

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES
DE MONTERREY

CAMPUS CIUDAD DE MÉXICO



TECNOLÓGICO
DE MONTERREY

Biblioteca
Campus Ciudad de México

DESCOMPOSICIÓN Y UTILIZACIÓN DE LA MATRIZ DE
COVARIANZAS A PARTIR DE UN MODELO DE
EQUILIBRIO

La Matriz de covarianzas de residuales en la asignación y
valuación de activos

DOCTORADO EN ADMINISTRACIÓN

TESIS PRESENTADA POR
BENJAMÍN GARCÍA MARTÍNEZ

ASESOR
DR. HUMBERTO VALENCIA HERRERA

MARZO 2008

Resumen

En este trabajo se propone el uso de la matriz de covarianzas de los residuales, resultado de la estimación lineal de los rendimientos de los activos respecto a un *proxy* de mercado, para obtener las ponderaciones óptimas de los activos en un portafolio de activos con riesgo. Aun cuando el *proxy* no sea eficiente en el sentido media-varianza, el vector de ponderaciones resuelve, dado un nivel de riesgo sistemático (asociado al *proxy*), un portafolio de mínima varianza y mayor beneficio de la diversificación. De igual manera, se propone la utilización de ésta matriz para calcular un factor de riesgo no observado que mejore el análisis de corte transversal de los rendimientos esperados. Esto sugiere que existe una estructura exacta de determinación de precios basada en un enfoque multidimensional del riesgo, dentro del contexto de los modelos de equilibrio general de la determinación de precios de los activos bajo condiciones de incertidumbre.

ÍNDICE

Introducción.....	5
I. Teoría del mercado de capitales y el modelo de equilibrio.....	7
I.1 Condición de equilibrio de mercado.....	10
Introduciendo el activo libre de riesgo.....	10
Introduciendo el portafolio de mercado.....	13
Diversificación y equilibrio de mercado.....	17
El rendimiento de equilibrio de los activos.....	18
II. El modelo de equilibrio y la matriz de covarianzas.....	19
Restricciones para pedir e invertir a la tasa libre de riesgo.....	19
Relación lineal del rendimiento de cada activo respecto al portafolio eficiente y la separación del riesgo sistemático y no sistemático de la varianza del portafolio.....	21
III. <i>Proxy</i> de mercado, asignación de activos y la matriz de covarianzas.....	32
La matriz de covarianzas de los residuales.....	33
IV. La valuación de activos y la matriz de covarianzas de los residuales.....	38
V. Análisis empírico.....	42
V.1 Simulación.....	42
V.2 Análisis del periodo Abril de 2002- Abril de 2004.....	47
V.3 Estimación	48
El riesgo de la covarianzas residual.....	48
Abril 2002-Abril 2003.....	51
El resto de los subperiodos.....	58
VI. Resumen.....	75
VII. Conclusiones.....	79
Bibliografía.....	82

ÍNDICE FIGURAS Y TABLAS

Figura 1.....	10
Figura 2.....	12
Figura 3.....	14
Figura 4.....	19
Figura 5.....	21
Figura 6.....	24
Figura 7.....	31
Figura 8.....	39
Figura 9.....	44
Figura 10.....	45
Figura 11.....	46
Figura 12.....	47
Figura 13.....	48
Figura 14.....	53
Figura 15.....	54
Figura 16.....	55
Figura 17.....	57
Figura 18.....	58
Figura 19.....	61
Figura 20.....	62
Figura 21.....	63
Figura 22.....	65
Figura 23.....	66
Figura 24.....	67
Figura 25.....	69
Figura 26.....	70
Figura 27.....	71
Figura 28.....	73
Figura 29.....	74
Figura 30.....	75
Tabla 1.....	45
Tabla 2.....	48

Tabla 3.....	52
Tabla 4.....	53
Tabla 5.....	54
Tabla 6.....	56
Tabla 7.....	57
Tabla 8.....	58
Tabla 9.....	60
Tabla 10.....	60
Tabla 11.....	61
Tabla 12.....	62
Tabla 13.....	62
Tabla 14.....	64
Tabla 15.....	64
Tabla 16.....	65
Tabla 17.....	66
Tabla 18.....	66
Tabla 19.....	68
Tabla 20.....	68
Tabla 21.....	69
Tabla 22.....	70
Tabla 23.....	70
Tabla 24.....	72
Tabla 25.....	72
Tabla 26.....	73
Tabla 27.....	74
Tabla 28.....	74
Tabla 29.....	77
Tabla 30.....	78
Tabla 31.....	79
Tabla 32.....	80

INTRODUCCIÓN

En el marco de los modelos media-varianza de equilibrio general en la determinación de los precios de los activos, a partir del portafolio de mercado y la tasa libre de riesgo, la evidencia empírica muestra un bajo nivel de explicación de los rendimientos esperados de los activos en relación con las betas estimadas con base en este concepto de equilibrio de mercado.

En los modelos basados en el análisis de factores de riesgo, la matriz de covarianzas de los errores, producto de la relación lineal de los rendimientos de los activos respecto a los rendimientos de un *proxy* de mercado, juegan un papel fundamental. Se sugiere que esta matriz contiene información tanto de posibles factores de riesgo no observados u omitidos, como de la propia correlación contemporánea entre los rendimientos de los activos, situación que se refleja en que la varianza residual no es necesariamente eliminada en la construcción de portafolios.

En la construcción de los modelos de factores, el principal problema es la identificación de los mismos. Entre las diferentes estrategias para construir el modelo de factores, se encuentran los enfoques estadísticos que desde la matriz de covarianzas muestral, usan análisis de factores, o de componentes principales para identificar factores de riesgo (Connor & Korajczyk, 1986); también están los que agrupan activos de acuerdo a ciertas características que les son comunes y explicar rendimientos diferentes del promedio (Fama & French, 1993)

En este trabajo se propone utilizar la matriz de covarianzas de los errores para calcular las ponderaciones de los activos que minimicen el componente residual del portafolio en relación con un *proxy* de mercado seleccionado. Posteriormente, siguiendo la línea de trabajo de MacKinlay & Pastor (2000), y aplicando la metodología de construcción de portafolio ortogonales propuesta por Roll (1980) la matriz de covarianzas es utilizada para estimar un factor de riesgo no observado, eliminando el elemento de sub/sobrevaluación (mispricing) de los rendimientos esperados respecto al factor que sí es observado.

El marco teórico del trabajo se presenta en los capítulos I y II. Se expone en la primera parte, los fundamentos del modelo de equilibrio general y se deriva la condición de equilibrio de los rendimientos de los activos en el mercado. Posteriormente, se propone siguiendo la línea de este modelo la descomposición de la matriz de covarianzas en su parte sistemática y no sistemática. En este apartado se realizan algunas *Proposiciones* derivadas de marco teórico que sirven de sustento para la propuesta metodológica del trabajo y la utilización de la matriz de covarianzas de los residuales.

La Metodología del trabajo es presentada en los capítulos III y IV. En el capítulo III se presenta la técnica para calcular un vector de ponderaciones a partir de la varianza residual. En el capítulo IV se expone la metodología para obtener el factor de riesgo no observado, eliminando el elemento de sub/sobrevaluación observado en el análisis de corte transversal.

El trabajo empírico se muestra en el capítulo V. Primeramente se exponen los resultados de la simulación para mostrar que las *Proposiciones* hechas sobre la descomposición de la matriz de covarianzas en su parte sistemática y no sistemática, justifican el uso de la minimización de la varianza residual para obtener el vector w de asignaciones (aun cuando no se satisfagan las condiciones de tangencia que propone el modelo de equilibrio).

En el capítulo VI se presenta un resumen de los resultados y en el capítulo VII las conclusiones del trabajo

I. Teoría del mercado de capitales y el modelo de equilibrio

El desarrollo de la teoría moderna del mercado de capitales incluye a los modelos de equilibrio general de la determinación de los precios de los activos de capital bajo condiciones de incertidumbre¹.

Este trabajo adopta el enfoque de los modelos media-varianza² siguiendo la aportación de Markowitz (1959). El trabajo de Markowitz se centra en el problema de la selección de activos en el portafolio que maximiza la Utilidad de los inversionistas bajo condiciones de incertidumbre. El espacio en el que están definidas las preferencias es el de media-varianza generado a partir de la distribución de probabilidad de los rendimientos del portafolio en un solo periodo.

A partir de esta aportación se realizan y desarrollan las bases para la construcción de la Teoría de valuación de los activos. Entre ellas están los modelos de equilibrio general de valuación de los activos derivados por Treynor (1961), Sharpe (1964), Lintner (1965), Mossin (1966) y Fama (1965). Estos modelos derivan una estructura de equilibrio de los precios de los activos en el mercado. Es decir, la estructura de precios, en cualquier momento, refleja condiciones de equilibrio general; los precios se determinan de manera simultánea en el mercado.

El modelo media-varianza de Markowitz, permite construir todas las posibles combinaciones de los activos con riesgo disponibles en el espacio media-varianza. Los portafolios que permiten el máximo rendimiento esperado para un nivel dado de desviación estándar y la mínima desviación estándar para cada rendimiento esperado, representan el conjunto de portafolios eficientes.

Para obtener estos portafolio se requiere construir inicialmente los portafolios frontera, estos son aquellos portafolios de mínima varianza entre todos los portafolios de igual rendimiento esperado.

¹ Existe otro enfoque de las preferencias de estado (state-preferences) desarrollado originalmente por Arrow (1964) Debreu (1959).

² Usaremos indistintamente media-varianza y riesgo-rendimiento para referirnos al espacio en que se definen los activos y las preferencias.

Definimos

\mathbf{w} como un vector $N \times 1$ de las ponderaciones en que participa cada activo en el portafolio

\mathbf{w}_P como las ponderaciones óptimas de portafolios frontera.

\mathbf{e} como un vector $N \times 1$ de los rendimientos de los activos en el portafolio.

Σ como la matriz de covarianzas entre los rendimientos de los activos en el portafolio, matriz simétrica y positiva definida.

Para obtener las ponderaciones (\mathbf{w}_P) de los activos en estos portafolios frontera, a través de programación cuadrática se resuelve

$$\text{Min } \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \quad (1)$$

$$\text{s.a. } \mathbf{w}^T \mathbf{e} = E(r_P) \quad (2)$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1 \quad (3)$$

En virtud de que Σ es positiva definida, las condiciones de primer orden son necesarias y suficientes para un máximo global. La solución a este problema de optimización implica resolver

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} + \lambda [E(r_P) - \mathbf{w}^T \mathbf{e}] + \gamma [1 - \mathbf{w}^T \mathbf{1}]$$

$$(\mathbf{w}, \lambda, \gamma)^3$$

Todas las posiciones que representan un portafolio sobre la frontera, constituyen el conjunto de oportunidades de inversión. El conjunto de portafolios eficientes está definido como aquellos portafolios para los que dado un nivel particular de varianza tienen el máximo rendimiento esperado. Este es el conjunto por arriba de la posición de mínima varianza.

El conjunto de portafolios eficientes es un conjunto convexo y acotado. La Tasa Marginal de Sustitución (TMS) media-varianza sobre todos los portafolios frontera esta definida para todos los activos en el portafolio. En particular una $TMS > 0$, está definida en el conjunto eficiente y es la pendiente sobre la frontera. La TMS de sustitución

³ La solución a este problema se presentará con detalle más adelante

depende de la contribución al rendimiento y al riesgo total del portafolio de una activo cualquiera.

$$TMS = \frac{\frac{\partial E(R_p)}{\partial w_i}}{\frac{\partial \sigma^2(R_p)}{\partial w_i}} = \frac{\partial E(R_p)}{\partial \sigma^2(R_p)} \quad \text{donde } i=1, \dots, N \quad (4)$$

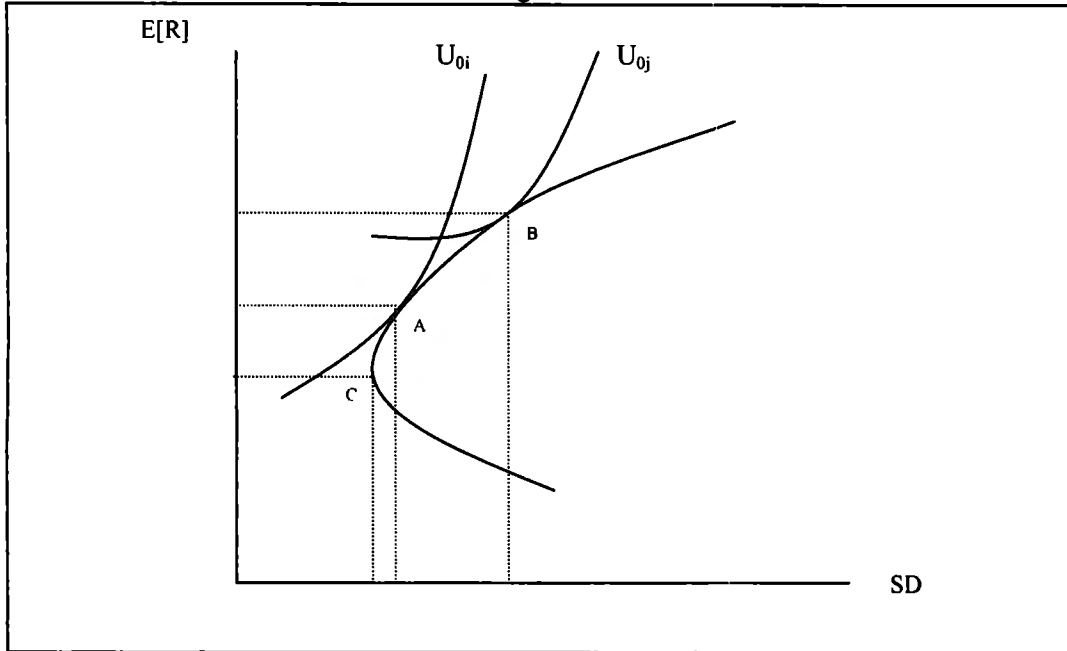
El conjunto de portafolios frontera tiene una propiedad importante: si combinamos dos o más portafolios de mínima varianza, obtenemos otro portafolio de mínima varianza. Esto significa que de todas las posibles combinaciones entre los activos en un portafolio, aquellas que satisfacen estar en el conjunto de mínima varianza al combinarlos estarán en el mismo conjunto⁴.

Por el lado de los inversionistas, asumiendo que los rendimientos se distribuyen como una normal y la existencia de aversión al riesgo, se tienen las condiciones suficientes para construir curvas de indiferencia convexas y con pendiente positiva en el mismo espacio media-varianza.

Así, dadas las preferencias de los individuos y el conjunto de portafolios eficientes, se seleccionan los portafolios que satisfacen la condición de tangencia, tal que los inversionistas maximizan su Utilidad, dado el conjunto de portafolios eficientes.

⁴ Un supuesto para que esto ocurra es que se pueden realizar ventas en corto e invertir estos ingresos sin restricción. Las implicaciones de esta propiedad son fundamentales en el modelo de CAPM, pues si cada inversionista mantiene un portafolio eficiente, la combinación de ellas será también eficiente.

Figura 1



Dado el conjunto de portafolios frontera, el conjunto de portafolios eficientes (definido a partir del portafolio C de mínima varianza), el inversionista maximiza su Utilidad. La condición de tangencia se satisface en los portafolios A y B, donde el individuo j es más averso al riesgo que el individuo i.

I.1 Condiciones de equilibrio en el mercado

Introduciendo un activo libre de riesgo

Al introducir un activo libre de riesgo y la posibilidad de que los individuos puedan pedir y prestar ilimitadamente a esta tasa, la selección de un portafolio dentro del conjunto de portafolios eficientes permite construir un conjunto de oportunidades lineal en el espacio riesgo-rendimiento. Expresando el rendimiento esperado y la varianza de un portafolio que combina un portafolio sobre la frontera eficiente y un activo libre de riesgo:

$$E(r_C) = \alpha E(r_p) + (1 - \alpha)r_f \quad (5)$$

$$\sigma^2(r_C) = \alpha^2 \sigma^2(r_p) \quad (6)$$

donde:

r_C es el rendimiento de un portafolio formado con un portafolio con riesgo y un activo libre de riesgo

r_P es el rendimiento de un portafolio eficiente

r_f la tasa libre de riesgo

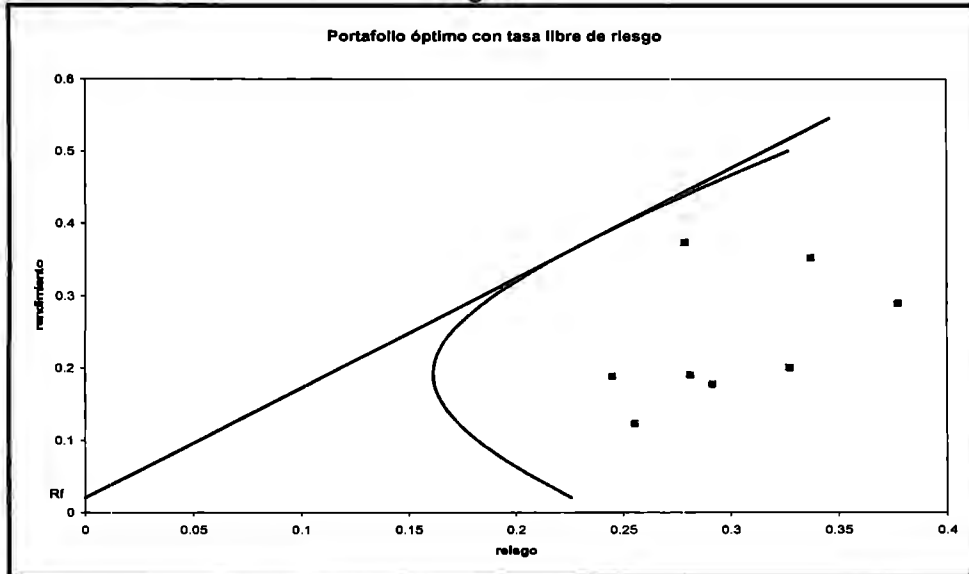
Si el activo libre de riesgo no existe, los inversionistas tomarían posiciones en varios puntos sobre el conjunto eficiente y la composición de cada portafolio sería diferente.

Sin considerar el grado de aversión al riesgo de los inversionistas, la contribución al rendimiento y a la varianza del portafolio completo (r_C) del cambio en el porcentaje invertido en el activo o portafolio con riesgo, se describen a continuación:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E(r_C)}{\partial \alpha} &= E(r_P) - r_f \\ \frac{\partial \sigma(r_C)}{\partial \alpha} &= \sigma(r_P) \\ \Rightarrow \frac{\partial E(r_C)}{\partial \sigma(r_C)} &= \frac{E(r_P) - r_f}{\sigma_P}\end{aligned}\tag{7}$$

La pendiente de esta relación es constante e independiente de la proporción invertida en el portafolio con riesgo (sobre el nuevo conjunto de posibilidades de inversión). Es de resaltar, sin embargo, que en el caso de un portafolio sobre la frontera eficiente, las ponderaciones invertidas en cada activo con riesgo dentro del portafolio estarán determinadas al maximizar la pendiente. Así, la elección de un portafolio, dada la tasa libre de riesgo, permite seleccionar el portafolio que maximiza el rendimiento de un portafolio sobre la tasa libre de riesgo por unidad de riesgo. La elección de las ponderaciones entre el portafolio con riesgo y el activo libre de riesgo (α , $1-\alpha$), no altera las ponderaciones del portafolio eficiente seleccionado. Para cada nivel de r_f , la pendiente de este conjunto de oportunidades que maximiza el exceso de rendimiento por unidad de riesgo, igualará la TMS riesgo-rendimiento sobre el conjunto convexo de oportunidades de inversión definido sobre la frontera de portafolios eficientes.

Figura 2



La Selección del portafolio con riesgo sobre la frontera eficiente es independiente del nivel de aversión al riesgo del inversionista. El portafolio con riesgo seleccionado es aquel que maximiza el risk-premium del portafolio por unidad de riesgo, dada la tasa libre de riesgo. Esta relación representa el conjunto de oportunidades de inversión que satisface la relación lineal.

En general, este resultado implica que puede representarse el conjunto de solución factible:

$$E(r_C) = r_f + \frac{E(r_P) - r_f}{\sigma(r_P)} \sigma(r_C) \quad (8)$$

Las ponderaciones de los activos con riesgo en el portafolio P son aquellas que maximizan la pendiente de la relación lineal y satisfacen la tangencia sobre la frontera eficiente.

$$\text{Max}_w \frac{E(r_P) - r_f}{\sigma(r_P)}$$

s.a.

$$[\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}]^{1/2} = \sigma(r_P)$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{e} = E(r_P)$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1$$

Introduciendo el portafolio de mercado

Se produce un avance importante en la construcción del modelo de equilibrio al considerar los siguientes supuestos:

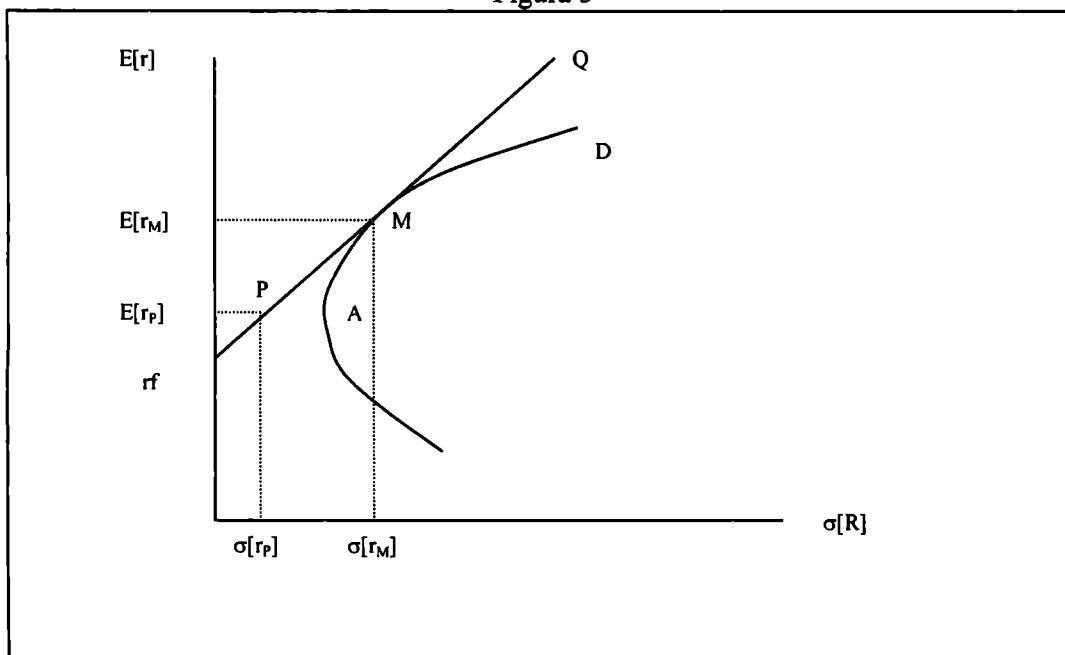
- Todos los inversionistas maximizan la Utilidad esperada de su riqueza terminal en un solo periodo, escogiendo entre portafolios alternativos y sobre la base de la relación media-varianza de los rendimientos.
- Todos los inversionistas pueden pedir e invertir una cantidad ilimitada a una tasa libre de riesgo, determinada de manera exógena y no tienen restricciones de ventas en corto sobre los activos con riesgo.
- Todos los inversionistas tienen y enfrentan idénticas estimaciones de medias, varianzas y covarianzas de los rendimientos de todos los activos.
- Todos los activos son perfectamente divisibles y líquidos y no hay costos de transacción.
- No hay impuestos.
- Todos los inversionistas son tomadores de precios.
- Todas las cantidades de los activos están dadas.

Como resultado de incorporar estos supuestos, la relación lineal entre el portafolio eficiente de activos con riesgo y el activo libre de riesgo se transforma en la línea del mercado de capitales (CML).

Todos los inversionistas tendrán portafolios sobre la línea r_fMQ (Figura 3), es decir, comprarán solo los activos del portafolio M y el activo libre de riesgo.

El mercado de capitales, por tanto, estará en equilibrio si M es el portafolio de mercado. Donde este portafolio de mercado es el portafolio que contiene todos y cada uno de los activos exactamente en razón al valor total del activo respecto al valor total de todos los activos en el mercado.

Figura 3



El portafolio M es el portafolio de mercado. Contiene todos y cada uno de los activos en el mercado. Dados los supuestos, todos los inversionistas comprarán el portafolio M, independientemente de su nivel de aversión al riesgo. El portafolio P, resulta de la relación lineal entre el portafolio M y el activo r_f .

Si reescribimos la ecuación (8) del conjunto de oportunidades que resulta de la relación lineal entre el activo libre de riesgo y el portafolio de mercado⁵ tenemos:

$$E(r_p) = r_f + \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma(r_M)} \sigma(r_p) \quad (9)$$

Claramente, todos los portafolios por debajo del punto M a lo largo AMD son ineficientes (tienen menor rentabilidad dado un cierto nivel de riesgo medido por la desviación estándar), puesto que cualquier punto sobre la línea r_fMQ representa una solución factible, con un nivel de rendimiento mayor para cualquier nivel de desviación estándar. En equilibrio, todos los inversionistas que seleccionan portafolios eficientes ex-ante, tendrán combinaciones media-varianza sobre ésta línea en función de su grado de aversión al riesgo.

⁵ A partir de este punto y para hacer congruente la nomenclatura, llamaremos P a cualquier portafolio que satisfaga una relación lineal con el portafolio de mercado.

Tal vez, uno de los resultados más importante de este modelo es que en equilibrio el rendimiento esperado de cualquier portafolio eficiente P (sobre r_f MQ) esta linealmente relacionado al rendimiento esperado del portafolio de mercado. Bajo estas condiciones de equilibrio los precios se ajustan para eliminar excesos de demanda para todos y cada uno de los activos, donde cada w_i refleja el peso del activo i en el portafolio de mercado.

$$w_i = \frac{V_i}{\sum_i^n V_i} \quad (10)$$

V_i es el valor en el mercado del activo i

ΣV_i es valor total del mercado

De esta manera, *el equilibrio del mercado es alcanzado hasta que el portafolio de tangencia M, sea el portafolio del mercado y r_f sea la tasa que iguale a nivel agregado préstamos e inversiones.* En consecuencia, la condición de tangencia sería la misma para cada individuo así como el precio del riesgo que enfrentan⁶. El conjunto de oportunidades de inversión (Capital Market Line) que enfrentan es una composición de un porcentaje del portafolio de mercado y del activo libre de riesgo. En este sentido, la eficiencia se establece de acuerdo al criterio media-varianza dado el conjunto de k activos riesgosos y un activo r_f libre de riesgo.

Diversificación y equilibrio de mercado

Si partimos del portafolio de mercado, cabe resaltar que en la agregación de los activos la diversificación puede eliminar la mayoría de los efectos de la varianza de los activos en la varianza total del portafolio de mercado, pero no puede eliminar los efectos de la covarianza de los activos en el portafolio.

Al incrementarse el número de activos en un portafolio, la varianza de éste tiende a disminuir. A medida que se incrementa el número de activos en un portafolio, la

⁶ $\frac{E(r_M) - r_f}{\sigma(r_M)}$

covarianza entre todos los activos en el portafolio eficiente se vuelve más importante, respecto a las varianzas individuales de los activos. De esto se desprende que en portafolios bien diversificados la medida adecuada del riesgo de un activo es la contribución que tiene al riesgo del portafolio, medida por $COV(r_i, r_M) / \sigma^2(r_M)$.

El rendimiento de equilibrio de los activos

Sobre la base del portafolio de mercado y partiendo de la diversificación, se pueden derivar los rendimientos esperados de equilibrio para cada activo.

Sea

w_i la fracción invertida del portafolio en el activo i .

$1 - \sum_{i=1}^N w_i$ la fracción invertida en el activo libre de riesgo.

Partimos de la expresión de equilibrio, definida en (9)

$$E(r_p) = r_f + \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma(r_M)} \sigma(r_p)$$

definimos

$$\lambda = \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma(r_M)}$$

Si construimos un portafolio combinando activos con riesgo con un activo libre de riesgo tenemos

$$r_p = \sum_{i=1}^N w_i r_i + (1 - \sum_{i=1}^N w_i) r_f$$

Si el Portafolio P es eficiente y cae en la línea recta

$$r_p = \alpha r_M + (1 - \alpha) r_f$$

donde $r_M = \sum_{i=1}^N w_i r_i$ es el rendimiento del mercado y α la proporción invertida en el portafolio de mercado.

Entonces, definimos w_i^* como la inversión óptima (que elimina los excesos de oferta y demanda) en el i ésimo activo en el portafolio de mercado, que representa el equilibrio del mercado. A partir de esto, expresamos el rendimiento y desviación estándar de un portafolio eficiente en términos de estas w_i^* óptimas.

$$E[r_p] = \sum_{i=1}^N w_i^* E[r_i] + (1 - \sum_{i=1}^N w_i^*) r_f \quad (11)$$

$$= \alpha E(r_M) + (1-\alpha)r_f$$

$$\sigma(r_p) = \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i^* w_j^* COV(r_i, r_j) \right]^{1/2} \quad (12)$$

$$= \alpha \sigma(r_M)$$

La última expresión se deriva del hecho de que la desviación estándar del portafolio solo depende de la desviación estándar del mercado.

Ahora bien, consideremos la tasa de cambio en el rendimiento esperado (en equilibrio) en el portafolio óptimo P a medida que se incrementa la cantidad invertida en el activo w_i y disminuye la cantidad invertida en el activo libre de riesgo. Podemos hacerlo tomando la derivada de la función de las preferencias del inversionista:

$$\frac{\partial U[E(r_p), \sigma(r_p)]}{\partial w_i} = \frac{\partial U}{\partial E(r_p)} \frac{\partial E(r_p)}{\partial w_i} + \frac{\partial U}{\partial \sigma(r_p)} \frac{\partial \sigma(r_p)}{\partial w_i} = 0$$

Esta es la pendiente de la curva de indiferencia del inversionista, despejando e igualando esta tasa con la pendiente de la recta

$$-\frac{\partial U / \partial \sigma(r_p)}{\partial U / \partial E(r_p)} = \lambda = \frac{\partial E(r_p) / \partial w_i}{\partial \sigma(r_p) / \partial w_i}$$

Entonces

$$\frac{\partial E(r_p)}{\partial w_i} = \lambda \frac{\partial \sigma(r_p)}{\partial w_i}$$

Sustituyendo por las derivadas obtenidas a partir de la definición de $E(r_p)$ en (11) y $\sigma(r_p)$ en (12), tenemos

$$E(r_i) - r_f = \lambda \frac{COV(r_i, r_M)}{\sigma(r_M)}$$

De esta manera el $E(r_i)$ de cualquier activo en el portafolio de mercado, bajo condiciones de equilibrio (en el óptimo w_i^*) queda expresado como resultado de la tasa libre de riesgo más un risk-premium. Este risk-premium queda expresado como el producto del risk-premium del mercado y el riesgo del iésimo activo medido por $COV(r_i, r_M)/\sigma(r_M)$. Sustituyendo para obtener el rendimiento de equilibrio del activo iésimo.

$$E(r_i) - r_f = \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma(r_M)} \frac{COV(r_i, r_M)}{\sigma(r_M)} \quad (13)$$

Retomando uno de los principales resultados de Markowitz en el contexto de este modelo de equilibrio, la diversificación puede eliminar la mayoría de los efectos de la propia varianza del activo sobre la varianza del un portafolio, pero no puede eliminar el efecto de la covarianza del activo con todos los activos en el portafolio.

Esto significa que la varianza del portafolio, a medida que tiende a la varianza del mercado total, es igual a la covarianza promedio de todos los activos y el riesgo de un activo es medido por su contribución relativa al riesgo total del mercado

$$\frac{\partial \sigma(r_M)}{\partial w_i} = \frac{COV(r_i, r_M)}{\sigma(r_M)} \quad (14)$$

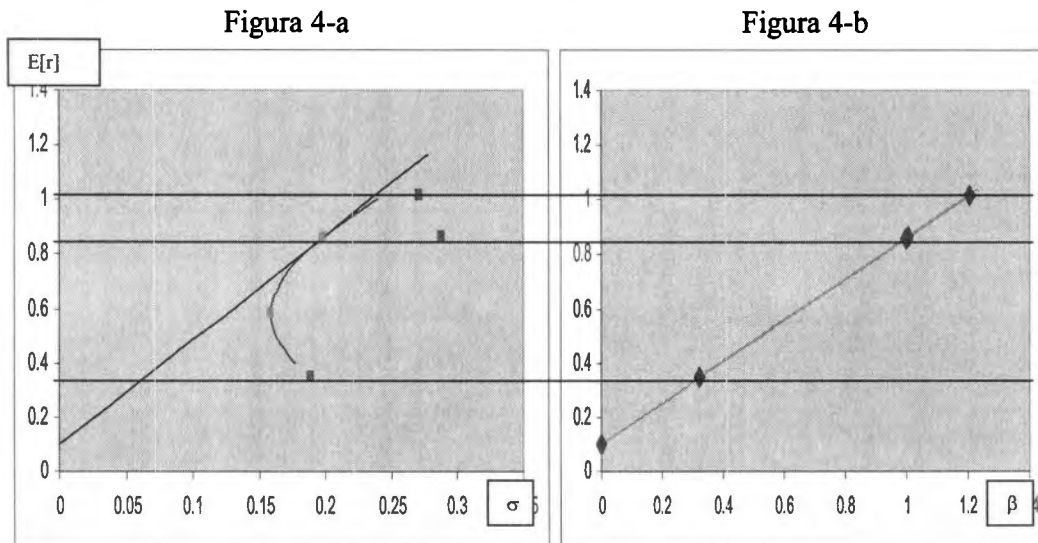
⁷ La derivada de $[\sum \sum w_i w_j COV(r_i, r_j)]^{1/2}$ respecto a w_i es $\frac{1}{2} [\sum \sum w_i w_j COV(r_i, r_j)]^{-1/2} [2w_i \sigma^2(r_i) + 2\sum w_j COV(r_i, r_j)]$ y evaluando la derivada cuando $w_i \rightarrow 0$ y la $\sum w_j = 1$. La $COV(r_i, r_M) = \sum w_j cov(r_i, r_j)$

En equilibrio el rendimiento esperado de un activo está, por tanto, linealmente relacionado a su contribución marginal al riesgo total del portafolio de mercado, de lo que se desprende:

$$E(r_i) - r_f = \beta[E(r_M) - r_f] \quad (15)$$

donde

$$\beta_i = \frac{COV(r_i, r_M)}{\sigma^2(r_M)} \quad (16)$$



Como se muestra en la figura 4-a, en el espacio riesgo-rendimiento la Línea del Mercado de Capitales (CLM), representa el conjunto factible de inversión. Los rendimientos de los activos son proyectados en la figura 4-b mostrando la relación lineal entre estos y el riesgo individual medido por beta. El rendimiento esperado de cada activo esta determinado por el risk-premium del mercado y la contribución del activo al riesgo total del mercado medido por beta.

II. El modelo de equilibrio y la matriz de Covarianzas

Restricciones para pedir e invertir a la tasa libre de riesgo

El modelo de equilibrio Sharpe-Lintner expuesto, no resuelve el problema de asignación de activos en el portafolio, sino que la asume (es la del mercado). El rendimiento de

cada activo queda por tanto expresado en relación al risk-premium del mercado y de la contribución marginal del activo al riesgo total del mercado.

Sin embargo, en ausencia del activo libre de riesgo (o cuando existen restricciones para pedir o invertir cantidades ilimitadas a la tasa libre de riesgo), es posible seleccionar cualquier portafolio eficiente de mínima varianza, para el cual existirá un portafolio no correlacionado con él: *zero-beta portafolio*⁸ (Fischer Black, 1972) que resuelve el problema de tangencia.

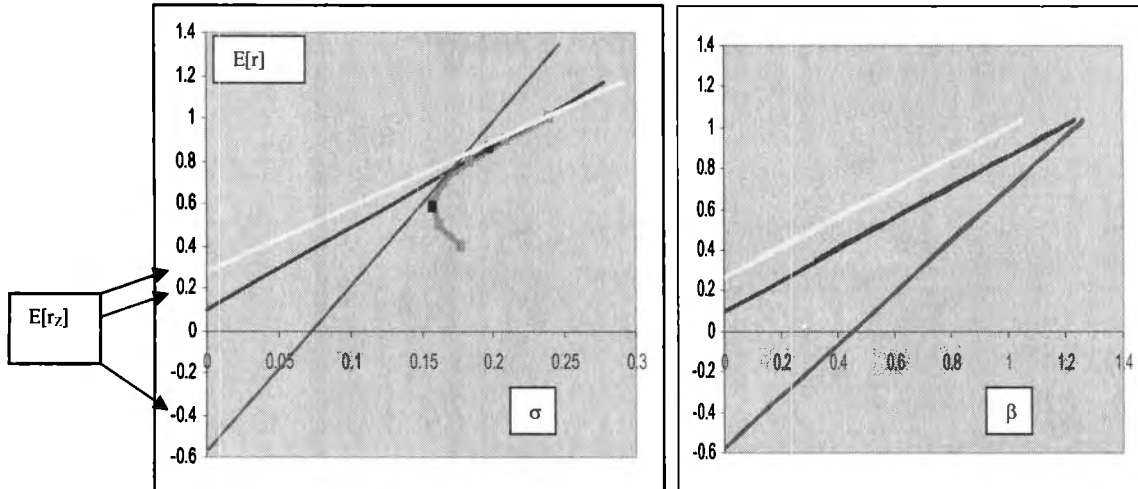
Las ponderaciones con las que cada activo participa al portafolio cambian en función del portafolio eficiente seleccionado, esto trae como consecuencia que también se modifique la contribución marginal del activo al riesgo total y con ello los precios de equilibrio (relación riesgo-rendimiento).

Este planteamiento es fundamental para entender el hecho de que podemos partir de un portafolio diferente al del mercado pero el cual es eficiente en el sentido media-varianza que hemos expuesto.

Por lo tanto, para cada portafolio eficiente seleccionado, no solo se modifica la varianza total del portafolio sino la contribución marginal al riesgo total de cada uno de los activos, con lo cual las betas serán diferentes.

⁸ Llamaremos $E[R_z]$ al zero-beta portafolio.

Figura 5



La selección de un portafolio eficiente puede resolver el problema de tangencia construyendo un zero-beta portafolio no correlacionado con el portafolio seleccionado que permita reconstruir la relación lineal riesgo- rendimiento. La condición de ser un portafolio eficiente permite expresar esta relación en el espacio de las betas en forma lineal.

Nuestro objetivo, por el momento, no es calcular los valores de este zero-beta portafolio, sino utilizar las matrices de covarianzas generadas en este espacio para cada uno de los portafolios eficientes del conjunto de los de mínima varianza⁹. La matriz de covarianzas no cambia sobre el conjunto de portafolios eficientes, lo que cambia es el vector w_p de ponderaciones, lo que modifica la varianza del portafolio. Al calcular el zero-beta portafolio, se mantienen las condiciones de tangencia y por ende una relación lineal de todos los activos y portafolios con el portafolio eficiente seleccionado.

Relación lineal del rendimiento de cada activo respecto al portafolio eficiente y la separación de riesgo sistemático y no sistemático de la varianza del portafolio

Si dado un conjunto de activos, construimos el conjunto de posibilidades de inversión, es posible establecer una relación lineal entre los rendimientos de cada activo y cualquiera de los portafolios dentro del conjunto.

⁹Para mayor referencia sobre la metodología para calcular el zero-beta portafolio ver Richard Roll (Dec., 1980), pp 1005-1023

Si bien el rendimiento esperado de cada activo satisface la relación lineal respecto al risk-premium del mercado (o del portafolio seleccionado sobre la frontera eficiente). La varianza de cada activo puede descomponerse en su componente sistemático (que depende de la contribución marginal al riesgo total del portafolio de mercado o del portafolio eficiente seleccionado) y un componente no-sistemático que se presume es anulado completamente por la diversificación. Las matrices de covarianzas estimadas a partir de cualquiera de los portafolios eficientes (en particular el portafolio de mercado), podrá ser descompuesta, a su vez, en su elemento sistemático y no sistemático¹⁰.

De esta manera, expresamos los rendimientos y la varianza de cada activo en relación a su componente sistemático y no-sistemático.

$$r_i = r_f + \beta_i(r_M - r_f) + \varepsilon_i' \quad (17)$$

donde

$$\varepsilon_i' = \alpha_i + \varepsilon_i \quad (18)$$

α_i es la parte del rendimiento esperado del activo que no esta relacionado con el portafolio de mercado, por lo que:

$$E[\varepsilon_i'] = \alpha_i$$

$$E[\varepsilon_i] = 0$$

Reescribiendo el rendimiento del activo al sustituir (18) en (17) es posible descomponer el rendimiento

$$r_i - r_f = \alpha_i + \beta_i(r_M - r_f) + \varepsilon_i$$

Expresando todo en términos de excesos de rendimiento¹¹

¹⁰ Como puede observarse en la figura 5, para cada uno de los rendimientos esperados de los activos le corresponde una beta diferente, dependiendo del portafolio eficiente seleccionado de entre los de mínima varianza. Por lo mismo, la varianza del portafolio que tomemos como el mercado se modifica y con ella la contribución marginal al riesgo de cada activo al riesgo total del portafolio.

¹¹ A partir de este momento, reservaremos las R para referirnos a los excesos de rendimiento.

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i \quad (19)$$

La varianza del activo será

$$\sigma^2(R_i) = \beta_i^2 \sigma^2(R_M) + \sigma^2(\varepsilon_i) \quad (20)$$

A partir de esta definición de la relación entre los rendimientos de los activos y el portafolio de mercado derivado del modelo de equilibrio. Podemos expresar el rendimiento del portafolio de la siguiente manera:

$$r_p = r_f + \beta_p (r_M - r_f) + \varepsilon_p' \quad (21)$$

donde

$$\varepsilon_p' = \alpha_p + \varepsilon_p \quad (22)$$

α_p es la parte del rendimiento esperado de un portafolio que no esta relacionado con el portafolio de mercado, por lo que

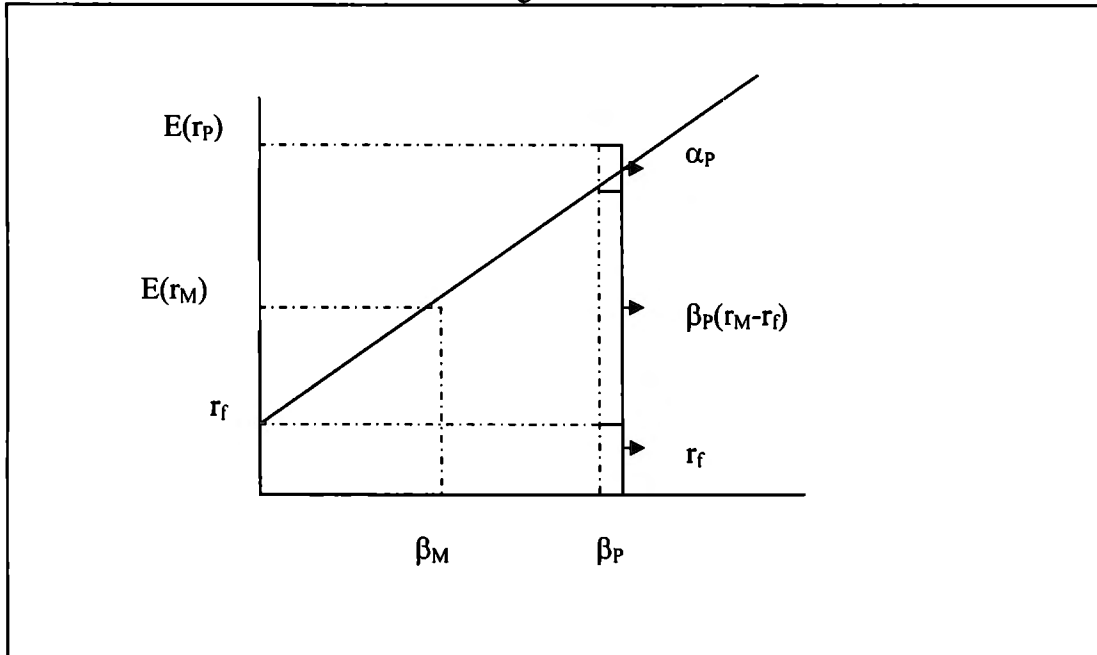
$$E[\varepsilon_p'] = \alpha_p$$

$$E[\varepsilon_p] = 0$$

Reescribiendo el rendimiento de un portafolio sustituyendo (22) en (21) es posible descomponer el rendimiento

$$r_p - r_f = \alpha_p + \beta_p (r_M - r_f) + \varepsilon_p$$

Figura 6



Esta gráfica ilustra la descomposición del rendimiento de un portafolio diferente al portafolio de mercado. En consecuencia el portafolio P se encuentra dentro del conjunto de posibilidades de inversión, pero no sobre la CML.

Expresando todo en términos de excesos de rendimiento

$$R_P = \alpha_P + \beta_P R_M + \varepsilon_P \quad (23)$$

La varianza del portafolio será

$$\sigma^2(R_P) = \beta_P^2 \sigma^2(R_M) + \sigma^2(\varepsilon_P) \quad (24)$$

Si expresamos esta varianza del portafolio en forma matricial, tenemos:

$$\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma}_{\text{sist}} \mathbf{w} + \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma}_{\text{resid}} \mathbf{w} \quad (25)$$

$$\text{Donde } \boldsymbol{\Sigma}_{\text{sist}} = \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T \sigma^2(R_M) \quad (26)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\text{resid}} = [\text{COV}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)]_{i,j}^{12} \quad (27)$$

¹² La matriz de covarianzas de los residuales también puede expresarse como $E[\varepsilon_t \varepsilon_t^T]$

Para cada portafolio de entre los de mínima varianza existe una solución particular w_P , que satisface la separación de la varianza del portafolio en su componente sistemático y no sistemático.

La característica de un portafolio frontera, es que es aquel portafolio de mínima varianza entre todos los portafolios de igual rendimiento esperado. Así, si tomamos todos y cada uno de los activos en el mercado, podemos construir los portafolios frontera o conjunto de posibilidades de inversión, independientemente de que uno de ellos puede ser el mercado (es decir, reflejar las ponderaciones que asigna el mercado para eliminar excesos de oferta y demanda, como se ha mencionado)

Para obtener las ponderaciones (w_P) de estos portafolios, a través de programación cuadrática, dado un número finito de activos para un rendimiento esperado del portafolio, se resuelve (Chi-fu Huang, 1998)

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{2} w^T \Sigma w \\ \text{s.a.} \quad & w^T e = E(r_P) \\ & w^T \mathbf{1} = 1 \end{aligned}$$

En virtud de que Σ es positiva definida, las condiciones de primer orden son necesarias y suficientes para un máximo global. La solución a este problema de optimización implica resolver

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} w^T \Sigma w + \lambda [E(r_P) - w^T e] + \gamma [1 - w^T \mathbf{1}] \\ & (w, \lambda, \gamma) \end{aligned}$$

El vector de ponderaciones óptimas resultante queda expresado como

$$w_P = \lambda [\Sigma^{-1} e] + \gamma [\Sigma^{-1} \mathbf{1}] \quad (28)$$

premultiplicando por e^T y $\mathbf{1}^T$, resolvemos los valores de λ y γ ,

$$E(r_P) = e^T w_P = \lambda [e^T \Sigma^{-1} e] + \gamma [e^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}]$$

$$1 = \mathbf{1}^T \mathbf{w}_P = \lambda[\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{e}] + \gamma[\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}]$$

Definimos:

$$A = \mathbf{e}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}$$

$$B = \mathbf{e}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{e}$$

$$C = \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}$$

$$E(r_P) = \lambda B + \gamma A$$

$$1 = \lambda A + \gamma C$$

$$\text{Entonces } \lambda = \frac{C * E(r_P) - A}{D} \quad \gamma = \frac{B - A * E(r_P)}{D}$$

$$\text{Donde } D = BC - A^2$$

De esta manera, la relación riesgo-rendimiento para el conjunto de los portafolios frontera, depende del vector de rendimientos esperados \mathbf{e} y de los activos con riesgo y de la inversa de la matriz de covarianzas $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$.

Para cada portafolio eficiente desde el conjunto de todos los activos riesgosos, de entre los de mínima varianza existe una solución particular \mathbf{w}_P , que satisface la separación de la varianza del portafolio en su componente sistemático y no sistemático. En el contexto de Sharpe-Lintner, se satisface adicionalmente la condición de tangencia con la construcción del zero-beta portafolio y con esto, los rendimientos de equilibrio de todos los activos (en el espacio rendimiento-beta).

PROPOSICIÓN 1 Portafolios eficientes dentro del conjunto de mínima varianza

Obtener las ponderaciones (\mathbf{w}_P) de un portafolio en la frontera eficiente, a través de programación cuadrática:

$$\text{Min } \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}$$

$$\text{s.a. } \mathbf{w}^T \mathbf{e} = E[R_P]$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1$$

Es equivalente a encontrarlas a través de (dado el Rendimiento del portafolio eficiente)

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma}_{\text{resid}} \mathbf{w} \\ \text{s.a} \quad & \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1 \end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{\Sigma}_{\text{resid}} = [\text{COV}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)]_{i,j}$

$$\text{y} \quad \varepsilon_i = R_i - (\alpha_i + \beta_i R_p)$$

Es decir, después de construir la relación lineal de los rendimientos de los activos respecto al rendimiento del portafolio eficiente, se computa la matriz de covarianza residual. Al minimizar la varianza residual el vector de ponderaciones \mathbf{w}_p resultante es aquel que satisface esa relación lineal. Además, este vector es precisamente el que permite la eliminación del riesgo no-sistemático¹³.

PRUEBA:

Partimos de la relación lineal de los rendimientos de todos y cada uno de los activos respecto al portafolio seleccionado en el conjunto de portafolios eficientes, así como su varianza; así como de la relación entre un portafolio y el portafolio de mercado, como se muestra en las ecuaciones (19), (20), (23) y (24).

De esta manera, replanteamos el problema de optimización cuadrática

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} & (29) \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{w}^T \mathbf{e} = E[R_p] \\ & \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1 \end{aligned}$$

¹³ Esta definición implica que el riesgo residual es inducido por tomar posiciones en portafolios diferentes del mercado y no eficientes. Si a partir del portafolio de mercado, hacemos una descomposición de la parte sistemática y no sistemática, en el agregado no existe compensación por la parte residual ya que ésta es completamente eliminada por la diversificación.

$$L(w, \lambda, \gamma) = \frac{1}{2} w^T \Sigma w + \lambda [E[R_p] - w^T e] + \gamma [1 - w^T \mathbf{1}]$$

descomponemos la varianza del portafolio en su parte sistemática y no-sistemática

$$w^T \Sigma w = w^T \Sigma_{\text{sist}} w + w^T \Sigma_{\text{resid}} w \quad (30)$$

Sustituyendo (30)

$$L(w, \lambda, \gamma) = \frac{1}{2} w^T \Sigma_{\text{sist}} w + \frac{1}{2} w^T \Sigma_{\text{resid}} w + \lambda [E[R_p] - w^T e] + \gamma [1 - w^T \mathbf{1}] \quad (31)$$

Usando la definición de la parte sistemática de la varianza del portafolio en (26)

$$\Sigma_{\text{sist}} = \beta \beta^T \sigma^2(R_M)$$

La sustituimos en el Lagrangiano

$$L(w, \lambda, \gamma) = \frac{1}{2} w^T \beta \beta^T w \sigma^2(R_M) + \frac{1}{2} w^T \Sigma_{\text{resid}} w + \lambda [E(R_p) - w^T e] + \gamma [1 - w^T \mathbf{1}]$$

Por construcción

$$w^T \beta \beta^T w = [\beta_p]^2$$

Dado que tenemos todos y cada uno de los activos, se desprende que:

$$\beta_P = \sum_{i=1}^N w_i [\beta_i]$$

$$\beta_P = \sum_{i=1}^N w_i \left[\frac{COV(R_i, R_M)}{\sigma^2(R_M)} \right]$$

$$\beta_P = \sum_{i=1}^N w_i \left[\frac{\sum_{j=1}^N w_j COV(R_i, R_j)}{\sigma^2(R_M)} \right]$$

$$\beta_P = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j COV(R_i, R_j)}{\sigma^2(R_M)}$$

$$\beta_P = \frac{\sigma^2(R_M)}{\sigma^2(R_M)} = 1$$

Por otro lado, esto implica que $\mathbf{w}^T \mathbf{e} = \alpha_P + R_M$. Es decir, igual al rendimiento del mercado más una constante, lo que nos permite eliminar la segunda restricción.¹⁴

Reescribimos el Lagrangiano, con la parte residual de la varianza del portafolio:

$$L(\mathbf{w}, \gamma) = \sigma^2(R_M) + \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma}_{resid} \mathbf{w} + \gamma [1 - \mathbf{w}^T \mathbf{1}] \quad (32)$$

El vector de ponderaciones resultante será:

$$\mathbf{w}_P = \gamma [(\boldsymbol{\Sigma}_{resid}^{-1}) \mathbf{1}] \quad (33)$$

Solución

$$1 = \mathbf{1}^T \mathbf{w}_P = \gamma [\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}_{resid}^{-1} \mathbf{1}]$$

definiendo

$$\mathbf{X} = \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}_{resid}^{-1} \mathbf{1} \quad (34)$$

$$1 = \gamma \mathbf{X}$$

¹⁴ Como se mostrará, la solución \mathbf{w}_P , satisface que esta constante α_P será igual a cero.

Entonces $\gamma = \frac{1}{X}$ ■

Esta condición se satisface sobre cualquier portafolio eficiente seleccionado de mínima varianza. Al construir la relación lineal de los activos respecto a este portafolio y minimizar la varianza residual (no-sistemática) del portafolio, la solución particular w_P tendrá una solución β asociada. Estas ponderaciones reflejarán el peso relativo de la $COV(R_i, R_P) / \sigma^2(R_P)$ de cada activo al portafolio seleccionado, esto es, de la contribución marginal al riesgo total.

La minimización de la varianza residual nos lleva a una solución única w_P que permite, no solo las ponderaciones implícitas de los activos en el portafolio usado para construir la relación lineal, mostrándonos la contribución marginal de cada activo al riesgo total del portafolio, sino que nos permiten crear combinaciones de activos o portafolios que satisfacen esa relación lineal.

Cuando el portafolio sobre el que construimos la relación lineal es el portafolio mercado, es el caso que el riesgo residual puede ser completamente eliminado. Lo que significa que si un inversionista obtiene rendimientos por arriba del mercado otros probablemente este obteniendo rendimientos por abajo. La suma de todos los beneficios obtenidos por todos los inversionistas debe ser cero, por lo que no hay recompensa por el riesgo residual.

El riesgo residual representa por tanto la oportunidad para obtener beneficios por arriba del mercado para algunos inversionistas y por abajo para otros.

Dada la práctica de que todos los portafolios están altamente correlacionados, es relevante descomponer el rendimiento: a) un primer componente en relación con las tenencias promedio de los inversionistas en el mercado y b) con un segundo componente que no este correlaciona do con ese rendimiento promedio.

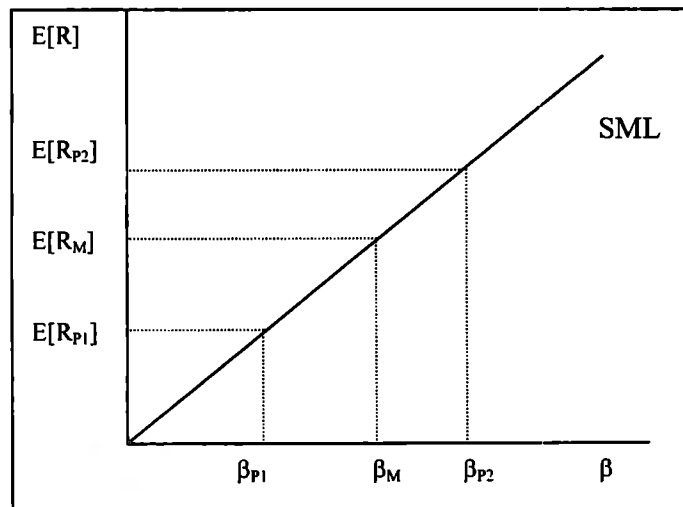
Por lo tanto, el nivel de riesgo residual es una medida de la diferencia entre el portafolio individual y el portafolio de mercado, a su vez, que un indicativo de la magnitud del desempeño relativo del portafolio individual.

Los residuales de cada activo están relacionados a eventos que solo los afectan a ellos. Mientras que existen otros “extra-mercado” no correlacionados con el mercado como un todo.

Esto es, el riesgo no-sistemático de un portafolio puede descomponerse en la parte correspondiente a los eventos específicos que afectan a una empresa y lo eventos “extra-mercado” que afectan a un grupo de empresas. Mientras que el riesgo sistemático afecta a todas las empresas.

El riesgo residual es inducido por tomar posiciones en portafolios diferentes del mercado. Parte de este riesgo es por tomar posiciones diferentes sobre factores comunes lo que trae consigo la covarianza extra-mercado ($E[\varepsilon_i, \varepsilon_j]$) y otra parte por tomar posiciones diferentes en algunos activos, lo que produce riesgo específico ($\sigma^2(\varepsilon_i)$).

Figura 7



La relación lineal se satisface al expresar el rendimiento de los activos y portafolios respecto al Risk-Premium del mercado y su nivel de riesgo sistemático. La combinación de los activos y/o portafolios siempre estará sobre la línea, por lo que $E[\varepsilon_P] = 0$ y $\alpha_P = 0$.

III. Proxy de mercado, asignación de activos y la matriz de covarianzas

La búsqueda de evidencia empírica de estos modelos de equilibrio, refiere principalmente a dos problemas: a) ¿La relación propuesta riesgo-rendimiento es consistente con los datos? y, b) ¿Realmente los mercados son eficientes en el sentido que aquí hemos expuesto?

Siguiendo la crítica de Roll (1977), retomamos algunos de sus planteamientos: a) El portafolio de mercado no es observable, b) dependiendo del *proxy*¹⁵ de mercado utilizado (aun cuando aceptemos que es eficiente) la relación lineal riesgo-rendimiento será diferente y, c) aun cuando el *proxy* sea eficiente, no representa al portafolio de mercado, y si el *proxy* no es eficiente no significa que el portafolio de mercado no lo sea.

Consideraré algunas implicaciones resultado de reconocer estos problemas:

i.- El *proxy* de mercado aun siendo eficiente, no refleja la verdadera relación riesgo-rendimiento, pues el portafolio de mercado no es observable.

ii.- En los análisis de corte transversal, la falta de explicación de los rendimientos observados promedio de los activos respecto a su contribución marginal al riesgo total del mercado puede estar sub o sobreestimada, produciendo una aparente sub/sobrevaluación de los activos (mispricing).

iii.- La relación lineal del rendimiento de un activo contra el *proxy* del mercado, permitirá obtener las betas de cada activo, pero no resuelve las ponderaciones asociadas a cada contribución marginal .

iv.- El proceso de minimización de la varianza del portafolio deja de ser equivalente a la minimización de la varianza residual. Por cualquiera de las siguientes razones:

¹⁵ El *proxy* es un índice del mercado. En el caso de México hemos tomado el Índice de Precios y Cotizaciones como índice de mercado.

- 1) Tenemos el *proxy* del portafolio de mercado eficiente pero tomamos un subconjunto de activos.
- 2) tenemos un *proxy* del mercado y no es eficiente (aun cuando se tomen todos los activos en el *proxy*, al construir con ellos los portafolios frontera el *proxy* no esta en la frontera)
- 3) tenemos un *proxy* que no es eficiente y tomamos un subconjunto de activos para formar un portafolio.

En los tres casos, la relación lineal respecto al *proxy* de mercado y el computo de la covarianza residual se producen dos tipo de problemas en el análisis de corte transversal: a) Aun cuando $E[\varepsilon_P] = 0$, la diversificación no actúa completamente por lo que son relevantes otros factores como fuente de incertidumbre de los rendimientos de lo que se desprende que las $COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ contienen información relevante y, b) tanto α_i y α_P son significativamente diferentes de cero, con lo que se confirma la débil relación lineal riesgo-rendimiento de los activos respecto al *proxy* de mercado. Esta situación genera que los activos y/o portafolios formados con ellos no satisfagan perfectamente la relación lineal, lo que se expresa en una aparente sub/sobrevaluación de los mismos.

La matriz de covarianzas de los residuales

Se ha reconocido este problema y se han propuesto soluciones desde diferentes perspectivas. El proceso de selección de portafolios eficientes depende de generar los rendimientos esperados de los activos y de la estructura de las covarianzas entre ellos. En los modelos basados en factores, la matriz de covarianzas de los errores, juega un papel fundamental, pues se sugiere contiene información tanto de factores omitidos, como de la propia correlación contemporánea entre los rendimientos de los activos.

Las implicaciones de considerar la matriz de covarianzas de los residuales son: 1) el reconocimiento de que es importante incorporar un concepto multidimensional del riesgo para estimar los rendimientos de los activos y, 2) que dada la dificultad de identificar estos factores de riesgo adicionales, se sugiere que puede obtenerse a través de matriz de covarianzas residual. De hecho se reconoce en la mayor parte de los autores que las covarianzas pueden ser mejor estimadas que los rendimientos, por lo que

se puede mejorar la estimación de los rendimientos utilizando la información contenida en estas covarianzas, especialmente la de los residuales. Esto claramente asume el proceso de estimación lineal de los rendimientos respecto a un *proxy* de mercado¹⁶.

La idea de que la matriz de covarianzas de los rendimientos de los activos y/o su inversa, pueda descomponerse en su parte sistemática y no sistemática, tiene como objetivo principal recuperar la información contenida en el componente no sistemático del riesgo de los portafolios. Esto permitiría no solo un mejor proceso de valuación de los rendimientos esperados, sino mejorar el proceso de selección de portafolios eficientes. Las regresiones que permiten estimar el modelo de factores, llevan a la idea de que al minimizar una matriz de covarianzas que utilice como insumo el modelo de factores, se minimizan las varianzas de los residuos de los activos y su relación con los componentes adicionales no explicados por los factores, que constituyen un elemento de sub/sobrevaluación de los activos (*mispricing*).

Ya sea que se busque identificar factores desde la matriz de covarianzas de los residuos usando análisis de factores o de componentes principales [Roll & Ross, (1980); Connor & Korajczyk, (1986)]; o asignando por grupos los activos a partir de ciertas características para encontrar diferencias entre los rendimientos de los grupos y, por tanto, tener un factor adicional [Fama & French, (1992)]; o estableciendo una liga explícita entre los rendimientos promedio y la matriz de covarianzas de los residuos para encontrar factores no observados a partir de la información de una muestra de activos [MacKinlay & Pastor, (2000)]; o incorporando de manera explícita los resultados de la regresiones en la inversa de la matriz de covarianzas [Guy Stevens, (1998)]. Es de resaltar la importancia que todos estos trabajos han realizado para incorporar las matrices de covarianzas de los residuos a partir del modelo de factores.

En nuestro caso, seguimos la línea de trabajo sugerida por MacKinlay & Pastor (2000). Ellos asumen que los rendimientos de los activos tienen una estructura de factores exacta, pero uno de los factores no es observado. Una estructura de factores exacta

¹⁶ La búsqueda de explicaciones de las aparentes violaciones de los modelos de equilibrio se puede dividir en aquellas basadas en encontrar factores adicionales de riesgo o detectar problemas con la identificación del portafolio de mercado o aquellas que parten de que los supuestos de racionalidad y existencia de mercados sin fricciones no se cumplen.

implica que los precios de los activos con riesgo se determinan de manera simultánea y dependen de factores de riesgo que los explican y determinan de manera exacta. La falta de identificación de estos factores de riesgo lleva a una aparente sub/sobrevaluación (mispricing) de los rendimientos esperados de los activos respecto al factor observado. La relación entre este elemento de sub/sobrevaluación (expresado en un vector α) y la matriz de covarianzas de los residuales, se integra como una restricción en la estimación del factor no observado. Así la matriz de covarianza residual, no solo es considerada en la estimación de los rendimientos esperados en un plano multidimensional del riesgo, sino que es utilizada para calcular las ponderaciones óptimas de los portafolios.

La estimación de las betas en relación con el *proxy* de mercado elegido presenta varios problemas, entre los que destacan: 1) Una disminución del nivel de significancia estadística de la relación entre el rendimiento de los activos y el *proxy*, es decir, bajas R^2 , 2) al tomar un subconjunto de activos (los cuales pueden o no estar en el *proxy*) la $COV[(\epsilon_i, \epsilon_j)]_{i,j}$ no puede ser reducida o eliminada del todo, es decir, no solo no se elimina la varianza residual, sino que es probable que ésta contenga información relevante de la relación en el comportamiento de los rendimientos, no atribuibles al factor de riesgo del mercado sustituido por el *proxy* (sistemático). Este riesgo es considerado el riesgo de la covarianza.

PROPOSICIÓN 2 *Proxy* de portafolio de mercado y un subconjunto de activos

Cuando se usa un *proxy*, la minimización de la varianza total deja de ser equivalente a la minimización de la varianza residual. Pues la estimación lineal de la relación entre el R_i y R_M , es capturada de manera incompleta.

Las betas estimadas no reflejan la verdadera contribución marginal de los activos al riesgo del mercado y, parcialmente a la del *proxy*.

La parte de la variabilidad de cada activo no explicada por la variabilidad del *proxy* (aun cuando satisfaga $E[\epsilon_i]=0$ y $E[\epsilon_p] = 0$), no es cero y tiene otras fuentes de riesgo.

El problema de asignación de los recursos en el subconjunto ($\sum w_i=1$), debe considerar el peso relativo en la varianza total. La asignación puede ser resuelta a partir de reducir la

varianza total residual. Esto no satisface necesariamente la condición de portafolio tangencia, pero dado un objetivo de riesgo sistemático promedio y permite una segunda condición de optimalidad¹⁷.

Al minimizar $\mathbf{w}^T \sum_{resid}^{proxy} \mathbf{w}$ y calcular el vector \mathbf{w}_P de ponderaciones, obtenemos una solución particular que resuelve el problema completo de minimización de la varianza total. Esto en relación con el rendimiento y varianza del *proxy* del portafolio de mercado.

PRUEBA:

Se parte del problema inicial de minimizar la varianza para obtener los portafolios frontera.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \sum \mathbf{w} \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{w}^T \mathbf{e} = E[R_P] \\ & \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1 \end{aligned}$$

La diferencia entre este problema y el que se desarrolla en la proposición 1 es que, aun cuando el rendimiento del portafolio del *proxy* esta dado, la varianza del portafolio *proxy* y la varianza del portafolio construido como resultado de la minimización de la varianza residual no tienen porque ser iguales.

$$\begin{aligned} \sigma^2(R_P) &= \mathbf{w}^T \sum \mathbf{w} \\ &= [\mathbf{w}^T \sum_{sist}^{proxy} \mathbf{w} + \mathbf{w}^T \sum_{resid}^{proxy} \mathbf{w}] \quad (35) \\ &= [\mathbf{w}^T \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{w} \sigma^2(R_{proxy}) + \mathbf{w}^T \sum_{resid}^{proxy} \mathbf{w}] \end{aligned}$$

El componente sistemático no captura de manera completa la varianza total del portafolio.

¹⁷ El portafolio óptimo es aquel que maximiza el precio del riesgo por unidad de riesgo. Sin embargo, dado un Proxy del mercado o benchmark como objetivo de riesgo sistemático, las ponderaciones resultantes de minimizar la varianza residual constituyen un óptimo dado ese objetivo de riesgo.

Reescribimos el problema de minimización, eliminando la restricción del rendimiento del portafolio, ya que partimos de él para estimar las matrices de covarianzas sistemática y no sistemática

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \sum_{\text{sist}}^{\text{proxy}} \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \sum_{\text{resid}}^{\text{proxy}} \mathbf{w} \\ \text{s.a} \quad & \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \sum_{\text{sist}}^{\text{proxy}} \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \sum_{\text{resid}}^{\text{proxy}} \mathbf{w} + \gamma [1 - \mathbf{w}^T \mathbf{1}] \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \beta \beta^T \sigma^2 (R_{\text{proxy}}) \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \sum_{\text{resid}}^{\text{proxy}} \mathbf{w} + \gamma [1 - \mathbf{w}^T \mathbf{1}] \\ &= \frac{1}{2} \beta^2 \rho \sigma^2 (R_{\text{proxy}}) + \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \sum_{\text{resid}}^{\text{proxy}} \mathbf{w} + \gamma [1 - \mathbf{w}^T \mathbf{1}] \end{aligned}$$

(\mathbf{w}, γ)

De esta manera, asumiendo que el componente sistemático $\beta_P = \sum w_i \beta_i$ es cercano a 1 o relativamente estable para cualquier solución \mathbf{w}_P . La solución depende de la minimización $\mathbf{w}^T \sum_{\text{resid}}^{\text{proxy}} \mathbf{w}$, lo que permite la mejor asignación para reducir el riesgo total del portafolio para el subconjunto de activos seleccionados. Así, si resolvemos de manera independiente con la matriz $\sum_{\text{resid}}^{\text{proxy}}$.¹⁸

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \sum_{\text{resid}}^{\text{proxy}} \mathbf{w} \\ \text{s.a} \quad & \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \sum_{\text{resid}}^{\text{proxy}} \mathbf{w} + \gamma [1 - \mathbf{w}^T \mathbf{1}] \\ &(\mathbf{w}, \gamma) \end{aligned}$$

El vector de ponderaciones óptimas resultante queda expresado como

$$\mathbf{w}_P = \gamma \left[\left(\sum_{\text{resid}}^{-1 \text{ proxy}} \right) \mathbf{1} \right] \quad (36)$$

¹⁸ La solución puede plantearse como un proceso en dos etapas: 1) en la primera se estiman las β_i respecto al proxy y se obtiene la matriz de covarianzas residual; 2) en la segunda se calculan \mathbf{w}_P que minimizan la varianza residual sujeta solamente a que $\mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1$

Solución

$$\mathbf{1} = \mathbf{1}^T \mathbf{w}_P = \gamma [\mathbf{1}^T \sum_{resid}^{-1 proxy} \mathbf{1}]$$

$$\text{definiendo } C = \mathbf{1}^T \sum_{resid}^{-1 proxy} \mathbf{1}$$

$$\mathbf{1} = \gamma C$$

$$\text{Entonces } \gamma = \frac{1}{C}$$

El vector \mathbf{w}_P obtenido resuelve el problema de asignación, relativo no solo al *proxy* seleccionado, sino al subconjunto de activos escogidos en el portafolio.

Aun cuando el *proxy* no sea eficiente y mayor sea el nivel de riesgo no sistemático en un portafolio seleccionado, la asignación a través de la minimización de la varianza residual permite minimizar la varianza total (entre el conjunto de activos seleccionados y el *proxy*). La eficiencia se refiere en este contexto a construir portafolios con ponderaciones que minimicen el componente no-sistemático de la relación lineal. El vector \mathbf{w}_P (obtenido de minimizar la varianza residual), no refleja el nivel de contribución marginal del activo al mercado, solo resuelve dado un nivel de riesgo sistemático seleccionado, un mejor resultado para permitir una mayor diversificación dado el subconjunto.

IV. La Valuación de activos y la matriz de covarianzas

Partiendo de los excesos de rendimiento y de la relación lineal entre estos y el *proxy* utilizado, el análisis de corte transversal sugiere, en mayor o menor medida un bajo nivel de explicación de las betas obtenidas sobre los excesos de rendimientos observados de los activos, para cualquier subconjunto en un tiempo t .

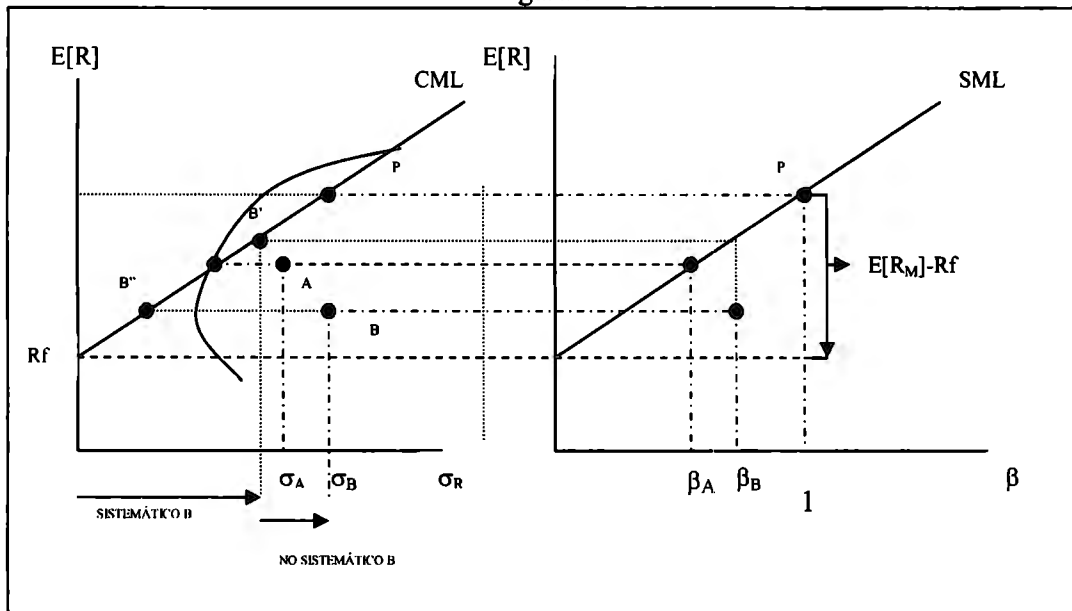
$$\mathbf{R}_t = \gamma_0 + \gamma_1 \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (37)$$

R_t vector de rendimientos esperados en el tiempo t .

β vector de sensibilidades de los N activos en el tiempo t .

Donde γ_0 captura el llamado elemento promedio de sub/sobrevaluación de los activos, es decir, el elemento mispricing.

Figura 8



Al seleccionar un portafolio no eficiente como P y a partir de él estimar las betas de cada activo, aparece el activo B como subvaluado por el mercado. El rendimiento requerido de acuerdo a β_B se muestra en el punto B' sobre la CML que sugiere que podemos separar el componente sistemático y no sistemático de la desviación estándar del activo. De B'' a B' sobre la desviación estándar del activo se encuentra el componente sistemático del riesgo, y B' a B el componente no-sistemático.

Se ha sugerido que este componente (mispricing) puede reflejar la existencia de otros factores de riesgo sistemático no considerados, pero habría que agregar que dependerán del subconjunto de activos y del periodo de análisis, reflejando el bajo nivel de diversificación logrando respecto al *proxy* seleccionado y al subconjunto de activos en el portafolio.

Para mejorar este análisis de explicación y mantener el concepto de equilibrio general, debemos capturar el elemento mispricing en la valuación de los activos, de tal manera que el α quede eliminado (MacKinley, 1995 y MacKinley y Pastor, 2000). Esto nos lleva a un concepto multidimensional del riesgo.

Partimos de

$$\mathbf{R}_t = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{B}\mathbf{R}_{Pt} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (38)$$

Donde:

\mathbf{R}_t es un vector NX1 de excesos de rendimientos (N activos)

Los rendimientos $E[\mathbf{R}_t] = \boldsymbol{\mu}_P$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ matriz de COV

$\boldsymbol{\alpha}$ es un vector NX1

$\boldsymbol{\varepsilon}_t$ es un vector NX1 de residuales

\mathbf{B} es el conjunto de parámetros estimados (factor loadings) NKK

\mathbf{R}_{Pt} es un vector de portafolio de excesos de rendimientos KX1 (factores de riesgo)

Se satisfacen las siguientes condiciones

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}_t] = 0$$

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_t^T] = \sum_{\substack{\text{proxy} \\ \text{resid}}}$$

$$\text{COV}[\mathbf{R}_{Pt}, \boldsymbol{\varepsilon}_t] = 0$$

PROPOSICIÓN 3 Estimación de factor no observado

Dado que el vector $\boldsymbol{\alpha}$ contiene información de factores adicionales¹⁹, podemos usar la varianza residual para capturar esta información. Donde R_{proxy} es el exceso de rendimientos del proxy de mercado y R_{ht} es el factor no observado.

$$\mathbf{R}_t = \boldsymbol{\beta}R_{\text{Proxy}} + \boldsymbol{\beta}_h R_{\text{ht}} + \boldsymbol{\eta}_t \quad (39)$$

Donde, a partir de la información contenida en $\boldsymbol{\alpha}$ y $\sum_{\substack{\text{proxy} \\ \text{resid}}}$, estimamos

¹⁹ Aun cuando partimos del modelo de equilibrio y no de un modelo de arbitraje, la incorporación de un factor adicional de riesgo es resultado principalmente de la no diversificación en el proxy y/o en el conjunto de activos seleccionados en el portafolio.

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}_h \mathbf{R}_h \quad (40)$$

$$\sum_{resid}^{proxy} = \boldsymbol{\beta}_h \boldsymbol{\beta}_h^T \sigma^2(\mathbf{R}_h) + \Phi \quad (41)$$

\mathbf{R}_h es el risk-premium del factor desconocido

$\sigma^2(\mathbf{R}_h)$ la varianza del factor desconocido

Φ es una matriz de errores

Así que dado el objetivo de eliminar el elemento de mispricing, minimizamos la varianza residual agregando como una restricción adicional, precisamente la eliminación del elemento de sub/sobrevaluación. Las ponderaciones resultantes nos permitirán estimar un nuevo factor de riesgo omitido, resolvemos

$$\text{Min } \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \sum_{resid}^{proxy} \mathbf{w}$$

$$\text{s.a. } \mathbf{w}^T \boldsymbol{\alpha} = 0$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1$$

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \sum_{resid}^{proxy} \mathbf{w} + \lambda [0 - \mathbf{w}^T \boldsymbol{\alpha}] + \gamma [1 - \mathbf{w}^T \mathbf{1}]$$

$$(\mathbf{w}, \lambda, \gamma)$$

El vector de ponderaciones óptimas resultante queda expresado como

$$\mathbf{w}_h = \lambda \left[\sum_{resid}^{-1 proxy} \boldsymbol{\alpha} \right] + \gamma \left[\sum_{resid}^{-1 proxy} \mathbf{1} \right] \quad (42)$$

premultiplicando por $\boldsymbol{\alpha}^T$ y $\mathbf{1}^T$, resolvemos los valores de λ y γ ,

$$0 = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{w}_h = \lambda \left[\boldsymbol{\alpha}^T \sum_{resid}^{-1 proxy} \boldsymbol{\alpha} \right] + \gamma \left[\boldsymbol{\alpha}^T \sum_{resid}^{-1 proxy} \mathbf{1} \right]$$

$$1 = \mathbf{1}^T \mathbf{w}_h = \lambda \left[\mathbf{1}^T \sum_{resid}^{-1 proxy} \boldsymbol{\alpha} \right] + \gamma \left[\mathbf{1}^T \sum_{resid}^{-1 proxy} \mathbf{1} \right]$$

$$0 = \lambda B + \gamma A$$

$$1 = \lambda A + \gamma C$$

$$\text{Entonces } \lambda = \frac{-A}{D} \quad \gamma = \frac{B}{D}$$

Donde $D = BC - A^2$

El vector w_h obtenido tiene la propiedad de eliminar el elemento de sub/sobrevaluación, permitiendo estimar β_h :

$$\beta_{hi} = \text{COV}(\varepsilon_i, \varepsilon_P) / \sigma^2(\varepsilon_P) \quad (43)$$

En forma matricial tenemos

$$\beta_h = \frac{\sum_{resid}^{proxy} w_h}{w_h^T \sum_{resid}^{proxy} w_h} \quad (44)$$

Las ponderaciones obtenidas no resuelven la asignación previa, ni tienen porque coincidir con las obtenidas previamente, pues particularmente estas nuevas ponderaciones permiten capturar la información de posibles factores omitidos, ya sea porque son factores de riesgo sistemático no considerados y/o una debilidad heredada del *proxy* y/o el subconjunto de activos que no permiten la eliminación del riesgo no sistemático por la diversificación. Sin embargo, la minimización de la varianza residual con esta restricción adicional nos acerca de igual manera a la varianza del *proxy* estimando una fuente adicional de riesgo ■

V. Análisis empírico

V.1 Simulación

El objetivo de esta primera parte es evaluar mediante el análisis empírico las *Proposiciones 1 y 2* expuestas. Con base en datos de excesos de rendimientos de activos del mercado de valores mexicano, se formaron diferentes subconjuntos de activos y con ellos se realizó simulación. La simulación consiste en formar portafolios “proxy” eficientes y no eficientes en el sentido media-varianza y con base en ellos estimar las β_i y calcular la matriz de covarianzas residual (Σ_{resid}).

Esta simulación permite comprobar que si construimos portafolios eficientes con cualquier conjunto de activos, y seleccionamos las ponderaciones de cualquiera de ellos para formar el portafolio “proxy del mercado”; al minimizar la matriz de covarianzas residuales resultante de la relación lineal entre los activos y el portafolio *proxy*, en todos los casos se encuentran las ponderaciones que a priori fueron asignadas para construir el *proxy* con estos activos. Adicionalmente, se puede mostrar que al usar portafolios no eficientes, aun cuando contengan los mismos activos, estos no permiten un ajuste lineal exacto en una relación de corte transversal, sugiriendo sub/sobrevaluación de los activos, entre los rendimientos promedio observados y las betas estimadas.

Los resultados muestran que cualquier portafolio eficiente (con el calculo del zero-beta portafolio correspondiente), permite un ajuste lineal entre los rendimientos promedio observados y las betas estimadas, al tiempo que la minimización de la varianza residual permite obtener las ponderaciones de ese portafolio eficiente. Sin embargo, aun cuando cualquier otro portafolio no-eficiente no permite esta relación lineal exacta entre los excesos de rendimiento promedio y las betas, la minimización de la varianza residual, igualmente nos permite recuperar las ponderaciones de estos portafolios.

A continuación se explican algunos resultados:

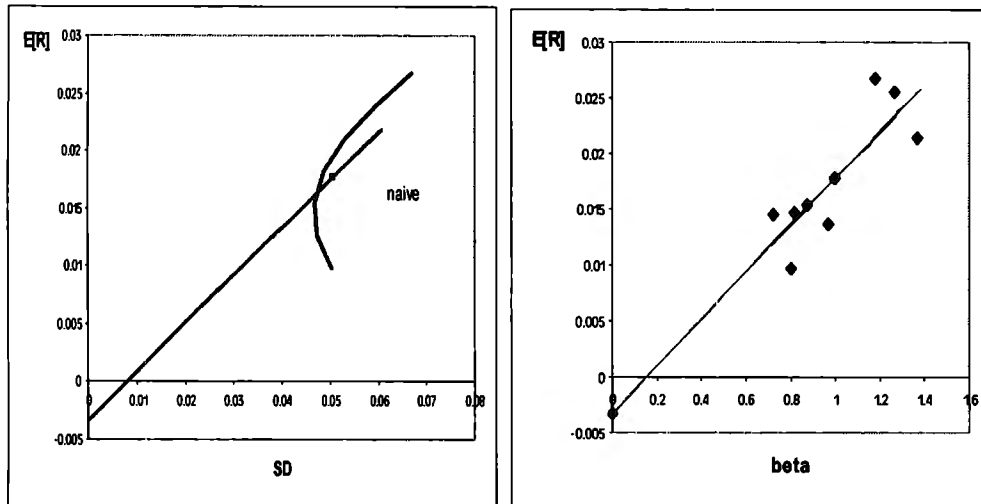
1) Se asignaron diferentes ponderaciones aleatoriamente a cada activo para construir con ellos el Índice de rendimiento del “proxy”. Se obtienen $E[R_i]$, $\sigma^2(R_i)$, $COV(R_i, R_j)$, β_i , $COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$.

Cuando las ponderaciones asignadas no producen portafolios eficientes de mínima varianza, aun cuando la minimización de la varianza residual nos permite obtener el vector w_P de las ponderaciones asignadas. Al usar las β_i y los rendimientos promedio de los activos en un análisis de corte transversal las betas no explican la diferencia entre los rendimientos, apareciendo el elemento de sub/sobrevaluación (como se observa el figura 9).

Si tomamos un subconjunto de activos de esta muestra (con los cuales se construyó el proxy no eficiente), los valores estimados de betas no se modifican y el problema de

sub/sobrevaluación se mantiene. Al computar la matriz de covarianzas residual y minimizarla, obtenemos ponderaciones que permiten reducir el componente no-sistemático de la varianza del portafolio dado el subconjunto seleccionado. Sin embargo, al computar la beta y rendimiento de este portafolio no satisface la relación lineal.

Figura 9



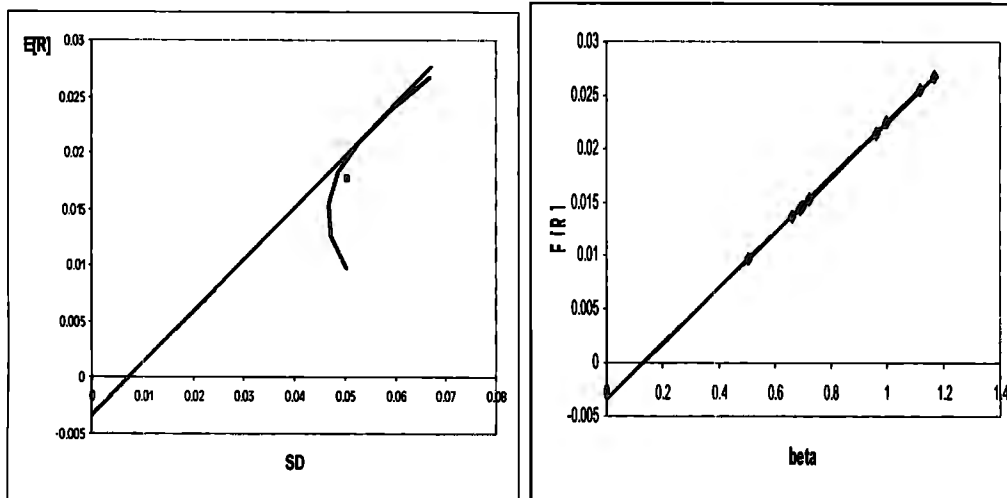
En la gráfica se muestra un portafolio con ponderaciones iguales para cada activo (el portafolio naive). El proceso descrito en la proposición 2 a través de la minimización de la varianza residual permite obtener las ponderaciones de los activos. Sin embargo, el ajuste lineal en el espacio de las betas respecto a los rendimientos produce una aparente sub/sobrevaluación de los activos.

2) Cuando el portafolio es eficiente de entre los de mínima varianza, y se realiza la estimación lineal y computo de la matriz de covarianza residual correspondiente, al igual que el caso anterior (al minimizar la varianza residual), esto permite rescatar las ponderaciones w_P del portafolio eficiente. El resultado siempre muestra un ajuste lineal riesgo-rendimiento en el espacio de los betas²⁰.

Al tomar un subconjunto de activos de la muestra total, las estimaciones de betas y covarianzas no se modifica, sin embargo, al minimizar la varianza residual las ponderaciones obtenidas dejan de coincidir con las óptimas w_P del portafolio tangencia, dado que solo estamos considerando un subconjunto del total. Las ponderaciones obtenidas de minimizar la varianza residual corresponden a un portafolio eficiente en el sentido que cae sobre la línea riesgo-rendimiento en el espacio de las betas.

²⁰ En este caso se toma el mismo valor del $E[R_Z]$, para encontrar el portafolio de tangencia.

Figura 10



Al seleccionar el portafolio eficiente, que además satisface las condiciones de tangencia (dado $E[R_Z]$), el ajuste lineal se produce eliminando la aparente sub/sobrevaluación de los activos. Lo mismo ocurre para cualquier portafolio eficiente que se seleccione, sin embargo, las betas serán diferentes debido a que cambia el valor y el peso relativo de la $COV(R_i, R_M)$ respecto a la varianza total.

Tabla 1

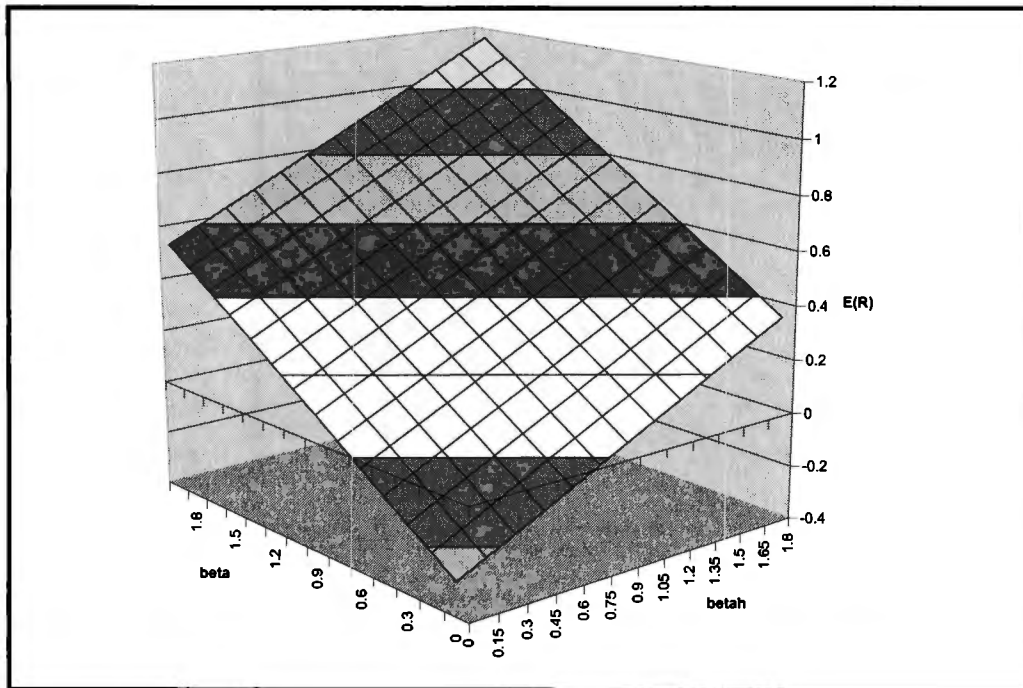
Activos	Betas (naive)	Beta (eficiente)
A	1.18	1.17
B	0.97	0.66
C	1.27	1.12
D	1.37	0.96
E	0.72	0.69
F	0.82	0.70
G	0.87	0.73
H	0.80	0.51
PROXY	1	1
$E[R_Z]$	0	0

Esta tabla muestra los valores estimados de las betas de las estimaciones mostradas en las figuras 9 y 10. La diferencia en las betas obtenidas refleja el cambio tanto en la $COV(R_i, R_M)$, como el peso que tiene respecto al varianza total del Portafolio.

Si partimos de un portafolio que no es el mercado sino un *proxy* del mismo, que no necesariamente es eficiente y seleccionamos diferentes subconjuntos de activos para formar portafolios, independientemente del criterio para formar los subconjuntos, la asignación que nos permite mayor eficiencia (mínima varianza para cada $E[R_P]$) se resuelve al minimizar la varianza residual. El problema de la aparente sub/sobrevaluación de los activos y portafolios, deberá incorporar la estimación de un

factor adicional de riesgo en la estimación de los rendimientos esperados. Esto es, incorporando la matriz de covarianzas residual con el elemento de sub/sobrevaluación.

Figura 11



Al introducir la información contenida en la varianza residual estimando un nuevo factor de riesgo implícito, se podrá hacer un ajuste en el análisis de corte transversal que permita una visión multidimensional del riesgo que enfrentan los activos seleccionados en el portafolio, a partir de considerar el *proxy* del mercado.

La figura 11, muestra el resultado de incorporar un factor adicional a través de la estimación de un vector β_h , que elimine el componente de sub/sobrevaluación como restricción en la minimización de la varianza residual. En todos los casos es posible encontrar este vector, pero varía de acuerdo a la muestra seleccionada de activos y al periodo de análisis. Esto confirma que la información contenida en la matriz de covarianzas residual varía desde factores sistemáticos no considerados hasta la propia correlación de los rendimientos de los activos.

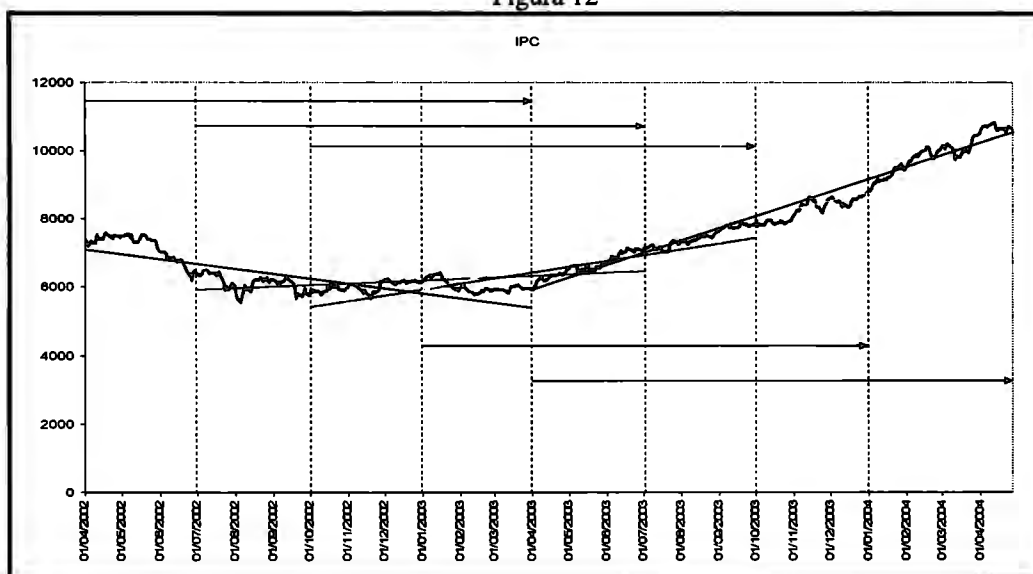
V.2 Análisis del periodo 2002-2004

Para esta parte del análisis se consideran en la muestra los excesos de rendimiento diarios de 30 de los 35 activos del IPC, además del propio IPC, observados en el periodo abril de 2002 a abril de 2004²¹.

La muestra se subdividió en 5 subperiodos: 1) abril-2002 a abril-2003, 2) julio-2002 a julio-2003, 3) octubre-2002 a octubre-2003, 4) enero-2003 a enero-2004 y, 5) abril-2003 a abril-2004. Esta subdivisión nos permite capturar primeramente diferentes tendencias del mercado.

Como se observa en la figura 12, el periodo completo de abril de 2002 a abril de 2004, muestra que durante el periodo se incluyen tendencias a la baja, de estabilización y a la alza. La división en subperiodos permite considerar esta situación pues como se observa en la tabla 2 el proceso de crecimiento de la rentabilidad va acompañado de una disminución de la volatilidad, medida por la desviación estándar. En el último subperíodo, con un mercado a la alza, la volatilidad aumenta, pero no al nivel de un mercado a la baja, como se puede observar en las figuras 13a y 13b.

Figura 12



El primer periodo muestra un mercado con una tendencia marcada a la baja. En los siguientes periodos el mercado muestra una tendencia a estabilizarse y posteriormente una tendencia a la alza. La tendencia alcista se observa de manera pronunciada en el último periodo.

²¹ Economática, datos ajustados por derechos.

Tabla 2
Rendimiento del IPC anualizado

	E[R]	SD
abr02-abr03	(25.09%)	21.17%
jul02-jul03	6.99%	20.51%
oct02-oct03	29.45%	15.38%
ene03-ene04	33.38%	14.04%
abr03-abr04	55.59%	14.20%

Los valores del Rendimiento promedio de cada subperíodo y su desviación estándar expresados en forma anualizada, muestran la tendencia del mercado.

Figura 13a

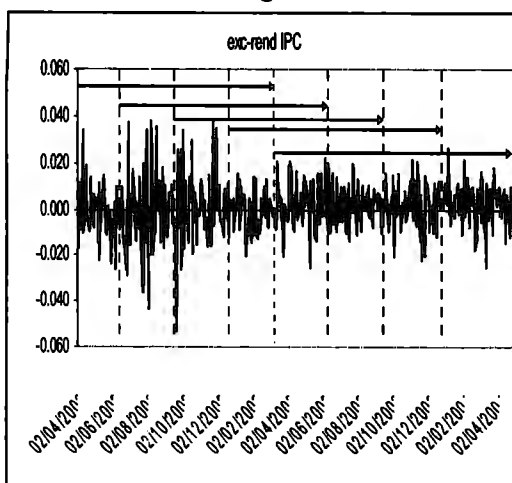
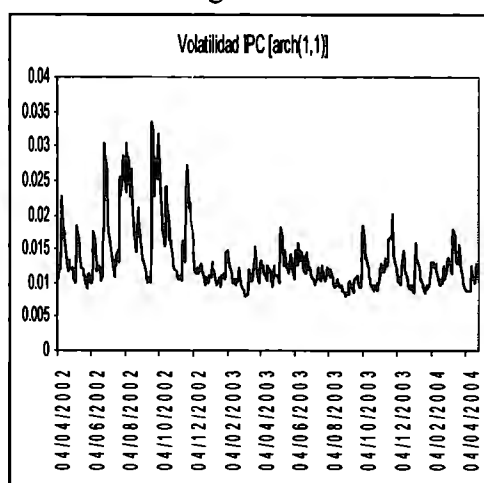


Figura 13b



Los excesos del rendimiento del mercado muestran mayor variabilidad en el caso de un mercado a la baja. Esta volatilidad se manifiesta en una mayor Varianza y en posibles cambios en la relación lineal entre los excesos de rendimientos de los activos y los excesos de rendimiento del IPC.

V.3 Estimación

El riesgo de la covarianza residual

Con la finalidad de verificar la existencia del riesgo de la covarianza residual y de que las perturbaciones de las diferentes ecuaciones en un tiempo dado pueden estar reflejando algunos factores no medibles o que han sido omitidos, esto implica que estas perturbaciones podrían estar correlacionadas. Esto puede ocurrir también en el caso de series de tiempo cuando las observaciones son utilizadas para estimar diferentes ecuaciones.

La Correlación entre los errores de las diferentes ecuaciones en un tiempo dado es conocida como correlación contemporánea.

Cuando la correlación contemporánea existe, es más eficiente estimar todas las ecuaciones de manera conjunta, que estimarlas de manera individual.

Los supuestos utilizados son:

1) $E[\varepsilon_{it}] = 0$ donde $i = 1, \dots, N$ y $t = 1, 2, \dots, T$

2) En una ecuación dada, la varianza de los errores es constante en el tiempo, pero cada ecuación puede tener una varianza diferente.

$$\text{var}(\varepsilon_{1t}) = E[\varepsilon_{1t}^2] = \sigma^2(\varepsilon_1) = \sigma(\varepsilon)_{11}$$

$$\text{var}(\varepsilon_{2t}) = E[\varepsilon_{2t}^2] = \sigma^2(\varepsilon_2) = \sigma(\varepsilon)_{22}$$

3) Dos errores en diferentes ecuaciones, pero correspondiendo al mismo periodo de tiempo están correlacionados (correlación contemporánea existe),

$$\text{COVAR}(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{jt}) = E[\varepsilon_{it}, \varepsilon_{jt}] = \sigma(\varepsilon)_{ij} \quad i, j = 1, \dots, N$$

4) Los errores en diferentes periodos de tiempo, estén o no en la misma ecuación, no están correlacionados (autocorrelación no existe)

$$\text{COVAR}(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{js}) = E[\varepsilon_{it}, \varepsilon_{js}] = 0 \quad \text{para } t \neq s \text{ y } i, j = 1, \dots, N$$

Debido a la correlación contemporánea, aun cuando los estimadores obtenidos por mínimos cuadrados son los mejores estimadores lineales insesgados, es posible mejorar la estimación.

Para probar la existencia de correlación contemporánea, se utiliza una prueba de hipótesis (Judge, George. 1988).

Por ejemplo para el caso de 3 ecuaciones usadas en un sistema de equilibrio, la hipótesis nula y alternativa será:

$$H_0: \sigma(\varepsilon)_{12}=\sigma(\varepsilon)_{13}=\sigma(\varepsilon)_{23}=0$$

H_1 : Al menos una covarianza es diferente de cero, se rechaza la hipótesis nula

Una prueba estadística sugerida es el multiplicador de Lagrange, sugerido por Breusch y Pagan. En el caso de las tres ecuaciones, este estadístico sería:

$$\lambda = T (r_{21}^2 + r_{31}^2 + r_{32}^2)$$

Donde r_{ij}^2 es la correlación cuadrada

$$R_{ij}^2 = \frac{\hat{\sigma}_{ij}^2}{\hat{\sigma}_{ii}^2 \hat{\sigma}_{jj}^2}$$

Bajo H_0 , λ tiene una distribución asintótica χ^2 con 3 grados de libertad. Así pues la hipótesis nula es rechazada si λ es mayor al valor crítico de una distribución $\chi^2_{(3)}$ con un nivel de significancia pre-especificado.

En un caso más general donde tenemos M ecuaciones, el estadístico está dado por:

$$\lambda = T \sum_{i=2}^M \sum_{j=1}^{i-1} r_{ij}^2$$

Bajo H_0 , λ tiene una distribución asintótica χ^2 con $\frac{M(M-1)}{2}$ grados de libertad.

En nuestro caso con 30 ecuaciones bajo H_0 la χ^2 tendrá 435 grados de libertad, y con un nivel de confianza al 95% el valor crítico será **484.63**.

Los resultados obtenidos para los diferentes periodos son:

	λ
periodo 1	862.33
periodo 2	920.73
periodo 3	918.63
periodo 4	877.19
periodo 5	805.97

Por lo que se rechaza la hipótesis nula, así que al menos una covarianza es distinta de cero.

Para capturar el máximo posible de correlación contemporánea entre los residuales y mejorar la estimación de la relación lineal entre los rendimientos de los activos y los rendimientos del IPC, se usó el método de estimación Seemingly Unrelated Regresión (SUR)²² para todos los subperiodos. A partir de este resultado se computa la matriz de Covarianzas de los residuales Σ_{resid} .

Abril 2002-Abril 2003

En la tabla 3 se muestran los resultados obtenidos de la regresión de los excesos de rendimiento de los activos respecto al exceso de rendimiento del IPC. En la columna de rendimientos se observa el rendimiento promedio negativo de la mayoría de los activos. Aun cuando α es un parámetro estadísticamente no significativo, cuando lo expresamos en forma anualizada representa una cantidad importante del rendimiento. Las R^2 son bajas y en promedio reflejan un poder explicativo del 30% de la variabilidad de los rendimientos respecto al IPC (este resultado no es muy diferente a los obtenidos para otros mercados, incluso de EU). Con excepción de Peñoles, las betas son estadísticamente significativas.

²² Existen dos condiciones bajo las cuales el método por mínimos cuadrados es idéntico al método de mínimos cuadrados generalizados y bajo los cuales no hay ganancia alguna de dar un tratamiento como un sistema de ecuaciones:

- 1) Cuando la correlación contemporánea es cero:
- 2) Cuando la variable explicativa de cada ecuación es idéntica

Sin embargo, cuando existe correlación serial, SUR da resultados diferentes a mínimos cuadrados, como probablemente suceda en este caso.

Tabla 3

Periodo Abril-02 a Abril 03
 System: SYS01
 Estimation Method: Seemingly Unrelated Regression
 Sample: 1 253
 Included observations: 253
 Total system (balanced) observations 7590
 Linear estimation after one-step weighting matrix

	REND anual	α	t.sta	β	tsta	R2	α anual
ALFA	12.68%	0.16%	1.52	1.16	14.24	0.4450	41.67%
AMERICA MOVIL	-16.43%	0.08%	0.83	1.41	20.83	0.6316	18.95%
ARA	-12.80%	0.03%	0.21	0.77	8.41	0.2185	6.47%
ARCA	-23.08%	-0.06%	-0.46	0.32	3.28	0.0408	-15.12%
BIMBO	-41.86%	-0.10%	-1.00	0.66	8.81	0.2347	-25.35%
CEMEX	-31.05%	-0.03%	-0.34	0.96	15.66	0.4923	-6.98%
COCA	-24.32%	-0.06%	-0.49	0.34	3.46	0.0453	-15.91%
COM MEX	-41.29%	-0.09%	-0.71	0.75	7.91	0.1984	-22.59%
CONTAL	-5.65%	0.03%	0.24	0.54	5.51	0.1070	7.98%
CORP INTER	-34.60%	-0.02%	-0.21	1.15	14.41	0.4509	-5.75%
ELEKTRA	-41.79%	-0.04%	-0.25	1.28	11.12	0.3284	-9.80%
FOMENTO	-18.98%	0.02%	0.24	0.96	15.32	0.4813	5.18%
G CARSO	-27.55%	-0.02%	-0.26	0.85	12.06	0.3650	-6.10%
GEO	7.16%	0.10%	0.86	0.72	8.26	0.2124	25.15%
G BANORTE	20.46%	0.18%	1.49	0.99	10.95	0.3215	45.23%
G INBURSA	-40.82%	-0.07%	-0.64	0.88	10.19	0.2908	-18.64%
G MEXICO	-3.99%	0.07%	0.39	0.87	6.40	0.1394	17.84%
G MODELO	-5.64%	0.03%	0.37	0.55	8.32	0.2150	8.11%
G SANBORNS	-33.55%	-0.10%	-0.67	0.33	2.92	0.0327	-25.32%
ICA	-57.56%	-0.10%	-0.40	1.31	7.11	0.1664	-24.61%
KIMBERLY	-18.11%	-0.02%	-0.28	0.49	7.70	0.1900	-5.89%
PEÑOLES	12.63%	0.06%	0.35	0.11	0.84	0.0028	15.41%
SAVIA	45.61%	0.28%	1.28	1.08	6.40	0.1392	72.75%
SORIANA	-53.73%	-0.11%	-1.20	1.05	15.38	0.4832	-27.47%
TELECOM	-61.53%	-0.13%	-0.75	1.19	9.52	0.2638	-31.73%
TELMEX	-12.10%	0.05%	0.86	1.01	22.13	0.6594	13.35%
TELEVISA	-42.71%	-0.03%	-0.29	1.42	20.11	0.6151	-6.97%
TV AZTECA	-40.15%	-0.02%	-0.13	1.45	17.57	0.5497	-3.71%
VITRO	-10.46%	0.01%	0.09	0.56	4.81	0.0839	3.62%
WALMART	-12.80%	0.06%	0.75	1.11	18.80	0.5829	0.1492
Promedio						0.2996	

En la tabla se muestran los rendimientos anualizados del promedio aritmético de los activos en el periodo en la segunda columna, en la última columna se muestran las alfas anualizadas en el periodo. Los resultados de la regresión para estimar alfas y betas utilizan los excesos de rendimientos diarios.

En el análisis de corte transversal de los rendimientos de los activos respecto a las betas estimadas observamos el poco nivel explicativo de las betas. Esto nos muestra que el elemento de sub/sobrevaluación esta presente. El hecho de que durante el periodo se

mantenga un mercado a la baja (desde el IPC), se refleja en una pendiente negativa de la regresión.

Esto se puede observar en la tabla 4 y la figura 14.

Tabla 4

Periodo Abril02-Abril03

Regression Statistics

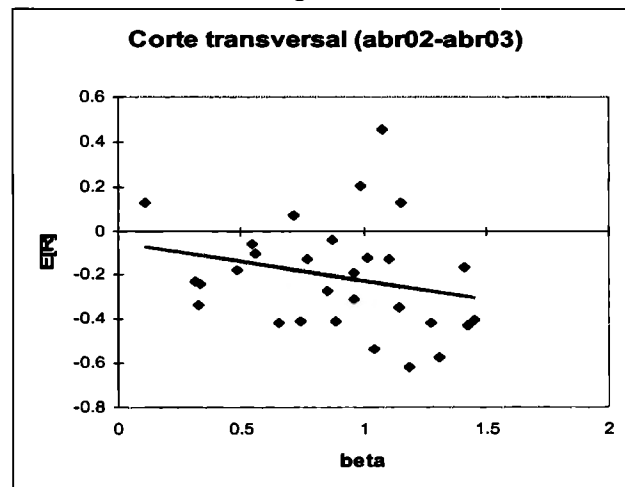
Multiple R	0.256
R Square	0.0655
Adjusted R Square	0.0321
Standard Error	0.2409
Observations	30

$$R_t = \gamma_0 + \gamma_1 \beta_{IPC} + \eta_t$$

	<i>Coeff</i>	<i>SE</i>	<i>t Stat</i>	<i>P-value</i>
Intercept	-0.0522	0.1174	-0.444	0.66025
X Variable 1	-0.1743	0.12438	-1.401	0.17217

El análisis de corte transversal muestra el bajo nivel de explicación de los rendimientos a partir de las betas obtenidas. Donde R_t es el vector de rendimientos promedio en el periodo y β es el vector de las betas estimadas de los activos

Figura 14



El elemento de sub/sobrevaluación está presente. Los excesos de rendimientos de los activos no reflejan la relación lineal respecto al risk-premium del mercado.

Minimización de la matriz de Covarianzas de los residuales

Con la matriz de Covarianzas de los residuales calculamos en primer lugar, el vector w_p de ponderaciones que minimicen la varianza residual. Las ponderaciones obtenidas de

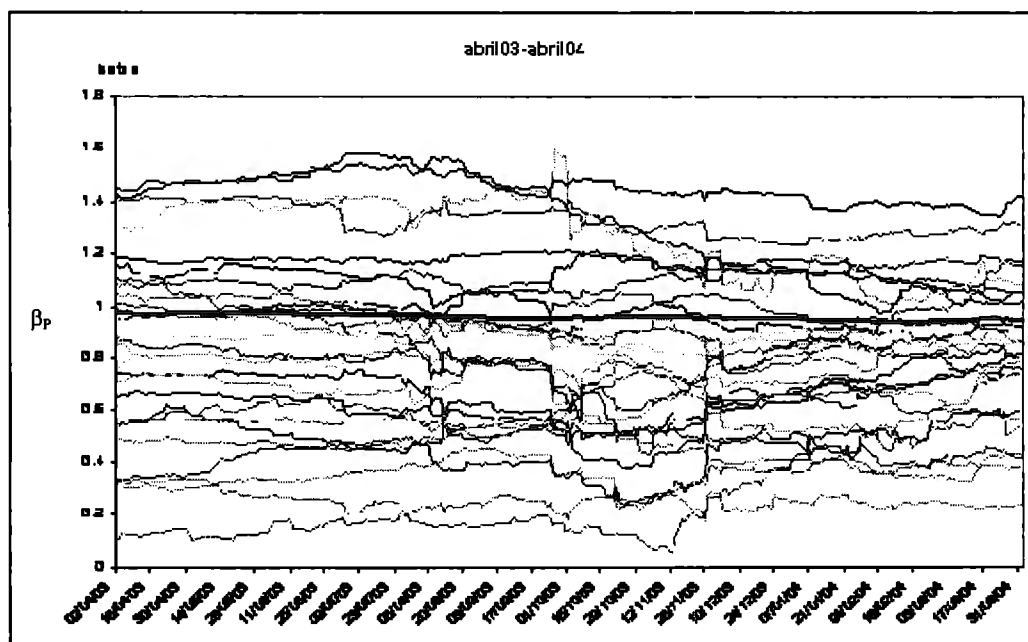
nuestro portafolio de 30 activos permiten, dado un portafolio seleccionado (un objetivo de riesgo sistemático), llevar al mínimo el componente de la varianza residual.

Cabe resaltar que este vector obtenido permite descomponer la varianza total del portafolio en su componente sistemático y no sistemático. Al minimizar la varianza residual, prácticamente es eliminado el componente no sistemático del riesgo del portafolio.

Tabla 5

	SISTEMÁTICA	NO-SISTEMÁTICA
	$(w^T \beta \beta^T w \sigma_{IPC}^2)$	$(w^T \Sigma_{resid} w)$
$\sigma^2(R_p)$	0.043182	0.000453
%	99%	1%

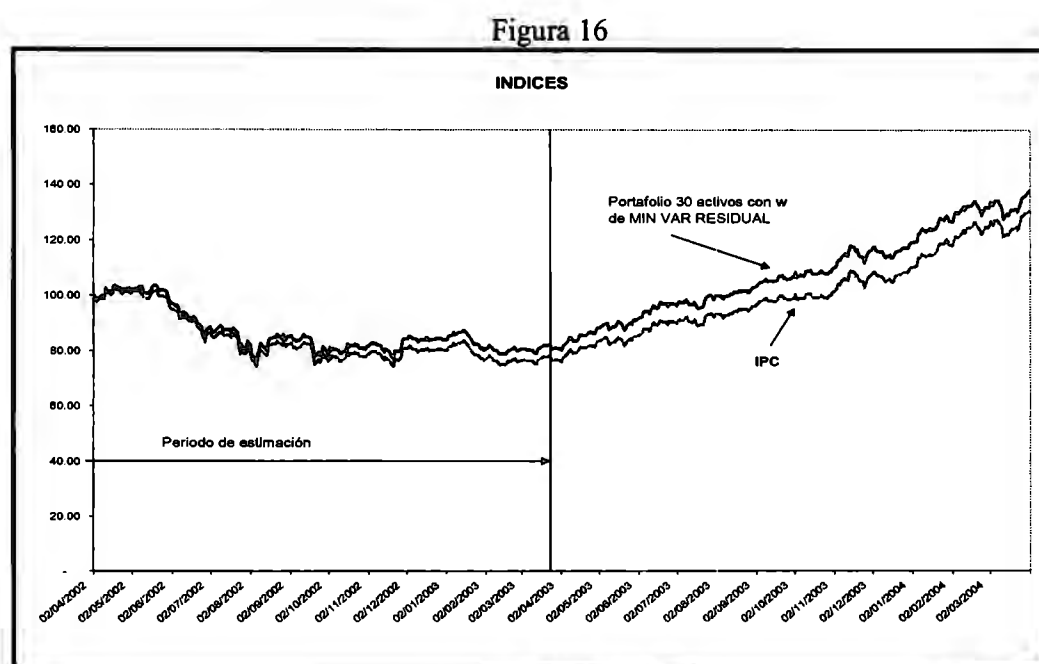
Figura 15



Para el cálculo de las betas se toma como base el periodo abr02-abr03, posteriormente se toma un año de observaciones con una diferencia de un día hasta completar el total de la muestra. Aun cuando las betas de los 30 activos muestran poca estabilidad al proyectarse fuera del subperíodo. La beta del portafolio de 30 activos, calculada con el vector w_p obtenido de minimizar la varianza residual, muestra un comportamiento estable.

Al utilizar estas ponderaciones fuera del subperíodo (abril2003-abril2004) de la muestra para calcular la beta de cada activo y la del portafolio, podemos observar que, independientemente de la variabilidad de las betas de los activos, la beta del portafolio mantiene el objetivo de riesgo sistemático.

Al construir el portafolio y evaluar su desempeño dentro y fuera del subperíodo, manteniendo una estrategia pasiva, es decir, sin modificar las ponderaciones obtenidas w , resalta el hecho de que el portafolio con 30 activos se mantiene y supera en promedio el rendimiento del IPC



El Portafolio evaluado dentro del subperíodo de análisis mantiene el objetivo de riesgo sistemático. Al evaluarlo fuera del periodo en una estrategia pasiva, muestra igualmente un desempeño de acuerdo al objetivo de riesgo sistemático.

Estimación del factor no observado en el periodo abril2002- abril2003.

Al usar la matriz de covarianza residual para eliminar el elemento de sub/sobrevaluación y estimar el factor no observado, que permita estimar correctamente y de manera completa los rendimientos esperados de los activos.

$$R_t = \beta R_{IPC} + \beta_h R_{ht} + \eta_t$$

En el análisis de corte transversal la estimación que se realiza es de la forma:

$$R_t = \gamma_0 + \gamma_1 \beta_{IPC} + \gamma_2 \beta_h + \eta_t$$

De acuerdo con el modelo planteado los valores esperados serían $\gamma_0=0$, $\gamma_1=R_{IPC}$ y $\gamma_2=R_h$. Sin embargo, Aun cuando se utilizaron excesos de rendimiento, existe un elemento independiente del rendimiento de los activos que satisface la relación lineal multidimensional del riesgo.

Tabla 6

		E(z)		
		R_{IPC}	R_h	
		18.02%	-25.09%	
		-18.02%		
	E[R]	β_{IPC}	β_h	t-stat
ALFA	12.68%	1.16	-1.31	-1.93
AM MOVIL	-16.43%	1.41	-0.05	-0.09
ARA	-12.80%	0.77	0.64	0.83
ARCA	-23.08%	0.32	1.84	2.27
BIMBO	-41.86%	0.66	2.41	3.93
CEMEX	-31.05%	0.96	1.39	2.72
COCA	-24.32%	0.34	1.88	2.33
COM MEX	-41.29%	0.75	2.25	2.88
CONTAL	-5.65%	0.54	0.56	0.67
CORP Inter.	-34.60%	1.15	1.32	1.97
ELECTRA	-41.79%	1.28	1.54	1.60
FOMENTO	-18.98%	0.96	0.71	1.35
G CARSO	-27.55%	0.85	1.34	2.26
GEO	7.16%	0.72	-0.40	-0.54
G BANORTE	20.46%	0.99	-1.51	-2.00
G INBURSA	-40.82%	0.88	2.03	2.82
G MEXICO	-3.99%	0.87	0.01	0.01
G MODELO	-5.64%	0.55	0.55	0.99
G SANBORNS	-33.55%	0.33	2.41	2.57
ICA	-57.56%	1.31	2.37	1.52
KIMBERLY	-18.11%	0.49	1.33	2.52
PEÑOLES	12.63%	0.11	0.14	0.13
SAVIA	45.61%	1.08	-3.04	-2.15
SORIANA	-53.73%	1.05	2.52	4.57
TELECOM	-61.53%	1.19	2.76	2.66
TELMEX	-12.10%	1.01	0.26	0.67
TELEVISA	-42.71%	1.42	1.39	2.34
TV AZTECA	-40.15%	1.45	1.21	1.74
VITRO	-10.46%	0.56	0.80	0.81
WALMART	-12.80%	1.10	0.17	0.35

El vector β_h , permite eliminar el elemento de sub/sobrevaluación en los rendimientos esperados de los activos en un análisis de corte transversal. Se resaltan los que no son significativos estadísticamente.

Si solo consideramos en un análisis de corte transversal las betas del factor estimado (β_h), el nivel de explicación aumenta, así como el grado de significancia estadística de los coeficientes estimados. El nivel de ajuste y la reducción del problema de sub/sobrevaluación son evidentes.

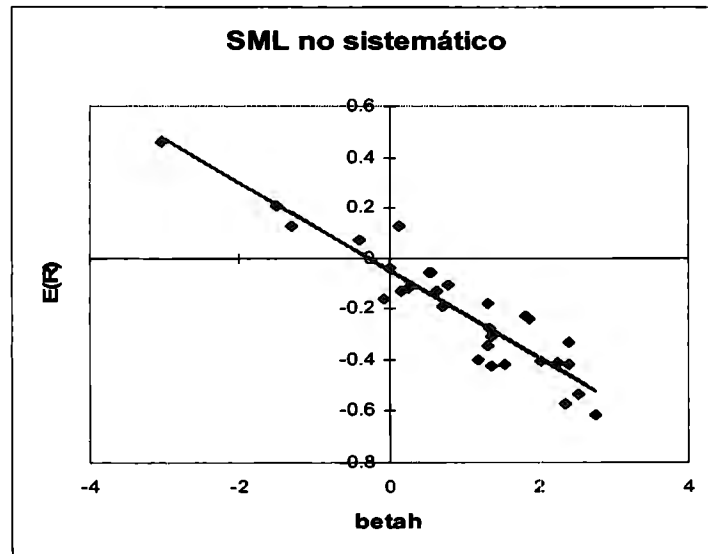
Tabla 7

Periodo Abril02-Abril03

<i>Regresión Statistics</i>				
Multiple R	0.930607	$R_t = \gamma_0 + \gamma_1 \beta_h + \eta_t$		
R Square	0.866029			
Adjusted R Square	0.861244			
Standard Error	0.091212			
Observations	30			
	<i>Coefficients</i>	<i>Standard Error</i>	<i>t Stat</i>	<i>P-value</i>
Intercept	-0.04658	0.020381	-2.28555	0.030055
X Variable 1	-0.17232	0.012808	-13.4536	9.59E-14

El nivel de explicación aumenta considerablemente al utilizar las betas del factor no observado, y estimado a partir de la matriz de covarianza residual, para eliminar el elemento de sub/sobrevaluación.

Figura 17



El nivel de sub/sobrevaluación (mispricing) se reduce al estimar β_h . Esto sugiere que la matriz de covarianza residual contiene información relevante para explicar los rendimientos esperados de los activos.

Al realizar el análisis completo en corte transversal, es decir, considerando β_{IPC} y β_h , podemos observar el ajuste lineal multidimensional de los rendimientos esperados.

Tabla 8

Periodo Abril02-Abril03

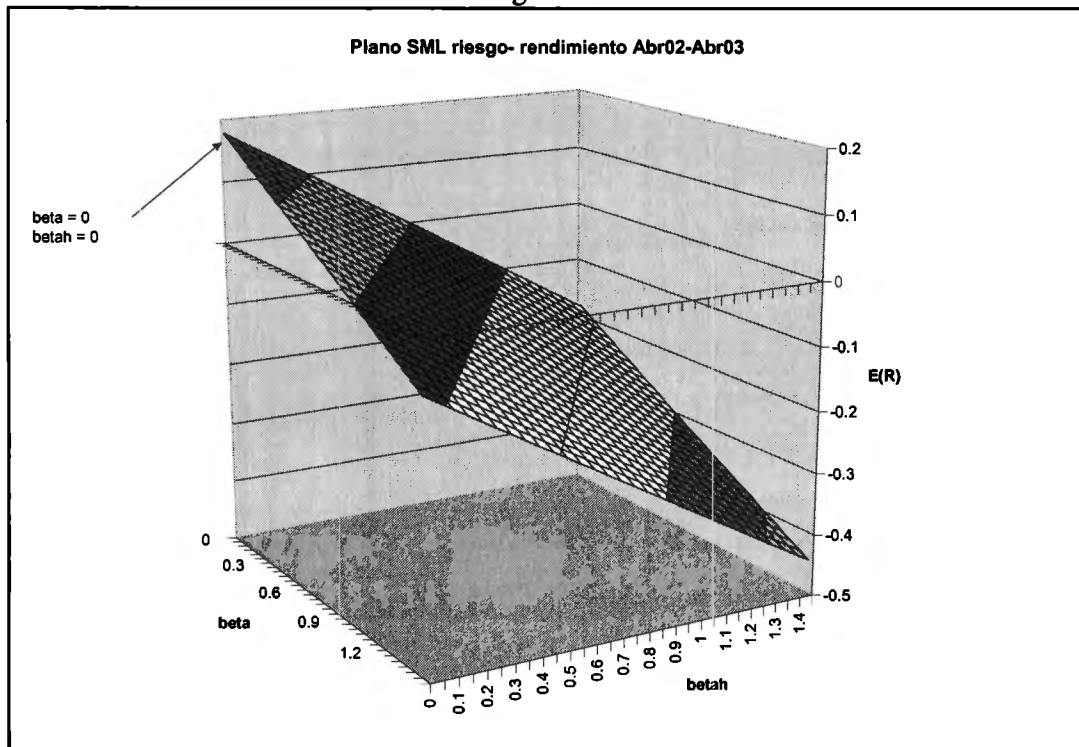
Regression Statistics	
Multiple R	1
R Square	1
Adjusted R Square	1
Standard Error	5.49E-09
Observations	30

$$R_t = \gamma_0 + \gamma_1\beta_{IPC} + \gamma_2\beta_h + \eta_t$$

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value
Intercept	0.180205	2.86E-09	63041658	8.2E-193
X Variable 1	-0.25089	2.86E-09	-8.8E+07	1.1E-196
X Variable 2	-0.1802	7.77E-10	-2.3E+08	4.3E-208

Prácticamente se logra una explicación completa de los rendimientos esperados. El intercepto puede interpretarse como aquella parte del rendimiento sin riesgo en el mercado.

Figura 18



El enfoque multidimensional del riesgo nos permite explicar los rendimientos esperados.

El resto de los subperiodos

Para el resto de los periodos se reprodujo el mismo análisis obteniéndose los mismos resultados: 1) las alfas como elemento que expresa la sub/sobrevaluación, es decir, como diferencia entre el rendimiento requerido (sobre la línea) y el rendimiento

promedio observado están presentes en todos los subperiodos; 2) el vector w obtenido de minimizar la varianza residual permite mantener el objetivo de riesgo sistemático del portafolio y eliminar la varianza residual; 3) al estimar el vector β_h , y hacer el análisis de corte transversal aumenta el poder explicativo de los rendimientos promedio observados, lo que sugiere la importancia de la $COV(\varepsilon_i, \varepsilon_{IPC})$ en el análisis de riesgo; 4) al considerar en el análisis de corte transversal tanto β_{IPC} como β_h , el ajuste es prácticamente completo lo que implica la necesidad de un análisis multidimensional del riesgo; 5) las β_{hi} a medida que se observan betas más estables tienden a perder significancia estadística, aun cuando se mantiene su importancia en el análisis de corte transversal.

A continuación se presentan solo los resultados obtenidos para cada subperiodo.

Julio 2002-Julio 2003

Tabla 9

Periodo Julio02-Julio03

Estimation Method: Seemingly Unrelated Regression

Sample: 1 252

Included observations: 252

Total system (balanced) observations 7560

Linear estimation after one-step weighting matrix

	REND anual	α	t-stat	β_{IPC}	t-stat	R2	α anual
ALFA	29.0%	0.08%	0.91	1.121	15.71	0.4948	21.2%
AMERICA MOVIL	42.9%	0.13%	1.61	1.30	20.15	0.6170	33.8%
ARA	36.4%	0.12%	1.13	0.81	9.67	0.2705	30.8%
ARCA	-16.9%	-0.08%	-0.62	0.36	3.74	0.0526	-19.4%
BIMBO	-25.9%	-0.12%	-1.23	0.59	7.82	0.1954	-30.0%
CEMEX	-5.6%	-0.05%	-0.59	1.03	15.43	0.4857	-12.8%
COCA	-6.6%	-0.04%	-0.32	0.46	4.90	0.0870	-9.9%
COM MEX	18.8%	0.05%	0.41	0.75	7.34	0.1763	13.6%
CONTAL	24.8%	0.08%	0.58	0.62	5.71	0.1145	20.5%
CORP Inter.	-0.2%	-0.03%	-0.29	1.03	12.95	0.3995	-7.4%
ELECTRA	-19.0%	-0.11%	-0.75	1.32	11.42	0.3412	-28.3%
FOMENTO	13.7%	0.03%	0.34	0.93	14.26	0.4466	7.2%
G CARSO	15.3%	0.04%	0.39	0.82	10.78	0.3154	9.5%
GEO	43.0%	0.15%	1.39	0.66	7.80	0.1946	38.4%
G BANORTE	32.2%	0.10%	0.86	0.93	10.04	0.2858	25.8%
G INBURSA	15.4%	0.04%	0.32	0.89	10.14	0.2897	9.2%
G MEXICO	16.7%	0.04%	0.27	0.79	6.27	0.1351	11.1%
G MODELO	2.2%	-0.01%	-0.09	0.56	9.20	0.2514	-1.8%
G SANBORNS	-5.6%	-0.03%	-0.20	0.20	1.91	0.0143	-7.0%
ICA	10.2%	0.00%	0.01	1.42	7.29	0.1740	0.3%
KIMBERLY	10.9%	0.03%	0.37	0.44	6.92	0.1595	7.8%
PEÑOLES	-13.1%	-0.06%	-0.33	0.16	1.22	0.0059	-14.2%
SAVIA	-24.6%	-0.12%	-0.80	0.90	7.60	0.1866	-30.9%
SORIANA	-14.0%	-0.08%	-1.01	0.99	15.62	0.4920	-20.9%
TELECOM	21.6%	0.05%	0.80	1.18	23.20	0.6811	13.4%
TELMEX	6.7%	0.00%	-0.02	1.01	22.54	0.6685	-0.4%
TELEVISA	3.7%	-0.03%	-0.33	1.59	22.60	0.6697	-7.4%
TV AZTECA	5.2%	-0.02%	-0.18	1.54	16.25	0.5116	-5.6%
VITRO	-40.6%	-0.17%	-1.39	0.46	4.780	0.0831	-43.8%
WALMART	16.1%	0.03%	0.47	1.10	20.12	0.6161	8.5%
Promedio						0.3138	

Tabla 10

Periodo Julio02-Julio03

Regression Statistics

Multiple R 0.274802

R Square 0.075516

Adjusted R Square 0.042499

Standard Error 0.204347

Observations 30

$$R_t = \gamma_0 + \gamma_1 \beta_{IPC} + \eta_t$$

	Coeff	SE	t Stat	P-value
Intercept	-0.06966	0.096063	-0.72511	0.474402
X Variable 1	0.154728	0.10231	1.512339	0.141653

Figura 19

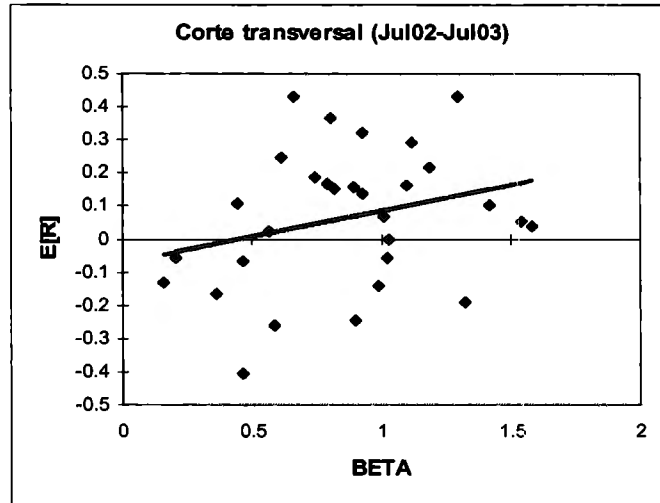


Tabla 11

	$E(z)$			
	R_{IPC}	β_{IPC}	β_h	t-stat
	R_h			
	13.3%			
	7.0%			
	-13.3%			
Rend	β_{IPC}	β_h	t-stat	
ALFA	29.0%	1.12	-0.59	-0.85
AM MOVIL	42.9%	1.30	-1.54	-2.47
ARA	36.4%	0.81	-1.31	-1.61
ARCA	-16.9%	0.36	2.46	2.64
BIMBO	-25.9%	0.59	3.26	4.60
CEMEX	-5.6%	1.03	1.96	3.06
COCA	-6.6%	0.46	1.74	1.89
COM MEX	18.8%	0.75	-0.02	-0.02
CONTAL	24.8%	0.62	-0.54	-0.51
CORP INTER	-0.2%	1.03	1.56	2.02
ELEKTRA	-19.0%	1.32	3.13	2.79
FOMENTO	13.7%	0.93	0.46	0.72
G CARSO	15.3%	0.82	0.28	0.38
GEO	43.0%	0.66	-1.89	-2.29
G BANORTE	32.2%	0.93	-0.94	-1.04
G INBURSA	15.4%	0.89	0.31	0.36
G MEXICO	16.7%	0.79	0.16	0.13
G MODELO	2.2%	0.56	1.13	1.89
G SANBORNS	-5.6%	0.20	1.53	1.46
ICA	10.2%	1.42	0.98	0.51
KIMBERLY	10.9%	0.44	0.42	0.66
PEÑOLES	-13.1%	0.16	2.07	1.62
SAVIA	-24.6%	0.90	3.32	2.91
SORIANA	-14.0%	0.99	2.57	4.28
TELECOM	21.6%	1.18	-0.01	-0.01
TELMEX	6.7%	1.01	1.03	2.37
TELEVISA	3.7%	1.59	1.56	2.29
TV AZTECA	5.2%	1.54	1.42	1.54
VITRO	-40.6%	0.46	4.30	4.73
WALMART	16.1%	1.10	0.36	0.68

Tabla 12

Periodo Julio02-Julio03

<i>Regression Statistics</i>	
Multiple R	0.992442
R Square	0.984941
Adjusted R Square	0.984403
Standard Error	0.026081
Observations	30

$$R_t = \gamma_0 + \gamma_1 \beta_h + \eta_t$$

	<i>Coeff</i>	<i>SE</i>	<i>t Stat</i>	<i>P-value</i>
Intercept	0.195914	0.00567	34.55562	1.66E-24
X Variable 1	-0.13548	0.003166	-42.7944	4.64E-27

Figura 20

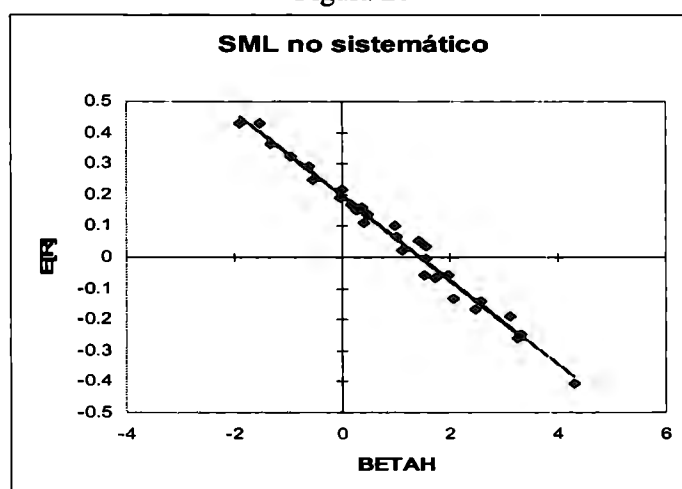


Tabla 13

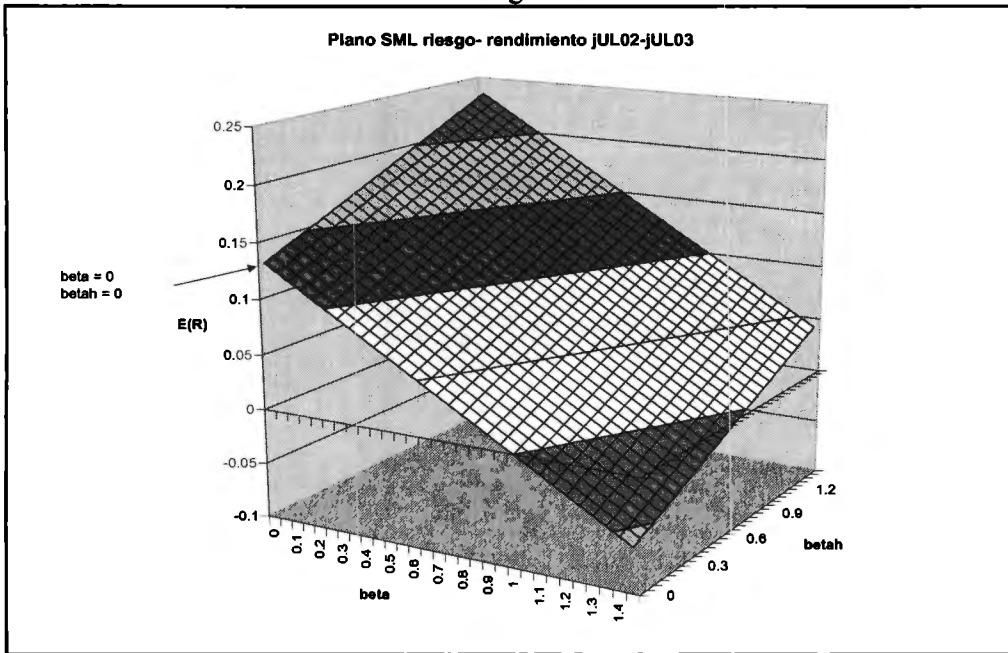
Periodo Julio02-Julio03

<i>Regression Statistics</i>	
Multiple R	1
R Square	1
Adjusted R Square	1
Standard Error	2.08E-08
Observations	30

$$R_t = \gamma_0 + \gamma_1 \beta_{IPC} + \gamma_2 \beta_h + \eta_t$$

	<i>Coeff</i>	<i>SE</i>	<i>t Stat</i>	<i>P-value</i>
Intercept	0.132852	1.05E-08	12617515	6E-174
X Variable 1	0.069937	1.05E-08	6632478	2.1E-166
X Variable 2	-0.13285	2.56E-09	-5.2E+07	1.5E-190

Figura 21



Octubre 2002-Octubre2003

Tabla 14

Periodo Octubre02-Octubre03
 Estimation Method: Seemingly Unrelated Regression
 Sample: 1 252
 Included observations: 252
 Total system (balanced) observations 7560
 Linear estimation after one-step weighting matrix

	REND anual	α	t-stat	β_{IPC}	t-stat	R2	α anual
ALFA	62.3%	0.140%	1.60	0.92	10.26	0.29	35.3%
AMERICA MOVIL	73.2%	0.130%	1.77	1.37	18.22	0.57	32.8%
ARA	59.6%	0.145%	1.41	0.78	7.38	0.18	36.7%
ARCA	7.3%	-0.015%	-0.13	0.38	3.09	0.04	-3.7%
BIMBO	9.5%	-0.015%	-0.17	0.45	5.06	0.09	-3.8%
CEMEX	34.0%	-0.004%	-0.05	1.19	14.59	0.46	-1.1%
COCA	19.8%	0.015%	0.12	0.54	4.17	0.06	3.8%
COM MEX	34.8%	0.077%	0.79	0.52	5.28	0.10	19.3%
CONTAL	1.1%	-0.074%	-0.59	0.68	5.18	0.10	-18.7%
CORP INTER	28.6%	0.022%	0.27	0.78	9.27	0.25	5.6%
ELEKTRA	22.1%	-0.026%	-0.20	0.98	7.21	0.17	-6.7%
FOMENTO	24.2%	-0.012%	-0.16	0.93	12.27	0.37	-3.0%
G CARSO	27.1%	0.036%	0.45	0.61	7.27	0.17	9.2%
GEO	95.0%	0.291%	2.70	0.72	6.49	0.14	73.7%
G BANORTE	43.4%	0.068%	0.72	0.89	9.09	0.25	17.3%
G INBURSA	41.3%	0.063%	0.65	0.86	8.52	0.22	16.0%
G MEXICO	56.8%	0.148%	1.06	0.66	4.54	0.08	37.5%
G MODELO	7.9%	-0.045%	-0.63	0.65	8.96	0.24	-11.4%
G SANBORNS	5.4%	-0.008%	-0.08	0.25	2.56	0.03	-1.9%
ICA	52.0%	0.053%	0.27	1.31	6.51	0.14	13.4%
KIMBERLY	23.5%	0.026%	0.33	0.58	7.29	0.17	6.4%
PEÑOLES	63.7%	0.236%	1.30	0.13	0.71	0.00	59.8%
SAVIA	37.9%	0.074%	0.44	0.65	3.75	0.05	18.8%
SORIANA	11.3%	-0.057%	-0.71	0.87	10.51	0.30	-14.4%
TELECOM	33.9%	-0.007%	-0.11	1.21	18.18	0.57	-1.8%
TELMEX	18.6%	-0.045%	-0.87	1.02	19.07	0.59	-11.5%
TELEvisa	49.9%	0.025%	0.31	1.48	17.77	0.56	6.3%
TV AZTECA	56.0%	0.063%	0.58	1.37	12.35	0.38	15.8%
VITRO	5.7%	-0.020%	-0.16	0.37	2.91	0.03	-5.1%
WALMART	27.4%	-0.012%	-0.18	1.04	15.14	0.48	-3.1%
Promedio						0.236476	

Tabla 15

Periodo Octubre02-Octubre03

Regression Statistics

Multiple R	0.363135
R Square	0.131867
Adjusted R Square	0.100862
Standard Error	0.218856
Observations	30

$$R_t = \gamma_0 + \gamma_1 \beta_{IPC} + \eta_t$$

	Coeff	SE	t Stat	P-value
Intercept	0.147951	0.103312	1.432073	0.163192465
X Variable 1	0.243829	0.118231	2.062312	0.048566732

Figura 22

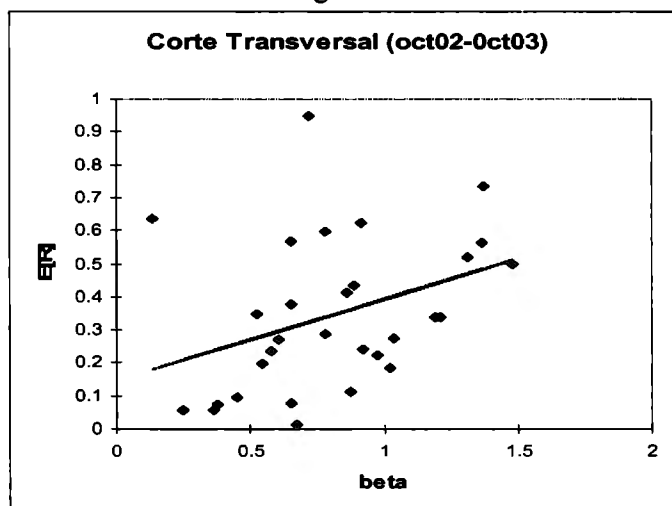


Tabla 16

		$E(z)$			
		R_{IPC}			
		R_h			
	Rend anual	β_{IPC}	β_h	t-stat	
ALFA	62.3%	1.12	1.12	-1.47	-2.06
AM MOVIL	73.2%	1.30	1.30	-1.30	-2.16
ARA	59.6%	0.81	0.81	-1.57	-1.86
ARCA	7.3%	0.36	0.36	1.26	1.29
BIMBO	9.5%	0.59	0.59	1.27	1.78
CEMEX	34.0%	1.03	1.03	1.08	1.64
COCA	19.8%	0.46	0.46	0.73	0.70
COM MEX	34.8%	0.75	0.75	-0.36	-0.44
CONTAL	1.1%	0.62	0.62	2.31	2.23
CORP INTER	28.6%	1.03	1.03	0.61	0.90
ELEKTRA	22.1%	1.32	1.32	1.47	1.35
FOMENTO	24.2%	0.93	0.93	1.21	2.01
G CARSO	27.1%	0.82	0.82	0.36	0.53
GEO	95.0%	0.66	0.66	-4.17	-4.87
G BANORTE	43.4%	0.93	0.93	-0.21	-0.27
G INBURSA	41.3%	0.89	0.89	-0.12	-0.15
G MEXICO	56.8%	0.79	0.79	-1.63	-1.40
G MODELO	7.9%	0.56	0.56	1.80	3.11
G SANBORNS	5.4%	0.20	0.20	1.14	1.45
ICA	52.0%	1.42	1.42	0.06	0.04
KIMBERLY	23.5%	0.44	0.44	0.55	0.86
PEÑOLES	63.7%	0.16	0.16	-3.19	-2.13
SAVIA	37.9%	0.90	0.90	-0.31	-0.23
SORIANA	11.3%	0.99	0.99	2.01	3.06
TELECOM	33.9%	1.18	1.18	1.13	2.12
TELMEX	18.6%	1.01	1.01	1.80	4.34
TELEVISA	49.9%	1.59	1.59	0.56	0.84
TV AZTECA	56.0%	1.54	1.54	-0.11	-0.12
VITRO	5.7%	0.46	0.46	1.35	1.34
WALMART	27.4%	1.10	1.10	1.21	2.23

Tabla 17

Periodo Octubre02-October03

<i>Regression Statistics</i>	
Multiple R	0.899366
R Square	0.808859
Adjusted R Square	0.802033
Standard Error	0.102693
Observations	30

$$R_t = \gamma_0 + \gamma_1 \beta_h + \eta_t$$

	<i>Coeff</i>	<i>SE</i>	<i>t Stat</i>	<i>P-value</i>
Intercept	0.378669	0.019011	19.91825	4.52E-18
X Variable 1	-0.13728	0.012612	-10.8853	1.43E-11

Figura 23

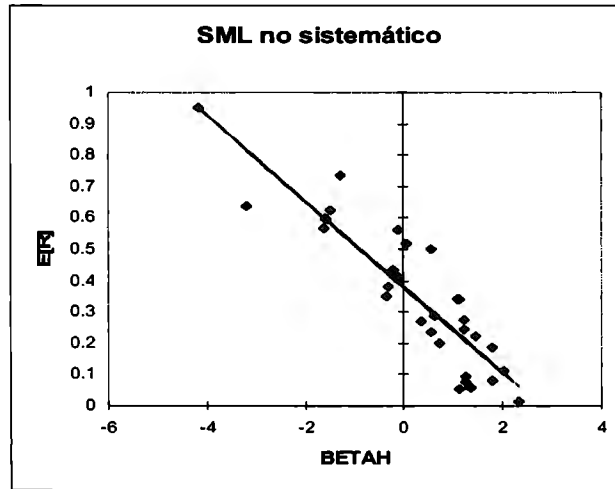


Tabla 18

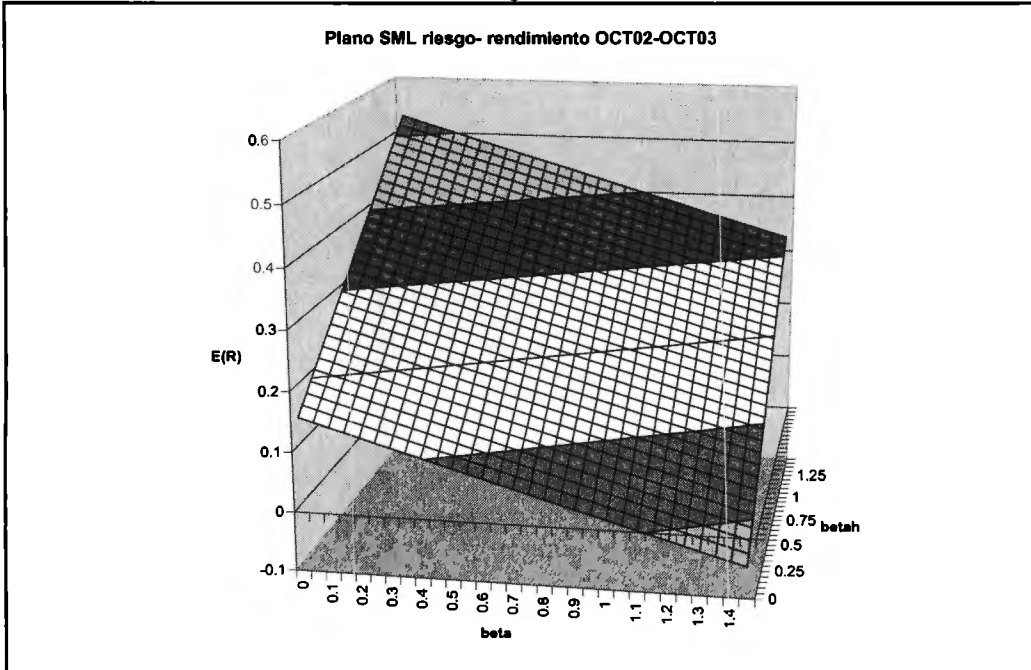
Periodo Octubre02-October03

<i>Regression Statistics</i>	
Multiple R	0.988706
R Square	0.97754
Adjusted R Square	0.975876
Standard Error	0.035849
Observations	30

$$R_t = \gamma_0 + \gamma_1 \beta_{IPC} + \gamma_2 \beta_h + \eta_t$$

	<i>Coeff</i>	<i>SE</i>	<i>t Stat</i>	<i>P-value</i>
Intercept	0.158075	0.016853	9.379593	5.51E-10
X Variable 1	0.256045	0.017981	14.23981	4.5E-14
X Variable 2	-0.14106	0.004411	-31.9834	5.31E-23

Figura 24



Enero 2003- Enero 2004

Tabla 19

Periodo Enero03-Enero04
 Estimation Method: Seemingly Unrelated Regression
 Simple: 1 252
 Included observations: 252
 Total system (balanced) observations 7560
 Linear estimation after one-step weighting matrix

	REND anual	α	t-stat	β_{IPC}	t-stat	R2	α anual
ALFA	75.0%	0.175%	1.96	0.92	9.25	0.25	44.2%
AMERICA MOVIL	74.1%	0.129%	1.84	1.24	15.84	0.50	32.6%
ARA	58.4%	0.110%	1.24	0.92	9.24	0.25	27.8%
ARCA	11.7%	0.013%	0.18	0.25	3.03	0.04	3.3%
BIMBO	32.2%	0.043%	0.46	0.64	6.20	0.13	10.8%
CEMEX	31.2%	-0.028%	-0.39	1.14	14.21	0.44	-7.0%
COCA	26.5%	0.015%	0.13	0.68	5.25	0.10	3.9%
COM MEX	77.8%	0.217%	2.11	0.68	5.91	0.12	55.0%
CONTAL	17.7%	-0.035%	-0.27	0.80	5.51	0.11	-8.8%
CORP INTER	19.6%	-0.009%	-0.13	0.66	7.86	0.20	-2.4%
ELEKTRA	89.0%	0.239%	1.91	0.85	6.09	0.13	60.5%
FOMENTO	10.9%	-0.069%	-1.04	0.85	11.43	0.34	-17.6%
G CARSO	44.0%	0.080%	1.01	0.71	7.97	0.20	20.3%
GEO	110.3%	0.367%	3.40	0.52	4.29	0.07	92.9%
G BANORTE	43.8%	0.064%	0.70	0.83	7.99	0.20	16.3%
G INBURSA	35.0%	0.026%	0.27	0.85	7.92	0.20	6.6%
G MEXICO	103.1%	0.293%	2.17	0.87	5.70	0.11	74.2%
G MODELO	4.8%	-0.068%	-1.06	0.66	9.12	0.25	-17.3%
G SANBORNS	37.1%	0.098%	0.91	0.37	3.11	0.04	24.7%
ICA	88.4%	0.199%	0.93	1.14	4.76	0.08	50.4%
KIMBERLY	22.4%	0.034%	0.53	0.41	5.67	0.11	8.7%
PEÑOLES	109.8%	0.377%	1.95	0.43	1.99	0.02	95.4%
SAVIA	84.2%	0.267%	1.22	0.50	2.04	0.02	67.5%
SORIANA	20.0%	-0.031%	-0.40	0.84	9.59	0.27	-7.9%
TELECOM	28.7%	-0.038%	-0.55	1.15	14.99	0.47	-9.6%
TELMEX	11.3%	-0.084%	-1.55	0.97	16.07	0.51	-21.2%
TELEVISA	46.1%	-0.006%	-0.08	1.43	17.34	0.54	-1.5%
TV AZTECA	75.1%	0.147%	1.34	1.14	9.24	0.25	37.2%
VITRO	37.6%	0.090%	0.74	0.45	3.29	0.04	22.7%
WALMART	31.1%	-0.033%	-0.50	1.18	16.04	0.51	-8.3%
					promedio	0.22	

Tabla 20

Periodo Enero03-Enero04

<i>Regression Statistics</i>	
Multiple R	0.051991
R Square	0.002703
Adjusted R Square	-0.03291
Standard Error	0.324969
Observations	30

$$R_t = \gamma_0 + \gamma_1 \beta_{IPC} + \eta_t$$

	Coeff	SE	t Stat	P-value
Intercept	0.439632	0.1774	2.478194	0.019501
X Variable 1	0.057363	0.208224	0.275485	0.784966

Figura 25

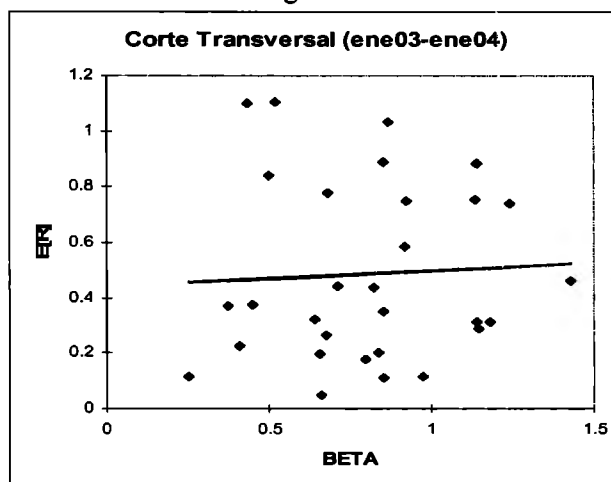


Tabla 21

	rend	β_{IPC}	β_h	t-stat						
		<table border="1"> <tr> <td>E(z)</td> <td>32.8%</td> </tr> <tr> <td>R_{IPC}</td> <td>22.4%</td> </tr> <tr> <td>R_h</td> <td>-24.2%</td> </tr> </table>		E(z)	32.8%	R _{IPC}	22.4%	R _h	-24.2%	
E(z)	32.8%									
R _{IPC}	22.4%									
R _h	-24.2%									
ALFA	75.0%	0.92	-0.75	-0.86						
AMERICA										
MOVIL	74.1%	1.24	-0.29	-0.42						
ARA	58.4%	0.81	-0.10	-0.11						
ARCA	11.7%	0.36	0.87	1.21						
BIMBO	32.2%	0.59	0.57	0.64						
CEMEX	31.2%	1.03	1.28	1.84						
COCA	26.5%	0.46	0.85	0.76						
COM MEX	77.8%	0.75	-1.17	-1.18						
CONTAL	17.7%	0.62	1.35	1.08						
CORP INTER	19.6%	1.03	1.09	1.52						
ELEKTRA	89.0%	1.32	-1.39	-1.15						
FOMENTO	10.9%	0.93	1.69	2.66						
G CARSO	44.0%	0.82	0.20	0.26						
GEO	110.3%	0.66	-2.67	-2.57						
G BANORTE	43.8%	0.93	0.36	0.40						
G INBURSA	35.0%	0.89	0.74	0.80						
G MEXICO	103.1%	0.79	-1.93	-1.47						
G MODELO	4.8%	0.56	1.68	2.72						
G SANBORNS	37.1%	0.20	0.03	0.03						
ICA	88.4%	1.42	-0.99	-0.48						
KIMBERLY	22.4%	0.44	0.66	1.05						
PEÑOLES	109.8%	0.16	-2.77	-1.48						
SAVIA	84.2%	0.90	-1.66	-0.79						
SORIANA	20.0%	0.99	1.31	1.75						
TELECOM	28.7%	1.18	1.38	2.10						
TELMEX	11.3%	1.01	1.84	3.59						
TELEVISA	46.1%	1.59	1.06	1.50						
TV AZTECA	75.1%	1.54	-0.47	-0.44						
VITRO	37.6%	0.46	0.10	0.09						
WALMART	31.1%	1.10	1.33	2.10						

Tabla 22

Periodo Enero03-Enero04

<i>Regression Statistics</i>	
Multiple R	0.955967
R Square	0.913873
Adjusted R Square	
Standard Error	0.095499
Observations	30

$$R_t = \gamma_0 + \gamma_1 \beta_h + \eta_t$$

	<i>Coeff</i>	<i>SE</i>	<i>t Stat</i>	<i>P-value</i>
Intercept	0.518657	0.01754	29.56948	1.16E-22
X Variable 1	-0.23506	0.013637	-17.2366	1.93E-16

Figura 26

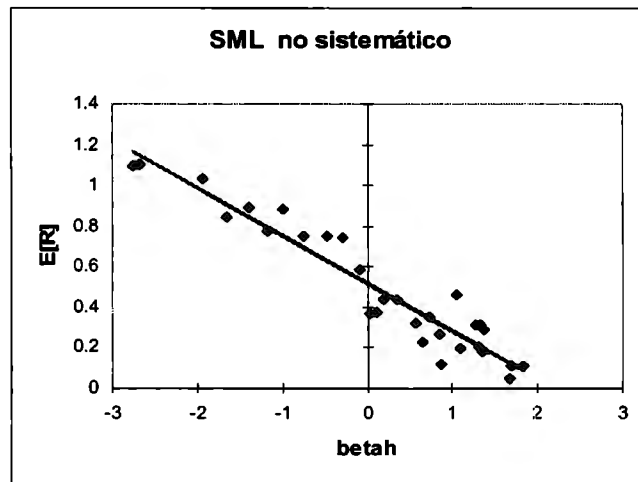


Tabla 23

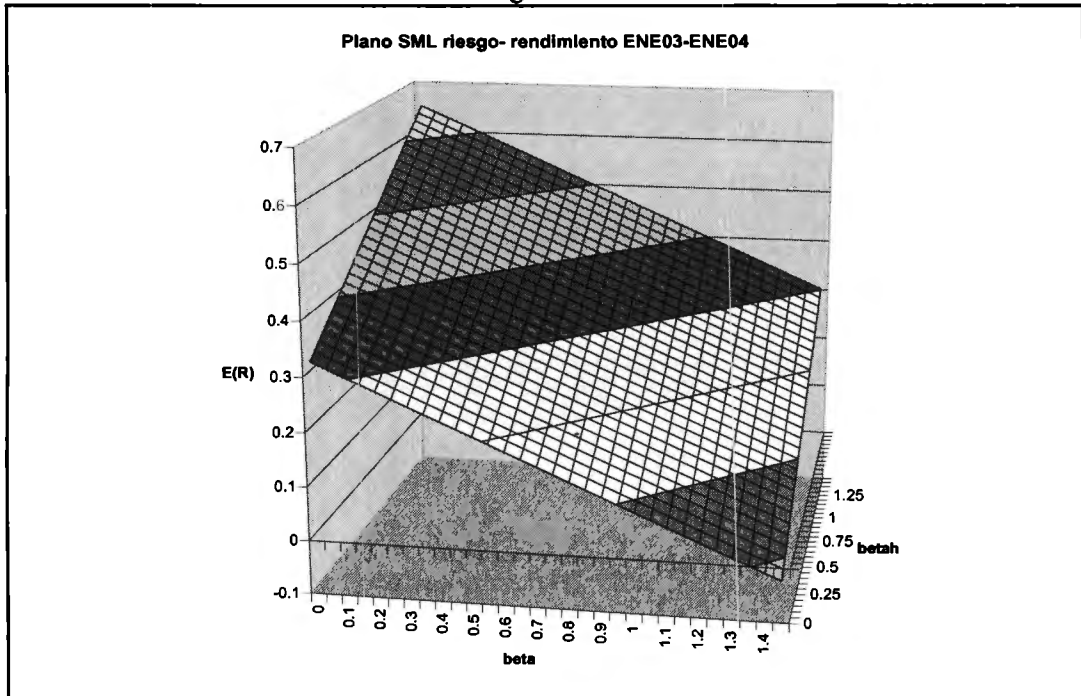
Periodo Enero03-Enero04

<i>Regression Statistics</i>	
Multiple R	0.989207
R Square	0.978531
Adjusted R Square	
Standard Error	0.048555
Observations	30

$$R_t = \gamma_0 + \gamma_1 \beta_{IPC} + \gamma_2 \beta_h + \eta_t$$

	<i>Coeff</i>	<i>SE</i>	<i>t Stat</i>	<i>P-value</i>
Intercept	0.328069	0.02294	14.30124	4.06E-14
X Variable 1	0.223535	0.024789	9.017475	1.24E-09
X Variable 2	-0.24172	0.006973	-34.6661	6.34E-24

Figura 27



Abril 2003- Abril 2004

Tabla 24

Periodo Abril-03 a Abril 04
 Estimation Method: Seemingly Unrelated Regression
 Simple: 1 254
 Included observations: 254
 Total system (balanced) observations 7620
 Linear estimation after one-step weighting matrix

	REND anual	α	t-stat	β_{IPC}	t-stat	R2	α anual
ALFA	103.0%	0.207%	2.05	0.91	8.29	0.21	52.4%
AMERICA MOVIL	110.0%	0.145%	2.03	1.32	17.07	0.53	36.6%
ARA	72.2%	0.094%	0.94	0.87	7.97	0.20	23.8%
ARCA	44.9%	0.128%	1.78	0.23	2.92	0.03	32.2%
BIMBO	47.3%	0.009%	0.10	0.81	7.97	0.20	2.3%
CEMEX	61.9%	0.013%	0.19	1.05	14.22	0.44	3.3%
COCA	39.7%	-0.014%	-0.11	0.78	5.73	0.11	-3.5%
COM MEX	103.3%	0.230%	2.11	0.81	6.83	0.16	58.2%
CONTAL	47.4%	0.024%	0.20	0.74	5.54	0.11	6.1%
CORP INTER	36.0%	0.006%	0.07	0.62	7.57	0.18	1.4%
ELEKTRA	123.8%	0.283%	2.11	0.94	6.43	0.14	71.5%
FOMENTO	48.3%	-0.016%	-0.22	0.94	11.66	0.35	-4.2%
G CARSO	59.8%	0.062%	0.74	0.79	8.70	0.23	15.7%
GEO	119.5%	0.312%	2.71	0.73	5.84	0.12	78.9%
G BANORTE	55.8%	0.031%	0.34	0.86	8.49	0.22	7.9%
G INBURSA	63.0%	0.058%	0.60	0.87	8.26	0.21	14.6%
G MEXICO	129.2%	0.254%	1.92	1.17	8.07	0.20	64.3%
G MODELO	34.0%	0.009%	0.15	0.57	8.43	0.22	2.4%
G SANBORNS	56.2%	0.138%	1.28	0.38	3.26	0.04	35.0%
ICA	107.9%	0.189%	0.95	1.08	5.01	0.09	47.8%
KIMBERLY	29.7%	0.022%	0.32	0.44	5.98	0.12	5.5%
PEÑOLES	140.5%	0.434%	2.22	0.55	2.60	0.03	109.7%
SAVIA	92.0%	0.275%	1.26	0.40	1.68	0.01	69.6%
SORIANA	68.3%	0.096%	1.11	0.79	8.36	0.22	24.3%
TELECOM	41.1%	-0.062%	-0.89	1.02	13.46	0.42	-15.7%
TELMEX	23.1%	-0.110%	-2.09	0.92	16.00	0.50	-27.8%
TELEvisa	69.1%	-0.038%	-0.51	1.42	17.29	0.54	-9.7%
TV AZTECA	78.3%	0.077%	0.61	1.06	7.67	0.19	19.5%
VITRO	63.1%	0.121%	0.95	0.59	4.24	0.07	30.6%
WALMART	26.6%	-0.151%	-2.45	1.16	17.33	0.54	-38.1%
promedio						0.22	

Tabla 25

Periodo Abril03-abril04

Regression Statistics

Multiple R	0.206717
R Square	0.042732
Adjusted R Square	0.008544
Standard Error	0.332331
Observations	30

$$R_t = \gamma_0 + \gamma_1 \beta_{IPC} + \eta_t$$

	Coeff	SE	t Stat	P-value
Intercept	0.492481	0.193939	2.539359	0.016943
X Variable 1	0.248756	0.222502	1.117991	0.273071

Figura 28

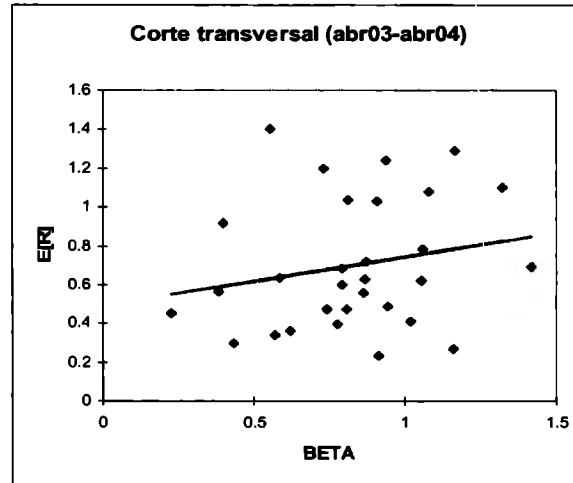


Tabla 26

		$E(z)$			
		R_{IPC}			
		R_h			
	Rend anual	β_{IPC}	β_h	t-stat	
ALFA	103.0%	0.91	-0.29	-0.29	
AM MOVIL	110.0%	1.32	0.10	0.15	
ARA	72.2%	0.81	0.42	0.42	
ARCA	44.9%	0.36	0.21	0.30	
BIMBO	47.3%	0.59	0.94	1.03	
CEMEX	61.9%	1.03	0.92	1.38	
COCA	39.7%	0.46	1.09	0.89	
COM MEX	103.3%	0.75	-0.43	-0.40	
CONTAL	47.4%	0.62	0.85	0.70	
CORP INTER	36.0%	1.03	0.96	1.31	
ELEKTRA	123.8%	1.32	-0.76	-0.58	
FOMENTO	48.3%	0.93	1.10	1.52	
G CARSO	59.8%	0.82	0.61	0.75	
GEO	119.5%	0.66	-0.94	-0.84	
G BANORTE	55.8%	0.93	0.81	0.88	
G INBURSA	63.0%	0.89	0.64	0.68	
G MEXICO	129.2%	0.79	-0.58	-0.45	
G MODELO	34.0%	0.56	0.94	1.56	
G SANBORNS	56.2%	0.20	0.14	0.13	
ICA	107.9%	1.42	-0.17	-0.09	
KIMBERLY	29.7%	0.44	0.87	1.32	
PEÑOLES	140.5%	0.16	-1.70	-0.89	
SAVIA	92.0%	0.90	-0.71	-0.33	
SORIANA	68.3%	0.99	0.40	0.47	
TELECOM	41.1%	1.18	1.39	2.05	
TELMEX	23.1%	1.01	1.68	3.34	
TELEVISA	69.1%	1.59	1.24	1.69	
TV AZTECA	78.3%	1.54	0.52	0.42	
VITRO	63.1%	0.46	0.25	0.20	
WALMART	26.6%	1.10	1.94	3.28	

Tabla 27

Periodo Abril03-abril04

<i>Regression Statistics</i>					
Multiple R	0.894551				
R Square	0.800222				
Adjusted R Square	0.793087	$R_t = \gamma_0 + \gamma_1 \beta_h + \eta_t$			
Standard Error	0.15182				
Observations	30				
	<i>Coeff</i>	<i>SE</i>	<i>t Stat</i>	<i>P-value</i>	
Intercept	0.847386	0.031083	27.26182	1.05E-21	
X Variable 1	-0.35974	0.033968	-10.5903	2.67E-11	

Figura 29

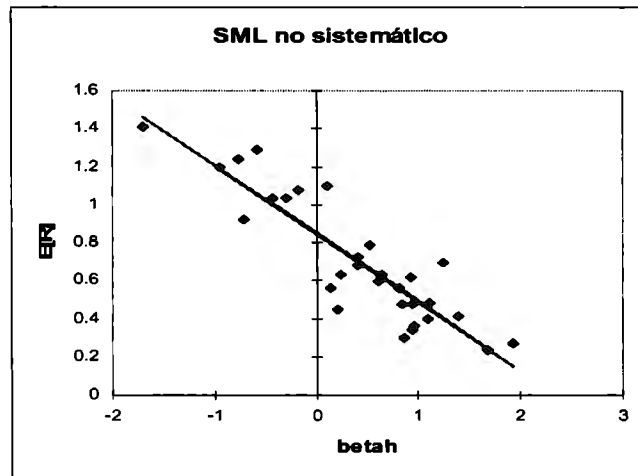
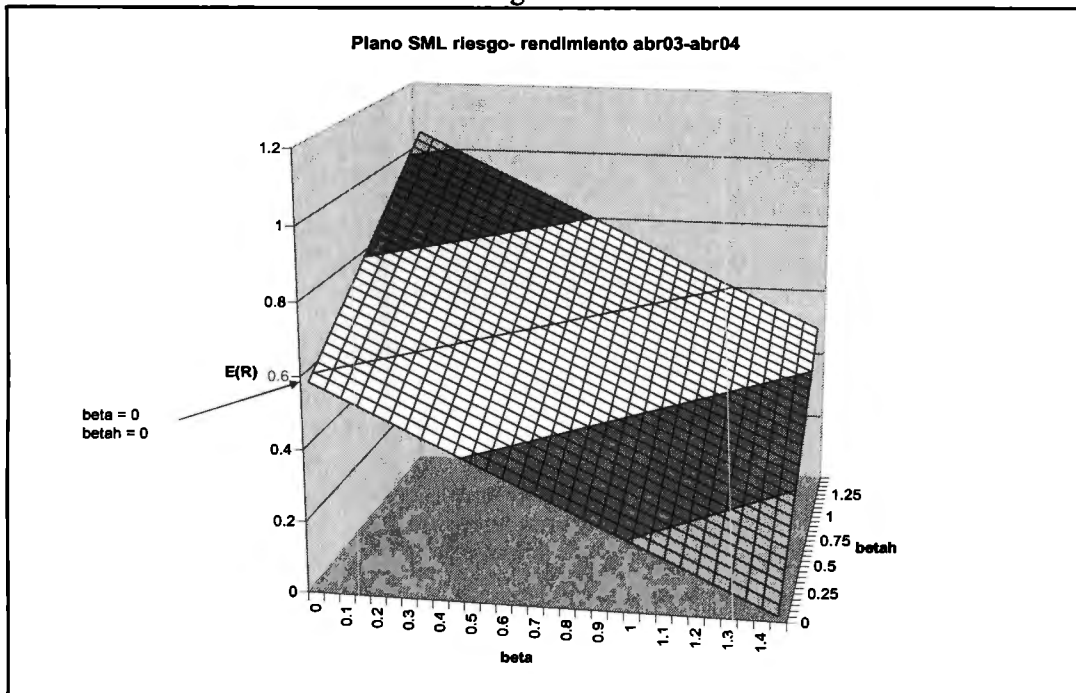


Tabla 28

Periodo Abril03-abril04

<i>Regression Statistics</i>					
Multiple R	0.958485				
R Square	0.918694				
Adjusted R Square	0.912672	$R_t = \gamma_0 + \gamma_1 \beta_{IPC} + \gamma_2 \beta_h + \eta_t$			
Standard Error	0.098631				
Observations	30				
	<i>Coeff</i>	<i>SE</i>	<i>t Stat</i>	<i>P-value</i>	
Intercept	0.585999	0.046308	12.65442	7.29E-13	
X Variable 1	0.320463	0.051091	6.272344	1.04E-06	
X Variable 2	-0.39329	0.022707	-17.3203	3.77E-16	

Figura 30



VI. Resumen

Desde el punto de vista de la asignación de activos en un portafolio, la matriz de covarianzas residual permite, bajo un objetivo de riesgo sistemático respecto al *proxy* de mercado, una asignación eficiente (de mínima varianza dado el objetivo de mercado). Al minimizar la varianza residual del portafolio se minimiza a su vez la varianza global del portafolio, esto en virtud de la importancia que tiene el componente no-sistemático del riesgo contenido en la varianza residual.

El vector w obtenido, permite la reducción de la varianza residual del portafolio construido, de tal manera que mantiene el objetivo de riesgo sistemático deseado.

En los subperiodos estudiados los vectores w obtenidos además de minimizar la varianza global del portafolio, están en relación directa con el peso relativo en valor y riesgo que estos activos tienen dentro del portafolio.

Aun cuando tenemos cambios en la tendencia del mercado entre los subperiodos, las ponderaciones obtenidas no cambian significativamente y al evaluar el portafolio fuera

del subperiodo, se mantiene (en nuestro caso por usar los activos del IPC) o incluso mejora el desempeño en relación al IPC, como se muestra en la tabla 28.

Los resultados del estudio, muestran la estabilidad de la beta del portafolio para todos los subperiodos en relación con el *proxy* (dentro y fuera de los subperiodos de análisis), lo que confirma que en cualquier subconjunto de activos en un portafolio es posible mantener el objetivo de riesgo sistemático del mismo.

Cabe resaltar, como se observa en la tabla 28, que en consonancia con lo que pasa en el mercado del IPC, las ponderaciones reflejan aproximadamente el peso que los activos tienen en valor dentro del mismo. Al asignar diferentes grupos de activos a un portafolio, la nueva asignación producida al computar y minimizar la varianza residual, mantendrá ciertas proporciones de acuerdo a la importancia de las $COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$. Si las betas de los portafolios se mantienen relativamente estables, la variabilidad de los rendimientos y riesgo estará capturada precisamente en la matriz de covarianza residual²³.

El análisis de corte transversal de los excesos de rendimientos promedio de los activos en relación con el nivel de riesgo no-sistemático no se reduce al análisis de la varianza residual de cada activo $\sigma^2(\varepsilon_i)$, sino que considera al conjunto de las $COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$. La suma de estas covarianzas residuales requiere la elección de un vector de ponderaciones. El uso de la metodología de minimizar nuevamente la varianza residual pero agregando la restricción de que el elemento de sub/sobrevaluación agregado sea cero, permite construir este vector de ponderaciones. Así el vector de los parámetros β_h estimados en relación con un factor de riesgo no observado es una medida estandarizada de la $COV(\varepsilon_i, \varepsilon_M)$ respecto a la varianza residual.

²³ Las R^2 son en promedio no mayores a 30%. Sin embargo, vistas individualmente a medida que el activo tiene más peso dentro del IPC (o del Índice de mercado seleccionado), mayor será la R^2 . A menor R^2 , mayor importancia cobra la varianza residual del activo y a menor impacto de la diversificación sobre la $COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$, mayor importancia tendrá la $COV(\varepsilon_i, \varepsilon_M)$.

Tabla 29

Vector de ponderaciones de MIN VARIANZA RESIDUAL					
	Abr02-Abr03	Jul02-Jul03	Oct02-Oct03	Ene03-Ene04	Abr03-Abr04
ALFA	2.35%	3.14%	1.89%	1.81%	1.18%
AM MOVIL	10.03%	10.54%	11.89%	12.85%	14.71%
ARA	1.55%	1.10%	1.66%	1.82%	2.02%
ARCA	2.60%	2.43%	2.14%	1.45%	1.07%
BIMBO	1.83%	2.88%	3.17%	2.75%	2.76%
CEMEX	9.129%	9.35%	9.34%	9.14%	9.37%
COCA	0.52%	0.62%	0.01%	-0.23%	-0.15%
COM MEX	0.64%	0.58%	0.30%	0.51%	0.52%
CONTAL	1.52%	1.65%	1.59%	1.71%	2.29%
CORP INTER	0.93%	1.10%	1.65%	1.26%	0.62%
ELEKTRA	0.53%	0.28%	0.38%	0.95%	1.02%
FOMENTO	3.37%	3.28%	2.70%	2.93%	2.09%
G CARSO	4.07%	3.88%	4.04%	4.18%	4.06%
GEO	0.93%	0.70%	0.21%	-0.07%	0.12%
G BANORTE	2.23%	2.01%	2.08%	1.92%	2.34%
G INBURSA	4.03%	3.94%	4.42%	4.67%	4.69%
G MEXICO	1.15%	0.90%	1.04%	1.30%	1.60%
G MODELO	3.40%	3.18%	3.20%	2.51%	2.40%
G SANBORNS	0.90%	0.65%	0.27%	0.28%	0.09%
ICA	0.26%	0.32%	0.29%	0.17%	0.22%
KIMBERLY	3.44%	3.54%	2.28%	2.04%	1.81%
PEÑOLES	1.61%	1.49%	1.57%	1.47%	1.38%
SAVIA	0.09%	0.77%	0.05%	0.09%	-0.13%
SORIANA	2.13%	0.87%	1.13%	1.91%	1.97%
TELECOM	1.82%	6.28%	5.96%	5.83%	6.70%
TELMEX	18.10%	15.98%	16.62%	16.39%	14.24%
TELEVISA	4.06%	3.48%	4.21%	4.17%	4.96%
TV AZTECA	1.63%	1.05%	1.21%	1.28%	1.33%
VITRO	0.30%	-0.15%	0.30%	0.30%	0.36%
WALMART	14.85%	14.17%	14.38%	14.60%	14.38%

Así, desde el punto de vista de la valuación de activos, los resultados obtenidos muestran el poco poder explicativo de β_{IPC} sobre los rendimientos promedio observados. Esto es evidente, aun cuando consideramos 30 de los 35 activos en el IPC. Si se seleccionara un conjunto menor de activos o incluso algunos que no están incluidos en el IPC, la aparente sub/sobrevaluación aumenta.

Como mencionamos anteriormente, incorporar un factor de riesgo no observado, medido por β_h , asegura un ajuste lineal del riesgo y explica los rendimientos promedio observados en todos los subperiodos estudiados.

$$R_t = R_Z + \beta R_{IPC} + \beta_h R_h + \eta_t$$

Esta estructura asegura que $E[\eta] = 0$ y elimina cualquier componente de sub/sobrevaluación en todos los casos estudiados. R_h es el risk-premium del factor no observado. Sin embargo, los resultados que se resumen en la tabla 29, muestran que este es muy variable en el tiempo y dependerá directamente del conjunto de activos seleccionados en el portafolio, pues depende del computo de la matriz de covarianza residual.

La tabla 29, también nos muestra, que sin importar si el mercado (R_{IPC}) muestra una tendencia a la baja o a la alza, el risk-premium del factor no observado durante el periodo analizado es siempre negativo. Esto nos sugiere que en función de β_{IPC} y β_{hi} de cada activo se refuerzan o amortiguan las tendencias del comportamiento del risk-premium del mercado.

Existe un elemento adicional en el rendimiento no asociado a los factores de riesgo ni a la sub/sobrevaluación de los activos. Este elemento R_z deberá interpretarse como un componente promedio del rendimiento esperado de los activos no correlacionado con los factores de riesgo.

Tabla 30

	Abr02-Abr03	Jul02-Jul03	Oct02-Oct03	Ene03-Ene04	Abr03-Abr04
E(Rz)	18.02%	13.29%	15.81%	32.81%	58.60%
R_{IPC}	-25.09%	6.99%	25.60%	22.35%	32.05%
R_h	-18.02%	-13.29%	-14.10%	-24.17%	-39.33%

Es conocido que en un mercado a la baja se incrementa la volatilidad en el mercado²⁴, el factor no observado dada un objetivo de riesgo sistemático, captura y completa el análisis de los rendimientos promedio observados en relación a los factores de riesgo.

Esto probablemente explica la poca estabilidad de las β_{hi} observadas, como se muestra en la tabla 30. Incluso la significancia estadística de esta β_{hi} se reduce considerablemente en los dos últimos subperiodos.

²⁴ Ver figuras 11 y 12

Tabla 31

	Abr02-Abr03		Jul02-Jul03		Oct02-Oct03		Ene03-Ene04		Abr03-Abr04	
	β_{IPC}	β_h	β_{IPC}	β_h	β_{IPC}	β_h	β_{IPC}	β_h	β_{IPC}	β_h
ALFA	1.16	-1.31	1.12	-0.59	0.92	-1.47	0.92	-0.75	0.91	-0.29
AM MOVIL	1.41	-0.05	1.30	-1.54	1.37	-1.30	1.24	-0.29	1.32	0.10
ARA	0.77	0.64	0.81	-1.31	0.78	-1.57	0.81	-0.10	0.81	0.42
ARCA	0.32	1.84	0.36	2.46	0.38	1.26	0.36	0.87	0.36	0.21
BIMBO	0.66	2.41	0.59	3.26	0.45	1.27	0.59	0.57	0.59	0.94
CEMEX	0.96	1.39	1.03	1.96	1.19	1.08	1.03	1.28	1.03	0.92
COCA	0.34	1.88	0.46	1.74	0.54	0.73	0.46	0.85	0.46	1.09
COM MEX	0.75	2.25	0.75	-0.02	0.52	-0.36	0.75	-1.17	0.75	-0.43
CONTAL	0.54	0.56	0.62	-0.54	0.68	2.31	0.62	1.35	0.62	0.85
CORP Inter.	1.15	1.32	1.03	1.56	0.78	0.61	1.03	1.09	1.03	0.96
ELECTRA	1.28	1.54	1.32	3.13	0.98	1.47	1.32	-1.39	1.32	-0.76
FOMENTO	0.96	0.71	0.93	0.46	0.93	1.21	0.93	1.69	0.93	1.10
G CARSO	0.85	1.34	0.82	0.28	0.61	0.36	0.82	0.20	0.82	0.61
GEO	0.72	-0.40	0.66	-1.89	0.72	-4.17	0.66	-2.67	0.66	-0.94
G BANORTE	0.99	-1.51	0.93	-0.94	0.89	-0.21	0.93	0.36	0.93	0.81
G INBURSA	0.88	2.03	0.89	0.31	0.86	-0.12	0.89	0.74	0.89	0.64
G MEXICO	0.87	0.01	0.79	0.16	0.66	-1.63	0.79	-1.93	0.79	-0.58
G MODELO	0.55	0.55	0.56	1.13	0.65	1.80	0.56	1.68	0.56	0.94
G SANBORNS	0.33	2.41	0.20	1.53	0.25	1.14	0.20	0.03	0.20	0.14
ICA	1.31	2.37	1.42	0.98	1.31	0.06	1.42	-0.99	1.42	-0.17
KIMBERLY	0.49	1.33	0.44	0.42	0.58	0.55	0.44	0.66	0.44	0.87
PEÑÓLES	0.11	0.14	0.16	2.07	0.13	-3.19	0.16	-2.77	0.16	-1.70
SAVIA	1.08	-3.04	0.90	3.32	0.65	-0.31	0.90	-1.66	0.90	-0.71
SORIANA	1.05	2.52	0.99	2.57	0.87	2.01	0.99	1.31	0.99	0.40
TELECOM	1.19	2.76	1.18	-0.01	1.21	1.13	1.18	1.38	1.18	1.39
TELMEX	1.01	0.26	1.01	1.03	1.02	1.80	1.01	1.84	1.01	1.68
TELEVISA	1.42	1.39	1.59	1.56	1.48	0.56	1.59	1.06	1.59	1.24
TV AZTECA	1.45	1.21	1.54	1.42	1.37	-0.11	1.54	-0.47	1.54	0.52
VITRO	0.56	0.80	0.46	4.30	0.37	1.35	0.46	0.10	0.46	0.25
WALMART	1.10	0.17	1.10	0.36	1.04	1.21	1.10	1.33	1.10	1.94

Esta tabla muestra el comportamiento de las sensibilidades de los activos a los factores de riesgo: IPC y el factor no observado.

VII. Conclusiones

El uso de la matriz de covarianzas residual en la asignación de activos en un portafolio, así como en la valuación de los mismos ha tenido poco trabajo empírico.

Las alternativas de asignación de activos que nos permitan replicar o aproximarnos a la varianza de un *proxy* o benchmark, pueden plantearse en términos de reducir la diferencia entre la varianza del *proxy* o benchmark y el portafolio construido con un conjunto dado de activos.

Como se mostró en los resultados de la Proposición 1 y se desprende de los resultados obtenidos en los diferentes subperiodos, la única manera en que el portafolio construido solo posea riesgo sistemático, es que la varianza residual pueda reducirse a cero.

El análisis de la varianza residual nos muestra que cuando el *proxy* de portafolio no es eficiente, ésta no podrá reducirse a cero, por lo que dado el rendimiento esperado del *proxy*, la minimización del componente residual es una asignación eficiente dentro del conjunto de activos seleccionados.

Dada esta condición, al asignar activos de manera que a) el componente sistemático de la varianza del portafolio sea igual a la varianza del *proxy* o, b) hacer que la varianza total del portafolio sea igual a la varianza del *proxy*, no garantiza en ninguno de los casos la reducción de la varianza del portafolio en comparación al resultado de minimizar la varianza residual. Este es el sentido de la eficiencia en la minimización de la varianza residual: no las ponderaciones de un portafolio tangencia óptimo, sino obtener una solución particular de mínima varianza.

Como ejemplo, en la tabla se muestran los resultados obtenidos para el periodo de Julio de 2002 a Julio de 2003.

Tabla 32

	MIN VAR RESIDUAL w_p	$\sigma_{proxy}^2 = [w^T \beta \beta^T w \sigma_{proxy}^2]$ $w(sist)$	$\sigma_{proxy}^2 = [w^T \beta \beta^T w \sigma_{proxy}^2 + w^T \Sigma_{resid}^{proxy} w]$ $w(proxy)$	
$\sigma_{proxy}^2 = 0.04206$				
Var Port	0.04081	0.04838		0.04206
Varianza Residual	0.00026	0.0063		0.0048
Varianza sistemática	0.0405	0.04206		0.03724
TOTAL	0.04081	0.04838		0.04206
β_p	0.96	1.00		0.89

En cuanto a la obtención de un factor de riesgo no observado, el trabajo empírico es reducido. La metodología de “portafolios ortogonales” aplicada por Roll (1980) para que, dado un Índice de Mercado no eficiente en el sentido media-varianza, se pueda encontrar el portafolio ortogonal zero-beta que considere la información de $\alpha_j \neq 0$

(sub/sobrevaluación), es utilizada por MacKinley y Pastor para obtener un factor de riesgo no observado y seleccionar un portafolio que considere que la fuente de la ineficiencia es resultado de la omisión de factores de riesgo. La información contenida en la matriz de covarianzas residual (Σ_{resid}) resultante de la relación lineal de los rendimientos y un Índice no eficiente es relacionada con el elemento de sub/sobrevaluación (α) para encontrar una estructura exacta de determinación de los rendimientos esperados de los activos en base a un modelo lineal de factores de riesgo, dado un Índice no eficiente y un conjunto de N-activos.

A diferencia de MacKinley y Pastor que maximizan la razón de Sharpe desde las alfas (α) y la matriz de covarianzas residuales, donde la matriz de covarianzas residual (Σ_{resid}) aparece más como una restricción en el modelo. En el caso de este trabajo, se continúa con el proceso de minimización de la varianza residual agregando como restricción la eliminación la sub/sobrevaluación reflejada en las α_j .

Este trabajo propone considerar la información de la matriz de covarianzas residuales y el riesgo de la covarianzas residual (extra-mercado) tanto en la asignación como en la valuación. La condición de ortogonalidad en factores adicionales de riesgo, es una condición importante de los modelos multifactoriales, sin embargo, construir un factor no observado, permitiría una mejor comprensión y estimación de los rendimientos esperados.

Queda pendiente desarrollar estas metodologías desde diferentes perspectivas, así como la interpretación de un componente “sistemático” del riesgo incluido en las covarianzas residuales.

Bibliografia

- Arrow, K.J., "The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-Bearing". *Review of Economics Studies*. 1964, 91-96.
- Black, Fischer, "Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing," *Journal of Business*, July 1972, pp. 444-455
- Chan, Louis K. C.; Jason Karceski; Josef Lakonishok, "On Portfolio Optimization: Forecasting Covariance and Choosing the Risk Model", *The Review of Financial Studies*, Vol. 12, No. 5 (Winter, 1999), pp. 937-974.
- Connor, G. and Korajczyk. Performance measurement within the arbitrage pricing theory: A new framework for analysis. *Journal of financial economics* 15, 1986. pp 373-394.
- Copeland, Thomas, E. & Weston, J. Fred. **Financial Theory and Corporate Policy**. Ed. Addison Wesley. Third edition. 1992.
- Cochrane, John H.. "New Facts in Finance", NBER Working Paper Series, working paper 7169, June, 1999.
- Debreu, G., *The Theory of Value*. Wiley, New York, 1959.
- Fama, Eugene F.; Kenneth R. French. "The Cross-Section of Expected Returns", *The Journal of Finance*, No. 47 , 1992, pp. 427-465
- Graver, Robert R. "On the Cross-Sectional Relation between Expected Return, Betas, and Size", *The Journal of Finance*, Vol. 54, No. 2 (April, 1999), pp. 773-789.
- Haugen, Robert A., **Modern Investment Theory**. Prentice-Hall. Fifth edition. 2001. NJ
- Hearth, Douglas and Zaima, Janis K., **Contemporary and Portfolio Analysis**. South-Western/Thompson. Fourth edition. 2004. Canada.

Huang, Chi-fu. **Foundations of Financial Economics**. Prentice-Hall, first edition, 1998.

Jensen, Michael C. "Capital Markets: Theory and Evidence", *The Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 3, No. 2 (Autumn, 1972), pp. 357-398.

Judge, George G., Hill R. Carter, Griffiths, William E., Lee, Tsoung-Chao. Introduction to the Theory and Practice of Econometrics. Wiley. Second Edition. 1988. USA

Kandel, Shmuel; Robert F. Stambaugh. "A Mean-Variance Framework for Test of Asset Pricing Models", *The Review of Financial Studies*, Vol. 2, No. 2 (1989), pp. 125-156.

Lintner, J. "Security Prices, Risk, and Maximal Gains from Diversification." *Journal of Finance*, Vol, 20, No. 5 (December 1965), pp. 587-616.

Lintner, J. "The Valuation of Risk Asset and the Selection of Risk Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets." *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 47, No. 1 (February 1965), pp.13-37

MacKinlay, A. Craig; Lubos Pastor. "Asset Pricing Models: Implications for Expected Returns and Portfolio Selection", *The Review of Financial Studies*, Vol. 12, No. 4 (Winter, 2000), pp. 883-916.

MacKinlay, A. Craig. "Multifactor models do not explain deviations from the CAPM", *Journal of Financial Economics*, No. 38, (1995), pp. 3-28.

Markowitz, H. M. **Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1959

Mossin, J. "Equilibrium in a Capital Asset Market." *Econometrica*, Vol. 34, No. 4 (October 1966), pp. 768-83.

Reilly, Frank K.; Keith C., Brown, **Investment Analysis and Portfolio Management**. South-Western/Thompson, Seventh edition, 2003. USA

Roll, Richard, "A Critique of the Asset Pricing Theory's Test," *Journal of Financial Economics*, June 1977, pp. 129-176.

Roll, Richard. "Orthogonal Portfolio", *The Journal of Financial Quantitative Analysis*, Vol. 15, No. 5 (Dec., 1980), pp. 1005-1023.

Roll, Richard; Stephen A. Ross, "An empirical investigation of the Arbitrage Pricing Theory", *The Journal of Finance*, No. 35, 1980, pp. 1073-1103.

Roll, Richard; Stephen A. Ross. "On the Cross-Sectional Relation between Expected Return and Betas", *The Journal of Finance*, Vol. 49, No. 1 (Mar., 1994), pp. 101-121.

Sharpe, W.F. "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk." *Journal of Finance*, Vol. 19, No., 4 (September 1964), pp. 425-42

Stevens, Guy V., "On the Inverse of the Covariance Matrix in Portfolio Analysis", *The Journal of Finance*, Vol. 53, No. 5 (Oct., 1998), pp. 1821-1827.

Treynor, J.L. "Toward a Theory of Market Value of Risk Assets" Unpublished manuscript, 1961.