



TECNOLÓGICO  
DE MONTERREY



TECNOLÓGICO  
DE MONTERREY.

BIBLIOTECA  
Campus Ciudad de México

Instituto Tecnológico y de Estudios  
Superiores de Monterrey  
Campus Ciudad de México

*Impacto de derivados en política monetaria:  
Un modelo de equilibrio general*

TESIS QUE PARA RECIBIR EL GRADO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS FINANCIERAS  
PRESENTA

*Luis Arturo Bernal Ponce*

Director de tesis:  
Dr. Humberto Valencia Herrera

Lectores:  
Dr. Arturo Pérez Mendoza  
Dr. Fernando Cruz Aranda

*México D.F., 10 Febrero 2009*

# CONTENIDO

	Pág.
Resumen y Abstract.....	1
1. Introducción y justificación.....	2
2. Marco teórico de modelos de programación dinámica estocástica que incorporan mercados financieros y/o reales.....	4
2.1 Condición de Hamilton-Jacobi-Bellman, programación de dinámica estocástica y valuación de opciones.....	5
2.2 Modelo de Cox, Ingersoll y Ross de equilibrio general para valorar opciones.....	7
2.3 Análisis de una economía monetaria en tiempo continuo.....	10
2.4 Un modelo de valuación de opciones suscritas sobre un índice de precios.....	12
2.5 Modelo de Fisher de riesgo de inflación con Bonos indexados.....	16
2.6 Modelo de una economía monetaria para valorar activos financieros.....	19
3. Estructura de la economía.....	21
3.1 Problema de decisión del consumidor.....	24
3.2 Reducción de la dimensión del problema.....	26
4. Equilibrio en la economía.....	29
4.1 Tasa de inflación y nivel de precios de equilibrio.....	31
4.2 Calibración del modelo.....	33
5. Valuación de derivados de equilibrio.....	37
5.1 Simulación.....	40
6. Conclusiones.....	44
Bibliografía.....	45
Apéndice A1. Determinación de la diferencial estocástica de acumulación de la riqueza .....	47
Apéndice A2. Determinación de la ecuación de <i>Hamilton-Jacobi-Bellman</i> .....	48
Apéndice A3. Obtención del valor de los parámetros $\gamma_0$ y $\gamma_1$ .....	50
Apéndice A4. Obtención de la tasa de inflación de equilibrio.....	51
Apéndice A5. Obtención de la sensibilidad del precio de la opción ante cambios en la volatilidad.....	53

## **Resumen**

Este trabajo analiza el impacto de la tenencia de productos derivados en los objetivos de política monetaria. Para ello, a diferencia de lo existente en la literatura al respecto, se ha desarrollado un modelo de equilibrio macroeconómico de una economía monetaria. Los principales resultado son: i) la obtención de la tasa de inflación como función de la tenencia de derivados; ii) un incremento en la volatilidad del mercado de derivados tiene un impacto significativo sobre la inflación y; iii) una relación inversa significativa entre la volatilidad de derivados y la inflación, para el caso de México.

## **Abstract**

This paper is aimed in analyzing the impact of the tenure of contingent claims in the objectives of monetary policy. To reach this end, unlike the existing literature on the subject, a model of macroeconomic equilibrium of a monetary economy is developed. The main results are: i) was extracted the equilibrium inflation rate as a function of the tenure of derivatives; ii) an increase in the volatility of derivatives market has a significant impact on inflation and; iii) an inverse relation between derivative volatility and the inflation rate in México

*Clasificación JEL: C61, E44, E52, G13*

*Palabras clave: análisis dinámico, mercados financieros y macroeconomía, política monetaria, valuación de derivados*

*Keywords: dynamic analysis, financial markets and the macroeconomy, monetary policy, contingent pricing*

## 1. Introducción y justificación

Tradicionalmente, las acciones de política monetaria están orientadas a influir sobre la tasa de interés de corto plazo, a su vez, esta influye sobre la demanda y oferta agregada a través de los canales de transmisión, para finalmente influir en los precios. Entre estos canales de transmisión se encuentran la curva de tasa de interés, el tipo de cambio y el precio de otros activos financieros; por lo tanto, las decisiones de consumo y ahorro de los agentes de la economía se ven afectadas, lo cual a su vez crea una demanda natural de instrumentos financieros que permiten a los agentes económicos cubrirse ante estos riesgos o incertidumbres.

A raíz del incremento en el uso de derivados, la discusión en relación al efecto del incremento en el uso de instrumentos derivados sobre los objetivos de política monetaria ha tomado relevancia. Esta discusión se ha centrado en que el incremento de derivados ha propiciado importantes cambios en la forma en que la política monetaria es conducida, comunicada y transmitida a la economía. Tal es el caso de la investigación de Savona et al. (2002), quienes encuentran que los instrumentos derivados tienden a cambiar la efectividad de las acciones de política monetaria, modificando los instrumentos que pueden ser usados. A este respecto, existen otros estudios que han documentado que los derivados tienen un impacto favorable para las estrategias de los bancos centrales con propósitos de estabilizar los precios. Por ejemplo, un estudio del *Bank for International Settlements* (1994) y otro de Upper (2006), que muestran que los derivados permiten que se incremente tanto la velocidad como el grado de transmisión las acciones de política monetaria.

Sin embargo, también se han encontrado que la presencia de productos derivados ha debilitado las estrategias de política económica, tal como en Gomez et. al. (2005) y Hunter y Smith, (2002). Así también, Fender (2000a; 2000b) y Vickery (2008) encuentran que el incremento en el uso de derivados con el fin de cubrir el riesgo, tanto corporativo como el de intermediarios financieros, es una explicación de la inestabilidad del canal de crédito. Por otra parte, existen también estudios como el de Morales (2001), que muestra que el impacto de derivados en la política monetaria es ambiguo, o el de Vrolijk (1997), que sustenta que no existe evidencia de que la inflación pudiera ser debilitada o rezagada debido a la presencia de derivados.

A pesar de que no ha habido un consenso al respecto, en general se ha encontrado que la política monetaria ha sido afectada por la estructura de los mercados financieros; en particular de su grado de completos (Vrolijk, 1997; Mies, et. al. 2002; Gomez et. al., 2005). Es decir, en mercados financieros desarrollados parece no haber evidencia de un impacto significativo de los derivados sobre la política monetaria, mientras que en mercados financieros que aún se encuentran en desarrollo, sucede lo contrario. Una de las razones de este resultado es el efecto de la volatilidad sobre los mercados financieros (Wagner y Berger, 2005; y Beltratti y Morana, 2006).

A partir de lo anterior, el objetivo de este documento es desarrollar un modelo que permita ampliar el conocimiento acerca de la forma en que el incremento en el uso de derivados impacta sobre los objetivos de política monetaria. Es decir, dado un objetivo de inflación fijado por un banco central, así como los instrumentos de política monetaria para alcanzar dicho objetivo, ¿cómo afecta el incremento en los productos sobre la tasa de inflación?

Para conseguir el objetivo, se recurrirá a una modelación con una estructura similar a la expuesta en Cox, Ingersoll y Ross (CIR) (1985 a), Lioui y Poncet (2000; 2005) y Venegas (2006).<sup>1</sup> De tal forma que, como en Lioui y Poncet (2000) y Bakshi y Chen (1996), se obtendrán de manera endógena la tasa de inflación de equilibrio. Las principales diferencias de este documento con estos trabajos son las siguientes: i) a diferencia de lo encontrado por Lioui y Poncet (2000; 2005) y Bakshi y Chen (1996), en esta investigación se encuentra que la tasa de inflación es afectada por las tenencias de derivados; ii) en Lioui y Poncet (2005) los resultados obtenidos son usados para valorar un derivado suscrito sobre una variable obtenida de manera endógena, utilizando para ello una medida martingala equivalente (*Pricing Kernel*); mientras que en este documento se usa parte de la metodología usada en Venegas (2006); así como las condiciones, tanto de primer orden como de equilibrio, del problema propuesto; iii) otras diferencias son algunos detalles técnicos en la resolución del problema.

---

<sup>1</sup> En lo sucesivo, cuando se haga mención del libro Venegas (2006), en particular se hace referencia a la sección XIX: "Modelos Económicos de Riesgos".

La razón por la que se eligió una modelación a tiempo continuo, aún cuando es menos natural que la modelación a tiempo discreto, es debido a que ha ganado popularidad y relevancia en macroeconomía debido a que permite soluciones de forma cerrada, o al menos tratables, para las variables endógenas; característica que permite interpretaciones económicas como las que se buscan en esta investigación. Otra característica relevante de este tipo de modelos es que, a partir de los resultados obtenidos, se pueden obtener formulas de valuación de derivados suscritos sobre subyacentes de variables obtenidas de manera endógena, lo cual se aprovechará en una sección de este documento.

En cuanto a la razón por la que se eligió un modelo de equilibrio general es por que, de acuerdo con Magill & Quinzii (2002), establecer la existencia de un equilibrio asegura que los diversos componentes del modelo encajen juntos de una manera coherente; y además, la determinación del equilibrio dota al modelo de la habilidad de predicción de la actividad económica.

El resto de este documento está organizado como sigue: primero, se presentará una revisión de la literatura que ha servido de base teórica de la presente investigación. Posteriormente se presentarán los supuestos del modelo que se propone, particularmente la descripción de la estructura de la economía y posteriormente se procederá a la resolución del problema propuesto. En otra sección se definirán las condiciones de equilibrio de la economía y se procederá a la obtención de la tasa de inflación de equilibrio; la cual será analizada en esa misma sección y se calibrará el modelo para México. En una sección subsecuente se usarán los resultados de la resolución del equilibrio para obtener el precio de equilibrio de un derivado suscrito sobre un activo riesgoso y se realizará una simulación del precio de la opción. Finalmente se presentarán las conclusiones. Algunos anexos contienen detalles técnicos para la obtención de los resultados aquí expuestos.

## **2. Marco teórico de modelos de programación dinámica estocástica con mercados financieros y/o reales**

En esta sección se presenta una revisión de la literatura de modelos que han servido como base teórica de la presente investigación. Particularmente, son modelos que

incorporan mercados financieros y reales, y además usan programación dinámica estocástica. En general, este tipo de modelos suponen un consumidor representativo que busca maximizar el valor esperado de su función de utilidad, dada una restricción presupuestal. Para lo cual, se asumen algunos procesos de difusión de las variables que integran dicha restricción. Posteriormente resuelven el problema y añaden alguna variación para valuar derivados, obtener la curva de tasas de interés o simplemente para analizar los resultados.

## 2.1 Condición de Hamilton-Jacobi-Bellman, programación dinámica estocástica y valuación de opciones

El análisis inicia suponiendo una economía simplificada, donde existe un individuo representativo que vive de manera indefinida y es representado por su función de utilidad. Este individuo busca maximizar el valor esperado de su utilidad de la siguiente forma:

$$\max_{c(t)} E \left[ \int_t^{\infty} e^{-\delta s} \frac{c^{\gamma}(s)}{\gamma} ds \mid \mathfrak{F}_0 \right], \quad (2.1)$$

donde  $c(t)$  es el consumo al tiempo  $t$ ,  $\delta$  es la tasa subjetiva de descuento. Este agente tiene acceso a tres activos reales: una acción de precio  $S(t)$ , cuya dinámica es:

$$dR_s = \frac{dS(t)}{S} = (u dt + \sigma dW), \quad (2.2)$$

y una opción tipo europea sobre la acción de precio  $C(S(t), t)$ . Se supone que  $C(S(T), T) = \max(S(T) - K, 0)$ . Donde  $K$  es el precio de ejercicio y  $T$  es el tiempo de maduración de la opción. Se supone que la opción sigue el siguiente proceso:

$$dR_c = \frac{dC(S(t), t)}{C(S(t), t)} = (u_c dt + \sigma_c dW), \quad (2.3)$$

donde se ha aplicado el lema de Itô a:  $C(S(t), t)$ , de tal forma que:

$$u_c = \frac{1}{C(S(t), t)} \left[ \frac{\partial C(S(t), t)}{\partial t} + \frac{\partial C(S(t), t)}{\partial S(t)} u S(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C(S(t), t)}{\partial S(t)^2} S(t)^2 \sigma^2 \right]$$

y

$$\sigma_c = \frac{1}{c(S(t),t)} \left[ \frac{\partial c(S(t),t)}{\partial S(t)} \sigma S(t) \right].$$

Existe también un bono de precio  $b(t)$  que paga una tasa libre de riesgo de incumplimiento,  $r$ , el cual satisface:

$$dR_b = r dt. \quad (2.4)$$

La restricción presupuestal a la que está sujeto el problema es:

$$da = aw_1 dR_s + aw_2 dR_c + a(1 - w_1 - w_2) dR_b - c(t) dt, \quad (2.5)$$

donde  $w_1 = \frac{s}{a}$  y  $w_2 = \frac{c(S(t),t)}{a}$ . Se define ahora a la función indirecta de utilidad:

$$J(a, t) = \max_{c(t), w_1, w_2} E \left[ \int_t^\infty \left( e^{-\delta s} \frac{c^Y(s)}{\gamma} ds \right) / \mathfrak{F}_0 \right]. \quad (2.6)$$

Utilizando una relación de recursividad sobre la funcional  $J(a, t)$ , se tiene:

$$J(a, t) = \max_{c(t), w_1, w_2} E \left[ \left( \int_t^{t+dt} e^{-\delta s} \frac{c^Y(s)}{\gamma} ds + \int_{t+dt}^\infty e^{-\delta s} \frac{c^Y(s)}{\gamma} ds \right) / \mathfrak{F}_0 \right]; \quad (2.7)$$

equivalentemente:

$$J(a, t) = \max_{c(t), w_1, w_2} E \left[ \left( \int_t^{t+dt} e^{-\delta s} \frac{c^Y(s)}{\gamma} ds + J(a, +da, t + dt) \right) / \mathfrak{F}_0 \right]. \quad (2.8)$$

Si a esta ultima expresión se aplica el teorema del valor medio para integrales en el primer término y se expande en serie de Taylor el segundo término, se obtiene:

$$J(a, t) = \max_{c, w_1, w_2} E \left[ e^{-\delta t} \frac{c^Y(t)}{\gamma} dt + o(dt) + J(a, t) + dJ(a, t) / \mathfrak{F}_0 \right]. \quad (2.9)$$

Aplicando el lema de Itô a  $J(a, t)$ , dividiendo la expresión anterior entre  $dt$ ; usando la propiedad de que  $\frac{o(dt)}{dt} \rightarrow 0$  cuando  $dt \rightarrow 0$ , y tomando valor esperado de los dos lados de la expresión se obtiene:



$$0 = \max_{c(t), w_1, w_2} \left[ e^{-\delta t} \frac{c^\gamma(t)}{\gamma} dt + J_t + J_a a \left( r + (u-r)w_1 + (u_c-r)w_2 - \frac{c(t)}{a} \right) + \frac{1}{2} J_{aa} a^2 (w_1 \sigma + w_2 \sigma_c)^2 \right]. \quad (20.10)$$

Se propone como candidato solución de (20.10):

$$J(a, t) = \beta \frac{a^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t}. \quad (20.11)$$

Si  $c$ ,  $w_1$  y  $w_2$  son óptimos, entonces se tiene que:

$$0 = \frac{c^\gamma(t)}{\gamma} - \delta \beta \frac{a^\gamma}{\gamma} + \beta a^\gamma \left( r + (u-r)w_1 + (u_c-r)w_2 - \frac{c(t)}{a} \right) + \frac{1}{2} \beta (\gamma-1) a^\gamma (w_1 \sigma + w_2 \sigma_c)^2. \quad (2.12)$$

A partir de las condiciones de primero orden para la maximización de la ecuación anterior se tiene:

$$\beta a^\gamma (u-r)w_1 + \beta (\gamma-1) a^\gamma (w_1 \sigma + w_2 \sigma_c) \sigma = 0 \quad (2.13)$$

y

$$\beta a^\gamma (u_c-r)w_1 + \beta (\gamma-1) a^\gamma (w_1 \sigma + w_2 \sigma_c) \sigma_c = 0. \quad (2.14)$$

A partir de (2.13) y (2.14) se obtiene la igualdad del premio al riesgo de  $S$  y de  $C(S, t)$ :

$$\frac{u-r}{\sigma} = \frac{u_c-r}{\sigma_c}. \quad (2.15)$$

Después de sustituir  $u_c$  y  $\sigma_c$  se tiene:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S} r S(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 - r C(t, S(t)) = 0. \quad (2.16)$$

Como se observa (2.16) es la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes.

## 2.2 Modelo de Cox, Ingersoll y Ross de equilibrio general para valorar opciones.

El modelo que Cox, Ingersoll y Ross (CIR) (1985 a) desarrollan es de equilibrio general para valuación de activos, que integra mercados financieros y reales. Así mismo, en este modelo se determina de manera endógena el proceso estocástico seguido por el precio de equilibrio de un activo financiero. Es importante mencionar que una aplicación de este

modelo es la obtención de la estructura de plazos de la tasa de interés en CIR (1985 b). En este modelo se inicia suponiendo que existe un bien en la economía, el cual puede ser destinado al consumo o a la inversión. El conjunto de posibilidades de producción consisten en  $n$  actividades. La transformación de una inversión de un vector  $\eta(t)$  de cantidades del bien en  $n$  procesos productivos es gobernada por el sigue un proceso de difusión:

$$d\eta(t) = I_{\eta}\alpha(Y, t) \eta(t) dt + I_{\eta}G(Y, t)dw, \quad (2.17)$$

donde  $\alpha(Y, t)$  denotan el drift de dimensión  $n$ ,  $I_{\eta}$  es una matriz diagonal de valores de  $\eta(t)$ ,  $G(Y, t)$  es una matriz de dimensión  $n \times (n + k)$ ,  $w$  es un proceso de Wiener de dimensión  $(n + k)$  y  $Y(t)$  es un vector de variables de estado de dimensión  $k$ , que a su vez siguen otro proceso de difusión:

$$dY(t) = u(Y, t) dt + S(Y, t)dw, \quad (2.18)$$

donde  $u(Y, t)$  es un vector de dimensión  $k$ ,  $S(Y, t)$  es una matriz de dimensión  $k \times (n + k)$ . Así mismo,  $Y(t)$  es una variable que determinará las posibilidades de producción que estarán disponible en la economía en un futuro. Es decir, esta estructura incluye producción con incertidumbre y cambio tecnológico aleatorio. Se asume también que existe un mercado de ahorro y préstamo a una tasa de interés  $r(t)$ , así como un mercado de derivados de precio,  $F(t)$ ; de tal forma que el  $i$ -ésimo derivado sigue el siguiente proceso estocástico:

$$dF^i(t) = (F^i\beta_i - \delta_i)dt + F^ih_idw, \quad (2.19)$$

donde  $h_i$  es un vector de dimensión  $1 \times (n + k)$ , su rendimiento medio esperado es definido como  $F^i\beta_i$ . Finalmente se asume que existe un número fijo de individuos idénticos en sus dotaciones y preferencias representados por una función de utilidad del tipo von-Neumann-Morgenstern:  $U[C(t), Y(t), t]$ . El análisis inicia considerando el problema de elección óptima individual.

La restricción presupuestal está dada por la proporción de la riqueza total,  $W$ , de los individuos invertida en los procesos productivos,  $a$ , en los derivados,  $b$ , y el consumo,  $c$ .

De acuerdo con CIR, en presencia de derivados, el problema de elección de portafolios en general no tendrá una única solución, por tal razón es conveniente elegir una base del conjunto de oportunidades de inversión. Es decir, se requiere modelar mercados dinámicamente completos, para lo cual se asume que el número de derivados es igual a número de variables de estado, es decir existen  $k$  derivados.

Posteriormente se obtienen las condiciones necesarias y suficientes para la maximización de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman. Para lo cual primero se define el equilibrio como el conjunto de procesos estocásticos  $(r, B; a, C)$  que satisfacen la condición de que los mercados se vacían:  $\sum a_i = 1$  y  $\sum b_i = 0$ , para toda  $i$ . Posteriormente examinan dos problemas: i) el problema cuando existe un proceso productivo físico pero no existe un mercado de ahorro y préstamo, y tampoco existe un mercados de derivados; ii) un problema análogo con un mercado de ahorro y préstamo pero no existe mercado de derivados. La resolución del equilibrio considerando que  $a^*$  y  $C^*$  son óptimas, determina la tasa de interés de equilibrio como sigue:

$$r(W, Y, t) = a^{*'}\alpha - \left(-\frac{J_{WW}}{J_W}\right)\left(\frac{var W}{W}\right) - \sum_{i=1}^k \left(-\frac{J_{WY_i}}{J_W}\right)\left(\frac{cov W, Y_i}{W}\right), \quad (2.20)$$

donde  $(cov W, Y_i)$  representa la covarianza entre los cambios en la riqueza óptima con cambios en la variable de estado. A su vez,  $J_i(W; Y, t)$  representa la derivada de la función de utilidad indirecta con respecto a su argumento  $i$ . La interpretación que se da a la tasa de interés de equilibrio es la siguiente: es la suma de la tasa esperada de rendimiento de la riqueza,  $a^*'\alpha$ , mas la covarianza de la tasa esperada de rendimiento de la riqueza con la tasa de cambio de la utilidad marginal de la riqueza.

Así mismo, el rendimiento medio de equilibrio de cada derivado está dado por:

$$(\beta_i - r)F^i = \left[\phi_W \phi_{Y_1} \dots \phi_{Y_k}\right] \left[F_W^i F_{Y_1}^i \dots F_{Y_k}^i\right]',$$

$$\phi_W = \left[\left(-\frac{J_{WW}}{J_W}\right)(var W) + \sum_{i=1}^k \left(-\frac{J_{WY_i}}{J_W}\right)(cov W, Y_i(t))\right], \quad (2.21)$$

y

$$\phi_{Y_i} = \left[ \left( -\frac{J_{WW}}{J_W} \right) (cov W, Y_i) + \sum_{j=i}^k \left( -\frac{J_{WY_j}}{J_W} \right) (cov Y_i, Y_j) \right].$$

Entonces, el rendimiento medio esperado de un derivado puede ser expresado como la tasa de interés libre riesgo mas una combinación lineal las primeras derivadas de precio del activo con respecto a  $W$  y  $Y$ . Estas derivadas dependen del contrato del activo.

En este documento se muestra que el precio de cualquier derivado satisface la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (var W) F_{WW} + \sum_{i=1}^k cov(W, Y_i) F_{WY_i} + \frac{1}{2} (cov Y_i, Y_j) F_{Y_i Y_j} \\ & + F_W [r(W, Y, t)W - C^*(W, Y, t)] + \sum_{i=1}^k F_{Y_i} \left[ u_i - \frac{J_{WW}}{J_W} (cov W, Y_i) \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^k \left( -\frac{J_{WY_j}}{J_W} \right) (cov Y_i, Y_j) \right] + F_t - rF + \delta(W, Y, t) = 0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde  $r(W, Y, t)$  es la obtenida en (2.20). La ecuación (2.22) es obtenida a partir de la combinación del drift que se obtiene de aplicar el lema de Itô a  $F(W, Y, t)$  y (2.21). La ecuación (2.22) es uno de los principales resultados de este artículo de CIR. La solución de este resultado determina el precio de equilibrio de un activo dado, en términos de variables de la economía.

### 2.3 Análisis de una economía monetaria en tiempo continuo.

En este modelo, desarrollado por Lioui y Poncet (2000), se desarrolla una versión monetaria del modelo de equilibrio a tiempo continuo de CIR ( (1985 a) presentado en la sección anterior. A diferencia de CIR, en este modelo se introduce una función de utilidad

del tipo Sidrausky (1967); para lo cual se enfatiza que una de las propiedades de introducir dinero en la función de utilidad es que presenta neutralidad y super-neutralidad del dinero.

El análisis inicia suponiendo, como en CIR (1985 a), que el sector real de la economía es como se describen en (2.17), las variables de estado son como se describen en (2.18) y existen  $H$  derivados, tal como se describen (2.19), con  $F^i \beta_i - \delta_i = u_s$ . Así también, se asume que existen un mercado de ahorro y préstamo cuya tasa de interés nominal y real son respectivamente:  $R(t)$  y  $r(t)$ . A diferencia de CIR, en este artículo se supone que el Gobierno emite dinero y arbitrariamente establece su tasa de rendimiento cero, de tal forma que la oferta monetaria sigue el siguiente proceso estocástico:

$$dM(t) = M(t)[u_M(Y, t)dt + \sigma_M(Y, t)dw], \quad (2.23)$$

donde  $u_M$  es la tasa de crecimiento de la oferta monetaria,  $\sigma_M$  es una matriz de dimensión  $(n + k)$ . Así mismo, el nivel de precios sigue el siguiente proceso:

$$dP(t) = P(t)[u_P dt + \sigma_P(Y, t)dw], \quad (2.24)$$

donde  $u_P$  es la inflación media esperada y  $\sigma_P$  es un vector de dimensión  $(n + k)$ .

Se supone también que existe un individuo que vive de manera indefinida, el cual busca maximizar su utilidad esperada, una función de utilidad del tipo Sidrauski (1967). Su restricción presupuestal se compone de la proporción de la riqueza real,  $W$ , invertida en las siguientes oportunidades: la tecnología,  $\alpha$ , el derivado,  $\theta$ , la cuenta de ahorro nominal,  $\delta$  y real,  $\varphi$ , el consumo,  $C(t)$  y la tenencia de saldos reales,  $m = M/P$ .

Se supone que para que la economía esté en equilibrio se deben satisfacer las siguientes condiciones: i) la riqueza total debe ser igual a la cantidad invertida en tecnología mas la tenencia de saldos reales; ii) los mercados de activos financieros se vacían, por tanto las tenencias de activos financieros son cero— las tenencias del derivado y las cuentas ahorro tanto nominal como real; iii) la oferta monetaria es igual a la demanda de saldos reales.

Usando estas condiciones y las condiciones necesarias y suficientes que determinarán las demandas óptimas del agente representativo, se obtiene la tasa media de crecimiento de la riqueza real,  $u_W$ :

$$u_W = \frac{1}{\alpha' 1_N} - \frac{c}{\alpha W} + (\sigma_\alpha' \sigma_\alpha - u_\alpha) + \frac{1-\alpha}{\alpha} (\sigma_M^2 - u_M) + \left[ \frac{1-\alpha}{\alpha} \right]^2 \sigma_M^2 - \frac{\sigma_\alpha g \alpha}{\alpha} + \frac{2-\alpha}{\alpha} \sigma_\alpha \sigma_M - \frac{1-\alpha}{\alpha} \sigma_M g, \quad (2.25)$$

donde  $u_\alpha$  y  $\sigma_\alpha$  son respectivamente el drift y la volatilidad de la proporción de la riqueza real invertida en la tecnología. De acuerdo con la ecuación (2.25), la política monetaria afecta a la tasa de crecimiento esperada de la riqueza real, a través del componente  $(\sigma_M^2 - u_M)$ . Así mismo, esta es función creciente del rendimiento medio esperado de la inversión real,  $\alpha$  y es decreciente con el cociente consumo- riqueza,  $\frac{c}{\alpha W}$ . La inflación media esperada es:

$$u_p = \rho - (u_M + \sigma_M^2) - u_\eta + \sigma_\eta^2 + \frac{\rho - (u_M + \sigma_M^2)}{\varphi \rho - (u_M + \sigma_M^2)} \quad (2.26)$$

Esta metodología y resultados son aplicados en un artículo posterior para valuar derivados suscritos sobre un índice de precios al consumidor, el cual será analizado en la siguiente sección.

## 2.4 Un modelo de valuación de opciones suscritas sobre un índice de precios.

Como una aplicación del modelo revisado en la sección anterior, Lioui y Poncet (2005) desarrollan un modelo para valuar un derivado suscrito sobre un índice de precios de consumo (CPI por sus siglas en ingles). Usando para ello un modelo de equilibrio general a tiempo continuo. Para iniciar, este artículo propone que existe un solo bien en la economía que puede ser asignado para el consumo o la inversión. Si este bien se destina a la

inversión, este es producido por una tecnología. De tal forma que  $\eta(t)$  es una cantidad invertida en la tecnología al tiempo  $t$ . Además seguirá el siguiente proceso estocástica.

$$d\eta(t) = \eta(t)(\mu_\eta dt + \sigma_\eta dZ(t)_\eta), \quad (2.27)$$

donde  $Z(t)_\eta$  es un proceso de Wiener de dimensión 1, definido sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  $\mu_\eta > 0$  y  $\sigma_\eta > 0$  son constantes positivas. Se supone también que el Banco Central emite dinero y arbitrariamente establece su tasa de rendimiento igual a cero. Además, existe un mercado de dinero cuya tasa de rendimiento nominal es  $R(t)$ . La oferta monetaria sigue la siguiente dinámica:

$$dM(t) = M(t)Y_M(\mu_M dt + \sigma_M(t)dZ(t)_M + \sigma_{M\eta}dZ(t)_\eta), \quad (2.28)$$

donde  $Z(t)_M$  es un proceso de Wiener de dimensión 1, definido sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , el cual no está correlacionado con  $Z(t)_\eta$ . Así mismo,  $\mu_M > 0$ ,  $\sigma_M > 0$  y  $\sigma_{M\eta} > 0$ . Por su parte,  $Y_M$  es una variable de estado ante la cual el Banco Central reacciona y posteriormente influencia la evolución de la política monetaria; esta variable evoluciona de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$dY_M(t) = \kappa_{Y_M}(\theta_{Y_M} - Y_M)dt + \sigma_{Y_M M}dZ_M - \sigma_{Y_M \eta}dZ(t)_\eta. \quad (2.29)$$

Se asume que existen dos activos financieros disponibles en el mercado los cuales siguen el siguiente proceso:

$$dV_i = V_i(u_i dt + \sigma_{i\eta}dZ_\eta(t) + \sigma_{iM}dZ_M(t)), \text{ para } i = 1,2, \quad (2.30)$$

donde  $u_i$  representa el parámetro de tendencia y  $\sigma_{i\eta}$  y  $\sigma_{iM}$  representan sus respectivas volatilidades.

El nivel de precios sigue el siguiente proceso estocástico:

$$dP(t) = P(t)(u_p(t)dt + \sigma_{p\eta}dZ_\eta(t) + \sigma_{pM}dZ_M(t)). \quad (2.31)$$

donde  $u_p$  representa la inflación media esperada y  $\sigma_{p\eta}$  y  $\sigma_{pM}$  representan sus respectivas volatilidades.

Se supone una función del tipo Sidrausky (1967):

$$U(t, c(t), m(t)) = e^{-\rho t}[\varphi \ln c(t) + (1 - \varphi) \ln m(t)]. \quad (2.32)$$

Sujeta a la siguiente restricción:

$$\begin{aligned} dw = & w\alpha \frac{d\eta(t)}{\eta(t)} + w\lambda \left( \frac{dV_1}{V_1} + \frac{dP^{-1}}{P^{-1}} - (\sigma_{1\eta}\sigma_{p\eta} + \sigma_{1M}\sigma_{p\eta})dt \right) \\ & + w\phi \left( \frac{dV_2}{V_2} + \frac{dP^{-1}}{P^{-1}} - (\sigma_{2\eta}\sigma_{p\eta} + \sigma_{2M}\sigma_{p\eta})dt \right) + w\phi \left( Rdt + \frac{dP^{-1}}{P^{-1}} \right) - cdt + m \frac{dP^{-1}}{P^{-1}}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

donde  $w$  es la riqueza real,  $\alpha, \delta, \lambda, \phi$  son respectivamente la proporción de la riqueza real invertida en la tecnología, en la cuenta de ahorro nominal y en los activos 1 y 2.

Se supone que para que la economía se encuentre en equilibrio se requiere que se cumplan las siguientes condiciones:

i) la riqueza real sea igual a la cantidad invertida en la tecnología mas la tenencia de saldos reales:  $w\alpha + m = w$ .

ii) las tenencias en la cuenta de ahorro nominal y los activos financieros son cero:  $\delta = \lambda = \phi = 0$ .

iii) la oferta monetaria es igual a la demanda monetaria:  $\frac{M}{P} = m = w(1 - \alpha)$ .



Usando las condiciones de primer orden para la maximización del problema expuesto en (2.32) – (2.33), así como las condiciones para que la economía se encuentre en equilibrio se obtiene el nivel de precios:

$$P(t) = e^{\rho t} \frac{M(t)\xi_M(t)R(t)}{(1-\varphi)\rho w(o)\eta(t)}, \quad (2.34)$$

donde

$$\frac{d\xi_M}{\xi_M} = \frac{(1-\varphi)\rho}{R(t) - (1-\varphi)\rho} \left[ \left( \sigma_M Y_M + \frac{1}{R(t)} \sigma_{RM} \right) dZ_M(t) + \left( \sigma_{M\eta} Y_M + \frac{1}{R(t)} \sigma_{R\eta} \right) dZ_\eta(t) \right].$$

Como se observa, el nivel de precios es afectado por factores monetarios a través de la dependencia sobre la oferta monetaria. A partir de que se asumió que en equilibrio las tenencias de activos financieros es cero, el nivel de precios no es función de la tenencia de derivados. A partir de estos resultados se valúa un derivado, opción tipo Europea, suscrito sobre un índice de precios (CPI). Para lo cual se asume que  $Y_M(t) \equiv 1$ . El precio de equilibrio al tiempo  $t$  del *Call tipo Europeo* con maduración al tiempo  $T$  es:

$$C(t, T) = P(t)e^{-r(T-t)} \Phi(d_1) - K\Phi(d_2)e^{-R(T-t)}, \quad (2.35)$$

donde 
$$\Phi(d) = \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon = 1 - \Phi(-d),$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{P}{K}\right) + \left[ R - r + \frac{1}{2}(\sigma_{pM}^2 + \sigma_{p\eta}^2) \right] (T-t)}{\sqrt{(\sigma_{pM}^2 + \sigma_{p\eta}^2)(T-t)}},$$

y

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{P}{K}\right) + \left[ R - r - \frac{1}{2}(\sigma_{pM}^2 + \sigma_{p\eta}^2) \right] (T-t)}{\sqrt{(\sigma_{pM}^2 + \sigma_{p\eta}^2)(T-t)}}.$$

Este resultado será comparado con el obtenido en esta investigación en la sección 5.

## 2.5 Modelo de Fisher de riesgo de inflación con Bonos indexados

Este artículo aborda un problema de maximización de utilidad de una gente que tiene acceso a activos financieros, incluyendo un bono indexado a la inflación. Para lo cual se asume que en la economía existe un consumidor –inversionista que desea maximizar el valor esperado de su función de utilidad:

$$\max_c E \left[ \int_t^\infty e^{-\delta s} \ln(c(s)) ds / \mathfrak{F}_0 \right], \quad (2.36)$$

donde  $c(t)$  es el consumo al tiempo  $t$ , y  $\delta$  es la tasa subjetiva de descuento. Se supone también que existe un solo bien de consumo de precio  $P$ , el cual es conducido por el siguiente proceso de difusión:

$$dP(t) = P(t)[\pi dt + \sigma dW], \quad (2.37)$$

donde  $\pi$  es la inflación media esperada al tiempo  $t$ ,  $\sigma$  es la volatilidad de la tasa de inflación y  $W$  es un movimiento browniano. Se supone también que existe un bono indexado a la inflación que paga una tasa de interés real mas la inflación observada; es decir,  $r_1 = i_1 - \pi + \frac{dP}{P}$ , cuyo precio es,  $B_1$ . Por lo tanto, se cumple que:

$$dR_1 = \frac{dB_1}{B_1} = i_1 dt + \sigma dW. \quad (2.38)$$

Así mismo, existe una acción de precio  $K$ , que sigue el siguiente proceso de difusión:

$$dR_2 = \frac{dK}{K} = i_2 dt + s dV, \quad (2.39)$$

donde  $i_2$  y  $s$  son el rendimiento medio de la acción y su volatilidad respectivamente,  $V$  es también un movimiento browniano, correlacionado con  $W$  de la siguiente forma:

$$\text{Cov}(V(t), W(t)) = \rho dt.$$

Aplicando el lema de Itô a  $dR_2$ , se tiene el rendimiento en términos reales de la acción, el cual será:

$$\frac{d(K/P)}{K/P} = (i_2 - \pi - \sigma s \rho + \sigma^2)dt + s dV - \sigma dW. \quad (2.40)$$

Se supone también que existe un bono nominal de precio  $B_3$ , que satisface:

$$dR_3 = \frac{dB_3}{B_3} = i_3 dt. \quad (2.41)$$

De igual forma, el rendimiento real del bono nominal será:

$$\frac{d(B_3/P)}{B_3/P} = (i_3 - \pi + \sigma^2)dt - \sigma dW. \quad (2.42)$$

De tal forma que la restricción presupuestal, la riqueza real  $A$ , del problema de maximización será:

$$A = B_1 + K + B_3.$$

Aplicando el lema de Itô se obtiene:

$$dA = A(w_1 dR_1 + w_2 dR_2 + w_3 dR_3) - P c(t)dt, \quad (2.43)$$

donde  $w_1 = \frac{B_1}{A}$ ,  $w_2 = \frac{K}{A}$ ,  $w_3 = \frac{B_3}{A}$ . Se define ahora a la función indirecta de utilidad:

$$J(A, P, t) = \max_{c, w_1, w_2, w_3} E \left[ \int_t^\infty e^{-\delta s} \ln(c(s)) ds / \mathfrak{F}_0 \right]. \quad (2.44)$$

De tal forma que la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman es:

$$0 = \max \left( \ln(c) e^{-\delta t} + J_t + J_A A u + J_P P \pi + \frac{1}{2} J_{AA} A^2 (w_1^2 \sigma^2 + w_2^2 s^2 + 2w_1 w_2 \sigma s \rho) + \frac{1}{2} J_{PP} P^2 \sigma^2 + J_{PA} P A (w_1 \sigma + w_2 s \rho) \right). \quad (2.45)$$

Se propone como candidato solución:

$$J(A, P, t) = (\beta_0 + \beta_1 \ln(A P) + H(P)) e^{-\delta t}. \quad (2.46)$$

De esta forma se obtiene:

$$0 = \max \left( \ln(c) - \delta(\beta_0 + \beta_1 \ln(A P)) + \beta_1 (w_1(i_1 - i_3) + w_2(i_2 - i_3) + i_3 - \frac{P c(t)}{A}) + \beta_1 \pi - \frac{1}{2} \beta_1 (w_1^2 \sigma^2 + w_2^2 s^2 + 2w_1 w_2 \sigma s \rho) - \frac{1}{2} \beta_1 \sigma^2 + (\text{en terminos de } H) \right) \quad (2.47).$$

Aplicando ahora las condiciones de primer orden se obtiene:

$$c(t) = \frac{A}{\beta_1 P}, \quad (2.48)$$

$$w_1 = \frac{i_1 - i_3}{\sigma^2(1 - \rho^2)} - \frac{i_2 - i_3}{\sigma s(1 - \rho^2)}, \quad (2.49)$$

$$w_2 = \frac{i_2 - i_3}{s^2(1 - \rho^2)} - \frac{i_1 - i_3}{\sigma s(1 - \rho^2)} \quad (2.50)$$

y

$$w_3 = 1 - w_1 - w_2$$

## 2.6 Modelo de una economía monetaria para valorar activos financieros

En este modelo, desarrollado por Bakshi y Chen (1996), se determinan de manera endógena el nivel de precios, la tasa de inflación, el precio de los activos, y la tasa de interés real y nominal. Se inicia suponiendo que existe un agente representativo que tiene acceso a solo bien en la economía. Así también, la demanda monetaria y las decisiones de portafolio se llevan a cabo en intervalos discretos.

De tal forma que el agente representativo busca maximizar el valor esperado de la siguiente función de utilidad:

$$\max_{c, M^d} \sum_{t=1}^{\infty} e^{-\rho t} E_0 \{ \varphi \ln c(t) + (1 - \varphi) \ln m(t) \}, \quad (2.51)$$

donde  $c(t)$  es el consumo al tiempo  $t$ ;  $m$  es la demanda de saldos reales,  $P(t)$  es precio del bien de consumo y  $\rho$  es el factor de descuento. Posteriormente examinan las propiedades de la economía a tiempo continuo, para lo cual suponen que existe una acción disponible cuyo tenedor tiene el derecho a todo el producto de una tecnología de producción; el precio de la acción es denotado por,  $P_z(t)$  y sigue la siguiente dinámica:

$$dP_z(t) = P_z \left[ \left( \mu_y + \eta_y x(t) \right) dt + \sigma_y \sqrt{x(t)} \right] dW_x(t). \quad (2.52)$$

El producto de esta tecnología en términos reales al tiempo  $t$  es denotado por  $Y(t)$  y sigue la siguiente dinámica:

$$dy(t) = y(t) \left[ \left( \mu_y + \eta_y x(t) \right) dt + \sigma_y \sqrt{x(t)} \right] dW_x(t), \quad (2.53)$$

donde  $\mu_y > 0$  y  $\sigma_y > 0$ ,  $W_y(t)$  es también un movimiento browniano. Así mismo,

$$dx(t) = \kappa_x (\theta_x - x(t)) dt + \sigma_x \sqrt{x(t)} dW_x(t), \quad (2.54)$$

donde  $\kappa_x > 0, \theta_x > 0$ . La oferta monetaria al tiempo  $t$  es denotada por,  $M(t)$ , y sigue la siguiente dinámica.

$$dM(t) = M(t)(\mu_M dt + \sigma_g \sqrt{g(t)} dW(t)_M), \quad (2.55)$$

donde  $\mu_M > 0$ . Así mismo  $g(t)$  sigue la siguiente dinámica:

$$dg(t) = g(t)[\kappa_g(\theta_g - g(t))dt + \sigma_g \sqrt{g(t)} dW_M(t)], \quad (2.56)$$

donde  $g_0 > 0, \sigma_g > 0, \kappa_g > 0, \theta_g > 0$  y  $W_M(t)$  es un movimiento browniano. Se supone que:  $Cov(W(t)_Y, W(t)_M) = \rho$ . Se supone también que existe dos bonos, uno nominal y uno real, ambos libres de riesgo de incumplimiento que pagan una tasa nominal,  $r(t)$ , y una tasa real,  $R(t)$  respectivamente. Así mismo, existen  $(N - 2)$  activos financieros, de precio  $P_i$ , para  $i = 3 \dots N$ , cuya dinámica es la siguiente:

$$dP_i(t) = u_i P_i(t) dt + \sigma_i(t) dW_i, \quad (2.57)$$

donde  $u_i, \sigma_i$  son respectivamente su drift y su volatilidad y  $W_i$  es otro movimiento browniano. De tal forma que cada decisión del consumidor debe satisfacer:

$$\begin{aligned} M^d(t) + [P_z(t) + P(t) y(t) dt] z(t) + P(t) \alpha_1(t) + \alpha_2(t) + \sum_{i=3}^N P_i(t) \alpha_i(t) = \\ M^d(t + dt) + P(t) c(t) dt + P_z(t) z(t + dt) + P \frac{\alpha_1(t+dt)}{1+r dt} + \frac{\alpha_2(t+dt)}{1+R dt} + \sum_{i=3}^N P_i \alpha_i(t + dt), \end{aligned} \quad (2.58)$$

donde  $z$  es la tenencia de acciones y  $\alpha(t) = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  son las tenencias de los activos financieros. Así también se tiene que en equilibrio se cumple lo siguiente:

i)  $C(t) = Y(t)$

ii) la oferta monetaria es igual a la demanda de saldos reales:  $M(t) = M^d$

iii)  $z = 1$

$$iv) \alpha_i(t) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$$

Después de la resolución del problema de maximización propuesto, la tasa de inflación de equilibrio es:

$$\frac{dP}{P} = \pi(t)dt + \frac{\sigma_g \sqrt{g} (\rho + u_M)}{\rho + u_M + (\kappa_g + \sigma_g^2)} dW_M - \sigma_y \sqrt{x} dW_x, \quad (2.59)$$

donde

$$\pi(t) = u_M + \kappa_x (\theta_x - x(t)) - \left[ u_y + (\eta_y + \sigma_y^2) x \right] + f(\theta_g, \kappa_g, g, u_y, \eta_y, \sigma_y, x, \rho).$$

Como se observa, la tasa de inflación es afectada por choques tanto monetarios como reales; los choques monetarios positivos tienen un efecto positivo, mientras que los choques tecnológicos positivos tienen un impacto negativo sobre la inflación. Además, la inflación esperada crece con el crecimiento monetario esperado y decrece con el crecimiento medio del producto.

Hasta aquí, se ha presentado una revisión de los modelos que han servido de base para el planteamiento del problema que en la siguiente sección se propone.

### 3. Estructura de la economía

En esta sección se establecen los supuestos del modelo, en donde se establecerán los procesos que rigen esta economía, así como la forma funcional de los individuos representativos. Para lo cual, primero se considera una economía en la que existe un número finito de individuos  $h \in \{1, \dots, H\}$   $h \in \{1, \dots, H\}$ , idénticos en sus preferencias y dotaciones. Además, existen un único bien, el cual puede ser asignado para el consumo o para la inversión.

Se supone que cada individuo es un empresario que opera su propio proceso productivo, de tal forma que la transformación de una inversión de una cantidad,  $Y^h(t)$ , del bien en el proceso productivo sigue la siguiente dinámica:

$$dy^h(t) = y^h(t)[u_y^h dt + \sigma_y^h dW_y(t)], \quad (3.1)$$

donde  $u_y^h > 0$  es la tasa de rendimiento medio esperada de la inversión en el activo físico;  $\sigma_y^h > 0$  es su volatilidad; y  $W_y(t)$  es un movimiento browniano definido en un espacio de probabilidad fijo:  $(\Omega^{(y)}, \mathfrak{F}^{(y)}, (\mathfrak{F}^{(y)})_{t>0}, P^{(y)})$   $(\mathcal{L}^{(y)}, \mathfrak{F}^{(y)}, (\mathfrak{F}^{(y)})_{t>0}, P^{(y)})$ , donde  $(\mathfrak{F}^{(y)})$  denota su filtración aumentada. Se supone también que,  $P^h$ , es el precio del bien  $y^h$ , que por simplicidad se asume igual a 1.

Suponemos también que el Banco Central emite dinero y arbitrariamente establece su tasa de rendimiento nominal igual a cero. Así mismo, la política monetaria se conduce de tal forma que la oferta monetaria,  $M(t)$ , sigue la siguiente dinámica:

$$dM(t) = M(t)[u_M dt + \sigma_M dW_M(t)], \quad (3.2)$$

donde  $u_M > 0$ , es la tasa de crecimiento media esperada de la oferta monetaria;  $\sigma_M > 0$  es la volatilidad de la oferta monetaria; y  $W_M(t)$  es un movimiento browniano definido en un espacio de probabilidad fijo:  $(\Omega^{(m)}, \mathfrak{F}^{(m)}, (\mathfrak{F}^{(m)})_{t>0}, P^{(m)})$   $(\mathcal{L}^{(y)}, \mathfrak{F}^{(y)}, (\mathfrak{F}^{(y)})_{t>0}, P^{(y)})$ , donde  $(\mathfrak{F}^{(y)})$  denota su filtración aumentada; de tal forma que los movimientos Brownianos:  $dW_y(t)$  y  $dW_M(t)$ ,  $W_M(t)$  están correlacionados entre sí, de la siguiente forma:

$$\text{cov}(W_y(t), W_M(t)) = \rho dt.$$

Se plantea que el nivel general de precios,  $P(t)$ , es conducido por choques tanto reales como monetarios y sigue el siguiente proceso estocástico:



$$dP(t) = P(t)[\pi(t)dt + \sigma_{PM}dW_M(t) - \sigma_{PY}dW_Y(t)], \quad (3.3)$$

donde  $\pi(t)$  es la inflación media esperada al tiempo  $t$ ;  $\sigma_{PY} > 0$ ,  $\sigma_{PM} > 0$  y  $\sigma_{PY} > 0$  son sus respectivas volatilidades.  $W_M(t)$ <sup>2</sup>

Se supone que existen un mercado para una variedad de activos financieros, tales como los siguientes:

i) un bono libre de riesgo de crédito de precio,  $B(t)$ , que satisface:

$$dB(t) = i(t)B(t)dt, \quad (3.4)$$

donde,  $i(t)$  es la tasa de interés nominal, la cual se asume que es determinista; y  $B(0) = 1$ , representa su condición inicial.

ii) existen también  $n \in \{1, \dots, N\}$  activos riesgosos; cada uno de precio,  $S_n(t)$ , que siguen la siguiente dinámica:

$$dS^n(t) = S^n(t)[u_S^n(t)dt + \sigma_{SM}^n dW_M(t) + \sigma_{SY}^n dW_Y(t)], \quad (3.5)$$

donde el parámetro de tendencia,  $u_S^n \in \mathbb{R}$ , representa el rendimiento medio esperado; y  $\sigma_{SM}^n > 0$  y  $\sigma_{SY}^n > 0$  representan sus respectivas volatilidades;

iii) están disponibles también un número  $d \in \{1, \dots, D\}$  de instrumentos derivados, cada uno de precio,  $X^d(t)$ , que siguen la siguiente dinámica:

$$dX^d(t) = X^d(t)[u_X^d(t)dt + \sigma_{XM}^d dW_M(t) + \sigma_{XY}^d dW_Y(t)], \quad (3.6)$$

donde  $u_X^d$  es el parámetro de tendencia,  $\sigma_{XM}^d$  y  $\sigma_{XY}^d$  son  $\sigma_{XY}^d$  y  $\sigma_{XM}^d$  sus respectivas volatilidades; sus condiciones de frontera inicial y final serán descritas en la sección 5.

Supondremos que cada individuo de esta economía obtiene satisfacción por el consumo del bien que se produce,  $c^h(t)$ , así como por la tenencia de saldos reales,  $m^h(t)$ ;

---

<sup>2</sup> El proceso descrito para la tasa de inflación es como el que se presenta en Bakshi y Chen (1996).

esto último debido a los servicios de liquidez que ofrece. Todos los individuos coinciden en que las oportunidades de producción e inversión, la oferta monetaria y la tasa de inflación son como se describieron hasta aquí. La función de cada individuo es del tipo Sidrauski (1967) y tiene la siguiente forma:

$$U(t, c^h(t), m^h(t)) = e^{-\delta t} [\varphi \ln c^h(t) + (1 - \varphi) \ln m^h(t)], \quad (3.7)$$

donde  $\delta > 0$  es la tasa de descuento subjetiva, y  $0 < \varphi < 1$  es un parámetro que mide la importancia relativa entre el consumo de un bien genérico y la tenencia de saldos reales.

Finalmente, suponemos que la inversión física y el intercambio de activos se llevan a cabo de manera continua en el tiempo, sin costos de transacción y solo a precios de equilibrio.

### 3.1 Problema de decisión del consumidor

En esta sección se plantea y resuelve el problema de elección de portafolio de cada individuo, planteado en la sección anterior. Para lo cual, se supone que cada individuo pueda asignar una proporción de su riqueza real,  $a^h(t)$ , entre su tenencia de saldos reales,  $\theta_m^h$ , la inversión en el activo físico,  $\theta_y^h$ , los activos riesgosos disponibles,  $\theta_s^h = \sum_{s=1}^N \theta_s^h$ , los derivados,  $\theta_x^h = \sum_{d=1}^D \theta_x^d$  y el bono,  $\theta_b^h = 1 - \theta_y^h - \theta_s^h - \theta_x^h - \theta_m^h$ . De tal forma que el problema que enfrenta cada individuo es maximizar su utilidad esperada descontada al tiempo, como sigue:

$$\max_{c^h(t), \theta_y^h, \theta_s^h, \theta_x^h, \theta_m^h} = E \left\{ \int_t^\infty e^{-\delta t} [\varphi \ln c^h(s) + (1 - \varphi) \ln m^h(s)] ds / \mathfrak{I}_0 \right\}, \quad (3.8)$$

donde  $\mathfrak{I}_0$  representa la información disponible al tiempo  $t_0$ .

Entonces, el problema (3.8) estará sujeto a que la evolución de la riqueza real de cada individuo al tiempo  $t$ , es (véase el Apéndice A.1):

$$\begin{aligned} da^h(t) = a^h(t) & \left\{ r_b + \theta_y^h (\beta_y^h - r_b) + \theta_s^h (\beta_s - r_b) + \theta_x^h (\beta_x - r_b) - \theta_m^h i - c^h(t) / a^h(t) \right\} dt \\ & + \left[ \sigma_{PY} + \theta_y^h \sigma_y^h + \theta_s^h \sigma_{SY} + \theta_x^h \sigma_{XY} \right] dW_y(t) + \left[ \theta_s^h \sigma_{SM} + \theta_x^h \sigma_{XM} - \sigma_{PM} \right] dW_M(t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde

$$\beta_y^h = u_y^h - \pi + \sigma_{PM}^2 - 2\sigma_{PY}\sigma_{PM}\rho + \sigma_{PY}^2 - 2\sigma_y^h\sigma_{PM}\rho + \sigma_y^h\sigma_{PY},$$

$$r_b = i - \pi + \sigma_{PM}^2 - 2\sigma_{PY}\sigma_{PM}\rho + \sigma_{PY}^2,$$

$\beta_k = u_k - \pi + \sigma_{PM}^2 - 2\sigma_{PY}\sigma_{PM}\rho + \sigma_{PY}^2 - \sigma_{kY}\sigma_{PM}\rho + \sigma_{kY}\sigma_{PY} - \sigma_{kM}\sigma_{PM} + \sigma_{kM}\sigma_{PY}\rho$ ,  
para el activo  $k$ ,  $k = S(t), X(t); y$

$$\begin{aligned} u_S &= \sum_{n=1}^N u_S^n, \sigma_{SY} = \sum_{n=1}^N \sigma_{SY}^n, \sigma_{SM} = \sum_{n=1}^N \sigma_{SM}^n, u_X = \sum_{d=1}^D u_X^d, \sigma_{XY} = \sum_{d=1}^D \sigma_{XY}^d \\ \sigma_{XM} &= \sum_{d=1}^D \sigma_{XM}^d. \end{aligned}$$

La ecuación (3.9) es la ecuación diferencial estocástica de acumulación de la riqueza real de cada individuo, en términos de las participaciones de cada activo, así como del consumo. Por conveniencia, esta ecuación puede ser escrita de la siguiente manera:

$$da^h(t) = a^h(t) \left[ u_a^h dt + \sigma_{aY}^h dW_y(t) + \sigma_{aM}^h dW_M(t) \right] \quad (3.10)$$

Donde

$$u_a^h(t) = r_b + \theta_y^h (\beta_y^h - r_b) + \theta_s^h (\beta_s - r_b) + \theta_x^h (\beta_x - r_b) - \theta_m^h i - c^h(t) / a^h(t), \quad (3.10.1)$$

$$\sigma_{aY}^h = \sigma_{PY} + \theta_y^h \sigma_y^h + \theta_s^h \sigma_{SY} + \theta_x^h \sigma_{XY}, \quad (3.10.2)$$

$$\sigma_{aM}^h = \theta_s^h \sigma_{SM} + \theta_x^h \sigma_{XM} - \sigma_{PM}. \quad (3.10.3)$$

Con el propósito de caracterizar una solución del problema expuesto en (3.8) y (3.10), es conveniente definir a la función de utilidad indirecta al tiempo  $t$ :

$$J^h(t, a^h(t), P(t)) = \max_{c^h(t), \theta_y^h, \theta_s^h, \theta_x^h, \theta_m^h} = E \left\{ \int_t^\infty e^{-\delta t} [\varphi \ln c^h(s) (1 - \varphi) \ln m^h(s)] ds / \mathfrak{T}_0 \right\}. \quad (3.11)$$

De esta forma, la ecuación de *Hamilton-Jacobi-Bellman* está dada por (véase Apéndice A2):

$$\begin{aligned}
0 = & \max_{c^h(t), \theta_c^h, \theta_m^h, \theta_a^h, \theta_p^h} \left\{ e^{-\delta t} [\varphi \ln c^h(t) + (1-\varphi) \ln m^h(t)] + J_t + J_a a^h(t) u_a^h(t) + J_P P(t) \pi(t) + \right. \\
& \frac{1}{2} J_{aa} a^{h^2}(t) (\sigma_{aY}^2 + 2\sigma_{aY}^h \sigma_{aM}^h \rho + \sigma_{aM}^2) + \frac{1}{2} J_{PP} P^2(t) (\sigma_{PY}^2 - 2\sigma_{PY} \sigma_{PM} \rho + \sigma_{PM}^2) \\
& \left. + J_{aP} a^h(t) P(t) [(\sigma_{aY}^h \sigma_{PM} - \sigma_{PY} \sigma_{aM}^h) \rho + \sigma_{PM} \sigma_{aM}^h - \sigma_{PY} \sigma_{aY}^h] \right\}, \quad (3.12)
\end{aligned}$$

donde  $J_i$   $J_i$  significa la derivada parcial de  $J^h(t, a^h(t), P(t))$  con respecto al argumento  $ii$ .

### 3.2 Reducción de la dimensión del problema

La ecuación (3.12) es una ecuación diferencial parcial en  $J^h(t, a^h(t), P(t))$ ; por conveniencia se propone como candidato solución de variables separables:

$$J^h(t, a^h(t), P(t)) = F^h(a^h(t), P(t)) e^{-\delta t} \quad (3.13)$$

Si se sustituye (3.13) en (3.12) se obtiene:

$$\begin{aligned}
0 = & \max_{c^h(t), \theta_c^h, \theta_m^h, \theta_a^h, \theta_p^h} \left\{ \varphi \ln c^h(t) + (1-\varphi) \ln m^h(t) - \delta F^h(a^h(t), P(t)) + F_a a^h(t) u_a^h(t) \right. \\
& + F_P P(t) \pi(t) + \frac{1}{2} F_{aa} a^{h^2}(t) (\sigma_{aY}^2 + 2\sigma_{aY}^h \sigma_{aM}^h \rho + \sigma_{aM}^2) \\
& + \frac{1}{2} F_{PP} P^2(t) (\sigma_{PY}^2 - 2\sigma_{PY} \sigma_{PM} \rho + \sigma_{PM}^2) + F_{aP} a^h(t) P(t) [(\sigma_{aY}^h \sigma_{PM} - \sigma_{PY} \sigma_{aM}^h) \rho \\
& \left. + \sigma_{PM} \sigma_{aM}^h - \sigma_{PY} \sigma_{aY}^h] \right\}. \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Se propone ahora la siguiente forma funcional de  $F^h(a^h(t), P(t))$   $F(a, P)$ :

$$F^h(a^h(t), P(t)) = \gamma_0 + \gamma_1 [\ln a^h(t) + \ln P(t)] + H(P(t)). \quad (3.15)$$

Si ahora se sustituye (3.15) en (3.14) se obtiene:

$$\begin{aligned}
0 = & \max_{c^h(t), \rho^h, \rho^h, \rho^h, \rho^h} \left\{ \varphi \ln c^h(t) + (1-\varphi) \ln m^h(t) - \delta \left[ \gamma_0 + \gamma_1 [\ln a^h(t) + \ln P(t)] + H(P(t)) \right] \right. \\
& + \gamma_1 u_a^h(t) + \left( \frac{\gamma_1}{P(t)} + \frac{d}{dP(t)} H(P(t)) \right) \pi(t) P(t) - \frac{1}{2} \gamma_1 \left( \sigma_{aY}^h{}^2 + 2\sigma_{aY}^h \sigma_{aM}^h \rho + \sigma_{aM}^h{}^2 \right) \\
& \left. + \frac{1}{2} P^2(t) \left( \frac{d^2}{dP^2} H(P(t)) - \frac{\gamma_1}{P(t)^2} \right) \left( \sigma_{PY}^2 - 2\sigma_{PY} \sigma_{PM} \rho + \sigma_{PM}^2 \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Con el fin de determinar  $H(P(t))$  de la ecuación (3.16) se resuelve la siguiente ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$\begin{aligned}
& -\delta [\gamma_1 \ln P(t) + H(P(t))] + \left( \frac{\gamma_1}{P(t)} + \frac{d}{dP(t)} H(P(t)) \right) \pi(t) P(t) \\
& + \frac{1}{2} P^2(t) \left( \frac{d^2}{dP^2} H(P(t)) - \frac{\gamma_1}{P(t)^2} \right) \left( \sigma_{PY}^2 - 2\sigma_{PY} \sigma_{PM} \rho + \sigma_{PM}^2 \right) = 0;
\end{aligned} \tag{3.17}$$

donde se puede demostrar que la función  $H(P(t))$  que satisface (3.17) es:

$$\begin{aligned}
H(P(t)) = & \gamma_2 P(t) \wedge \left\{ \frac{1}{2\eta_1} [\eta_1 - 2\pi(t) + \sqrt{\eta_2}] \right\} \\
& + \gamma_3 P(t) \wedge \left\{ \frac{1}{2\eta_1} [\eta_1 - 2\pi(t) - \sqrt{\eta_2}] \right\} - \gamma_1 \ln P(t),
\end{aligned} \tag{3.18}$$

donde

$$\eta_1 = \sigma_{PY}^2 - 2\sigma_{PY} \sigma_{PM} \rho + \sigma_{PM}^2$$

y

$$\begin{aligned}
\eta_2 = & \sigma_{PM}^4 - 4\sigma_{PM}^3 \sigma_{PY} \rho + \left[ (2 + 4\rho^2) \sigma_{PY}^2 - 4\pi(t) + 8\delta \right] \sigma_{PM}^2 \\
& + 8\sigma_{PY} \sigma_{PM} \rho \left( \pi(t) - 2\delta - \frac{1}{2} \sigma_{PY}^2 \right) + \sigma_{PY}^4 + \sigma_{PY}^2 (8\delta - 4\pi(t)) + 4\pi^2(t).
\end{aligned}$$

En (3.18),  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  son coeficientes que serán determinados mas adelante; por su parte,  $\beta_2$  y  $\beta_3$  son coeficientes que se determinan de tal manera que  $H(P(0))=0$ ,  $H'(P(0))=0$  y  $H''(P(0))=0$ ; sin embargo, como se verá a continuación, la dependencia de estos coeficientes se elimina.

Sustituyendo la función  $H(P(t))$  de (3.18) en (3.16)  $u_a, \sigma_{aY} \gamma \sigma_{aM}$  se obtiene:

$$\begin{aligned}
\Psi = & \max_{c^h(t), \theta_y^h, \theta_s^h, \theta_x^h, \theta_m^h} \left\{ \varphi \ln c^h(t) + (1 - \varphi) \ln m^h(t) + \gamma_1 \left[ i \theta_b - \frac{c^h(t)}{a^h(t)} - \delta \ln a^h(t) - \pi(t) \right] \right. \\
& - \frac{1}{2} \theta_x^h \left( \sigma_{XM}^2 + 2 \sigma_{XY} \sigma_{XM} \rho + \sigma_{XY}^2 \right) - \frac{1}{2} \theta_s^h \left( \sigma_{SM}^2 + 2 \sigma_{SY} \sigma_{SM} \rho + \sigma_{SY}^2 \right) \\
& - \theta_s^h \theta_x^h \left[ (\sigma_{SY} \sigma_{XM} + \sigma_{SM} \sigma_{XY}) \rho + \sigma_{SM} \sigma_{XM} + \sigma_{SY} \sigma_{XY} \right] + \\
& \theta_x^h \left[ u_X - \theta_y^h \sigma_y^h (\sigma_{XY} + \sigma_{XM} \rho) \right] + \theta_s^h \left[ u_S - \theta_y^h \sigma_y^h (\sigma_{SY} + \sigma_{SM} \rho) \right] + \\
& \left. \frac{1}{2} \left( \sigma_{PM}^2 + \theta_y^2 \sigma_y^h + \sigma_{PY}^2 \right) - \sigma_{PM} \sigma_{PY} \rho + \theta_y^h u_y^h \right\} - \gamma_0 \delta = 0. \tag{3.19}
\end{aligned}$$

Se determinarán ahora las condiciones necesarias y suficientes para la maximización de (19), para lo cual, se sustituyen los valores de  $u_a^h, \sigma_{aY}^h, \sigma_{aM}^h$  en (3.19), de tal forma que dichas condiciones sean  $u_a, \sigma_{aY} \gamma \sigma_{aM}$  función de  $c^h(t), \theta_y^h, \theta_s^h, \theta_x^h, \theta_m^h$ , de la siguiente forma,  $\theta_Y, \theta_S, \theta_X, \theta_m$ :

$$\Psi_{c^h} = \frac{\varphi a^h(t) - \gamma_1 c^h(t)}{c^h(t) a^h(t)} \leq 0, \tag{3.20.a}$$

$$\Psi_{c^h} c^h(t) = 0, \tag{3.20.b}$$

$$\Psi_{\theta_y^h} = -\gamma_1 \left\{ \theta_y^h \sigma_y^{h^2} + \sigma_y^h \left[ \theta_s^h (\sigma_{SM} \rho + \sigma_{SY}) + \theta_x^h (\sigma_{XM} \rho + \sigma_{XY}) \right] - u_y^h + i \right\} \leq 0, \tag{3.20.c}$$

$$\Psi_{\theta_y^h} \theta_y^h = 0, \tag{3.20.d}$$

$$\Psi_{\theta_m^h} = \frac{1 - \varphi}{\theta_m^h} - \gamma_1 i \leq 0, \tag{3.20.e}$$

$$\Psi_{\theta_m^h} \theta_m^h = 0, \tag{3.20.f}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{\theta_s^h} = & -\gamma_1 \left\{ \theta_s^h \left( \sigma_{SM}^2 + 2 \sigma_{SY} \sigma_{SM} \rho + \sigma_{SY}^2 \right) + \theta_x^h \left[ \sigma_{SM} (\sigma_{XY} \rho + \sigma_{XM}) \right] \right. \\
& \left. + \sigma_{SY} (\sigma_{XM} \rho + \sigma_{XY}) \right] + \theta_y^h \sigma_y^h (\sigma_{SY} + \sigma_{SM} \rho) + i - u_S \right\} \leq 0, \tag{3.20.g}
\end{aligned}$$

$$\Psi_{\theta_s^h} \theta_s^h = 0, \quad (3.20.h)$$

$$\Psi_{\theta_x^h} = -\gamma_1 \left\{ \theta_x^h (\sigma_{XM}^2 + 2\sigma_{XY} \sigma_{XM} \rho + \sigma_{XY}^2) + \theta_s^h [\sigma_{XM} (\sigma_{SY} \rho + \sigma_{SM}) + \sigma_{XY} (\sigma_{SM} \rho + \sigma_{SY})] + \theta_y^h \sigma_y^h (\sigma_{XY} + \sigma_{XM} \rho) + i - u_x \right\} \leq 0, \quad (3.20.i)$$

$$\Psi_{\theta_x^h} \theta_x^h = 0. \quad (3.20.j)$$

A partir de (3.20 a ) y (3.20 b)(20a)y(20b), se obtiene que el consumo óptimo:  $c^h(t) = \varphi a^h(t) / \gamma_1$ .  $c^{h*}(t) = \varphi a(t) / \beta_1$  Con este resultado y a partir del hecho de que:  $m^h(t) = a^h(t) \theta_m^h$   $m^h(t) = a^h \theta_m^h$ , se obtiene que  $\beta_1 = \frac{1}{\delta} \gamma_1 = \frac{1}{\delta}$  (Véase Apéndice A3).

#### 4. Equilibrio en la economía

En esta sección se determinarán los valores óptimos de  $c^h(t)$ ,  $\theta_y^h$ ,  $\theta_s^h$ ,  $\theta_x^h$  y  $\theta_m^h$ , así como la tasa de inflación de equilibrio. Para ello, suponemos primero que para que la economía se encuentre en equilibrio se debe satisfacer lo siguiente:

(4.1) dados los procesos descritos en (3.1) - (3.6), tanto el consumo,  $[c^h(t)]_{h < H}$ , como las proporciones:  $[\theta_y^h, \theta_s^h, \theta_x^h, \theta_m^h]_{1 \leq h < H}$   $[\theta_y^h, \theta_s^h, \theta_x^h, \theta_m^h]_{1 \leq h \leq H}$  son óptimas;

(4.2) como en Magill & Quinzii (2002), se supone que el mercado de activos financieros se vacía, por lo tanto se cumple que:  $\sum_{h=1}^H \theta_s^h = \sum_{h=1}^H \theta_x^h = 0$   $\sum_{h=1}^H \theta_s^h = \sum_{h=1}^H \theta_x^h = 0$ ;

(4.3) la oferta monetaria es igual a la demanda de saldos reales:

$$\frac{M}{P} = \sum_{h=1}^H m^h = \sum_{h=1}^H \theta_m^h a^h.$$

A partir de las condiciones de equilibrio descritas y de las condiciones de primer orden para la maximización de (3.19), se determinan los valores óptimos de  $c^h(t)$ ,  $\theta_y^h$ ,  $\theta_s^h$ ,  $\theta_x^h$  y  $\theta_m^h$ , como sigue:

i) a partir de (3.20 a), (3.20 b) y  $\beta_1 = \frac{1}{\delta}$ , el consumo óptimo es:

$$c^{h*}(t) = \varphi \delta a(t); \quad (4.4)$$

ii) aplicando la condición de equilibrio (4.2), y debido a (3.20 c) y (3.20 d), se obtiene:

$$\theta_y^{h*} = \frac{u_y^h - i - \theta_x^{h*} \sigma_y^h (\sigma_{SY} + \sigma_{SM} \rho) - \theta_x^{h*} \sigma_y^h (\sigma_{XY} + \sigma_{XM} \rho)}{(\sigma_y^h)^2}; \quad (4.5)$$

iii) dado (3.20 e) y (3.20 f) se tiene que:

$$\theta_m^{h*} = \frac{(1-\varphi)\delta}{i}; \quad (4.6)$$

iv) debido a (3.20 g) y (3.20 h) y a la condición (4.2) se tiene que:

$$\frac{u_S - i}{(\sigma_{SY} + \sigma_{SM} \rho)} = \sum_{h=1}^H \theta_y^{h*} \sigma_y^h; \quad (4.7)$$

v) a partir de (3.20 i) y (3.20 j) y por la condición (4.2) se tiene que:

$$\frac{u_X - i}{(\sigma_{XY} + \sigma_{XM} \rho)} = \sum_{h=1}^H \theta_y^{h*} \sigma_y^h. \quad (4.8)$$

Finalmente, en las condiciones expuestas en (3.20 g) - (3.20 j) se tiene un sistema de ecuaciones con dos incógnitas,  $\theta_s, \theta_x$ , resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} \theta_S^{h*} = \frac{1}{\gamma_4} \{ & (u_S - i)(\sigma_{XM}^2 + 2\sigma_{XY}\sigma_{XM}\rho + \sigma_{XY}^2) - (u_X - i)[\sigma_{XM}(\sigma_{SY}\rho + \sigma_{SM}) \\ & + \sigma_{XY}(\sigma_{SM}\rho + \sigma_{SY})] + \theta_y^h \sigma_y^h \sigma_{XM} [(1-\rho)(1+\rho)(\sigma_{XY}\sigma_{SM} - \sigma_{XM}\sigma_{SY})] \} \end{aligned}$$

y



$$\begin{aligned} \theta_X^{h*} = & \frac{1}{\gamma_4} \left\{ (u_X - i) (\sigma_{SM}^2 + 2\sigma_{SY}\sigma_{SM}\rho + \sigma_{SY}^2) - (u_S - i) [\sigma_{SM}(\sigma_{XY}\rho + \sigma_{XM}) \right. \\ & \left. + \sigma_{SY}(\sigma_{XM}\rho + \sigma_{XY})] + \theta_Y^h \sigma_Y^h \sigma_{SM} [(1-\rho)(1+\rho)] (\sigma_{XM}\sigma_{SY} - \sigma_{XY}\sigma_{SM}) \right\} \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde

$$\gamma_4 = (\sigma_{XY}\sigma_{SM} - \sigma_{XM}\sigma_{SY})^2 (1-\rho)(1+\rho).$$

#### 4.1 Tasa de inflación y nivel de precios de equilibrio

En esta sección, y con los resultados obtenidos en las secciones previas, se determina el nivel de precios de equilibrio. A partir de este resultado se obtendrá la tasa de inflación de equilibrio. Para ello, primero se empleará la condición de equilibrio (4.3), que establece que en equilibrio la oferta monetaria es igual a la demanda de saldos reales, se usará (4.6) y se resolverá para el nivel de precios, de tal forma que se obtiene:

$$\hat{p} = \frac{M(t)i}{(1-\varphi)\delta a(t)}, \quad (4.11)$$

donde  $a(t) = \sum_{h=1}^H a(t)^h$   $a(t) = \sum_{h=1}^H a(t)^h$ . Aplicando lema de Itô a (4.11), se obtiene la tasa de inflación de equilibrio, compuesta por su inflación media esperada de equilibrio (Véase Apéndice A4):

$$\begin{aligned} \hat{\pi}(t) = & \frac{i}{\delta(1-\varphi) - iH} \left\{ u_M + i \sum_{h=1}^H \theta_m^{h*} + (\sigma_{SY} + \sigma_{SM}\rho) \sum_{h=1}^H \left( \frac{u_y^h - i}{\sigma_y^h} \theta_s^{h*} \right) \right. \\ & \left. + (\sigma_{XY} + \sigma_{XM}\rho) \sum_{h=1}^H \left( \frac{u_x^h - i}{\sigma_x^h} \theta_x^{h*} \right) + \xi_2 \right\}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde

$$\xi_2 = (\sigma_{aM} + \sigma_{aY})^2 - \sigma_M(\sigma_{aM} + \sigma_{aY}\rho) - \sum_{h=1}^H \left( \frac{u_y^h - i}{\sigma_y^h} \right) \left( \frac{u_y^h - i}{\sigma_y^h} - (\sigma_{PY} - 2\sigma_{PY}\rho) \right) + H(i + \sigma_{PM}^2 - 2\sigma_{PY}\sigma_{PM}\rho + \sigma_{PY}^2 - \delta\varphi)$$

$$\sigma_{aM} = -\frac{Hi\sigma_M}{\delta(1-\varphi) - iH}$$

$$\sigma_{aY} = \frac{\delta(1-\varphi)\theta_y^* \sigma_y}{\delta(1-\varphi) - iH}$$

y sus respectivas volatilidades:

$$\sigma_{PM} = \frac{\sigma_M i}{\delta(1-\varphi) - iH} \quad (4.12.1)$$

y

$$\sigma_{PY} = \frac{i}{\delta(1-\varphi) - iH} \left( \frac{u_y - i}{\sigma_y} \right) \quad (4.12.1)$$

Como se observa en (4.12), la tasa de inflación depende de factores tanto reales como monetarios; tal como la tasa de crecimiento media esperada de la oferta monetaria,  $u_m$ , de la que es función creciente; lo cual que es consistente con la intuición y evidencia empírica que establece que un choque que afecte de manera positiva la oferta monetaria, conducirá un incremento en el nivel de precios.

Se observa también que la inflación, a través de la inflación media esperada, es función de la tenencia de los activos financieros, el derivado,  $\theta_x^h$ , y el activo riesgoso,  $\theta_x^h$ . Debido a la condición de equilibrio (4.2), que establece que en equilibrio se cumple que la suma de las tenencias de derivados de todos los agentes es cero, un incremento en las tenencias de los activos financiero no tendrá un efecto *per se* sobre la inflación; esto refleja el hecho de que, manteniendo lo demás constante, un incremento (disminución) de una posición larga (corta) en un activo financiero requiere de un incremento (disminución) de una contraparte, posición corta (larga), en la misma proporción.

También se observa que la tasa de inflación es función de la volatilidad, tanto de los derivados como de los activos riesgosos. Este resultado es consistente con la literatura que documenta que la volatilidad de los mercados financieros tiene importantes implicaciones sobre la inflación, tal como en Wagner y Berger (2005) y Beltratti y Morana (2006). El efecto de la volatilidad de los mercados financieros, particularmente del mercado de derivados se puede apreciar de la siguiente forma: i) por la definición de las volatilidades de los instrumentos derivados:  $\sigma_{XY} = \sum_{d=1}^D \sigma_{XY}^d$  y  $\sigma_{XM} = \sum_{d=1}^D \sigma_{XM}^d$ , el incremento en el número de derivados disponibles en la economía, tendrá un impacto sobre la inflación media esperada, a través del incremento en la volatilidad total del mercado de derivados; ii) en una economía en la que el mercado de derivados se encuentre desarrollada, la volatilidad del mercado de derivados incidirá sobre los objetivos de política monetaria en función del signo del múltiplo  $(u_y^h - i/\sigma_y^h)\theta_s^h$ ; es decir, si se cumple que  $(u_y^h - i/\sigma_y^h)\theta_s^h < 0$ , entonces un incremento en la volatilidad global del mercado de derivados provocará una disminución de la tasa de inflación. Este resultado es consistente con los resultados obtenidos por Tytell y Wei (2004) y Spiegel (2008); en cuanto a que existen una relación inversa entre la volatilidad de los mercados financieros y la tasa de inflación.

## 4.2 Calibración del modelo

El modelo se calibra para la economía mexicana. Para lo cual, se tomarán algunos parámetros de datos históricos para México y otros que se ajusten a algunas variables observables; variables que a la vez sean consistentes con parámetros expuestos en la literatura. De manera particular, el experimento consiste en examinar el impacto sobre la tasa de inflación ante cambios en la volatilidad del mercado de derivados. Por simplicidad, se normalizará el número de agentes de la economía a 1, es decir:  $H=1$ .

Los parámetros históricos son tomados de series de tiempo mensuales de México, en el periodo Marzo 2004 a Septiembre 2008; cada serie consiste de 55 observaciones. La razón por la que se tomó este periodo de tiempo es por que la volatilidad del mercado de

derivados es tomada del Índice de Volatilidad en México “VIMEX<sup>®</sup>”, el cual tiene como primera observación el mes de marzo de 2004. Los parámetros son los siguientes:

a)  $i = 0.006$ . La tasa de interés nominal libre de riesgo es el promedio de CETES a 28 días capitalizada a 30 días; tomada de las estadísticas históricas del Banco de México.

b)  $u_M = 0.011$ . La tasa de crecimiento media esperada de la oferta monetaria es tomada, como en Antón (2005), del promedio mensual de la tasa de crecimiento de la base monetaria en México.

c)  $\sigma_M = 0.049$ . La volatilidad de la oferta monetaria es tomada de la volatilidad del promedio mensual de la tasa de crecimiento de la base monetaria en México.

d)  $\sigma_{XY} + \sigma_{XM}\rho = 0.18$ . La volatilidad de los derivados es tomada como el promedio mensual del Índice de Volatilidad en México “VIMEX<sup>®</sup>”, dado a conocer por el Mercado Mexicano de Derivados, MexDer. Este indicador mide la volatilidad implícita de las opciones del IPC listadas en el MexDer en un plazo de 90 días naturales.

e)  $u_y = 0.002$ . La tasa de rendimiento medio esperada de la inversión en el activo físico puede ser vista como una medida de actividad económica, por lo que para esta investigación se tomó el promedio mensual de la tasa de crecimiento del IGAE. Este indicador representó en el 2007 alrededor del 79.6% del PIB. Esta variable es tomada del INEGI.

f)  $\sigma_y = 0.032$ . La volatilidad del proceso productivo es tomada de la volatilidad del promedio mensual de la tasa de crecimiento del IGAE;

g)  $\sigma_{SY} + \sigma_{SM}\rho = 0.050$ . La volatilidad del activo riesgoso es ha tomada del promedio mensual de la volatilidad de la tasa de rendimiento del IPC; el cual tiene como fuente las estadísticas del Banco de México.

Los parámetros que han sido calibrados de tal forma que se ajusten al promedio mensual de la tasa de inflación, en el periodo Marzo 2004 a Septiembre 2008, que es de 0.33%, son los siguientes:

h)  $\delta = 0.042$ . La tasa de descuento subjetiva, que es consistente con por lo encontrado por Antón (2005), la cual es de 0.02 en ese artículo.

i)  $\varphi = 0.45$ . El parámetro que mide la importancia relativa entre el consumo de un bien genérico y la tenencia de saldos reales es igual al que presenta Antón (2005).

Los parámetros que se usarán como parte del experimento son los que miden la proporción de la riqueza destinados a las oportunidades de inversión, y se supondrá que toman los siguientes valores de inicio.

k)  $\theta_m = 0.2$ , la proporción de la riqueza destinada a saldos reales.

l)  $\theta_s = 0.2$ , la proporción de la riqueza destinada al activo riesgoso.

m)  $\theta_x = 0.2$ , la proporción de la riqueza destinada al derivado.

Por conveniencia, todos los parámetros se resumen en la siguiente tabla:

**Tabla 1**

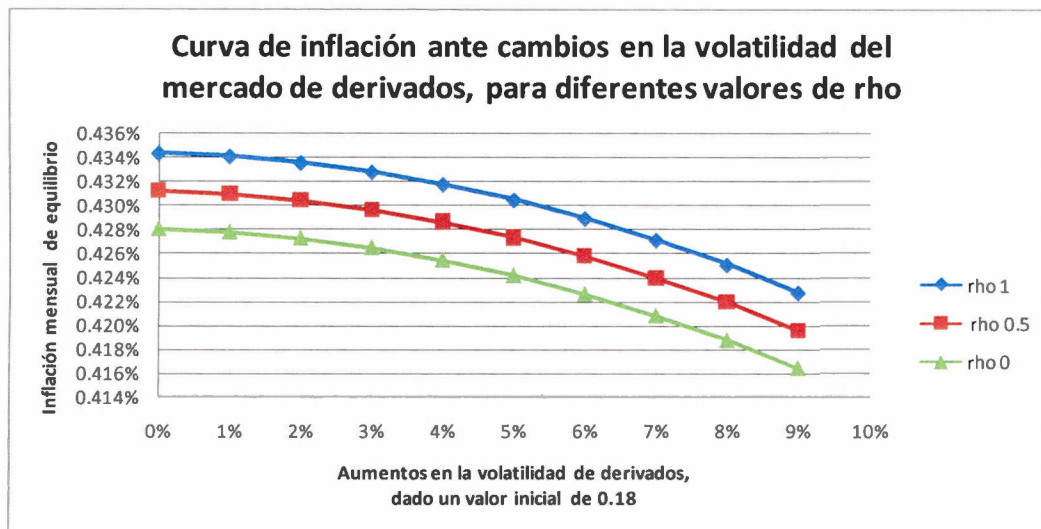
i	$u_M$	$\sigma_M$	$\sigma_{XY}$	$\sigma_{XM}$	$u_y$	$\sigma_y$	$\sigma_{SY}$	$\sigma_{SM}$
0.006	0.011	0.049	0.04	.14	0.002	0.032	0.005	.0219

$\delta$	$\varphi$	$\theta_m$	$\theta_s$	$\theta_x$
0.042	0.45	0.2	0.2	0.2

Dados los parámetros de la tabla 1, en la siguiente figura se presentan curvas de la tasa de inflación de equilibrio, para diferentes valores de rho (la covarianza entre choques monetarios y reales).

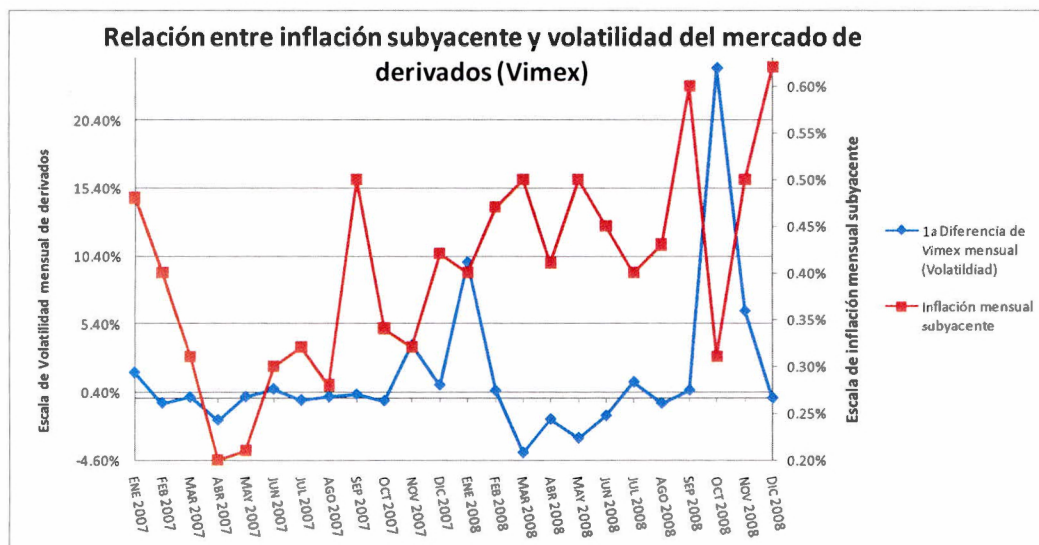
Figura 1



En la Figura 1 se observa la curva de la tasa de inflación mensual de equilibrio, ante aumentos constantes de la volatilidad mensual del mercado de derivados de 1%, dado un valor inicial de la volatilidad del mercado de derivados de 0.18. Se observa que la pendiente de la curva es negativa; es decir, dada la volatilidad inicial de 0.18, si se aumenta en uno por ciento la volatilidad, la tasa de inflación disminuirá y así sucesivamente con aumentos de 1%. Este resultado refleja el hecho de que el premio al riesgo de la inversión total en los activos físicos es negativo. Se observa también que el nivel de la curva es creciente con el parámetro rho, el cual mide la covarianza entre choques monetarios y reales.

Con el fin de complementar estos resultados, a continuación se presenta una figura que muestra las series mensuales históricas tanto de la primera diferencia del índice de volatilidad “VIMEX<sup>®</sup>”, como la tasa de inflación subyacente, para los años 2007 y 2008.

Figura 2



A partir de Enero de 2008 comprende el periodo en el que el régimen de política monetaria pasó del régimen de saldos diarios al objetivo operacional de tasa de interés. Como se observa en la figura 2, a partir de esa fecha existe una clara relación inversa entre el cambio en el índice de volatilidad “VIMEX®” y la inflación subyacente, habiendo un coeficiente de correlación de -58.1% en ese periodo y de -15.4 en el periodo de enero 2007 a diciembre de 2008. Es importante notar que se usó la primera diferencia del “VIMEX®”, debido a que se encontró evidencia estadística de que esta serie es no estacionaria para el periodo de estudio.

## 5. Valuación de derivados de equilibrio

En esta sección se usarán los resultados obtenidos en la sección anterior para obtener el precio de equilibrio de un derivado de precio,  $X(t, S(t))$ ,  $X(t)$  suscrito sobre un activo riesgoso de precio,  $S(t)$ , cuyo proceso fue descrito en (3.5). Para lo cual se aplica el lema de Itô a  $X(t, S)$   $X(t, S(t))$  y se obtiene:

$$dX(t, S(t)) = \left[ \frac{\partial X(t, S(t))}{\partial t} + \frac{\partial X(t, S(t))}{\partial S(t)} u_{S,S(t)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X(t, S(t))}{\partial S(t)^2} S(t)^2 (\sigma_{SY}^2 + 2\sigma_{SY}\sigma_{SM}\rho + \sigma_{SM}^2) \right] dt + \frac{\partial X(t, S(t))}{\partial S(t)} S(t) \sigma_{SY} dW_Y(t) + \frac{\partial X(t, S(t))}{\partial S(t)} S(t) \sigma_{SM} dW_M(t). \quad (5.1)$$

Como en Venegas (2006), definimos ahora:

$$u_X = \frac{1}{X(t, S(t))} \left[ \frac{\partial X(t, S(t))}{\partial t} + \frac{\partial X(t, S(t))}{\partial S(t)} u_{S,S(t)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X(t, S(t))}{\partial S(t)^2} S(t)^2 (\sigma_{SY}^2 + 2\sigma_{SY}\sigma_{SM}\rho + \sigma_{SM}^2) \right], \quad (5.2.1)$$

$$\sigma_{XY} = \frac{1}{X(t, S(t))} \left[ \frac{\partial X(t, S(t))}{\partial S(t)} S(t) \sigma_{SY} \right] \quad (5.2.2)$$

y

$$\sigma_{XM} = \frac{1}{X(t, S(t))} \left[ \frac{\partial X(t, S(t))}{\partial S(t)} S(t) \sigma_{SM} \right]. \quad (5.2.3)$$

De tal forma que, como en (3.6), se obtiene:

$$dX(t, S(t)) = X(t, S(t)) [u_X dt + \sigma_{XY} dW_Y(t) + \sigma_{XM} dW_M(t)].$$

A partir de (4.7) y (4.8) se tiene que:

$$\frac{u_X - i}{\sigma_{XY} - \sigma_{XM}\rho} = \frac{u_S - i}{\sigma_{SY} - \sigma_{SM}\rho}. \quad (5.5)$$

Sustituyendo (5.2) en (5.5) se obtiene:

$$\frac{\frac{\partial X(t, S(t))}{\partial t} + \frac{\partial X(t, S(t))}{\partial S(t)} i S(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X(t, S(t))}{\partial S(t)^2} S(t)^2 (\sigma_{SY}^2 + 2\sigma_{SY}\sigma_{SM}\rho + \sigma_{SM}^2)}{-iX(t, S(t))} = 0. \quad (5.6)$$

Se define ahora a:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_{SY}^2 + 2\sigma_{SY}\sigma_{SM}\rho + \sigma_{SM}^2},$$



entonces (5.6) se convierte en:

$$\frac{\partial X(t, S(t))}{\partial t} + \frac{\partial X(t, S(t))}{\partial S(t)} iS(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X(t, S(t))}{\partial S(t)^2} S(t)^2 \sigma_X^2 - iX(t, S(t)) = 0. \quad (5.7)$$

Como se puede apreciar, (5.7) es la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes (1973). Ahora, junto con las condiciones de frontera final:

$$X(S(t), T) = \max(S(t) - K, 0),$$

donde  $K$  es el precio de ejercicio,  $t$  es la fecha de inicio del contrato y  $T$  es la fecha de vencimiento, la solución de (5.7) determina el precio de equilibrio de una opción europea de compra cuando la condición final es el valor intrínseco del instrumento, y es la siguiente:

$$X(S(t), t, K, T, \sigma_X, u_S, i) = S(t)\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)e^{-i(T-t)}, \quad (5.8)$$

donde

$$\Phi(d) = \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon,$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left[ i + \frac{1}{2} \left( \sigma_{SY}^2 + 2\sigma_{SY}\sigma_{SM}\rho + \sigma_{SM}^2 \right) \right] (T-t)}{\sqrt{\left( \sigma_{SY}^2 + 2\sigma_{SY}\sigma_{SM}\rho + \sigma_{SM}^2 \right) (T-t)}}$$

y

$$d_2 = d_1 - \sqrt{\left( \sigma_{SY}^2 + 2\sigma_{SY}\sigma_{SM}\rho + \sigma_{SM}^2 \right) (T-t)}.$$

Este resultado, es similar a lo encontrado por Lioui y Poncet (2005), cuando el parámetro  $\rho = 0$ . Así mismo, complementa el resultado expuesto en Venegas (2006), en cuanto a que este resultado se cumple tanto en un modelo de equilibrio parcial y como uno de equilibrio general. Una diferencia de lo encontrado en Venegas (2006), es que en esta investigación, las volatilidades del activo subyacente separan el efecto de las variables que afectan la economía.

## 5.1 Simulación

En esta sección se realiza la valuación de una opción europea teniendo como subyacente al IPC, usando como formula de valuación la ecuación (5.8). Con el fin de permitir que los resultados sean consistentes con los de la sección anterior, el periodo de estudio será también de Marzo 2004 a Septiembre 2008. Los parámetros, anualizados, que se tomarán de la **Tabla 1** son los siguientes:

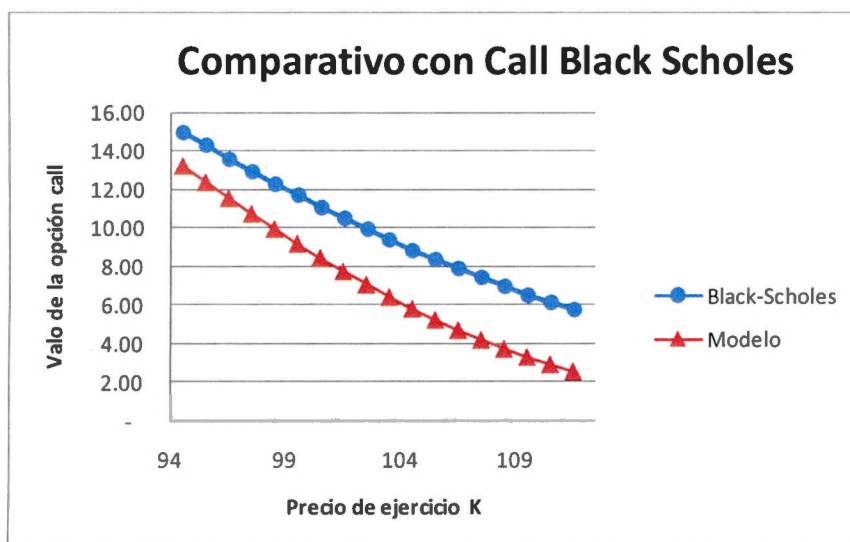
**Tabla 2**

$i$	$\sigma_{SY}$	$\sigma_{SM}$	S(t)	T
.077	0.017	0.076	100	1

donde la tasa de interés nominal,  $i$ , es el promedio anualizado de CETES a 28 días; la volatilidad,  $\sigma_{SY}$ , es tomada como la raíz cuadrada de la covarianza anualizada entre el promedio mensual de la tasa de crecimiento de la base monetaria en México y la tasa de rendimiento del IPC; la volatilidad,  $\sigma_{SM}$ , es tomada como la raíz cuadrada de la covarianza anualizada entre el promedio mensual de la tasa de crecimiento del IGAE y la tasa de rendimiento del IPC.

La siguiente Figura muestra un comparativo del modelo de esta investigación con el mismo modelo Black-Scholes (BS), cuando la volatilidad es tomada como la desviación estándar anualizada de los rendimientos del IPC en el mismo periodo de estudio, que en este caso es de 0.174; y se compara para diferentes valores del precio de ejercicio.

Figura 3



Como se observa, el precio de la opción de este modelo es menor que el precio Black Scholes tradicional. Esto es así debido a que en este documento se ha modelado una economía simplificada, por lo tanto la ecuación (3.5) es una versión simplificada de la siguiente ecuación:

$$dS(t) = S(t)[u_S(t)dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}dW_j(t)], i = 1, \dots, m, \quad (5.9)$$

tal como en Karatzas y Shreve (1998). Es decir, un activo riesgoso está expuesto a diversas incertidumbres, modeladas a través de movimientos brownianos, con sus respectivas volatilidades. En este modelo, por simplicidad se ha supuesto que este activo financiero solo está expuesto a dos riesgos, monetarios,  $W_M(t)$  y reales,  $W_R(t)$ , con sus dos respectivas volatilidades:  $\sigma_{SY}$  y  $\sigma_{SM}$ . Por lo tanto una combinación lineal de estas volatilidades es menor igual que la volatilidad obtenida de la desviación estándar de los rendimientos del IPC.

Sin embargo, esta variación en la forma en que se modela el proceso de difusión asociado al activo financiero no debe cambiar el precio de la opción, con respecto a la que se obtiene con Black Scholes tradicional. La diferencia con respecto al modelo Black-

Scholes tradicional será la obtención desagregada de la sensibilidad del precio de la opción con respecto a la volatilidad, *Vega*.

Considerando lo anterior, a continuación se obtendrá la sensibilidad del precio de la opción ante cambios en las volatilidades,  $\sigma_{SY}$  y  $\sigma_{SM}$ . Para lo cual, se tomará una combinación lineal de la volatilidad de tal manera que se cumpla que la volatilidad anualizada del subyacente sea, siguiendo con el ejemplo, igual a la desviación estándar anualizada de los rendimientos del IPC, que es de 0.174. De esta forma, suponemos que el proceso de difusión que sigue el activo riesgoso satisface:

$$dS(t) = S(t)[u_S(t)dt + \sigma_{SM}dW_M(t) + \sigma_{SY}dW_Y(t) + \sigma_ZdW_Z], \quad (5.10)$$

donde  $W_Z$  es un movimiento browniano que no está correlacionado con  $W_M(t)$  ó con  $W_Y(t)$  y  $\sigma_Z$  es la volatilidad asociada a este movimiento Browniano. Es decir,  $\sigma_Z$  es la volatilidad del subyacente que no es explicada por el modelo presentado en esta investigación, de tal forma que se satisface:

$$\sigma_S = \sqrt{\sigma_{SY}^2 + 2\sigma_{SY}\sigma_{SM}\rho + \sigma_{SM}^2 + \sigma_Z^2} = 0.174 \quad (5.11)$$

Tomando los datos de la Tabla 2, el valor de  $\sigma_Z$  que satisface la ecuación (5.11) es de 0.147. Con estos parámetros y considerando que el precio de equilibrio de una opción europea de compra cuando la condición final es el valor intrínseco del instrumento, es el siguiente:

$$X(S(t), t, K, T, \sigma_S, u_S, i) = S(t)\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)e^{-i(T-t)}, \quad (5.12)$$

donde

$$\Phi(d) = \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon,$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left[ i + \frac{1}{2} \left( \sigma_{SY}^2 + 2\sigma_{SY}\sigma_{SM}\rho + \sigma_{SM}^2 + \sigma_Z^2 \right) \right] (T-t)}{\sqrt{\left( \sigma_{SY}^2 + 2\sigma_{SY}\sigma_{SM}\rho + \sigma_{SM}^2 + \sigma_Z^2 \right) (T-t)}}$$

y

$$d_2 = d_1 - \sqrt{\left( \sigma_{SY}^2 + 2\sigma_{SY}\sigma_{SM}\rho + \sigma_{SM}^2 + \sigma_Z^2 \right) (T-t)}.$$

Así mismo, la sensibilidad del precio de la opción de compra con respecto a cada una de las volatilidades es: (Véase Apéndice A5):

$$\frac{\partial X(t)}{\partial \sigma_{SY}} = Ke^{-i(T-t)} \Phi'(d_2) \frac{\sqrt{T-t} (\sigma_{SY} + \sigma_{SM}\rho)}{\sigma_S} \quad (5.13)$$

donde

$$\Phi'(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d^2}$$

Usando la misma metodología se obtiene:

$$\frac{\partial X(t)}{\partial \sigma_{SM}} = Ke^{-i(T-t)} \Phi'(d_2) \frac{\sqrt{T-t} (\sigma_{SY}\rho + \sigma_{SM})}{\sigma_S} \quad (5.14)$$

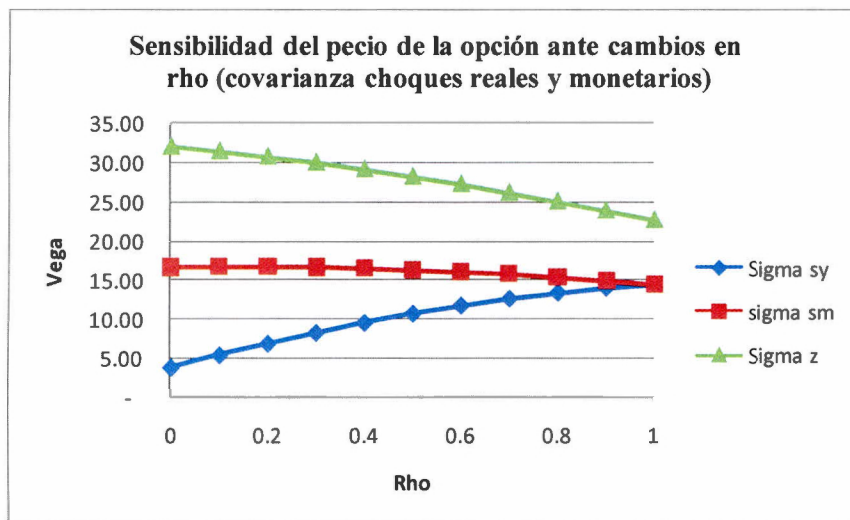
y

$$\frac{\partial X(t)}{\partial \sigma_Z} = Ke^{-i(T-t)} \Phi'(d_2) \frac{\sqrt{T-t} \sigma_Z}{\sigma_S}. \quad (5.15)$$

Como se aprecia, estas ecuaciones son la griega del modelo Black-Scholes tradicional vega, ponderada por la volatilidad. Es decir, entre mayor sea la volatilidad con respecto a la volatilidad total, mayor será la sensibilidad del precio de la opción con respecto a dicha

volatilidad. A continuación se presenta una gráfica en la que se muestra la sensibilidad del precio de la opción ante cambios en cada una de las volatilidades, para diferentes valores de la covarianza entre los choques monetarios y reales,  $\rho$ :

Figura 4



Se puede apreciar que debido a que  $\sigma_{SY}$  aporta menos a la volatilidad total, la sensibilidad del precio de la opción ante cambios en esta volatilidad, es menor. Sin embargo, este valor converge a  $\sigma_{SM}$  cuando la correlación entre los brownianos  $W_M(t)$  y  $W_M(t)$  es igual a uno.

## 6. Conclusiones

Este artículo explora el efecto que el uso creciente de los productos derivados tiene sobre la política monetaria, para ello, a diferencia de lo encontrado en la literatura al respecto, se ha desarrollado un modelo de equilibrio general de una economía monetaria, que se encuentra expuesta al riesgo de mercado. Uno de los resultados principales es la

obtención de una solución analítica para la tasa de inflación de equilibrio, como función de la tenencia de activos financieros, derivados y acciones. Este resultado sustenta, dentro de un marco de equilibrio general, la hipótesis de que en mercados financieros donde el incremento en el uso de derivados es marginal, el efecto sobre el nivel de precios es poco significativo, mientras que en mercados financieros en desarrollo el efecto es mayor.

De manera particular, se ha encontrado que la volatilidad del mercado de instrumentos derivados tendrá un efecto sobre la tasa de inflación. Se ha encontrado también que, bajo ciertas condiciones, un cambio en la volatilidad de los mercados financieros tendrá un efecto benéfico para los objetivos de política monetaria de los Bancos Centrales. Estos resultados sustentan lo propuesto por Semmler y Zhang (2007), en cuanto a que las acciones de política monetaria no deben ignorar el comportamiento de los activos financieros. Se ha calibrado el modelo para México, y se ha encontrado una relación inversa entre la tasa de inflación y la volatilidad del mercado de derivados, particularmente en el periodo en que el régimen de política monetaria pasó del régimen de saldos diarios al objetivo operacional de tasa de interés.

Finalmente, usando las condiciones de equilibrio general, se ha obtenido una ecuación diferencial que satisface el precio de una opción de compra, cuya solución determina el precio de equilibrio la opción europea de compra cuando el derivado se encuentra suscrito sobre un activo riesgoso.

## **Bibliografía**

- Antón, A. (2005). Fiscal reform, long-run growth and welfare in a monetary model: the case of México. *Estudios Económicos*, 20, No. 2, 143-172.
- Bank for International Settlements. (1994). *Macroeconomic and monetary policy Issues raised by the growth of derivatives markets*. BIS Noviembre.
- Bakshi, G. S., y Chen, Z. (1996). Inflation, asset prices, and the term structure of interest rate in monetary economies. *The review of financial studies*, 9, No. 1, 241-275.
- Beltratti, A. y Morana, C. (2006). Breaks and persistency: macroeconomic causes of stock market volatility, *Journal of Econometrics*, 131, 151–177.
- Black, F., y Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81, No. 3, 637-654.

- Cox, J. C., Ingersoll, J. E., y Ross, S. A. (1985 a). An intertemporal general equilibrium model of asset prices. *Econometrica*, 53, No. 2, 363-384.
- Cox, J. C., Ingersoll, J. E., y Ross, S. A. (1985 b). A Theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53, No. 2, 385-408.
- Fender, I. (2000a). Corporate hedging: the impact of financial derivatives on the broad credit channel of monetary policy. *BIS Working paper No. 94*.
- Fender, I. (2000b). The impact of corporate risk management on monetary policy transmission: some empirical evidence. *BIS Working Papers No. 95*.
- Gomez, E., Vasquez, D., y Zea, C. (2005). Derivative Markets' Impact on Colombian Monetary Policy. *Borradores de Economía. Banco de la República Colombia*.
- Hunter, W.C. y Smith, S. D. (2002). Risk management in the global economy: A review essay. *Journal of Banking and Finance*, 26, 205-221.
- Lioui, A., y Poncet, P. (2005). General equilibrium pricing of CPI derivatives. *Journal of Banking and Finance*. 29, 1265-1294.
- Lioui, A., y Poncet, P. (2000). Monetary Analysis In Continuous Time. *Disponible en SSRN: <http://ssrn.com/abstract=340242>*.
- Magill, M., y Quinzii, M. (2002). *Theory of Incomplete Markets, Vol I*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Mies, V., Morandé, F., y Tapia, M. (2002). Política monetaria y mecanismos de transmisión: nuevos elementos para una vieja discusión. *Central Bank of Chile Working Papers, No. 181*.
- Morales, A. (2001). Monetary implications of cross-border derivatives for emerging economies. *IMF Working Paper*, No. 01/58.
- Savona, P., Maccario, A. y Oldani, C. (2002) On monetary analysis of derivatives, *Open Economies Review*, 11, Supplement 1.
- Semmler, W. y Zhang, W. (2007). Asset price volatility and monetary policy rules: A dynamic model and empirical evidence, *Economic Modelling*, 24, 411-430.
- Sidrauski, M. (1967). Rational choice and Patterns of growth in a monetary economy. *American Economic Review*, 57, 534-544.
- Spiegel, M. (2008). Financial globalization and monetary policy discipline, *Working Paper Series*, 2008-10, Federal Reserve Bank of San Francisco.
- Tytell, I. y Wei, S. (2004). Does Financial Globalization Induce Better Macroeconomic Policies." *IMF Working Paper*, 04/84.



Upper, C. (2006). *Derivatives activity and monetary policy*. BIS Quarterly Review, September.

Venegas, F. (2006). *Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. México: Thomson Learning.

Vickery, J. (2008). How and why do small firms manage interest rate risk? *Journal of Financial Economics*, 87, 446–470.

Vrolijk, C. (1997). Derivatives effect on monetary policy transmission. *IMF Working Paper*, No. 97/121.

Wagner, H. y Berger, W. (2005). Globalization, Financial Volatility and Monetary Policy, *Empirica*. 31, No. 2-3.

## Apéndice A1

En este apéndice se determina la diferencial estocástica de acumulación de la riqueza real. Para lo cual, se supone que la riqueza en términos reales,  $a^h(t)$ , de cada individuo está dada por:

$$a^h(t) = y^h(t) + \sum_{n=1}^N s^n(t) + \sum_{d=1}^D x^d(t) + m^h(t) + b(t), \quad (A1.1)$$

donde, dado que  $P^h = 1$ , entonces  $y^h(t) = Y^n(t)/P(t)$  es la ganancia por la inversión en el activo físico, la cual tiene como numerario el índice general de precios;  $s^n(t) = S^n(t)/P(t)$ ,  $x^n(t) = X^n(t)/P(t)$  y  $b(t) = B(t)/P(t)$  son los precios reales de los activos financieros, y  $m^h(t) = M^h(t)/P(t)$  es la demanda de saldos reales. Así mismo, la evolución de la acumulación de la riqueza real sigue la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$da^h(t) = a^h(t) [\theta_y^h dR_y + \theta_s^h dR_s + \theta_x^h dR_x + \theta_m^h dR_m + (1 - \theta_y^h - \theta_s^h - \theta_x^h - \theta_m^h) dR_h], \quad (A1.2)$$

donde:  $\theta_i^h \equiv j^h / a^h$  es la proporción de la riqueza real destinada al activo  $j^h$ ,  $j^h = y^h, m^h$ ; de igual forma, la proporción de la riqueza real destinada al activo riesgoso y al derivado se denotan como:  $\theta_s^h = \sum_{n=1}^N \theta_s^n = \sum_{n=1}^N s^n / a^h$  y  $\theta_x^h = \sum_{n=1}^N \theta_x^n = \sum_{d=1}^D x^d / a^h$ ; y  $dR_k$ , es la tasa de rendimiento real sobre el activo  $k$ ,  $k = S^n, X^d$ ; para lo cual, se ha aplicado el lema de Itô de tal forma que:

$$\begin{aligned} dR_k = \frac{d(k/P)}{k/P} = & \left[ u_k - \pi + \sigma_{PM}^2 - 2\sigma_{PM}\sigma_{PY}\rho + \sigma_{PY}^2 - \sigma_{PM}\sigma_{KY}\rho \right. \\ & + \sigma_{PY}\sigma_{KY} - \sigma_{PM}\sigma_{KM} + \sigma_{PY}\sigma_{KM}\rho \left. \right] dt + [\sigma_{KY} + \sigma_{PY}] dW_Y(t) \\ & + [\sigma_{KM} - \sigma_{PM}] dW_M(t). \end{aligned} \quad (A1.3)$$

De igual forma, el rendimiento estocástico por la tenencia de saldos reales,  $dR_m$ , se obtiene de la aplicación del lema de Itô al cambio porcentual del inverso del nivel de precios:

$$\begin{aligned} dR_m = P(t) d\left(\frac{1}{P(t)}\right) = & \left( \sigma_{PM}^2 - 2\sigma_{PM}\sigma_{PY}\rho + \sigma_{PY}^2 - \pi(t) \right) dt + \\ & \sigma_{PY} dW_Y(t) - \sigma_{PM} dW_M(t). \end{aligned} \quad (A1.4)$$

Además, se tiene que:

$$\begin{aligned} dR_y^h = \frac{d(y^h/P)}{y^h/P} = & \left[ u_Y^h - \pi + \sigma_{PM}^2 - 2\sigma_{PM}\sigma_{PY}\rho + \sigma_{PY}^2 - \sigma_{PM}\sigma_Y^h\rho \right. \\ & + \sigma_{PY}\sigma_Y^h \left. \right] dt + (\sigma_{PY} + \sigma_Y^h) dW_Y(t) - \sigma_{PM} dW_M(t); \end{aligned} \quad (A1.5)$$

Sustituyendo (A1.3)-(A1.5) en (A1.2), se obtiene (3.9).

## Apéndice A2

En este apéndice se determina la ecuación de *Hamilton-Jacobi-Bellman*. Para lo cual, se plantea que la ecuación presentada en (11), conduce a la siguiente relación de recursividad temporal sobre la funcional  $J^h(t, a(t), P(t))$ :

$$J^h(t, a^h(t), P(t)) = \max_{c(t), \theta_y^h, \theta_s^h, \theta_x^h, \theta_m^h} E \left\{ \int_t^{t+dt} e^{-\delta s} [\varphi \ln c^h(t) + (1-\varphi) \ln m^h(t)] ds + \int_{t+dt}^{\infty} e^{-\delta s} [\varphi \ln c^h(t) + (1-\varphi) \ln m^h(t)] ds / \mathfrak{T}_0 \right\}, \quad (\text{A2.1})$$

$$J^h(t, a^h(t), P(t)) = \max_{c(t), \theta_y^h, \theta_s^h, \theta_x^h, \theta_m^h} E \left\{ \int_t^{t+dt} e^{-\delta s} [\varphi \ln c^h(t) + (1-\varphi) \ln m^h(t)] ds + J^h[t+dt, a^h(t) + da^h(t), P(t) + dP(t)] ds / \mathfrak{T}_0 \right\}. \quad (\text{A2.2})$$

Si en esta ultima expresi3n se aplica el teorema del valor medio para integrales en el primer t3rmino y se expande en serie de Taylor el segundo t3rmino, se obtiene:

$$J^h(t, a^h(t), P(t)) = \max_{c(t), \theta_y^h, \theta_s^h, \theta_x^h, \theta_m^h} E \left\{ \int_t^{t+dt} e^{-\delta s} [\varphi \ln c^h(t) + (1-\varphi) \ln m^h(t)] ds + o(dt) + J^h(t, a^h(t), P(t)) + dJ^h(t, a^h(t), P(t)) + o(dt) / \mathfrak{T}_0 \right\} \quad (\text{A2.3})$$

Equivalentemente:

$$0 = \max_{c(t), \theta_y^h, \theta_s^h, \theta_x^h, \theta_m^h} E \left\{ \int_t^{t+dt} e^{-\delta s} [\varphi \ln c^h(t) + (1-\varphi) \ln m^h(t)] ds + o(dt) + dJ^h(t, a^h(t), P(t)) / \mathfrak{T}_0 \right\}. \quad (\text{A2.4})$$

Si se aplica el lema de Itô a  $J(t, a, P)$ , la ecuaci3n anterior se puede escribir:

$$\begin{aligned} 0 = & \max_{c(t), \theta_y^h, \theta_s^h, \theta_x^h, \theta_m^h} E \left\{ e^{-\delta s} [\varphi \ln c^h(t) + (1-\varphi) \ln m^h(t)] + o(dt) + [J_t^h \right. \\ & + J_a^h u_a^h(t) a^h(t) + J_P^h \pi(t) P(t) + \frac{1}{2} J_{aa}^h a^{h^2}(t) (\sigma_{aY}^2 + 2\sigma_{aY} \sigma_{aM} \rho + \sigma_{aM}^2) \\ & + \frac{1}{2} J_{PP} P^2(t) (\sigma_{PM}^2 - 2\sigma_{PY} \sigma_{PM} \rho + \sigma_{PM}^2) + \frac{1}{2} J_{aP} aP(t) (\sigma_{aY} \sigma_{PM} \rho - \sigma_{PY} \sigma_{aM} \rho \\ & + \sigma_{PM} \sigma_{aM} - \sigma_{PY} \sigma_{aY})] dt + (J_a^h a^h(t) \sigma_{aY} - J_P^h P(t) \sigma_{PY}) dW_Y \\ & \left. + (J_a^h a^h(t) \sigma_{aM} + J_P^h P(t) \sigma_{PM}) dW_M / \mathfrak{T}_0 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A2.5})$$

Si se divide la expresión anterior entre  $dt$  y se usa la propiedad de que  $\frac{o(dt)}{dt} \rightarrow 0$   $o(dt)/dt \rightarrow 0$  cuando  $dt \rightarrow 0$   $dt \rightarrow 0$ , y se toma valor esperado de los dos lados de la expresión se obtiene (3.12).

### Apéndice A3

En este Apéndice se obtiene el valor de los parámetros  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$ . Primero, en (3.19) se sustituye el valor del consumo,  $c^h(t) = \varphi a^h(t)/\gamma_1 c^*(t) = \frac{\varphi a(t)}{\beta_1}$ , así como los valores óptimos:  $\theta_y^*, \theta_s^*, \theta_x^*, \theta_m^*, \theta_y^{h*}, \theta_s^{h*}, \theta_x^{h*}, \theta_m^{h*}$ , y se aplica el hecho de que  $m^{h*}(t) = a^h \theta_m^{h*}$ , de tal forma que se obtiene:

$$\begin{aligned}
0 = & \varphi \ln\left(\frac{\varphi a^h(t)}{\gamma_1}\right) + \ln\left(a^h(t)\theta_m^{h*}\right)(1-\varphi) - \delta\gamma_1 \ln(a^h(t)) \\
& + \frac{\gamma_1}{2} \left\{ 2\theta_x^{h*} \left[ u_x - \theta_y^{h*} \sigma_y^h (\sigma_{XY} + \sigma_{XM}\rho) \right] + 2\theta_s^{h*} \left[ u_s - \theta_y^{h*} \sigma_y^h (\sigma_{SY} + \sigma_{SM}\rho) \right] \right\} \\
& + 2\theta_y^{h*} u_y^h - 2i\theta_b^{h*} - \theta_x^{h*2} (\sigma_{XM}^2 + 2\sigma_{XY}\sigma_{XM}\rho + \sigma_{XY}^2) - \\
& \theta_s^{h*2} (\sigma_{SM}^2 + 2\sigma_{SY}\sigma_{SM}\rho + \sigma_{SY}^2) - 2\theta_s^{h*}\theta_x^{h*} [\rho(\sigma_{SY}\sigma_{XM} + \sigma_{SM}\sigma_{XY}) \\
& + \sigma_{SM}\sigma_{XM} + \sigma_{SY}\sigma_{XY}] - (\theta_y^{h*}\sigma_y^h)^2 - 2\pi(t) + \sigma_{PM}^2 - 2\sigma_{PY}\sigma_{PM}\rho + \sigma_{PY}^2 \left\} \\
& - \varphi - \gamma_0\delta.
\end{aligned} \tag{A3.1}$$

Si ahora se elimina la dependencia en  $a^h(t)$  de (A3.1), se obtiene que:  $\gamma_1 = \frac{1}{\delta}$ .

Sustituyendo ahora  $\gamma_1$  en (A3.1) y resolviendo para  $\beta_0$   $\gamma_0$  se obtiene:

$$\begin{aligned}
\gamma_0 \delta = & \varphi \ln(\varphi \delta) + \ln(\theta_m^h)(1-\varphi) + \frac{1}{2\delta} \left\{ 2\theta_x^h \left[ u_x - \theta_y^h \sigma_y^h (\sigma_{XY} + \sigma_{XM} \rho) \right] + \right. \\
& 2\theta_x^h \left[ u_x - \theta_y^h \sigma_y^h (\sigma_{SY} + \sigma_{SM} \rho) \right] + 2\theta_y^h u_y - 2i\theta_b^h \\
& - \theta_x^{h*2} (\sigma_{XM}^2 + 2\sigma_{XY} \sigma_{XM} \rho + \sigma_{XY}^2) - \theta_x^{h*2} (\sigma_{SM}^2 + 2\sigma_{SY} \sigma_{SM} \rho + \sigma_{SY}^2) \\
& - 2\theta_x^h \theta_x^{h*} [\rho(\sigma_{SY} \sigma_{XM} + \sigma_{SM} \sigma_{XY}) + \sigma_{SM} \sigma_{XM} + \sigma_{SY} \sigma_{XY}] \\
& \left. (\theta_y^h \sigma_y^h)^2 - 2\pi + \sigma_{PM}^2 - 2\sigma_{PY} \sigma_{PM} \rho + \sigma_{PY}^2 \right\} - \varphi.
\end{aligned} \tag{A3.2}$$

## Apéndice A4

En este Apéndice se obtiene la tasa de inflación de equilibrio. Para lo cual se aplica primero el lema de Itô a (4.11), de tal forma que:

$$dP = d\left(\frac{M(t)}{a(t)}\right) \frac{i}{(1-\varphi)\delta}, \tag{A4.1}$$

donde

$$da(t)/a(t) = \sum_{h=1}^H u_a^h dt + \sum_{h=1}^H \sigma_{aY}^h dW_Y(t) + \sum_{h=1}^H \sigma_{aM}^h dW_M(t),$$

entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(\frac{M(t)}{a(t)}\right)}{\frac{M(t)}{a(t)}} = & \left[ u_m(t) - u_a(t) + \sigma_{aY}^2 + 2\sigma_{aY} \sigma_{aM} \rho + \sigma_{aM}^2 \right. \\
& \left. - \sigma_{aY} \sigma_M \rho - \sigma_{aM} \sigma_M \right] dt + (\sigma_M - \sigma_{aM}) dW_M(t) - \sigma_{aY} dW_Y(t),
\end{aligned} \tag{A4.2}$$

donde

$$u_a(t) = \sum_{h=1}^H u_a^h(t), \sigma_{aY} = \sum_{h=1}^H \sigma_{aY}^h \text{ y } \sigma_{aM} = \sum_{h=1}^H \sigma_{aM}^h.$$

A partir de la definición en (3.3) del proceso descrito para la tasa de inflación y empleando las condiciones de equilibrio (4.1) y (4.2), se tiene que la tasa de inflación, compuesta por su inflación media esperada:

$$\pi(t) = \frac{i}{(1-\varphi)\delta} \left[ u_m(t) - u_a(t) + \sigma_{aY}^2 + 2\sigma_{aY}\sigma_{aM}\rho + \sigma_{aM}^2 - \sigma_{aY}\sigma_M\rho - \sigma_{aY}\sigma_M \right] \quad (A4.3)$$

así como por sus respectivas volatilidades:

$$\sigma_{PM} = (\sigma_M - \sigma_{aM}) \frac{i}{(1-\varphi)\delta} \quad (A4.4)$$

$$\sigma_{PY} = \sigma_{aY} \frac{i}{(1-\varphi)\delta}. \quad (A4.4.1)$$

De igual forma, el crecimiento medio esperado de la riqueza real es:

$$u_a(t) = H \left( i - \pi + \sigma_{PY}^2 - 2\sigma_{PY}\sigma_{PM}\rho + \sigma_{PM}^2 - \delta\varphi \right) + \sum_{h=1}^H \theta_y^{h*} (\beta_y^h - r_h) - i \sum_{h=1}^H \theta_m^{h*},$$

Las volatilidades de la tasa de crecimiento de la riqueza real son:

$$\sigma_{aM} = -H\sigma_{PM} \quad (A4.6)$$

y

$$\sigma_{aM} = -H\sigma_{PM}. \quad (A4.6.1)$$

Este sistema de seis ecuaciones con 6 incógnitas  $\pi(t), u_a(t), \sigma_{aY}, \sigma_{aM}, \sigma_{PY}, \sigma_{PM}$ , de tal forma que la tasa media esperada de la riqueza real agregada de equilibrio es igual a:

$$\hat{u}_a(t) = \frac{\delta(1-\varphi)}{\delta(1-\varphi) - iH} \left\{ \sum_{h=1}^H \theta_y^{h*} (\beta_y^h - r_h) - i \sum_{h=1}^H \theta_m^{h*} \right. \\ \left. H \left[ i + \sigma_{PY}^2 + 2\sigma_{PY}\sigma_{PM}\rho + \sigma_{PM}^2 - \delta\varphi \right] - i \left[ (\sigma_{aY}^2 + \sigma_{aM}^2) - \sigma_M(\sigma_{aM} + \sigma_{aY}\rho) \right] \right\} \quad (A4.7)$$

las volatilidades de la riqueza real serán:

$$\sigma_{aM} = -\frac{Hi\sigma_M}{\delta(1-\varphi)-iH} \quad (\text{A4.8})$$

y

$$\sigma_{aY} = \frac{\delta(1-\varphi)\theta_y^*\sigma_y}{\delta(1-\varphi)-iH}. \quad (\text{A4.8.1})$$

La inflación media esperada es:

$$\begin{aligned} \pi(t) = \frac{i}{\delta(1-\varphi)-iH} & \left\{ \mu_M(t) - \sum_{h=1}^H \theta_y^h (\beta_y^h - r_h) + i \sum_{h=1}^H \theta_m^h \right. \\ & - H \left[ i + \sigma_{PY}^2 + 2\sigma_{PY}\sigma_{PM}\rho + \sigma_{PM}^2 - \delta\varphi \right] + (\sigma_{aY}^2 + \sigma_{aM}^2) \\ & \left. - \sigma_M(\sigma_{aM} + \sigma_{aY}\rho) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A4.9})$$

volatilidad de la inflación de equilibrio es:

$$\sigma_{PM} = \frac{i\sigma_M}{\delta(1-\varphi)-iH} \quad (\text{A4.10})$$

y

$$\sigma_{PY} = \frac{i\theta_y^*\sigma_y}{\delta(1-\varphi)-iH}. \quad (\text{A4.10.1})$$

Sustituyendo  $\theta_y^h$  y tomando  $\sigma_{aM}$ ,  $\sigma_{aY}$ ,  $\sigma_{PM}$  y  $\sigma_{PY}$  se obtiene (4.12).

## Apéndice A5

En este Apéndice se obtiene la sensibilidad del precio de la opción ante cambios en cada una de las volatilidades. Primero, la derivada del precio de la opción de compra definida en (5.8) es:

$$\frac{\partial X(t)}{\partial \sigma_{SY}} = S(t)\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma_{SY}} - Ke^{-i(T-t)}\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \sigma_{SY}}, \quad (\text{A5.1})$$

donde

$$\frac{\partial d_2}{\partial \sigma_{SY}} = \frac{\partial d_1}{\partial \sigma_{SY}} - \frac{\sqrt{T-t}(\sigma_{SY} + \sigma_{SM}\rho)}{\sigma_S}. \quad (\text{A5.2})$$

Entonces

$$\frac{\partial X(t)}{\partial \sigma_{SY}} = \left( S(t)\Phi'(d_1) - Ke^{-i(T-t)}\Phi'(d_2) \right) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma_{SY}} + Ke^{-i(T-t)}\Phi'(d_2) \frac{\sqrt{T-t}(\sigma_{SY} + \sigma_{SM}\rho)}{\sigma_S};$$

aplicando el hecho de que se cumple que:<sup>3</sup>

$$\left( S(t)\Phi'(d_1) - Ke^{-i(T-t)}\Phi'(d_2) \right) = 0,$$

entonces se obtiene (5.13) y usando la misma metodología se obtiene (5.14) y (5.15).

---

<sup>3</sup> Ver Venegas (2006), capítulo 22.