tasa corta. Asimismo, se presentan dos cuadros comparativos que describen las ventajas y desventajas de manera precisa para calcular el Valor en Riesgo de bonos cupón cero con cada una de las metodologías utilizadas.

CAPÍTULO 1

FUNCIÓN DE BESSEL Y LA DISTRIBUCIÓN JI-CUADRADA NO CENTRAL

1.1 Función de Bessel

En el presente trabajo, se aplican herramientas matemáticas como las llamadas Funciones de Besseel , en particular en la función de densidad de las tasa corta del modelo de Cox, Ingersoll y Ross (1985b), dando lugar a que las funciones de Bessel (vea Churchill R. et al, 1978) incurren fuertemente en el mundo de las finanzas modernas, entre otras áreas de estudio.

A continuación se presenta un desarrollo para obtener la llamada función de Bessel cuya aplicación se vera plasmada en modelos de tasa corta de interés y que nos conducirán al cálculo del valor en riesgo de bonos cupón cero. En particular cetes a 28 días en México y cuyo estudio aparece en próximos capítulos.

Entonces, se utilizara la función exponencial expresada en series de Taylor para obtener la función de Bessel de primera clase de orden n y que al utilizar un cambio de variable. como se muestra más adelante, conduce a la función modificada de Bessel (ver apéndice A.1) la cual es utilizada en la función de densidad de la tasa corta del modelo Cox, Ingersoll y Ross(CIR). Para ello, considere la expansión de $e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}$ en series de Taylor. Esto es,

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} &= e^{\frac{xt}{2}} e^{-\frac{x}{2t}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{k!s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+s} t^{k-s}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Sea $s = k - n$, $n \geq 0$ y $s = k - n \geq 0$ de donde $k \geq n$, y $k - n = p$ por lo que $2k - n = 2p + n$, entonces la ecuación anterior se puede escribir como

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{k!(k-n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n} = J_n(x).$$

Por lo tanto, $J_n(x)$ es la función de Bessel de primera clase, de orden n y está dada por

$$J_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(p+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}. \quad (1.2)$$

1.1.1 Función modificada de Bessel de primera clase y de orden n

Si se considera la función de Bessel de primera clase, de orden n y se cambia x por ix , donde i es un número complejo, y se supone que $i^2 = -1$, $i^4 = 1$, entonces

$$J_n(ix) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(i^4)^p \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n} i^n}{p!(p+n)!}. \quad (1.3)$$

Sea $I_n(x) = i^{-n} J_n(ix)$. Por lo tanto, la función modificada de Bessel (ver apéndice A.1.1) de primera clase y de orden n está dada por

$$I_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}}{p!(p+n)!}. \quad (1.4)$$

1.2 Función de Bessel y distribución ji-cuadrada no central

La distribución ji-cuadrada es un caso particular de la función de distribución gamma, Ross M. Sheldon (1985) y Canavos G. C. (1988). Una variable aleatoria X que sigue una distribución gamma su función de densidad está dada por

$$f(x; \alpha, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta}; & x > 0; \alpha, \theta > 0, \\ 0; & \text{otro valor.} \end{cases} \quad (1.5)$$

donde α y θ son llamados parámetros de forma. El valor esperado de la variable aleatoria X que sigue una distribución gamma está dado por $E[X] = \alpha\theta$ y $\text{Var}(X) = \alpha\theta^2$. Si se supone $\alpha = \nu/2$ con $\nu \in Z^+$, ν representa los grados de libertad, y $\theta = 2$, esto conduce a la distribución ji-cuadrada.

Por lo tanto, una variable aleatoria X tiene una distribución ji-cuadrada con ν grados de libertad, denotada por \mathcal{X}_ν^2 , si y sólo si su función de densidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\nu/2)2^{\nu/2}} x^{(\nu/2)-1} e^{-x/2}; & x > 0, \\ 0; & \text{otro valor.} \end{cases} \quad (1.6)$$

donde $\Gamma(\alpha)$ representa la función gamma dada por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad x > 0. \quad (1.7)$$

De manera sencilla se puede demostrar que $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$ y que $\Gamma(n) = (n - 1)!$, con $n \in \mathbb{Z}^+$.

La distribución ji-cuadrada, χ_{ν}^2 , se interpreta como sigue: Sean $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ con $i = 1, 2, \dots, n$ e independientes. Entonces, se cumple que

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^n X_i^2 \\ &= X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \sim \chi_{\nu}^2. \end{aligned}$$

De ahí que, si $X \sim \chi_{\nu}^2$, entonces la media y la varianza de X están dadas por $E[X] = \nu$ y $\text{Var}(X) = 2\nu$, respectivamente. Por lo que, si $X \sim \chi_{\nu}^2$, $Y \sim \chi_{\nu}^2$ entonces $X + Y \sim \chi_{\nu}^2$. Además, si X_1, X_2, \dots, X_n son muestras independientes de una población normal, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Entonces, la media de la muestra está dada por

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

y la varianza es

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{n-1}.$$

Entonces, se tiene que

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right),$$

es decir $E[\bar{X}] = \mu$ y $\text{Var}(\bar{X}) = \sigma^2/n$ de donde $\sqrt{\text{Var}(\bar{X})} = \sigma/\sqrt{n}$ Entonces

$$\sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{\nu}^2$$

Por lo que, si $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, con $i = 1, 2, \dots, n$ y se define

$$X = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}.$$

Se tiene que la función de densidad está dada por

$$\psi(x) = e^{-\beta^2/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta^2/2)^k}{k!} \phi_{n+2k}(x), \quad \beta^2 = \frac{n\delta^2}{\sigma^2}, \quad (1.8)$$

donde $\phi_n(x)$ es la función de densidad de χ_n^2 . La distribución de X es llamada la distribución ji-cuadrada no central con n grados de libertad y parámetro de no centralidad δ . Cuando $\delta = 0$, la distribución ji-cuadrada no central coincide con la distribución ji-cuadrada ordinaria. Cabe señalar, que la distribución ji-cuadrada no central es una mezcla de las distribuciones Poisson y la ji-cuadrada y que aparece en el modelo de Cox Ingersoll y Ross, es decir en la función de la tasa corta (2.31).

CAPÍTULO 2

MODELOS DE TASA CORTA CON REVERSIÓN A LA MEDIA: VASICEK Y COX-INGERSOLL-ROSS; UNA APLICACIÓN AL CASO MEXICANO

2.1 Introducción

En la literatura económica y financiera se presentan el desarrollo de varias clases de modelos que describen el comportamiento de la tasa corta. El objetivo de los modelos de tasa corta no es el de elaborar pronósticos precisos de su nivel, sino explicar en términos estadísticos el comportamiento del mercado. Por lo que, estos modelos intentan describir esencialmente propiedades estadísticas del mercado, entre las que se destacan: tendencia, reversión a la media, sesgo, curtosis, colas pesadas, intervalos de confianza, probabilidades de ocurrencia, precios promedio, entre otras. Asimismo, se requiere de métodos de estimación de los parámetros que sigue la dinámica de la tasa corta.

En esta investigación y en esta sección, en particular, se abordarán los modelos de Vasicek y Cox, Ingersoll y Ross, con el objetivo de calcular la estructura de plazos de tasas de interés de bonos cupón cero para un mercado en desarrollo como es el mercado mexicano, a diferencia de otros mercados maduros como el de Estados Unidos de América y los Europeos. Asimismo, se presentan los fundamentos y los diferentes procedimientos para la estimación de los parámetros que aparecen en la dinámica de la tasa corta de los modelos ya citados. Además, se determina la distribución de la tasa corta del modelo CIR. Los valores estimados de los parámetros se utilizan en los próximos capítulos en distintas metodologías para calcular el VaR del bono. Así, se dan un conjunto de ventajas y desventajas de dichas metodologías para el cálculo del VaR y enfocadas al caso mexicano.

Se ha mencionado que existen varias clases de modelos que describan el comportamiento de la tasa corta; en particular aquellas que describen la tasa de interés corta

con reversión a la media. Si la tasa corta sigue un proceso dado por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma r_t^\beta dW_t, \quad (2.1)$$

donde a , b y σ son constantes positivas, r_t la tasa corta, $\beta \geq 0$ y $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano que modela el riesgo de mercado y está definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ junto con su filtración aumentada $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, entonces se establece una de las clases más importantes de modelos de tasa corta con reversión a la media y parámetros constantes.

Observe que en la ecuación (2.1) existe un término aleatorio con varianza $\sigma^2 r_t^{2\beta}$ por unidad de tiempo, donde $\beta \geq 0$. Los casos en los que $\beta = 0$ y $\beta = \frac{1}{2}$ son de particular interés, porque conducen a modelos que cuentan con una solución analítica para la valuación del bono. En particular, el modelo de Vasicek (1977) se obtiene cuando $\beta = 0$, mientras que el modelo de Cox, Ingersoll y Ross (CIR) se obtiene cuando $\beta = \frac{1}{2}$. El planteamiento de la ecuación (2.1) con valores de β distintos 0 y $\frac{1}{2}$ son menos populares en la literatura debido a la complejidad y dificultades técnicas que presentan en su tratamiento. Para el caso de la ecuación (2.1) con $\beta = 0$ y $a = 0$ se tiene el modelo de Dothan donde la tasa corta sigue un geométrico Browniano sin tendencia.

Dado que el objetivo que persiguen los modelos de tasa corta es explicar en términos estadísticos el comportamiento del mercado y en particular aquellos que describen la tasa de interés corta con reversión a la media, se presenta en el apéndice A.2 el Cuadro 1 un resumen de los modelos de tasas de un solo factor que se pueden derivar a partir de la ecuación diferencial estocástica siguiente

$$dr_t = a(\nu - r_t^\alpha)dt + \sigma r_t^\beta dW_t, \quad (2.2)$$

donde a , ν , y σ son constantes positivas, y r_t la tasa corta. Entre los modelos presentados destacan el modelo de Merton (1970, 1973), Vasicek (1977), Dothan (1978), CIR (1985), Ho y Lee (1986), Longstaff (1989) en el que supone que $\beta = \alpha = 1/2$ y es llamado el modelo de la doble raíz y, finalmente, Hull y White (1990).

2.2 Modelo de la tasa corta de Vasicek

A continuación se presenta una introducción al modelo de Vasicek, así como algunas de las características más importantes y la estimación de sus parámetros, utilizando un conjunto de datos de interés para determinar la estructura de plazos de la tasa.

2.2.1 Introducción al modelo de Vasicek

El artículo de Oldrich Vasicek, “An Equilibrium Characterization of the Term Structure”, publicado en 1977 en el *Journal of Financial Economics*, representa una de las contribuciones más importantes a la teoría de tasas de interés en tiempo continuo y de un solo factor, su relevancia radica en permitir generar la estructura de plazos, por lo cual se determina la tasa de interés a todos los plazos. En este documento se presentan los fundamentos del modelo de Vasicek. Asimismo, en la sección 2.2.3 se presenta una ecuación diferencial parcial parabólica que caracteriza el precio de un bono cupón cero cuando la tasa corta es conducida por un proceso Markoviano y continuo, también llamado un proceso de difusión, bajo un mundo neutral al riesgo.

En la sección 2.2.4 se describe cómo se obtiene el precio de un bono cupón cero mediante el uso de ecuaciones diferenciales parciales. En particular se presenta la dinámica estocástica de una tasa de interés instantánea de Vasicek, o tasa corta, que presenta reversión a la media, es decir r_t es forzada a moverse, en promedio, hacia un nivel de largo plazo b a una velocidad a , y en el cual el movimiento Browniano desempeña un papel fundamental en el modelado del riesgo de mercado.

Posteriormente, a partir de los precios del bono, con diferentes vencimientos, se genera la estructura de plazos de la tasa de interés, es decir, se determina la tasa de interés a todos los plazos. En este caso, la curva de rendimiento es función de la tasa corta, el periodo de maduración y los parámetros del modelo, los cuales pueden ser fácilmente estimados. Asimismo, se determina la tasa forward instantánea. Para observar el comportamiento de la curva de rendimiento, el precio del bono cupón cero y la tasa forward instantánea se grafican cada uno de éstos en función de los parámetros a y b ; fijando el plazo $T - t$, la volatilidad σ y una r_t . En este caso $a \in [\xi_1, \xi_2]$ y $b \in [\xi_1, \xi_2]$ de tal forma que se encuentren alrededor de los valores de los parámetros estimados para un conjunto de datos del sector financiero Mexicano, como es el caso.

2.2.2 Fundamentos del modelo de Vasicek

En el modelo de Vasicek se obtiene una estructura de plazos de la tasa de interés bajo los siguientes supuestos: i) la tasa instantánea de interés sigue un proceso de difusión; ii) el precio de un bono cupón cero depende solamente de la tasa corta y de su plazo; y iii) no hay costos de transacción, iv) la información está disponible para todos los inversionistas de manera simultánea, v) cada inversionista actúa en forma racional, es decir, prefiere más riqueza a menos y usa toda la información disponible. De los supuestos iii), iv) y v) se tiene que el mercado considerado es eficiente. Asimismo, mediante argumentos de arbitraje se obtiene una ecuación diferencial parcial parabólica cuya solución es el precio de un bono cupón cero.

En este modelo se estudia, como caso particular, la dinámica de una tasa corta que presenta reversión de la media hacia un valor constante. Este comportamiento se observa, en muchos casos, cuando se analizan series de tiempo de tasas de corto plazo. A continuación se formaliza la noción de reversión a la media a través de un proceso de Orstein-Uhlenbeck (1930).

Sea $\{W_t\}_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y sea $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ su filtración aumentada, la cual representa la información del mercado disponible hasta el tiempo t . En el modelo de Vasicek la tasa corta, r_t , es conducida por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t, \quad (2.3)$$

donde a , b y σ son constantes positivas y conocidas; cabe mencionar que no se garantizan valores positivos en la tasa corta. En este caso, como puede observarse, W_t es la única fuente de incertidumbre. En la especificación exógena de la dinámica estocástica de la tasa corta, expresada en (2.3), r_t es forzada a moverse, en promedio, hacia un nivel de largo plazo b a una velocidad a . Si la tasa corta está por arriba de b , ésta es forzada a moverse, en promedio, hacia abajo al nivel b y, *viceversa*, si la tasa corta está por abajo de b , ésta es forzada a moverse, en promedio, hacia arriba al nivel b . Es decir, se presenta en el modelo reversión de la media hacia un valor constante. Ahora, observe que la ecuación (2.3) es

una notación simplificada de la integral estocástica

$$\begin{aligned} r_t - r_s &= \int_s^t a(b - r_u)du + \int_s^t \sigma dW_u = \int_s^t abdu - \int_s^t ar_u du + \sigma \int_s^t dW_u \\ &= ab(t - s) - \int_s^t ar_u du + \sigma \int_s^t dW_u. \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.2.3 Ecuación diferencial parcial del comportamiento de un bono con tasa corta conducida por el modelo de Vasicek

El modelo de Vasicek forma parte de los llamados modelos de equilibrio general debido al uso de condiciones de ausencia de oportunidades de arbitraje para caracterizar el precio de un bono cupón cero a un plazo dado. En esta sección, bajo los supuestos de equilibrio general y tasa corta neutral al riesgo, se plantea la ecuación diferencial parcial parabólica del comportamiento del precio de un bono cupón cero.

En lo que sigue, el precio del bono cupón cero que se coloca en t y que al vencimiento T paga una unidad monetaria se denotará mediante $B = B(r_t, t; T)$, o en forma más simple como $B = B(t, T)$. En el caso del modelo de Vasicek, el precio B de un bono cupón cero satisface:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + a(b - r_t) \frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0. \quad (2.5)$$

La ecuación diferencial parcial parabólica del bono, (2.5), se obtiene de manera sencilla (ver apéndice A.3) al considerar básicamente que el precio del bono cupón cero es función del tiempo t y la tasa corta r_t , que la tasa corta es guiada por la ecuación diferencial estocástica de Vasicek, aplicando del lema de Itô y suponiendo un portafolio de inversión de dos bonos con distintos plazos. Así la condición final corresponde al pago en el vencimiento del bono, que por simplicidad se supone de una unidad monetaria, es decir $B(T, T) = 1$. Las condiciones de frontera dependen de a , b , σ y, por supuesto de, r_t .

2.2.4 Solución de la ecuación diferencial parcial del comportamiento de un bono con tasa corta conducida por el modelo de Vasicek

Dado que la ecuación (2.5) no cuenta con derivadas parciales cruzadas, se supone una solución en variables separables de la siguiente forma:

$$B(t, T) = e^{A(t, T) - r_t D(t, T)}. \quad (2.6)$$

Observe que en la fecha de vencimiento, necesariamente, $A(T, T) = 0$ y $D(T, T) = 0$, es decir al vencimiento del bono $B(T, T) = 1$.

La selección de una solución de la forma (2.6) permite transformar una ecuación diferencial parcial parabólica de segundo orden, (2.5), en un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. El sistema está acoplado de tal manera que primero se determina que

$$D(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}, \quad (2.7)$$

y, posteriormente, con base en la solución de (2.7), se obtiene

$$A(t, T) = \frac{1}{a^2}(D(t, T) - T + t)(a^2b - \frac{1}{2}\sigma^2) - \frac{\sigma^2 D(t, T)^2}{4a}, \quad (2.8)$$

donde a, b y σ son parámetros a determinar a partir de un conjunto de datos.

2.2.5 Curva de rendimiento del modelo de Vasicek

Ahora, a partir de los precios del bono para diferentes vencimientos, $B(t, T)$, $T \geq t$, se genera la estructura de plazos de la tasa de interés, $R(t, T)$, mediante la siguiente ecuación

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln B(t, T). \quad (2.9)$$

Al sustituir (2.7) y (2.8) en (2.9) se tiene

$$\begin{aligned} R(t, T) &= -\frac{1}{T-t} \ln B(t, T) \\ &= \frac{1}{T-t} [r_t D(t, T) - A(t, T)] \\ &= \frac{1}{T-t} \left[r_t D(t, T) + (D(t, T) - T + t) \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) - \frac{\sigma^2 D(t, T)^2}{4a} \right] \\ &= r_t \frac{D(t, T)}{T-t} - \left(\frac{D(t, T)}{T-t} - 1 \right) \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) + \frac{\sigma^2 D(t, T)^2}{4a(T-t)} \\ &= r_t \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} - \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} - 1 \right) \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) \\ &\quad + \frac{\sigma^2 (1 - e^{-a(T-t)})^2}{4a^3(T-t)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Por lo que,¹ la tasa de interés de plazo más largo disponible en el mercado, también llamada tasa larga, $R(t, \infty)$, satisface

$$R(t, \infty) = b - \frac{\sigma^2}{2a^2}, \quad (2.11)$$

¹ Se utiliza la regla de L'Hopital para el cálculo del límite.

entonces se puede escribir

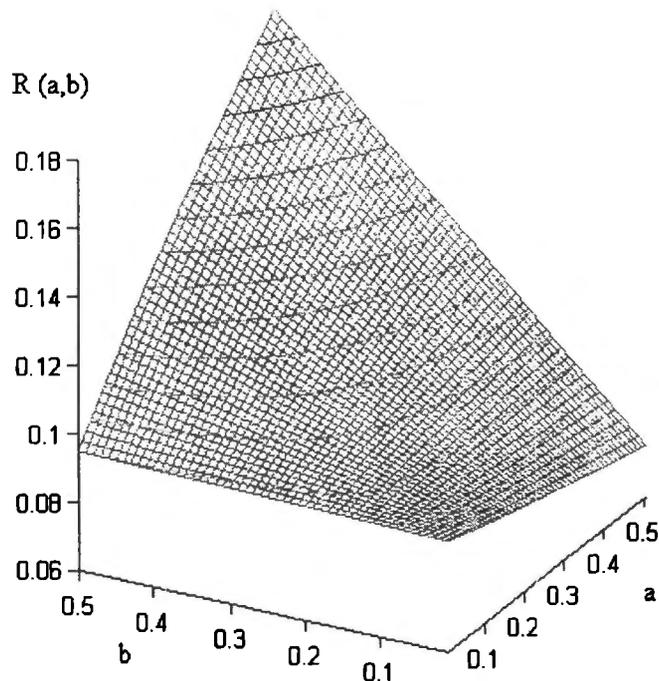
$$R(t, T) = R(t, \infty) + [r_t - R(t, \infty)] \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} \right) + \frac{\sigma^2(T-t)}{4a} \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} \right)^2 \quad (2.12)$$

o, en forma más breve,

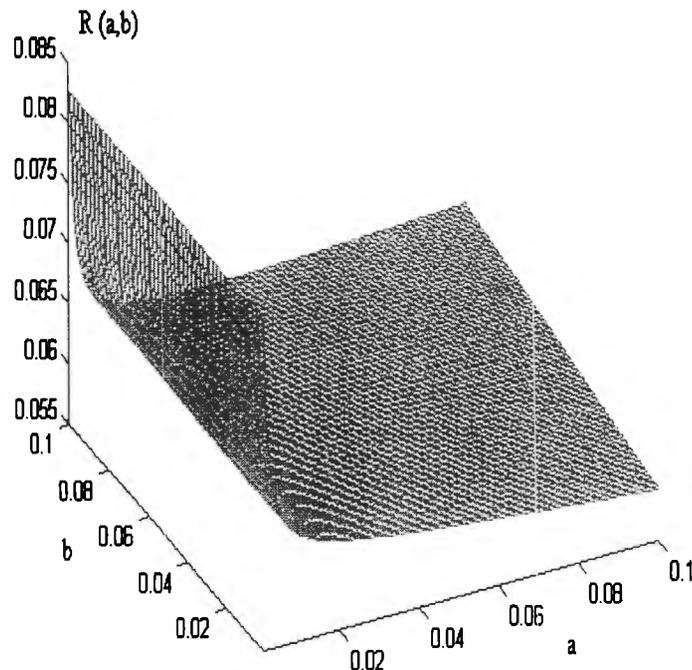
$$R(t, T) = R(t, \infty) + [r_t - R(t, \infty)] V(t, T) + \frac{\sigma^2(T-t)}{4a} V^2(t, T), \quad (2.13)$$

donde $V(t, T) = \frac{D(t, T)}{T-t}$. Así, la curva de rendimiento, $R(t, T)$, es una función cuadrática de $V(t, T)$.

En la Gráfica 2.1 se muestra la curva de rendimiento en función de los parámetros a y b . En este caso se tiene que $T - t = 1$, $\sigma = 0.001131$ y $r_t = 0.0927$. Mientras que $a \in [0.1, 0.5]$ y $b \in [0.1, 0.5]$. Ahora, si se considera que el valor de los parámetros son: $T - t = 1$, $\sigma = 0.09058$, $r_t = 0.0621$, $a \in [0.01, 0.10]$ y $b \in [0.01, 0.10]$, se tiene la siguiente Gráfica 2.2



Gráfica 2.1 Curva de rendimiento en función de los parámetros a y b .



Gráfica 2.2 Curva de rendimiento en función de los parámetros a y b .

En la gráfica 2.1 se puede observar que si se fija el valor de largo plazo b y se varia el valor de la velocidad a hacia valores crecientes se observa que los valores de los rendimientos son positivos pero decrecientes, es decir considerando una sección de la gráfica, se observa que pasa de ser convexa a concava. Para un mayor análisis observe la gráfica 2.2 en la que para valores decrecientes de a y un valor fijo de b los rendimientos son positivos y crecientes es decir se manifiesta convexidad. Note que si se fijan los valores de a y b se puede apreciar el efecto de reversion a la media. Asimismo, si fijamos el valor de a y cambiamos el valor de largo plazo b la estructura de plazos podría adoptar curvas constante, concavas, convexas o inclusive jorobas.

2.2.6 Precio de un bono cupón cero en el modelo de Vasicek

A continuación se expresa el precio de un bono cupón cero en términos de la tasa larga,

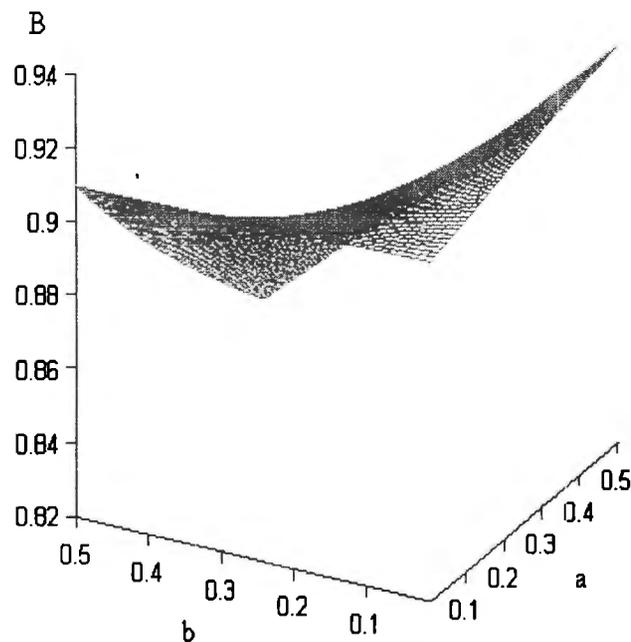
$R(t, \infty)$. Observe que

$$B(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}. \quad (2.14)$$

Así, en virtud de la ecuación (2.12), el precio de un bono cupón cero, que se coloca en t y que al vencimiento, T , paga una unidad monetaria $B(T, T) = 1$, asociado al modelo de Vasicek de tasa corta se puede describir como:

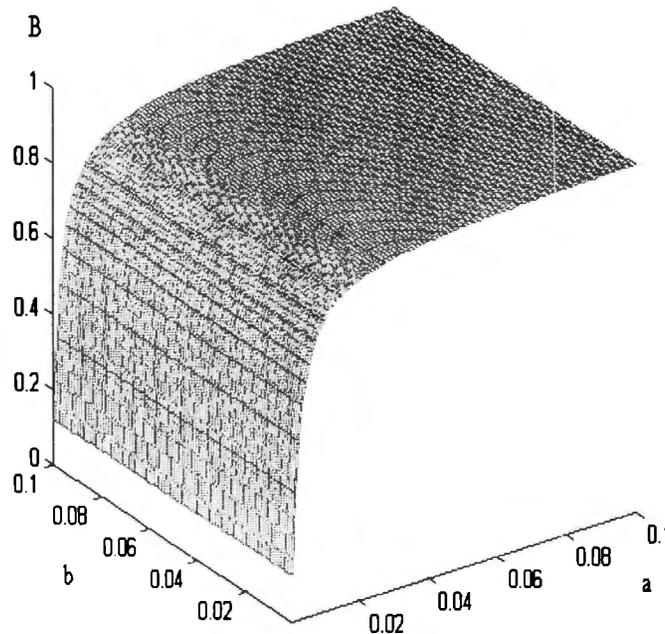
$$B(t, T) = \exp \left\{ -R(t, \infty)(T-t) - [r_t - R(t, \infty)] D(t, T) - \frac{\sigma^2}{4a} D^2(t, T) \right\}. \quad (2.15)$$

En la Gráfica 2.3 se muestra la curva del precio de un bono cupón cero en función de los parámetros a y b . En este caso se tiene que $T-t = 1$, $\sigma = 0.001131$ y $r_t = 0.0927$. Mientras que $a \in [0.1, 0.5]$ y $b \in [0.1, 0.5]$. Observe que a medida que la velocidad con que el proceso se revierte a la media, a , aumenta, el precio del bono, B , también aumenta y se estabiliza en valores cercanos a su valor nominal.



Gráfica 2.3 Precio de un bono cupón cero en función de los parámetros a y b .

Ahora, si se considera que el valor de los parámetros son: $T-t = 1$, $\sigma = 0.09058$, $r_t = 0.0621$, $a \in [0.01, 0.10]$ y $b \in [0.01, 0.10]$, se tiene la siguiente gráfica 2.4.



Gráfica 2.4 Precio de un bono cupón cero en función de los parámetros a y b .

A diferencia de la gráfica 2.3. en la gráfica 2.4 se presenta un efecto equivalente a 2.3 solo que se cambio el valor de la volatilidad (de los datos considerados), el de la tasa corta y se ha hecho un acercamiento de la grafica 2.3 al considerar una determinada sección y en la que se puede observar de manera más clara como el precio del bono tiende a estabilizarse a su valor nominal para los distintos valores de a y b .

2.2.7 Tasa forward instantánea del modelo de Vasicek

A continuación se describe el comportamiento de la tasa forward asociada al modelo de Vasicek. La tasa forward instantánea se calcula mediante la siguiente expresión:

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln B(t, T) = r_t \frac{\partial D}{\partial T} - \frac{\partial A}{\partial T}.$$

A partir de (2.7) y (2.8), se tiene que

$$\frac{\partial D}{\partial T} = e^{-a(T-t)}$$

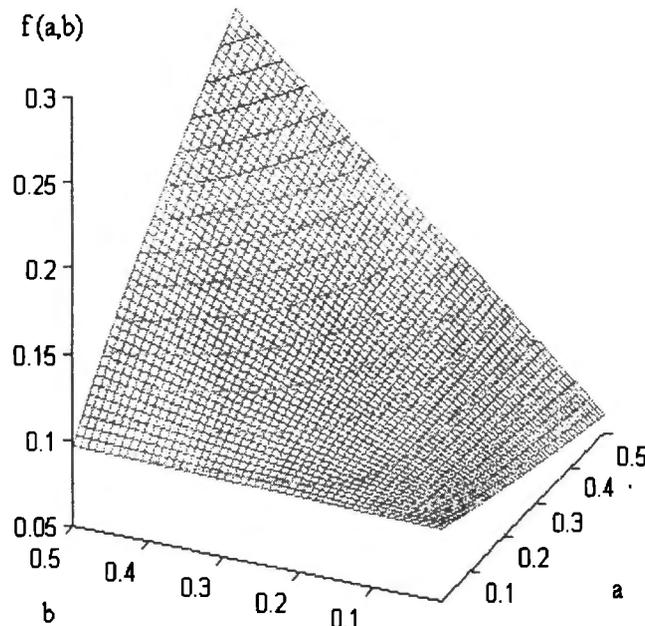
y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial T} &= -b + be^{-a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2a^2} - \frac{\sigma^2}{a^2}e^{-a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2a^2}e^{-2a(T-t)} \\
&= -b + be^{-a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(1 - 2e^{-a(T-t)} + e^{-2a(T-t)}\right) \\
&= -b + be^{-a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(1 - e^{-a(T-t)}\right)^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la tasa forward instantánea del modelo de Vasicek está dada por

$$\begin{aligned}
f(t, T) &= r_t e^{-a(T-t)} + b - be^{-a(T-t)} - \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(1 - e^{-a(T-t)}\right)^2 \\
&= b - (b - r_t)e^{-a(T-t)} - \frac{\sigma^2}{2} D^2(t, T).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

En este caso, se verifica inmediatamente que $f(t, \infty) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} f(t, T) = b$. Es decir, a medida que el plazo aumenta la variación de la estructura de plazos instantánea ya no va a cambiar, lo que indica que el rendimiento por el plazo considerado en cada instante tiende a ser constante, esto es la tasa forward instantánea tiende a mantenerse sin variación.



Gráfica 2.5 Tasa forward instantánea en función de los parámetros a y b , con $a \in [0.1, 0.5]$ y $b \in [0.1, 0.5]$.

En la gráfica 2.5 se presenta la tasa forward instantánea del modelo de Vasicek en función de los parámetros a y b . La tasa forward instantánea es la razón de cambio de la estructura de plazos multiplicada por el plazo en cada instante del plazo, por lo que si se fija el valor de a y se cambia el valor de largo plazo b la estructura de plazos podría adoptar curvas concavas, convexas o inclusive jorobas.

2.2.8 Aplicación del modelo de Vasicek

A continuación se lleva a cabo una aplicación del modelo de Vasicek. Asimismo, se muestra cómo los parámetros pueden ser estimados utilizando el modelo de regresión lineal simple con el supuesto estándar de errores normales no correlacionados, o bien con un proceso autoregresivo de orden uno.

El modelo de Vasicek puede plantearse en términos discretos como una ecuación estocástica en diferencias. De la ecuación (2.1), se tiene

$$r_t = ab + (1 - a)r_{t-1} + \sigma\epsilon_t,$$

donde $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Si se escribe $\beta_0 = ab$ y $\beta_1 = 1 - a$, entonces

$$r_t = \beta_0 + \beta_1 r_{t-1} + \epsilon_t, \quad (2.17)$$

donde $\{\epsilon_t\}$ son variables aleatorias independientes y normalmente distribuidas con media cero y varianza σ^2 , $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Note que $\hat{a} = 1 - \beta_1$ y $\hat{b} = \beta_0/a$. La media (incondicional) de r_t es

$$E[r_t] = \beta_0/(1 - \beta_1) = b$$

y su varianza (incondicional) está dada por

$$\text{Var}[r_t] = \sigma^2/(1 - \beta_1)^2 = \sigma^2/[1 - (1 - a)^2].$$

La varianza condicional de r_t , dado r_{t-1} es, por supuesto, σ^2 .

Note que la estimación de los parámetros por MCO-OLS considera que los errores $\{\epsilon_t\}$ son variables aleatorias independientes y normalmente distribuidas con media cero y varianza σ^2 . Es conveniente señalar que la ecuación (2.17) ha sido derivada de la ecuación diferencial estocástica de la tasa corta en la que se considera un movimiento Browniano,

(2.1), que sigue una distribución de tipo normal, lo cual es una limitante debido a que lo más probable es que los precios o bien los rendimientos que se presentan en el mercado no sigan una distribución de tipo normal. Sin embargo, el uso del modelo de Vasicek permite obtener un primer resultado de la estructura de plazos de las tasas de interés de manera sencilla y rápida. Cabe aclarar que en el modelo de la tasa corta es un modelo de un solo factor de riesgo, en la cual la volatilidad y los parámetros permanecen constantes. Asimismo, este modelo intenta describir esencialmente propiedades estadísticas del mercado, entre las que se destaca reversión a la media y en particular en el caso mexicano.

2.2.9 Comportamiento de la tasa de rendimiento, CETES 28

La aplicación del modelo de Vasicek será usada para la tasa anualizada, diaria, de CETES a 28 días en el periodo que a continuación se presenta.

En esta sección, se muestra en la gráfica 2.6 la tasa anualizada, diaria, de CETES a 28 días para un periodo del 1 de noviembre de 2000 al 8 de marzo de 2006, sin impuestos.² Para este periodo el cambio porcentual de la tasa anualizada, diaria, de un día a otro llegó a alcanzar el 16.9%, (sin impuestos). Observe en la gráfica 2.6 que la tasa anualizada diaria para el periodo dado, presenta una tendencia a la baja, sin perder en cuenta que se presentaron pequeños cambios abruptos de subidas y bajas en dicha tasa.

Es importante destacar que el considerar un determinado periodo de análisis en el que se estiman un conjunto de parámetros se reflejara en el valor en riesgo del bono. Dichos parámetros aparecen en la ecuación diferencial estocástica de la tasa corta. Mientras que para el caso de metodologías no paramétricas el ancho de la ventana resultara importante, como es el caso del método de simulación histórica, Crouhy et al. (2001), pues puede presentar variados valores del VaR dando lugar a tener sus ventajas y desventajas dicho método, o bien contar solo con un conjunto reducido de datos. Asimismo, establecer un ancho de banda e identificar un conjunto de datos que esten dentro de la banda y llevar a cabo el análisis podría ser importante para determinar un conjunto de valores extremos y que permite aplicar otro tipo de metodologías que sean capaces de indentificar colas anchas o pesadas en la distribución permitiendo un mejor ajuste, Embrechts et al. (1999). En este sentido, se ha seleccionado un periodo de tiempo cuyo cambio porcentual de la tasa anualizada diaria se encuentra alrededor del 5% y se aplican distintas metodolgías para el

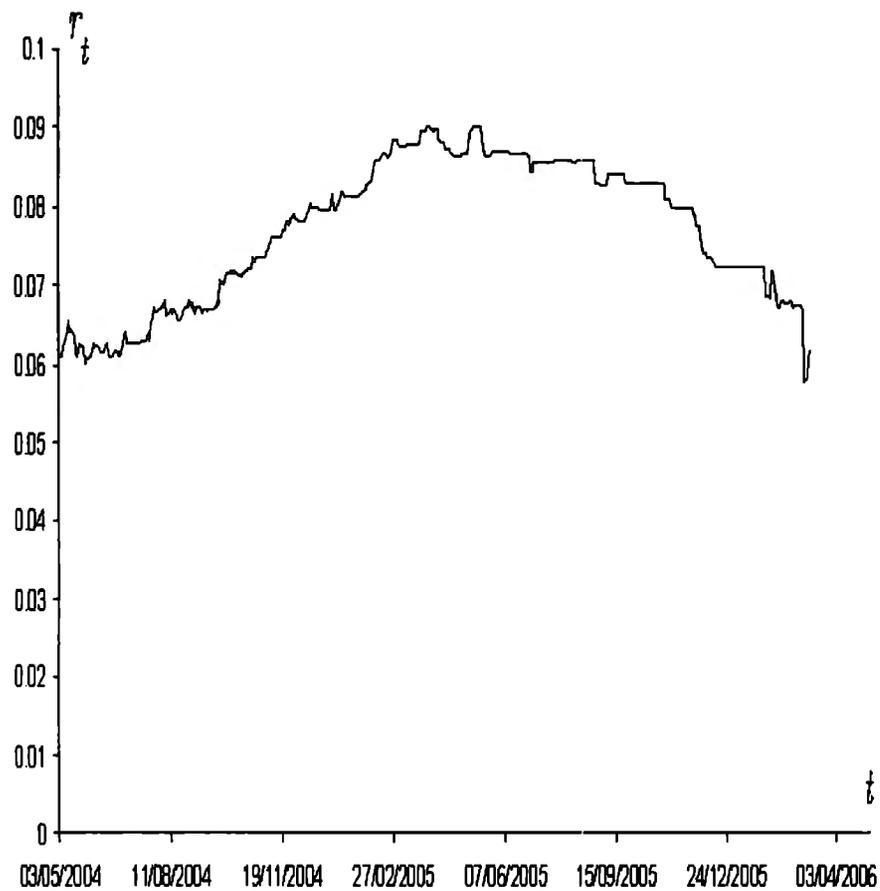
² Fuente: Valmer.

cálculo del VaR y para el caso mexicano como se muestra más adelante. Así, se presenta en la gráfica 2.7 los datos de la tasa corta para llevar a cabo esta investigación.



Gráfica 2.6 Tasa de rendimiento, CETES 28, para el periodo del 1 de noviembre de 2000 al 8 de marzo de 2006 (sin impuestos).

Entonces, la tasa anualizada a un día de CETES a 28 días para un periodo del 3 de mayo de 2004 al 8 de marzo de 2006 se presentan en la grafica 2.7 . En este periodo, el cambio porcentual de la tasa anualizada diaria no superó el 5% (sin impuestos).



Gráfica 2.7 CETES a 28 días para un periodo
del 3 de mayo de 2004 al 8 de marzo de 2006 (sin impuestos).

Los resultados de la estimación de los parámetros del modelo (2.17), con errores estándar entre paréntesis, donde se tiene $R^2 = 0.9929$, $F = 66384$ y probabilidad 0.0%; para $\hat{\beta}_0$ una $t = 1.04$ con probabilidad 0.02 y para β_1 una $t = 257.65$ con probabilidad 0.0%, son los siguientes:

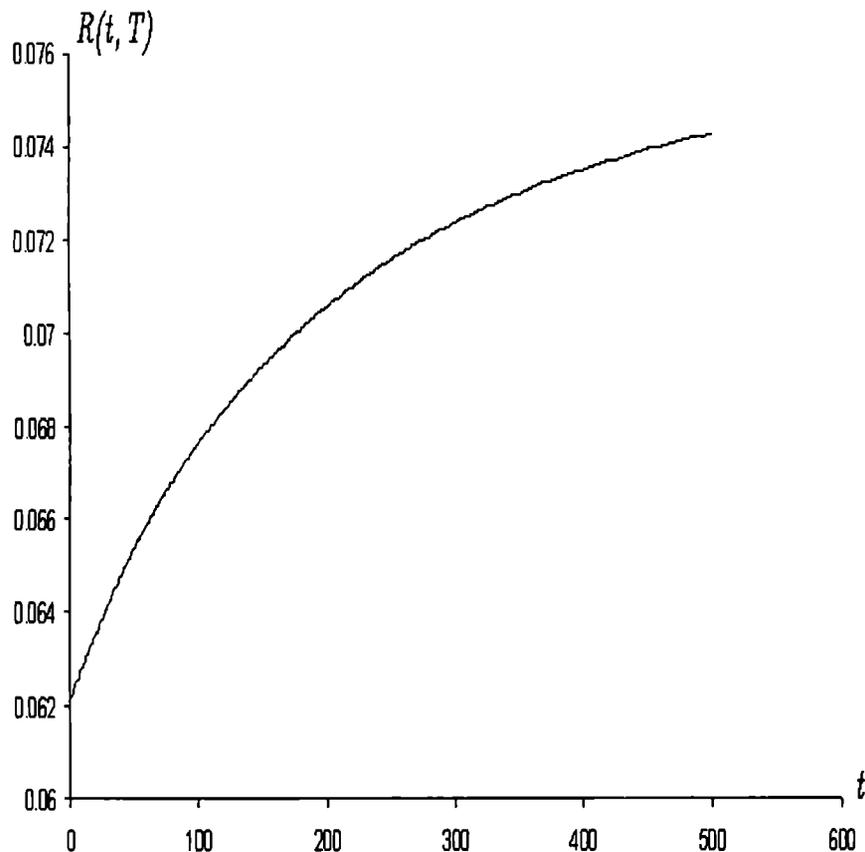
$$r_t = 0.000589 + 0.992968r_{t-1}. \quad (2.18)$$

(0.000282) (0.003580).

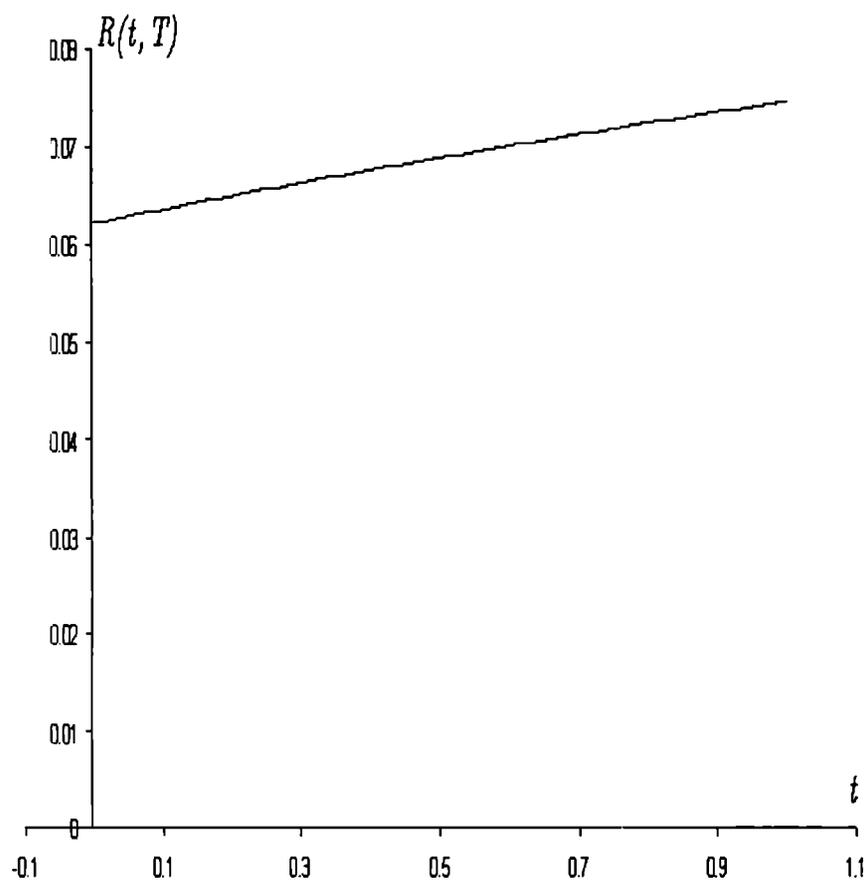
Los datos utilizados en la estimación corresponden a la tasa de rendimiento CETES 28 para el periodo del 3 de mayo de 2004 al 8 de marzo de 2006, sin impuesto. Note que,

$E[\beta_0] = \hat{\beta}_0$, $E[\beta_1] = \hat{\beta}_1$ y $E[\epsilon_t] = 0$. En este caso, se puede apreciar que las estimaciones son significativamente distintas de cero con un 95% de confianza. La Gráfica 2.8 muestra la estructura de plazos definida a través de la ecuación (2.8) con $a=0.007032$, $b=0.083772$, $r_t=0.0621$ y $\sigma = 0.090579173$. Como puede observarse, la estructura de plazos es positiva, creciente y, en el largo plazo, se estabiliza en un valor cercano al 8.38%. Note que al considerar plazos de hasta un año, Gráfica 2.9, la estructura de plazos alcanza un valor de hasta 6.78% .

Se sabe que $R(t, T)$ puede tener cualquier comportamiento: cóncava, convexa, etc. y que $R(t, T)$ puede ser negativa para algunos valores de los parámetros.



Gráfica 2.8 Estructura de plazos estimada (Vasicek),
 $R(t, T)$.



Gráfica 2.9 Estructura de plazos estimada, un año (Vasicek), $R(t, T)$, con t en años.

A diferencia de la gráfica 2.8, en la gráfica 2.9 se ha considerado un plazo menor con el objeto de apreciar mejor el comportamiento de la estructura de plazos. En la estructura de plazos obtenida, se debe tener presente que la dinámica que sigue la tasa corta es guiada por una ecuación diferencial estocástica, ecuación 2.3, y ésta puede ser negativa lo que es una limitante del modelo y por lo tanto una limitante al aplicarlo al caso mexicano en la cual se calcula el valor en riesgo del bono cupón cero. Además, en el modelo de Vasicek se supone que los rendimientos del mercado siguen una distribución de tipo normal, que para el caso mexicano lo que se observa en el mercado son colas pesadas y no normales.

Por lo que es conveniente utilizar otras metodologías como se muestra más adelante.

2.3 Modelo de la tasa corta de Cox, Ingersoll y Ross, CIR

A continuación se presentan algunas características y fundamentos del modelo CIR, en particular su función de densidad ji-cuadrada, la curva de rendimiento y la estructura de plazos para un cierto conjunto de datos.

2.3.1 Características del modelo CIR

El modelo Cox, Ingersoll y Ross (1985b) es un modelo de valuación de activos en equilibrio para estudiar la estructura de plazos de tasas de interés. El modelo proporciona soluciones para la valuación de bonos y caracteriza completamente la estructura de plazos, la cual incorpora la prima al riesgo y la esperanza de futuras tasas de interés. El modelo CIR ha resultado ser un modelo de gran trascendencia en la ciencias económicas-financieras por varias razones, en las que podemos destacar las siguientes: proporciona una fuerte conexión entre la teoría de valuación de activos intertemporal y la estructura de plazos de tasas de interés, preserva el requerimiento de que las tasas de interés sean no negativas y proporciona soluciones cerradas relativamente simples en la valuación de bonos.

Asimismo, el modelo es una herramienta útil para la valuación de productos derivados de tasas de interés. Es importante destacar que el modelo CIR es no lineal por lo que el modelo tiene asociado una distribución ji-cuadrada no central, la cual se explicará con mayor detenimiento en posteriores secciones.

2.3.2 Fundamentos del modelo CIR

Es imprescindible mencionar que en la estructura de plazos generada con el modelo de Vasicek, el cual se obtiene con $\beta = 0$, puede producir tasas negativas, con probabilidad positiva. Afortunadamente, esta limitación desaparece en el modelo propuesto por Cox, Ingersoll y Ross (CIR), en 1985, en su artículo "A Theory of the Term Structure of Interest Rates" publicado en *Econometrica*, ya que en su modelo las tasas siempre son positivas. Esta sección se concentra en una dinámica de la tasa corta conducida por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, \quad (2.19)$$

donde a, b y σ son constantes y $\{W_t\}_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Es importante observar que al considerar $\sqrt{r_t}$ en el término estocástico el proceso de la tasa corta deja de ser normal. Por lo que, en este caso, la distribución de la tasa corta corresponde a una χ^2 no central con parámetro de no centralidad δ_t . Este proceso presenta reversión a la media como en el modelo de Vasicek, pero la varianza es proporcional a $\sigma^2 r_t$ por unidad de tiempo. Es decir, la volatilidad está dada por $\sigma \sqrt{r_t}$. Por lo que conforme la tasa de interés corta aumenta, la desviación estándar aumenta.

2.3.2.1 Ecuación diferencial parcial del comportamiento del precio de un bono cupón cero en el modelo de CIR

En un mundo neutral al riesgo, el precio del bono cupón cero, denotado por $B = B(r_t, t; T)$, o simplemente como $B = B(t, T)$, satisface la ecuación diferencial parcial parabólica, Cox, J. C. et al. (1985b), dada por

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 r_t \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + a(b - r_t) \frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0 \quad (2.20)$$

junto con la condición de frontera $B(T, T) = 1$.

2.3.2.2 Solución de la ecuación diferencial parcial del precio de un bono cupón cero

En esta sección se presenta la solución de la ecuación diferencial parcial que caracteriza el precio de un bono cupón cero en el modelo CIR. Dado que la ecuación diferencial parcial parabólica no presenta derivadas parciales cruzadas, se supone una solución en variables separables, es decir:

$$B(t, T) = e^{A(t, T) - r_t D(t, T)}. \quad (2.21)$$

Claramente, $A(T, T) = D(T, T) = 0$ ya que el valor nominal del bono está dado por

$$B(T, T) = e^{A(T, T) - r_T D(T, T)} = 1.$$

En este caso, se obtiene de manera simple que

$$D(t, T) = \frac{2(e^{\sqrt{a^2 + 2\sigma^2}(T-t)} - 1)}{(a + \sqrt{a^2 + 2\sigma^2})(e^{\sqrt{a^2 + 2\sigma^2}(T-t)} - 1) + 2\sqrt{a^2 + 2\sigma^2}} \quad (2.22)$$

y

$$A(t, T) = \ln \left[\frac{2\sqrt{a^2 + 2\sigma^2} e^{(a + \sqrt{a^2 + 2\sigma^2})(T-t)/2}}{(a + \sqrt{a^2 + 2\sigma^2})(e^{\sqrt{a^2 + 2\sigma^2}(T-t)} - 1) + 2\sqrt{a^2 + 2\sigma^2}} \right]^{2ab/\sigma^2} \quad (2.23)$$

2.3.2.3 Curva de rendimiento del modelo CIR

En el caso del modelo CIR es posible obtener curvas de rendimiento con pendiente positiva, con pendiente negativa o con jorobas. La curva de rendimiento del modelo CIR se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} R(t, T) &= - \frac{\ln B(t, T)}{T - t} \\ &= \frac{r_t D(t, T) - A(t, T)}{T - t}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

la cual es una función lineal de r_t . En este caso se puede demostrar que

$$R(t, \infty) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} R(t, T) = \frac{2ab}{a + \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}.$$

2.3.2.4 Función de densidad del modelo CIR

El modelo CIR ha sido muy utilizado en la valuación de productos derivados de tasas de interés. Como se mencionó la tasa *spot* es no negativa. Se sabe que la tasa *spot* es no negativa cuando $\sigma^2 \leq 2\alpha_1$, mientras que $r(t)$ puede alcanzar el valor de cero si $\sigma^2 > 2\alpha_1$, $\alpha_1 = ab$. La función de densidad del modelo CIR está dada por

$$f(r_t) = ce^{-c(r_t+v)} \left(\frac{r_t}{v} \right)^{q/2} I_q(2c\sqrt{r_tv}); \quad r_t \geq 0. \quad (2.25)$$

donde

$$c = \frac{2a}{\sigma^2(1 - e^{-at})}, \quad v = r_0 e^{-at}, \quad r(0) = r_0, \quad q = \frac{2ab}{\sigma^2} - 1$$

y en la que la función

$$I_q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+q}}{k! \Gamma(k+q+1)} \quad (2.26)$$

es la función modificada de Bessel³ de primera clase y de orden q . Mientras que $\Gamma(x)$ es la función gamma. La función de densidad es una función de distribución ji-cuadrada no central, con $2(q + 1)$ grados de libertad y no centralidad $2cv$. Es decir,

$$\begin{aligned} 2(q + 1) &= 2 \left(\frac{2ab}{\sigma^2} - 1 + 1 \right) \\ &= \frac{4ab}{\sigma^2} \end{aligned} \quad (2.27)$$

y no centralidad

$$\begin{aligned} 2cv &= 2 \left(\frac{2a}{\sigma^2(1 - e^{-at})} \right) r_0 e^{-at} \\ &= \left(\frac{4ar_0 e^{-at}}{\sigma^2(1 - e^{-at})} \right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

La función de densidad $f(r_t)$ se puede escribir en forma explícita en términos de la función de distribución Poisson y la función gamma. Para ello, se considera la función modificada de Bessel de primera clase y de orden q en la que se efectúa el cambio de variable dado por $x = 2c\sqrt{r_tv}$. Esto es,

$$\begin{aligned} I_q(x) = I_q(2c\sqrt{r_tv}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k + q + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+q} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k + q + 1)} \left(\frac{2c\sqrt{r_tv}}{2} \right)^{2k+q} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k + q + 1)} (c\sqrt{r_tv})^{2k+q}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

³ La función modificada de Bessel de primera clase y de orden q está dada por

$$I_q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2} \right)^{2k+q}}{k! (k + q)!}.$$

Se tiene que $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$. Sea $\alpha = k + q + 1$, entonces $\Gamma(\alpha) = \Gamma(k + q + 1) = (k + q + 1 - 1)! = (k + q)!$. Por lo tanto, la función modificada de Bessel de primera clase y de orden q se puede escribir como

$$I_q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2} \right)^{2k+q}}{k! \Gamma(k + q + 1)}.$$

Si se sustituye la función anterior en la función de densidad tal que $r_t \geq 0$, (2.25), se tiene

$$\begin{aligned}
f(r_t) &= ce^{-c(r_t+v)} \left(\frac{r_t}{v}\right)^{q/2} I_q(2c\sqrt{r_tv}) \\
&= ce^{-c(r_t+v)} \left(\frac{r_t}{v}\right)^{q/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+q+1)} (c\sqrt{r_tv})^{q+2k} \\
&= ce^{-c(r_t+v)} \left(\frac{r_t}{v}\right)^{q/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+q+1)} c^{q+2k} r_t^{\frac{q}{2}+k} v^{\frac{q}{2}+k} \\
&= ce^{-cr_t} e^{-cv} \left(\frac{r_t}{v}\right)^{q/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+q+1)} c^{q+2k} r_t^{\frac{q}{2}+k} v^{\frac{q}{2}+k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{ce^{-cr_t} e^{-cv} r_t^{q/2} v^{-q/2} c^{q+2k} r_t^{\frac{q}{2}+k} v^{\frac{q}{2}+k}}{k!\Gamma(k+q+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k c^{q+k+1} v^k e^{-cv}}{k!\Gamma(k+q+1)} r_t^{q+k} e^{-cr_t} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(cv)^k}{k!} e^{-cv} \frac{1}{\Gamma(k+q+1)} c^{q+k+1} r_t^{q+k} e^{-cr_t}.
\end{aligned}$$

Sea $\alpha = k + q + 1$, como antes, entonces la ecuación anterior se puede escribir como

$$f(r_t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(cv)^k}{k!} e^{-cv} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} c^\alpha r_t^{\alpha-1} e^{-cr_t}. \quad (2.30)$$

Si se supone $c = \lambda$, entonces

$$f(r_t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda v)^k}{k!} e^{-\lambda v} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha r_t^{\alpha-1} e^{-\lambda r_t}, \quad (2.31)$$

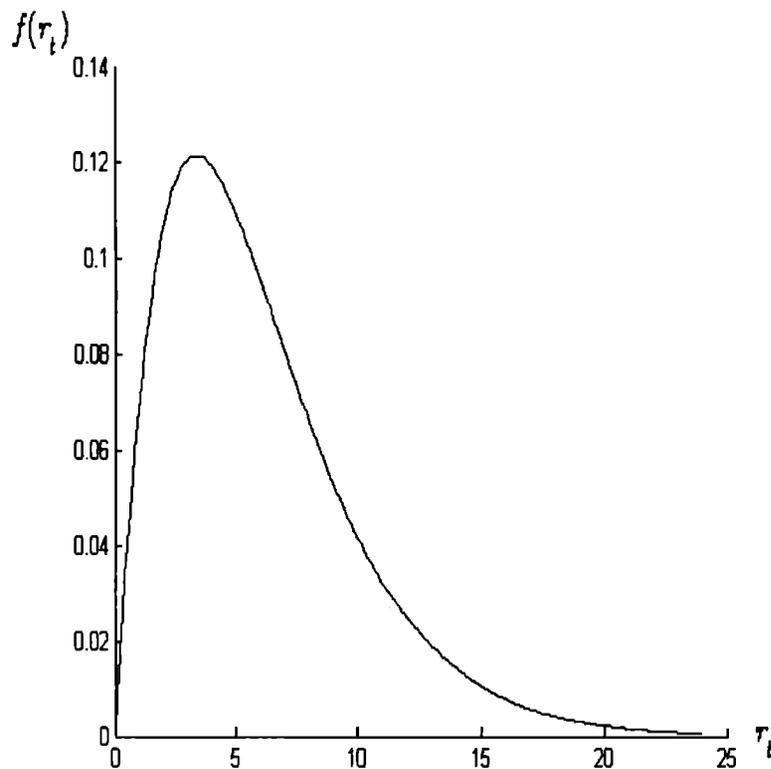
representa la función de densidad del modelo CIR en términos de la función de densidad gamma y Poisson. Como se puede observar es el producto de una función de densidad gamma, con parámetro de forma $\theta = 1/\lambda > 0$ y $\alpha > 0$, y la función Poisson con parámetro λ . Si se considera que

$$(h(r_t))_{\alpha,\lambda} = (h(r_t))_{k+q+1,c} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha r_t^{\alpha-1} e^{-\lambda r_t},$$

entonces la función de densidad del modelo CIR queda expresada como

$$f(r_t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda v)^k}{k!} e^{-\lambda v} (h(r_t))_{\alpha,\lambda}, \quad (2.32)$$

donde $(h(r_t))_{\alpha,\lambda}$ es la función de densidad de la distribución gamma con media $E[r_t] = \alpha/\lambda$ y varianza $\text{Var}(r_t) = \alpha/\lambda^2$. En la siguiente gráfica se presenta la gráfica de la función de densidad ji-cuadrada no central con parámetros $\nu = 4, \delta = 2$. Esto es,



Gráfica 2.10 Función de densidad ji-cuadrada no central con $\nu = 4, \delta = 2$.

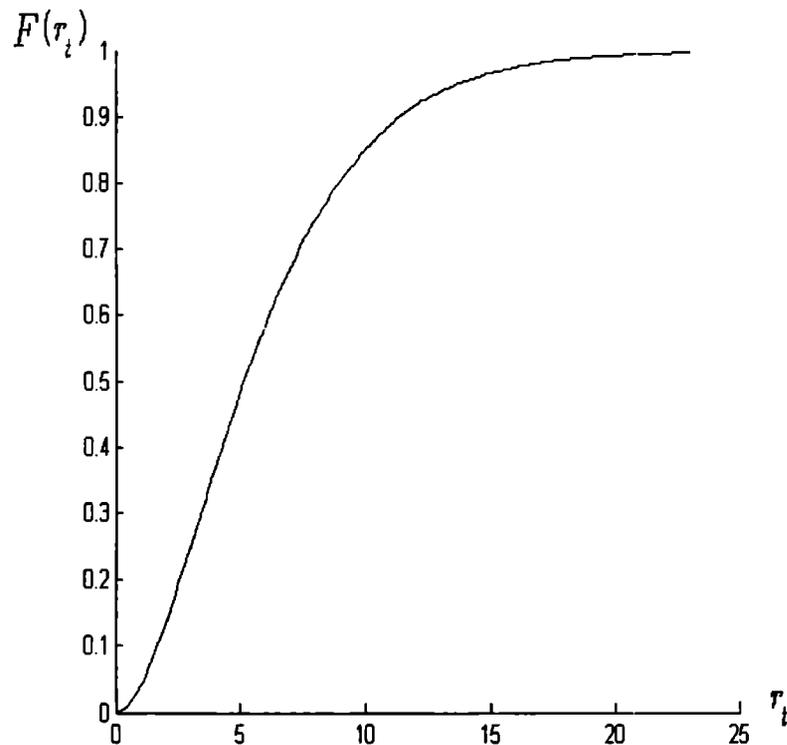
Observe que la función de densidad, gráfica 2.10 realizada en MatLab[©], proporciona la probabilidad de que la tasa corta tome cierto valor y conforme aumenta el valor de dicha tasa corta la probabilidad de ocurrencia es cada vez menor pero siguiendo una distribución ji-cuadrada no central del modelo CIR. Mientras que si se van sumando dichas probabilidades es posible calcular la probabilidad de que la tasa corta se menor o igual a cierto valor, es decir conduce a la llamada función de distribución acumulada y que aparece en la siguiente sección.

2.3.2.5 Función de distribución acumulada del modelo CIR

La probabilidad de que una variable aleatoria ji-cuadrada, $\chi_{\nu, \delta}^2$, no central sea menor o igual a un cierto valor $\chi_{\nu, \delta}^2$ con ν grados de libertad y parámetro de no centralidad δ , está dada por la función de distribución acumulada

$$\begin{aligned} F(r_t; \nu, \delta) &= P\{\chi_{\nu, \delta}^2 \leq \chi_{\nu, \delta}^2\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \nu)^k}{k!} e^{-\lambda \nu} P\{\chi^2 \leq \chi_{\nu, \delta}^2\}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Para el caso en el que se tiene $\nu = 4$ grados de libertad y parámetro de no centralidad $\delta = 2$, su gráfica es de la forma



Gráfica 2.11 Función de distribución acumulada ji-cuadrada no central.

En la gráfica 2.11 se muestra la probabilidad de que la tasa corta sea menor o igual a cierto valor y en la que se considera el modelo CIR.

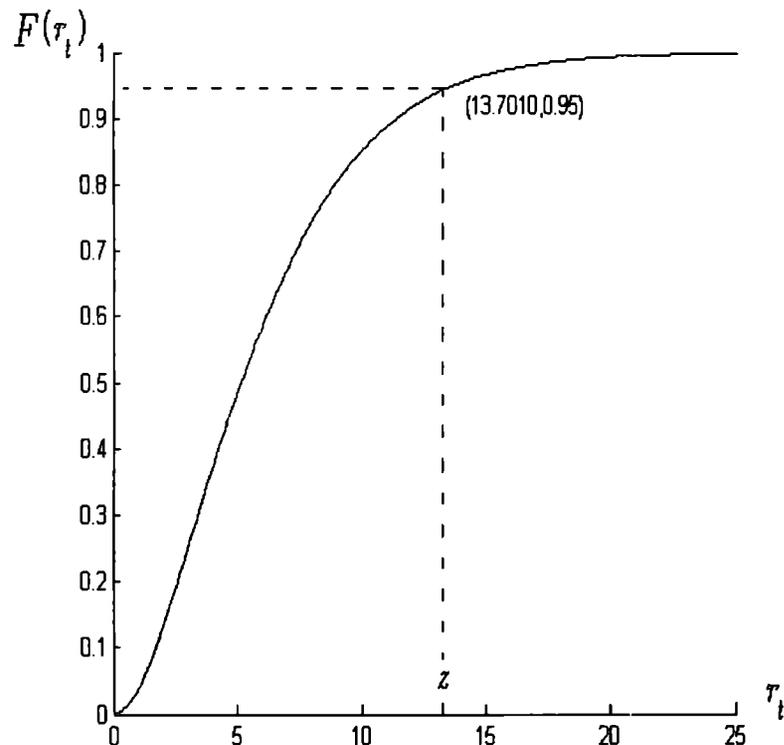
2.4 Inversa de la función de distribución acumulada de una ji-cuadrada no central, CIR

La inversa de la función de distribución acumulada de una ji-cuadrada no central con probabilidad p , ν grados de libertad y δ el parámetro de no centralidad está dada por

$$z = F^{-1}(p; \nu, \delta = 2c\nu) = \{z : F(r_t; \nu, \delta = 2c\nu) = p\}$$

donde

$$F(r_t; \nu = 2(q + 1), \delta = 2c\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda\nu)^k}{k!} e^{-\lambda\nu} P\{\chi^2 \leq \chi_{\nu, \delta}^2\}. \quad (2.34)$$



Gráfica 2.12 Función de distribución acumulada ji-cuadrada no central

con $\nu = 4$, $\delta = 2$ y el valor de su inversa $z = r_t = 13.7010$.

Por ejemplo, si se considera la función de distribución acumulada para $\nu = 4$ grados de libertad y $\delta = 2$ parámetro de no centralidad con una probabilidad de 95%, se tiene que el valor de $z = r_t$ es de

$$z = F^{-1}(p; \nu = 4, \delta = 2) = \{z : F(r_t; \nu = 4, \delta = 2) = p = 95\% \} = 13.7010$$

el cual se cálculo en MatLab[©] y se puede observar en la gráfica 2.12.

2.5 Distribución de la tasa corta en el modelo CIR

El objetivo de esta sección es determinar la distribución de la tasa corta en el modelo CIR. Considere el proceso de Orstein-Uhlenbeck

$$dy_t = -ay_t dt + \sigma dU_t, \quad (2.35)$$

donde $a, \sigma > 0$ y $\{U_t\}_{t>0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La solución de este proceso es similar a la de una ecuación diferencial no homogénea de primer orden, esto es

$$\begin{aligned} y_t &= e^{-at} \left(y_0 + \sigma \int_0^t e^{as} dU_s \right) \\ &= y_0 e^{-at} + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dU_s. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Así, y_t es normal con media condicional $E[y_t|y_0] = y_0 e^{-at}$ y varianza condicional dada por $\text{Var}[y_t|y_0] = \sigma^2 \int_0^t e^{-2a(t-s)} ds = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at})$. Observe también que una aplicación del lema de Itô a $x_t = y_t^2$ conduce a

$$\begin{aligned} dx_t &= \left(-a \frac{\partial x_t}{\partial y_t} y_t + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 x_t}{\partial y_t^2} \right) dt + \frac{\partial x_t}{\partial y_t} \sigma dU_t \\ &= 2y_t (-ay_t dt + \sigma dU_t) + \sigma^2 dt \\ &= 2y_t dy + \sigma^2 dt. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Suponga ahora que se tienen $U_{1t}, U_{2t}, \dots, U_{nt}$ movimientos Brownianos independientes definidos sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y defina los siguientes n procesos de Orstein-Uhlenbeck:

$$dy_{kt} = -\frac{1}{2} a y_{kt} dt + \frac{1}{2} \sigma dU_{kt}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.38)$$

En cuyo caso, de (2.36) y (2.38), se tiene que

$$y_{kt} = e^{-at/2} \left(y_{k0} + \frac{1}{2}\sigma \int_0^t e^{as/2} dU_{ks} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.39)$$

y es tal que

$$E[y_{kt}|y_{k0}] = y_{k0}e^{-at/2} \equiv \mu_{k,t} \quad (2.40)$$

y

$$\text{Var}[y_{kt}|y_{k0}] = \frac{\sigma^2}{4} \int_0^t e^{-a(t-s)} ds = \frac{\sigma^2}{4a} (1 - e^{-at}) \equiv \nu_t^2. \quad (2.41)$$

Considere ahora el proceso

$$\begin{aligned} r_t &= y_{1t}^2 + y_{2t}^2 + \dots + y_{nt}^2 \\ &= \sum_{k=1}^n y_{kt}^2, \end{aligned} \quad (2.42)$$

entonces.

$$\frac{r_t}{\nu_t^2} \sim \chi^2(n, \delta_t), \quad (2.43)$$

con parámetro de no centralidad δ_t , $\delta_t = \frac{1}{\nu_t^2} \sum_{k=1}^n \mu_{k,t}^2$. Es decir, r_t/ν_t^2 sigue una distribución ji-cuadrada no central con n grados de libertad y parámetro de no centralidad δ_t . Es importante observar también, que de (2.42) y (2.43), se tiene

$$\begin{aligned} E \left[\frac{r_t}{\nu_t^2} \mid r_0 \right] &= \frac{1}{\nu_t^2} \sum_{k=1}^n E [y_{kt}^2 \mid y_{k0}] \\ &= \frac{1}{\nu_t^2} \sum_{k=1}^n (\text{Var} [y_{kt} \mid y_{k0}] + (E [y_{kt} \mid y_{k0}])^2) \\ &= \frac{n}{\nu_t^2} \nu_t^2 + \frac{e^{-at}}{\nu_t^2} \sum_{k=1}^n y_{k0}^2 \\ &= n + \frac{e^{-at}}{\nu_t^2} r_0. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Por lo tanto, de (2.43) y (2.44), se sigue que

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[\frac{r_t}{\nu_t^2} \right] &= E \left[\left(\frac{r_t}{\nu_t^2} \right)^2 \mid r_0 \right] - \left(E \left[\frac{r_t}{\nu_t^2} \mid r_0 \right] \right)^2 \\ &= \frac{r_0^2 e^{-at}}{\nu_t^4} + \frac{n}{\nu_t^2} - \left(n + \frac{e^{-at}}{\nu_t^2} r_0 \right)^2. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Esto es, se ha calculado la varianza de una variable aleatoria que sigue una distribución ji-cuadrada no central, en la que dicha variable es el cociente de la tasa corta, dada por la suma de los cuadrados de variables aleatorias que siguen procesos de Orstein-Uhlenbeck, y su varianza condicional correspondiente.

2.5.1 Correspondencia entre los parámetros de la distribución ji-cuadrada y el modelo CIR

Por otro lado, a partir de (2.35) y (2.42), se sigue que

$$\begin{aligned}
dr_t &= \sum_{k=1}^n dy_{kt}^2 \\
&= \sum_{k=1}^n 2y_{kt} \left(-a \frac{1}{2} y_{kt} dt + \frac{1}{2} \sigma dU_{kt} \right) + \frac{n\sigma^2}{4} dt \\
&= -ar_t dt + \sigma \sum_{k=1}^n y_{kt} dU_{kt} + \frac{n\sigma^2}{4} dt \\
&= \left(\frac{n\sigma^2}{4} - ar_t \right) dt + \sigma \sqrt{r_t} \sum_{k=1}^n \frac{y_{kt} dU_{kt}}{\sqrt{r_t}}.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Se define

$$dW_t \equiv \sum_{k=1}^n \frac{y_{kt} dU_{kt}}{\sqrt{r_t}}. \tag{2.47}$$

Claramente W_t es una martingala, pues no tiene tendencia. Si se define $V_t = W_t^2$, se tiene que

$$\begin{aligned}
dV_t &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_t}{\partial W_t^2} \sum_{k=1}^n \frac{y_{kt}^2}{r_t} dt + \frac{\partial V_t}{\partial W_t} \sum_{k=1}^n \frac{y_{kt} dW_{kt}}{\sqrt{r_t}} \\
&= \frac{1}{r_t} \sum_{k=1}^n y_{kt}^2 dt + 2W_t dW_t \\
&= dt + 2W_t dW_t.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
W_t^2 &= \int_0^t ds + 2 \int_0^t W_s dW_s \\
&= t + 2 \int_0^t W_s dW_s,
\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$W_t^2 - t = 2 \int_0^t W_s dW_s \tag{2.49}$$

es una martingala. En virtud del teorema de representación de Lévy, se tiene que W_t es un movimiento Browniano definido en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. En consecuencia, se puede escribir

$$dr_t = \left(\frac{n\sigma^2}{4} - ar_t \right) dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t. \quad (2.50)$$

Si se compara (2.46) con (2.19) se tiene que

$$ab = \frac{n\sigma^2}{4}. \quad (2.51)$$

Por lo tanto, al despejar n de la expresión anterior se tiene

$$n = \frac{4ab}{\sigma^2}.$$

La ecuación anterior tiene aún sentido si n no es un entero positivo. Por lo que, el parámetro de no centralidad satisface

$$\begin{aligned} \delta_t &= \frac{1}{\nu_t^2} \sum_{k=1}^n y_{k0}^2 e^{-at/2} \\ &= \frac{1}{\nu_t^2} r_0 e^{-at}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

De acuerdo con (2.41), (2.43) y (2.44) se puede concluir que

$$\frac{4a}{\sigma^2(1-e^{-at})}r_t \sim \chi^2 \left(\frac{4ab}{\sigma^2}, \frac{4ar_0e^{-at}}{\sigma^2(1-e^{-at})} \right). \quad (2.53)$$

Note que, $2cr_t = \frac{4a}{\sigma^2(1-e^{-at})}r_t$ es el parámetro de no centralidad de la función de densidad ji-cuadrada no central del modelo CIR. En ésta, se observa que para un valor de a si se incrementa la varianza de la tasa de interés el término de no centralidad decrece, pero si disminuye sustancialmente dicha varianza entonces el término de no centralidad aumenta considerablemente, lo que muestra la sensibilidad del modelo ante cambios en los parámetros.

2.5.2 Cambio de variable en el modelo CIR para obtener volatilidad constante

Se considera un cambio de variable que permite describir la dinámica de la tasa corta CIR en una ecuación diferencial estocástica en la que la varianza o volatilidad es una constante.

Para ello, si se define $y_t \equiv y(r_t, t) = 2\sqrt{r_t}$, se tiene que

$$\frac{\partial y_t}{\partial r_t} = \frac{1}{r_t} = \frac{2}{y_t}$$

y

$$\frac{\partial^2 y_t}{\partial r_t^2} = -\frac{1}{2r_t\sqrt{r_t}} = -\frac{1}{r_t y_t}.$$

Al aplicar el lema de Itô, conduce a

$$\begin{aligned} dy_t &= \left(\frac{\partial y_t}{\partial r_t} a(b - r_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y_t}{\partial r_t^2} \sigma^2 r_t \right) dt + \frac{\partial y_t}{\partial r_t} \sigma \sqrt{r_t} dW_t \\ &= \left[\frac{2}{y_t} a \left(b - \frac{y_t^2}{4} \right) - \frac{1}{2r_t y_t} \sigma^2 r_t \right] dt + \frac{2}{y_t} \sigma \sqrt{r_t} dW_t \\ &= \left[\left(2ab - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{1}{y_t} - \frac{a}{2} y_t \right] dt + \sigma dW_t. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial dy_t donde y_t es función de la tasa corta está dada por

$$dy_t = \left[\left(2ab - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{1}{y_t} - \frac{a}{2} y_t \right] dt + \sigma dW_t.$$

Así, el coeficiente, σ , que multiplica al movimiento Browniano es constante. Los parámetros se pueden estimar por mínimos cuadrados ordinarios como se presenta más adelante.

2.5.3 Estimación de los parámetros

A continuación se presentan varios métodos de estimación de los parámetros del modelo CIR, los cuales utilizan un registro histórico de la tasa corta o de la curva de rendimiento.

2.5.3.1 Estimación de parámetros en el modelo CIR con MGM

En esta sección se discute sobre la estimación de parámetros en el modelo CIR mediante el método generalizado de momentos (MGM). Considere la versión discreta del modelo CIR

$$r_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 r_t + \sqrt{r_t} \epsilon_t, \quad (2.55)$$

donde $\beta_0 = ab$ y $\beta_1 = 1 - a$. En éste se calculan estimadores, $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\sigma}$, con el método generalizado de momentos, sujeto a las restricciones

$$\sum_{t=1}^n \epsilon_t = 0, \quad \sum_{t=1}^n \epsilon_t \epsilon_{t-1} = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{t=1}^n (\epsilon_t^2 - r_t \sigma^2) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\hat{a} = 1 - \hat{\beta}_1 \quad \text{y} \quad \hat{b} = \frac{\hat{\beta}_0}{\hat{a}}.$$

Es importante destacar que MGM no requiere de un supuesto sobre la distribución de los errores.

2.5.3.2 Estimación de los parámetros del modelo CIR transformado en un modelo de varianza constante con MCO

El objetivo de esta sección es mostrar que al usar un cambio de variable en la tasa corta del modelo CIR, es factible tener una manera mas sencilla de realizar las estimaciones, es decir por minimos cuadrados ordinarios.

Considere la ecuación diferencial estocástica de la tasa corta (2.54) en la siguiente versión discreta

$$y_{t+1} = \beta_1 y_t^{-1} + \beta_2 y_t + \epsilon, \quad (2.56)$$

donde $y_t = 2\sqrt{r_t}$, $\beta_1 = 2ab - (\sigma^2/2)$, $\beta_2 = 1 - (a/2)$ y $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. La ecuación (2.56) se puede escribir como

$$y_t = \beta_1 y_{t-1}^{-1} + \beta_2 y_{t-1} + \sigma \epsilon.$$

Si $\tilde{\beta}_1$, $\tilde{\beta}_2$ y $\tilde{\sigma}^2 = \tilde{\sigma}^2$ son los estimadores de mínimos cuadrados ordinarios, MCO, los cuales son

$$\tilde{a} = 2(1 - \tilde{\beta}_2)$$

y

$$\tilde{b} = \frac{\tilde{\sigma}^2 + 2\tilde{\beta}_1}{4\tilde{a}} = \frac{\tilde{\sigma}^2 + 2\tilde{\beta}_1}{8(1 - \tilde{\beta}_2)}, \quad (2.57)$$

son también estimadores de máxima verosimilitud. Es decir, se tiene un modelo con volatilidad constante en la cual los parámetros a y b a estimar se determinan por mínimos cuadrados ordinarios.

2.5.3.3 Estimación de los parámetros del modelo CIR para CETES 28 (varianza constante y MCO)

En esta sección se realiza una estimación de los parámetros del modelo CIR para CETES 28 en el periodo entre el 3 de mayo de 2004 al 8 de marzo de 2006, para ello se utiliza la ecuación (2.56).⁴ Se utilizó E-Views[©] para estimar los parámetros. Los resultados obtenidos son:

⁴ Fuente: Valmer.

Estimación de parámetros				
Método	\hat{a}	\hat{b}	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\sigma}$
MCO:	0.005900	0.088000	0.0058138	0.076242
MGM:	0.005819	0.088002	0.0057141	0.075592

Cuadro 1. Estimación de los parámetros a y b , para un periodo de la tasa corta del 03/mayo/2004 – 08/03/2006.

Los resultados de la estimación de los parámetros del modelo (2.56), con errores estándar entre paréntesis, donde se tiene $R^2 = 0.99288$, $F = 66397$ y probabilidad 0.0%; para $\hat{\beta}_1$ una $t = 1.08$ con probabilidad 0.027 y para β_2 una $t = 391.56$ con probabilidad 0.0%, son los siguientes:

$$y_{t+1} = \beta_1 y_t^{-1} + \beta_2 y_t + \epsilon, \quad (2.58)$$

$$y_{t+1} = 0.0059y_t^{-1} + 0.088y_{t-1} + 0.007624\epsilon. \quad (2.59)$$

(0.001102) (0.011096).

Note que, $E[\beta_0] = \hat{\beta}_0$, $E[\beta_1] = \hat{\beta}_1$ y $E[\epsilon_t] = 0$ y una $R^2 = 0.9892$ en MGM. En el caso del modelo CIR es posible obtener curvas de rendimiento con pendiente positiva, con pendiente negativa o con jorobas. En este caso, la curva de rendimiento presenta un pendiente positiva como se puede apreciar en la gráfica 2.13.

2.5.3.4 Estimación de los parámetros utilizando la curva de rendimiento del modelo CIR (Newton-Raphson)

La estimación de los parámetros utilizando la curva de rendimiento del modelo CIR y en la que se resuelve el sistema de ecuaciones por Newton-Raphson, vea Whittaker, E. T. y Robinson, G. (1967), es un método de aproximación numérica y por lo tanto los resultados son aproximados.

Ahora, considere dicho método en el que la curva de rendimiento del modelo CIR:

$$R(t, T) = \frac{r_t D(t, T) - A(t, T)}{T - t}. \quad (2.60)$$

Las funciones $D(t, T)$ y $A(t, T)$ dependen de los parámetros a , b y σ , lo cual se destaca mediante la notación $D(t, T; a, b, \sigma)$ y $A(t, T; a, b, \sigma)$. A continuación, se fijan tres plazos, la magnitud de los cuales depende del horizonte al que se desea estimar la curva de

rendimiento (semanas, meses ó años). Sea $\bar{R}(t, T_i)$, $i = 1, 2, 3$, la tasa de interés promedio de plazo T_i . Considere el siguiente sistema de tres ecuaciones en las incógnitas a , b y σ :

$$\begin{cases} \bar{R}(t, T_1)(T_1 - t) - r_t D(t, T_1; a, b, \sigma) + A(t, T_1; a, b, \sigma) = 0, \\ \bar{R}(t, T_2)(T_2 - t) - r_t D(t, T_2; a, b, \sigma) + A(t, T_2; a, b, \sigma) = 0, \\ \bar{R}(t, T_3)(T_3 - t) - r_t D(t, T_3; a, b, \sigma) + A(t, T_3; a, b, \sigma) = 0, \end{cases} \quad (2.61)$$

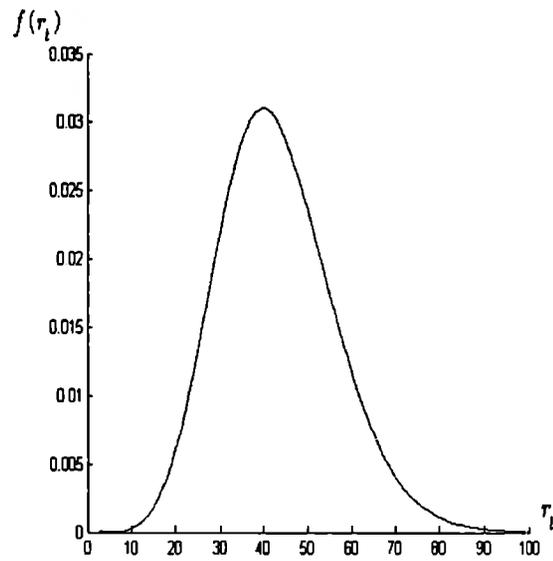
Este sistema de tres ecuaciones simultáneas se puede resolver mediante el método de Newton Raphson y se requiere de un punto inicial, es decir los tres plazos, y se espera que el método de aproximación converja.

2.6 Función de densidad y función de distribución acumulada para CETES 28

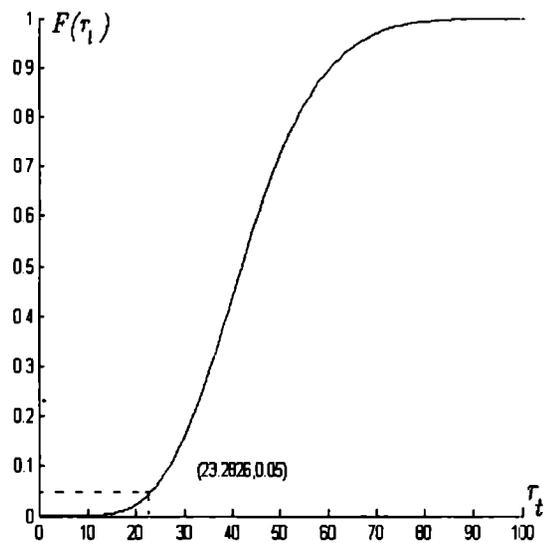
A continuación se muestra la función de densidad ji-cuadrada no central y la función de distribución acumulada del comportamiento de la tasa corta de CETES 28 diaria, del periodo entre el 3 de mayo de 2004 al 8 de marzo de 2006. La función utilizada de densidad del modelo CIR puede verse en la ecuación (2.31), donde los valores de los parámetros de a , b y σ aparecen en el Cuadro 1. De esta manera la función de densidad del modelo CIR con $\nu = 0.357277983$ y $\delta = 42.60704074$ se presenta en la Gráfica 2.15. Asimismo, la inversa de la función de distribución acumulada de una ji-cuadrada no central para la tasa corta, con probabilidad $p = 0.05$, $\nu = 0.357277983$ grados de libertad y $\delta = 42.60704074$ parámetro de no centralidad, está en la Gráfica 2.16, esto es igual a

$$r_t = z = F^{-1}(p; \nu, \delta = 2cv) = \{z : F(r_t; \nu, \delta = 2cv) = p = 0.05\}$$

Observe que en la función de densidad, gráfica 2.15 realizada en MatLab[©], conforme aumenta el valor de la tasa corta proporciona la probabilidad de que la tasa corta tome tal valor y la probabilidad de ocurrencia es cada vez menor pero siguiendo una distribución ji-cuadrada no central del modelo CIR. Mientras que si se van sumando dichas probabilidades es posible calcular la probabilidad de que la tasa corta sea menor o igual a cierto valor, es decir conduce a la llamada función de distribución acumulada y dada por la gráfica 2.16.



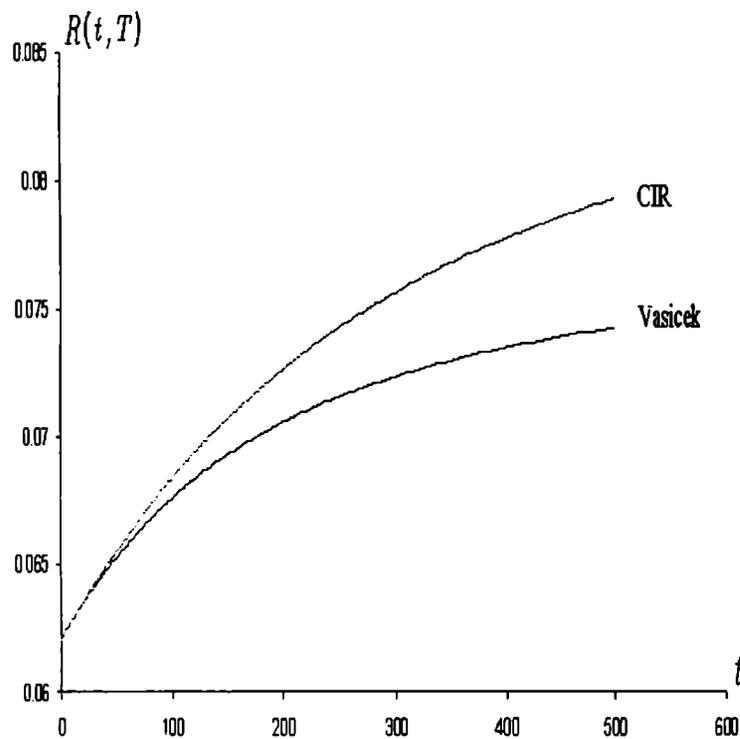
Gráfica 2.15 Función de densidad de probabilidad ji-cuadrada no central
con $\nu = 0.357277983$ y $\delta = 42.60704074$.



Gráfica 2.16 Función de distribución acumulada ji-cuadrada no central
con $\nu = 0.357277983$ y $\delta = 42.60704074$.

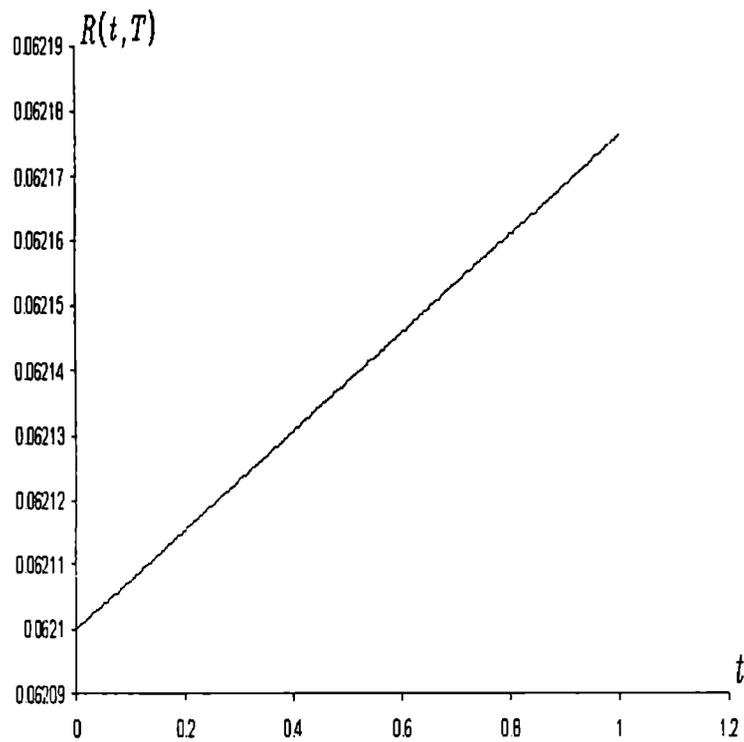
2.7 Análisis comparativo entre los modelos Vasicek y CIR

A continuación se realiza un análisis comparativo de los modelos de Vasicek y CIR. Para ello, se muestra la gráfica 2.13 de la estructura de plazos de ambos modelos.



Gráfica 2.13 Estructura de plazos estimada (CIR) y Vasicek, $R(t,T)$.

En la Gráfica 2.13 se comparan la estructura de plazos del modelo de Vasicek y del modelo de Cox-Ingersoll-Ross. En la que se aprecia que la estructura de plazos del modelo CIR está por arriba de Vasicek esto se debe fundamentalmente a que el valor de largo plazo b en la estimación resultó mayor en un 4.81%, y sin perder en cuenta que en el modelo de la tasa corta dichos valores siempre son positivos a diferencia a Vasicek que podrían resultar valores negativos en la tasa corta.



Gráfica 2.14 $R(t, T)$ con t en años. Estructura de plazos estimada (CIR).

En la Gráfica 2.14 en la que se tienen plazos de hasta un año, para el modelo CIR la estructura de plazos alcanza un valor máximo de 6.216% . Mientras que a largo plazo, la tasa es de 6.67% .

CAPÍTULO 3

VALOR EN RIESGO: UNA APLICACIÓN AL CASO MEXICANO

3.1 Valor en riesgo

Con el objeto de calcular el valor en riesgo, también llamada el VaR, de bonos cupón cero con distintas metodologías, entre las que destacan: el modelo de Vasicek con reversión a la media, simulación histórica, teoría de valores extremos y simulación Monte Carlo con CIR entre otras. En esta sección, se presenta una introducción al valor en riesgo y algunos enfoques de este concepto de valor en riesgo que permitirá entender mejor la aplicación de este importante concepto en el mercado financiero mexicano.

3.2 Introducción

El desarrollo de métodos para cuantificar el riesgo de mercado con base en modelos analíticos toma lugar en la década de los treinta con el trabajo de Macaulay (1939). Desde entonces, el concepto de duración desempeña, durante mucho tiempo, un papel central en la construcción de dichos modelos. No fue sino hasta 1995, cuando se publicó un documento técnico del banco J. P. Morgan donde se proponía un método novedoso para cuantificar el riesgo de mercado asociado a todas las posiciones de su banco a través del cálculo de un solo número, lo que se conoce como valor en riesgo (o VaR por las iniciales en inglés del término Value at Risk). Casi desde entonces, el valor en riesgo es una de las medidas que se utilizan con mayor frecuencia, por los intermediarios financieros, en la estimación de pérdidas potenciales, ya sea en el valor o en el rendimiento de un portafolio debido a movimientos en los factores de riesgo mercado, en un periodo de tiempo y con un determinado nivel de confianza dado.

3.2.1 El concepto de valor en riesgo, paramétrico

En esta sección se presenta la definición formal del valor en riesgo paramétrico del cambio en el valor de un portafolio, Venegas-Martínez F. (2004). Por simplicidad, se considera un portafolio que combina dos activos riesgosos.

Considere un intervalo de tiempo $[t, T]$. El valor inicial, en t , de un portafolio que consiste de w_1 unidades del activo S_{1t} y w_2 unidades del activo S_{2t} está dado por

$$\Pi_t = w_1 S_{1t} + w_2 S_{2t}.$$

El cambio en el valor del portafolio, entre las fechas t y T , manteniendo las cantidades w_1 y w_2 constante, se puede escribir de forma sencilla de la siguiente manera:

$$X := \Pi_T - \Pi_t = w_1(S_{1T} - S_{1t}) + w_2(S_{2T} - S_{2t}).$$

Si $S_{1T} : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ y $S_{2T} : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ son variables aleatorias definidas sobre dos espacios muestrales, Ω_1 y Ω_2 , entonces $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, es una variable aleatoria asociada al cambio en el valor del portafolio. Asimismo, se supone que X está definida sobre un espacio de probabilidad fijo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\theta)$, donde θ es un vector de parámetros asociados con la distribución de X . Si se desea que X represente el cambio en valor de un solo activo, entonces se toman, simplemente, $w_1 = 1$ y $w_2 = 0$. El esquema planteado anteriormente se puede generalizar de manera sencilla, a un portafolio con más de dos activos.

El valor en riesgo de X al nivel $1 - q$ denotado por $-\text{VaR}_{1-q}^X$, se define como el peor valor del portafolio, en un periodo de tiempo dado, $[t, T]$, para un intervalo de confianza del $(1 - q)100\%$. Esto es,

$$\mathbb{P}_\theta \{ -\text{VaR}_{1-q}^X \leq X \} = 1 - q.$$

Asimismo, la cantidad $-\text{VaR}_{1-q}^X$ también satisface $\mathbb{P}_\theta \{ X \leq -\text{VaR}_{1-q}^X \} = q$. Es decir,

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{1-q}^X &= -\inf \{ x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}_\theta \{ X \leq x \} \geq q \} \\ &= -\sup \{ x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}_\theta \{ X \leq x \} \leq q \}. \end{aligned}$$

Esta definición es aplicable tanto a variables aleatorias continuas como discretas. De lo anterior se tiene, en forma inmediata, que

$$\text{VaR}_{1-q}^X = -\inf \{ x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}_\theta \{ X > x \} \leq 1 - q \}. \quad (3.1)$$

En la figura 3.1, se ilustra el concepto del valor en riesgo, es decir el número VaR_{1-q}^X es una estimación estadística del peor valor de X con cierto grado de confianza en un intervalo

de tiempo dado. Si se considera un portafolio de inversión, en el mercado financiero, el VaR_{1-q}^x representa la máxima cantidad de dinero que se puede perder dentro de un cierto periodo de tiempo.

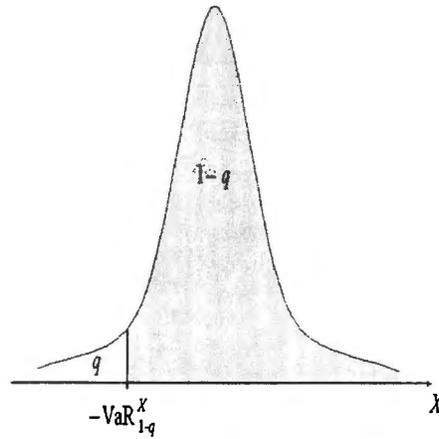


Figura 3.1 Valor en riesgo de X al nivel $1 - q$, es decir $-\text{VaR}_{1-q}^x$.

3.2.2 Valor en riesgo y la función de cuantiles

Si X es una variable aleatoria definida en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\theta)$, la función

$$Q_X(q) = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}_\theta \{X \leq x\} \geq q\}$$

es llamada la función de cuantiles de X . La función $Q_X(q)$ es creciente y continua por la derecha. Note que, si la variable aleatoria es continua, entonces $Q_X(q) = F_X^{-1}(q)$. Además, si X es una variable aleatoria continua, entonces

$$E[g(X)] = \int_0^1 g(Q_X(q))dq.$$

Note que, por definición la esperanza de $g(X)$ está dada por

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_X(x).$$

Si se considera el siguiente cambio de variable $x = Q_X(q) = F_X^{-1}(q)$, entonces $Q_X(-\infty) = 0$, $Q_X(\infty) = 1$ y

$$E[g(X)] = \int_0^1 g(Q_X(q))dF_X(F_X^{-1}(q)) = \int_0^1 g(Q_X(q))dq.$$

Por lo tanto, el VaR y la función de cuantiles están relacionados mediante

$$\text{VaR}_{1-q}^X = -Q_X(q), \quad (3.2)$$

para un intervalo de confianza del $(1 - q)100\%$.

3.2.3 Valor en riesgo del rendimiento de un portafolio y el teorema de Euler

En esta sección se demuestra que el valor en riesgo tiene la propiedad de homogeneidad positiva. Asimismo, se discute sobre la relación que existe entre el VaR y el teorema de Euler sobre funciones homogéneas de grado uno.

Para ello, sean $\lambda > 0$ y $Y = \lambda X$, entonces la probabilidad de que la variable aleatoria Y sea menor o igual a un cierto valor y , está dada por

$$F_Y(y) = \mathbb{P}\{Y \leq y\} = \mathbb{P}\{\lambda X \leq y\} = \mathbb{P}\left\{X \leq \frac{y}{\lambda}\right\} = F_X\left(\frac{y}{\lambda}\right),$$

por lo que el VaR_{1-q}^Y está dado por

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{1-q}^Y &= -\inf\{y \in \mathbb{R} \mid F_Y(y) \geq q\} \\ &= -\lambda \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq q\} \\ &= \lambda \text{VaR}_{1-q}^X. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{VaR}_{1-q}^Y = \lambda \text{VaR}_{1-q}^X. \quad (3.3)$$

Note que al multiplicar X por λ , cada w_i , $i = 1, 2$, es multiplicada por λ . Por lo tanto, si se escribe $\text{VaR}_{1-q}^X := \text{VaR}_{1-q}(w_1, w_2)$, se tiene que

$$\text{VaR}_{1-q}(\lambda w_1, \lambda w_2) = \lambda \text{VaR}_{1-q}(w_1, w_2). \quad (3.4)$$

Es decir, si VaR_{1-q}^X es función de w_1 y w_2 , se tiene que $\text{VaR}_{1-q}(w_1, w_2)$ es homogénea de grado uno. En consecuencia, el teorema de Euler conduce a

$$\text{VaR}_{1-q}(w_1, w_2) = w_1 \frac{\partial \text{VaR}_{1-q}}{\partial w_1}(w_1, w_2) + w_2 \frac{\partial \text{VaR}_{1-q}}{\partial w_2}(w_1, w_2). \quad (3.5)$$

Si $\lambda < 0$, en general, la propiedad de homogeneidad no se cumple. En particular si, $\lambda = -1$ se tiene que

$$\text{VaR}_{1-q}^{-X} = -\text{VaR}_q^X. \quad (3.6)$$

En efecto, sea $Y = -X$, observe que

$$F_Y(y) = \mathbb{P}_\theta\{Y \leq y\} = \mathbb{P}_\theta\{-X \leq y\} = \mathbb{P}_\theta\{X \geq -y\} = 1 - F_X(-y).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{1-q}^Y &= -\inf\{y \in \mathbb{R} \mid F_Y(y) \geq q\} \\ &= \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \leq 1 - q\}. \end{aligned}$$

Por lo que, si X es una variable aleatoria continua entonces el valor en riesgo de $-X$ al nivel $1 - q$ es igual a menos el valor en riesgo de X al nivel q , es decir

$$\text{VaR}_{1-q}^{-X} = -\text{VaR}_q^X. \quad (3.7)$$

3.2.4 Valor en riesgo bajo el supuesto de normalidad

Posiblemente, el supuesto normalidad en el VaR ha contribuido de manera muy importante a que el mismo VaR sea tan popular. Bajo este supuesto, el cálculo del VaR se convierte en una expresión fácil de calcular.

Si el cambio de valor en un portafolio durante $[t, T]$, X , es una variable aleatoria continua y F es su función de distribución, entonces $\text{VaR}_{1-q}^X = F^{-1}(q)$, es decir, VaR_{1-q}^X es el cuantil q de F . Por ejemplo, si el cambio en el valor de Π_t satisface

$$d\Pi_t = \mu dt + \sigma dW_t,$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ y $(W_t)_{t \in [0, T]}$ es un movimiento Browniano definido en un espacio de probabilidad equipado con su filtración aumentada, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$, entonces

$$X = \Pi_T - \Pi_t \sim \mathcal{N}(\mu(T - t), \sigma^2(T - t)).$$

En este caso, se tiene que

$$\mathbb{P}\left\{\frac{X - \mu(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \leq -z_q \mid \mathcal{F}_t\right\} = q,$$

lo cual implica que $\mathbb{P}\left\{X \leq \mu(T - t) - z_q\sigma\sqrt{T - t} \mid \mathcal{F}_t\right\} = q$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{1-q}^X &= z_q\sigma\sqrt{T - t} + \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[-X \mid \mathcal{F}_t] \\ &= z_q\sigma\sqrt{T - t} - \mu(T - t). \end{aligned} \quad (3.8)$$

A partir de las tablas de cuantiles de la función de distribución acumulada de una variable normal estándar, se tiene que si $1 - q = 0.95$, $z_q = 1.65$, y si $1 - q = 0.99$, $z_q = 2.33$. Si se definen $\mu_d = \mu/360$ y $\sigma_d = \sigma/\sqrt{360}$ como el rendimiento y la volatilidad diarios, se tiene que

$$\text{VaR}_{1-q}^x = z_q \sigma_d \sqrt{T-t} - \mu_d (T-t), \quad (3.9)$$

y, en este caso, $T-t$ toma los valores en días.

3.2.5 Valor en riesgo del cambio en valor de la suma de dos portafolios bajo el supuesto de normalidad

Como se ha visto, en la sección anterior, el supuesto de normalidad simplifica, considerablemente, el cálculo del VaR del cambio en valor de un portafolio. Este supuesto también facilita los cálculos del valor en riesgo del cambio en valor de la suma (combinación) de dos portafolios. Es decir, si $X \sim \mathcal{N}(\mu_x(T-t), \sigma_x^2(T-t))$ y $Y \sim \mathcal{N}(\mu_y(T-t), \sigma_y^2(T-t))$ con $\text{Cov}(X, Y) = \sigma_{xy}(T-t)$, entonces la varianza de la suma de las variables aleatorias X y Y está dada por

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{1-q}^{x+y} &= z_q \sigma_{x+y} \sqrt{T-t} - \mu_{x+y} (T-t) \\ &= z_q \sqrt{\sigma_x^2 + 2\sigma_{xy} + \sigma_y^2} \sqrt{T-t} - (\mu_x + \mu_y)(T-t). \end{aligned} \quad (3.10)$$

3.2.6 Valor en riesgo del rendimiento de un portafolio

En las dos secciones anteriores se ha calculado el VaR del cambio en valor de un portafolio. En ésta, se muestra que cuando los rendimientos de los activos son normales el cálculo del valor en riesgo de un portafolio es fácil de determinar. Por simplicidad, se considera un portafolio con dos activos cuyos rendimientos están correlacionados entre sí.

Considere dos movimientos Brownianos $(W_t)_{t \in [0, T]}$ y $(V_t)_{t \in [0, T]}$ correlacionados entre sí, de tal forma que $\text{Cov}(dW_t, dV_t) = \rho dt$. Se supone que los precios, S_{1t} y S_{2t} , de dos activos son conducidos, respectivamente, por las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas

$$dS_{1t} = \mu_1 S_{1t} dt + \sigma_1 S_{1t} dW_t \quad \text{y} \quad dS_{2t} = \mu_2 S_{2t} dt + \sigma_2 S_{2t} dV_t.$$

donde $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ y $\sigma_1, \sigma_2 > 0$. El cambio porcentual en valor del portafolio satisface

$$\frac{d\Pi_t}{\Pi_t} = \alpha_1 \frac{dS_{1t}}{S_{1t}} + \alpha_2 \frac{dS_{2t}}{S_{2t}},$$

donde

$$\alpha_1 = \frac{w_1 S_{1t}}{\Pi_t}, \quad \alpha_2 = \frac{w_2 S_{2t}}{\Pi_t} \quad \text{y} \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

En este caso,

$$E \left[\frac{d\Pi_t}{\Pi_t} \right] = (\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2) dt.$$

$$\text{Var} \left[\frac{d\Pi_t}{\Pi_t} \right] = (\alpha_1^2 \sigma_1^2 + \alpha_2^2 \sigma_2^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho) dt.$$

Por lo tanto,

$$\text{VaR}_{1-q}^{\text{d}\Pi/\Pi} = z_q \sqrt{\alpha_1^2 \sigma_1^2 + \alpha_2^2 \sigma_2^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho} \sqrt{dt} - (\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2) dt.$$

Por otra parte, si se considera el cambio de valor en el portafolio, se tiene que

$$d\Pi_t = w_1 S_{1t} \frac{dS_{1t}}{S_{1t}} + w_2 S_{2t} \frac{dS_{2t}}{S_{2t}}.$$

Ahora, se toma el valor esperado del cambio en el valor del portafolio. Esto es,

$$E [d\Pi_t] = (w_1 S_{1t} \mu_1 + w_2 S_{2t} \mu_2) dt$$

y

$$\text{Var} [d\Pi_t] = (w_1^2 S_{1t}^2 \sigma_1^2 + w_2^2 S_{2t}^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho) dt.$$

De esta manera, el valor en riesgo del cambio en el valor del portafolio está dado por

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{1-q}^{\text{d}\Pi} &= z_q \sqrt{w_1^2 S_{1t}^2 \sigma_1^2 + w_2^2 S_{2t}^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 S_{1t} S_{2t} \sigma_1 \sigma_2 \rho} \sqrt{dt} \\ &\quad - (w_1 S_{1t} \mu_1 + w_2 S_{2t} \mu_2) dt. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Por lo tanto, se cumple la propiedad

$$\text{VaR}_{1-q}^{\text{d}\Pi/\Pi} = \frac{1}{\Pi_t} \text{VaR}_{1-q}^{\text{d}\Pi}. \quad (3.12)$$

en un intervalo de confianza del $(1 - q)100\%$. La cantidad $\text{VaR}_{1-q}^{\text{d}\Pi/\Pi}$ es también conocida como VaR diversificado.

3.2.7 Valor en riesgo de un bono cupón cero

Como se definió en la sección 3.2.1, el valor en riesgo de X al nivel $1 - q$ denotado por $-\text{VaR}_{1-q}^X$, es el peor valor del portafolio, en un periodo de tiempo dado, $[t, T]$, para un intervalo de confianza del $(1 - q)100\%$. Esto es,

$$\mathbb{P}_\theta \{ -\text{VaR}_{1-q}^X \leq X \} = 1 - q.$$

Entonces, $-\text{VaR}_{1-q}^X$ también satisface

$$\mathbb{P}_\theta \{ X \leq -\text{VaR}_{1-q}^X \} = q,$$

es decir,

$$\text{VaR}_{1-q}^X = - \inf \{ x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}_\theta \{ X \leq x \} \geq q \}.$$

Sea $X = dB/B$ el rendimiento del bono, entonces

$$\text{VaR}_{1-q}^{dB/B} = - \inf \{ x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}_\theta \{ dB/B \leq x \} \geq q \}.$$

Por otra parte, el VaR y la función de cuantiles están relacionados por

$$\text{VaR}_{1-q}^{dB/B} = -Q_{dB/B}(q),$$

para un intervalo de confianza del $(1 - q)100\%$.

3.3 Propiedades axiomáticas de una medida coherente de riesgo

A continuación se formaliza el concepto de medida coherente de riesgo a través de propiedades axiomáticas de una medida coherente de riesgo.

Se dice que una medida de riesgo ρ es coherente, en el sentido de Artzner *et al* (1999), si para $X, Y \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple lo siguiente:

- (i) $Y \geq X \Rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y)$,
- (ii) $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$,
- (iii) $\rho(\alpha X) = \alpha \rho(X)$, $\alpha \geq 0$
- y (iv) $\rho(X + \alpha) = \rho(X) - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Basicamente, lo que significa es que las medidas debieran cumplir con las propiedades citadas. Es decir, algunas medidas no reflejan la reducción de riesgo cuando se diversifica

y otras más subestiman pérdidas potenciales. Por lo que las propiedades deseables de una medida coherente de riesgo se expresan a través de los cuatro axiomas descritos.

3.4 Medidas de riesgo más usuales

En esta sección se enlistan algunas de las medidas de riesgo más populares que se definen en términos de una medida de probabilidad. Sea X una variable aleatoria definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(i) Se define la varianza de X como:

$$\rho^{(1)}(X) := \text{Var}^{\mathbb{P}}[X] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[(X - \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X])^2 \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X^2] - [\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X)]^2.$$

La volatilidad $\sigma^{\mathbb{P}}(X)$ se define como la raíz cuadrada de la varianza, es decir $\sigma^{\mathbb{P}}(X) = \sqrt{\rho^{(1)}(X)}$.

(ii) Se define el valor en riesgo (VaR) de X , al nivel $1 - q$, $0 < q < 1$, como:

$$\rho^{(2)}(X) := \text{VaR}_{1-q}^X = -\inf \{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}\{X \leq x\} \geq q\}.$$

(iii) Se define la esperanza condicional de la cola del VaR, para $0 < q < 1$, como:

$$\rho^{(3)}(X) := \mathcal{E}_{1-q}^X = -\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[X \mid X < -\text{VaR}_{1-q}^X \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[-X \mid -X > \text{VaR}_{1-q}^X \right].$$

Entonces, si se usa una de las propiedades antes mencionadas así como la definición del VaR se tiene

$$\text{VaR}_{1-q}^{\Delta B/B+D} = \text{VaR}_{1-q}^{\Delta B/B} - D. \quad (3.13)$$

Por lo tanto,

$$\text{VaR}_{1-q}^{\Delta B/B+D} + D = \text{VaR}_{1-q}^{\Delta B/B}, \quad (3.14)$$

donde $\Delta B/B$ es el rendimiento de un bono y D su duración.

3.5 Valor en riesgo de un bono cupón cero con tasa corta conducida por el modelo de Vasicek

A continuación se deduce la ecuación matemática que permite calcular el valor en riesgo de un bono cupón cero con la tasa corta guiada por una ecuación diferencial estocástica

del modelo de Vasicek. Asimismo, se presenta un aplicación de dicha ecuación a Cetes a 28 días cuyos parámetros, a , b y volatilidad constante σ , fueron calculados anteriormente para el periodo del 3 de mayo de 2004 al 8 de marzo de 2006. En particular se calcula un VaR a diez días.

3.5.1 Valor en riesgo y el modelo de Vasicek

Recordemos que en el modelo de Vasicek la tasa corta, r_t , está dada por la ecuación (2.3), es decir tiene la siguiente dinámica estocástica²

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t \quad (3.15)$$

ó

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s, \quad (3.16)$$

donde a , b y σ son constantes positivas y conocidas, y W_t es un movimiento Browniano definido en un espacio de probabilidad fijo equipado con su filtración aumentada, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. Claramente, si r_0 es constante, r_t se distribuye Normal con media

$$E[r_t] = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}), \quad (3.17)$$

² La ecuación (3.15) se puede escribir como $\frac{dr_t}{dt} = a(b - r_t) + \sigma \frac{dW_t}{dt}$. Si se multiplica la ecuación anterior por e^{at} y se agrupan términos, se tiene

$$e^{at} \left[\frac{dr_t}{dt} + ar_t = ab + \sigma \frac{dW_t}{dt} \right],$$

lo que conduce a:

$$\frac{d(e^{at} r_t)}{dt} = abe^{at} + e^{at} \sigma \frac{dW_t}{dt}$$

o bien

$$\int_0^t d(e^{as} r_s) = \int_0^t abe^{as} ds + \int_0^t \sigma e^{as} dW_s.$$

Al calcular las dos primeras integrales de la ecuación anterior, se tiene

$$e^{at} r_t - r_0 = b(e^{at} - 1) + \int_0^t \sigma e^{as} dW_s.$$

Por lo tanto, al agrupar términos en la ecuación anterior y despejar r_t se obtiene la ecuación (3.16).

donde $E[dW_s] = 0$ y su varianza dada por

$$\text{Var}[r_t] = \sigma^2 \int_0^t e^{-2a(t-s)} ds = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}). \quad (3.18)$$

Esto implica que la desviación estándar en el largo plazo está dada por $\sqrt{\text{Var}[r_t, \infty]} = \sigma/\sqrt{2a}$.

Observe que para calcular la ecuación anterior se ha utilizado la propiedad estándar de la integral del movimiento Browniano

$$\text{Var} \left(\int_0^t g(s) dW_s \right) = E \left[\left(\int_0^t g(s) dW_s \right)^2 \right] = \int_0^t [g(s)]^2 ds. \quad (3.19)$$

Por otra parte, el precio de un bono cupón cero se obtiene descontando el nominal, en este caso una unidad monetaria, con el promedio de los valores futuros de la tasa corta, es decir,

$$B(r_t, t) = E \left\{ \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right\}.$$

Defina ahora

$$I(t, T) = \int_t^T r_s ds.$$

A continuación se verá que $I(t, T)$ es normal. Por un lado, en virtud del modelo de Vasicek en (3.15), se sigue que

$$\int_t^T dr_s = ab(T-t) - a \int_t^T r_s ds + \sigma \int_t^T dW_s. \quad (3.20)$$

Lo que conduce a:

$$r_T - r_t = ab(T-t) - aI(t, T) + \sigma \int_t^T dW_s.$$

En consecuencia,

$$I(t, T) = -\frac{1}{a} (r_T - r_t) + b(T-t) + \frac{\sigma}{a} \int_t^T dW_s. \quad (3.21)$$

Por otro lado, del mismo modelo de Vasicek se tiene que si en (3.16) se sustituye 0 por t y t por T , es decir, se cambia de solución con otro valor final, entonces

$$r_T = r_t e^{-a(T-t)} + b \left(1 - e^{-a(T-t)} \right) + \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} dW_s.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} r_T - r_t &= r_t \left(e^{-a(T-t)} - 1 \right) + b \left(1 - e^{-a(T-t)} \right) + \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} dW_s \\ &= (b - r_t) \left(1 - e^{-a(T-t)} \right) + \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} dW_s. \end{aligned} \quad (3.22)$$

A partir de (3.21) y (3.22), se tiene que

$$\begin{aligned} I(t, T) &= -\frac{1}{a} \left[(b - r_t) \left(1 - e^{-a(T-t)} \right) + \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} dW_s \right] + b(T-t) + \frac{\sigma}{a} \int_t^T dW_s \\ &= b(T-t) + (r_t - b) \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) + \sigma \int_t^T \left(\frac{1 - e^{-a(T-s)}}{a} \right) dW_s. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dr_t} &= \mathbb{E} \left\{ -\frac{dI}{dr_t} e^{-I} \middle| \mathcal{F}_t \right\} \\ &= -\left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) \mathbb{E} \left\{ e^{-I} \middle| \mathcal{F}_t \right\} \\ &= -\left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) B. \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{dB}{B} = -\left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) dr_t. \quad (3.24)$$

Es decir, dB/B sigue una distribución normal con

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{dB}{B} \right] &= -\left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) \mathbb{E} [dr_t] \\ &= -\left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) a(b - r_t) dt. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[\frac{dB}{B} \right] &= \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right)^2 \text{Var} [dr_t] \\ &= \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right)^2 \sigma^2 dt. \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\text{VaR}_{1-q}^{dB/B} = z_q D(t, T) \sigma \sqrt{dt} + D(t, T) a(b - r_t) dt \quad (3.25)$$

donde

$$D(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}.$$

Si desea utilizar la ecuación (2.10), como alternativa para calcular el VaR de un bono cupón cero, observe que la curva de rendimiento está dada por

$$R(t, T) = r_t \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} - \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} - 1 \right) \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) + \frac{\sigma^2 (1 - e^{-a(T-t)})^2}{4a^3(T-t)}.$$

Por lo que,

$$dR = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} dr_t.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mu_{dR} &= E[dR] = \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} \right) E[dr_t] \\ &= \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} \right) a(b - r_t) dt. \end{aligned} \quad (3.26)$$

y

$$\begin{aligned} \sigma_{dR}^2 &= \text{Var}[dR] = \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} \right)^2 \text{Var}[dr_t] \\ &= \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} \right)^2 \sigma^2 dt. \end{aligned} \quad (3.27)$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{1-q}^{dB/B} &= z_q \gamma \sigma_{dR} + \gamma \mu_{dR} \\ &= z_q D(t, T) \sigma \sqrt{dt} + D(t, T) a(b - r_t) dt. \end{aligned} \quad (3.28)$$

y como era de esperarse coincide con (3.25).

3.6 Valor en riesgo de un bono cupón cero y el modelo de Vasicek

Utilizando los valores de a, b y volatilidad constante σ , calculados anteriormente para el periodo del 3 de mayo de 2004 al 8 de marzo de 2006. Se tiene que. el valor en riesgo de

un cete (a 28 días) a un día y a 10 días, aparecen en el siguiente cuadro:

Valor en riesgo de un bono cupón cero (Vasicek)			
Periodo (Cete 28 días)	$-\text{VaR}_{1-q}^{dB/B}$	$-\text{VaR}_{95\%}^{dB/B}$	$-\text{VaR}_{99\%}^{dB/B}$
03/mayo/2004- 08/03/2006	1 día:	0.00000186	0.00000262
03/mayo/2004- 08/03/2006	10 días:	0.00000596	0.00000836

Cuadro 2. VaR por Vasicek

Como se puede observar es una primera aproximación, por lo que es conveniente utilizar otras metodologías y poder comparar el resultado obtenido.

3.7 Valor en riesgo: Simulación histórica

En esta sección se aplica simulación histórica, siendo una de las técnicas comunmente utilizadas, para calcular el valor en riesgo de un bono cupón cero. Sin embargo, dicho valor es una primera aproximación debido al ancho de la ventana de rendimientos o ventanas consideras en el cálculo. Este método de simulación será comparado con el de Vasicek así como con otras metodologías utilizadas en el cálculo del VaR dando lugar a poder presentar las ventajas y desventajas de los modelos emplados para el caso mexicano.

3.7.1 Valor en riesgo de un bono cupón cero por simulación histórica

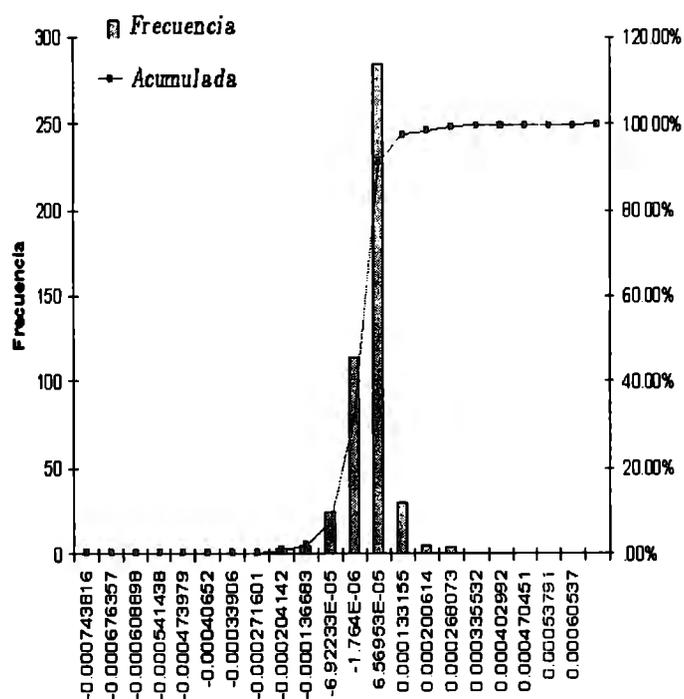
En simulación histórica se simulan cambios en las variables de mercado (tipo de cambio, precio de la acción, tasa de interés, etc.) con base en la historia, en particular se utilizará el factor de riesgo de la tasa corta, y se revalúa el portafolio obteniéndose pérdidas y ganancias o bien rendimientos simulados del bono cupón cero los cuales son ordenados para finalmente calcular el VaR con un nivel de confianza del 99% y del 95%, es decir el primer percentil y quinto percentil de la distribución respectivamente, que representa la peor pérdida o rendimiento del bono. Para esto, sea r_i el valor de la variable el día i y r_h el valor de la variable al día de hoy. En el i -ésimo escenario o simulación se supone que el valor de la variable de mercado al día de mañana estará dado por $r_{is} = r_h r_i / r_{i-1}$. Por lo que se revalúa el bono al día i , $B_i = B_i(r_{is}; t, T)$. En este caso se utilizo la tasa corta

diaria en el periodo del 3 de mayo de 2004 al 8 de marzo de 2006. Se tiene que, el valor en riesgo de un bono cupón cero (cete 28 días) a un día y a 10 días, con un nivel de confianza del 99% y del 95%, está en el cuadro 3:

Valor en riesgo de un bono cupón cero (simulación histórica)			
Periodo (Cete 28 días)	$-\text{VaR}_{1-q}^{\Delta B/B}$	$-\text{VaR}_{95\%}^{\Delta B/B}$	$-\text{VaR}_{99\%}^{\Delta B/B}$
03/mayo/2004- 08/03/2006	1 día:	0.00008781	0.00021458
03/mayo/2004- 08/03/2006	10 días:	0.00027769	0.00067856

Cuadro 3. VaR por simulación histórica

A continuación se presenta un histograma del rendimiento de los bonos cupón cero y su distribución acumulada obtenida de la simulación histórica.



Gráfica 3.1 Histograma del rendimiento de los bonos cupón cero y distribución acumulada (simulación histórica).

Se utilizó E-Views[©] para calcular algunos términos estadísticos y explicar el comportamiento del mercado, entre los que figuran sesgo, curtosis y la prueba de Jarque-Bera, así como el histograma mostrado en la gráfica 3.1. Los resultados obtenidos muestran una alta curtosis lo que indica la presencia de colas pesadas en la distribución de los rendimientos del bono y que era de esperarse dicho comportamiento del mercado:

Estadísticos calculados			
Sesgo	Curtosis	Jarque-Bera	Probabilidad
$-0.483740 \leq 0$	39.58889	26514.56	0.0%

Cuadro 4. Estadísticos calculados.

Modelo	$-\text{VaR}_{1-q}^{\Delta B/B}$	
Vasicek	V	Es rápido de calcular
	D	Tasas negativas. El VaR podría estar subestimado. Supone una distribución normal lo que impide el registro de colas gordas o pesadas, es decir no permite la existencia de eventos extremos (ajustes muy pobres en la cola de la distribución).
Simulación histórica	V	Captura todos los impactos recientes del mercado. La cantidad de datos no es muy grande. No se tiene una distribución específica de pérdidas y ganancias. Computacionalmente fácil de calcular. Se calcula el percentil (VaR).
	D	El valor observado en el tiempo $t - 1$ será muy similar al tiempo t . Replica una sola trayectoria específica del mercado.

Cuadro 5. Ventajas y desventajas para calcular el Valor en Riesgo, $-\text{VaR}_{1-q}^{\Delta B/B}$, de bonos cupón cero con distintas metodologías. Note que D \equiv Desventaja y V \equiv Ventaja.

Ahora, si se comparan las dos metodologías utilizadas hasta el momento, es decir Vasicek y simulación histórica, se tiene el cuadro 5 en el que se resumen las ventajas y

desventajas de estos modelos en el caso mexicano. Cabe señalar, que la presencia de colas pesadas da lugar a utilizar otras metodologías y cuyo análisis se muestra más adelante, debido a las ventajas que ofrecen.

3.8 Valor en riesgo: Teoría de valores extremos

En esta sección se aplica la teoría de valores extremos para calcular el valor en riesgo de un bono cupón cero en la que se utiliza la función de distribución de tipo Frèchet siendo esta la que mejor se ajusta a los rendimientos simulados del Bono.

3.8.1 Valor en riesgo de un bono cupón cero por teoría de valores extremos

Se pueden simular cambios en las variables de mercado (tipo de cambio, precio de la acción, tasa de interés, etc.) con base en la historia, en esta sección en particular se utilizará la simulación del factor de riesgo de la tasa corta, y se revalúa el portafolio obteniéndose pérdidas y ganancias o bien rendimientos simulados del bono cupón cero, en esta etapa se utiliza la teoría de valores extremos para calcular el valor en riesgo de un bono cupón cero a un nivel de confianza del 99% y del 95% . Para utilizar la teoría de valores extremos, se ordenaron los datos (rendimientos simulados del bono cupón cero) en orden ascendente y se multiplicaron por -1 con el objeto de utilizar una función de densidad teórica del tipo Frèchet que mejor ajusta en comparación a las distribuciones generalizadas de Pareto y de valores extremos, se ajustó una densidad kernel, se estimó una distribución de colas pesadas por MDE (minimiza la distancia entre el histograma y la función de densidad de valores extremos que mejor ajusta a los datos, obteniéndose así los parámetros γ , μ y σ) de valores extremos, Reiss R. D. y Thomas M. (2001), o bien por máxima verosimilitud y se determinan los parámetros de la estimación, se obtiene la gráfica Q-Q para determinar si la estimación de las colas pesadas es o no aceptable así como mostrar la evidencia de colas pesadas que aun no han sido ajustadas correctamente, finalmente se utiliza la inversa de la función de densidad del tipo Frèchet para determinar la Z_α con un nivel de confianza considerado y así determinar el valor en riesgo del bono cupón cero.

A continuación se presentan algunos conceptos importantes para la aplicación de la teoría de valores extremos en la valuación del valor en riesgo de un bono cupón cero y que

se puede profundizar y con mayor detalle la teoría y la aplicación de funciones de valores extremos en Paul Embrechts, Claudia Kluppelberg y Thomas Mikosch (1999) y en Reiss R. D., Thomas M. (2001).

3.8.2 Distribuciones Límite para el máximo.

Para conocer la probabilidad en las colas es importante observar y conocer primero la distancia del máximo y del mínimo observado. El Teorema de Fisher-Tippet asegura que bajo ciertas condiciones la distribución de los extremos se puede aproximar bien con alguna de las distribuciones de eventos extremos tales como la: Gumbel, la Frèchet y la Weibull. Esto reduce la búsqueda de la distribución en las colas a sólo estas tres distribuciones de probabilidad de eventos extremos.

3.8.2.1 Distribución de valores extremos y su función de densidad de tipo Frèchet

La distribución de Frèchet, para modelar eventos extremos, con parámetro de forma α y parámetros de localización μ y de escala σ , está dada por la siguiente parametrización α , $\gamma = 1/\alpha$, es decir

$$G_{1,\alpha,\mu,\sigma}(x) = e^{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\alpha}}$$

La función de densidad, es simplemente la derivada de la función de distribución esto es $g = G'$, de donde

$$\begin{aligned} g_1(x; \alpha, \mu, \sigma) &= \frac{de^{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\alpha}}}{dx} \\ &= \frac{\alpha}{\sigma} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-(1+\alpha)} G_{1,\alpha,\mu,\sigma}(x), \quad x \geq 0, \alpha > 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de densidad de tipo Frèchet es

$$g_1(x; \alpha, \mu, \sigma) = \frac{\alpha}{\sigma} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-(1+\alpha)} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\alpha}}$$

Entonces, dado un conjunto de datos ordenados se toma un cierto número de máximos observados que bajo cierta condición para el máximo dominio de atracción, que se describe más adelante, se determinan los parámetros que mejor describen la cola de la distribución.

3.8.2.2 Momentos de las distribuciones de valores extremos

El j -ésimo momento $E[X^j]$ de una variable aleatoria X con distribución Frèchet o Weibull puede expresarse en términos de la Función Gamma.

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} e^{-x} dx, \quad \lambda > 0$$

Si X tiene la función de distribución G y densidad $g = G'$, entonces:

$$\begin{aligned} m_{j,G} &= E[X^j] = \int x^j dG(x) \\ &= \int x^j g(x) dx. \end{aligned}$$

Se puede demostrar que el j -ésimo momento de la función de distribución de Frèchet está dado por:

$$m_{j,G_{1,\alpha}} = E[X^j] = \begin{cases} \Gamma\left(1 - \frac{j}{\alpha}\right) & \text{si } \alpha > j, \\ \infty & \text{si } \alpha \leq j, \end{cases}$$

note que el j -ésimo momento de la distribución de Frèchet $G_{1,\alpha}$ será infinito si $\alpha \leq j$. En particular, la media será:

$$m_{1,G_{1,\alpha}} = E[X] = \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right).$$

Dado que la varianza se puede calcular como $\text{Var}(x) = m_2 - m_1^2$ se tendrá que:

$$\text{Var}_{G_{1,\alpha}}(x) = \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2 - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \quad \text{si } \frac{1}{\alpha} < 0.5$$

3.8.2.3 El Teorema de Fisher-Tippet

Si $F^n(b_n + a_n x)$ converge (cuando $n \rightarrow \infty$) a una distribución no degenerada¹ para algunas sucesiones de constantes a_n, b_n , (es decir, que converge a una distribución de probabilidad que no acumule toda la probabilidad en un sólo punto), entonces la distribución del máximo converge, por ejemplo, a la Gumbel o a la Frèchet o a la Weibull:

$$\left| F^n(x) - G\left(\frac{x - \mu_n}{\sigma_n}\right) \right| \rightarrow 0.$$

¹ Una distribución de probabilidad degenerada es aquella que centra toda la probabilidad en un punto.

cuando $n \rightarrow \infty$. Para $G \in \{G_0, G_1, G_2\}$ (Gumbel, Frèchet, Weibull) con parámetros μ_n y $\sigma_n > 0$.

La expresión anterior, equivale a:

$$F^n(x) \rightarrow G\left(\frac{x - \mu_n}{\sigma_n}\right).$$

De forma equivalente, la convergencia se da si y sólo si

$$n[1 - F(\mu_n + \sigma_n x)] \rightarrow -\ln(G(x)), \quad n \rightarrow \infty.$$

3.8.2.4 Estabilidad del máximo.

Se dice que una función F tiene estabilidad del máximo si existen sucesiones a_n y $b_n > 0$, tales que:

$$F^n(b_n + a_n x) = F(x).$$

En el caso particular en que la función de distribución sea una de las distribuciones **EV**, estas sucesiones tendrán una forma simple. Las funciones de valores extremos, **EV**, están caracterizadas por su máxima estabilidad.

3.8.2.5 Dominio de Atracción

Para saber cuando se cumple la condición del teorema de Fisher-Tippett es de utilidad estudiar el concepto de dominio de atracción.

Máximo dominio de atracción de la distribución de Frèchet.- La distribución de probabilidad F pertenecerá al dominio de atracción del máximo de la distribución de Frèchet si y sólo si $\bar{F}(x) = x^{-\alpha}L(x)$ para alguna función L cuya variación sea muy lenta.

Estar en el dominio de atracción quiere decir que las colas se parecen, es decir (en términos probabilísticos) que la probabilidad en las colas son muy semejantes.

Un resultado muy útil para comprobar si una distribución está en el máximo dominio de atracción, MDA, de otra es la condición de von Mises. De esta manera se pueden seleccionar un número de máximos que esten en una región donde los valores de α sean estables. La forma práctica de determinar el umbral es utilizando el software X-tremes[©].

Condición de von Mises de la distribución de Frèchet.- Sea F una distribución absolutamente continua con densidad f que satisface que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{\bar{F}(x)} = \alpha > 0,$$

entonces F estará en el $MDA(G_{1,\alpha})$ (Frèchet).

Por otro lado, existen distribuciones tales como Cauchy y Burr que están en el MDA de la distribución de Frèchet.

A continuación se muestra, en particular, que la distribución de Frèchet está en su mismo dominio de atracción. Para ello, recuerde que la Frèchet (EV1) con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ está dada por

$$G_{1,\alpha}(x) = e^{-x^{-\alpha}}, \quad x \geq 0, \alpha > 0.$$

En este caso, tomemos $F(x) = G_{1,\alpha}(x)$, es decir

$$F(x) = e^{-x^{-\alpha}} \Rightarrow \bar{F}(x) = 1 - F(x) = 1 - e^{-x^{-\alpha}}.$$

La función de densidad de probabilidad es la derivada de la función de distribución acumulada, esto es

$$\begin{aligned} \frac{dF(x)}{dx} &= \frac{de^{-x^{-\alpha}}}{dx} \\ &= \alpha e^{-x^{-\alpha}} x^{-(1+\alpha)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de densidad de probabilidad de tipo Frèchet es

$$f(x) = \alpha e^{-x^{-\alpha}} x^{-(1+\alpha)}.$$

Ahora, se utiliza la *Condición de von Mises de la distribución de Frèchet*. Esto es,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{\bar{F}(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\alpha e^{-x^{-\alpha}} x^{-(1+\alpha)}}{1 - e^{-x^{-\alpha}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha e^{-x^{-\alpha}} x^{-\alpha}}{1 - e^{-x^{-\alpha}}}. \end{aligned}$$

Para calcular el límite anterior se utilizará la regla de L'hospital, es decir se deriva tanto el numerador como el denominador y se toma el límite, esto es

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{\bar{F}(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha e^{-x^{-\alpha}} x^{-\alpha}}{1 - e^{-x^{-\alpha}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha \left[e^{-x^{-\alpha}} (-\alpha) x^{-\alpha - 1} + x^{-\alpha} e^{-x^{-\alpha}} \alpha x^{-\alpha - 1} \right]}{-\alpha e^{-x^{-\alpha}} x^{-(1 + \alpha)}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\alpha + x^{-\alpha} \right], \quad \text{si } \alpha > 0 \\
 &= \alpha.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{\bar{F}(x)} = \alpha > 0,$$

es decir la distribución de Frèchet está en su mismo dominio de atracción.

Por lo tanto, se debe tomar un número de máximos que caigan en cierto intervalo donde los valores de alfa sean estables. Para ello se puede usar un paquete estadístico como el X-tremes que permite determinar de manera sencilla dicho valor. Así como la estimación de los parámetros de la función de densidad de Frèchet.

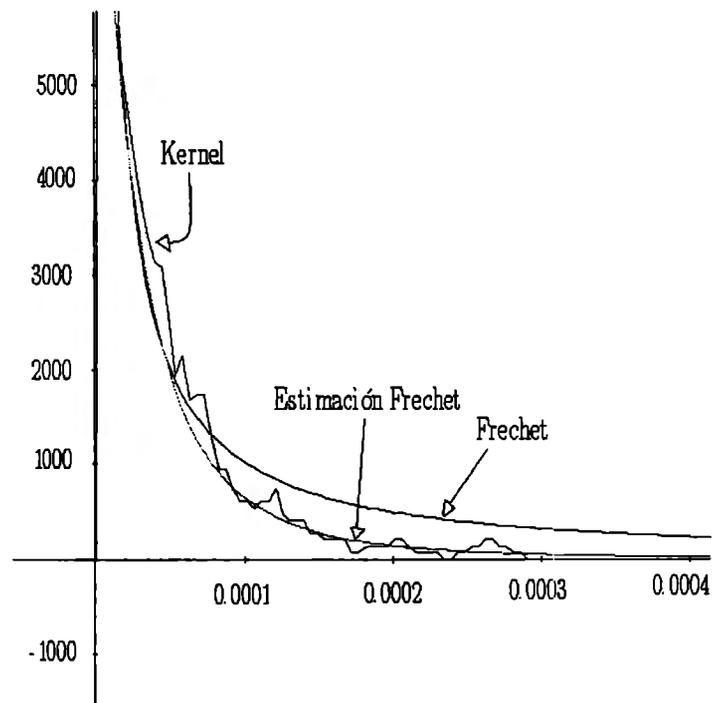
3.8.3 Estimación de la función de distribución de colas pesadas y el cálculo del VaR

Se utiliza la función de densidad Kernel la cual nos permite estimar la función de densidad de la muestra, ésta está definida como

$$g_b(x, x_i) = \frac{1}{nb} K \left(\frac{x - x_i}{b} \right),$$

donde b se denomina el ancho de banda, n el tamaño de la muestra y K la función de densidad para el Kernel. Algunas funciones utilizadas son el estimador ingenuo. Epanechnikov y segundo momento nulo. Enseguida se compara la distribución estimada obtenida con el Kernel y la distribución Frèchet. Se observa que el ajuste debe ser mejorado en las colas de la distribución en la cual se calculará el VaR del rendimiento del bono cupón cero. Por lo que se hace uso del teorema de Fisher-Tippet que asegura bajo ciertas condiciones, que la distribución en los extremos se puede ajustar o aproximar bien a distribuciones extremas

(Gumbel, Frèchet o Weibull). Estos se pueden determinar por máxima verosimilitud o bien por el estimador MDE (minimiza la distancia entre el histograma y la función de densidad de valores extremos que mejor ajusta a los datos, obteniéndose así los parámetros γ , μ y σ) de valores extremos. Se anota el número de valores extremos para determinar el porcentaje considerado de la muestra, que de haber tomado una distribución de tipo normal no le habría dado la posibilidad de ocurrencia de esos valores extremos. Al estimar los parámetros por MDE de la distribución de Frèchet se tiene que $\gamma = 0.437248$, $\mu = -2.15844 \times 10^{-5}$ y $\sigma = 1.93592 \times 10^{-5}$. A continuación se muestra la gráfica de la Frèchet, el Kernel y una estimación de la función de densidad por MDE, gráfica 3.2, que permiten obtener los parámetros de la función de distribución de las colas pesadas.



Gráfica 3.2 Estimación de la función de distribución de colas pesadas.

Se determinan los cuantiles $Q-Q$ con el objeto de comparar los datos de la muestra y los teóricos, es decir $(F^{-1}(q), \hat{F}^{-1}(q))$. El gráfico de cuantiles muestra una estimación aceptable en la cola de la distribución. Por lo tanto, la función cuantil para la distribución

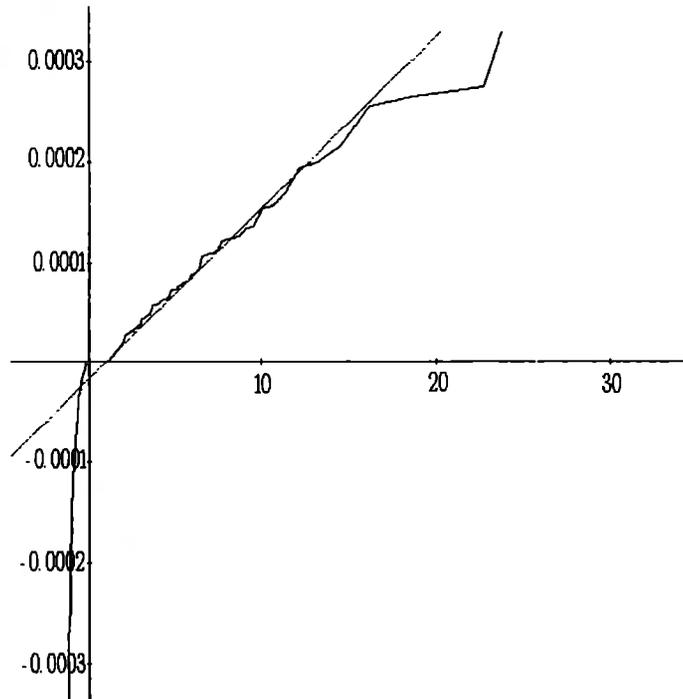
de Frèchet está dada por

$$z = G_{1,\alpha}^{-1}(q) = (-\ln(q))^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad (3.29)$$

con $\gamma = 1/\alpha$ de donde $\alpha = 2.287042077$. Cuando existen parámetros de ubicación y escala, se tiene que el valor en riesgo está dado por

$$\text{VaR}_{1-q}^{\Delta B/B} = \mu + \sigma G_{1,\alpha}^{-1}(q). \quad (3.30)$$

Cabe señalar que si la distribución utilizada tiene colas más pesadas que la real en la gráfica $Q-Q$ se podrá observar en el cuadrante superior derecho que los puntos se curvean fuertemente hacia arriba de la recta y si es menos pesada se curvearan hacia abajo, a continuación se presenta la gráfica $Q-Q$ obtenida.



Gráfica 3.3 Cuantiles $Q-Q$.

La gráfica 3.3 de cuantiles muestra una estimación aceptable en la cola de la distribución y en la que se utilizó la distribución de Frèchet siendo esta la que mejor se ajusta en comparación a las generalizadas de pareto o de eventos extremos. En el siguiente cuadro se

presenta el valor en riesgo de un bono cupón cero obtenido con teoría de valores extremos.

Valor en riesgo de un bono cupón cero (teoría de valores extremos)			
Periodo (Cete 28 días)	$-\text{VaR}_{1-q}^{\Delta B/B}$	$-\text{VaR}_{95\%}^{\Delta B/B}$	$-\text{VaR}_{99\%}^{\Delta B/B}$
03/mayo/2004- 08/03/2006	1 día:	0.0000493584	0.000123101
03/mayo/2004- 08/03/2006	10 días:	0.000202756	0.000435952

Cuadro 6. VaR utilizando valores extremos

En el cuadro 6 se presenta el VaR de un bono cupón cero en la que se utilizó teoría de valores extremos. Las ventajas que se tienen al utilizar la teoría de valores extremos y que están plasmadas en los valores obtenidos en el cuadro 6, son: Permite cuantificar el comportamiento probabilístico de pérdidas considerables pero no usuales, es decir de eventos extremos; considera distribuciones de probabilidad con colas anchas o pesadas, lo cual se puede apreciar al presentar un valor alto en la curtosis del rendimiento del bono; permite discriminar de manera simple las distribuciones de los rendimientos a solo distribuciones extremas; permite obtener las características de la distribución de los rendimientos del bono enfocado en la cola de la distribución. en este caso se determinó ser del tipo Frèchet. Por lo que se produce una mejor medida estadística del VaR. Asimismo, en esta metodología existen también sus desventajas, tales como: La distribuciones generalizadas de Pareto no logran un buen ajuste por lo que se recurre a otras distribuciones o métodos. se requiere de un mayor conocimiento y capacidad de análisis entre otros. Por lo que comparado esta teoría de valores extremos con el método de simulación histórica y el de Vasicek, aplicado al caso mexicano, se desprenden un conjunto de ventajas y desventajas de las metodologías utilizadas hasta el momento para el cálculo del VaR y que serán comparadas con los métodos de simulación Monte Carlo que se utilizan en el próximo capítulo. A continuación se presenta un cuadro en el que se sintetizan las ventajas y desventajas de las metodologías utilizadas para el calculo del VaR.

Modelo	$-\text{VaR}_{1-q}^{\Delta B/B}$	
Vasicek	V	Es rápido de calcular
	D	Tasas negativas. El VaR podría estar subestimado. Supone una distribución normal lo que impide el registro de colas gordas o pesadas, es decir no permite la existencia de eventos extremos (ajustes muy pobres en la cola de la distribución).
Simulación histórica	V	Captura todos los impactos recientes del mercado. La cantidad de datos no es muy grande. No se tiene una distribución específica de pérdidas y ganancias. Computacionalmente fácil de calcular. Se calcula el percentil (VaR).
	D	El valor observado en el tiempo $t - 1$ será muy similar al tiempo t . Replica una sola trayectoria específica del mercado.
Teoría de valores extremos	V	Cuantifica el comportamiento probabilístico de pérdidas considerables pero no usuales. Considera distribuciones de probabilidad con colas anchas o pesadas. Permite la existencia de eventos extremos. Permite discriminar de manera simple las distribuciones de los rendimientos a solo distribuciones extremas. Permite obtener las características de la distribución de los rendimientos del bono enfocado en la cola de la distribución, en particular se determinó ser del tipo Frèchet.
	D	Se utiliza un software sofisticado

Cuadro 7. Ventajas y desventajas para calcular el Valor en Riesgo, $-\text{VaR}_{1-q}^{\Delta B/B}$, de bonos cupón cero con distintas metodologías, tomando como punto de referencia simulación histórica. Note que $D \equiv$ Desventaja y $V \equiv$ Ventaja.

CAPÍTULO 4

SIMULACIONES MONTE CARLO: LOS MODELOS DE TASA CORTA DE VASICEK Y COX, INGERSOLL Y ROSS (CIR)

4.1 Simulación Monte Carlo

En este capítulo se presentan las simulaciones de la tasa corta con los modelos de Vasicek y Cox Ingersoll y Ross, con saltos de Poisson, debido a las tasas de rendimiento (eventos) de un día a otro que estuvieron por abajo del 5% y por arriba del 2% para el periodo dado, y sin saltos para analizar el impacto en el cálculo del VaR, por medio de simulación Monte Carlo. Asimismo, se calcula el precio de un bono cupón cero y el valor en riesgo de Bonos cupón cero.

4.2 Introducción

El método de Monte Carlo es básicamente similar al método de simulación histórica, excepto que los movimientos en los factores de riesgo son generados a través de alguna distribución. Es decir, permite encontrar soluciones aproximadas de problemas matemáticos, que involucran variables aleatorias, mediante la simulación de factores aleatorios.

Las bases teóricas del método se conocían desde hace mucho tiempo, sin embargo no fue sino hasta la aparición de las computadoras que éste empezó a cobrar mayor interés. En 1949, J. Von Neumann y S. Ulam escriben y publican, una introducción formal sobre el método de simulación, en el primer artículo llamado "The Montecarlo method".

El Método Monte Carlo tiene dos características importantes: i) Se plantea un algoritmo para la realización de ensayos aleatorios e independientes y se toma el promedio de los resultados de los ensayos, ii) el error es proporcional a la magnitud $\sqrt{D/N}$, donde D es una determinada constante y N es el número de ensayos. Para disminuir el error en un factor de 10 es preciso aumentar el número de ensayos, N , en 100 veces.

La eficiencia del método de simulación Monte Carlo depende en gran medida de que los números aleatorios generados posean un alto grado de aleatoriedad. Existen dos formas distintas de generar valores de variables aleatorias, es decir los llamados números aleatorios y los números seudo aleatorios.

En la generación de números aleatorios de una distribución uniforme, frecuentemente se utiliza un aparato que produce pulsos (ruidos) electrónicos. Si durante un intervalo fijo de tiempo, dt , los pulsos sobrepasan un umbral determinado un par de veces, se asocia un cero, mientras que si el número de veces es impar, se asocia un uno. Ahora, si se tienen m generadores de este tipo que funcionan paralelamente y producen ceros y unos, y se considera la proporción de unos esto produce el valor de una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo $[0,1]$. Sin embargo el método tiene dos defectos: i) es difícil comprobar la calidad de los números generados y ii) todos los cálculos en la computadora se realizan dos veces para evitar intermitencias casuales.

Cabe señalar que, sin recurrir durante los cálculos a la memoria, es imposible reproducir los mismos números aleatorios y si recurrimos a la memoria, volvemos al caso de que los números se repitan de igual manera. Por otra parte, en las computadoras no es conveniente mantener y explotar un dispositivo especial o sofisticado por lo que se emplean de manera idónea los llamados números seudo aleatorios.

Las técnicas utilizadas del método de Monte Carlo dependen de algún proceso para generar números aleatorios que imiten precisamente la aleatoriedad, de la mejor manera posible. Por ello, se han desarrollado un sin número de investigaciones teóricas con este propósito, Von Neumann J. (1951) escribió lo que se conoce como *el pecado original de la generación de números aleatorios*, la cual dice que: alguien quien considere métodos aritméticos para la producción de dígitos aleatorios está, por supuesto, en un estado de pecado.

4.3 Método de números seudoaleatorios

En la literatura se encuentran distintos métodos de números seudo aleatorios como los descritos por George Marsaglia (1984), entre los que destaca el método de generadores congruenciales lineales, los cuales están basados en la recursividad de números enteros, esto es

$$X_{i+1} = (aX_i + b) \text{ mod } m, \quad (4.1)$$

donde los enteros a, b y m son constantes. Note que la operación a realizar es:

$$\frac{aX_i + b}{m} = Z + \frac{\text{residuo}}{m}$$

donde Z es un entero. Por lo tanto,

$$X_{i+1} = \text{residuo.} \quad (4.2)$$

para $i = 1, 2, 3, \dots$. Cabe señalar, que existen en la literatura una gama muy grande de generadores de números pseudo aleatorios y que siguen una determinada distribución, como la distribución de tipo normal entre otros, y que puede ser aplicada para la valuación de un bono cupon cero.

4.4 Ventajas y desventajas del método de simulación Monte Carlo

A continuación se presenta algunas ventajas y desventajas de dicho método de simulación, vea Jaeckel, P. (2000), Crouhy M., Galai D. and Mark R. (2001) y James Jessica and N. Webber (2000). Estas son:

- i) Permite encontrar soluciones aproximadas de problemas matemáticos, que involucran variables aleatorias.
- ii) Puede realizar un conjunto pequeño de simulaciones y obtener resultados preliminares de manera rápida y puede mejorar los resultados aumentando el número de simulaciones si se considera necesario.
- iii) La distribución de las variables del modelo no tienen que ser muy precisas.
- iv) Las correlaciones pueden ser modeladas.
- v) El nivel de matemáticas requerido para simular por el método de Monte Carlo es básico y es relativamente fácil incluir funciones complejas.
- vi) Cambios en el modelo pueden ser hechos rápidamente y ser comparados con los resultados previos.
- vii) El tiempo de uso de máquina podría ser significativo para llevar a cabo la simulación y por lo tanto impactar en el costo del problema a resolver.

4.5 Precio del bono cupón cero

El precio de bono cupón cero que se coloca en t y que al vencimiento T paga una unidad monetaria está dado por

$$B(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}, \quad (4.3)$$

donde

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T f(t, s) ds. \quad (4.4)$$

Sustituyendo (4.3) en (4.4), se tiene

$$B(t, T) = e^{-\frac{1}{T-t} \int_t^T f(t, s) ds (T-t)}. \quad (4.5)$$

En forma discreta, el precio del bono es

$$B(t, T) = \exp \left(-\frac{1}{T-t} \sum_{s=t}^T r_s (T-t) \right).$$

donde r_s es la tasa corta, es decir la de menor plazo. Para calcular el precio del bono cupón cero, se utilizara la tasa de rendimiento de cetes a 28 días para el periodo 3 de mayo de 2004 al 8 de marzo de 2006.

4.6 Metodología para la simulación de la tasa corta y el cálculo del VaR

En esta sección se describe la metodología de simulación para determinar el precio de un bono cupon cero donde la dinámica de la tasa corta es guiada por el modelo de Vasicek y Cox-Ingersoll-Ross.

- 1.) Simular el comportamiento de la tasa corta. Para ello, se generan números aleatorios que siguen una, caminata aleatoria, una determinada distribución, en particular una distribución de tipo normal. La distribución normal se puede generar a partir del método Box-Muller, es decir

$$X = \sqrt{-2 \ln U_1} \cos(2\pi U_2) \quad (4.6)$$

y

$$Y = \sqrt{-2 \ln U_1} \sin(2\pi U_2). \quad (4.6a)$$

Cualquiera de las X, Y genera una distribución normal. Se considera la dinámica de la tasa corta, la cual es conducida por una ecuación diferencial estocástica como en los modelos de Vasicek y CIR. Se utiliza el valor de la tasa corta del día de hoy r_0 y se continua hasta la fecha de expiración del bono cupón cero. Esto da una realización de una trayectoria de la tasa corta.

- 2.) Para cada realización o trayectoria de la tasa corta se toma la suma de las tasas cortas simuladas y se calcula el promedio de la tasa corta para esta trayectoria.
- 3.) Se calcula el precio del bono con esta trayectoria, obteniendo así un valor B_1 .
- 4.) Repetir al menos $n = 10,000$ veces las realizaciones sobre el mismo periodo de tiempo y calcular el precio del bono para cada realización o trayectoria, es decir se obtienen B_1, B_2, \dots, B_n .
- 5.) Se calcula el promedio de los valores B_i , con $i = 1, \dots, n$, obtenidos por la simulación y de esta manera se obtiene el precio del bono cupón cero. Note que, entre mayor sea el número de simulaciones o de realizaciones, mejor será la precisión del resultado. Si se aumenta en cien veces las simulaciones, entonces aumenta un décimo de corrección.

Cabe señalar, que la precisión también depende de la calidad de los números aleatorios generados por las diferentes técnicas por lo que es recomendable hacer una prueba de aleatoriedad.

A continuación se aplica el algoritmo para calcular el precio de un bono cupón cero en la que la dinámica de la tasa corta es guiada por una ecuación diferencial estocástica de Vasicek.

4.7 Simulación del precio de un bono cupón cero con el modelo de Vasicek

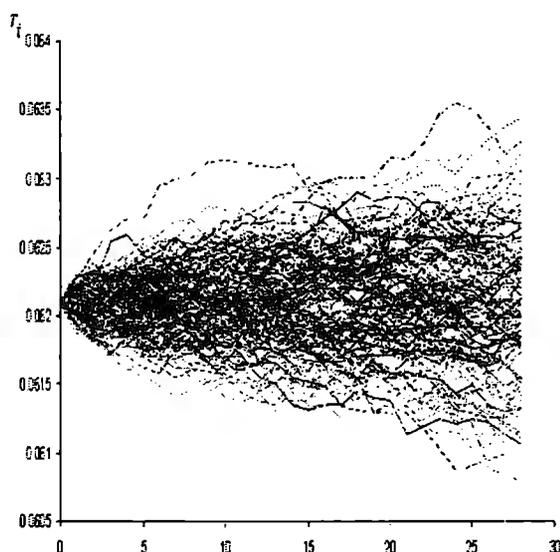
La dinámica de la tasa corta del modelo de Vasicek está dado por la ecuación (2.3) y se puede escribir en forma discreta como

$$r_{t+\Delta t} = r_t + a(b - r_t)\Delta t + \sigma W_t, \quad (4.7)$$

donde $W_t = \sqrt{\Delta t}\varepsilon_t$ y ε_t es una normal $\mathcal{N}(0, 1)$. A partir del último valor de r_t se calcula $r_{t+\Delta t}$ y se obtiene en forma recursiva el valor de $r_{t+\Delta t}$. El método es fácil de aplicar a

una ecuación diferencial estocástica y tiene un error de $O(\delta t)$. El algoritmo mencionado en la sección anterior puede implementarse en cualquier lenguaje de programación cuando el número de simulaciones es del orden de 10,000 (multiplicado por el número de factores o activos a simular), o en una hoja de excel cuando el número de simulaciones es más o menos rápido, es decir calculado en unos cuantos nanosegundos o segundos. Se necesita solamente proponer los valores de: la tasa corta de interés al día de hoy, r_0 , la volatilidad, incrementos en el tiempo y para ε_t una muestra de variables aleatorias que se distribuyan como normal estandarizada.

A continuación se presenta la gráfica de simulaciones Monte Carlo para el modelo de Vasicek. Para llevar a cabo la simulación se programó en MatLab[©]:



Gráfica 4.1 Simulación Monte Carlo de la tasa corta, del modelo de Vasicek, para valuar bonos cupón cero, cetes a 28 días.

En la gráfica 4.1 se muestran las trayectorias de la tasa corta, si se considera una de las trayectorias se observan gráficamente los diferentes valores que puede tomar la tasa corta de acuerdo al modelo de Vasicek y en la que se pueden presentar tasas negativas, lo cual es una desventaja del modelo de Vasicek. El punto inicial de la tasa corta es el último valor de la tasa corta de los datos históricos del periodo considerado.

En el siguiente cuadro se presenta el precio del bono cupón cero calculado por el método de simulación Monte Carlo, cuyas trayectorias simuladas de la tasa corta aparecen en la gráfica anterior, 4.1. En este cálculo se utilizó la tasa de rendimiento de Bonos cupón cero (Cetes) a 28 días en el periodo del 3 de mayo de 2004 al 8 de marzo de 2006¹.

Simulación de la tasa corta del modelo de Vasicek por el método de Monte Carlo		
Precio del Bono cupón cero $B(r_t, t, T) = 0.995142$		
Plazo del Bono	$T = 28$ días	$a=0.007032413$
Volatilidad	0.090579173%	$b=0.083772223$
Tasa de interés libre de riesgo sin impuesto	$r_0 = 6.021\%$	

Cuadro 8. Precio de un bono cupón cero

Valor en riesgo de un bono cupón cero simulación Monte Carlo del modelo Vasicek			
Periodo (Cete 28 días)	$-\text{VaR}_{1-q}^{\Delta B/B}$	$-\text{VaR}_{95\%}^{\Delta B/B}$	$-\text{VaR}_{99\%}^{\Delta B/B}$
03/mayo/2004-08/03/2006	1 día:	0.00287804	0.00413629
03/mayo/2004-08/03/2006	10 días:	0.00910115	0.01308010

Cuadro 9. Valor en riesgo de un bono cupón cero determinado por simulación Monte Carlo del modelo Vasicek.

El precio del Bono cupón cero corresponde a 10,000 simulaciones o trayectorias de la tasa corta y que aparecen sólo 200 de éstas en la gráfica 4.1., como se ha mencionado. En el cuadro 9 se observa que el VaR es mayor al valor calculado con el modelo de Vasicek y cuyos resultados se presentaron en los cuadros 3 y 9, por lo que se presenta al final del capítulo 4 un cuadro con las ventajas y desventajas de las metodologías utilizadas para el caso mexicano.

¹ Fuente: Valmer.

4.8 Dinámica de la tasa corta y saltos Poisson

En esta sección se incorporan saltos de Poisson cuya intensidad del salto se calculan considerando las tasas de rendimiento (eventos) de un día a otro que estuvieron por abajo del 5% y por arriba del 2% para el periodo dado. La presencia de alta curtosis indica la posibilidad de incorporar un modelo con saltos, Sanjiv R. Das (1998), de Poisson y que permitan tener un modelo que describa estadísticamente mejor el comportamiento del mercado.

Por lo que ahora, se supone que el número de saltos, movimientos extremos y repentinos, en la tasa corta, por unidad de tiempo, siguen un proceso de Poisson N_t con intensidad λ , de tal manera que

$$\mathbb{P}^{(N)}\{\text{un salto unitario durante } dt\} = \mathbb{P}^{(N)}\{dN_t = 1\} = \lambda dt + o(dt), \quad (4.8)$$

mientras que

$$\mathbb{P}^{(N)}\{\text{ningún salto en } dt\} = \mathbb{P}^{(N)}\{dN_t = 0\} = 1 - \lambda dt + o(dt), \quad (4.9)$$

donde $o(dt)/dt \rightarrow 0$ cuando $dt \rightarrow 0$. Así,

$$\mathbb{E}^{(N)}[dN_t] = \text{Var}^{(N)}[dN_t] = \lambda dt.$$

El número inicial de saltos se supone igual a cero, es decir, $N_0 = 0$.

Considere ahora un movimiento Browniano $(Z_t)_{t \geq 0}$ definido en un espacio de probabilidad fijo con su filtración aumentada $(\Omega^{(Z)}, \mathcal{F}^{(Z)}, (\mathcal{F}_t^{(Z)})_{t \geq 0}, \mathbb{P}^{(Z)})$. Se supone que la tasa corta sigue un proceso de la forma:

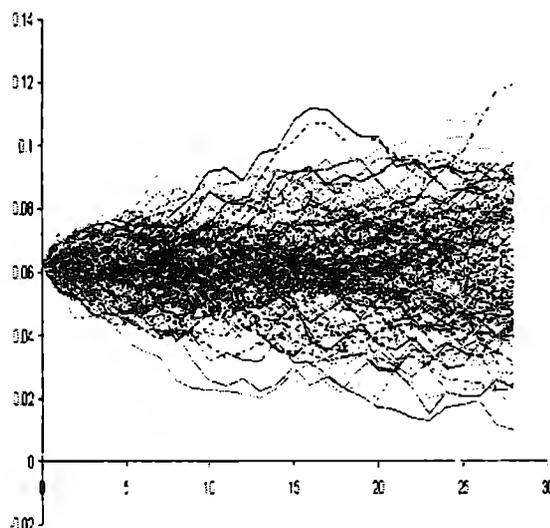
$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t + \eta dN_t, \quad (4.10)$$

donde a , b , y σ son constantes positivas, σ es la volatilidad instantánea de la tasa corta, η es el tamaño medio esperado de un salto, de Poisson, en la tasa corta y $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ junto con su filtración aumentada $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, entonces se establece una de las clases más importantes de modelos de tasa corta con reversión a la media y parámetros constantes. El proceso

W_t se supone independiente de N_t . En lo que sigue, σ , λ y η son constantes positivas. Se supone que dW_t es una variable aleatoria distribuida normalmente con $E[dW_t] = 0$ y $\text{Var}[dW_t] = dt$. Los procesos estocásticos dW_t y dN_t se suponen no correlacionados, es decir,

$$\text{Cov}(dW_t, dq_t) = 0.$$

A continuación se presenta la gráfica de simulaciones Monte Carlo para el modelo de Vasicek:



Gráfica 4.2 Simulación de la tasa corta del modelo de Vasicek por el método de Monte Carlo, para valuar bonos cupón cero (con saltos de Poisson).

En la gráfica 4.2 se muestran las trayectorias de la tasa corta en la que se han incorporado saltos de Poisson. Claramente se puede observar que la intensidad del salto no ha sido suficiente para que se den fuertes saltos en las trayectorias de la tasa corta. En el siguiente cuadro se presenta el precio del bono cupón cero calculado por el método de simulación Monte Carlo. En este cálculo se utilizó la tasa de rendimiento de Bonos cupón cero (Cetes) a 28 días, diaria, en el periodo del 3 de mayo de 2004 al 8 de marzo de 2006¹.

¹ Fuente: Valmer.

Simulación de la tasa corta del modelo de Vasicek con saltos de Poisson, por el método de Monte Carlo		
Precio del Bono cupón cero $B(r_t, t, T) = 0.995288$		
Plazo del Bono	$T = 28$ días	$a=0.007032413$
Volatilidad	0.090579173%	$b=0.083772223$
Tasa de interés libre de riesgo sin impuesto	$r_0 = 6.021\%$	$\lambda = 0.002092$ $\eta = 0.002236$

Cuadro 10. Precio del Bono cupón cero determinado por simulación Monte Carlo y bajo Vasicek con saltos de Poisson.

Al comparar el valor del bono cupón cero de los cuadros 8 y 10 se tiene un incremento de 0.015% al utilizar saltos de Poisson. Mientras que el VaR del bono son de magnitudes equivalentes, cuadros 9 y 11.

Valor en riesgo de un bono cupón cero simulación Monte Carlo del modelo Vasicek con saltos de Poisson.			
Periodo (Cete 28 días)	$-\text{VaR}_{1-q}^{\Delta B/B}$	$-\text{VaR}_{95\%}^{\Delta B/B}$	$-\text{VaR}_{99\%}^{\Delta B/B}$
03/mayo/2004-08/03/2006	1 día:	0.00228989	0.00369042
03/mayo/2004-08/03/2006	10 días:	0.00724129	0.01167012

Cuadro 11. Valor en riesgo de un bono cupón cero determinado por simulación Monte Carlo del modelo Vasicek con saltos de Poisson.

Los valores de λ y η fueron determinados de los rendimientos de las tasas de CETES a 28 días cuyo valor de un día a otro supero un incremento en la tasa por arriba del 2% y por abajo del 5%, que se considero importante. En este caso se presentaron 3 eventos (tasas) que cayeron en este intervalo de un conjunto de 478 observaciones para el periodo del 3 de mayo de 2004 al 8 de marzo de 2006 y del cual se tomo un promedio en dicha tasa y tomando como punto inicial r_0 del último dato observado.

4.9 Simulación del precio de un bono cupón cero con el modelo de CIR

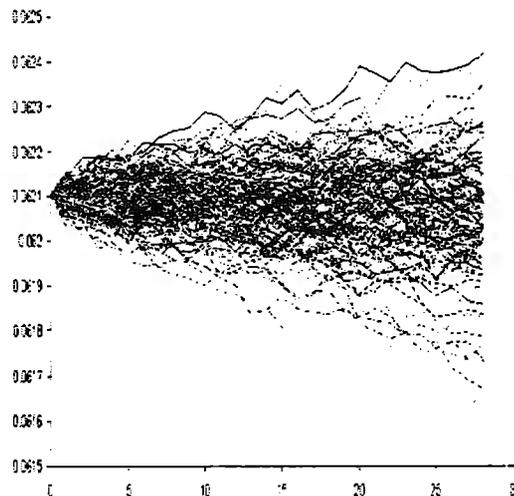
La dinámica de la tasa corta del modelo de CIR está dado por la ecuación (2.19) y se

puede escribir en forma discreta¹ como

$$r_{t+\Delta t} = r_t + a(b - r_t)\Delta t + \sigma\sqrt{r_t}W_t, \quad (4.11)$$

donde $W_t = \sqrt{\Delta t}\varepsilon_t$ y ε_t es una normal $\mathcal{N}(0, 1)$ y $r_t \sim \chi^2(n, \delta)$, donde n representa los grados de libertad y δ el parámetro de no centralidad. A partir del último valor de r_t se calcula $r_{t+\Delta t}$ y se obtiene en forma recursiva el valor de $r_{t+\Delta t}$. El método es fácil de aplicar a una ecuación diferencial estocástica y tiene un error de $O(\delta t)$. Se necesita solamente conocer los valores de: la tasa corta de interés al día de hoy, r_0 , la volatilidad, incrementos en el tiempo y para ε_t una muestra de variables aleatorias que se distribuyan como normal estandarizada, r_t puede ser calculado a partir de la distribución $\chi^2(n, \delta)$ a un nivel de significancia α .

A continuación se presenta la gráfica de simulaciones Monte Carlo para el modelo de CIR:



Gráfica 4.3 Simulación Monte Carlo con el modelo CIR.

En el siguiente cuadro se presenta el precio del bono cupón cero calculado por el método de simulación Monte Carlo, cuyas trayectorias simuladas de la tasa corta aparecen en las

¹ Vea: Jessica James y Webber (2000).

gráfica anterior, 4.3. En este cálculo se utilizó la tasa de rendimiento de Bonos cupón cero (Cetes) a 28 días en el periodo de 3 de mayo de 2004 al 8 de marzo de 2006¹.

Simulación de la tasa corta del modelo CIR, por el método de Monte Carlo y sin saltos		
Precio del Bono cupón cero $B(r_t, t, T) = 0.995183$		
Plazo del Bono	$T = 28$ días	$a=0.005900$
Volatilidad	0.076242%	$b=0.08800$
Tasa de interés libre de riesgo sin impuesto	$r_0 = 6.021\%$	

Cuadro 12. Precio del Bono cupón cero

Valor en riesgo de un bono cupón cero simulación Monte Carlo del modelo CIR.			
Periodo (Cete 28 días)	$-\text{VaR}_{1-q}^{\Delta B/B}$	$-\text{VaR}_{95\%}^{\Delta B/B}$	$-\text{VaR}_{99\%}^{\Delta B/B}$
03/mayo/2004- 08/03/2006	1 día:	0.00001337	0.00002047
03/mayo/2004- 08/03/2006	10 días:	0.00004229	0.00006475

Cuadro 13. Valor en riesgo de un bono cupón cero
determinado por simulación Monte Carlo del modelo CIR con Poisson.

El precio del Bono cupón cero corresponde a 10,000 simulaciones o trayectorias de la tasa corta y que aparece sólo 200 de éstas en la gráfica 4.3.

4.10 Dinámica de la tasa corta y saltos Poisson, CIR

Ahora, se supone que el número de saltos, movimientos extremos y repentinos, en la tasa corta, por unidad de tiempo, siguen un proceso de Poisson N_t con intensidad λ , de tal manera que la tasa corta sigue un proceso de la forma:

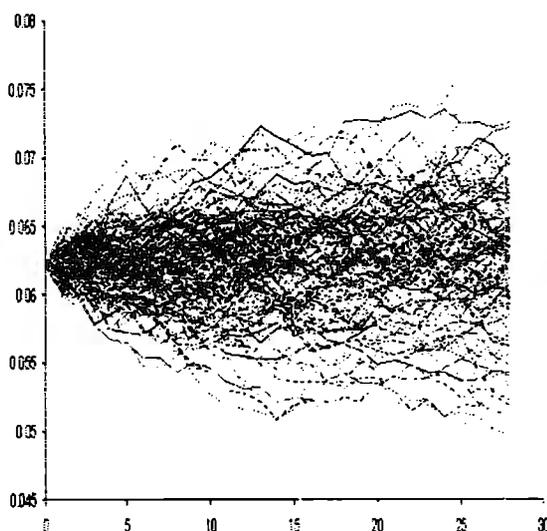
$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t + \eta dN_t. \quad (4.11)$$

donde a , b , y σ son constantes positivas, σ es la volatilidad instantánea de la tasa corta, η es el tamaño medio esperado de un salto, de Poisson, en la tasa corta y $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es

¹ Fuente: VALMER.

un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ junto con su filtración aumentada $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, entonces se establece una de las clases más importantes de modelos de tasa corta con reversión a la media y parámetros constantes. El proceso W_t se supone independiente de N_t . Como antes, σ , λ y η son constantes positivas. Se supone que dW_t es una variable aleatoria distribuida normalmente con $E[dW_t] = 0$ y $\text{Var}[dW_t] = dt$. Los procesos estocásticos dW_t y dN_t se suponen no correlacionados, es decir,

$$\text{Cov}(dW_t, dq_t) = 0.$$



Gráfica 4.4 Simulación Monte Carlo con el modelo CIR.

Las trayectorias de la tasa corta por simulación Monte Carlo con el modelo CIR y con saltos de Poisson aparecen en la gráfica 4.4. En el cuadro 15 se observa que el VaR calculado con con el modelo CIR y con saltos de Poisson y comparado con teoría de valores extremos para un nivel de confianza del 95% y a diez días revelan valores con una diferencia de 1.3%. Por lo que se presentan dos cuadros al final del capítulo en la que estan los resultados de

las distintas metodologías para el caso mexicano.

Simulación Monte Carlo del modelo CIR con Poisson		
Precio del Bono cupón cero $B(r_t, t, T) = 0.995186$		
Plazo del Bono	$T = 28$ días	$a=0.005900$
Volatilidad	0.0076242%	$b=0.008800$
Tasa de interés libre de riesgo sin impuesto	$r_0 = 6.021\%$	$\lambda = 0.002092$ $\eta = 0.002236$

Cuadro 14. Precio del Bono cupón cero
determinado por simulación Monte Carlo del modelo CIR.

Valor en riesgo de un bono cupón cero simulación Monte Carlo del modelo CIR con Poisson.			
Periodo (Cete 28 días)	$-\text{VaR}_{1-q}^{\Delta B/B}$	$-\text{VaR}_{95\%}^{\Delta B/B}$	$-\text{VaR}_{99\%}^{\Delta B/B}$
03/mayo/2004- 08/03/2006	1 día:	0.00006328	0.00028248
03/mayo/2004- 08/03/2006	10 días:	0.00020012	0.00089327

Cuadro 15. Valor en riesgo de un bono cupón cero
determinado por simulación Monte Carlo del modelo CIR con Poisson.

4.11 Resumen de resultados del valor en riesgo de un bono cupón cero con distintas metodologías

En esta sección se presenta un resumen de resultados del valor en riesgo de un bono cupón cero con distintas metodologías.

Valor en riesgo de un bono cupón cero, Cete 28 días. 03/mayo/2004-08/03/2006 (con distintas metodologías)			
Método	$-\text{VaR}_{1-q}^{\Delta B/B}$	$-\text{VaR}_{95\%}^{\Delta B/B}$	$-\text{VaR}_{99\%}^{\Delta B/B}$
Vasicek (de la ecuación 3.28)	1 día:	0.00000186	0.00000262
	10 días:	0.00000596	0.00000836
CIR (sin ecuación)			
Simulación histórica	1 día:	0.00008781	0.00021458
	10 días:	0.00027769	0.00067856
Con Teoría de Valores Extremos	1 día:	0.0000493584	0.000123101
	10 días:	0.000202756	0.000435952
Simulación Monte Carlo del modelo Vasicek	1 día:	0.00287804	0.00413629
	10 días:	0.00910115	0.01308010
Simulación Monte Carlo del modelo Vasicek con saltos de Poisson.	1 día:	0.00228989	0.00369042
	10 días:	0.00724129	0.01167012
Simulación Monte Carlo del modelo CIR	1 día:	0.00001337	0.00002047
	10 días:	0.00004229	0.00006475
Simulación Monte Carlo del modelo CIR con saltos de Poisson.	1 día:	0.00006328	0.00028248
	10 días:	0.00020012	0.00089327

Cuadro 16. Resumen del Valor en Riesgo de un Bono cupón cero con distintas metodologías.

Si suponemos un lote de 100,000 Bonos cupón cero que representa una inversión de

un millón de pesos, entonces el cuadro está dado por:

Valor en riesgo: Bono cupón cero, Cete 28 días. 100,000 Cetes 03/mayo/2004-08/03/2006 (con distintas metodologías)			
Método	$-\text{VaR}_{1-q}^{\Delta B/B}$	$-\text{VaR}_{95\%}^{\Delta B/B}$	$-\text{VaR}_{99\%}^{\Delta B/B}$
		\$	\$
Vasicek (de la ecuación 3.28)	1 día:	1.86	2.62
	10 días:	5.96	8.36
CIR (sin ecuación)			
Simulación histórica	1 día:	87.81	214.58
	10 días:	277.69	678.56
Con Teoría de Valores Extremos	1 día:	49.3584	123.101
	10 días:	202.756	435.952
Simulación Monte Carlo del modelo Vasicek	1 día:	2878.04	4136.29
	10 días:	9101.15	13080.10
Simulación Monte Carlo del modelo Vasicek con saltos de Poisson.	1 día:	2289.89	3690.42
	10 días:	7241.29	11670.12
Simulación Monte Carlo del modelo CIR	1 día:	13.37	20.47
	10 días:	42.29	64.75
Simulación Monte Carlo del modelo CIR con saltos de Poisson.	1 día:	63.28	282.48
	10 días:	200.12	893.27

Cuadro 17. Resumen del Valor en Riesgo de 100,000 cetes a 28 días con distintas metodologías.

Simulación Monte Carlo bajo el modelo de			
		Vasicek	CIR
Sin saltos	V	Es muy flexible y fácilmente se incorpora la dinámica de cualquier proceso estocástico junto con observaciones históricas. Permite generar más trayectorias del comportamiento del mercado.	Al igual que en el modelo de simulación Monte Carlo bajo el modelo de Vasicek. No se presentan tasas negativas.
	D	Al aumentar el número de trayectorias simuladas es más lento el cálculo de la tasa corta. La tasa corta puede ser negativa. Distribución normal lo que impide el registro de colas gordas o pesadas.	Al aumentar el número de simulaciones es más lento el cálculo de la tasa corta.
Con saltos	V	Se incorporan saltos de Poisson de acuerdo a la intensidad del salto obtenida por información histórica, en periodos de volatilidad moderada.	Se incorporan saltos de Poisson de acuerdo a la intensidad del salto obtenida por información histórica, en periodos de volatilidad moderada.
	D	Al aumentar el número de simulaciones es más lento el cálculo de la tasa corta. La tasa corta puede ser negativa. Distribución normal lo que impide el registro de colas gordas o pesadas.	Al aumentar el número de simulaciones es más lento el cálculo de la tasa corta.

Cuadro 18. Ventajas y desventajas para calcular el Valor en Riesgo, $-\text{VaR}_{1-q}^{\Delta B/B}$, de bonos cupón cero a través de simulación Monte Carlo para los modelos de Vasicek y CIR. Note que $D \equiv$ Desventaja y $V \equiv$ Ventaja.

Bajo las condiciones del mercado mexicano, en el que se presenta determinada estabilidad, es factible utilizar el modelo CIR. Sin embargo, si se presentan cambios importantes en la volatilidad es posible y se recomienda utilizar simulación Monte Carlo bajo el modelo CIR con saltos de Poisson debido que al presentar una alta curtosis en la función de densidad es factible utilizar la inclusión de saltos en el modelo, permitiendo llevar a cabo un mejor estudio del comportamiento del mercado mexicano, cabe destacar que la intensidad del salto podría impactar en las trayectorias de la tasa corta y por lo tanto en el cálculo del VaR y como segundo método para llevar a cabo el cálculo del VaR es la teoría de valores extremos, que incorpora las colas gordas o pesadas de la distribución. En este caso, al calcular el valor en riesgo del bono, con saltos y sin saltos en la dinámica de la tasa corta, no se perciben o aprecian fuertes cambios en el valor del VaR, en el periodo considerado. El poder llevar a cabo un estudio con distintas metodologías para describir en términos estadísticos el comportamiento del mercado mexicano, entre las que destacan el VaR de un bono cupón cero con datos reales del mercado contribuye a tener un mayor conocimiento de este mercado con herramientas más sofisticadas, y que a diferencia de otros mercados maduros como el de Estados Unidos de América y mercados Europeos, éste es un mercado en desarrollo.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo de investigación se calculó el “Valor en Riesgo”, (VaR), de un bono cupón cero usando distintas metodologías con datos del mercado Mexicano. La tasa corta es conducida por una ecuación diferencial estocástica tanto por el modelo de Vasicek así como por el modelo de Cox, Ingersoll y Ross. La estimación de los parámetros se calculó por mínimos cuadrados ordinarios (MCO) para el modelo de Vasicek y para el CIR por el método generalizado de momentos así como por MCO.

La tasa corta en el modelo de Vasicek sigue una distribución de tipo normal, lo que permitió obtener una ecuación analítica en forma cerrada del valor en riesgo del rendimiento del bono cupón cero y que resultó fácil de calcular a un nivel de confianza del 95% y 99%. Sin embargo, tiene el inconveniente de que la tasa corta puede ser negativa. Asimismo, el ajuste en las colas de la distribución podría resultar ser muy pobre.

El cálculo del VaR de un bono cupón cero por simulación histórica capturó los impactos recientes del mercado a un nivel de confianza del 95% y 99% y no se aplicó distribución alguna a la tasa corta. El método sólo replicó una trayectoria específica del mercado, por lo que existe una dependencia sobre una ventana histórica para inferir movimientos en el factor de riesgo, es decir la tasa corta, esto conduce a un VaR pobre. Sin embargo, tiene la ventaja de que se calcula de manera sencilla, rápida y nos proporciona un primer acercamiento al VaR.

Asimismo, se calculó el VaR utilizando teoría de valores extremos, en éste la estimación de la función de distribución de colas pesadas con parámetros γ , μ y σ de valores extremos resultó ser de tipo Frèchet. Es decir, se discriminó de manera sencilla las distribuciones de los rendimientos del bono a sólo distribuciones extremas y por lo tanto enfocado en la cola de la distribución. Se calcularon los cuantiles $Q-Q$ y se compararon los datos de la muestra y los teóricos, es decir $(F^{-1}(q), \hat{F}^{-1}(q))$. El gráfico de cuantiles mostró una estimación aceptable en la cola de la distribución. Por lo tanto, al determinar la función cuantil para la distribución de Frèchet se obtuvo el valor en riesgo de un bono cupón cero a un nivel de confianza del 95% y 99%.

Por otro lado, dado que la dinámica de la tasa corta es conducida bajo el modelo CIR resulta que no existe una solución analítica en forma cerrada del Valor en Riesgo del bono. Por lo que se resolvió el problema mediante simulación Monte Carlo. Bajo esta dinámica

de la tasa corta, y sin saltos de Poisson se obtuvo el VaR de manera sencilla; la desventaja de que al incrementar el número de simulaciones de manera considerable el cálculo del VaR empieza a resultar más lento. Cabe destacar que mejorar el cálculo en un decimal implica aumentar el número de simulaciones en 100 veces.

Asimismo, se calculó el VaR por simulación Monte Carlo bajo una dinámica de la tasa corta del modelo de Vasicek sin saltos de Poisson. El método de simulación Monte Carlo es flexible y de manera fácil se incorpora cualquier proceso estocástico. Sin embargo, en el modelo de Vasicek se presenta el inconveniente de tener trayectorias negativas debido a que se supone que la tasa corta sigue una distribución de tipo normal y, además, no permite el registro de colas gordas o pesadas de la distribución.

Por otra parte, se consideró importante el poder incorporar pequeños saltos en la tasa corta, en periodos de volatilidad moderada, que pudieran impactar en el precio del bono, por lo que se calculó la intensidad del salto a partir de datos históricos. Al calcular el valor en riesgo del bono, con saltos y sin saltos en la dinámica de la tasa corta, no se perciben o aprecian fuertes cambios en el valor del VaR, en el periodo considerado. La intensidad del salto es un factor importante en la simulación de la tasa debido a que puede impactar fuertemente en las trayectorias simuladas y por ende en el valor en riesgo del bono. Al observar las trayectorias simuladas, se puede percibir de manera inmediata que al incluir el valor calculado de la intensidad del salto prácticamente no se aprecian movimientos importantes en dichas trayectorias.

Bajo las condiciones del mercado mexicano, en el que se presenta determinada estabilidad, es factible utilizar el modelo CIR. Sin embargo, si se presentan cambios importantes en la volatilidad es posible y se recomienda utilizar simulación Monte Carlo bajo el modelo CIR con saltos de Poisson y como segundo método teoría de valores extremos, que incorpora las colas gordas o pesadas de la distribución.

A continuación se presentan dos cuadros comparativos que describen las ventajas y desventajas de manera precisa para calcular el Valor en Riesgo de bonos cupón cero con cada una de las metodologías, tomando como punto de referencia el método de simulación histórica.

Finalmente, resulta recomendable analizar otros modelos para realizar un análisis exhaustivo en la valuación en riesgo de bonos cupón cero. Cabe señalar que se podría

extender esta investigación en la que se utilice el modelo CIR con varios factores. En particular realizar estimaciones del modelo CIR con tres factores aplicado al caso mexicano. El modelo de tres factores es una extensión del modelo de dos factores desarrollado por Longstaff y Schwartz (1992), en el cual los dos factores utilizados son la tasa corta y la volatilidad de la tasa de interés, siendo éste un análisis alternativo al de Brennan y Schwartz (1979) en el cual los dos factores de riesgo son la tasa corta y la tasa de largo plazo. Por lo que si la tasa corta, la tasa de largo plazo y la volatilidad de la tasa corta impactan en la estructura de plazos de tasas de interés, entonces se aplicaría el modelo de tres factores para un mercado en desarrollo como lo es el caso mexicano y continuar en esta línea de investigación. Esto último se deja para posteriores investigaciones que pudieran profundizar en el estudio de instrumentos financieros del mercado mexicano de valores.

Modelo	$-\text{VaR}_{1-q}^{\Delta B/B}$	
Vasicek	V	Es rápido de calcular
	D	Tasas negativas. El VaR podría estar subestimado. Supone una distribución normal lo que impide el registro de colas gordas o pesadas, es decir no permite la existencia de eventos extremos (ajustes muy pobres en la cola de la distribución).
Simulación histórica	V	Captura todos los impactos recientes del mercado. La cantidad de datos no es muy grande. No se tiene una distribución específica de pérdidas y ganancias. Computacionalmente fácil de calcular. Se calcula el percentil (VaR).
	D	El valor observado en el tiempo $t - 1$ será muy similar al tiempo t . Replica una sola trayectoria específica del mercado.
Teoría de valores extremos	V	Cuantifica el comportamiento probabilístico de pérdidas considerables pero no usuales. Considera distribuciones de probabilidad con colas anchas o pesadas. Permite la existencia de eventos extremos. Permite discriminar de manera simple las distribuciones de los rendimientos a solo distribuciones extremas. Permite obtener las características de la distribución de los rendimientos del bono enfocado en la cola de la distribución, en particular se determinó ser del tipo Frèchet.
	D	Se utiliza un software sofisticado

Cuadro 19. Ventajas y desventajas para calcular el Valor en Riesgo, $-\text{VaR}_{1-q}^{\Delta B/B}$, de bonos cupón cero con distintas metodologías, tomando como punto de referencia simulación histórica. Note que $D \equiv$ Desventaja y $V \equiv$ Ventaja.

Simulación Monte Carlo bajo el modelo de			
		Vasicek	CIR
Sin saltos	V	Es muy flexible y fácilmente se incorpora la dinámica de cualquier proceso estocástico junto con observaciones históricas. Permite generar más trayectorias del comportamiento del mercado.	Al igual que en el modelo de simulación Monte Carlo bajo el modelo de Vasicek. No se presentan tasas negativas.
	D	Al aumentar el número de trayectorias simuladas es más lento el cálculo de la tasa corta. La tasa corta puede ser negativa. Distribución normal lo que impide el registro de colas gordas o pesadas.	Al aumentar el número de simulaciones es más lento el cálculo de la tasa corta.
Con saltos	V	Se incorporan saltos de Poisson de acuerdo a la intensidad del salto obtenida por información histórica, en periodos de volatilidad moderada.	Se incorporan saltos de Poisson de acuerdo a la intensidad del salto obtenida por información histórica, en periodos de volatilidad moderada.
	D	Al aumentar el número de simulaciones es más lento el cálculo de la tasa corta. La tasa corta puede ser negativa. Distribución normal lo que impide el registro de colas gordas o pesadas.	Al aumentar el número de simulaciones es más lento el cálculo de la tasa corta.

Cuadro 20. Ventajas y desventajas para calcular el Valor en Riesgo, $-\text{VaR}_{1-q}^{\Delta B/B}$, de bonos cupón cero a través de simulación Monte Carlo para los modelos de Vasicek y CIR. Note que D \equiv Desventaja y V \equiv Ventaja.

APÉNDICES

A.1 Función de Bessel

A continuación se presenta un desarrollo para obtener la llamada función de Bessel (vea Churchill R. et al, 1978) cuya aplicación está plasmada en modelos de la tasa corta de interés.

Para ello, se tiene que la función exponencial expresada en series de Taylor, está dada por

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Se utilizara la función exponencial para obtener la función de Bessel de primera clase de orden n . Para ello, considere la expansión de $e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}$ en series de Taylor. Esto es,

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} &= e^{\frac{x}{2}t} e^{-\frac{x}{2t}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2}t)^k}{k!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\frac{-x}{2}\frac{1}{t})^s}{s!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^k t^k}{k!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (\frac{x}{2})^s (\frac{1}{t})^s}{s!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (\frac{x}{2})^{k+s} t^{k-s}}{k! s!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{k! s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+s} t^{k-s}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Sea $s = k - n$, $n \geq 0$ y $s = k - n \geq 0$ de donde $k \geq n$, entonces la ecuación anterior se puede escribir como

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^{k-n}}{k!(k-n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} t^n.$$

Sea $k - n = p$ de donde $2k - n = 2p + n$, por lo que

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(p+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n} = J_n(x).$$

Por lo tanto, $J_n(x)$ es la función de Bessel de primera clase, de orden n y está dada por

$$J_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(p+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}. \tag{A.2}$$

A.1.1 Función modificada de Bessel de primera clase y de orden n

Si se considera la función de Bessel de primera clase, de orden n y se cambia x por ix , donde i es un número complejo, y se supone que $i^2 = -1$, $i^4 = 1$, entonces

$$\begin{aligned}
 J_n(ix) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(p+n)!} \left(\frac{ix}{2}\right)^{2p+n} \\
 &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(i^2)^p \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n} i^{2p} i^n}{p!(p+n)!} \\
 &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(i^4)^p \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n} i^n}{p!(p+n)!},
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

de donde

$$i^{-n} J_n(ix) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}}{p!(p+n)!}. \tag{A.4}$$

Sea $I_n(x) = i^{-n} J_n(ix)$. Por lo tanto, la función modificada de Bessel de primera clase y de orden n está dada por

$$I_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}}{p!(p+n)!}. \tag{A.5}$$

A.2 Modelos relevantes de un sólo factor de riesgo

Cuadro A.2.1 Resumen de casos particulares de la ecuación (2.2).

Modelo	Parámetros	ν, a	Proceso
Merton (1970)	$\alpha = 0 \quad \beta = 0$	$\mu + 1$ $a = 1$	$dr_t = \mu dt + \sigma dW_t$ μ, σ son ctes.
Vasicek (1977)	$\alpha = 1 \quad \beta = 0$	b, a	$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$ a, b, σ son ctes.
Dothan (1978)	$\beta = 1$	$a = 0$	$dr_t = \sigma r_t dW_t$ σ cte.
CIR (1985)	$\alpha = 1 \quad \beta = \frac{1}{2}$	b, a	$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t$ a, b, σ son ctes.
Ho y Lee (1986)	$\alpha = 0 \quad \beta = 0$	$2 \cdot h_t$	$dr_t = h_t dt + \sigma dW_t$ σ es constante
Longstaff (1989)	$\alpha = \frac{1}{2} \quad \beta = \frac{1}{2}$	b, a	$dr_t = a(b - \sqrt{r_t})dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t$ a, b, σ son ctes.
Hull y White (1990)	$\alpha = 1 \quad \beta = 0$	b_t, a	$dr_t = a(b_t - r_t)dt + \sigma_t dW_t$ b_t, σ_t son función del tiempo

Ecuación diferencial estocástica de la tasa corta

$$dr_t = a(\nu - r_t^\alpha)dt + \sigma r_t^\beta dW_t,$$

donde a, ν, σ son constantes positivas, y r_t la tasa corta.

A.3. Ecuación diferencial parcial del comportamiento de un bono con tasa corta conducida por el modelo de Vasicek

En esta sección se obtiene de manera precisa y clara la ecuación diferencial parcial del bono cupón cero donde la tasa corta es guiada por una ecuación diferencial estocástica, en particular con reversión a la media a través de un proceso de Orstein-Uhlenbeck (1930).

Se supone un mercado en donde los inversionistas compran y emiten promesas del pago de una unidad monetaria en el futuro, libres de riesgo crédito, que se compran a descuento. Estas promesas serán llamadas bonos cupón cero. Sea $B(t, T)$ el precio en el tiempo t de un bono que se compra a descuento con vencimiento en el tiempo T , $T > t$, y que paga una unidad monetaria al vencimiento, es decir $B(T, T) = 1$. El rendimiento al vencimiento o estructura de plazos o curva de rendimiento, en el tiempo t de un bono con vencimiento T , está dada por

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln B(t, T), \quad T > t. \quad (\text{A.3.1})$$

La tasa de interés instantánea (tasa de interés spot), o bien, tasa corta a la que los agentes pueden prestar o pedir prestado está dada por

$$r(t) = R(t, t) = \lim_{T \rightarrow t} R(t, T). \quad (\text{A.3.2})$$

Ahora, un crédito de monto M_t a la tasa spot r_t , aumentará su valor, durante el instante dt , en

$$dM_t = M_t r_t dt. \quad (\text{A.3.3})$$

Esta ecuación es válida en t y r_t es conocida en t . Sin embargo, después de t el nivel del valor de la tasa corta es incierto. En otras palabras $r(t)$ es un proceso estocástico, sujeto a dos requerimientos. Primero, r_t es una función continua del tiempo y segundo, se supone que r_t sigue un proceso Markoviano. Bajo este último supuesto, el comportamiento futuro de la tasa corta dado su valor actual, es independiente del pasado. Es decir, la distribución de r_{t+u} dado r_s , $s \leq u$ sólo depende de la información disponible en el tiempo u , es decir, sólo depende del valor de r_u .

Los procesos de difusión pueden ser descritos a través de una ecuación diferencial estocástica de la forma:

$$dr_t = \alpha(r_t, t)dt + \gamma(r_t, t)dW_t, \quad (\text{A.3.4})$$

donde $\{W_t\}_{0 \leq t \leq T}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con una filtración $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. Las funciones $\alpha(r, t)$ y $\gamma^2(r, t)$ son conocidas como la tendencia y la varianza instantaneas, respectivamente, del proceso r_t , la tasa corta.

El precio de bono cupón cero que se coloca en t y que al vencimiento T paga una unidad monetaria se denotará mediante $B = B(r_t, t; T)$, o en forma más simple como $B = (t, T)$.

A partir de la ecuación (A.3.4) y al considerar que $B = B(r_t, t; T)$, se sigue del lema de Itô que la ecuación diferencial estocástica del bono cupón cero es

$$dB = B\mu(r_t, t; T)dt + B\sigma(r_t, t; T)dW_t, \quad (\text{A.3.5})$$

donde

$$\mu(r_t, t; T) = \frac{1}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial t} + \alpha \frac{\partial B}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \gamma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} \right) \quad (\text{A.3.6})$$

y

$$\sigma(r_t, t; T) = \frac{\gamma}{B} \frac{\partial B}{\partial r_t}. \quad (\text{A.3.7})$$

Considere ahora un inversionista que al tiempo t emite una cantidad w_1 de bonos con fecha de vencimiento T_1 y precio B_1 y simultáneamente compra una cantidad w_2 de bonos con fecha de vencimiento T_2 y precio B_2 . Asimismo, considere el valor del portafolio $\Pi_t = w_2 B_2 - w_1 B_1$. Si se denota $W_1 = w_1 B_1$ y $W_2 = w_2 B_2$ el lema de Itô conduce a que el cambio en el valor del portafolio está dado por

$$d\Pi_t = (W_2\mu(r_t, t; T_2) - W_1\mu(r_t, t; T_1)) dt + (W_2\sigma(r_t, t; T_2) - W_1\sigma(r_t, t; T_1)) dW_t. \quad (\text{A.3.8})$$

Suponga que las cantidades W_1, W_2 se seleccionan de tal forma que

$$W_1 = \frac{M_t \sigma(r_t, t; T_2)}{\sigma(r_t, t; T_1) - \sigma(r_t, t; T_2)},$$

y

$$W_2 = \frac{M_t \sigma(r_t, t; T_1)}{\sigma(r_t, t; T_1) - \sigma(r_t, t; T_2)}.$$

Así, el segundo término en la ecuación (A.3.8), que modela el riesgo de mercado, es cero.

Por lo tanto, la ecuación (A.3.8) se puede escribir como

$$d\Pi_t = M_t \left(\frac{\mu(r_t, t; T_2)\sigma(r_t, t; T_1) - \mu(r_t, t; T_1)\sigma(r_t, t; T_2)}{\sigma(r_t, t; T_1) - \sigma(r_t, t; T_2)} \right) dt. \quad (\text{A.3.9})$$

De esta manera, el portafolio es libre de riesgo. Si los mercados están en equilibrio, el portafolio debería producir el mismo rendimiento que el que se obtiene por hacer un préstamo a la tasa r_t . Si el rendimiento del portafolio fuera mayor, el portafolio puede ser comprado con fondos prestados a la tasa r_t , en caso contrario el portafolio es vendido y las ganancias son prestadas, lo que produce oportunidades de arbitraje libres de riesgo.

Note que al comparar las ecuaciones (A.3.3) y (A.3.9), se tiene que:

$$\frac{\mu(r_t, t; T_2)\sigma(r_t, t; T_1) - \mu(r_t, t; T_1)\sigma(r_t, t; T_2)}{\sigma(r_t, t; T_1) - \sigma(r_t, t; T_2)} = r_t,$$

ó

$$\frac{\mu(r_t, t; T_1) - r_t}{\sigma(r_t, t; T_1)} = \frac{\mu(r_t, t; T_2) - r_t}{\sigma(r_t, t; T_2)}. \quad (\text{A.3.10})$$

Observe que los cocientes en cada lado de la ecuación (A.3.10) son iguales para fechas de vencimiento arbitrarias T_1 y T_2 , de esta forma la razón $(\mu(r_t, t; T) - r_t)/\sigma(r_t, t; T)$ es independiente de T . Sea $\lambda(r_t, t)$ esta razón, es decir

$$\lambda(r_t, t) = \frac{\mu(r_t, t; T) - r_t}{\sigma(r_t, t; T)}, \quad T \geq t. \quad (\text{A.3.11})$$

La cantidad $\lambda(r_t, t)$ es llamada el precio de riesgo mercado, es decir, el valor que el mercado le asigna al riesgo, o bien, la cantidad $\lambda(r_t, t)$ también puede interpretarse como el rendimiento adicional, por la exposición al riesgo, por unidad de riesgo. De la ecuación (A.3.11) se tiene $\mu(r_t, t; T) - r_t = \lambda(r_t, t)\sigma(r_t, t; T)$. para toda t y para todo plazo T .

Si se sustituyen la ecuaciones (A.3.6) y (A.3.7) en la ecuación anterior, o en la ecuación (A.3.11), se tiene que la ecuación diferencial parcial del bono cupón cero está dada por

$$\frac{\partial B}{\partial t} + [\alpha(r_t, t) + \lambda(r_t, t)\gamma(r_t, t)] \frac{\partial B}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\gamma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} - r_t B = 0 \quad t \leq T, \quad (\text{A.3.12})$$

con la condición final dada por $B(r_t, T, T) = 1$. Esta ecuación permite valuar bonos descontados en un mercado caracterizado por los supuestos ya establecido en la sección 2.2.2. Una vez que la forma de la dinámica estocástica de la tasa spot r_t , expresada en la ecuación (A.3.4), ha sido determinada y el precio de riesgo mercado, $\lambda(r_t, t)$, ha sido especificado, el precio del bono asociado a la dinámica de r_t es obtenido como solución de la ecuación (A.3.10).

Ahora, si la ecuación diferencial estocástica sigue un proceso de Orstein-Uhlenbeck (1930), dado por

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t,$$

y si se consideran las ecuaciones (A.3.5), (A.3.6) y (A.3.7) con $\alpha(r_t, t) = a(b - r_t)$ y $\gamma = \sigma$, se tiene que el cambio en el precio del bono está dado por

$$dB = \left(\frac{\partial B}{\partial t} + a(b - r_t) \frac{\partial B}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial B}{\partial r_t} dW_t. \quad (\text{A.3.13})$$

Si los mercados están en equilibrio y se utiliza de manera equivalente a la ecuación (A.3.3) para un bono junto con (A.3.13), esto conduce a

$$Br dt = \left(\frac{\partial B}{\partial t} + a(b - r_t) \frac{\partial B}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial B}{\partial r_t} dW_t.$$

La ecuación anterior se puede escribir como

$$\left(\frac{\partial B}{\partial t} + a(b - r_t) \frac{\partial B}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} - Br \right) dt = \sigma \frac{\partial B}{\partial r_t} dW_t.$$

Si a la ecuación anterior se le calcula el valor esperado y se considera que $E[dW_t] = 0$, esto conduce a la ecuación diferencial parcial del comportamiento de un bono con tasa corta conducida por el modelo de Vasicek:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + a(b - r_t) \frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0,$$

donde $B(T, T) = 1$.

BIBLIOGRAFÍA

- Ahn, D, J. Boudoukh, M. Richardson, and R. F. Whitelaw (1999). Optimal risk management using options. *The Journal of Finance*, 54(1), pp. 359-375.
- Artzner, P., F. Delbaen, J. Eber, and D. Heath (1999). Coherent Measures of risk, *Mathematical Finance*, 9 (3), pp. 203-228
- Bakshi, G., C. Cao, and Z. Chen (1997). Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models, *The Journal of Finance*, vol 52, no. 5, pp. 2003-2049
- Ball, C. and A. Roma (1994). Stochastic Volatility Option Pricing, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 29, No. 4, pp. 589-607.
- Bates, D. (1990). The Crash of 87: Was it expected? The evidence from Options Markets, *The Journal of Finance*, vol 46, no. 3, pp 1009-1044.
- Bates, D. (1996). Jumps and Stochastic Volatility: exchange rate processes Implicit in Deutsche Mark Options, *Review of Financial Studies*, vol 9, no. 1, pp. 69-107.
- Benninga S. y Wiener Z. (1998). Value-at-Risk (VaR), *Mathematica in Education and Research*, vol 7, No. 4, pp 1-8.
- Bera, A. and J. Jarque (1981). Efficient test for Normality, Heteroscedasticity. and serial independence of regression residuals, *Economics Letters*, vol. 7, pp. 313-318.
- Black, F. and M. Scholes (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, vol. 81, pp. 637-654.
- Black, F. and M. Scholes (1973). The Valuation of Option Contracts and a Test of Market Efficiency, *The Journal of Finance*, Vol. 27, No.2, *Papers and Proceedings of the thirtieth Annual Meeting of the American Finance Association*, New Orleans, Louisiana, December 27-29, pp. 399-417
- Brennan M. J. and S. Schwartz (1979), A continuous time approach to the pricing of bonds, *Journal of Banking and Finance*, 3, pp. 133-155.
- Brigo Damiano and Mercurio Fabio (2001) *Interest Rate Models Theory and Practice*. Springer.
- Brown Stephen J. and Dybvig Philip H. (Jul., 1986). The Empirical Implications of the Cox, Ingersoll, Ross Theory of the Term Structure of Interest Rates: Discussion. *Journal of Finance*, 41(3), pp. 617-630.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross (1985a). An Intertemporal General Equilibrium

- Model of Asset Prices. *Econometrica*, 53(2), pp. 363-384
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross (March, 1985b). A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 53(2), pp. 385-408.
- Crouhy M., Galai D. and Mark R. (2001). Risk MANAGEMENT. Mc Graw Hill.
- Churchill Ruel V. and Brown James W. (1978). Fourier Series and Boundary Value Problems. Third ed., Mc Graw Hill.
- Dothan, Uri L. (1978) On the term structure of interest rates. *Journal of Financial Economics* 6, pp. 59-69.
- Dufie, D. and J. Pan. (1997). An overview of value at risk. *Journal of Derivatives*, 4(3), pp. 7-49.
- Evans G. Blackledge J. Yardley P. Analytical Methods for Partial Differential Equations. Springer.
- Embrechts, P., C. Klüppelberg, and T. Mikosch (1999). Modelling extremal events for insurance and finance. Springer.
- Fernández Viviana (2005), Risk management under extreme events, *International Review of Financial Analysis*, 14, 113-148.
- Goldberg, D. (1999). Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning. Addison Wesley.
- Greene, W. (1997). Econometric Analysis, 3a ed., Prentice Hall.
- Handscob, D. (1965). Methods of Numerical Approximation, Pergamon Press.
- Ho, T. and S. B. Lee (1986), Term Structure Movements and Pricing of Interest Rate Claims, *Journal of Finance*, 41, pp. 1011-1029.
- Hull, J. and A. White (1996), Pricing Interest-Rate-Derivative Securities, *Review of Financial Studies*, 3, pp. 573-592.
- Ferson E. (1986). The Empirical Implications of the Cox, Ingersoll, Ross Theory of the Term Structure of Interest Rates: Discussion. *Journal of Finance*, 41(3), pp. 630-632.
- Jaekel, P. (2000). Monte Carlo methods in Finance, Wiley Finance.
- Janke Wolfhard (2002). Pseudo Random Numbers: Generation and Quality Checks, Quantum Simulations of Complex Many-Body Systems: From Theory to Algorithms, *Lecture Notes*, 10, pp. 447-458.
- James Jessica and N. Webber (2000). Interest Rate Modelling. John Wiley & Sons, LTD.

- Johnson, N. (2003). *Financial Market Complexity*, Oxford University Press.
- Johnston, J. and J. DiNardo (1997). *Econometric Methods*, Mc Graw Hill.
- J. P. Morgan Bank (1995). *RiskMetrics Technical Manual*. New York.
- Jorion, P. (2001). *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. 2nd ed., McGraw-Hill.
- Jorion, P. (2003). *Value at Risk: Financial Risk Manager, handbook* . 2nd ed., Wiley Finance, John Wiley & Sons, Inc.
- Kijima Masaaki (2003). *Stochastic Processes with applications to Finance*. CHAPMAN & HALL/CRC, A CRC Press Company.
- Knuth, Kijima Masaki (2003). *Stochastic Processes with Applications to Finance*, Chapman & Hall/CRC, ACRC Press Company.
- Knuth, D (1999). *The Art of Computer Programming*, 2.
- Levy, H., M. Levy, and S. Solomon (2000). *Microscopic simulation of financial markets: from investor behavior to market phenomena*, Academic Press.
- Longstaff F. A. and E. S. Schwartz (1979), Interest Rate volatility and the term structure: A two-factor general equilibrium model, *Journal of Finance*, 47, pp. 1259-1282.
- Macaulay, F. R. (1939). *Some theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yield, and Stock Prices in the United States since 1856*. Columbia University Press. New York.
- Marsaglia G. (1984). The Exact-Approximation for Generating Random Variables in a Computer. 79(385), pp. 218-221.
- Merton, R. (1992). *Continuous-Time Finance*, Blackwell.
- Musiela, M. and M. Rutkowski (1998). *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer.
- Reiss R. D., Thomas M. (2001). *Statistical Analysis of Extreme Values: with applications to Insurance, Finance, Hydrology and Others Fields*, 2nd ed., Birkhauser Verlag.
- Ross M. Sheldon(1985). *Introduction to Probability Models*. Academic Press, Inc. Third Edition.
- Ross M. Sheldon(1999). *Simulación*. Pearson, Prentice Hall, segunda edición.
- Nowman K. B. (1997). Gaussian Estimation of Single-Factor Continuous Time Models of the Term Structure of Interest Rates. *The Journal of Finance*, LII(4).

- Sanjiv R. Das (1998, july). Poisson-Gaussian processes and the bond markets. NBER WORKING PAPER SERIES.
- Styblo Beder Tanya (1996). VAR: Seductive but Dangerous, *Financial Analyst Journal*, September/October, pp. 12-24.
- Uhlenbeck, G. E. & Ornstein, L. S. (1930). On the theory of the Brownian motion. *Phys. Rev.*, 36, 823-841.
- Vasicek, O. A.(1977). An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, 5, pp. 177-188.
- Venegas-Martínez, F. (2001). Una guía completa para economistas en la valuación de opciones. *Gaceta de Economía*, ITAM, Año 6, No. 12, pp. 155-212.
- Venegas-Martínez, F. (2004). Administración coherente de riesgos con futuros del Mexder. Trabajo en la Categoría de Investigación ganador del Segundo Lugar del Premio Nacional MexDer 2003, MexDer, Mercado Mexicano de Derivados, S. A. de C. V. Publicado en la dirección electrónica www.mexder.com/MEX/premio.html/
- Vlaar Peter J. G. (2000). Value at Risk models for Dutch bond portfolios. *Journal of BANKING & FINANCE*, vol. 24, pp. 1131-1154.
- Von Neuman J and Ulam S. (1949). The Monte Carlo method. *J. American Statistical Association*, 44(247), pp. 335-341.
- Whittaker, E. T. and Robinson, G. (1967). The Newton-Raphson Method. The Calculus of Observations: A Treatise on Numerical Mathematics, 4th ed. New York: Dover, pp. 84-87.
- Wilmott, P. (1998). Derivatives. The Theory and Practice of Financial Engineering. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Wilmott, P. (2000). Paul Wilmott on Quantitative Finance, John Wiley & Sons LTD.