

Campus Ciudad de México



**Evolución Temporal de la Prima de Riesgo de Mercado: el
Caso de México, 2005**

Doctorado en Ciencias Financieras

Tesis Presentada por:

Carlos Alberto Pulido Hernández

Asesor:

Dr. Francisco Venegas Martínez

Enero 2007

Resumen.

En el panorama de la Economía Financiera la Prima de Riesgo de Mercado (PRM) es un indicador comúnmente usado para medir la relación rendimiento-riesgo de un activo financiero. Este trabajo tiene el objetivo de examinar la dinámica de la PRM durante el año 2005 para el caso de cinco empresas mexicanas cuyas acciones se encuentran listadas en el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) y quienes son representativas de los sectores económicos incluidos en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV). Para tal efecto, se propone un modelo básico que describe la trayectoria temporal de la PRM. El resultado final del modelo es una ecuación en diferencias de primer orden con coeficientes constantes que depende, entre otros factores, de un elemento macroeconómico, el crecimiento económico, y de un elemento microeconómico, la estabilidad de la industria a la cual pertenece la empresa estudiada. Dependiendo de la dominancia de alguno de los dos elementos, la PRM convergerá o divergirá en un modo cíclico. Con el fin de verificar los resultados de la ecuación para cada empresa mexicana considerada, se construyen series de tiempo de su PRM, y se modela su media y varianza con procesos ARMA (p,q) y GARCH (m,n) apropiados. Adicionalmente, se dan recomendaciones de política relacionadas con el nivel de bienestar que pueden alcanzar los inversionistas mexicanos. Finalmente, se ofrecen las conclusiones.

Índice.

1. Introducción.....	5
2. Revisión de la Literatura.....	10
2.1. Factores que Determinan la PRM.....	10
2.2. Evolución Temporal Histórica de la PRM.....	12
3. Modelo Teórico.....	15
3.1. La PRM como Función de Elementos Financieros.....	15
3.2. Preferencias de los Inversionistas.....	16
3.3. Determinación del Rendimiento de Mercado de Equilibrio.....	18
3.4. La Evolución Temporal de la PRM.....	23
4. Evidencia Empírica.....	27
4.1. Descripción de la Información.....	27
4.2. Estacionariedad de la PRM por Sector.....	29
4.3. Modelos ARMA (p, q).....	33
4.4. Efecto <i>Clustering</i> en la PRM.....	37
4.5. Modelos GARCH (m, n).....	38
4.6. Efecto <i>Leverage</i> en la PRM.....	38
5. Recomendación de Política.....	41
5.1. Posibilidades de los Inversionistas.....	41
5.2. El Equilibrio.....	42
5.3. Cambio en el Equilibrio ante un Incremento en la PRM.....	43
5.4. Un Ejemplo Algebraico.....	44
5.5. Un Ejemplo Numérico.....	46
6. Conclusiones.....	49
7. Bibliografía.....	50

Figuras, Gráficas y Tablas.

Figura 1. Curvas de Indiferencia entre Rendimiento y Riesgo.....	17
Figura 2. Equilibrio en el Rendimiento del Mercado.....	19
Figura 3. Equilibrio en el Rendimiento del Mercado ante un Aumento en a_0	20
Figura 4. Equilibrio en el Rendimiento del Mercado ante un Aumento en a_2	20
Figura 5. Oscilación Uniforme en el Rendimiento del Mercado.....	21
Figura 6. Oscilación Divergente en el Rendimiento de Mercado.....	22
Figura 7. Oscilación Convergente en el Rendimiento de Mercado.....	22
Figura 8. Dinámica de la PRM cuando $a_0=a_2$. Oscilación uniforme.....	25
Figura 9. Dinámica de la PRM cuando $a_0>a_2$. Oscilación divergente.....	25
Figura 10. Dinámica de la PRM cuando $a_0<a_2$. Oscilación convergente.....	26
Tabla 1. Información Relevante.....	27
Gráficas 1a-1e. Series de Tiempo de la PRM para las Acciones Analizadas.....	30
Tabla 2. Algunas Estadísticas Descriptivas de la PRM.....	31
Gráficas 2a-2e. Histogramas de la PRM para las Acciones Analizadas.....	32
Tabla 3. Prueba ADF para Verificar Estacionariedad en el Nivel de la PRM.....	33
Gráfica 3a-3e. FAC y FACP de la PRM para las Acciones Analizadas.....	34
Tabla 4. Procesos ARMA (p, q) para Modelar la Media de la PRM.....	35
Tabla 5. Modelos ARMA (p, q) para Estimar la Media de la PRM.....	36
Tabla 6. Sensibilidad de la PRM ante Rezagos y Choques Aleatorios.....	36
Tabla 7. Existencia de Efectos ARCH en la PRM para las cinco acciones.....	37
Figura 11. Relación entre el Tipo de Noticia y la Volatilidad de la PRM.....	39
Tabla 8. Modelos GARCH (m, n) y TARARCH (m, n) Estimados.....	40
Figura 12. Relación rendimiento-riesgo que ofrece el mercado.....	41
Figura 13. Determinación de los Niveles Óptimos de Riesgo y Rendimiento.....	42
Figura 14. Determinación de los Niveles Óptimos de Riesgo y Rendimiento.....	43
Figura 15. Cambio Permanente en la PRM.....	46
Figura 16. Cambio en los Niveles de Riesgo, Rendimiento y Utilidad ante un Aumento en la PRM.....	47
Tabla 9. PRM y Utilidad de los Inversionistas.....	48
Tabla 10. PRM y Riesgo de los Inversionistas.....	48

1. Introducción.

La literatura financiera contemporánea considera que existe una relación directa entre el rendimiento de un activo financiero y su riesgo. En particular, dos ecuaciones conocidas que describen dicho tipo de relación son el Modelo de Valuación de Activos de Capital (*Capital Assets Pricing Model*, CAPM) y el Modelo de Valuación por Arbitraje (*Arbitrage Pricing Theory*, APT). De acuerdo al CAPM, la relación es directa y lineal. Específicamente, el rendimiento esperado de un activo i R_i es igual a la suma de la tasa libre de riesgo R_f y la prima de riesgo de mercado (a partir de ahora PRM) λ , la cual se encuentra ponderada por un parámetro de riesgo β . Formalmente,

$$R_i = R_f + \beta\lambda, \quad (1)$$

donde $\beta = COV(R_i, R_m)/V(R_m)$ y R_m es el rendimiento del mercado accionario. Tradicionalmente, la literatura considera que si $\beta > 1$, entonces el activo financiero es altamente riesgoso porque su rendimiento tiene mayor volatilidad que el rendimiento de mercado. Lo contrario sucede si $\beta < 1$. Si se resuelve (1) para λ , resulta:

$$\lambda = \frac{R_i - R_f}{\beta} \quad (2)$$

La ecuación (2) indica que la PRM es igual al exceso de rendimiento (entre el activo riesgoso y el activo libre de riesgo) por unidad de riesgo, medido en este caso por β . Observe que si el activo es excesivamente riesgoso ($\beta \rightarrow \infty$), entonces la PRM es muy pequeña ($\lambda \rightarrow 0$), independientemente de la magnitud del exceso de rendimiento. Esto es importante porque expresa que un exceso de rendimiento significativo es insuficiente para determinar si un inversionista debe comprar el activo. También se requiere conocer su riesgo.

El CAPM asume una relación directa lineal entre el rendimiento de un activo y su riesgo. Sin embargo, este modelo no considera cuáles son los factores económicos que determinan el riesgo y, con ello, el rendimiento. El modelo APT asume que existen dos tipos de riesgo: el riesgo de mercado (o sistemático) m y el riesgo idiosincrático (o no sistemático) ε . Mientras que el riesgo de mercado depende de factores económicos fundamentales y, por ello, afecta a la mayoría de activos financieros, el riesgo idiosincrático es función de acontecimientos que sólo son importantes para la empresa analizada. En particular, los factores económicos típicamente contemplados son el Producto Interno Bruto, la tasa de inflación y la tasa de interés. Formalmente, la ecuación APT es

$$R_i = E(R_i) + \sum_{j=1}^k \beta_j F_j + \varepsilon_i, \quad (3)$$

donde $E(R_i)$ es el rendimiento esperado del activo i , F_j es la diferencia entre el valor realizado y el valor esperado del factor económico j , donde $j = 1, \dots, k$; esto es, el valor inesperado del factor. Finalmente, β_j es la sensibilidad del rendimiento de i con respecto al choque inesperado en j . Observe que es posible hacer un paralelismo entre las ecuaciones CAPM y APT. Específicamente, mientras que el rendimiento libre de riesgo es análogo al rendimiento esperado de i , la PRM sería función de los factores económicos y de las innovaciones.

A partir de lo mencionado líneas arriba, se concluye que las ecuaciones CAPM y APT ofrecen dos señales sobre la PRM: (1) la PRM se define como el exceso de rendimiento estandarizado; es decir, por unidad de riesgo, y (2) la PRM depende de factores económicos inesperados que dependen de factores económicos generales y particulares.

El conocimiento del valor de la dinámica de la PRM es fundamental para los inversionistas en activos financieros porque, dependiendo del valor de la PRM es cada momento, los inversionistas ajustarán sus niveles de rendimiento y riesgo que maximicen su utilidad. Entonces, cualquier política de gobierno que incentive o deprima la PRM modifica, al mismo tiempo, el nivel de bienestar de un grupo económico.

Este trabajo tiene como objetivo investigar la evolución temporal de la PRM, durante el 2005, para el caso de algunas empresas representativas de las 35 acciones que cotizan en el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) de acuerdo al sector económico al que pertenecen. Se asume que el conocimiento de la dinámica de sólo estas empresas es suficiente para inferir correctamente el comportamiento que tiene la PRM de cada sector económico. Este supuesto es consistente si se toma en cuenta que las empresas analizadas son líderes con respecto a su bursatilidad.

La investigación es importante por dos motivos. En primer lugar, existe literatura financiera referente a los factores que determinan la PRM; sin embargo, son escasos los trabajos que tratan sobre la dinámica de la PRM. En este sentido, este trabajo ofrece una alternativa para explicar una situación poco tratada. En segundo lugar, prácticamente no existen trabajos significativos que hablen de los factores que determinan la PRM en México ni de su evolución temporal.

Un intento aislado es el de Venegas [1999]. En éste, Venegas obtiene una ecuación de la PRM similar a (2) por medio del Lema de Itô aplicado al precio de dos futuros y usando un portafolio libre de riesgo. Si bien la PRM es función explícita del tiempo y de la tasa de interés libre de riesgo, el trabajo no expresa los fundamentales económicos que determinan ni la tasa ni la dinámica.

El trabajo se divide en cuatro partes, las cuales contienen los elementos básicos de un trabajo de investigación. En la primera parte se hace una revisión de la literatura que: (1) describe los principales factores económicos que determinan la PRM, y (2) ofrece

incipiente evidencia internacional sobre la evolución temporal que ha tenido la PRM en las últimas décadas.

En la segunda parte se presenta un modelo teórico básico de equilibrio en el mercado de acciones a partir del cual se desprende la ecuación de movimiento de la PRM como función directa de un factor macroeconómico -el crecimiento económico- y como función inversa de un factor microeconómico -la estabilidad de la industria a la cual pertenece la empresa cuyo activo se analiza. Dependiendo del factor que domine, la PRM tendrá una trayectoria temporal creciente, decreciente o nula. En este sentido, este trabajo se encuentra vinculado con el llamado “ciclo del crédito” mencionado en Kiyotaki y Moore [1995]. De acuerdo a éste, a mayor crecimiento económico, son mejores las perspectivas económicas de las empresas y, con un mayor valor de su colateral, encuentran facilidades crediticias que pueden traducirse en una menor tasa de interés activa, mayor inversión de la empresa, y perspectivas incrementadas. Es esta situación repetida la que da lugar al ciclo.

La relación entre el modelo de Kiyotaki y Moore y el presente proviene del tipo de efecto que tenga la tasa de interés activa sobre la PRM. En particular, si la tasa de interés activa se encontrara directamente relacionada con la tasa de interés de un activo libre de riesgo, entonces la PRM disminuiría; en cambio, si la tasa de interés activa se encontrara directamente asociada con el rendimiento del activo riesgoso, la PRM aumentaría. Análogamente, ésta tesis sostiene que la presencia de crecimiento económico se traduce en empresas más valiosas, por lo que el precio y rendimiento de sus acciones es mayor con lo que aumenta la PRM. Del otro lado, mayor bienestar económico aumenta la estabilidad de las empresas, por lo que disminuye el riesgo de sus acciones y su rendimiento, y con ello la PRM.

En la tercera parte se verifica el modelo teórico para el caso de México durante el año 2006. Específicamente, se construyen las series de tiempo de la PRM sobre las acciones seleccionadas de los sectores: comunicaciones y transportes, construcción, servicios, transformación, y varios. Posteriormente, se investiga si estas series presentan cuatro

características típicas que poseen los rendimientos financieros: (1) estacionariedad en media, (2) distribución empírica de probabilidad sesgada a la izquierda y leptocúrtica, (3) efecto *leverage*, y (4) efecto *clustering*. Finalmente, se modela la media y la varianza condicional de la PRM de cada activo con procesos ARMA (p, q) y GARCH (m, n) adecuados. Los resultados obtenidos de estos procesos y de la prueba de estacionariedad serán indicadores robustos de la dinámica que tendrá la PRM de cierta acción.

Por último, en la cuarta parte se hacen recomendaciones de política. Para tal efecto, se plantea un problema de maximización de utilidad del inversionista, sujeto a la ecuación CAPM. La solución de este problema permite concluir que, dependiendo del tipo, magnitud y duración del cambio que presente la PRM, el nivel de utilidad del agente aumentará o disminuirá en forma temporal o permanente. Por tanto, conocer la dinámica de la PRM será una cuestión importante para saber lo que sucederá con el bienestar de los inversionistas de una economía.

2. Revisión de la Literatura.

Este apartado se divide en dos secciones. En la sección 2.1. se hace una breve descripción de la literatura que menciona los factores macroeconómicos y microeconómicos más importantes en la determinación de la PRM. En la sección 2.2. se mencionan algunos trabajos significativos que determinan valores históricos de la PRM durante los últimos 100 años.

2.1. Factores que Determinan la PRM.

Una idea debatida intensamente en la literatura financiera se refiere a los factores económicos que determinan la PRM. Mediante el uso de modelos teóricos y econométricos, aplicados principalmente a Estados Unidos, diferentes autores han concluido que la PRM depende de elementos microeconómicos y macroeconómicos. Entre los elementos microeconómicos se encuentran la teoría de la incertidumbre, la organización industrial, y la teoría de capital humano. Hansen, Sargent y Tallarini [1999] muestran que el grado de aversión a cometer errores de optimización por parte de los consumidores de activos financieros (consumidores-inversionistas) afecta los precios de mercado de los activos. De este modo, un error promedio de $x\%$ incrementa la PRM en $x\%/100$. Por otra parte, Lintner [1972] concluye que, si existen mercados financieros perfectos, entonces la PRM depende inversamente del tamaño de los mercados cuando se cumple que el consumidor-inversionista tiene aversión constante al riesgo y el tamaño de los mercados se mide como el número de consumidores o como el número total de activos. Por último, Landskroner [1977] dice que, en caso que el agente posea tanto activos comerciables como capital humano (un activo no comerciable), entonces la PRM será función de características socioeconómicas tales como el tipo de trabajo e industria en el que se desempeña el consumidor accionista. De este modo, el trabajo y la industria con mayor PRM son, respectivamente, los *managers* y la construcción. En tanto, el trabajo y la industria con menor PRM son los autoempleados y el comercio.

Entre los factores macroeconómicos que determinan la PRM se encuentran el consumo (Backus, Gregory y Telmer [1993], Bekaert [1996], Hodrick [1989] y Balsal et al [1995],

y Basak y Cuoco [1990]), el ciclo económico y el tipo de cambio. Por ejemplo, Basak y Cuoco consideran que un mayor rendimiento del activo libre de riesgo reduce tanto el consumo (porque los agentes prefieren ahorrar) como la PRM (por el modo en que éste se encuentra definido). Por tanto, existe una relación directa entre consumo y la PRM. Asimismo, Litzenberger y Budd [1972] ofrecen un modelo en el que cada consumidor-inversionista posee una función de utilidad que sólo depende de la riqueza y concluyen que si la función de utilidad es logarítmica, entonces la PRM no depende del PIB; sin embargo, si la función de utilidad es exponencial negativa o cuadrática, entonces la PRM será pro cíclica. Finalmente, Bansal [1997] sugiere que existe una relación entre la PRM y la tasa de depreciación esperada del tipo de cambio. Específicamente, la relación será directa cuando la PRM tenga signo negativo (en cuyo caso se cumple la Paridad Descubierta de las Tasas de Interés), y viceversa. Finalmente, es de particular interés el reciente trabajo de Cogley y Sargent [2005], el cual se detalla a continuación.

Los autores plantean un modelo de cadenas de Markov que describe la evolución temporal del consumo. Conforme transcurre el tiempo y el consumo crece, se desvanece la idea pesimista de los agentes sobre la posibilidad de futura inestabilidad económica. La inestabilidad se encuentra asociada con la PRM. Así, mientras que la PRM toma valores significativos en la transición al estado estacionario, en el largo plazo y con expectativas racionales de los individuos, la PRM es prácticamente igual a cero.

Cogley y Sargent realizan simulaciones sobre la evolución temporal de la PRM. Sus resultados indican que la PRM de transición es muy pequeña: de 0.01 en el inicio de la simulación a 0.008 en el final. En cambio, la PRM de expectativas racionales es muy alta. Presenta valores iniciales en el intervalo (0.4, 1) y, posteriormente, tiene una convergencia lenta: aún después de 70 años, es cercana a 0.185 y, por tanto, mayor que la PRM de transición.

El análisis de simulación se complementa con la realización de diferentes estimaciones de la PRM al caso de Estados Unidos durante el período 1872-2002 y para períodos dentro

de éste. En particular, se tiene que para el período 1872-2002 la PRM fue aproximadamente 0.2364. Si se divide este período en los subperíodos antes y después de la Gran Depresión, 1872-1928 y 1929-2002, en el primero la PRM fue de 0.1765, mientras que en el segundo fue de 0.2754. Es aquí donde se manifiesta que, dado el pesimismo ocasionado por la Depresión, los agentes fueron más aversos al riesgo, indicado por su mayor PRM. Si, a su vez, se divide el período post Depresión en los subperíodos 1929-1965 y 1966-2002, resulta que los valores de la PRM fueron, respectivamente 0.3162 y 0.2266. Los autores racionalizan que, dado que el pesimismo disminuyó en el resto del siglo, los inversionistas reportan un menor valor de la PRM.

Finalmente, con respecto a la sensibilidad de la PRM al crecimiento económico, los autores expresan que la PRM de transición es baja tanto en expansiones como en contracciones, y varía poco entre los dos estados. En cambio, la PRM de expectativas racionales tiene mayor variación, es sustancialmente más alta en contracciones y cae más lento en una contracción que en una expansión. Dicha lentitud resulta del hecho de que el agente aprende más lento sobre las probabilidades de transición del estado contractivo el cual se observa menos frecuentemente.

2.2. Evolución Temporal Histórica de la PRM.

La cuestión del estudio de la dinámica de la PRM ha sido dejada de lado por la literatura. Entre los pocos trabajos referentes a este tema se encuentran Friend y Blume [1975], Schilbred [1973], y Mehra y Prescott [1985]. Friend y Blume ofrecieron una de las primeras aproximaciones para calcular la evolución de la prima de mercado del riesgo. Usando datos de Estados Unidos, calcularon la PRM para todas las décadas del período 1902-1971. Sus resultados muestran que la PRM no es constante; en particular, sus valores se encuentran en un intervalo con valor mínimo cercano a 0 y valor máximo próximo a 6. Este intervalo es bastante amplio si se toman en cuenta que la mayoría de investigaciones ofrecen una estimación del valor de la PRM, la cual es puntual y menor que uno. En particular, Schilbred [1973] demuestra que, en el caso del mercado de bonos italiano durante el período 1958-1963, la PRM es, en promedio, 0.5. En la misma línea,

Mehra y Prescott [1985], hacen un estudio del consumo real per capita para los servicios y bienes no duraderos del período 1889-1978 para Estados Unidos. Considerando una tasa de interés real promedio igual a 0.008, y una media y desviación estándar de la tasa real de rendimiento del índice Standard & Poor's de 0.0698 y 0.1654, respectivamente, concluyen que el precio de mercado del riesgo es igual a 0.37. Copeland, Weston y Shastri [2005], retoman un análisis de Monitor Group, en el que se realiza una línea de tendencia de la PRM para el caso de Estados Unidos con datos anuales de los períodos 1926-2002 y 1963-2002. Los resultados son una ordenada y una pendiente que son estadísticamente iguales a cero, por lo que se concluye que la PRM es constante en el tiempo. Por último, es de interés específico el trabajo de Hafner y Herwartz [2001].

Para los autores, una estimación del CAPM generalmente asume una PRM constante. Sin embargo, hay dos escenarios bajo los cuales la PRM es cambiante en el tiempo: (1) para funciones de utilidad que implican aversión al riesgo absoluta y relativa dependientes del rendimiento, la PRM es función de la media y varianza del rendimiento, y (2) si la función de utilidad tiene parámetros que son variantes en el tiempo y determinan el grado de aversión al riesgo, la PRM será función del tiempo.

Ambos autores demuestran que, para el caso del mercado accionario alemán durante el período 1990-1996, los modelos GARCH (m, n) en los que las PRM de las series analizadas es función de medidas típicas de volatilidad (por ejemplo, innovaciones cuadradas rezagadas del mercado y específicas del activo) tienen mejor desempeño que la mayoría de las series modeladas con una PRM constante. En particular, para grandes innovaciones rezagadas, se incrementa la PRM.

Para terminar la sección, es importante mencionar que, en general, las estimaciones usadas por los autores anteriores se basan en la inspección de los rendimientos de activos financieros. Sin embargo, Hansen y Jagannathan [1991] afirman que existe una forma alternativa de calcular la PRM. Su forma tradicional emplea datos de rendimientos para estimar una cota inferior de la PRM (el índice de Sharp basado en media y su desviación

estándar de los rendimientos) sin importar como sean las preferencias de los agentes. La PRM que resulta de este método es tan alta que sólo es consistente con los agentes extremadamente aversos al riesgo.

En cambio, la forma alterna se basa en Economía Experimental y consiste en construir juegos de azar transparentes y bien entendidos por los agentes involucrados. Los resultados de los juegos sugieren que los agentes sólo están dispuestos a pagar sólo una pequeña parte del seguro contra el juego, por lo que son débilmente aversos al riesgo. Por este motivo, la PRM calculada es pequeña.

3. El Modelo.

En esta sección se desarrolla un modelo básico que determina la dinámica de la PRM. Para tal efecto, la sección se divide en cinco partes. En la primera parte se define a la PRM como función implícita del tiempo y función explícita de tres elementos financieros: (1) el rendimiento del mercado accionario, (2) la volatilidad del rendimiento de mercado, y (3) la correlación que existe entre el rendimiento de mercado y el rendimiento del activo financiero analizado. En la segunda parte se plantean las ecuaciones de oferta y demanda del mercado accionario las cuales dependen, entre otras cosas, de un factor macroeconómico (el crecimiento económico) y de un factor macroeconómico (la estabilidad del sector industrial al cual pertenece la empresa estudiada). Finalmente, en la tercera parte se indica que, dependiendo de la dominancia de uno de los dos factores arriba mencionados, la dinámica de la PRM tendrá un comportamiento cíclico que será convergente, divergente, o ninguna de las dos cosas.

3.1. La PRM como Función de Elementos Financieros.

Con base en Hull [2003], a continuación se reescribe la definición de la PRM:

$$\lambda = \frac{R_i - R_f}{\sigma_i}, \quad (4)$$

donde la volatilidad del activo i σ_i sustituye a β , quien aparece originalmente en la ecuación (1). Sin embargo, la relación entre la PRM y el CAPM no queda anulada. Hull vincula los dos conceptos mediante la redefinición de β como $\rho\sigma_i/\sigma_m$, donde ρ es el coeficiente de correlación entre el activo i y el mercado, y σ_m es la volatilidad del mercado. En este caso, λ se puede escribir como:

$$\lambda = \frac{\rho}{\sigma_m}(R_m - R_f), \quad (5)$$

Por simplicidad, asúmase que $R_f = 0$ con el fin de que el la PRM dependa exclusivamente de parámetros pertenecientes al mercado de valores privados. En este caso, la PRM es:

$$\lambda = \frac{\rho}{\sigma_m} R_m \quad (6)$$

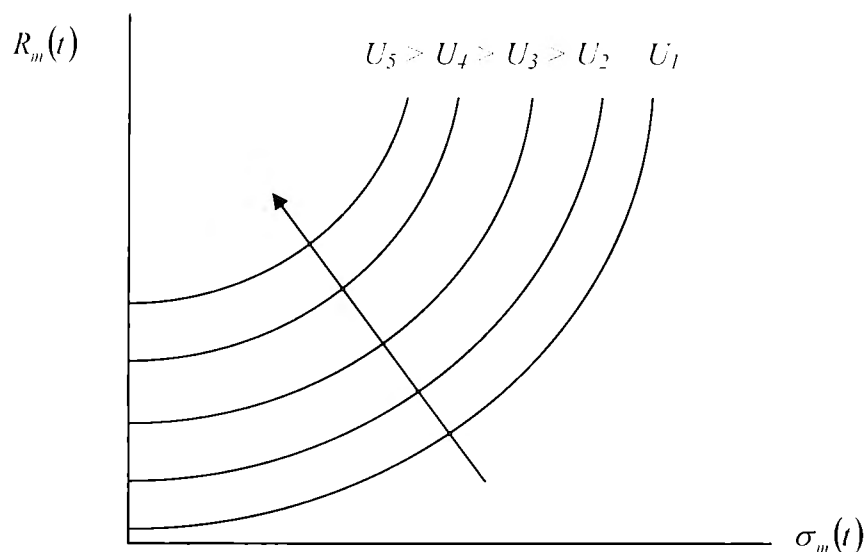
La ecuación (4) permite vincular la PRM y el CAPM. Específicamente, indica que la PRM es directamente proporcional al coeficiente de correlación entre el rendimiento del activo y rendimiento del mercado, y al rendimiento de éste último, e inversamente proporcional a la volatilidad del mercado. Considérese la versión dinámica de (6) en la que todas las variables dependen del tiempo t:

$$\lambda(t) = \frac{\rho(t)}{\sigma_m(t)} \cdot R_m(t) \quad (7)$$

3.2. Preferencias de los Inversionistas.

Considere una economía compuesta por un conjunto de inversionistas en activos financieros quienes poseen una función de utilidad U que depende del rendimiento del mercado R_m y del riesgo del mercado σ_m . Dado que para ellos el rendimiento es un bien y el riesgo es un mal, debe cumplirse que U se incremente con R_m y disminuya con σ_m . Formalmente, $U(R_m, \sigma_m)$, donde $U_{R_m} > 0$ y $U_{\sigma_m} < 0$. La Figura 1 presenta el mapa de curvas de indiferencia cuando se grafica R_m en el eje vertical y σ_m en el horizontal, U_i es el nivel de utilidad i .

Figura 1. Curvas de Indiferencia entre Rendimiento y Riesgo



Considere la función de utilidad específica $U = R_m - \sigma_m^{1/\alpha}$. Existen diferentes valores de R_m y σ_m que hacen $U = 0$. Bajo esta situación, si se despeja σ_m , resulta:

$$\sigma_m(t) = R_m(t)^\alpha, \quad (8)$$

La ecuación (6) indica, tal como lo mencionan las ecuaciones CAPM y APT enunciadas en la introducción de este trabajo, que existe una relación directa entre el rendimiento de mercado y el riesgo de mercado. El parámetro α está asociado con el grado de aversión al riesgo, $0 < \alpha < 1$. Específicamente, un valor menor de α implica una mayor aversión, y viceversa. Equivalente, (6) confirma que para un nivel dado de rendimiento, los agentes aceptarán más riesgo sólo si son compensados con un gran aumento en rendimiento.

Si se sustituye (8) en (7), resulta:

$$\lambda(t) = \rho(t) \cdot R_m(t)^{1-\alpha} \quad (9)$$

La ecuación (9) expresa que, ante un aumento en el rendimiento de mercado, la PRM es positiva y crece a tasa decreciente cuando el coeficiente de correlación es positivo,

mientras que es negativa y disminuye a tasa creciente cuando el coeficiente es negativo. Por simplicidad, a partir de ahora se considerará que el coeficiente de correlación es constante ($\rho(t) = \rho$).

3.3. La Determinación del Rendimiento de Mercado de Equilibrio.

Considere la existencia de un mercado de activos financieros en el que los inversionistas compran acciones. En cada t existe una demanda de acciones realizada por los inversionistas, $A^d(t)$, y una oferta de acciones por parte de las empresas emisoras, $A^s(t)$. Asuma que la demanda por acciones depende directamente del rendimiento de mercado R_m . Lo contrario sucede con la oferta de acciones. Formalmente, se plantean las siguientes funciones específicas de demanda y oferta:

$$A^d(t) = a_0 R_m(t) \quad (10)$$

$$A^s(t) = a_1 - a_2 R_m(t-1), \quad (11)$$

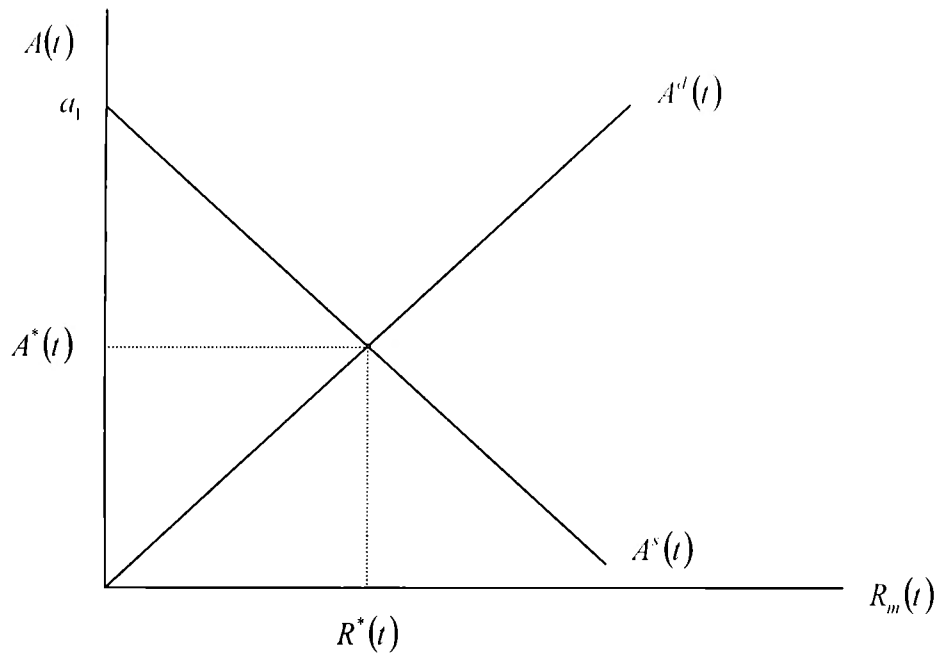
donde a_0 , a_1 y a_2 son constantes positivas. Se asume que, mientras que la demanda por acciones depende del rendimiento en t , la oferta depende del rendimiento en $t-1$. Una explicación del supuesto es la siguiente: mientras que un inversionista sólo está interesado en el rendimiento contemporáneo, una empresa sólo puede emitir acciones con retraso de un período. En equilibrio, debe cumplirse que $A^d(t) = A^s(t)$. Esto resulta en los valores de equilibrio:

$$A^*(t) = \frac{a_0 a_1}{a_0 + a_2} \quad (12)$$

$$R^*(t) = \frac{a_1}{a_0 + a_2} \quad (13)$$

El equilibrio se representa en la Figura 2:

Figura 2. Equilibrio en el Rendimiento del Mercado



Considere que, mientras a_1 es la oferta autónoma de acciones cuando el rendimiento es cero, a_0 y a_2 se encuentran relacionadas con factores económicos. En particular, mientras que a_0 se encuentra relacionada con el crecimiento económico, a_2 se encuentra relacionada con la estabilidad del sector industrial al que pertenece la empresa en cuestión. De este modo, entre mayor sea a_0 , mayor será el riesgo de mercado y, con ello, mayor será el rendimiento del mercado. Del otro lado, entre mayor sea a_2 , menor será el riesgo idiosincrático y, por tanto, menor será el rendimiento del mercado. Observe que lo anterior es consistente con el modelo APT descrito en la introducción. Véase las Figuras 3 y 4.

Figura 3. Equilibrio en el Rendimiento del Mercado ante un Aumento en a_0 .

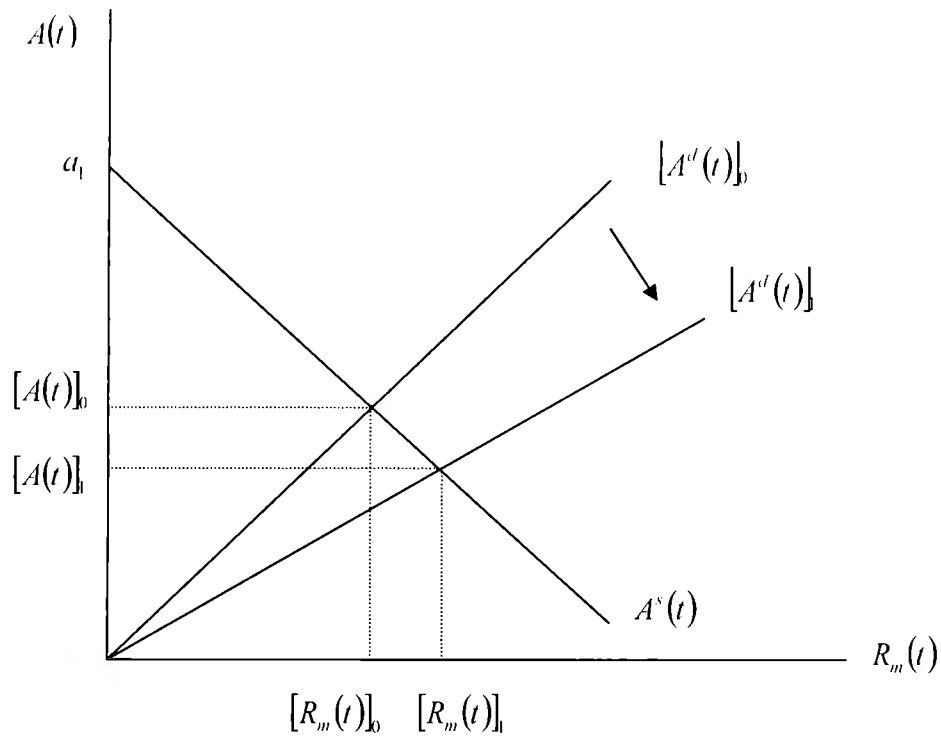
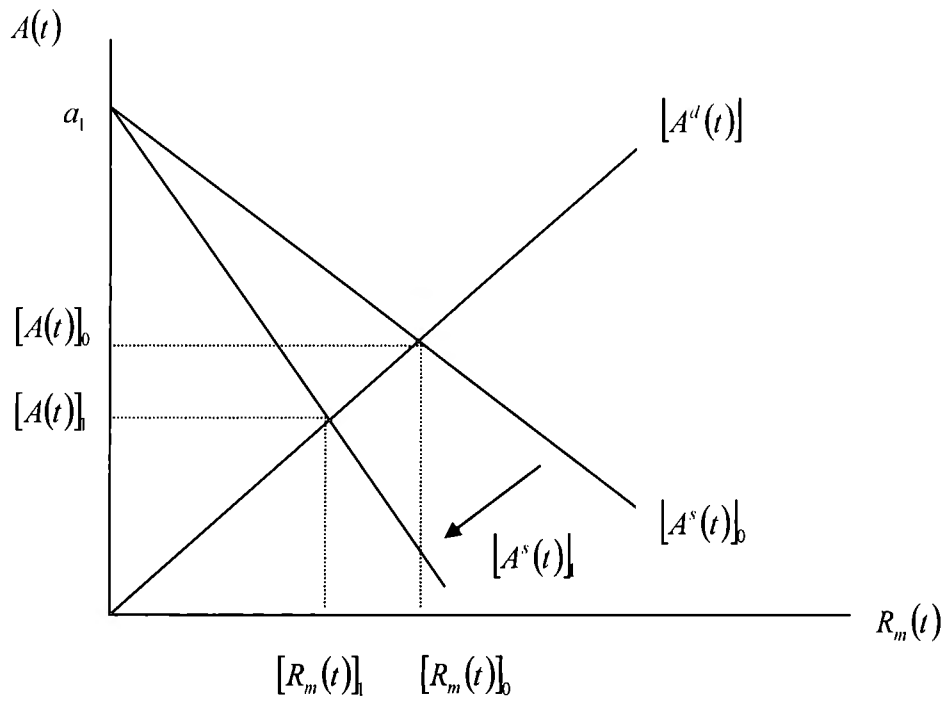


Figura 4. Equilibrio en el Rendimiento del Mercado ante un Aumento en a_2 .



Asuma que el rendimiento inicial, $R_m(0)$, se encuentra por arriba del rendimiento de equilibrio. En este caso, la oferta de acciones en $t = 0$ es $A^s(1) = a_1 - a_2 R_m(0)$. Para que exista equilibrio en el mercado de acciones, la oferta tiene que ser igual a la demanda de acciones; esto es, $A^s(1) = A^d(1)$. Esto se consigue cuando el rendimiento es igual a $R_m(1)$, el cual es menor que el rendimiento de equilibrio y que $R_m(0)$. Ahora con $R_m(1)$, la oferta de acciones será igual a $A^s(2) = a_1 - a_2 R_m(1)$. De nuevo, para equilibrar el mercado accionario, la demanda $A^d(2)$ será igual a $A^s(2)$, lo cual se logra con el rendimiento $R_m(2)$. Observe que siguiendo este razonamiento se produce el fenómeno "telaraña", entre la oferta y demanda de acciones, con el cual el rendimiento oscila alrededor de su valor de equilibrio. Si en el proceso el rendimiento se acerca al valor de equilibrio, entonces el rendimiento es convergente. Si el rendimiento se aleja del valor de equilibrio, el rendimiento es divergente. Finalmente, si no sucede ninguno de los dos casos anteriores, la oscilación es uniforme. Véanse las Figuras 5-7:

Figura 5. Oscilación Uniforme en el Rendimiento del Mercado

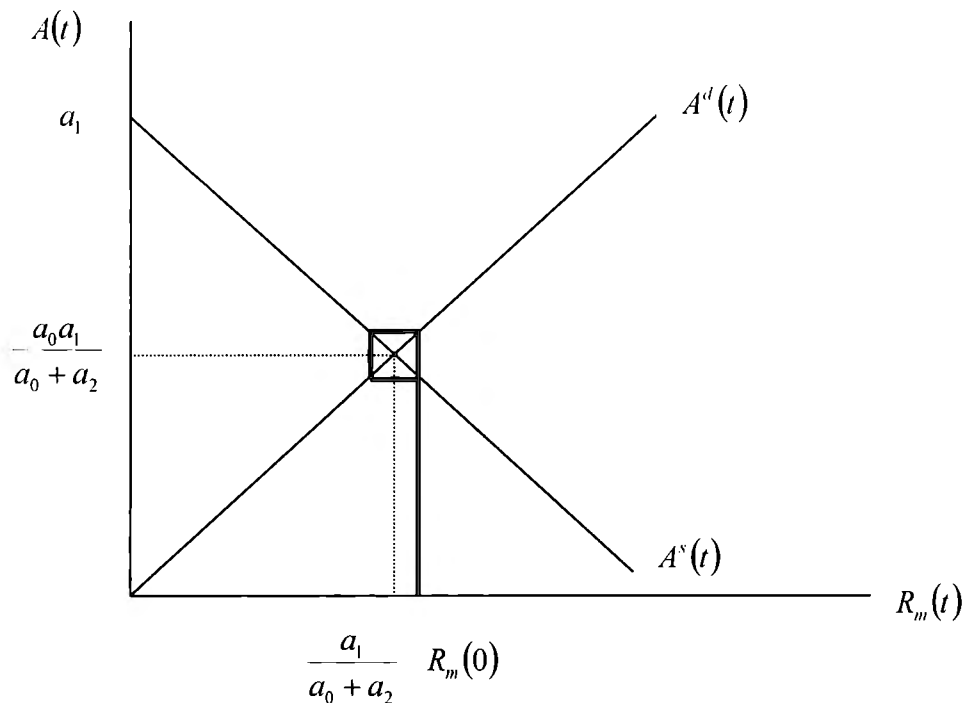


Figura 6. Oscilación Divergente en el Rendimiento de Mercado

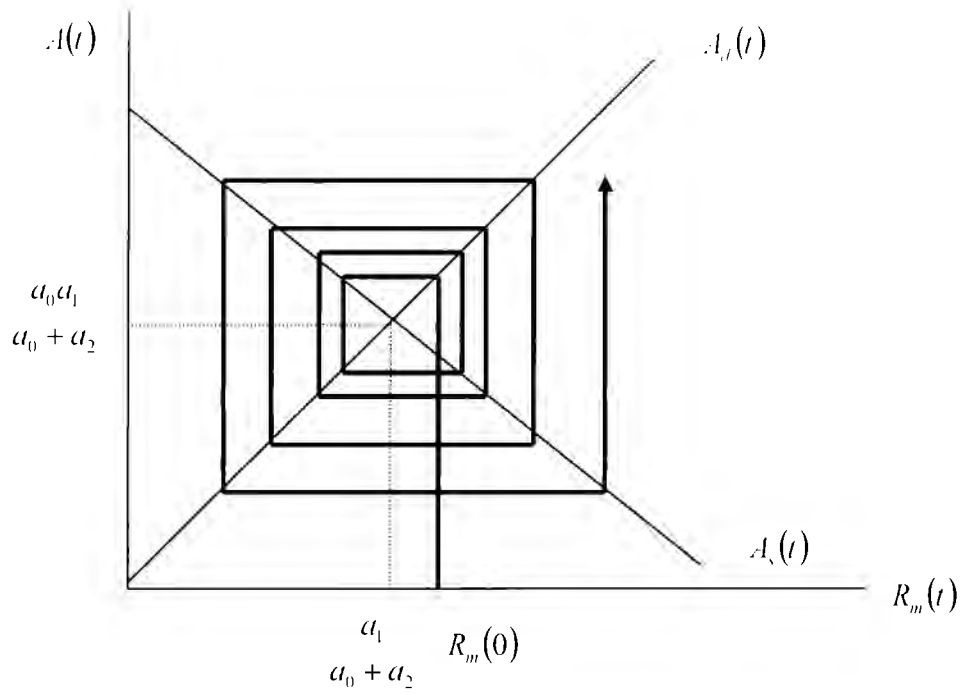
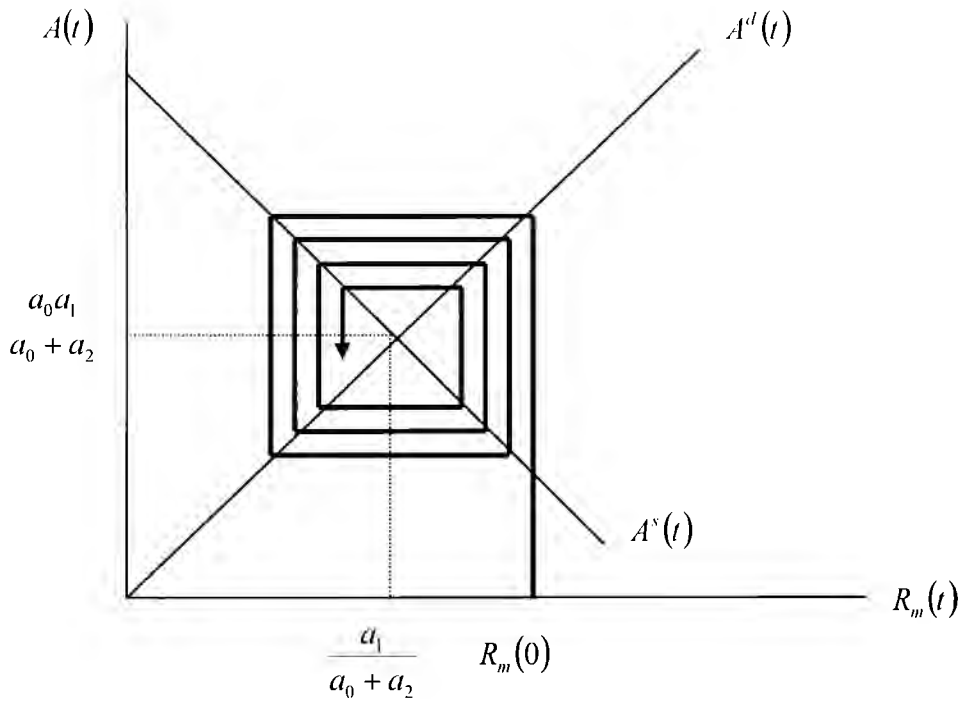


Figura 7. Oscilación Convergente en el Rendimiento de Mercado



El equilibrio en el mercado accionario ($A^*(t) = A^d(t)$) implica la existencia de la siguiente ecuación en diferencias de primer orden:

$$R_m(t) = \frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0} R_m(t-1) \quad (14)$$

De acuerdo a (14), el rendimiento actual es función del rendimiento pasado y de los parámetros a_0 , a_1 , y a_2 . La solución general de (14) viene dada por:

$$R_m(t) = \left[R_m(0) - R_m^* \begin{pmatrix} -a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right]^t + R_m^* \quad (15)$$

3.4. La Evolución Temporal de la PRM.

La ecuación (7) expresa que existe una relación directa entre el rendimiento de mercado y la PRM. Además, la ecuación (15) expresa al rendimiento como una función explícita del tiempo. Entonces, es posible escribir a la PRM como función del tiempo. En particular si se sustituye (15) en (9), resulta:

$$\lambda(t) = \rho \left\{ \left[R_m(0) - R_m^* \begin{pmatrix} -a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right]^t + R_m^* \right\}^{1-\alpha} \quad (16)$$

De acuerdo a (16), la PRM en t es función de la solución de la ecuación en diferencias del rendimiento. Por esto último, la PRM presenta las mismas propiedades de oscilación de R_m . Además, la PRM es función explícita del tiempo y de los siguientes parámetros:

(i) a_0 : Entre mayor sea el crecimiento económico ($a_0 \rightarrow \infty$), mayor será el riesgo sistemático favorable para el mercado. Por ello, mayor será la PRM. De este modo, cuando $a_0 > a_2$, la PRM oscilará en forma divergente. Véase la Figura 9.

(ii) a_2 : Entre mayor sea la estabilidad de la industria ($a_2 \rightarrow \infty$), menor será el riesgo idiosincrático favorable para el mercado. Por ello, menor será la PRM. De este modo, cuando $a_2 > a_0$, la PRM oscilará en forma convergente. Véase la Figura 10.

Finalmente, cuando $a_0 = a_2$, la oscilación es estable. Véase la Figura 8.

(iii) ρ : Existe una relación directa entre el coeficiente de correlación (del rendimiento del activo financiero estudiado y el rendimiento de mercado), y la PRM. En particular, si el coeficiente es positivo, también lo es la PRM, y viceversa. Observe que, si los rendimientos del activo y del mercado no están asociados, la PRM es igual a cero. Intuitivamente, si el rendimiento del activo no responde ante cambios en el rendimiento de mercado implica que el activo está libre de riesgo. Por tanto, el rendimiento adecuado para este activo es la tasa libre de riesgo. Dada la definición básica de la PRM, ésta será igual a cero.

(iv) α : Entre mayor sea el grado de aversión al riesgo ($\alpha \rightarrow 0$), los inversionistas serán más aversos al riesgo. Entonces, exigirán una PRM para adquirir el activo. Por otra parte, observe que cuando $\alpha = 1$, la PRM es igual al coeficiente de correlación, por lo que sus valores se encontrarán necesariamente en el intervalo $[-1,1]$.

Figura 8. Dinámica de la PRM cuando $a_0=a_2$. Oscilación uniforme

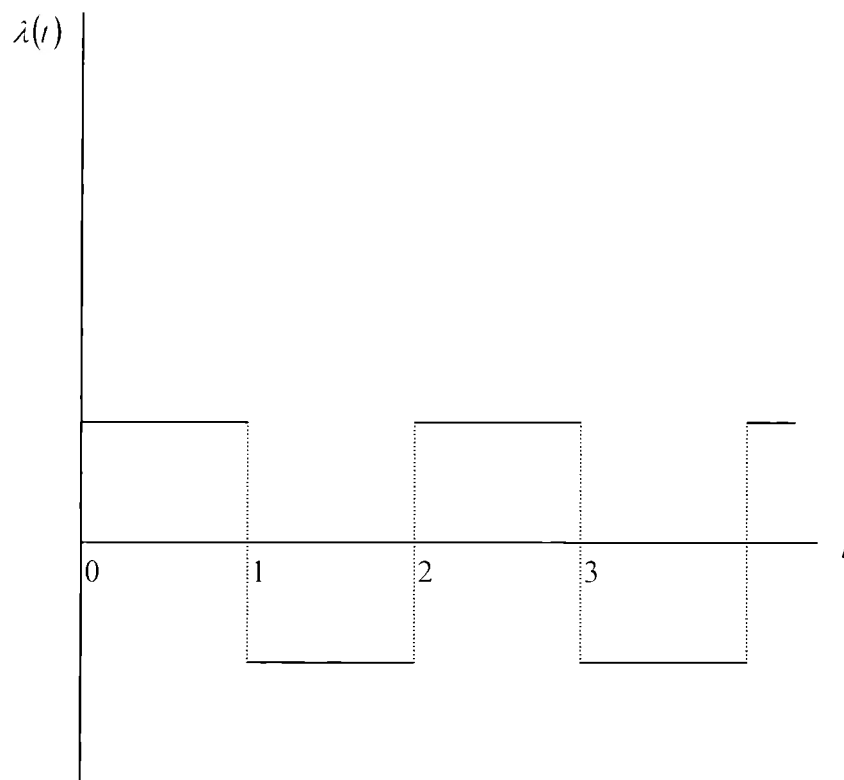


Figura 9. Dinámica de la PRM cuando $a_0 > a_2$. Oscilación divergente.

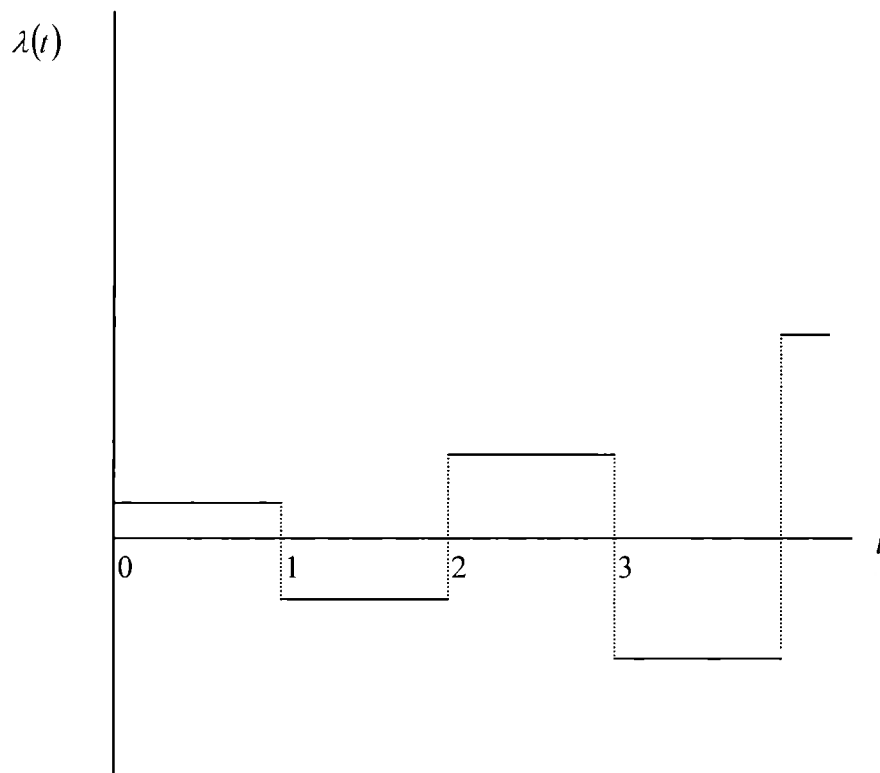
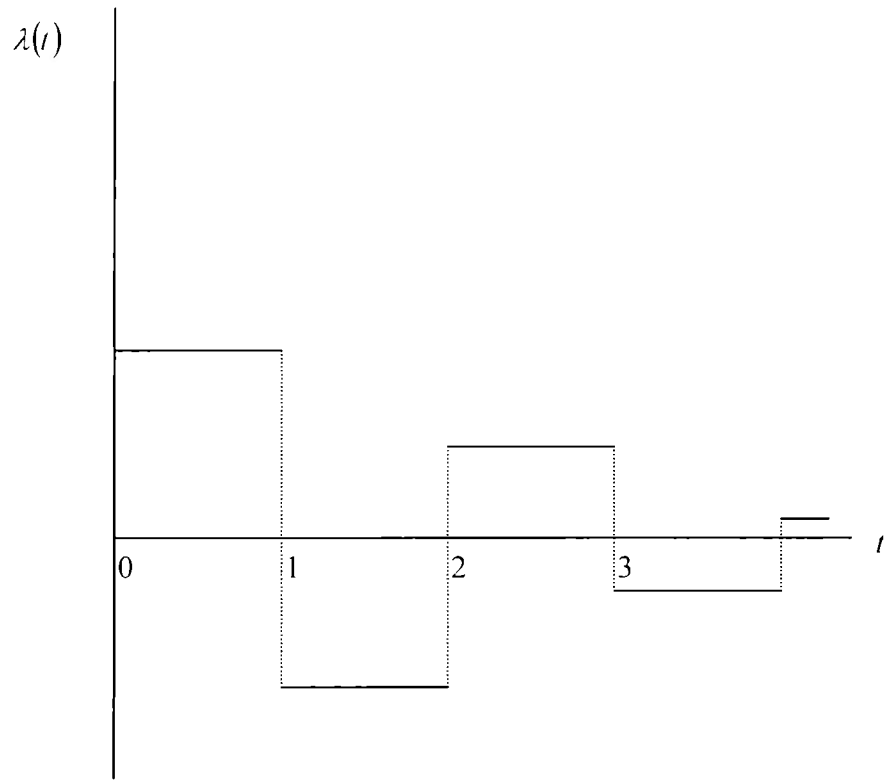


Figura 10. Dinámica de la PRM cuando $a_0 < a_2$. Oscilación convergente.



4. Evidencia Empírica.

En esta sección se conocerá el tipo de trayectoria de cinco empresas que cotizan en el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC). Cada una de las empresas es representativa de los cinco sectores que conforman la Bolsa Mexicana de Valores (BMV). Para tal efecto, la sección se divide en tres partes. En la primera parte se define la información financiera con la que se construirán las series de tiempo de la PRM sobre cada acción. En la segunda parte se investiga si la PRM de cada serie presenta cuatro características típicas que poseen los rendimientos financieros: (1) estacionariedad en media, (2) distribución de probabilidad empírica sesgada a la izquierda y leptocúrtica, (3) efecto *leverage*, y (4) efecto *clustering*. Con base en las características (1) y (4), se plantean modelos ARMA (p, q) y GARCH (m, n), con su variante TARARCH, que describan adecuadamente la media y la volatilidad de la PRM de cada serie.

4.1. Descripción de la Información.

La BMV asigna sus acciones cotizadoras a cinco sectores económicos: comunicaciones y transportes, construcción, servicios, transformación y varios. Se seleccionó una acción de cada sector: AMX L, Cemex CPO, GModelo C, GCarsoA1 y GFNorte O. Las acciones fueron seleccionadas por su alto nivel de bursatilidad dentro del sector respectivo y porque son ampliamente conocidas por los inversionistas. En la Tabla 1 resume lo anterior:

Tabla 1. Información Relevante

Sector	Construcción	Comunicaciones y Transportes	Servicios	Transformación	Varios
Ramo	Cemento	Comunicaciones	Grupos Financieros	Alimento, Bebida y Tabaco	Controladoras
Acción	Cemex CPO	AMX L	GFNorte O	Femsa UBD	GCarso A1
Bursatilidad	Alta	Alta	Media*	Alta	Alta
Volumen					
Promedio de Operaciones (%) en 2005	87	57	85	40	24

*: Es la máxima bursatilidad alcanzada por las acciones en este sector.

Para conocer la evolución temporal de la PRM se construyeron tres variables con base en datos diarios del precio de las cinco acciones durante los 12 meses del año 2005; específicamente, de 03:01:2005 a 30:12:2005. Después de quitar los días en los que algunas de las cinco acciones y/o alguna acción del sector industrial al que pertenece la empresa no reportó su precio en la BMV, se tienen 146 observaciones sobre cada empresa obtenidas de *Economática*©. Las tres variables son:

1. Rendimiento del Sector de Mercado ($R_m(t)$): es el promedio aritmético de los rendimientos de las acciones que conforman el sector económico a analizar.
2. Riesgo del Sector de Mercado ($\sigma_m(t)$): es la desviación estándar del rendimiento de mercado acumulada hasta un determinado día.
3. Correlación ($\rho(t)$): es el coeficiente de correlación muestral entre el rendimiento diario del sector de mercado y el rendimiento diario de la acción que se analiza en ese sector. Al igual que la desviación estándar, la correlación también es acumulada.

A partir de las tres variables se obtuvieron datos de la PRM sobre cada una de las cinco acciones, la cual se define, de acuerdo a la ecuación (7), como el producto del rendimiento de mercado y la correlación dividido entre la volatilidad del mercado.

Es necesario mencionar que existen otras opciones en la construcción de la PRM. Por ejemplo, el rendimiento de mercado se calculó como un promedio simple de los rendimientos de las acciones de cierto sector. Sin embargo, podría obtenerse un promedio ponderado de los rendimientos, donde las ponderaciones vendrían dadas por la importancia relativa de cada acción dentro del sector. Esta importancia sería medida por el número (o volumen) de operaciones que tiene cada acción, promedio en el período analizado, sobre el número (volumen) total de operaciones. Una segunda opción se basa en la definición de la PRM de acuerdo a la ecuación CAPM; esto es, la diferencia entre el rendimiento del activo riesgoso y la tasa libre de riesgo dividida entre el indicador de riesgo β . Específicamente, primero se estimaría β usando Mínimos Cuadrados Ordinarios

(MCO) en la regresión CAPM, con R_i como variable dependiente y $R_m - R_f$ como variable independiente. Una vez que se tiene β , se puede tener la PRM por día con el cociente $(R_m(t) - R_f(t)) / \beta$.

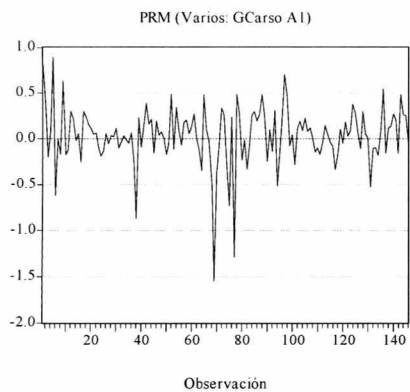
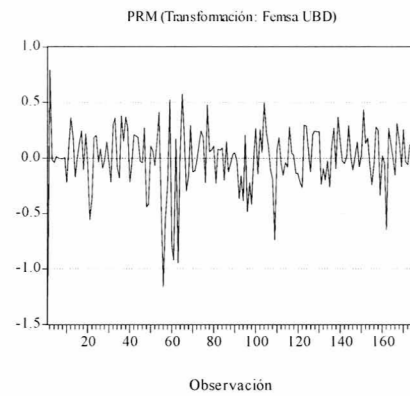
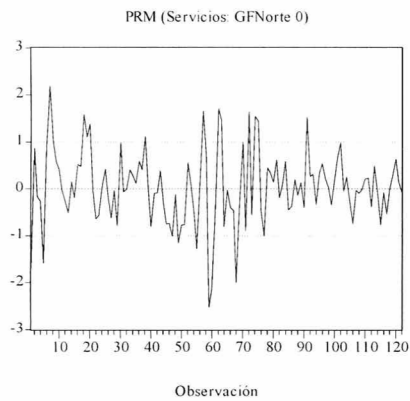
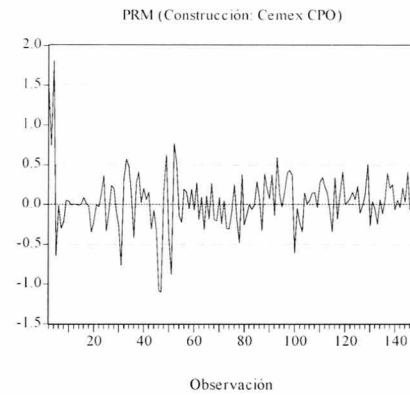
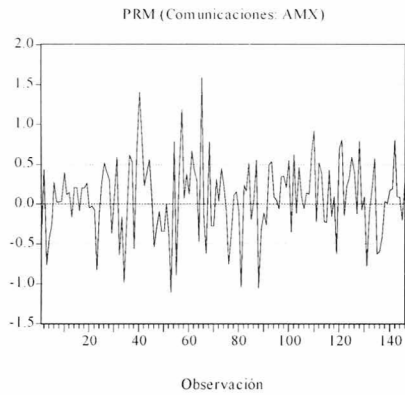
4.2. Estacionariedad de la PRM por Sector.

Para iniciar, se va a verificar si la serie del precio del riesgo presenta estabilidad en el tiempo (estacionariedad) o tiene una trayectoria temporal creciente o decreciente (no estacionariedad). Con tal objeto, se realiza la prueba Dickey-Fuller Aumentada (ADF) con base en la siguiente ecuación:

$$\Delta\lambda(t) = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 \lambda(t-1) + \sum_{i=1}^m \alpha_i \Delta\lambda(t-i) + u(t), \quad (17)$$

Obsérvese que la ecuación (17) incluye un intercepto, una variable de tendencia, y m términos de diferencias rezagadas. Dado que la inspección gráfica de la serie es un procedimiento impreciso para decidir si es correcto introducir en la prueba los dos primeros elementos, se incorporarán éstos *a priori*, para posteriormente quitarlos en caso de que sean no significativos y así tener una especificación que describa correctamente los datos. Para conocer el valor óptimo de m , se sigue la regla empírica de tomar el valor asociado a un modelo con el menor Criterio de Información de Akaike (AIC). La hipótesis nula es $H_0: \beta_3=0$ (la PRM tiene trayectoria temporal creciente o decreciente; formalmente, la PRM presenta raíz unitaria). La hipótesis alternativa es $H_1: \beta_3 \neq 0$ (la prima de riesgo es constante; formalmente, el PRM es estacionario). En las Gráficas 1a-1e se presentan las series de tiempo de la PRM sobre las cinco acciones.

Gráficas 1a-1e. Series de Tiempo de la PRM para las Acciones Analizadas



Por inspección de las gráficas anteriores no se observa que, en general, la PRM de cada serie presente tendencia temporal creciente o decreciente. Esto se explica por lo siguiente. Se sabe que el precio de una acción no presenta cambios pronunciados a lo largo del tiempo. Por ello, el rendimiento de la acción (la tasa de crecimiento del precio)

es cercano a cero. Dado que el rendimiento de mercado es un promedio de los rendimientos de las acciones, el rendimiento de mercado también es cercano a cero. Adicionalmente, la correlación entre un activo y el mercado al que pertenece debe ser positiva, fuerte y estable, dado que el activo tiene un peso importante en la determinación del rendimiento de mercado. Las gráficas indican que, probablemente, estos dos efectos dominan a aquél representado por las variaciones significativas en la volatilidad. Con lo anterior, la PRM no se encontrará muy alejada del valor cero. Para verificar esta afirmación, la Tabla 2 presenta un conjunto de estadísticas descriptivas sobre la PRM de cada acción.

Tabla 2. Algunas Estadísticas Descriptivas de la PRM

Estadística/PRM	AMX L	Cemex CPO	GFNorte O	Femsa UBD	GCarso A1
Media	0.0813	0.0393	0.0351	-0.0059	0.0320
D.S.	0.4701	0.3567	0.7931	0.2920	0.3182
C.A.	-0.0167	0.7059	-0.1259	-1.1791	-1.2548
C.C.	3.5500	8.5598	3.9725	6.2796	8.5265
J.B.	0.3969	0.0000	0.0768	0.0000	0.0000
Mínimo	-1.1057	-1.0993	-2.5207	-1.2427	-1.5487
Máximo	1.5841	1.8037	2.1843	0.7940	0.8892
No. de Observaciones	146	1d	1d	1d	1d

D.S.: desviación estándar; C.A.: coeficiente de asimetría; C.C.: coeficiente de curtosis; J.B.: valor-p del estadístico Jarque-Bera.

La Tabla 2 confirma lo mencionado líneas arriba: el valor promedio del PRM para cada acción es cercano a cero. En particular, la PRM promedio es máxima en la acción del sector comunicaciones y transportes (0.0813 de AMX) y mínima en la acción del sector transformación, -0.0059 de Femsa UBD. Con respecto a la volatilidad de la PRM, está es máxima para el sector servicios financieros (0.7931 de GFNorte O) y mínima para el sector transformación, 0.2920 de Femsa UBD.

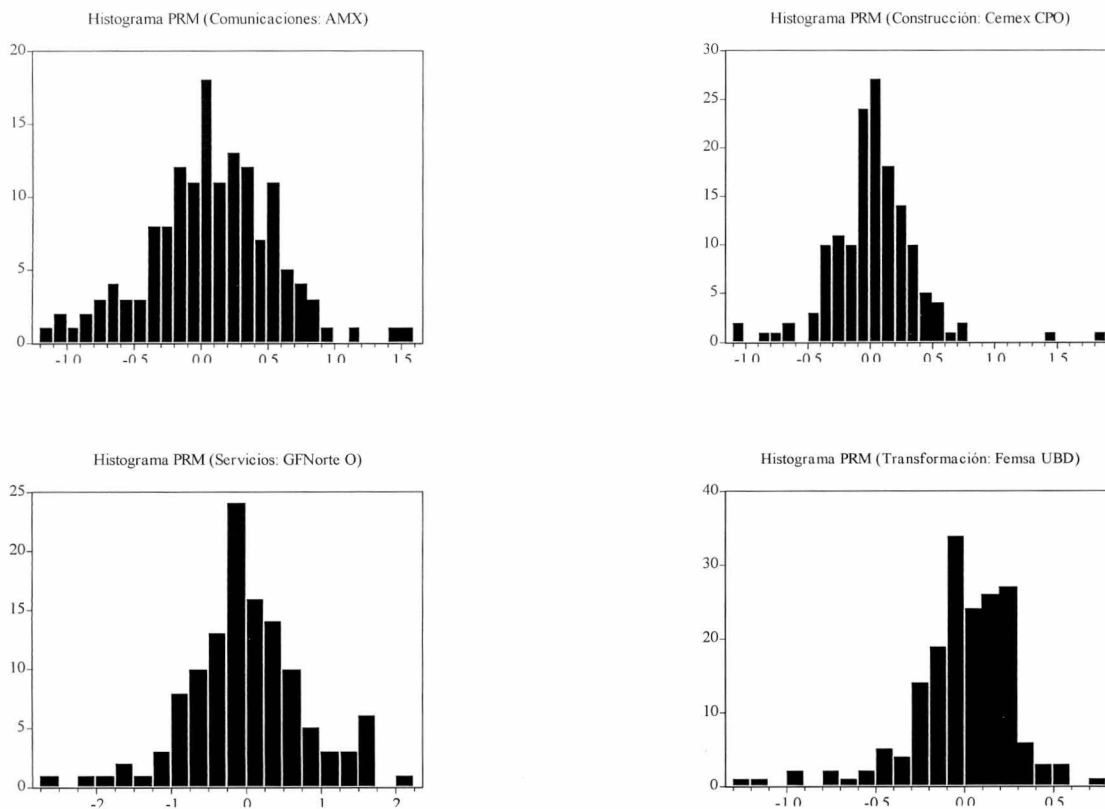
Existen otros dos resultados que se desprenden de la Tabla 2. En primer lugar, las distribuciones de las PRM son, en general, sesgadas a la izquierda y leptocúrticas. Con respecto al sesgo, con excepción de Cemex CPO, las demás PRM poseen una distribución de probabilidad empírica sesgada a la izquierda. Formalmente, esto implica que los valores altos del PRM son más probables que los valores bajos. Intuitivamente,

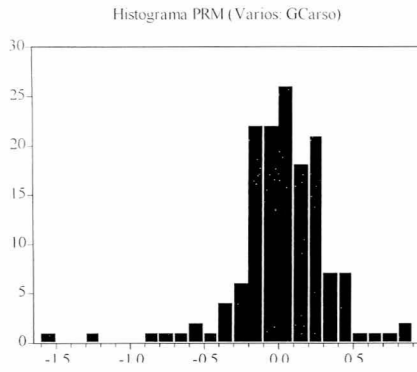
significa que los inversionistas esperan, generalmente, excesos de rendimientos positivos en sus acciones. El sesgo a la izquierda presentado por la PRM de las acciones es un hecho estilizado que poseen los rendimientos financieros.

Con respecto a la curtosis, y exceptuando a AMX L, en general todas las PRM tienen una distribución de probabilidad con una baja concentración de valores alrededor del PRM promedio, y alta concentración de valores en las colas de la distribución. Lo anterior indica que un inversionista espera excesos de rendimientos, positivos o negativos, extremos. Esta leptocurtosis coincide con la que presentan los rendimientos financieros.

El estadístico Jarque-Bera (JB) resume la información anterior: dada la leptocurtosis y el sesgo a la izquierda de las distribuciones de probabilidad de la PRM, con excepción de la acción AMX, el valor del JB es significativamente distinto de cero. Esto sucede con 1% de significancia para Cemex CPO, Femsa UBD y GCarso A1, y con 10% de significancia para GF Norte O. Véanse las Gráficas 2a-2e.

Gráficas 2a-2e. Histogramas de la PRM para las Acciones Analizadas.





En la Tabla 3 se muestran los resultados de la prueba ADF para cada serie.

Tabla 3. Prueba ADF para Verificar Estacionariedad en el Nivel de la PRM

Acción	Estadístico	Valor Crítico (%)	Decisión (1%)
AMX L	-11.2439	-2.5798	Estacionaria
Cemex CPO	-10.9296	Id	Id
GFNorte O	-8.9535	Id	Id
Femsa UBD	-11.2439	Id	Id
GCarso A1	-11.2244	Id	Id

4.3. Modelos ARMA (p, q).

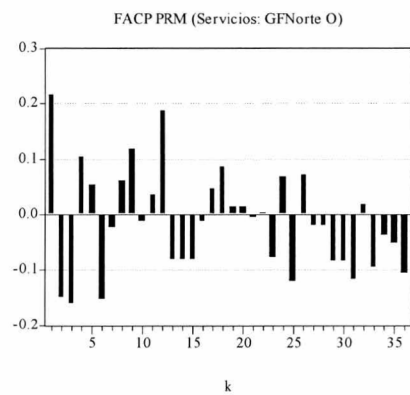
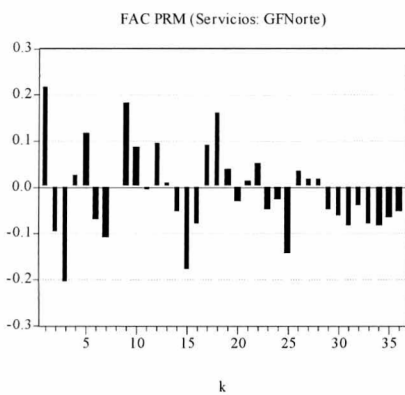
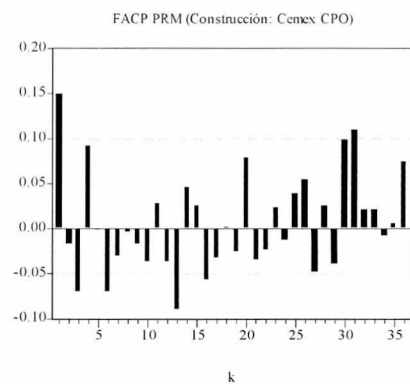
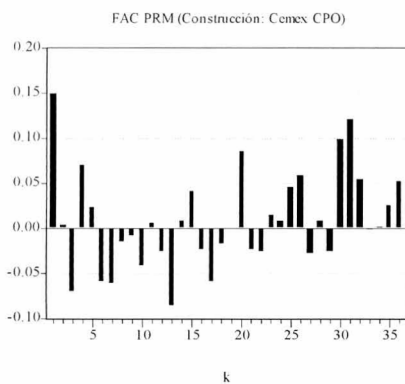
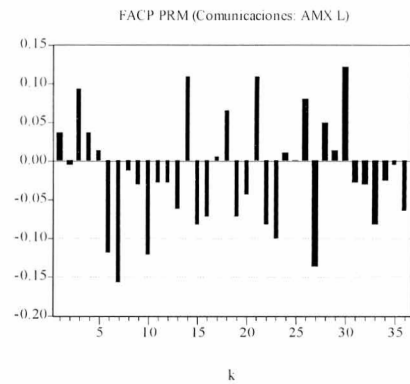
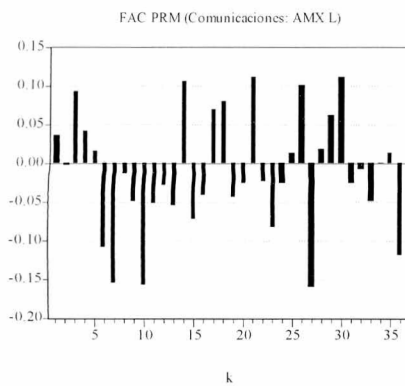
De acuerdo a la Tabla 2, se concluye que la PRM de las cinco series son estacionarias. Por ello, es posible proponer algunos modelos ARMA (p, q) que describan adecuadamente la evolución temporal de la PRM a lo largo del año 2005. En estos modelos, la PRM contemporánea será función de valores pasados de la PRM y de los choques inesperados, innovaciones. Formalmente, se propone la siguiente ecuación:

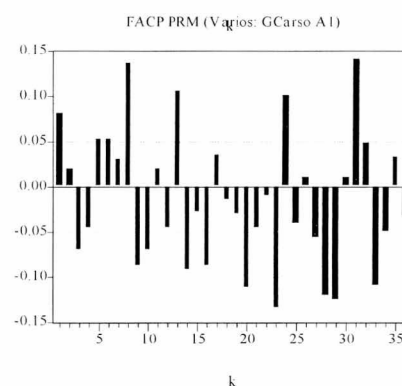
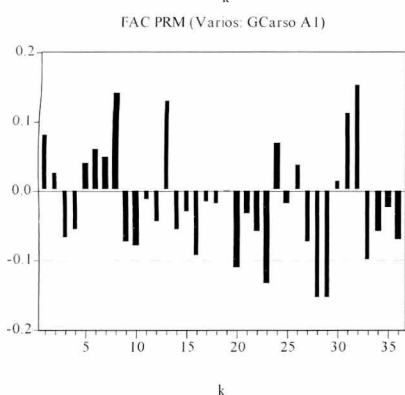
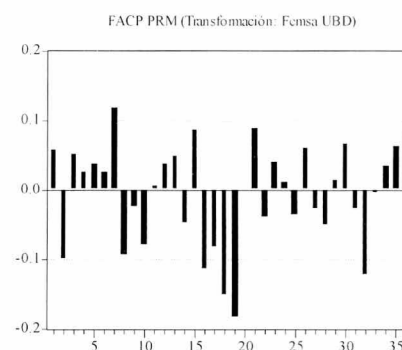
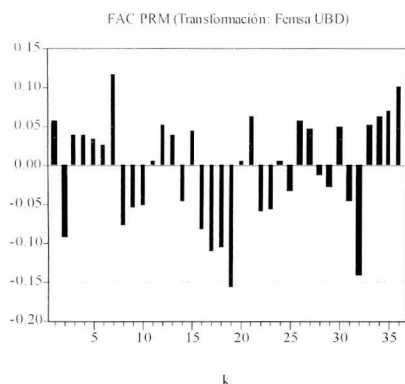
$$\lambda(t) = \mu + \sum_{i=1}^p \phi_i \lambda(t-i) + \sum_{i=1}^q \theta_i a(t-i) + a(t) \quad (18)$$

La ecuación (18) indica que la PRM en t es función de la PRM en los períodos t-1, t-2, ..., t-p, y de las innovaciones sucedidas en los períodos t, t-1, t-2, ..., t-q. Las sensibilidades de la PRM con respecto a sus valores pasados vienen dados por los parámetros ϕ . En tanto, las sensibilidades de la PRM con respecto a los choques inesperados pasados vienen dados por los coeficientes θ . El parámetro μ representa el nivel medio de λ_t , y a_t es la innovación actual.

Para conocer los posibles órdenes de los modelos ARMA (p, q) se requiere conocer la Función de Autocorrelación (FAC) y la Función de Autocorrelación Parcial (FACP) de los residuales. En la Gráficas 3a-3e se presentan la FAC y FACP de las cinco acciones.

Gráfica 3a-3e. FAC y FACP de la PRM para las Acciones Analizadas





De acuerdo a las Gráficas 3a-3e, en Tabla 4 se presentan los modelos a estimar:

Tabla 4. Procesos ARMA (p, q) para Modelar la Media de la PRM

Acción	Órdenes p	Órdenes q
AMX L	3, 6, 7, 10, 14, 21, 23, 27	3, 6, 7, 10, 23, 27
Cemex CPO	1, 3, 13, 20	1, 3, 13, 17, 20
GFNorte O	1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 25	1, 3, 5, 7, 9, 10, 15, 25
Femsa UBD	2, 7, 8, 15, 16, 17, 18, 19	2, 7, 16, 17, 18, 19
GCarso A1	1, 8, 9, 13, 14, 16, 20, 23	1, 8, 9, 13, 14, 20, 23

Se realizó la estimación de los modelos listados anteriormente. Con el objetivo de simplificar información, en la Tabla 5 se muestran los mejores modelos ajustados para cada acción. Dichos modelos fueron elegidos considerando tres criterios: (i) la significancia de los coeficientes estimados, (ii) la existencia de parsimonia con respecto a otros modelos (caracterizada por un menor Criterio de Información de Akaike (AIC)), y (iii) la presencia de ruido blanco independiente (medida por la aceptación de la hipótesis

nula en la prueba Q de Ljung-Box). La estimación de los modelos para cada una de las acciones se presenta a continuación, los números entre paréntesis son los valores-p.

Tabla 5. Modelos ARMA (p, q) para Estimar la Media de la PRM.

Sector/ Modelo ARMA	Comunicaciones y Transportes (AMX L)	Sector/ Modelo ARMA	Construcción (Cemex CPO)	Sector/ Modelo ARMA	Servicios (GFNorteO)
Constante	0.0788 (0.0002)	AR(3)	0.6946 (0.0000)	AR(9)	-0.5103 (0.0000)
AR(7)	-0.1837 (0.0037)	AR(20)	0.2922 (0.0000)	AR(18)	0.1953 (0.0004)
MA(27)	-0.4407 (0.0000)	MA(3)	-0.6979 (0.0000)	MA(3)	-0.0416 (0.0432)
		MA(20)	-0.3497 (0.0000)	MA(9)	-0.8936 (0.0000)

Sector/ Modelo ARMA	Transformación (Femsa UBD)	Sector/ Modelo ARMA	Varios (GCarso A1)
AR(8)	-0.1383 (0.0327)	AR(1)	0.3036 (0.0000)
MA(7)	0.2586 (0.0002)	AR(13)	0.1209 (0.0179)
MA(17)	-0.2833 (0.0000)		

De acuerdo a la Tabla 5, se observa que, con excepción de GCarso A1, las otras cuatro acciones son modeladas por procesos ARMA (p, q). La existencia de coeficientes menores que uno, en valor absoluto, garantiza que los procesos son estacionarios e invertibles. El tipo de respuesta de la PRM por acción con respecto a sus valores pasados e innovaciones se muestra en la Tabla 6.

Tabla 6. Sensibilidad de la PRM ante Rezagos y Choques Aleatorios

Acción/Respuesta a	Términos AR	Términos MA
AMX L	Inversa	Inversa
Cemex CPO	Directa	Inversa
GFNorte O	Ambigua	Inversa
Femsa UBD	Inversa	Ambigua
GCarso A1	Directa	NA

NA: No Aplica.

La Tabla 6 expresa que, en general, la PRM de las acciones disminuye ante la presencia de innovaciones pasadas. En cambio, la respuesta de la PRM ante valores rezagados no es definitiva y depende de cada caso particular. Note que, la ambigüedad de los términos AR sobre la PRM de GFNorte O es consistente con que su valor ADF para probar estacionariedad sea, en valor absoluto, el menor de las cinco series.

4.4. Efecto *Clustering* en la PRM.

Una de las características típicas de los rendimientos financieros es la existencia de efecto *clustering*. Para nuestro caso, el efecto implica la coexistencia de períodos de alta volatilidad alta en la PRM con períodos de baja volatilidad. Para verificar la existencia de volatilidad de una PRM cambiante en el tiempo, se realiza la prueba ARCH-LM. específicamente, se construye una regresión del cuadrado del residual contemporáneo contra su valores rezagados de orden q . Bajo la hipótesis nula, la varianza condicional de la PRM es constante en el tiempo hasta el rezago q . El estadístico de prueba consiste es igual al producto del número de observaciones de la regresión por su R^2 , y se distribuye chi-cuadrada con q grados de libertad. En la Tabla 7 se presentan los resultados para las acciones consideradas.

Tabla 7. Existencia de Efectos ARCH en la PRM para las cinco acciones

PRM	AMX L	Cemex CPO	GFNorte O	Femsa UBD	GCarso A1
Valor-p	0.9881	0.0001	0.0004	0.0001	0.1763
Efecto ARCH	NO	SÍ	SÍ	SÍ	NO

La información anterior permite concluir que Cemex CPO, GFNorte O y Femsa UBD presentan efecto clustering y, por tanto, son candidatas a que sus volatilidades sean modeladas adecuadamente por procesos GARCH (m, n). Lo contrario sucede con AMX L y GCarso A1. Observe que las acciones candidatas a procesos GARCH (m, n) también son las que poseen un valor menos negativo del estadístico ADF. Esto es, existe evidencia de que las acciones que son menos estacionarias en media son, al mismo tiempo, aquellas que tienen volatilidad cambiante en el tiempo. De acuerdo a lo anterior, se puede afirmar que la PRM de los sectores construcción, servicios financieros y alimentos son más inestables que la PRM del sector comunicaciones.

4.5. Modelos GARCH (m, n).

En el modelo teórico se estableció que si el factor macroeconómico (representado por a_0) dominaba al factor microeconómico (representado por a_2), entonces el valor de la PRM se alejará cada vez más de su valor de largo plazo, y viceversa. Esto implica que cuando $a_0 > a_2$, aumenta la volatilidad de la PRM. Lo contrario sucede cuando $a_0 < a_2$. Finalmente, cuando $a_0 = a_2$, la volatilidad de la PRM es constante. Desde el punto de vista práctico, los modelos GARCH (m, n) permiten representar adecuadamente la volatilidad de la PRM. En estos modelos, la varianza condicional de la PRM contemporánea será función de los valores realizados y pronosticados pasados de la volatilidad de la PRM. El término condicional proviene de que, por definición, la varianza de la PRM pronosticada en t es función de la información pasada hasta t-1. Formalmente:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i a^2(t-i) + \sum_{i=1}^n \beta_i \sigma^2(t-i), \quad (19)$$

donde las condiciones $\alpha_i > 0$ ($i=0,1,\dots,m$) y $0 < \alpha_i, \beta_i < 1$ ($i=1,\dots,m$) tienen que cumplirse para que no exista posibilidad de una varianza condicional contemporánea negativa y/o la posibilidad de una varianza condicional explosiva en el tiempo.

La ecuación (19) se puede interpretar de la siguiente forma: la volatilidad esperada contemporánea de la PRM es un promedio ponderado de la volatilidad esperada pasada, de la volatilidad inesperada pasada, y de una volatilidad de largo plazo. La primera, representada por los términos σ_{t-i}^2 y ponderada por los pesos β_i . La segunda, representada por los términos a_{t-i}^2 y ponderada por los pesos α_i . Por último, la tercera representada por el coeficiente α_0 .

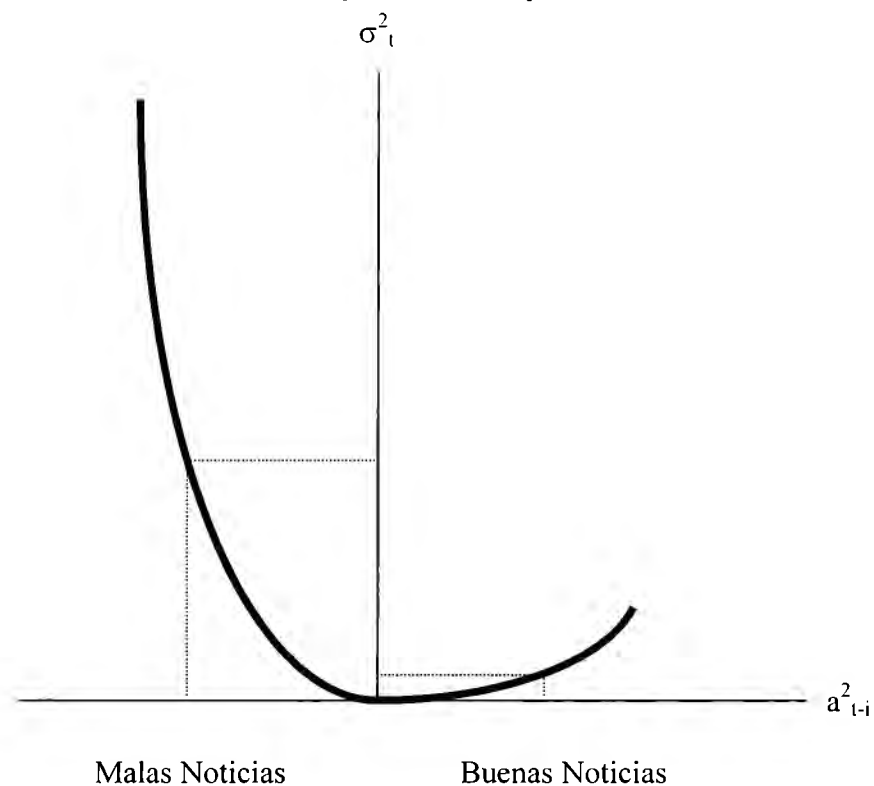
4.6. Efecto *Leverage* en la PRM.

Otra característica que poseen los rendimientos financieros es el efecto *leverage*. Este se presenta cuando, en cierto momento, aparecen malas noticias sobre la empresa, entendidas como una reducción en el valor de las acciones y, con ello, del valor de la empresa. Si el nivel de deuda permanece constante, aumentará la razón deuda-valor de la

empresa. Para los accionistas este incremento es un indicador de mayor riesgo. En conclusión, existe una relación directa entre las malas noticias y el riesgo.

El *leverage effect* se puede representar mediante un modelo TGARCH (Threshold ARCH). Según este, una mala noticia del pasado inmediato (representada por $a^2_{t-1} > 0$) aumenta la volatilidad condicional de la PRM es una magnitud mayor de lo que la aumenta una buena noticia, representada por $a^2_{t-1} < 0$. Véase la Figura 11.

Figura 11. Relación entre el Tipo de Noticia y la Volatilidad de la PRM



Para distinguir el tipo de noticia, se usa una variable dummy d_{t-1} que toma el valor uno cuando $a^2_{t-1} > 0$, y el valor cero en otro caso. El modelo TARCH se define como:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i a^2(t-i) + \sum_{i=1}^n \beta_i \sigma^2(t-i) + \gamma_1 a^2(t-1) d(t-1), \quad (20)$$

donde $\gamma > 0$. Observe que, cuando hay en t-1 malas noticias sobre la empresa, el efecto de éstas sobre la volatilidad de la PRM tiene una magnitud igual a $\alpha + \gamma$. En cambio, cuando hay buenas noticias, el efecto sólo es igual a α . En la Tabla 8 se presentan los resultados para la PRM de las acciones consideradas.

Tabla 8. Modelos GARCH (m, n) y TARARCH (m, n) Estimados

Sector/ Modelo	Construcción (Cemex CPO)	Servicios (GFNorte O)	Transformación (Femsa UBD)
GARCH			
Constante	0.0248 (0.0096)	0.0272 (0.1998)	0.0097 (0.0383)
ARCI(1)	0.4582 (0.0242)	0.0012 (0.0023)	0.1691 (0.0157)
Dummy	NA	0.5420 (0.0034)	NA
GARCH(1)	0.2747 (0.0981)	0.7050 (0.0000)	0.6885 (0.0000)

Los números entre paréntesis son los valores-p.
NA: No Aplica.

Note que los modelos GARCH (m, n) estimados son de órdenes $m=n=1$, lo cual también sucede generalmente en el caso de los rendimientos financieros.

La Tabla 8 indica que la varianza de largo plazo estimada es máxima para GFNorte O (0.0272) y mínima para Femsa UBD (0.0097). Asimismo, para las tres acciones, tanto la volatilidad inesperada del día anterior como la volatilidad esperada del día de ayer afectan directamente a la volatilidad esperada contemporánea. En particular, mientras que la volatilidad esperada actual de Femsa UBD y GFNorte O depende más de la volatilidad esperada pasada que de la inesperada, lo contrario sucede con Cemex CPO. Observe que GFNorte O es la única acción cuya volatilidad puede ser modelada por un proceso TARARCH. Por tanto, mientras que la PRM de las tres acciones posee efecto *clustering*, sólo la PRM de GFNorte posee, además, efecto *leverage*. De nuevo, esto es consistente con el hecho de que GFNorte sea la serie menos estacionaria.

5. Recomendación de Política.

Considere una función de utilidad de los inversionistas con $\alpha = 0.5$: es decir, se asume que los inversionistas tienen un grado promedio de aversión al riesgo. La función es:

$$U = R_m - \sigma_m^2 \quad (21)$$

De hecho, es posible completar (21) mediante la agregación de sensibilidades de la utilidad con respecto al rendimiento, β , y al riesgo, γ , donde $\beta \cdot \gamma > 0$. Entonces,

$$U = \beta R_m - \gamma \sigma_m^2 \quad (22)$$

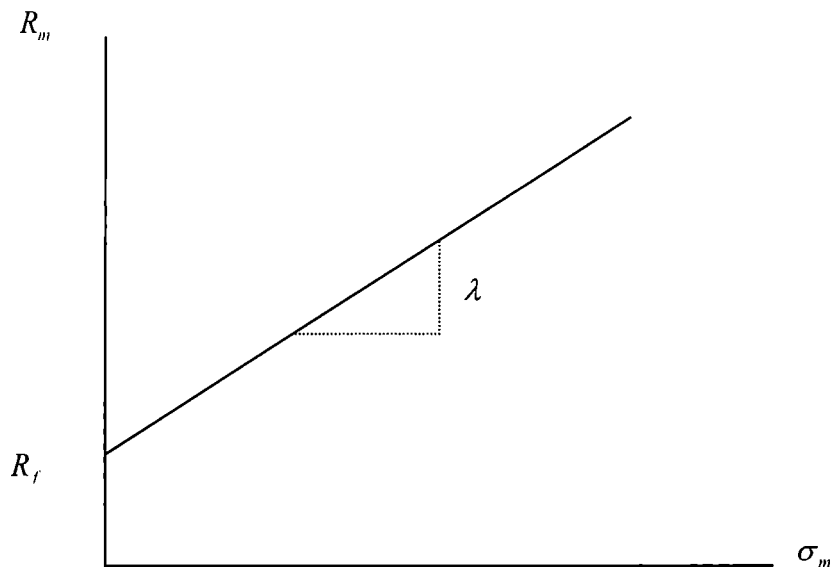
5.1. Posibilidades de los Inversionistas.

Adicionalmente, el modelo teórico indicaba que: (1) existe una relación directa entre riesgo y rendimiento, y (2) el rendimiento otorgado en ausencia de riesgo es la tasa libre de riesgo. Los puntos (1) y (2) pueden ser representados formalmente por la ecuación, pero aplicada al mercado:

$$R_m = R_f + \sigma_m \lambda \quad (23)$$

La Figura 11 representa a (23):

Figura 12. Relación rendimiento-riesgo que ofrece el mercado



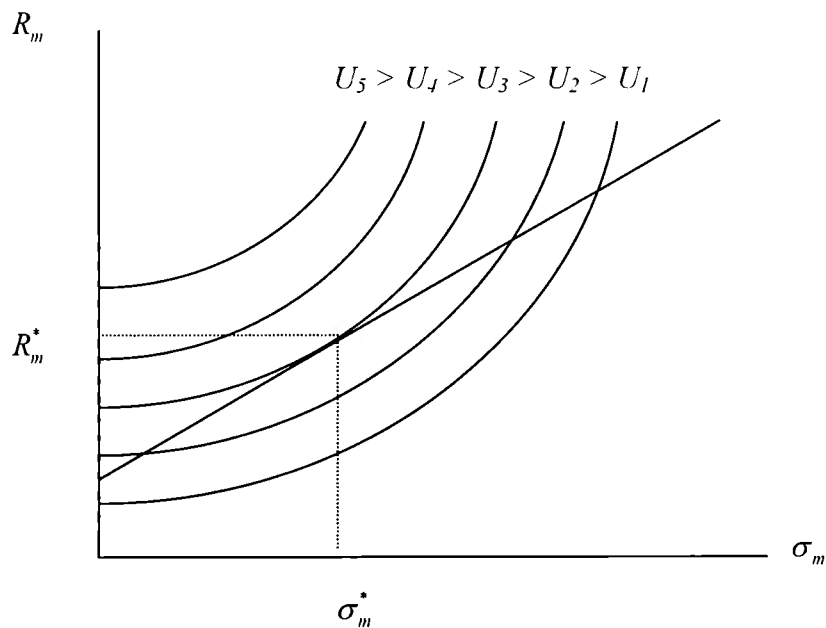
5.2. El Equilibrio.

Esta situación se presenta cuando coinciden las preferencias de los inversionistas con las posibilidades que les ofrece el mercado. Gráficamente, existe equilibrio cuando la curva de indiferencia y la recta CAPM son tangentes entre sí; es decir, cuando la pendiente de la curva es igual a la pendiente de la recta. Formalmente:

$$\frac{U_{\sigma_m}}{U_{R_m}} = \lambda, \quad (24)$$

donde U_i representa la derivada parcial de U con respecto a i ($i = \sigma_m, R_m$). De acuerdo a (24), la condición de equilibrio, que determina los niveles de rendimiento y riesgo que deben escoger los inversionistas para maximizar su utilidad, implica una igualdad entre la tasa marginal de sustitución y la PRM. La Figura 12 representa la solución óptima.

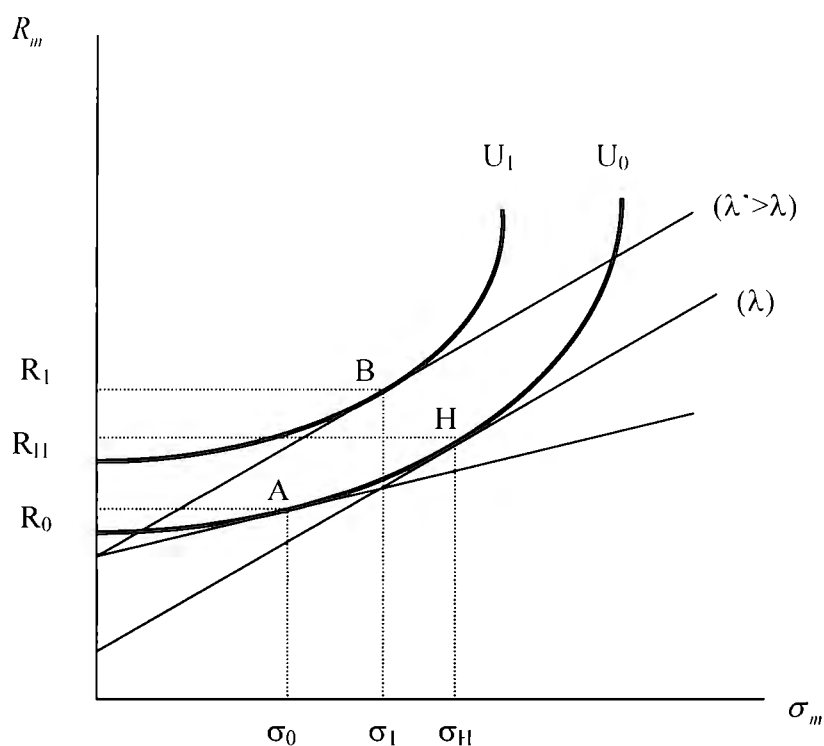
Figura 13. Determinación de los Niveles Óptimos de Riesgo y Rendimiento



5.3. Cambio en el Equilibrio ante un Incremento en la PRM.

Considere que, por algún motivo, se incrementa la PRM. En este caso, existen tres posibles nuevos equilibrios. En el primero, se incrementan los niveles óptimos de rendimiento y riesgo. En el segundo, disminuyen los dos. Finalmente, en el tercero, aumenta el rendimiento pero es incierto lo que le sucede al riesgo. El nuevo equilibrio dependerá de las magnitudes del efecto sustitución e ingreso. La Figura 13 representa el nuevo equilibrio, ante un cambio en la PRM, en el que se ejemplifican con niveles mayores de rendimiento y riesgo.

Figura 14. Determinación de los Niveles Óptimos de Riesgo y Rendimiento



En la Figura 13, los puntos A y B representan los equilibrios inicial y final, respectivamente. En cambio, el punto H es resultado de la recta CAPM con una compensación tipo “Hicks”. Esta consiste en hacer tangente la nueva recta CAPM, con la mayor PRM, con la curva de indiferencia original. De este modo, el cambio del punto A al punto H representa el *efecto sustitución*; el cambio del punto H al punto B indica el

efecto ingreso. Finalmente, el cambio del punto A al punto B es el *efecto total*. A continuación se describe cada uno de ellos.

(i) *Efecto sustitución*. Es el cambio en el rendimiento cuando cambia la PRM y el nivel de utilidad original permanece constante. Dada la forma de las curvas de indiferencia, un incremento en la PRM siempre conduce a un aumento en el rendimiento, y también en el riesgo. Intuitivamente, un incremento en la PRM provoca un aumento en el precio del riesgo y una caída en el precio relativo del rendimiento. Por ello, el inversionista adquirirá más rendimiento.

(ii) *Efecto ingreso*. Es el cambio en el rendimiento ante un cambio en el ingreso. En el ejemplo de la Figura 13, el rendimiento es un bien inferior con respecto al ingreso. Para ver esto considere lo siguiente. El ingreso de un inversionista, representado por el rendimiento, tiene dos componentes: un componente base, la tasa libre de riesgo, y un componente variable, dado por la PRM ponderada por el riesgo. Cuando aumenta la PRM, aumenta el ingreso. Sin embargo, el rendimiento aumentará, disminuirá o se quedará constante de acuerdo a si éste es un bien normal, inferior o neutral con respecto al ingreso.

(iii) *Efecto total*. Es la suma de los efectos sustitución e ingreso. Por ello, puede resultar en un aumento, disminución o constancia del rendimiento. En el ejemplo de la Figura 13, domina el efecto sustitución al efecto ingreso por lo que el efecto total es un incremento tanto en el rendimiento como en el riesgo.

5.4. Un Ejemplo Algebraico.

Reconsidere la siguiente función de utilidad (18). De acuerdo a ella, la utilidad depende directamente del rendimiento e inversamente del riesgo, representado en este caso por la varianza. Los parámetros β y γ representan las sensibilidades de la utilidad con respecto al rendimiento y riesgo, respectivamente. En tanto, la ecuación CAPM viene dada por (23). Con ello, el objetivo del inversionista es maximizar (22) sujeta a (23).

Con la condición de primer orden (CPO) del problema anterior se obtiene de inmediato el nivel óptimo de riesgo:

$$\sigma_m^* = \frac{\beta \lambda}{\gamma} \quad (25)$$

La ecuación (25) indica que, entre mayor es la PRM y la preferencia por rendimiento β , mayor es el nivel óptimo de riesgo. Lo contrario sucede cuando mayor es el parámetro de aversión al riesgo γ . Si se sustituye σ^* en la recta CAPM, resulta:

$$R_m^0 = R_f + \lambda^2 \frac{\beta}{\gamma} \quad (26)$$

Por (26), el nivel óptimo de rendimiento también depende directamente de la tasa libre de riesgo, la PRM y β , e inversamente de γ . Finalmente, el nivel de utilidad obtenido es $U = \beta R^0 - \gamma \sigma_0^2$. Para calcular los niveles de rendimiento y riesgo debido al efecto sustitución, R_H y σ_H^2 , basta con encontrar las soluciones al sistema de ecuaciones:

$$2 \frac{\gamma}{\beta} \sigma_H = \lambda' \quad (27)$$

$$U_0 = \beta R_H - \gamma \sigma_H^2, \quad (28)$$

donde λ' es la nueva PRM (recuerde que $\lambda' > \lambda$). Esto es, los niveles de rendimiento y riesgo R_H y σ_H^2 deben satisfacer la CPO y dar lugar al nivel original de utilidad U^* . Es fácil demostrar que los niveles R_H y σ_H vienen dados por:

$$\sigma_H = \frac{\lambda' \beta}{2\gamma} \quad (29)$$

$$R_H = \frac{U_0 + \gamma \sigma_H^2}{\beta} \quad (30)$$

5.5. Un Ejemplo Numérico.

Asuma que $\beta=\gamma=\lambda=R_1=1$. En este caso, los niveles iniciales óptimos de riesgo y rendimiento son $\sigma_0=0.5$ y $R_0=1.5$. Si la PRM se incrementa, de una vez y para siempre, a dos ($\lambda'=2$) en el período $t=s$, entonces los niveles de riesgo y rendimiento bajo el efecto sustitución son $\sigma_{11}=1$ y $R_{11}=2.25$. Por último, los niveles finales óptimos de riesgo y rendimiento son $\sigma_1=1$ y $R_1=3$. Por tanto, los efectos sustitución e ingreso quedan definidos como sigue:

Efecto sustitución: $(\sigma_{11}-\sigma_{11})=0.5$, y $(R_{11}-R_{11})=0.75$.

Efecto ingreso: $(\sigma_1-\sigma_{11})=0$, y $(R_1-R_{11})=0.75$.

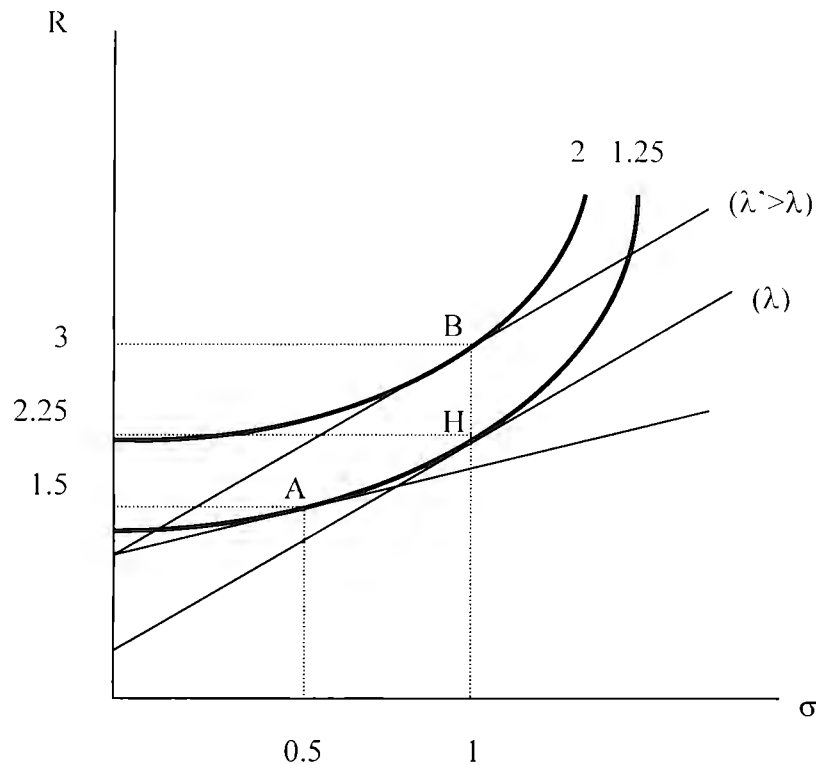
Efecto total: $(\sigma_1-\sigma_0)=0.5$, y $(R_1-R_0)=1.5$.

Observe que, mientras que el rendimiento es un bien normal al ingreso, el riesgo es un bien neutral. Finalmente, el nivel de utilidad de los inversionistas pasa de $U_0=1.25$ a $U_1=2$. En conclusión, un incremento en la PRM incrementa los niveles aceptados de rendimiento y riesgo, y el bienestar de los inversionistas. Véase las Figura 15 y 16.

Figura 15. Cambio Permanente en la PRM



Figura 16. Cambio en los Niveles de Riesgo, Rendimiento y Utilidad ante un Aumento en la PRM



Nótese que el tipo y magnitud del cambio en el nivel de utilidad del inversionista se encuentran relacionados en el mismo sentido que el tipo y magnitud de cambio de la PRM. Específicamente, si la PRM aumenta en el tiempo, lo mismo sucederá con la utilidad, y viceversa. Del mismo modo, un cambio permanente -temporal- en la PRM se relaciona con un cambio permanente -temporal- en la utilidad.

De acuerdo a lo anterior, la dinámica de la PRM parece un indicador adecuado para conocer la evolución temporal del bienestar de los agentes que adquieren activos financieros. Por ejemplo, si la PRM presenta una trayectoria creciente debido a que el factor macroeconómico (crecimiento económico) domina al factor microeconómico (estabilidad industrial), el bienestar de los inversionistas también presentará una tendencia creciente. Lo contrario sucederá con una PRM decreciente en el tiempo. La Tabla 9 representa lo anterior.

Tabla 9. PRM y Utilidad de los Inversionistas

Factor Dominante	Trayectoria de la PRM	Trayectoria de la Utilidad de Inversionistas
Crecimiento Económico	Creciente	Creciente
Estabilidad de la Industria	Decreciente	Decreciente

Por tanto, la recomendación de política es la siguiente: si una economía desea aumentar el nivel de bienestar de los inversionistas en forma permanente, entonces es conveniente que se incentive el crecimiento económico para aumentar la posibilidad de que éste domine a la estabilidad del sector industrial y, con ello, la PRM y la utilidad del grupo presenten dinámicas crecientes. Finalmente, observe que esto implica, sin ambigüedad, que los inversionistas tomen un mayor nivel de rendimiento pero un nivel de riesgo incierto. Por ejemplo, los inversionistas podrían ser adversos al riesgo a, aún así, tomar un nivel mayor de éste. La Tabla 10 muestra resultados basados en el ejemplo numérico.

Tabla 10. PRM y Riesgo de los Inversionistas

Factor Macroeconómico (Crecimiento Económico)	Dinámica de la PRM	Bienestar de los Inversionistas	Rendimiento Tomado por los Inversionistas	Riesgo Asumido por los Inversionistas
Incentivado	Creciente	Mayor	Mayor	Mayor

6. Conclusiones.

La PRM es uno de los indicadores financieros más comúnmente usados para medir la relación rendimiento-riesgo que tiene un activo financiero. Existe literatura abundante sobre los factores económicos que la determinan. Sin embargo, existe poca literatura que describa su evolución temporal. Este trabajo tuvo como objetivo presentar un modelo que determina la dinámica de la PRM, el cual se basa en una ecuación en diferencias de segundo orden con coeficientes constante. De acuerdo a los signos que presenten los parámetros de la ecuación, la PRM tendrá una trayectoria temporal cíclica convergente o divergente. Estos parámetros se encuentran asociados, entre otros factores, con el entorno macroeconómico y la estabilidad del sector industrial al cual pertenece la empresa analizada.

Para complementar el modelo teórico, se propuso evidencia empírica consistente en analizar cinco acciones del IPC (AMX L, Cemex CPO, GFNorte O, Femsa UBD y GCarso A1). Las conclusiones son las siguientes.

En primer lugar, el valor promedio de la PRM es cercano a cero y las distribuciones empíricas de la PRM de los activos son, en general, leptocúrticas y sesgadas a la izquierda. Entonces, la PRM hereda las propiedades que, para Gouriéroux [2001], generalmente presenta los rendimientos de activos financieros riesgosos.

En segundo lugar, la PRM de cada activo es una serie estacionaria en media. Esta conclusión es consistente con Copeland, Weston y Shastri [2005]: por medio de una regresión de la PRM contra el tiempo, obtienen que la estimación del parámetro de tendencia es estadísticamente no significativo, por lo que la PRM es constante en el tiempo.

En tercer lugar, la mayor volatilidad en la PRM es presentada por las acciones de los sectores económicos construcción, servicios financieros y transformación, mientras que la menor volatilidad es presentada por el sector comunicaciones y transportes. Este

resultado es consistente con Landskroner [1977] quien concluyó que la industria con mayor PRM era la construcción.

Finalmente, dada la estacionariedad en media de cada PRM, fue posible aplicar modelos ARMA (p, q) adecuados. Adicionalmente, dado que tres de las cinco acciones presentaron *efecto clustering*, volatilidad condicional cambiante en el tiempo, fue posible modelarlas con procesos GARCH (m, n) adecuados. Inclusive, una acción, GFNorte O, presentó *efecto leverage*, en el que las innovaciones negativas tienen un mayor peso que las positivas en un proceso GARCH (m, n). La estimación de la PRM con modelos GARCH (m, n) está en línea con la usada por Hefner y Herwartz [2001], quienes proponen modelos de este tipo como las mejores aproximaciones para describir la evolución temporal de la PRM.

7. Bibliografia.

Alvarez, F. and U. J. Jermann [2001] "Quantitative Asset Pricing Implications of Endogenous Solvency Constraints". *Review of Financial Studies*, Vol. 14, pp. 1117-1152.

Backus, D., A. Gregory, and C. Telmer [1993] "Accounting for Forward Rates in Markets for Foreign Currency". *Journal of Finance*, Vol. 5, No. , pp. 1887-1908.

Bansal R. [1997] "An Explanation of the Forward Premium Puzzle in Currency Markets", *Review of Economic Studies*, 10, pp. 369-403.

Bansal, R., R. Gallant, B. Hussey, and G. Tauchen [1995] "Non Parametric Structural Estimation of Models for High Frequency Currency Market Data", *Journal of Econometrics*, 66, pp. 251-287.

Bekaert, G. [1996] "The Time Variation of Risk and Return in Foreign Exchange Markets: A General Equilibrium Perspective", *Review of Financial Studies*, 9, pp. 427-470.

Copeland, T. E., J. F. Weston, and K. Shastri [2005], *Financial Theory and Corporate Policy*. Pearson Addison Wesley.

Friend, Irwin, Marshall E. Blume [1975], "The Demand for Risky Assets", *American Economic Review*, 65, pp. 900-922.

Hansen, L. M.; T. J. Sargent; T. D. Tallarini Jr. [1999], "Robust Permanent Income and Pricing", *The Review of Economic Studies*, 66, pp. 873-907.

Hodrick, R. J. [1989] "Risk, Uncertainty and Exchange Rate". *Journal of Monetary Economics*, 23, pp. 433-459.

Landskroner, Yoram [1977] "Non Marketable Assets and the Determinants of the Market Price of Risk", *Review of Economics and Statistics*, 59, pp. 482-492.

Lin, W. T. y F. C. Jen [1980] "Consumption, Investment Market Price of Risk and the Risk Free Rate", *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15, pp.1025-1040.

Linter, John [1970] "The Market Price of Risk, Size of Market and Investors Risk Aversion", *Review of Economics and Statistics*, 52, pp. 87-99.

Litzenberger, R. H. y A. P. Budd [1972] "Secular Trend in Risk Premiums", *Journal of Finance*, 27, pp. 857-864.

Lustig, Hanno [2001] "The Market Price of Aggregate Risk and the Wealth Distribution", *Working Paper*, Stanford University, pp. 87-99.

McMillan, H. M. [1986] "Nonassignable Pensions and the Price of Risk", *Journal of Money, Credit and Banking*, 18, pp. 60-75.

Mehra, R. y E. C. Prescott [1985] "The Equity Premium: A Puzzle", *Journal of Monetary Economics*, 15, pp. 145-161.

Schilbred, C. M. [1973] "The Market Price of Risk", *Review of Economic Studies*, 40, pp. 283-292.