

**INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY  
CAMPUS ESTADO DE MÉXICO**



**APLICACIÓN DE REDES NEURONALES PARA  
DESARROLLAR UN MODELO DE PRONÓSTICO DE LA  
DEMANDA DE DINERO**

**TESIS QUE PARA OPTAR EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIA DE LA  
COMPUTACIÓN**


**PRESENTA**

**SERGIO ALBERTO BYRD NERI**

**Asesor: MCC. EDGAR VALLEJO CLEMENTE**

**Comité de tesis: Dr. JUAN CORONA BURGUEÑO  
MCC. Ma. de los ANGELES JUNCO REY**

**Jurado: Dr. JUAN CORONA BURGUEÑO  
MCC. Ma. de los ANGELES JUNCO REY  
MCC. EDGAR VALLEJO CLEMENTE**

  
**Presidente  
Secretario  
Vocal**

**Atizapán de Zaragoza, Edo. Méx., Abril de 1998.**

## RESUMEN

El trabajo está dividido en cinco capítulos: en el primer capítulo se presenta una breve reseña histórica de la Fábrica de Billetes del Banco de México así como algunas consideraciones sobre la fabricación de billetes. En el segundo capítulo se presenta una recopilación de las teorías económicas que más se han utilizado para explicar la demanda de dinero en efectivo, se mencionan los aspectos relevantes de las teorías económicas Clásica, Keynesiana y Cuantitativa Moderna y finalmente las consideraciones empíricas que permiten establecer una expresión teórica para pronosticar la demanda de dinero en efectivo en función de los agentes económicos que la determinan. En el tercer capítulo se presenta un modelo econométrico basado en la expresión teórica obtenida en el capítulo dos, el modelo permite obtener un pronóstico de la demanda de dinero en efectivo a partir de las variables económicas que la determinan, se presentan algunos comentarios acerca de las características de las series de tiempo económicas en que se registran dichas variables así como las gráficas correspondientes, finalmente se presenta un breve análisis desde el punto de vista estadístico de los resultados obtenidos con el modelo econométrico. En el cuarto capítulo se presenta el marco teórico en que están basados los modelos de Redes Neuronales Artificiales enfocándolo a las Redes Neuronales con Retropropagación del Error ya que es la topología que se aplicó para construir el modelo de pronóstico de la demanda de dinero en efectivo; se presenta el desarrollo matemático que lleva a establecer las expresiones para calcular las respuestas de las neuronas, el cálculo del error y el algoritmo de retropropagación, adicionalmente se explica la Regla Delta Generalizada aplicada en el algoritmo de retropropagación del error. En el quinto capítulo se describe la metodología para construir dos modelos de Red Neuronal Artificial con Retropropagación del Error: uno para realizar el ajuste a la curva de la demanda de dinero y otro para pronosticar la demanda de dinero en un período específico, todo lo anterior se desarrolla con base al modelo teórico obtenido en el capítulo dos, se aclaran algunas restricciones y transformaciones que fueron necesarias para presentar los datos a las redes y se presentan los resultados en forma gráfica, se analizan brevemente algunos aspectos del desempeño de las Redes Neuronales. Finalmente se presentan las conclusiones del trabajo.

# CONTENIDO

<b>LISTA DE FIGURAS.....</b>	<b>5</b>
<b>LISTA DE TABLAS.....</b>	<b>6</b>
<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>8</b>
<b>1 LA FABRICACIÓN DE BILLETES EN MÉXICO.....</b>	<b>11</b>
1.1 EL BANCO DE MÉXICO.....	11
1.2 LA FABRICACIÓN DE BILLETES COMO INDUSTRIA.....	12
<b>2 LA DEMANDA DE DINERO: MODELO TEÓRICO.....</b>	<b>14</b>
2.1 ENFOQUE CLÁSICO.....	14
2.2 LA TEORÍA KEYNESIANA.....	17
2.3 LA TEORÍA CUANTITATIVA MODERNA.....	18
2.4 LA EVIDENCIA EMPÍRICA.....	21
<b>3 MODELO ECONOMETRICO.....</b>	<b>25</b>
3.1 DEMANDA DE DINERO: UN MODELO ECONOMETRICO.....	25
<b>4 PARADIGMA: REDES NEURONALES ARTIFICIALES CON RETROPROPAGACIÓN DEL ERROR.....</b>	<b>39</b>
4.1 FUNDAMENTO BIOLÓGICO DE LAS REDES NEURONALES ARTIFICIALES.....	40
4.2 SIMULACIÓN DE UNA RED NEURONAL.....	42
4.3 LA RED NEURONAL CON RETROPROPAGACIÓN DEL ERROR.....	44
4.4 ESTRUCTURA DE LA RED NEURONAL CON RETROPROPAGACIÓN.....	47
4.5 FUNCIÓN DE ACTIVACIÓN.....	47
4.6 ENTRENAMIENTO DE LA RED NEURONAL CON RETROPROPAGACIÓN.....	50
4.7 REGLA DELTA GENERALIZADA EN EL ALGORITMO DE RETROPROPAGACIÓN.....	51
4.8 RAZÓN DE APRENDIZAJE EN EL ALGORITMO DE ENTRENAMIENTO.....	59
4.9 IMPLICACIONES AL APLICAR LA REGLA DELTA GENERALIZADA.....	60
4.10 ALGORITMO DE ENTRENAMIENTO DE LA RED NEURONAL CON RETROPROPAGACIÓN.....	61
<b>5 PRONÓSTICO DE LA DEMANDA DE DINERO APLICANDO REDES NEURONALES ARTIFICIALES.....</b>	<b>65</b>
5.1 AJUSTE A LA CURVA DE LA DEMANDA DE DINERO.....	68
5.2 PRONÓSTICO DE LA DEMANDA DE DINERO.....	74
<b>CONCLUSIONES.....</b>	<b>77</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>79</b>

## LISTA DE FIGURAS

Fig. 3.1: Demanda de dinero.....	28
Fig. 3.2: Log(demanda de dinero).....	28
Fig. 3.3: Índice de Precios.....	29
Fig. 3.4: Log(Índice de Precios).....	29
Fig. 3.5: Tasa de Interés.....	30
Fig. 3.6: Log(Tasa de Interés) .....	30
Fig. 3.7: Índice Salarial.....	31
Fig. 3.8: Log(Índice Salarial).....	31
Fig. 3.9: Índice de la Producción.....	32
Fig. 3.10: Log(Índice de la Producción) .....	32
Fig. 3.11: Ajuste a la serie Log(demanda de dinero) .....	34
Fig. 3.12: Ajuste a la serie de la demanda de dinero.....	35
Fig. 3.13: Residuales del ajuste a la serie demanda de dinero.....	35
Fig. 3.14: Residuales estandarizados.....	37
Fig. 4.1: Diagrama simplificado de una neurona.....	41
Fig. 4.2: Representación simplificada de una Red Neuronal Artificial.....	43
Fig. 4.3: Representación conceptual de una Red Neuronal Artificial.....	43
Fig. 4.4: Ejemplo del ajuste de una curva a una serie de puntos.....	44
Fig. 4.5: Representación de una red neuronal con retropropagación.....	45
Fig. 4.6: Entrada y salida de una neurona de la capa de entrada.....	45
Fig. 4.7: Entrada y salida de una neurona de capa oculta.....	46
Fig. 4.8: Estructura general de una Red Neuronal con retropropagación.....	48
Fig. 4.9: Función sigmoideal.....	49
Fig. 4.10: Respuesta de la red neuronal al patrón p.....	52
Fig. 5.1: Configuración de la red para ajustar la curva de la demanda de dinero.....	67
Fig. 5.2: Configuración de la red incluyendo una variable ficticia.....	68
Fig. 5.3: Respuesta de la red con 100 etapas de entrenamiento.....	69
Fig. 5.4: Respuesta de la red con 300 etapas de entrenamiento.....	69
Fig. 5.5: Respuesta de la red con 60,000 etapas de entrenamiento.....	70
Fig. 5.6: Residuales con 60,000 etapas de entrenamiento.....	70
Fig. 5.7: Respuesta de la red con 300,000 etapas de entrenamiento.....	71
Fig. 5.8: Residuales con 300,000 etapas de entrenamiento.....	71
Fig. 5.9: Residuales estandarizados, 300,000 etapas de entrenamiento.....	72
Fig. 5.10: Respuesta de la red con 810,000 etapas de entrenamiento.....	72
Fig. 5.11: Residuales con 810,000 etapas de entrenamiento.....	73
Fig. 5.12: Residuales estandarizados con 810,000 etapas de entrenamiento.....	73
Fig. 5.13: Configuración de la red para pronosticar la demanda de dinero.....	74
Fig. 5.14: Ajuste y pronóstico de la curva de la demanda de dinero.....	75

## LISTA DE TABLAS

Tabla 3.1: Detalle de datos para el modelo econométrico. ....	27
Tabla 3.2: Modelo econométrico: resultados del ajuste a la curva. ....	33

# **INTRODUCCIÓN**

## INTRODUCCIÓN.

*“En un punto, la moneda supera a la criatura viviente: su consistencia metálica, su dureza le asegura una existencia <<eterna>>; es -a no ser por el fuego- difícil de destruir. La moneda no crece hasta alcanzar su tamaño, sale acabada de la matriz y luego ha de seguir siendo lo que es; no debe cambiar. Quizás esta confiabilidad de la moneda sea su característica principal. Del dueño tan sólo depende el guardarla muy bien; no sale corriendo por sí misma como un animal, sólo debe guardársela de los demás. No se está obligado a desconfiar de ella, se la puede utilizar siempre, no tiene caprichos que sea preciso tomar en consideración. Además, cada moneda se autoconsolida aún por su relación con otras de distinto valor. La jerarquía entre las monedas que es estrictamente respetada, las hace aún más próximas a las personas. Se podría hablar de un sistema social de las monedas con clases de rango, que en este caso son clases de valores: por moneda de alto valor bien pueden canjearse otras de menor valor, por una inferior jamás una superior.”<sup>1</sup>*

A lo largo del presente trabajo, en lo que a demanda de dinero<sup>2</sup> se refiere, deberá entenderse como la cantidad de dinero en efectivo que se requiere para satisfacer las necesidades del público, sin importar el hecho de que dicha cantidad llegará finalmente al poder del público conformada de monedas metálicas y de papel moneda o billetes. Por lo anterior, tampoco será importante la composición de denominaciones en las que el dinero llegue al público. Estas consideraciones nos llevan a establecer que las unidades en que se expresa la demanda de dinero es en monto, es decir, se expresa en unidades monetarias y no en número de piezas<sup>3</sup>.

La demanda de dinero por parte del público, refleja en gran medida las condiciones económicas por las que atraviesa un país, por lo tanto, cuando se enfrentan problemas económicos, la demanda de dinero se ve directamente afectada [2] ya que entran en juego las perturbaciones debidas a los cambios repentinos que sufren los factores que intervienen en la dinámica de la

---

<sup>1</sup> Elias Canetti.

<sup>2</sup> *Dinero*: cualquier cosa que por lo general se acepte como medio de liquidación de deudas. En la actualidad, el dinero consiste básicamente en pasivos del gobierno (billetes y monedas) y de los bancos (cuentas bancarias) [8]. Para los fines de este trabajo, cuando se maneje el concepto de dinero, se estará haciendo referencia a los billetes y monedas, es decir, dinero en efectivo.

<sup>3</sup> En el medio financiero, es útil manejar cantidades de dinero expresadas en unidades monetarias o monto, es decir, en pesos. En el medio bancario, es frecuente expresar cantidades de dinero en número de piezas por denominación, de este modo, se conoce tanto el valor en monto, como el volumen de piezas que representa dicha cantidad.

economía. Esto, desde el punto de vista del proceso de fabricación de billetes y monedas, es de suma importancia ya que en la medida en que se pueda pronosticar el comportamiento de la demanda de dinero, se podrá realizar una mejor planeación de los recursos para lograr que dichos productos sean fabricados en las cantidades y tiempos adecuados para poder satisfacer la demanda oportunamente.

Tradicionalmente se ha pronosticado la demanda de dinero mediante modelos econométricos basados en métodos matemáticos; en el presente trabajo se presenta como alternativa un modelo basado en Redes Neuronales Artificiales, simuladas en computadora digital.



# **LA FABRICACIÓN DE BILLETES EN MÉXICO**

# 1 LA FABRICACIÓN DE BILLETES EN MÉXICO.

“El dinero desempeña un importante papel en la economía<sup>4</sup>. Los tipos de interés constituyen un importante determinante del gasto agregado<sup>5</sup> y el banco central, que controla el crecimiento del dinero y los tipos de interés, es la primera institución a la que se acusa cuando la economía atraviesa dificultades”<sup>6</sup>

El dinero en efectivo se conforma de billetes y monedas; los billetes los imprime el Banco de México en su Fábrica de Billetes y la moneda metálica se adquiere de la Casa de Moneda.

## 1.1 EL BANCO DE MÉXICO.

El Banco de México se instituyó durante el periodo de gobierno del General Plutarco Elías Calles. Fue el 25 de agosto de 1925 cuando se promulgó la “Ley Constitutiva del Banco de México” que creó el Banco Único de Emisión y donde se le dio la facultad para emitir billetes “con exclusión de cualquier otra persona o entidad”. Por otra parte, la Ley Orgánica del Banco de México especifica que la institución podrá fabricar sus propios billetes.

Una vez establecido el Banco de México, se inició la primera emisión de billetes con la denominación de cinco pesos, la cual fue puesta en circulación el 1º de septiembre de 1925, fecha en que inició sus funciones este Instituto Central.

La impresión de los billetes se encomendó inicialmente a la empresa American Bank Note Company, que continuó con esta función durante casi cincuenta años. A principios de la década

---

<sup>4</sup> Aquí, el término *economía* no como ciencia sino como conjunto de actividades de una colectividad humana en lo que respecta a la producción y el consumo de las riquezas.

<sup>5</sup> En la teoría macroeconómica se manejan los siguientes términos: *consumo* es el gasto que realizan las familias; *inversión* es el gasto que realizan las empresas; *gasto público* es el gasto que realiza el gobierno. Cuando se hace referencia al gasto total, es decir a los tres tipos de gasto, se le denomina gasto agregado [5].

<sup>6</sup> Citado por Fisher en el capítulo 4 “El Dinero, el Tipo de Interés y la Renta” p. 97 de [1].

de los 60's el volumen de piezas requeridas había aumentado en tal proporción que el Instituto Central determinó que sería costeable la impresión de billetes en México, iniciando así con los estudios y preparativos para que el mismo Banco de México los fabricara.

Finalmente, en 1969, se inauguró la Fábrica de Billetes de México, dependiente del Banco Central y con una capacidad inicial para producir 300 millones de piezas (mdp) anuales. Se inició imprimiendo 50 mdp de una sola denominación y a partir de 1978 ya se imprime el 100% de las necesidades del país. De 1992 a la fecha, ya se tiene capacidad para imprimir 900 mdp anuales<sup>7</sup>.

## **1.2 LA FABRICACIÓN DE BILLETES COMO INDUSTRIA.**

La fabricación de billetes es un tipo de industria que requiere de un alto grado de especialización. El equipo, los insumos, y gran parte del personal que intervienen en el proceso son escasos en el mercado ya que son contados los centros donde se imprime papel moneda.

Los equipos que se requieren para el proceso son de alta tecnología y su mercado es muy reducido; esto hace necesario que se adquieran con algún proveedor extranjero. Asimismo, muchas de las refacciones correspondientes se adquieren de otros países.

De los principales insumos, el papel y la tinta representan aproximadamente el 80% de los costos de producción del billete, los proveedores de estos insumos son contados y muy especializados [2] y, por lo general, son artículos de importación o elaborados en el país con materias primas que en su mayoría son importadas.

Del punto anterior se infiere que la adquisición de los insumos para la fabricación del billete debe ser planeada para evitar incrementar los costos, para no interrumpir la operación del área de producción y, principalmente para satisfacer la demanda de dinero.

---

<sup>7</sup> Datos tomados del estudio especial [2].

# **LA DEMANDA DE DINERO: MODELO TEÓRICO**

## 2 LA DEMANDA DE DINERO: MODELO TEÓRICO.

“No se puede deducir de ningún principio básico qué supuestos acerca del mercado de dinero son los más razonables. Sólo la evidencia empírica permite alcanzar alguna conclusión respecto a qué teoría es la más aceptable.”<sup>8</sup>

El propósito principal de este capítulo es plantear un modelo teórico que nos permita determinar la demanda de dinero en función de los agentes económicos, así como determinar las variables que se utilizan para estimar dichos agentes. Es importante señalar que muchas de las investigaciones y resultados publicados se han obtenido en forma empírica y que existe en la teoría económica una diversidad de enfoques para calcular la demanda del dinero, sin embargo, la gran mayoría de estos parten de dos grandes tendencias o escuelas de pensamiento macroeconómico: los macroeconomistas clásicos y los keynesianos.

La primera escuela postula básicamente que los mercados funcionan mejor si se les deja en libertad mientras que la otra confía en que la intervención del Estado puede mejorar significativamente el funcionamiento de la economía.

### 2.1 ENFOQUE CLÁSICO.

En esta corriente, se formula un análisis sobre el papel del dinero como medio de cambio, sin embargo no se encuadra al problema en el contexto de una teoría de la demanda, sino que da más importancia al concepto de “velocidad-transacciones” de circulación del dinero, es decir, el número de veces que pasa de una mano a otra.

En cada transacción interviene un comprador y un vendedor, por tanto el valor de las ventas debe ser igual al valor de las compras; el valor de las ventas debe ser igual al número de transacciones realizadas durante un periodo de tiempo multiplicado por el precio medio al que se han realizado.

---

<sup>8</sup> Citado por Laidler en la Introducción de [5], p. 9.

Por otra parte, el valor de las compras en ese mismo periodo de tiempo debe ser igual a la cantidad de dinero en circulación en la economía multiplicada por el número medio de veces que éste cambia de mano. Es decir, se tiene la siguiente identidad establecida por Fisher [5], conocida como la “ecuación de cambio”:

$$M_S V_T \equiv PT$$

donde:

- $M_S$  es la oferta de dinero .
- $V_T$  es la velocidad-transacciones.
- $P$  es el nivel de precios para transacciones.
- $T$  es el volumen de transacciones.

Los valores de estas variables se determinan, según Fisher, como sigue :

La cantidad de dinero  $M_S$  es un valor conocido, es decir, se obtiene de alguna otra relación de equilibrio, y es independiente de las otras tres variables.

Asimismo, Fisher considera que el volumen de transacciones  $T$  es un valor conocido, estimado de acuerdo a la actividad económica.

La velocidad de transacciones  $V_T$  es una variable independiente de las demás y es constante una vez alcanzado el nivel de equilibrio.

El valor del nivel de precios  $P$  se obtiene de la interacción de las otras tres variables.

Adicionalmente a estos supuestos, Fisher considera que  $V_T$  y  $T$  son constantes y por tanto,  $P$  depende directamente del valor que tome  $M_S$ , es decir, el nivel de precios está determinado única y proporcionalmente por la cantidad de dinero en circulación:

$$M_S \bar{V}_T = P \bar{T} \quad (2.1)$$

donde los guiones indican que  $V_T$  y  $T$  son constantes.

La igualdad (2.1) es una teoría de la determinación del nivel de precios y es llamada “teoría cuantitativa del dinero”, la cual, puesta en términos de oferta y de demanda, es equivalente al siguiente supuesto del mercado de dinero:

La demanda de dinero  $M_d$  depende del valor de las transacciones realizadas en una economía y es igual a una fracción constante  $k_T$  de dichas transacciones. Por otra parte, la oferta de dinero es un valor dado y, en una situación de equilibrio, la demanda de dinero debe ser igual a su oferta, es decir:

$$M_d = k_T \bar{P} \bar{T} \quad (2.2)$$

$$M_d = M_s \quad (2.3)$$

De (2.1) y sustituyendo (2.3) en (2.2):

$$\frac{M_s}{k_T} = M_s \bar{V}_T = \bar{P}T$$

donde :

$$\bar{V}_T = \frac{1}{k_T}$$

Este enfoque trata de explicar la demanda de dinero en términos de la necesidad que los individuos tienen de comerciar entre sí, por tanto, existe una relación directa con el volumen de comercio existente en una economía, dicho de otra forma, conduce directamente a una teoría macroeconómica que parte del siguiente planteamiento :

¿Qué es lo que determina la cantidad de dinero que se necesita en una economía para realizar un volumen dado de transacciones?.

Por otro lado existe un enfoque desarrollado en Cambridge que parte del siguiente planteamiento:

¿Qué es lo que determina la cantidad de dinero que un individuo quiere poseer? dado que su interés en realizar transacciones hace que la posesión de dinero sea realmente deseable.

Es decir, el problema se plantea en términos microeconómicos, entrando en juego factores tales como la restricción y el costo de oportunidad de mantener dinero ya que se trata de un activo que conviene mantener por ser universalmente aceptado en el intercambio de bienes y servicios. Se supone que un individuo no puede mantener todo el dinero que desea pero, a más transacciones que tenga que realizar, tanto más dinero deseará mantener. Por un lado existe la limitante de no poder exceder a su propia riqueza total, por otro lado, hay formas alternativas de posesión de activos, muchas de las cuales ofrecen ventajas que no ofrece el dinero de tal forma que a partir de cierto punto es preferible sacrificar parte de la conveniencia de mantener dinero a cambio de la posibilidad de realizar ganancias de capital; dicha posibilidad incluye también tener pérdidas, esto no es ajeno al dinero ya que ocurre algo similar en épocas de fluctuaciones del nivel de precios.

Esto significa que la demanda de dinero no sólo depende del volumen de transacciones que un individuo piensa realizar, sino que también depende del nivel de su riqueza y del costo de oportunidad de mantener dinero. Asimismo, hablando en términos nominales de dinero, éste variará en forma proporcional con el nivel de precios: si los precios de los bienes y servicios aumentan, entonces también tiene que incrementarse en la misma proporción la cantidad de dinero que un individuo ha de mantener si quiere lograr la misma satisfacción de bienes y servicios.

El enfoque de Cambridge, trabajo desarrollado por Marshall y Pigou sobre la teoría de la demanda de dinero, el cual se analiza en [5] supone que para un individuo su nivel de riqueza, el

volumen de transacciones y el nivel de renta se mantienen en una proporción relativamente estable, al menos a corto plazo. Así, se afirma que la demanda de dinero en términos nominales es proporcional al nivel de renta<sup>9</sup> nominal de cada individuo, y por ello, también de la economía agregada, dado que lo demás permanece constante, llegando finalmente al siguiente modelo :

$$M_d = kPy$$

donde  $y$  representa el nivel de renta nominal del individuo.

Y combinando con la condición de equilibrio (2.3) del mercado de dinero se tiene que:

$$M_s = kPY$$

$$\frac{M_s}{k} = M_s V = PY$$

donde,  $V$  representa la velocidad-renta, esto es, la tasa de circulación con respecto a la tasa de producción de la renta real,  $Y$  es la renta nacional.

De los enfoques expuestos, se puede observar que el trabajo de Fisher es cuestionable porque no menciona el costo de oportunidad de mantener dinero, lo cual está relacionado directamente con la tasa de interés. Por otro lado, aunque la función de demanda de dinero de Cambridge no incluye explícitamente a la variable tasa de interés, sí menciona la necesidad de contemplar el costo de oportunidad de mantener dinero, marcando así la pauta para investigar otras variables que pueden ser determinantes en la demanda de dinero.

## 2.2 LA TEORÍA KEYNESIANA.

En [5], Laidler analiza el trabajo realizado por Keynes sobre la demanda de dinero, dicho trabajo, parte del enfoque de Cambridge pero analiza con más detalle los motivos que inducen a la gente a mantener dinero y la conveniencia de poseerlo.

Keynes postula que el nivel de transacciones realizada por los individuos está en relación directa con el nivel de renta, es decir, la demanda-transacciones de dinero es proporcional al nivel de renta. Asimismo, describió la necesidad de conservar disponibilidades en efectivo con el fin de cubrir la brecha entre los ingresos y los gastos regulares planeados; a todo esto lo llamó “motivo transacciones”.

---

<sup>9</sup> *Renta*: excedente del pago total a un factor de producción (por ejemplo: tierra, trabajo o capital) sobre sus pagos de transferencia totales [8].

Se considera que el consumo es una función creciente de la renta disponible [5].



También sugirió que la gente consideraría prudente mantener dinero en efectivo para atender pagos que no son regulares ni planeados pero que requieren de rapidez suficiente para poderlos llevar a cabo, por ejemplo: pagos inesperados, compras de oportunidad, emergencias, etc. A esto lo llamó “motivo precaución” la cual también dependería en general del nivel de renta.

En el desarrollo de su trabajo, Keynes considera que la demanda de dinero originada por el “motivo transacciones” y el “motivo precaución” no está totalmente determinada respecto al nivel de renta, ya que advirtió que la conveniencia que se puede obtener manteniendo dinero se podría compensar con los ingresos al poseer otros activos, por lo que la demanda de dinero también estaría en función de la tasa de interés. Respecto a la tasa de interés, Keynes considera que su efecto principal se debía buscar en el papel que representa en la llamada “demanda especulativa” del dinero; por tanto, esta variable no tuvo un papel importante en el desarrollo de su análisis sobre la demanda de dinero; sin embargo en su modelo incluye el nivel de riqueza la cual es una proporción de los activos totales que una economía procurará mantener en dinero y esto de acuerdo a otro análisis de Keynes sobre la posesión de otros activos, refleja la demanda especulativa del dinero.

Finalmente Keynes plantea su modelo de la siguiente forma:

$$M_d = [kY + \lambda(r)W]P$$

donde:

- $W$  es la riqueza real.
- $kY$  representa los saldos de transacciones y de precaución.
- $r$  es la tasa de interés.
- $\lambda(r)W$  fracción de la riqueza real que representa a los saldos especulativos.

## 2.3 LA TEORÍA CUANTITATIVA MODERNA.

Existe otra corriente de pensamiento conocida como Teoría Cuantitativa Moderna que toma como punto de partida para su análisis a la teoría general de la demanda, la cual fue, de algún modo, parte del enfoque que se le dio en el análisis de Cambridge. La obra de Friedman, también analizada en [5] describe ampliamente las bases de esta teoría cuya principal contribución a la teoría monetaria consiste en apartar la atención de los motivos que inducen a la gente a mantener dinero y analiza con más detalle los factores que determinan la cantidad de dinero que la gente desea mantener: se considera al dinero como a cualquier otro bien duradero al que se le construye un modelo de su demanda, planteado de tal forma que permita comparar sus predicciones con la evidencia empírica.

Friedman postula que el dinero, al igual que cualquier otro activo, proporciona un flujo de servicios al individuo que lo posee. Asimismo, sin mencionar cuales son las necesidades que

satisfacen, advierte que estos servicios provienen del hecho de que el dinero es una fuente fácilmente disponible de poder de compra en comparación con otro tipo de activos.

También postula que cuanto más dinero se mantiene, tanto menos valiosos serán los servicios prestados por el dinero respecto a otros servicios prestados por otros activos.

En cuanto a la posesión de activos, Friedman establece que la riqueza es una restricción y por tanto también es restricción de la demanda de dinero. A su vez, hace un análisis generalizado de la riqueza en cuanto a que incluye el valor actual de la renta de trabajo, o como suele llamarse, la riqueza humana, argumentando que la renta procedente de cualquier fuente puede considerarse como un rendimiento de la riqueza; sin embargo también aconseja hacer una distinción entre la riqueza humana y la no humana ya que esta última se puede comprar, vender y sustituir casi sin límite. Sin embargo, abolida la esclavitud, no hay un mercado de capital humano y por tanto no hay posibilidad de sustitución directa y total entre el capital humano y el no humano, aunque menciona que en cierto grado sí la hay ya que un individuo siempre está en libertad de vender un activo no humano y dedicar el producto de la venta a su educación para incrementar su poder de ganancia o, por el contrario, puede descuidar su educación para acumular riqueza no humana. De esta forma surge, en el contexto de la demanda de dinero un nuevo problema al cuestionarse si la riqueza no humana será mejor restricción de la posesión de dinero que la riqueza total y lo soluciona postulando que, dados los problemas que surgen debido a la falta de un mercado de riqueza humana, se podría considerar una variable en función de la razón entre la riqueza humana y la no humana, esperando que para un nivel dado de riqueza total, cuanto mayor sea su componente humano, mayor será la demanda de dinero para compensar la falta de un comercio de riqueza humana.

En cuanto a la posesión de dinero también establece que su costo de oportunidad es la renta que se gana poseyendo otros activos. A este respecto menciona que el cambio de una tasa de rendimiento provocará que cambien todas las demás, y puesto que las tasas de rendimiento de los diversos activos fluctúan conjuntamente hasta alcanzar su equilibrio, la función de demanda de dinero se puede simplificar en gran medida seleccionando sólo una tasa representativa de ellas. Por otro lado, analiza la tasa de rendimiento de poseer dinero desde el punto de vista del nivel de precios: si el nivel de precios aumenta, el valor real de los fondos en dinero disminuye y viceversa.

Friedman concluye que la tasa de cambio esperada del nivel de precios se debe interpretar como una tasa de rendimiento esperado de la posesión de dinero y que por tanto, si permanece constante todo lo demás, entre la tasa de rendimiento esperado por la posesión de dinero y la cantidad poseída del mismo, existe una relación directa. De esta forma Friedman le da mucha importancia a la tasa de cambio esperada del nivel de precios para su función de demanda de dinero, siendo esta la siguiente :

$$M_d = f\left(W, r - \frac{1}{r} \frac{dr}{dt}, \frac{1}{P} \frac{dP}{dt}, h\right) P$$

en la cual, expresa en forma funcional la dependencia de la demanda de dinero respecto a las variables consideradas en los párrafos anteriores:

$M_d$	es la demanda de dinero.
$W$	es la riqueza.
$r - \frac{1}{r} \frac{dr}{dt}$	es la tasa de cambio de la renta que se gana al poseer otros activos.
$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt}$	es la tasa de cambio esperada del nivel de precios.
$h$	es la razón entre la riqueza humana y no humana.
$P$	es el nivel de precios.

con las siguientes restricciones a las relaciones entre las variables:

$$\frac{\partial M_d}{\partial \left[ r - \left( \frac{1}{r} \right) \left( \frac{dr}{dt} \right) \right]} < 0$$

esto es, permaneciendo constante todo lo demás, cuanto mayor sea el rendimiento del resto de los activos, menor será la cantidad demandada de dinero.

$$\frac{\partial M_d}{\partial \left[ \left( \frac{1}{P} \right) \left( \frac{dP}{dt} \right) \right]} < 0$$

es decir, permaneciendo constante todo lo demás, cuanto mayor sea la tasa de variación de los precios, menor será la cantidad demandada de dinero.

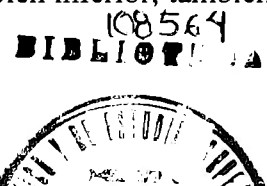
$$\frac{\partial M_d}{\partial P} = f \left( W, r - \frac{1}{r} \frac{dr}{dt}, \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} \right)$$

lo cual significa que permaneciendo constante todo lo demás, cuanto mayor sea el nivel de precios, la demanda de dinero será proporcionalmente mayor.

$$\frac{\partial M_d}{\partial h} > 0$$

esto es, permaneciendo constante todo lo demás, cuanto mayor sea la razón entre la riqueza humana y no humana, mayor será la demanda de dinero.

Finalmente, cuando el dinero es un bien normal, en el sentido opuesto al de bien inferior, también tendremos que:



$$\frac{\partial M_d}{\partial W} > 0$$

es decir, permaneciendo constante todo lo demás, cuanto mayor sea el nivel de riqueza, mayor será la demanda de dinero .

En esta teoría, además de especificar variables potencialmente determinantes de la demanda de dinero, se especifica también el signo que es de esperar que tenga la relación entre la demanda de dinero con dichas variables.

## 2.4 LA EVIDENCIA EMPÍRICA.

En los apartados anteriores de este capítulo se han tratado algunos de los modelos teóricos que existen para calcular la demanda de dinero, sin embargo la evidencia empírica juega un papel determinante para establecer el modelo adecuado para cierta economía. En este apartado se mencionarán las variables que han tenido un papel importante en los análisis empíricos y que permiten obtener un modelo adecuado para la demanda de dinero.

Se ha comprobado que el nivel de renta es una buena aproximación del volumen de transacciones de la economía, asimismo la medición de esta variable plantea pocos problemas, ya que todas las series que se han utilizado para medirla como el producto nacional bruto, el producto nacional neto y en determinados casos el producto interno bruto, muestran que su evolución es tan similar que no se producen resultados sensiblemente diferentes independientemente de cuál sea la variable elegida.

Para medir el costo de oportunidad se requiere de una variable que refleje el rendimiento que puede obtenerse por la posesión de activos distintos al dinero. Existe una teoría que ha demostrado ser la más satisfactoria en cuanto a la estructura de los plazos; se apoya en la proposición de que el mercado tiende a igualar el rendimiento esperado durante el periodo de tenencia de activos de diferente vencimiento: los rendimientos que se obtienen en una semana poseyendo obligaciones a largo plazo, tienden a ser iguales a los que se ganan con activos que poseen todos los posibles vencimientos. En cualquier caso, el periodo de tenencia incluye las ganancias y pérdidas de capital que se realicen durante el mismo. Por otro lado, el periodo de posesión planeado de dinero es corto, es decir, las decisiones de mantener dinero no obligan al tenedor de una manera irrevocable durante periodos de tiempo largos, entonces el rendimiento esperado de diversos activos durante un periodo de tenencia corto será el costo de oportunidad de la posesión de dinero.

Otra variable del costo de oportunidad de poseer dinero es la tasa de inflación, ya que tanto el dinero como los activos distintos al dinero, cuyas tasas de rendimiento se utilicen como variables del costo de oportunidad, son activos nominales cuyo valor real se deprecia con la inflación. En consecuencia, cuando se espera un proceso inflacionario, los individuos estarán poco dispuestos a

poseerlos a menos que la tasa de rendimiento sea ajustada al alza para compensar la erosión esperada del valor de capital real debida a la inflación.

De acuerdo a lo anterior, se debe tener en cuenta que posiblemente existe una interdependencia entre la tasa de inflación y la variable tasa de interés, lo cual influirá en los resultados de aquellos trabajos que consideren que la tasa de interés y la tasa de inflación influyen simultáneamente en la demanda de dinero.

Finalmente, de acuerdo con los trabajos más recientes sobre la evidencia empírica, se puede postular que la función de demanda de dinero puede ser escrita como :

$$\frac{M_d}{P} = hY^{\beta_1} r^{\beta_2} \quad (2.4)$$

donde:

$M_d$	es la cantidad demandada de dinero
$P$	es el nivel de precios
$Y$	es el nivel de renta
$r$	es la tasa de interés
$\beta_1$	es la "elasticidad-nivel de renta" <sup>10</sup> de la demanda de dinero y
$\beta_2$	es la "elasticidad-interés" de la demanda de dinero.

La estimación de las elasticidades se obtiene utilizando una transformación logarítmica de las variables y ajustando la función.

Para las elasticidades se espera que su valor sea :

$$\frac{1}{2} \leq \beta_1 = \frac{\partial \log(M_d)}{\partial \log(Y)} \leq 1$$

y

$$\beta_2 = \frac{\partial \log(M_d)}{\partial \log(r)} < 0$$

En particular, para la economía en México, se ha comprobado que la producción capta el nivel de renta  $Y$ , así como una aproximación del nivel de transacciones que se realiza.

En cuanto a la tasa de interés  $r$  en México se considera como representativa la tasa de los Certificados de la Tesorería o Cetes a un plazo de 28 días.

---

<sup>10</sup> El término *elasticidad* se emplea en economía para describir la variación porcentual que experimenta cierta variable respecto a la variación de 1 por 100 que experimente otra.

Para fines de estimación es necesario transformar la expresión estructural del modelo, para lo cual, a (2.4) se le aplica logaritmo y se obtiene :

$$\log(M_d) = \log(b) + \beta_1 \log(Y) + \beta_2 \log(r) + \log(P)$$

En el caso de la demanda de dinero en México, se tiene evidencia de que el salario es una variable que resulta de gran importancia dado que una gran proporción de la población no tiene acceso al sistema bancario, utilizando los billetes y monedas como una forma de ahorro a corto plazo y por otro lado, para los asalariados la relación entre su gasto y su ingreso se deduce directamente del salario real y no de forma indirecta a través de la producción.

Al incluir la variable del salario, se tiene además la ventaja de separar los efectos que, sobre la demanda de billetes y monedas, tienen los asalariados de los que tienen las empresas.

Finalmente se puede escribir el modelo como sigue:

$$\log(M) = \beta_0 + \beta_1 \log(Y) + \beta_2 \log(r) + \beta_3 \log(P) + \beta_4 \log(S) \quad (2.5)$$

donde:

$M$	es la cantidad demandada de dinero.
$Y$	es el nivel de la renta.
$r$	es la tasa de interés.
$P$	es el nivel de precios.
$S$	es el salario.

Los datos de las variables que intervienen en este modelo se obtendrán a partir de indicadores económicos, ya que estos últimos se registran en forma sistemática y son representativas de los datos que se requieren, de este modo tenemos que:

La cantidad demandada de dinero  $M$  se estimará a partir de la cantidad de billetes y monedas en poder de sectores no bancarios.

El nivel de la renta  $Y$  se estimará a partir del índice del volumen de la producción industrial.

La tasa de interés  $r$  se estimará a partir de la tasa de rendimiento de los certificados de la Tesorería a un plazo de un mes.

El nivel de los precios  $P$  se estimará a partir del índice nacional de precios al consumidor.

El salario  $S$  se estimará a partir del índice de salarios e ingresos medios en el sector de la industria manufacturera.

# **MODELO ECONOMÉTRICO**

### 3 MODELO ECONOMÉTRICO.

*“La posesión de dinero en efectivo es para el tenedor un inventario del medio de intercambio y, como sucede con el inventario de una mercancía, el efectivo se posee porque puede ser entregado en el momento apropiado, sirviendo entonces como parte de un convenio de intercambio. Entonces podemos esperar que la teoría de inventarios y la teoría monetaria puedan aprender la una de la otra”<sup>11</sup>*

En el presente apartado se describe un modelo econométrico<sup>12</sup>, empleado para ajustar la curva de la demanda de dinero, algunos aspectos de los datos con que se realiza, los resultados obtenidos y algunos aspectos sobre los indicadores estadísticos que resultan.

#### 3.1 DEMANDA DE DINERO: UN MODELO ECONOMÉTRICO.

Para la estimación de la demanda de billetes y monedas en poder del público se utilizó el método de mínimos cuadrados ordinarios<sup>13</sup> para ajustar el siguiente modelo:

$$\log(M_t) = \beta_0 + \beta_1 \log(Y_t) + \beta_2 \log(r_t) + \beta_3 \log(P_t) + \beta_4 \log(S_t) + \beta_5 POL_t + \sum \beta_i D_{it} + \varepsilon_t \quad (3.1)$$

donde:

$t$	indica el mes al que corresponden los datos.
$M_t$	es la demanda de dinero.
$Y_t$	es el índice del volumen de la producción industrial.
$r_t$	es la tasa de rendimiento a un mes de los cetes.

<sup>11</sup> Citado por Baumol en p. 545 de [3].

<sup>12</sup> *Econometria*: aplicación de técnicas matemáticas y estadísticas a los problemas de economía [7].

<sup>13</sup> El método de mínimos cuadrados ordinarios, así como las pruebas que se aplican a los datos de este modelo econométrico, están basados en el uso del análisis de la regresión y de la correlación. Se trata de un método muy conocido para ajustar relaciones funcionales a los datos, sin embargo, en este trabajo no se entrará en detalles al respecto, para un estudio más profundo del método así como de la interpretación de los indicadores, se puede consultar [7] y [9].



$P_t$	es el índice nacional de precios al consumidor.
$S_t$	es el índice salarial e ingresos medios.
$POL_t$	variable para captar la influencia de un factor ajeno.
$D_{it}$	variable ficticia para captar la estacionalidad.
$\varepsilon_t$	es el término del error.

Este modelo se obtuvo a partir de la expresión (2.5) y se ha incluido un término de error y dos variables ficticias: POL y D. Se puede observar que las variables en el modelo varían con el tiempo  $t$ ; en particular, se trata de datos mensuales.

En algunos periodos, la demanda de dinero está afectada por factores adicionales tales como los medios de pago alternativos: cuentas de cheques y tarjetas de crédito o por programas de gasto gubernamental muy concentrados; para captar estas influencias se ha introducido la variable ficticia POL, la cual tendrá el valor de 1 para los meses de julio de 1994 a diciembre de 1994 y en cualquier otro caso será 0<sup>14</sup>. Por otro lado, dado que la demanda de dinero es diferente en cada mes del año, se ha incluido la variable ficticia D para identificar el mes al que pertenecen los datos; ésta variable se conforma de once dígitos cuyos valores serán cero si el mes a representar es diciembre y en cualquier otro caso, sólo un dígito podrá tener valor de uno, dependiendo del mes a representar, siendo el primer dígito para representar el mes de enero, el segundo para febrero, etc.

Los datos de las variables que intervienen en el modelo se obtuvieron de los Indicadores Económicos publicados por el Banco de México; se consideró solamente el periodo de Enero de 1983 a Mayo de 1995; los datos se integraron en un libro de trabajo en Excel v4.0 de Microsoft en un equipo personal Olivetti M4. Se realizó un proceso de transformación a los datos aplicando logaritmo base 10 a las variables que así lo requerían, lo que resulta en un cambio de escala no uniforme. La tabla siguiente muestra un aspecto de los datos que se aplicaron al modelo.

---

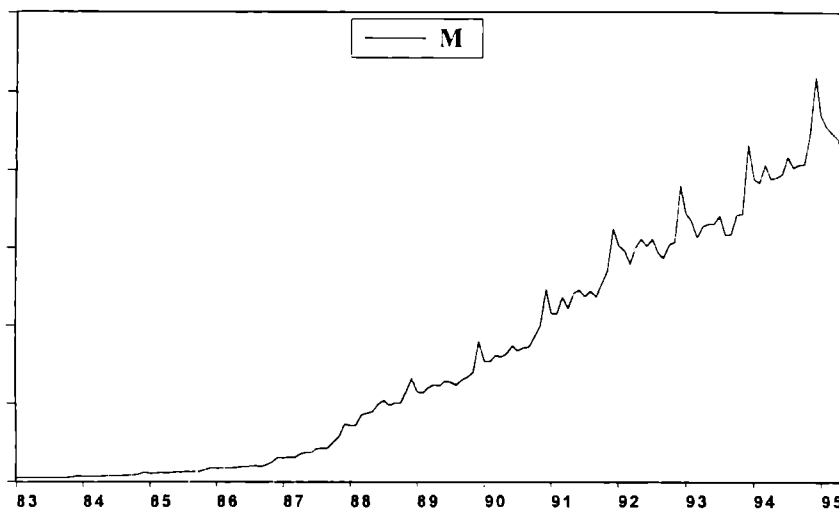
<sup>14</sup>Como se indica en el texto, un factor ajeno al modelo que influye en el comportamiento de la demanda de dinero es el gasto gubernamental muy concentrado. En este modelo, se introduce la variable ficticia *POL* para captar la influencia del gasto gubernamental que se presentó con el Programa PROCAMPO: el valor 1 indica que para dicho periodo se tiene identificado que existe la influencia de dicho factor; el valor 0 indica que no existe dicha influencia para el periodo en cuestión.

**Tabla 3.1: Detalle de datos para el modelo econométrico.**

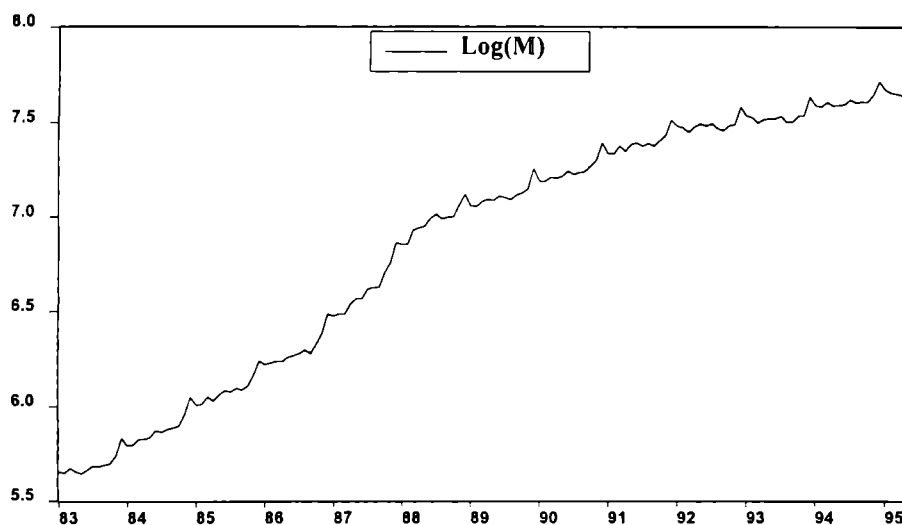
Datos Mensuales : Enero de 1983 - Mayo de 1995

Año	Mes	Log (M)	Log (P)	Log (Y)	Log (S)	Log(r)	POL	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	D11
19831		5.6540	0.1139	1.9930	1.5	1.73	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19832		5.6469	0.1139	1.9731	1.5	1.76	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19833		5.6721	0.1461	2.0004	1.5	1.79	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
19834		5.6544	0.1761	1.9983	1.5	1.78	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
19835		5.6442	0.1761	1.9926	1.5	1.78	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
19836		5.6631	0.2041	1.9773	1.5	1.77	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
19837		5.6836	0.2304	1.9754	1.5	1.77	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
19838		5.6807	0.2304	1.9827	1.5	1.77	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
19839		5.6894	0.2553	1.9643	1.5	1.75	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
198310		5.6962	0.2788	1.9836	1.5	1.74	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
198311		5.7370	0.3010	1.9836	1.5	1.74	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
198312		5.8312	0.3010	1.9800	1.6	1.74	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19841		5.7913	0.3424	1.9948	1.5	1.73	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19842		5.7947	0.3617	2.0069	1.5	1.71	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19843		5.8237	0.3802	2.0282	1.5	1.67	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
19844		5.8255	0.3979	1.9930	1.5	1.67	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
19845		5.8367	0.4150	2.0154	1.5	1.71	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
19846		5.8726	0.4314	2.0124	1.5	1.71	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
...		...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
19941		7.5886	1.9877	2.1183	1.6	1.02	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19942		7.5835	1.9899	2.1052	1.6	0.98	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19943		7.6088	1.9921	2.1332	1.6	0.99	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
19944		7.5886	1.9943	2.1386	1.6	1.20	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
19945		7.5909	1.9965	2.1258	1.6	1.21	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
19946		7.5959	1.9987	2.1278	1.6	1.21	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
19947		7.6203	2.0004	2.1055	1.6	1.23	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
19948		7.6052	2.0026	2.1329	1.6	1.16	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
19949		7.6091	2.0056	2.1265	1.6	1.14	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
199410		7.6098	2.0077	2.1342	1.6	1.13	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
199411		7.6470	2.0103	2.1565	1.6	1.14	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
199412		7.7149	2.0141	2.1520	1.7	1.27	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19951		7.6719	2.0298	2.1355	1.6	1.57	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19952		7.6576	2.0481	2.0969	1.6	1.62	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19953		7.6504	2.0730	2.1159	1.6	1.84	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
19954		7.6433	2.1062	2.0734	1.5	1.87	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
19955		7.6244	2.1239	2.0821	1.5	1.77	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

La Tabla 3.1 muestra que los datos están registrados ordenadamente a intervalos de tiempo fijos; este tipo de información se conoce como series de tiempo. En particular, por tratarse de datos de características económicas, se les denomina series de tiempo económicas. Esta forma de recopilación cronológica de datos es frecuentemente aplicada para registrar información acerca de características económicas con fines de análisis para llevar a cabo planeación y toma de decisiones<sup>15</sup>; las siguientes gráficas<sup>16</sup> muestran las curvas correspondientes tanto de los datos originales, como de los datos transformados de las series de tiempo económicas que se consideraron para el modelo.



**Fig. 3.1: Demanda de dinero**



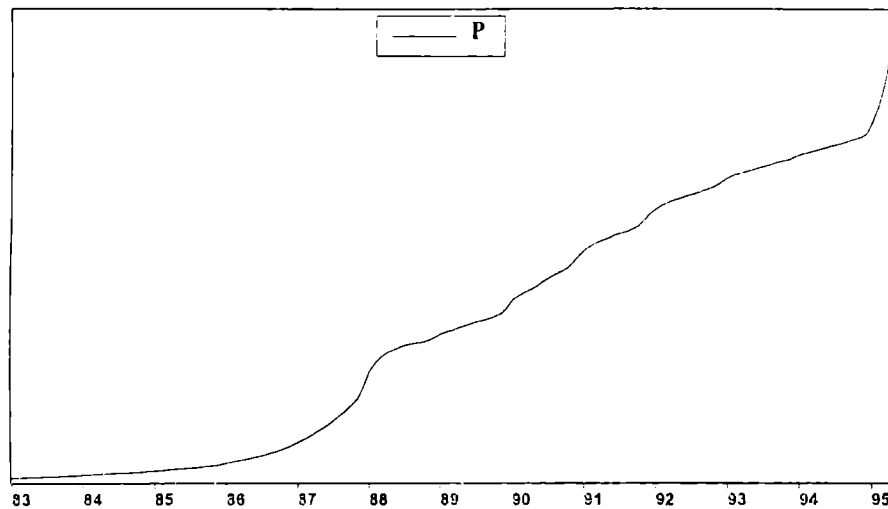
**Fig. 3.2: Log(demanda de dinero)**

En la gráfica de la Figura 3.1 se observa que la demanda de dinero a lo largo del periodo en cuestión presenta una tendencia; también muestra fluctuaciones que se repiten anualmente con

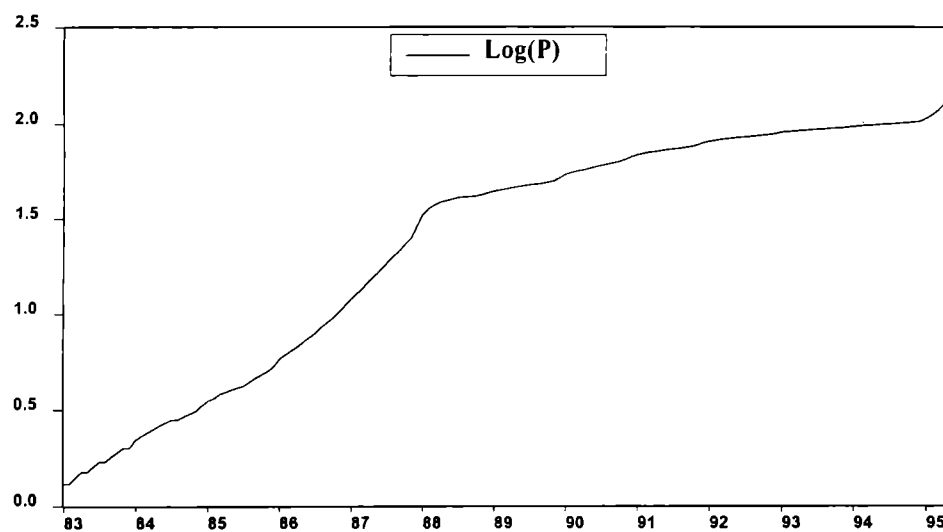
<sup>15</sup> Para un análisis detallado de los métodos estadísticos y matemáticos que se aplican a las series de tiempo puede consultar [9].

<sup>16</sup> Dada la naturaleza de la información en algunas gráficas no se muestran los valores de la escala vertical.

cambios graduales a través de los años. Por lo anterior, la serie de la demanda de dinero, es un buen ejemplo de lo que se conoce como una serie de tiempo estacional; es decir, existe un marcado comportamiento que se puede asociar a la estación o periodo de tiempo de que se trate, en este caso, es claro que la demanda de dinero crece considerablemente en los meses de diciembre. En la gráfica de la Figura 3.2 se observa un comportamiento similar aunque en menor grado, en general, al aplicar el operador Log, se realiza un cambio de escala no uniforme y además, las características se suavizan.



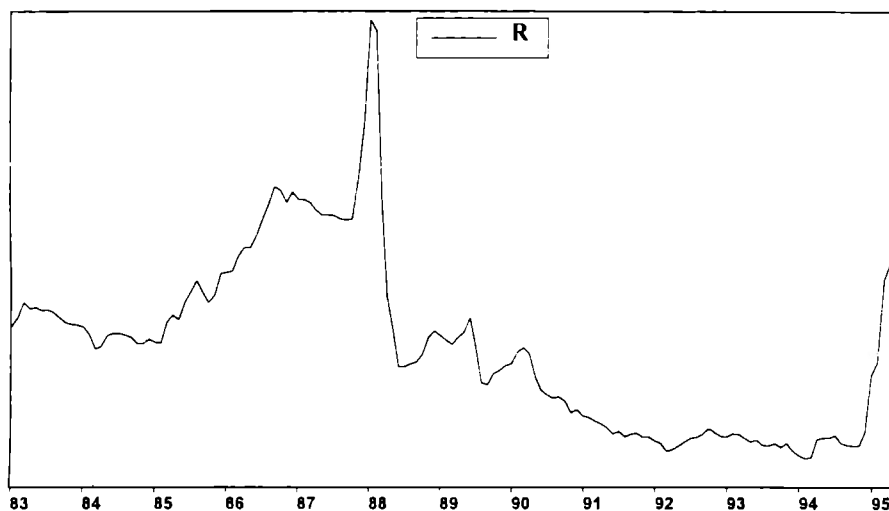
**Fig. 3.3: Índice de Precios**



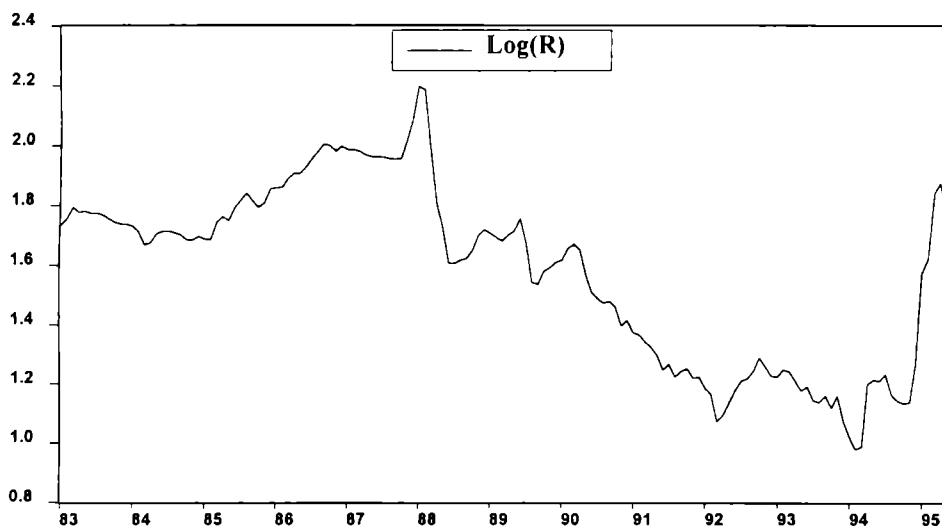
**Fig. 3.4: Log(Índice de Precios)**

En cuanto a la evolución de los precios, la gráfica de la Figura 3.3 muestra para el periodo en cuestión una marcada tendencia que refleja la continua escalada de precios; no se aprecia a simple vista si existe estacionalidad.

En la gráfica de la Figura 3.4 se puede apreciar el suavizamiento de la curva provocado por la aplicación del operador Log.

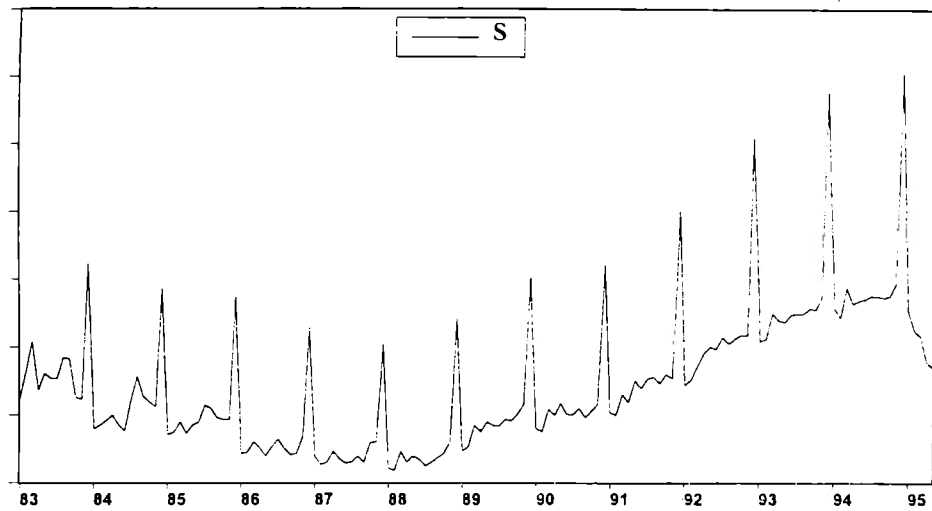


**Fig. 3.5: Tasa de Interés**

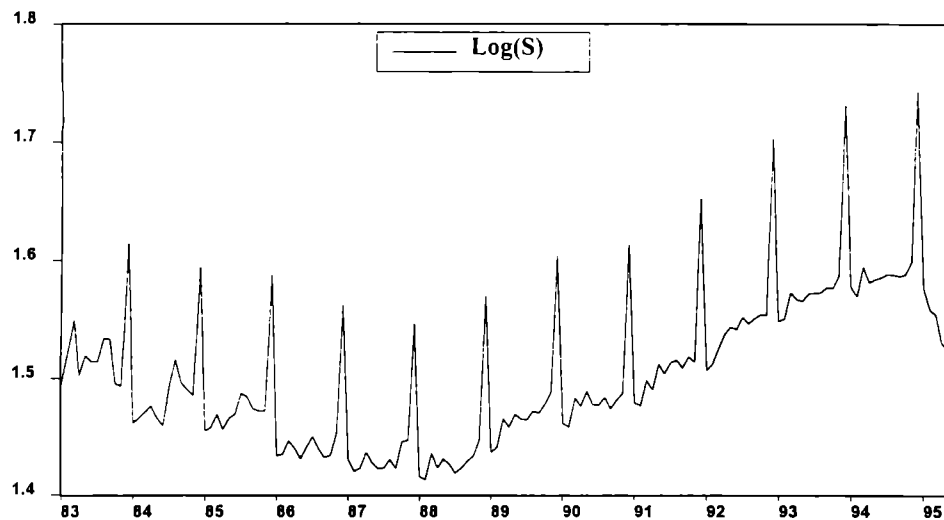


**Fig. 3.6: Log(Tasa de Interés)**

Las gráficas de las Figuras 3.5 y 3.6 muestran que la tasa de interés, al igual que el resto de las variables económicas, ha sufrido fuertes cambios; durante el periodo considerado se pueden identificar dos tendencias: de 1983 y hasta 1987 se tuvo en general una tendencia positiva, es decir, la tasa de interés tendía a incrementarse, mientras que a partir de 1988 y hasta 1994, la tasa de interés muestra en general una tendencia negativa. Asimismo, se puede observar que dichas tendencias coinciden con dos sexenios de gobierno, esto bien podría reflejar las preferencias en cuanto a las políticas económicas seguidas por el gobierno en curso. Finalmente, se puede observar que existen algunas fluctuaciones.



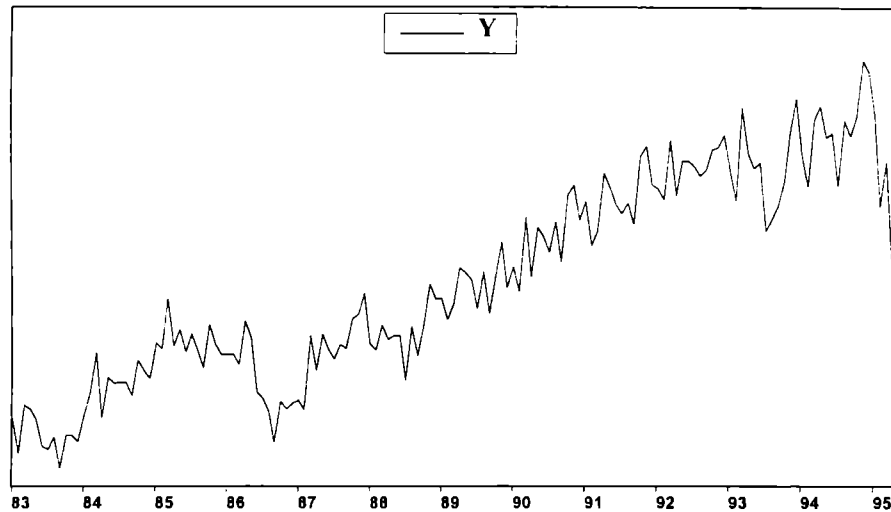
**Fig. 3.7: Índice Salarial**



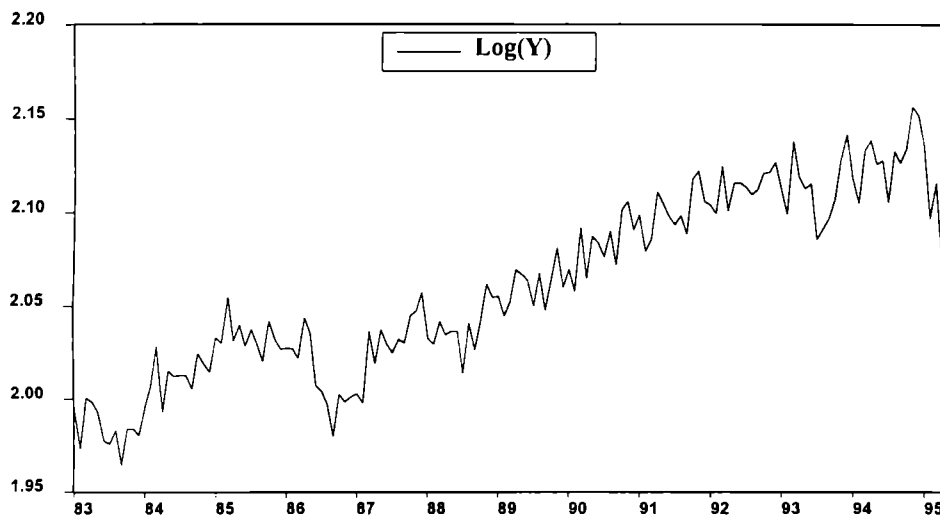
**Fig. 3.8: Log(Índice Salarial)**

Las gráficas de las Figuras 3.7 y 3.8 muestran que el índice salarial presenta una marcada estacionalidad para los meses de diciembre, también presentan estacionalidad entre los meses de marzo y abril, aunque en mucho menor grado que la que se presenta en el mes de diciembre.

En cuanto a las fluctuaciones, el índice salarial presenta para los meses de diciembre un fuerte incremento porque refleja en gran medida el hecho de que para ese periodo se realiza el pago de prestaciones, en especial el pago del aguinaldo o gratificación para una gran proporción de la población asalariada.



**Fig. 3.9: Índice de la Producción**



**Fig. 3.10: Log(Índice de la Producción)**

Las gráficas de las Figuras 3.9 y 3.10 corresponden al índice de la producción industrial, el cual se considera un buen estimador del nivel de la renta. En el capítulo dos se mencionó que pueden existir varias formas de estimar el nivel de la renta, y esto es porque hay más de una serie económica que lo refleja, por ejemplo, se podría haber utilizado la serie del producto interno bruto; sin embargo, esta serie no se consideró pues esa variable se registra con una periodicidad trimestral y para nuestro caso se requieren series de datos con periodicidad mensual. Las gráficas muestran que la serie del índice de la producción industrial presenta tendencias, por otro lado, no es apreciable a simple vista si la serie también presenta estacionalidad.

Para realizar el ajuste a la curva de la demanda de dinero, se utilizó el paquete E-views<sup>17</sup> y se obtuvieron los siguientes resultados:

**Tabla 3.2: Modelo econométrico: resultados del ajuste a la curva.**

	Coefficiente	Estadístico-T	Probabilidad
Constante	3.198027	12.01041	0
LOGP	0.975693	134.0989	0
LOGPIB	0.453534	3.419718	0.0008
LOGSR	0.947998	14.23276	0
LOGTI	-0.059921	-4.411927	0
POL	0.023528	2.199778	0.0296
D1	0.083365	6.514172	0
D2	0.073132	5.842812	0
D3	0.05093	4.106272	0.0001
D4	0.051917	4.19107	0.0001
D5	0.045434	3.662174	0.0004
D6	0.05094	4.005028	0.0001
D7	0.044016	3.543125	0.0005
D8	0.023655	1.903227	0.0592
D9	0.021717	1.739222	0.0843
D10	0.025593	2.013629	0.0461
D11	0.042799	3.390691	0.0009

Debido a que no es finalidad de este trabajo entrar en detalles en cuanto a la interpretación de los resultados obtenidos en el modelo econométrico, sólo se mencionarán algunos aspectos relevantes del mismo. Para realizar un análisis más profundo tanto del modelo como de los resultados, se podrá consultar [7] y [9] o cualquier literatura especializada en el tema.

Como parte de los resultados al realizar el ajuste del modelo se obtienen los estadísticos T, los cuales son valores que nos dan elementos de juicio para asumir alguna de las siguientes hipótesis:

$$H_0: \beta_j = 0 ; \quad H_a: \beta_j \neq 0$$

es decir, si el valor del estadístico T que se obtenga para la variable asociada al coeficiente  $\beta_j$  es menor o igual a cierto valor esperado, se rechazará la hipótesis nula y por tanto, se aceptará la hipótesis alternativa, lo cual permite afirmar que existe evidencia para suponer que la variable en cuestión sí contribuye a explicar a la variable dependiente; por el contrario, si dicho valor es mayor al valor esperado, se acepta la hipótesis nula y se dice entonces que existe evidencia de que

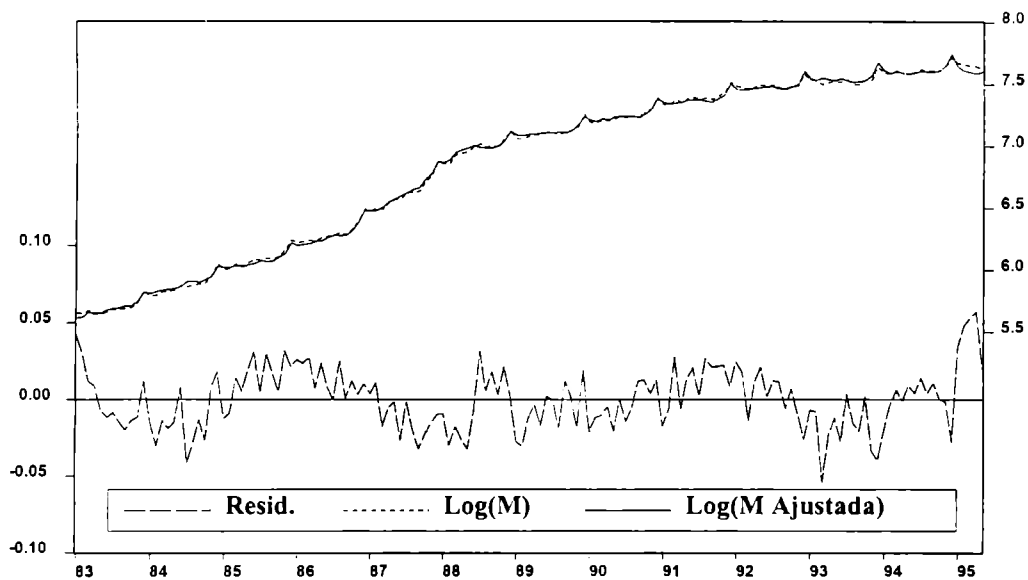
<sup>17</sup> Micro TSP for Windows v1.1c de Quantitative Micro Software



la variable en cuestión no contribuye a explicar a la variable dependiente; en cualquier caso, se debe mencionar que la hipótesis se acepta para dicho valor esperado, el cual se conoce como nivel de confianza; para nuestro caso, el modelo se ajustó considerando un nivel de confianza del 95%.

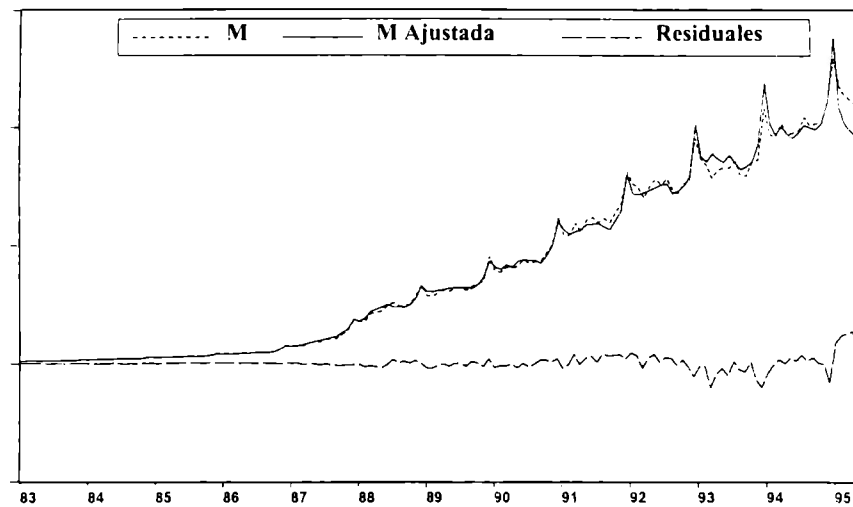
De acuerdo con los resultados obtenidos para el estadístico T en la Tabla 3.2, se puede observar que en general las variables que se consideraron para ajustar la curva de la demanda de dinero, excepto dos, resultaron significativas con un nivel de confianza de 95%. Por su parte, la probabilidad de 0.0843 para el valor del estadístico T obtenido para la variable estacional  $D_9$ , nos indica que existe evidencia para suponer que dicha variable no aporta información relevante para el modelo, es decir, la variable de estacionalidad que identifica al mes de septiembre, no tiene influencia significativa para ajustar la demanda de dinero que se presenta precisamente en los meses de septiembre; algo similar, aunque en menor grado, se puede decir de la variable de estacionalidad  $D_8$  que representa al mes de agosto, dado que la probabilidad para el valor del estadístico T para esta variable es de 0.0592.

Adicionalmente a los datos mostrados en la Tabla 3.2, se obtuvieron los siguientes resultados gráficos:



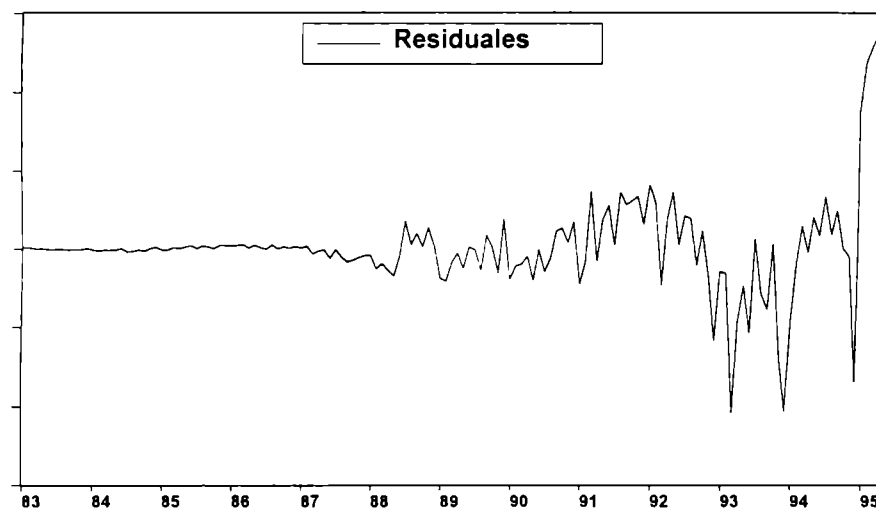
**Fig. 3.11: Ajuste a la serie Log(demanda de dinero)**

En la gráfica de la Figura 3.11 se muestran las series  $\text{Log}(M)$  de la demanda de dinero, la serie  $\text{Log}(M \text{ Ajustada})$ , y la serie correspondiente a los residuales; estos resultados se encuentran en escala logarítmica. Para obtener los datos en escala real, se aplica el operador potencia base 10 a ambas series de datos y se obtienen nuevamente los residuales. Estos resultados se muestran en la siguiente gráfica:



**Fig. 3.12: Ajuste a la serie de la demanda de dinero**

En la gráfica de la Figura 3.12, se puede observar que la estimación de la demanda de dinero parece aceptable; sin embargo, para un mejor diagnóstico, es necesario realizar una serie de pruebas a los residuales; que es la serie resultante al tomar la diferencia entre los valores reales y los ajustados. Es decir, los residuales representan el error de ajuste, en la siguiente gráfica se muestran los residuales:



**Fig. 3.13: Residuales del ajuste a la serie demanda de dinero**

Al ajustar un modelo lineal a la serie de la demanda de dinero, se espera que dicha variable quede determinada por las variables explicativas, más una variación aleatoria que no puede ser explicada por el modelo, de tal forma que al realizar el ajuste a la serie, se alcance una buena aproximación de ella. Esta aproximación, será más cercana al valor real en la medida en que las variaciones se comporten como ruido blanco, lo cual es evidencia para suponer que las variables

explicativas contienen la información suficiente y que los residuales son valores no medibles y no atribuibles a la falta de información por variables no incluidas en el modelo.

En los modelos de regresión lineal, se parte del supuesto de que los residuales se distribuyen como una distribución normal con media  $\mu = 0$  y varianza  $\sigma^2$ , por lo anterior, se desprende la importancia del análisis de los residuales, donde básicamente las pruebas que se efectúan son precisamente para determinar si los residuales se distribuyen como una distribución normal con media cero y varianza  $\sigma^2$ .

Para tal fin, se plantea la hipótesis de normalidad para los residuales, y para probar dicha hipótesis, se aplicó la prueba de Jarque-Bera. Si la hipótesis nula se aceptara, lo cual equivaldría a afirmar que existe evidencia para suponer que los residuales se distribuyen como una variable normal, a un nivel de significancia  $\alpha$ , y que dichos residuales tienden a ser ruido blanco, podríamos afirmar que las variables independientes consideradas explican totalmente a la variable dependiente; lo anterior no sucedió para el modelo en cuestión y se rechazó la hipótesis de normalidad.

Otra característica por probar en los residuales es la autocorrelación serial. El que exista autocorrelación serial, significa que los valores que toma la variable dependiente, no sólo dependen de las variables independientes con las que se realiza la regresión, sino que además depende de valores que esta variable dependiente ha tomado en el pasado. La presencia de autocorrelación serial en los residuales es una característica no deseable ya que implica que no son aleatorios ya que contienen elementos de información del comportamiento de la variable dependiente en el pasado, y en el modelo deberán agregarse rezagos de dicha variable como otra variable independiente. Para el modelo en cuestión se planteó la hipótesis nula de autocorrelación a los residuales; se aplicó la prueba de Ljung-Box y se encontró que hay evidencia de autocorrelación en los residuales.

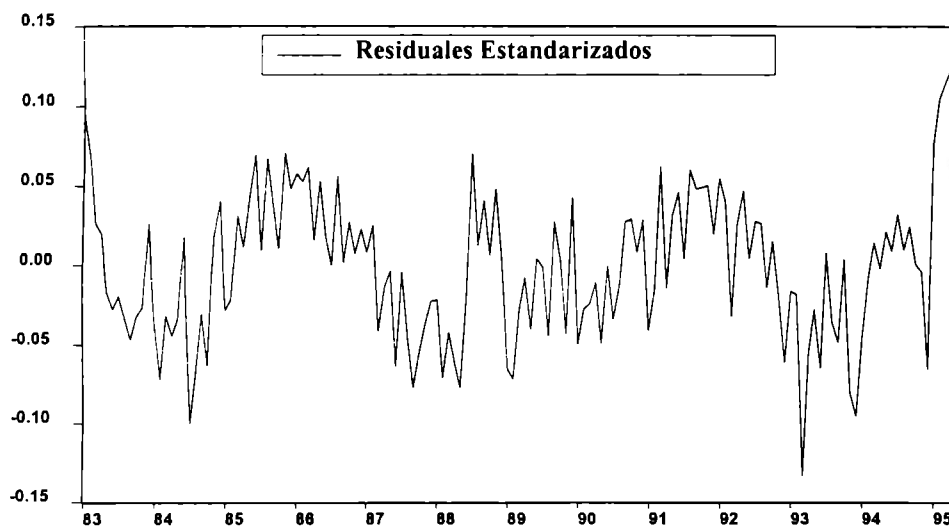
Otra característica a analizar en los residuales es la varianza en el periodo considerado y se espera que dicha varianza sea constante, en cuyo caso se tendrían residuales homocedásticos; por el contrario, si la varianza no es igual en todo el periodo, se tienen residuales heterocedásticos. Para probar esta característica, se aplicó la prueba de Golfeld-Quandt de homocedasticidad y se encontró que hay evidencia de heterocedasticidad en las varianzas de los residuales.

Por otra parte, si en el modelo existieran variables explicativas con un comportamiento muy similar, se dice que hay evidencia de que existe multicolinealidad entre ellas; las variables multicolineales no aportan mayor información al modelo que la que pudiera aportar solamente una de ellas, en el peor de los casos, cuando existen variables explicativas idénticas el modelo no se puede resolver debido a que la resolución del método de mínimos cuadrados requiere de la inversión de una matriz; si existen dos o más variables cuyo comportamiento es idéntico, esto implica que en dicha matriz existirán al menos dos vectores linealmente dependientes, por lo que la matriz es singular y no es posible obtener su matriz inversa. En la práctica casi siempre existe la multicolinealidad entre las variables. Aunque no exista dependencia total de una variable con respecto a otra, habrá cierto grado de multicolinealidad con el sólo hecho de que estas variables se muevan hacia la misma dirección. Por lo anterior, se infiere que la multicolinealidad no es un

problema de existencia para el modelo, es más bien un problema de grado. Para verificar el grado de multicolinealidad en el modelo, se aplicó la prueba del factor de inflación de la varianza y se encontró evidencia de multicolinealidad.

De acuerdo con los resultados anteriores, no se puede decir que el modelo econométrico no sea adecuado; sin embargo, considerando que no cumple con los supuestos bajo los cuales se construyó, deberán realizarse más consideraciones para el modelo como incluir rezagos de la variable dependiente.

Cabe la aclaración de que los residuales que se muestran en la gráfica de la Figura 3.14, tienen un patrón de comportamiento que a simple vista nos indican problemas ya que la magnitud de los errores crece conforme pasa el tiempo; lo anterior, se debe en gran parte a que la curva de la demanda de dinero, tiene una tendencia a crecer. Para que los residuales sean congruentes con el comportamiento de la demanda de dinero, se puede obtener la gráfica de los residuales estandarizados, esto es, que los residuales se expresen con un mismo factor de escala; de este modo, los residuales estandarizados reflejarán el error porcentual respecto al valor real, esto se muestra en la siguiente gráfica:



**Fig. 3.14: Residuales estandarizados**

En la gráfica de la Figura 3.14 podemos apreciar que los residuales estandarizados en general están contenidos en una banda de  $\pm 10$  por ciento del valor real.

**PARADIGMA: REDES NEURONALES ARTIFICIALES  
CON RETROPROPAGACIÓN DEL ERROR**

## 4 PARADIGMA: REDES NEURONALES ARTIFICIALES CON RETROPROPAGACIÓN DEL ERROR.

*“Para empezar con las máquinas que aprenden: un sistema organizado puede definirse como aquél que transforma un cierto mensaje de entrada en uno de salida, de acuerdo con algún principio de transformación . Si tal principio de transformación está sujeto a cierto criterio de validez de funcionamiento , y si el método de transformación se ajusta a fin de que tienda a mejorar el funcionamiento del sistema de acuerdo con ese criterio, se dice que el sistema aprende.”<sup>18</sup>*

En el capítulo anterior se describió un modelo econométrico para pronosticar la demanda de dinero; este modelo está basado en ajustar una curva por el método de mínimos cuadrados ordinarios, que es un método matemático tradicional. La aplicación de métodos matemáticos para desarrollar modelos macroeconómicos puede llegar a ser extremadamente compleja considerando que, por lo general, en este tipo de problemas entran en juego una gran variedad de interrelaciones no lineales entre los factores que intervienen. Aún cuando se consideren sólo algunos de estos factores, las interrelaciones entre ellos pueden llegar a ser demasiado complejas como para ser descritas en su totalidad con modelos matemáticos, y esta dificultad aumentará en la medida en que se requiera incluir más factores en el modelo; por lo anterior, es necesario contar con herramientas adicionales que complementen la construcción de estos modelos.

Como opciones para la resolución de este tipo de problemas se pueden considerar las técnicas que se han desarrollado en Inteligencia Artificial; en particular, las Redes Neuronales Artificiales, cuya capacidad para identificar patrones no lineales entre conjuntos de valores, las convierten en una herramienta con potencial en el área financiera.

---

<sup>18</sup> Definición que Norbert Wiener utiliza en su ensayo, p. 17 de [16].

## 4.1 FUNDAMENTO BIOLÓGICO DE LAS REDES NEURONALES ARTIFICIALES.

Las técnicas neuro-computacionales, de las cuales forman parte las Redes Neuronales Artificiales, son el resultado de la investigación realizada en el área de la Inteligencia Artificial, la cual trata de aprovechar los conocimientos obtenidos en investigaciones sobre Neurofisiología para simularlos artificialmente. Un objetivo de la Inteligencia Artificial, y en particular de las técnicas neuro-computacionales, es desarrollar modelos basados en sistemas nerviosos biológicos, sin que por ello se pretenda “crear” una Inteligencia Artificial como tal; el objetivo principal de estas técnicas es tratar de combinar el poder de cómputo con modelos que simulan algunos procesos biológicos.

Por otro lado, los avances logrados en la tecnología también han dado lugar a un enorme avance en los conocimientos sobre Neurofisiología; de este modo, se han detectado estructuras más finas, así como complejos mecanismos tanto químicos como eléctricos entre las células que conforman a los sistemas nerviosos biológicos<sup>19</sup>. La complejidad de los mecanismos que realiza el sistema nervioso, en particular el cerebro, es tal, que se dificulta cada vez más el poder modelarlos. A pesar de estas dificultades, sin embargo, sí se han logrado modelar posibles mecanismos de cerebro, lo cual ya representa un gran avance. De las consideraciones anteriores, se infiere que los modelos de Inteligencia Artificial, y en particular las Redes Neuronales Artificiales, están basados en una visión enormemente simplificada del cerebro y del sistema nervioso en general.

Para explicar el mecanismo biológico en el cual se fundamenta el modelo de las Redes Neuronales Artificiales, diremos en forma extremadamente simplificada que:

El funcionamiento del sistema nervioso natural, está basado únicamente en la transmisión de impulsos eléctricos a través de las células denominadas neuronas.

Como se puede apreciar, no se considerarán cuestiones más sofisticadas del sistema nervioso, como lo es el hecho de que existe al menos otro tipo de células llamadas gliales; asimismo se ignoran ciertos modos de interacción neuronal tales como los potenciales continuamente variables y la transmisión de hormonas.

Así, a la luz de esta enorme simplificación de los mecanismos biológicos podemos afirmar lo siguiente :

El sistema nervioso es una vasta red de neuronas distribuidas en estructuras muy elaboradas con interconexiones extremadamente complejas.

Para continuar con esta visión simplificada del sistema nervioso, diremos que esta red de neuronas recibe señales de entrada que provienen de otras células receptoras de estímulos. Estas

---

<sup>19</sup>El material contenido en este apartado, se elaboró consultando principalmente el Prólogo y el Capítulo 1 “Redes Neuronales, Automatas Finitos, y Máquinas de Turing” de [10]. No se consultó bibliografía especializada en neurofisiología.

Una neurona se activa sólo si el peso total de sus sinapsis durante el periodo de sumación latente es superior al valor del umbral.

Después de pasar un impulso por el axón, hay un tiempo denominado periodo refractario durante el cual el axón no puede transmitir otro impulso; asimismo, entre un periodo de sumación latente y el paso de un impulso del axón a los bulbos terminales existe un pequeño retardo, de tal forma que la llegada de impulsos a las dendritas de una neurona determina la activación de su axón un corto periodo de tiempo después.

Si tomamos como unidad de tiempo el mismo que dura el periodo refractario de la neurona, se puede determinar el momento del disparo de un impulso con referencia al intervalo de tiempo primero, segundo, etc. Llegamos así al supuesto de que la neurona sólo puede activarse en los instantes  $t= 1,2,3,\dots$  unidades de tiempo, tomados a partir de algún  $t= 0$ . De la misma forma se aplica la misma escala discreta de tiempo para todas las neuronas de la red.

Las consideraciones anteriores para una neurona, nos llevan a establecer los siguientes supuestos para la red de neuronas en general :

El comportamiento de la red de neuronas queda completamente determinado por el patrón de activación de cada neurona en los instantes  $t=1,2,3,\dots$

La activación de una neurona queda determinada por el patrón de activación de las entradas de su sinapsis un momento antes en la misma escala de tiempo.

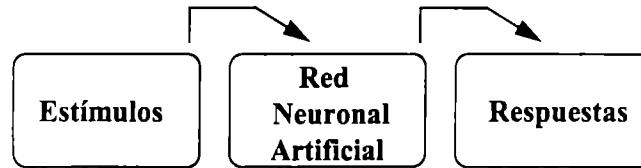
Para finalizar con el modelo simplificado de la red neuronal natural, es necesario agregar que los estímulos sólo los reciben las neuronas de entrada, las cuales están directamente en contacto con las células receptoras, dichas neuronas serán las encargadas de transmitir impulsos o mensajes a las neuronas internas y éstas transmitirán sus mensajes a las neuronas de salida, de estas últimas se obtiene la respuesta de la red hacia los efectores.

## **4.2 SIMULACIÓN DE UNA RED NEURONAL.**

Partiendo del modelo simplificado de la red neuronal natural expuesta en el apartado anterior, ésta podría muy bien ser simulada mediante computadoras analógicas, alambrada con componentes electrónicos o simulada en computadora digital, llamándose entonces Red Neuronal Artificial, pero sea cual fuere la forma en que se simule, lo que finalmente se logra es que emerjan las propiedades computacionales colectivas que la Red Neuronal Artificial tiende a encuadrar, combinándose así el poder de cómputo con un modelo que simula un proceso biológico.



En cuanto a los estímulos y respuestas de una Red Neuronal Artificial, para fines de simulación, éstos deben ser conformados mediante dos conjuntos de valores, uno será de estímulos o patrones de entrada y el otro será de respuestas o patrones de salida<sup>20</sup>. Esto se puede representar como:



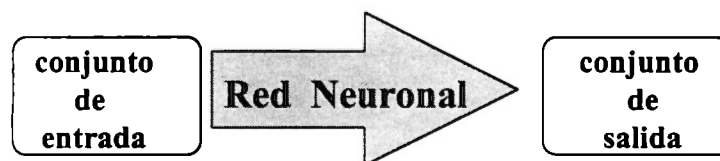
**Fig. 4.2: Representación simplificada de una Red Neuronal Artificial**

Bajo el contexto de las técnicas de Inteligencia Artificial, podemos decir que una red neuronal es comparable a tener un método para generar una función, posiblemente muy compleja que relacione los valores de un conjunto con los valores de otro. También podemos considerar que cada neurona toma parte de la responsabilidad para formar un segmento de esa curva para finalmente lograr una representación con cierta exactitud de las relación que guardan los valores de un conjunto con los valores del otro.

De acuerdo con el punto de vista anterior, la red neuronal hará las veces de una función de mapeo que relaciona los valores del conjunto de patrones de entrada, con sus respectivos valores del conjunto de patrones de salida y esto es precisamente la clave del potencial de las Redes Neuronales Artificiales:

Derivar esta curva o mapeo para obtener las salidas a partir de las entradas.

Esquemáticamente se puede representar a una red neuronal como sigue:



**Fig. 4.3: Representación conceptual de una Red Neuronal Artificial**

En cuanto a los conjuntos de patrones, éstos son conjuntos de valores representativos de la aplicación o problema, es decir son muestras de datos que representan al problema que se desea resolver con la red neuronal; dichos conjuntos, se conforman mediante una colección de parejas ordenadas  $(x,y)$ , donde  $x$  representa a un patrón de entrada, mientras que  $y$  representa al patrón de salida asociado a la entrada  $x$ , y ya que un patrón puede ser a su vez un grupo de características, se tiene en general que  $x \in \mathbb{R}^n$  mientras que  $y \in \mathbb{R}^m$ , es decir, un patrón es un vector conformado por

<sup>20</sup> Hasta el momento, se ha comentado el fundamento biológico que da origen a la red neuronal artificial. De aquí en adelante, se usará el término *red neuronal* para hacer referencia a una *red neuronal artificial*, dejando de lado la cuestión neurofisiológica y enfocándonos sólo a lo que es la técnica de Redes Neuronales en el área de la Inteligencia Artificial.

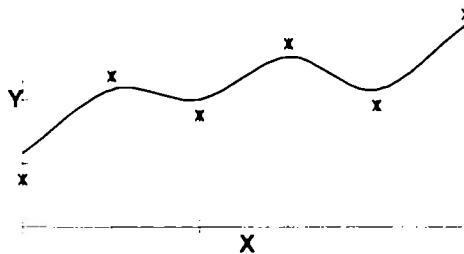
una  $n$ -ada de valores ordenados. Por lo anterior, tendremos que en general una red neuronal aprenderá a generar una función de mapeo  $R^n \rightarrow R^m$ .

Cuando la red neuronal ha conseguido obtener dicha función de mapeo, es porque ha logrado hasta cierto punto “explicar o definir” a cada patrón de salida a partir de su correspondiente patrón de entrada. Por lo anterior, se puede inferir que los patrones de entrada juegan el papel de variables explicativas o variables independientes, mientras que los patrones de salida hacen las veces de variables dependientes.

### 4.3 LA RED NEURONAL CON RETROPROPAGACIÓN DEL ERROR.

La red neuronal con retropropagación<sup>21</sup> del error, también referida en la literatura como perceptrón multi-capas, es actualmente el paradigma de Redes Neuronales más aplicado para propósito general y su popularidad se debe en gran parte a que en su fase de entrenamiento para reducir el error en la clasificación de patrones, se aplica una técnica que ha dado buenos resultados en modelos matemáticos tradicionales: la técnica del descenso del gradiente.

La técnica de descenso del gradiente para reducir el error, es un proceso de minimización, el cual consiste en encontrar una relación funcional que se encuentre lo más cercana posible a un conjunto de puntos dados, esto se ilustra en el siguiente diagrama:



**Fig. 4.4: Ejemplo del ajuste de una curva a una serie de puntos**

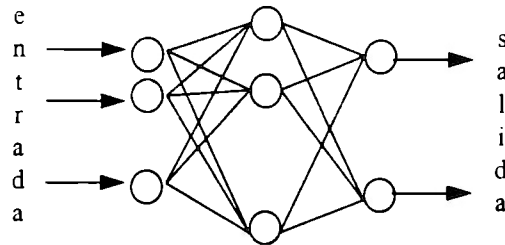
En la gráfica de la Figura 4.4, el eje X representa a la variable independiente y el eje Y a la variable dependiente. La línea continua representa el valor de la función  $f(x)$  mientras que los puntos representan al conjunto de valores empíricos. Aplicando alguna técnica, se puede encontrar la relación funcional  $f(x)$ , tal que la distancia entre el valor  $y$  para cualquier valor  $x$  y el valor calculado de  $f(x)$ , bajo esa técnica, sea mínima.

La red neuronal con retropropagación aprenderá a generar una función de mapeo desde el espacio de los patrones de entrada hacia el espacio de los patrones de salida mediante la minimización del

<sup>21</sup> Feedforward Network with Backpropagation of Error.

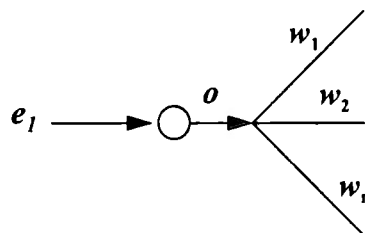
error que se presenta entre el valor producido por la red neuronal y el valor deseado del conjunto de patrones de salida

Para realizar el ajuste a la curva de la demanda de dinero, objetivo de este trabajo, se utilizó una Red Neuronal Artificial con retropropagación del error, la cual puede representarse como sigue:



**Fig. 4.5: Representación de una red neuronal con retropropagación**

De acuerdo con la Figura 4.5, una red neuronal con retropropagación del error, es una estructura conformada por un conjunto de neuronas agrupadas en capas; a la primera capa se le conoce como capa de entrada, a las capas intermedias se les conoce como capas internas u ocultas y a la última capa se le conoce como capa de salida. Existen conexiones de las neuronas de la capa de entrada, hacia las neuronas de la primera capa oculta; las neuronas de una capa oculta, tienen conexiones hacia las neuronas de la siguiente capa oculta y las neuronas de la última capa oculta, tienen conexiones hacia las neuronas de la capa de salida. La transmisión de mensajes entre las neuronas, se realiza siguiendo el orden anterior: las neuronas de la capa de entrada reciben el estímulo, éstas, transmiten sus mensajes a través de las conexiones hacia las neuronas de la primer capa oculta; y así sucesivamente, hasta que finalmente, las neuronas de la última capa oculta transmiten sus mensajes a través de las conexiones que tienen hacia las neuronas de la capa de salida. De estas últimas, se obtiene la respuesta de la red neuronal. Todos los mensajes que se transmiten a través de las conexiones, son afectados por factores de peso, con lo que se logra la atenuación o amplificación de los mismos. Los siguientes diagramas ilustran la transmisión de mensajes:

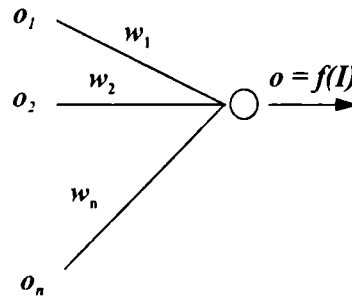


**Fig. 4.6: Entrada y salida de una neurona de la capa de entrada**

En la Figura 4.6, se ejemplifica una neurona de la capa de entrada, se puede observar que una neurona de la capa de entrada no tiene conexiones que provengan de otras neuronas, por lo que tampoco existen factores de peso que afecten a su valor de entrada y éste será directamente tomado de los valores del conjunto de patrones de entrada. En la Figura 4.6, se tiene como ejemplo a la primer neurona de la capa de entrada, así que su entrada  $e_1$  sería el valor de la

característica uno de un patrón de entrada; la salida de la neurona es  $o_1$  y en cada una de las conexiones se tiene un factor de peso  $w$ , por lo que la salida de la neurona pasará a las neuronas de la capa siguiente atenuado o amplificado de acuerdo al factor de peso de cada conexión, conformándose así la transmisión de mensajes.

Una característica importante de las neuronas de la capa de entrada es que su respuesta no depende de realizar alguna transformación a los valores que reciben de entrada, por lo que  $o = e$  para toda neurona de la capa de entrada.<sup>22</sup>



**Fig. 4.7: Entrada y salida de una neurona de capa oculta**

La Figura 4.7 muestra una neurona de capa oculta con su entrada y su salida, este diagrama también es válido para una neurona de la capa de salida; la entrada a esta neurona, está conformada por la suma algebraica de los mensajes provenientes de las neuronas de la capa anterior; dichos mensajes, a su vez, son el resultado de atenuar o amplificar las salidas  $o_i$  de las neuronas de la capa anterior según el peso  $w$  de la conexión que le corresponda, es decir, la entrada a la neurona es:  $\sum w_i o_i$ . Para que la simulación de la red neuronal esté más apegada al modelo real, al valor  $\sum w_i o_i$ , se incluye un valor  $\theta$ , interno a la neurona, el cual juega el papel del umbral. El valor de umbral de la neurona se incluye como parte de la expresión  $\sum w_i o_i$  ya que dicho valor puede manejarse como un mensaje que proviene de una neurona ficticia, cuya conexión siempre tiene un peso unitario.

A diferencia de las neuronas de la capa de entrada, las neuronas de las capas ocultas, así como las de la capa de salida, producen su propia salida a partir de efectuar una transformación  $f$  al valor  $(\sum w_i o_i + \theta)$ , en la Figura 4.7, dicho valor está representado por  $I$ . A la transformación  $f$  se le conoce como función de activación y al valor que produce la función de activación se le llama valor de activación o respuesta de la neurona. En resumen, el valor de activación de una neurona de capa oculta o de capa de salida, estará condicionado a su entrada, a su umbral y a la función de activación.

<sup>22</sup> En los diagramas de Redes Neuronales se representa con un círculo a las neuronas que sí realizan algún proceso para producir su propia salida: son unidades de procesamiento; las neuronas de entrada, que no realizan proceso alguno para producir su salida, se representan como un nodo.

#### 4.4 ESTRUCTURA DE LA RED NEURONAL CON RETROPROPAGACIÓN.

En cuanto a la configuración de la red neuronal con retropropagación, el número de capas y el número de neuronas en cada capa, se determina de acuerdo a la propia aplicación, es decir, dependen del número de características de entrada, del número de características de salida, y del número de muestras en el conjunto de patrones de la aplicación.

En la práctica, se ha observado que las Redes Neuronales con retropropagación de tres capas dan buenos resultados a una gran variedad de problemas [11]; si no se logran resultados aceptables, se prueban configuraciones mayores<sup>23</sup>.

Como se verá, las Redes Neuronales de tres capas que se aplicaron en este trabajo fueron suficientes para dar solución al ajuste y pronóstico de la demanda de dinero; también se probaron algunas configuraciones mayores, pero los resultados en general no mejoraron.

El número de neuronas de la capa de entrada es igual al número de características que tienen los patrones de entrada; el número de neuronas en la capa de salida, es igual al número de características que tienen los patrones de salida; para determinar el número de neuronas en la capa oculta se aplicó la siguiente regla:

$$j = \frac{m \times e}{n + z}$$

donde:

$j$	es el número de neuronas en la capa oculta.
$m$	es el número de muestras del conjunto de entrenamiento.
$e$	es el error permitido, expresado en porcentaje.
$n$	es el número de neuronas de entrada.
$z$	es el número de neuronas de salida.

La regla anterior, mencionada en [11] fue propuesta por Baum y Haussler<sup>24</sup>.

#### 4.5 FUNCIÓN DE ACTIVACIÓN.

En los apartados anteriores se mencionó que las neuronas de la red neuronal están organizadas en capas, y que los mensajes se transmiten desde las salidas de las neuronas de una capa y hacia las

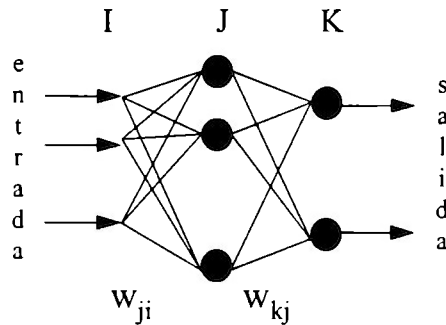
---

<sup>23</sup> Si una red neuronal de cierta configuración da "buenos" resultados, es muy poco probable que una configuración mayor de "mejores" resultados. Como se verá, la configuración de red neuronal de tres capas, fue suficiente para ajustar la curva de la demanda de dinero.

<sup>24</sup> Es común que en la literatura se mencione como regla del pulgar.

entradas de las neuronas de la capa siguiente. En este apartado se explicará la forma en que se determina la salida o valor de activación de una neurona.

Considérese la red neuronal de la siguiente figura, cuya estructura consiste en una capa de entrada identificada como capa I, una capa oculta identificada como capa J y una capa de salida identificada como capa K:



**Fig. 4.8: Estructura general de una Red Neuronal con retropropagación**

Los pesos de las conexiones que unen a las neuronas de la capa I con las neuronas de la capa J están etiquetados como  $w_{ji}$ ; análogamente, las conexiones que unen a las neuronas de la capa J con las neuronas de la capa K están etiquetados como  $w_{kj}$ .

La entrada a una neurona de cualquier capa, excepto de la capa de entrada, será la suma algebraica de las salidas de las neuronas de la capa que le antecede, multiplicadas por sus respectivos factores de peso. Lo anterior, para las neuronas de la capa de salida, quedaría expresado como:

$$net_k = \sum_{j \in J} w_{kj} o_j \quad \text{para } k \in K \quad (4.1)$$

donde:

$net_k$  es la entrada a la neurona  $k$  de la capa K.  
 $o_j$  es la salida de la neurona  $j$  de la capa J.  
 $w_{kj}$  es el peso de la conexión entre la neurona  $j$  y la neurona  $k$ .

Como se mencionó anteriormente, la salida de una neurona de cualquier capa (excepto de la capa de entrada), estará determinada por la entrada a la neurona, calculada como se indica en (4.1), y por su función de activación; es decir, para una neurona  $k$  de la capa de salida K tendríamos:

$$o_k = f(net_k) \quad (4.2)$$

donde  $f$  es la función de activación.

El modelo de las neuronas de la red, a semejanza de los modelos biológicos, debe incorporar una no-linealidad en su salida; es importante recalcar que dicha no-linealidad debe ser diferenciable en todo el rango de la función  $f$ .

La presencia de no-linealidades es importante porque de otra forma, la relación de entrada-salida de la red se reduciría a un modelo de perceptrón con una capa, lo cual es la forma más simple de una red neuronal y es aplicable sólo para la clasificación de un tipo específico de patrones: los linealmente separables, es decir, aquéllos cuyas categorías se encuentran separados por un hiperplano, por lo que, su capacidad de identificación es muy limitada, pues sólo distinguen patrones que pertenecen a una de dos categorías [14].

Una función no-lineal adecuada y que comúnmente se aplica en los modelos de Redes Neuronales, es la función sigmoideal; esta función también se aplicó como función de activación de las neuronas en los modelos de Redes Neuronales motivo del presente trabajo.

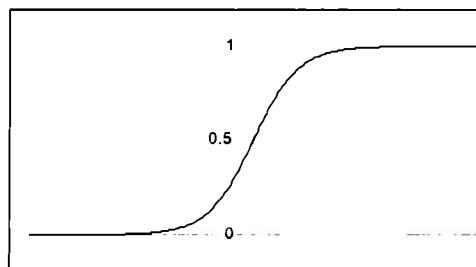
La función sigmoideal está definida por la siguiente función logística :

$$o_j = \frac{1}{1 + e^{-(net_j + \theta_j)}} \quad (4.3)$$

donde:

- $o_j$  es la salida producida por la neurona  $j$  de la capa  $J$ .
- $net_j$  es la entrada a la neurona  $j$  de la capa  $J$ .
- $\theta_j$  es el valor del umbral para la neurona  $j$  de la capa  $J$ .

La función sigmoideal tiene la siguiente forma:



**Fig. 4.9: Función sigmoideal**

El valor del umbral desplaza la función sigmoideal a lo largo del eje de las abscisas: un valor positivo del umbral hará que la función se desplace hacia la izquierda; un valor negativo la desplaza hacia la derecha. El valor máximo y mínimo que puede tomar el valor de activación de una neurona se puede obtener mediante los valores límite de la función sigmoideal, considerando que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty$$

se tiene que :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 0$$

Por tanto, el valor de activación de una neurona, calculado con base a la función sigmoideal será:  $0 \leq o_i \leq 1$ .

#### 4.6 ENTRENAMIENTO DE LA RED NEURONAL CON RETROPROPAGACIÓN.

Una vez configurada la red neuronal, se puede iniciar con el proceso de entrenamiento de la misma, el cual está basado en la transmisión de mensajes entre las neuronas. El proceso de entrenamiento se debe iniciar con una asignación aleatoria de los valores de los pesos ya que así se minimiza cualquier influencia que pudiese sesgar el desempeño del algoritmo.

El entrenamiento se realiza en dos fases: la primera consiste en presentar un patrón a las neuronas de la capa de entrada de la red y propagar o alimentar los mensajes producidos hacia las neuronas de las capas siguientes; esto es, los valores de activación que se obtienen en las neuronas de una capa, se atenúan o amplifican por el peso que corresponda según la conexión que tienen hacia las neuronas de la capa siguiente; este proceso se realiza para todas y cada una de las capas de la red neuronal, obteniendo finalmente en las neuronas de la capa de salida, la respuesta de la red.

La segunda fase del entrenamiento consiste en calcular valores de corrección para cada peso, de tal forma que la respuesta de la red se aproxime a los valores del patrón de salida correspondiente al patrón de entrada que se presentó en la primera fase. A esta fase del proceso de entrenamiento, se le conoce como aprendizaje de los pesos ya que consiste en calcular un valor “mejorado” de cada uno de los pesos, para que la red tienda a mejorar su respuesta para el patrón en cuestión.

El aprendizaje de los pesos está en función de la señal del error que se presenta en la respuesta de la red al presentarle el patrón de entrada; este error es la diferencia que exista entre la respuesta de la red y el valor del patrón de salida correspondiente a dicho patrón de entrada presentado a la red. El aprendizaje de los pesos se realiza iniciando con los valores de los pesos de las conexiones que llegan a la capa de salida y se continúa aprendiendo los pesos “hacia atrás” hasta llegar a las conexiones que provienen de las neuronas de la capa de entrada. En cada capa se va determinando la contribución que cada neurona tuvo al valor de la señal del error presentado en la respuesta de



la red; tanto por la forma como por el sentido en que se realiza el aprendizaje, se le ha llamado retropropagación del error.

El proceso de entrenamiento se realiza para todos y cada uno de las parejas  $(x,y)$  del conjunto de patrones, de aquí que a dichos conjuntos de valores se les denomine conjunto de entrenamiento; a una presentación completa de dicho conjunto durante el proceso de entrenamiento, se le denomina etapa de entrenamiento; durante una etapa de entrenamiento, los valores de los pesos se mantienen fijos.

Una vez finalizada una presentación completa del conjunto de entrenamiento, se realiza la corrección a cada uno de los pesos sumando algebraicamente a cada peso, el correspondiente valor de corrección que se obtuvo para cada patrón del conjunto; es decir, al final de una etapa de entrenamiento, cada unidad modificará los pesos de sus conexiones de entrada en forma dirigida para reducir el tamaño del error general calculado sobre todos los patrones presentados.

En la fase de retropropagación del error, para obtener los valores de corrección a los pesos en las Redes Neuronales del presente trabajo, se aplicó la regla delta generalizada formulada por Rumelhart, Hinton y Williams, la cual se analiza en [12]. Ésta consiste en realizar la corrección de los pesos en forma proporcional a la sensibilidad que el error del sistema presenta respecto a los pesos; esto conduce a realizar en forma calculada y dirigida la corrección a los pesos para minimizar el error general de sistema.

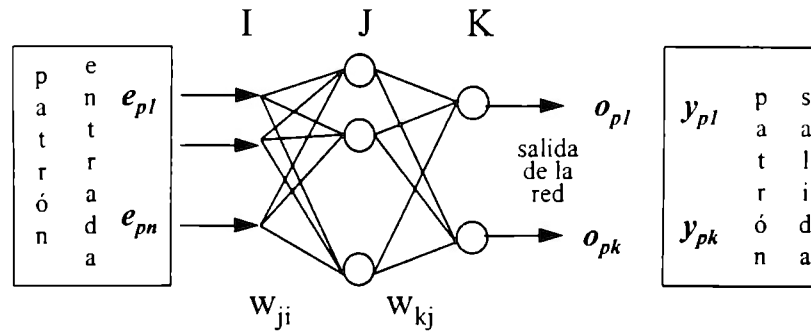
El proceso de entrenamiento de la red neuronal expuesto en los párrafos anteriores se deriva como resultado natural de encontrar el gradiente de la superficie del error de la respuesta actual producida por la red con respecto al resultado deseado; dicha superficie está contenida en el espacio conformado por los pesos de la red neuronal. Este algoritmo de aprendizaje a su vez tiene como antecedente el concepto de discriminante y por tanto, al reconocimiento de patrones estocástico descrito en términos de densidades de probabilidad condicional, pertenencia de clases y estadística Bayesiana [13], cuyo objetivo es que un sistema aprenda adaptativamente de la experiencia y consiga identificar varios discriminantes.

#### **4.7 REGLA DELTA GENERALIZADA EN EL ALGORITMO DE RETROPROPAGACIÓN.**

Podemos decir que el proceso de entrenamiento de la red neuronal tiene como objetivo que la red aprenda a identificar características en los patrones de entrada, las cuales a su vez le permite reproducir los valores deseados de los patrones de salida; este aprendizaje, se logra gradualmente mediante pequeñas correcciones a los valores de los pesos de todas sus conexiones, dicho de otra forma, el aprendizaje de los pesos debe basarse en la minimización del error promedio del sistema sobre todo el conjunto de entrenamiento.

Dado que el aprendizaje de la red estará en función de la señal del error que se presenta entre la respuesta de la red y los valores de los patrones de salida, será necesario definir la señal del error

en cada capa de la red neuronal en términos del error que se presenta a la salida de la red, para tal fin, considérese el siguiente diagrama:



**Fig. 4.10: Respuesta de la red neuronal al patrón p**

Para la capa de salida K, según el diagrama de la Figura 4.10, sabemos en forma intuitiva que para medir el error, se debe tomar para el patrón p la diferencia entre el valor producido por cada neurona de la capa de salida de la red neuronal  $o_{pk}$  y el respectivo valor deseado del patrón de salida  $y_{pk}$ . En general, es de esperarse que la red no produzca exactamente el valor deseado  $y_{pk}$ , que corresponde al patrón de salida p, aunque sí una buena aproximación de él; de esta forma, el error para el patrón p, será la suma del error que se presente en la respuesta de cada neurona de la capa de salida respecto al valor esperado del patrón de salida correspondiente, esto es:

$$E_P = \sum_k (y_{pk} - o_{pk})^2 \quad \text{para } k \in K \quad (4.4)$$

y el error promedio del sistema será:

$$E = \frac{1}{P} \sum_p \sum_k (y_{pk} - o_{pk})^2 \quad \text{para } k \in K$$

Para calcular valores de corrección de los pesos que minimicen el error promedio del sistema, deberá primero obtenerse para cada patrón del conjunto, los valores de corrección de los pesos que minimicen la señal del error para ese patrón en particular; dichas correcciones deberán estar en función de la señal del error que se presenta entre la salida de la red y el patrón de salida respectivo. De la misma forma, se pueden obtener valores de corrección de los pesos para todos y cada uno de los patrones del conjunto. Una vez corregidos los valores de los pesos con todos los valores de corrección obtenidos para la totalidad de patrones del conjunto, se puede proceder a obtener nuevos valores de corrección para cada patrón del conjunto. Cada vez que se corrigen los pesos, se logra una disminución gradual del error promedio del sistema. Para que el error promedio del sistema disminuya tan rápido como sea posible, será necesario que dichos valores de corrección se calculen también en función de la velocidad de cambio de la señal del error respecto al propio valor de los pesos, para lograr esto, se debe aplicar un método de descenso de

gradiente<sup>25</sup> que minimice ese error tan rápido como sea posible; todo lo anterior, está contemplado en la regla delta generalizada, analizada en [12].

La búsqueda del gradiente para un mínimo error del sistema se deriva de la propia expresión del error, para lo cual, reescribiendo (4.4), omitiendo el subíndice p correspondiente al patrón (número de muestra), e introduciendo un término constante de 1/2 para simplificar los desarrollos subsecuentes, tenemos que el error es:

$$E = \frac{1}{2} \sum_k (y_k - o_k)^2 \quad (4.5)$$

La velocidad de cambio que presenta el error E respecto a los pesos que van de la capa oculta J a la capa de salida K es :

$$\frac{\partial E}{\partial w_{kj}}$$

Si se toman cambios incrementales de los pesos se puede lograr que los pesos tiendan hacia valores que minimicen el valor del error E, esto es:

$$\Delta w_{kj} = -\eta \frac{\partial E}{\partial w_{kj}} \quad (4.6)$$

donde  $\eta$  es la constante de proporcionalidad y determina la razón de aprendizaje. El uso del signo menos expresa descenso del gradiente en el espacio conformado por los pesos [14].

Por otro lado, el error (4.5) está en términos de la respuesta de las neuronas de la capa de salida, dicha respuesta de acuerdo con (4.2) está en términos de la entrada a la neurona correspondiente, tal como se establece en (4.1); esta última expresión es la suma lineal de las salidas de las neuronas de la capa anterior, atenuadas o amplificadas según los pesos w.

De esta forma, se puede obtener la derivada parcial de la expresión del error E, con respecto a w, considerando las equivalencias de las expresiones y aplicando la regla de la cadena :

$$\frac{\partial E}{\partial w_{kj}} = \frac{\partial E}{\partial net_k} \frac{\partial net_k}{\partial w_{kj}} \quad (4.7)$$

Sustituyendo y resolviendo por partes:

---

<sup>25</sup> Recibe el nombre de gradiente de una función  $z=f(x,y)$ , un vector, cuyas proyecciones sobre los ejes de coordenadas son las correspondientes derivadas parciales de dicha función. El gradiente de una función de tres variables, en cada punto lleva la dirección de la normal a la superficie de nivel que pasa por dicho punto.

$$\frac{\partial net_k}{\partial w_{kj}} = \frac{\partial}{\partial w_{kj}} \sum_{j \in J} w_{kj} o_j = o_j \quad (4.8)$$

para  $k \in K$  y alguna  $j$  en particular.

Partiendo de (4.7) se toma la siguiente definición:

$$\delta_k = - \frac{\partial E}{\partial net_k} \quad \text{para alguna } k \in K \quad (4.9)$$

donde  $\delta_k$  es el gradiente local, y determina los cambios requeridos en los pesos [14].

Aplicando la regla de la cadena para resolver la expresión del gradiente local:

$$\delta_k = - \frac{\partial E}{\partial net_k} = - \frac{\partial E}{\partial o_k} \frac{\partial o_k}{\partial net_k} \quad (4.10)$$

el gradiente queda expresado en términos de dos factores: el primero mide la razón de cambio del error con respecto a la salida y el segundo mide la razón de cambio de la salida respecto a la entrada a esa misma neurona.

Resolviendo los dos factores tenemos que :

$$- \frac{\partial E}{\partial o_k} = (y_k - o_k) \quad \text{para } k \in K \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial o_k}{\partial net_k} = f'_k(net_k) \quad (4.12)$$

donde  $f_k$  es la función de activación de la neurona  $k$ .

Finalmente, sustituyendo (4.11) y (4.12) en (4.10) obtenemos:

$$\delta_k = (y_k - o_k) f'_k(net_k) \quad (4.13)$$

Partiendo de (4.5), (4.11) y (4.13), se puede observar que el factor clave en el cálculo del ajuste de los pesos es la señal del error en las neuronas de la capa de salida. Bajo este contexto, se deben identificar dos casos distintos, dependiendo de dónde esté ubicada la neurona en cuestión: en la capa de salida o en las capas ocultas.

El primer caso es sencillo porque en cada neurona  $k$  de la capa de salida  $K$ , el error asociado se calcula comparando directamente la respuesta producida con la respuesta deseada, y una vez determinada la señal del error, se calcula directamente el gradiente local según (4.9).

En el segundo caso, para las neuronas que están en las capas ocultas, no se puede evaluar directamente su desempeño; por otro lado, los errores en las neuronas de la capa de salida son consecuencia directa de los errores de las neuronas de las capas ocultas. Por lo anterior, para las neuronas de las capas ocultas, el problema consiste en determinar cómo evaluar el error de dichas neuronas, en función del error que se presente en las neuronas de la capa de salida. Este problema ha sido resuelto como se establece en [14] con la técnica conocida como retropropagación del error a través de toda la red, como se verá a continuación:

para el primer caso, cuando las neuronas están en la capa de salida  $K$ , combinando los resultados obtenidos en (4.8) y (4.13) con (4.6), se tiene para las neuronas de salida que:

$$\Delta w_{kj} = \eta(y_k - o_k) f'_k(\text{net}_k) o_j$$

o bien:

$$\Delta w_{kj} = \eta \delta_k o_j \quad \text{para } j \in J \text{ y } k \in K$$

para las neuronas de la capa oculta  $J$ , también son válidas las expresiones obtenidas para el caso anterior, pero cambiando los índices, ya que ahora la neurona en cuestión está en la capa oculta  $J$ , y su entrada se conforma por las salidas de las neuronas de la capa  $I$ , afectadas por los pesos que van de la capa  $I$  a la capa  $J$ , esto es :

$$\Delta w_{ji} = -\eta \frac{\partial E}{\partial w_{ji}} \quad \text{para } i \in I \text{ y } j \in J$$

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ji}} = \frac{\partial E}{\partial \text{net}_j} \frac{\partial \text{net}_j}{\partial w_{ji}}$$

$$\frac{\partial \text{net}_j}{\partial w_{ji}} = \frac{\partial}{\partial w_{ji}} \sum w_{ji} o_i = o_i$$

$$\Delta w_{ji} = -\eta \frac{\partial E}{\partial \text{net}_j} o_i$$

$$\Delta w_{ji} = \eta \left( \begin{array}{c} \frac{\partial E}{\partial \hat{o}_j} \\ \frac{\partial E}{\partial \hat{net}_j} \end{array} \right) o_i \quad (4.14)$$

Ahora bien, de (4.10) y (4.12) podemos etiquetar el gradiente local para una neurona oculta:

$$\delta_j = - \frac{\partial E}{\partial \hat{net}_j} = - \frac{\partial E}{\partial \hat{o}_j} \frac{\partial \hat{o}_j}{\partial \hat{net}_j} \quad (4.15)$$

por lo que podemos escribir (4.14) como :

$$\Delta w_{ji} = \eta \delta_j o_i \quad (4.16)$$

Para obtener el valor del discriminante local para la neurona oculta  $j \in J$ , según (4.15) y de acuerdo a (4.12) se tiene que :

$$\frac{\partial \hat{o}_j}{\partial \hat{net}_j} = f'_j(\hat{net}_j) \quad (4.17)$$

Cuando la neurona está en las capas ocultas, capa J en la Figura 4.10, no existe una respuesta específica deseada, por lo que la señal del error debe ser determinada recurrentemente en términos de la señal del error de las neuronas de la capa posterior, a las cuales están directamente conectadas, capa K en la Figura 4.10; por tanto, la señal del error para las neuronas de la capa oculta J, que antecede a la capa de salida K, estará en términos del error obtenido en las neuronas de la capa de salida K. De igual forma se calculará la señal del error para las capas precedentes; de aquí deriva el nombre del algoritmo: retropropagación del error.

El primer factor en (4.15) se debe replantear en términos de cantidades calculables, para lo cual, retomaremos (4.5), la cual establece el error en términos de las salidas conocidas de las neuronas de la capa de salida K. Diferenciando (4.5) con respecto a la salida de la neurona j de la capa oculta J, tenemos:

$$\frac{\partial E}{\partial \hat{o}_j} = \sum_{k \in K} (y_k - o_k) \frac{\partial (y_k - o_k)}{\partial \hat{o}_j}$$

y aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial E}{\partial \hat{o}_j} = \sum_{k \in K} (y_k - o_k) \frac{\partial (y_k - o_k)}{\partial \hat{net}_k} \frac{\partial \hat{net}_k}{\partial \hat{o}_j} \quad (4.18)$$

para alguna  $k \in K$  y  $j \in J$ .

$$\frac{\partial (y_k - o_k)}{\partial net_k} = -f'_k(net_k) \quad (4.19)$$

Ahora bien, como:

$$net_k = \sum_j w_{kj} o_j$$

tenemos que

$$\frac{\partial net_k}{\partial o_j} = w_{kj} \quad \text{para alguna } j \in J \text{ y } k \in K \quad (4.20)$$

ahora, tomado (4.19) y (4.20) para sustituirlas en (4.18) se tiene que la derivada parcial deseada es :

$$\frac{\partial E}{\partial o_j} = - \sum_{k \in K} (y_k - o_k) f'_k(net_k) w_{kj}$$

que según (4.13), el gradiente local para la neurona k de la capa de salida K es:

$$\frac{\partial E}{\partial o_j} = - \sum_{k \in K} \delta_k w_{kj} \quad (4.21)$$

Finalmente, sustituyendo los resultados (4.17) y (4.21) en (4.15) obtenemos el gradiente local para la neurona j de la capa oculta J como:

$$\delta_j = f'_j(net_j) \sum_k \delta_k w_{kj} \quad (4.22)$$

donde la función de activación (4.3) es la misma tanto para las neuronas de la capa de salida como para las de capas ocultas. Adicionalmente, se tiene que el valor del umbral para cualquier neurona, ya sea oculta o de salida, puede ser tratado como un factor de peso que procede de una neurona ficticia cuyo valor de salida es siempre uno y por tanto, el umbral finalmente se puede simular como parte de la entrada a la propia neurona.

De acuerdo con las consideraciones mencionadas, podemos escribir la función de activación en forma simplificada como :

$$o_m = \frac{1}{1 + e^{-net_m}} = f_m(net_m) \quad (4.23)$$

en donde se ha cambiado el índice j por m.

Diferenciando (4.23) respecto a la entrada a la neurona :

$$\frac{\partial o_m}{\partial net_m} = \frac{e^{-net_m}}{\left(1 + e^{-net_m}\right)^2} = f'_m(net_m) \quad (4.24)$$

sustituyendo (4.23) en (4.24) tenemos que :

$$f'_m(net_m) = o_m(1 - o_m) \quad (4.25)$$

Tomando este resultado para sustituirlo en (4.13), correspondiente al gradiente local para la neurona k de la capa de salida K, tenemos que:

$$\delta_k = (y_k - o_k) f'_k(net_k)$$

es decir, el gradiente local para la neurona k de la capa de salida K es:

$$\delta_k = (y_k - o_k) o_k (1 - o_k) \quad (4.26)$$

Haciendo lo mismo para (4.22) se tiene que el gradiente local para la neurona j de la capa oculta J es:

$$\delta_j = o_j (1 - o_j) \sum_k \delta_k w_{kj} \quad (4.27)$$

Finalmente, el aprendizaje de los pesos se realizará aplicando la corrección a cada uno de los pesos según (4.16) y aplicando la expresión del gradiente que corresponda: (4.26) o (4.27), dependiendo de que el peso en cuestión esté en una conexión que llega a alguna neurona de la capa de salida o esté en alguna conexión que llega a alguna neurona de capa oculta.

Tomando el resultado (4.25), podemos obtener la primera y segunda derivada respecto a  $o_m$ :

$$\frac{\partial o_m(1 - o_m)}{\partial o_m} = 1 - 2o_m$$

$$\frac{\partial (1 - 2o_m)}{\partial o_m} = -2$$

y encontrar puntos críticos:



$$1 - 2o_m = 0$$

tenemos que la derivada de la función de activación, tendrá su valor máximo cuando  $o_m$  toma el valor de 0.5 y su valor mínimo cuando  $o_m$  toma el valor de 0 ó 1 y ya que el cambio en el valor de un peso de la red neuronal es proporcional a dicha derivada, se tiene que un peso variará más para aquéllas neuronas cuyo valor de activación esté cercano al valor 0.5 .

Como se estableció al inicio de este desarrollo, se ha omitido el índice correspondiente al número del patrón del conjunto de entrenamiento, por tanto, cabe aclarar que (4.26) y (4.27) se obtuvieron para el caso particular en que la red aprende la relación que existe entre el patrón de entrada  $p$  y el patrón de salida  $p$ . Para que la red aprenda la relación que existe entre los patrones restantes del conjunto de entrenamiento, será necesario obtener de la misma forma, la corrección a los pesos para todos y cada uno de los pares restantes patrón entrada-patrón salida del conjunto de entrenamiento. La corrección a los pesos, se podría realizar para cada patrón del conjunto de entrenamiento, sin embargo, esto podría retrasar el proceso de aprendizaje ya que al realizar la corrección a los pesos obtenida para el patrón  $p$ , los pesos aprendidos identificarán la relación que existe entre el patrón de entrada  $p$  y su respectivo patrón de salida, sin embargo, al realizar el aprendizaje de un nuevo patrón  $q$ , los pesos resultantes al realizar la corrección obtenida para el patrón  $q$  pueden ser tan diferentes a los que se habían obtenido para el patrón  $p$ , que podría tener el efecto de que la red “olvidara” la relación que había aprendido para el patrón  $p$ , para evitar este efecto, se puede realizar la corrección a los pesos, con algún valor de corrección único el cual de algún modo considere los valores de corrección que se obtuvieron para cada uno de los patrones de todo el conjunto de entrenamiento, este valor se calcula con la siguiente expresión :

$$\Delta w_{ji} = \sum_p \eta \delta_j o_i \quad (4.28)$$

es decir, se obtiene un valor de corrección para una presentación completa del conjunto de entrenamiento y la corrección a los pesos se realiza al finalizar cada etapa del entrenamiento.

#### **4.8 RAZÓN DE APRENDIZAJE EN EL ALGORITMO DE ENTRENAMIENTO.**

El algoritmo de retropropagación en el proceso de entrenamiento de la red neuronal es similar a los métodos de escalada de la colina, pues busca seguir una trayectoria cuyo gradiente se dirija más rápidamente al punto mínimo, es decir, el gradiente con el mayor descenso en el espacio que conforman los pesos. De esta forma tenemos que cuanto más pequeño sea el valor del parámetro de razón de aprendizaje  $\eta$ , más pequeños serán los cambios en los valores de los pesos de las conexiones de la red neuronal de una iteración a otra, por lo tanto, la red convergerá más lentamente al mínimo en el espacio de los pesos.

Un valor bajo en el parámetro de la razón de aprendizaje, redundará en un alto costo del entrenamiento de la red, pues en este caso se trata de un aprendizaje lento.

Si por el contrario, se maneja un valor alto para el parámetro de la razón de aprendizaje con la intención de agilizar el descenso del gradiente, los cambios en los valores de los pesos serán mayores, y posiblemente la red neuronal aprenda más rápidamente; sin embargo, con una razón de aprendizaje alto, fácilmente se puede causar que el proceso de aprendizaje se vuelva inestable, esto debido a que a cambios grandes en los valores de los pesos, se tendrán grandes pasos en el espacio conformado por los pesos y es muy probable que la búsqueda del gradiente mínimo tienda a oscilar.

Una forma sencilla para incrementar la razón de aprendizaje sin aumentar considerablemente el riesgo de causar inestabilidad en el proceso de entrenamiento de la red neuronal es modificar la regla delta, incluyendo un término de impulso o momentum, tal como se menciona en [12]. Rumelhart, Hinton y Williams sugieren que:

$$\Delta w_{ji}(n) = \alpha \Delta w_{ji}(n-1) + \eta \delta_j(n) o_i(n) \quad (4.29)$$

donde  $\alpha$  es la constante de impulso, que generalmente es un número positivo ya que su función es la de controlar el lazo de retroalimentación en el cálculo de los valores de corrección de los pesos.

La expresión de la regla delta generalizada (4.29), incluye la generalización de (4.16) que es la regla delta para el caso especial de que  $\alpha$  tenga el valor de cero.

## 4.9 IMPLICACIONES AL APLICAR LA REGLA DELTA GENERALIZADA.

El efecto que la constante de impulso tiene en la corrección de los valores de los pesos en el algoritmo de entrenamiento de la red neuronal, se puede visualizar como una presentación en secuencia de todos los patrones que conforman una presentación, para lo cual, podemos expresar 4.28 como una serie de tiempo con índice  $t$  cuyo valor va del tiempo 0 hasta el tiempo  $n$ :

$$\Delta w_{ji}(n) = \eta \sum_{t=0}^n \alpha^{n-t} \delta_j(t) o_i(t) \quad (4.30)$$

De (4.7), (4.8), (4.11) y (4.12) se tiene que :

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ji}} = -\delta_j(t) o_i(t)$$

por otro lado, se puede escribir (4.30) en la siguiente forma equivalente:

$$\Delta w_{ji}(n) = \eta \sum_{t=0}^n \alpha^{n-t} \frac{\partial E(t)}{\partial w_{ji}(t)}$$

La expresión anterior, representa una serie de tiempo de tamaño  $n+1$  y con base en el análisis de series, de la expresión anterior se puede observar según [9] y [14] que:

- 1.- El factor de corrección del valor de los pesos representa la suma de una serie exponencial, y como tal, para que la serie sea convergente, el valor de la constante de impulso debe restringirse al rango:

$$0 \leq \alpha < 1$$

- 2.- Cuando la derivada parcial :

$$\frac{\partial E(t)}{\partial w_{ji}(t)}$$

tiene el mismo signo algebraico para dos iteraciones consecutivas, el factor calculado, causará que el incremento al valor de los pesos crezca en magnitud y los pesos se irán ajustando en cantidades grandes. Por tanto, al incluir la constante de impulso en el algoritmo de retropropagación tiende a acelerar la búsqueda en direcciones descendentes estables.

- 3.- Cuando la derivada parcial del punto anterior tiene signo algebraico opuesto para dos iteraciones consecutivas, el factor calculado causará que el valor de corrección de los pesos se reduzca en magnitud y que los pesos sean ajustados en menor cantidad . Por tanto, la constante de impulso en el algoritmo de retropropagación tiene un efecto de estabilización en las direcciones en que se presenten oscilaciones en el signo.

#### **4.10 ALGORITMO DE ENTRENAMIENTO DE LA RED NEURONAL CON RETROPROPAGACIÓN.**

De acuerdo a lo expuesto en los apartados anteriores, podemos describir el proceso de entrenamiento de la red neuronal con el siguiente algoritmo, bajo el supuesto de que ya se ha asignado valores tanto a la razón de aprendizaje como a la constante de impulso, asimismo, se

supone que la configuración inicial de los pesos de la red neuronal ha sido inicializada en forma aleatoria.

- 1.-Selecciónese del conjunto de entrenamiento un par de vectores (x,y).
- 2.-Tome el valor del vector x como salida de las neuronas de la capa de entrada.
- 3.-Aplicando la siguiente expresión, calcúlese el valor de activación de cada neurona de la capa subsecuente:

$$net_k = \sum w_{kj} o_j$$

- 4.-Calcular para cada neurona de la capa subsecuente, su función de activación según la siguiente expresión:

$$o_m = \frac{1}{1 + e^{-net_m}} = f_m(net_m)$$

- 5.-Repetir los pasos 3 y 4 para cada capa de la red neuronal.
- 6.-Calcular el error en cada neurona de la capa de salida para este patrón, aplicando la expresión:

$$\delta_k = (y_k - o_k) o_k (1 - o_k)$$

- 7.-Calcular el error en las unidades de las capas ocultas, aplicando la expresión recurrente:

$$\delta_j = o_j (1 - o_j) \sum_k \delta_k w_{kj}$$

- 8.-Actualice el valor de corrección a cada peso con la siguiente expresión

$$\Delta w_{ji}(n) = \alpha \Delta w_{ji}(n-1) + \eta \delta_j(n) o_i(n)$$

- 9.-Realícese una etapa de entrenamiento, es decir, repítanse los pasos 2 al 8 para todos los pares (x,y) del conjunto de entrenamiento.
- 10.-Una vez finalizada una etapa de entrenamiento, se realiza la corrección a los pesos, sumando a cada peso su respectivo valor de corrección que se obtuvo en la presentación de dicha etapa de entrenamiento:

$$w_{ji} = \Delta w_{ji}$$

11.-Repita los pasos 1 al 11 tantas etapas como sea necesario para reducir la suma cuadrática del error a un valor deseado mínimo. El cálculo de la suma cuadrática del error se realiza solo en las unidades de salida y para todos los P pares del conjunto de entrenamiento según la siguiente expresión:

$$E_P = \frac{1}{2P} \sum_p \sum_k (y_{pk} - o_{pk})^2$$

Finalmente, para que este algoritmo sea simulado adecuadamente en la computadora, se debe considerar que el rango de números reales que la máquina permite manipular, es finito y que en consecuencia la precisión limitará los valores que pudiesen obtenerse de la función de activación, de tal suerte que se puede caer en puntos estacionarios debido a que no se alcance a detectar el cambio en los resultados de una iteración a otra, por tanto el proceso de aprendizaje de la red neuronal no avanzará.

El problema anterior, se resuelve si de antemano se aplica algún proceso de normalización de los datos que conforman a los conjuntos de entrenamiento, cuidando en general que todos los valores de los patrones estén dentro del rango  $0 < r < 1$ , donde r representa cualquier valor numérico de dichos conjuntos.

**PRONÓSTICO DE LA DEMANDA DE DINERO  
APLICANDO REDES NEURONALES ARTIFICIALES**

## 5 PRONÓSTICO DE LA DEMANDA DE DINERO APLICANDO REDES NEURONALES ARTIFICIALES.

*“El perceptrón demuestra que una máquina puede adaptarse al medio; la Inteligencia Artificial, que una máquina puede ser <<creadora>>... Desde luego, todo ello a un nivel mucho más bajo que el del ser humano, pero aun así demuestra que muchas de las diferencias entre el hombre y las máquinas que hasta ahora se creían que eran de carácter cualitativo, son simplemente cuantitativas.”<sup>26</sup>*

Como parte de este trabajo se desarrolló un programa que permite crear aplicaciones de Redes Neuronales con retropropagación del error; el módulo de entrenamiento se programó de acuerdo al algoritmo descrito en el capítulo cuatro. El programa se desarrolló en lenguaje C, en un equipo personal y permite realizar el proceso de entrenamiento de una red por fases, esto es, tiene la opción para continuar el entrenamiento de alguna red, para esto, el programa almacena los valores que se obtienen al finalizar cada fase de entrenamiento de una red; los datos que se almacenan en los archivos son : el número de capas, número de nodos en cada capa, el valor del factor de impulso, la razón de aprendizaje, el error promedio del sistema y el valor obtenido para cada uno de los pesos.

Se construyeron varias configuraciones de Redes Neuronales, de las cuales, nos enfocaremos en sólo dos de ellas: en el primer caso, se aplicó una red para realizar el ajuste a la curva de la demanda de dinero, y en el segundo caso, se aplicó una red para realizar el pronóstico de la demanda de dinero.

Para ambos casos, los conjuntos de entrenamiento se tomaron a partir de los datos contenidos en la tabla conformada para el modelo econométrico, el cuál fue descrito en el capítulo tres. Cabe aclarar que el conjunto de datos que se utilizó para el modelo econométrico deben ser transformados para que todos los valores del conjunto estén contenidos en el intervalo (0,1], una vez transformados, se pueden conformar los conjuntos de entrenamiento para las Redes Neuronales. Con dicha transformación, se evitan desbordes en los cálculos durante el proceso de aprendizaje de los pesos.

---

<sup>26</sup> Citado por Arbib en el capítulo 5.6 “La Controversia Cerebro-Máquina” p. 154 de [10].

En la fase de entrenamiento que se utilizó en ambos casos, se aplicó el siguiente criterio: el entrenamiento de la red se realizó con fases de entrenamiento de 30,000 etapas cada una, lo cual requería aproximadamente de 30 minutos de proceso; al finalizar cada fase, se revisó el comportamiento del error promedio del sistema; en general, el error tendía a disminuir; pero si en alguna etapa de la fase de entrenamiento, se detectaba que el error se incrementaba, se realizaban los siguientes pasos:

- 1.- Se identificaba el número de la etapa de entrenamiento donde iniciaba el incremento del error, sea  $t$  el número de dicha etapa de entrenamiento.
- 2.- Se reiniciaba la misma fase de entrenamiento, realizando sólo  $(t-1)$  etapas de entrenamiento.
- 3.- Se decrementaban en 0.2 los valores de la razón de aprendizaje, y del factor de impulso.
- 4.- Se continuaba con fases de entrenamiento de 30,000 etapas cada una.

Se continuó monitoreando el comportamiento del error promedio del sistema, si se detectaba un nuevo incremento, se procedía con los pasos descritos en los puntos anteriores. El entrenamiento se realizó hasta alcanzar un error promedio del sistema de diez por ciento.

Para establecer la configuración que tendrán las redes neuronales que se aplicaron tanto para ajustar la curva de la demanda de dinero, como para realizar el pronóstico, considérese la siguiente expresión:

$$\log(M) = \beta_0 + \beta_1 \log(Y) + \beta_2 \log(r) + \beta_3 \log(P) + \beta_4 \log(S) \quad (5.1)$$

donde:

$M$	es la demanda de dinero.
$Y$	es el índice del volumen de la producción industrial.
$r$	es la tasa de rendimiento de cetes a un mes.
$P$	es el índice nacional de precios al consumidor.
$S$	es el índice salarial e ingresos medios en la manufactura.

dicha expresión, se obtuvo a partir de las teorías macroeconómicas sobre la demanda de dinero, y de la evidencia empírica, ambos puntos, tratados en el capítulo dos de este trabajo.

De acuerdo a (5.1), la demanda de dinero  $M$  se puede conocer a partir de cuatro variables explicativas: el índice de la producción  $Y$ , la tasa de rendimiento  $r$ , el índice de los precios  $P$  y el índice salarial  $S$ .



Como se mencionó en el capítulo cuatro, se ha observado en la práctica, que las redes neuronales con retropropagación de tres capas, han dado buenos resultados a una gran variedad de problemas; considerando lo anterior, se construyeron configuraciones de redes neuronales de tres capas. Para determinar el número de neuronas en cada capa, considérese nuevamente (5.1): tenemos que la red neuronal tiene cuatro neuronas en la capa de entrada: Y, r, P y S, que son las variables explicativas, y tiene una neurona en la capa de salida: M, que es la variable dependiente.

Para calcular el número de neuronas en la capa oculta, aplicamos la siguiente expresión que se describió en el capítulo cuatro:

$$j = \frac{m \times e}{n + z} \quad (5.2)$$

donde:

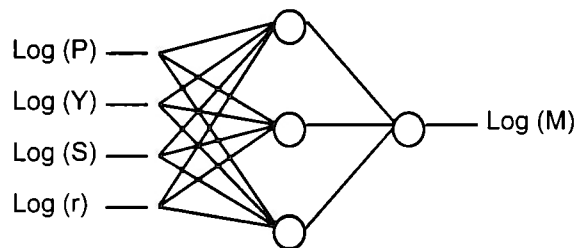
$j$	es el número de neuronas en la capa oculta.
$m$	es el número de muestras del conjunto de entrenamiento.
$e$	es el error permitido en porcentaje.
$n$	es el número de neuronas de entrada.
$z$	es el número de neuronas de salida.

En cuanto al conjunto de entrenamiento, tenemos que para el primer caso, consistente en el ajuste a la curva de la demanda de dinero, se conformó un conjunto de entrenamiento que inicia con la observación correspondiente a enero de 1983 y finaliza con la observación correspondiente a mayo de 1995; por lo que tenemos un conjunto de entrenamiento con 149 muestras.

Ahora, evaluando (5.2), tendremos, con un error permitido del diez por ciento que:

$$j = \frac{149 \times 0.10}{4 + 1} = 2.98$$

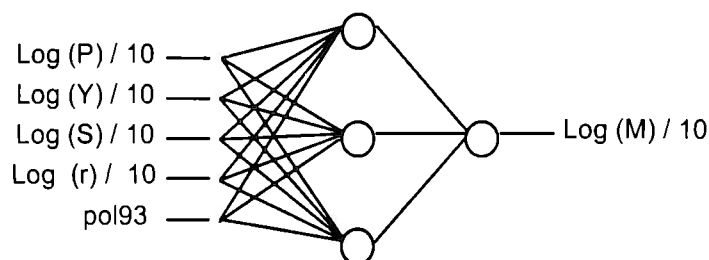
de este modo, la red neuronal, tendrá una configuración 4:3:1, es decir, cuatro neuronas de entrada, tres neuronas ocultas y una neurona de salida, esto se ilustra con la siguiente figura:



**Fig. 5.1: Configuración de la red para ajustar la curva de la demanda de dinero**

## 5.1 AJUSTE A LA CURVA DE LA DEMANDA DE DINERO.

En la Figura 5.1, se especifican las entradas y la salida que tendría una red neuronal para aplicar el modelo de acuerdo a (5.1), sin embargo, en cuanto al caso del ajuste de la curva, se construyó una red neuronal con la siguiente configuración:



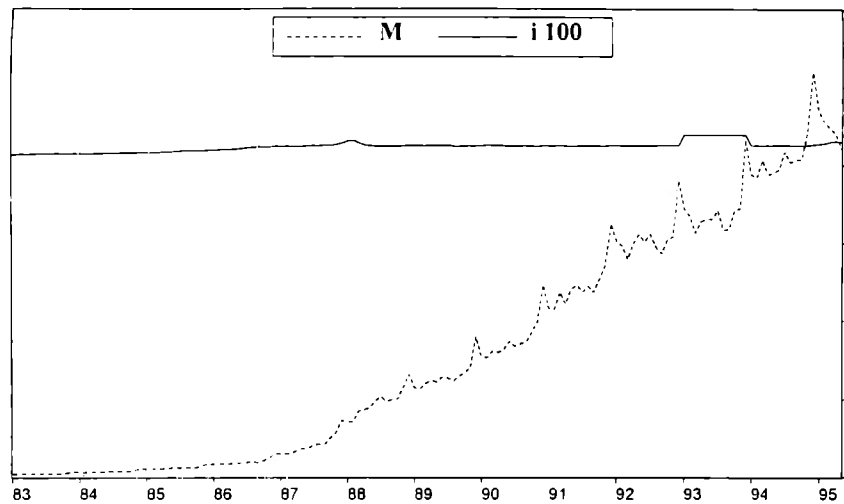
**Fig. 5.2: Configuración de la red incluyendo una variable ficticia**

Se puede observar que en la configuración de la Figura 5.4 se ha incluido la variable ficticia pol93; dicha variable, también se incluyó en el modelo econométrico ya que identifica un período para el cual existió una marcada influencia de factores que perturbaron la demanda de dinero. La configuración 5:3:1 que se muestra en la Figura 5.4 se obtuvo de la siguiente forma: dado que ahora se tienen cinco variables explicativas, la red tiene cinco neuronas de entrada; tenemos sólo una variable dependiente, por tanto, la red tiene una neurona de salida y, aplicando nuevamente (5.2) tenemos, para un error del diez por ciento y el mismo conjunto de entrenamiento de 149 muestras que:

$$j = \frac{149 \times 0.10}{5 + 1} = 2.483$$

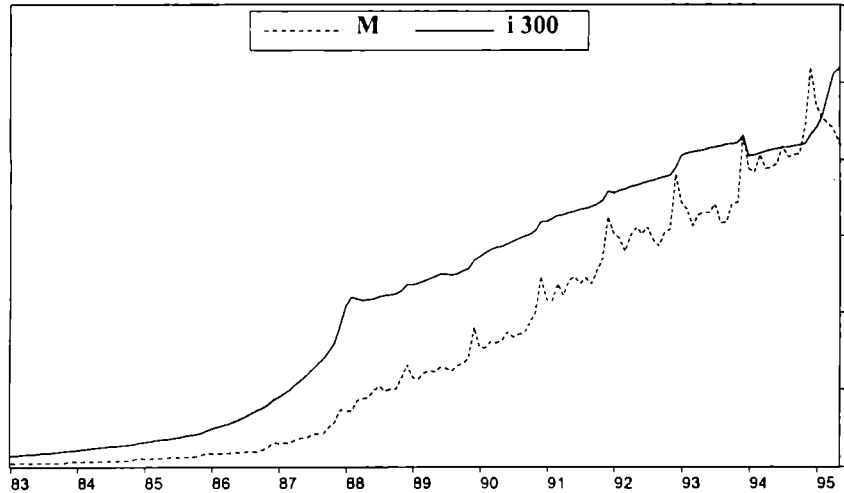
redondeando, se obtiene que la red tiene en su capa oculta tres neuronas.

El conjunto de producción para probar la red neuronal que se utilizó para ajustar la curva de la demanda de dinero, se obtuvo a partir de los datos contenidos en el conjunto de entrenamiento. Al finalizar cada fase de entrenamiento se realizó una fase de producción, esto con el fin de poder comparar los resultados del aprendizaje. Las siguientes gráficas muestran el avance en el aprendizaje, en cada gráfica se tiene la curva real de la demanda de dinero  $M$ , la curva de la respuesta de la red, y para algunos casos la curva de los residuales, asimismo, se indica la fase del entrenamiento a la cual corresponde.



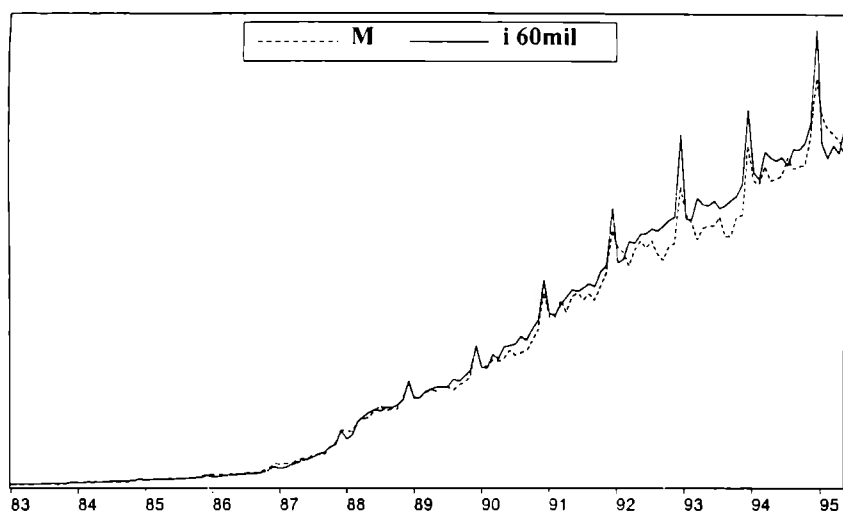
**Fig. 5.3: Respuesta de la red con 100 etapas de entrenamiento**

En ésta gráfica se muestra la respuesta de la red en una etapa temprana del entrenamiento; es obvio que la red no ha sido entrenada suficiente y por tanto su respuesta no da el menor indicio de que haya detectado la relación entre los patrones del conjunto de entrenamiento.



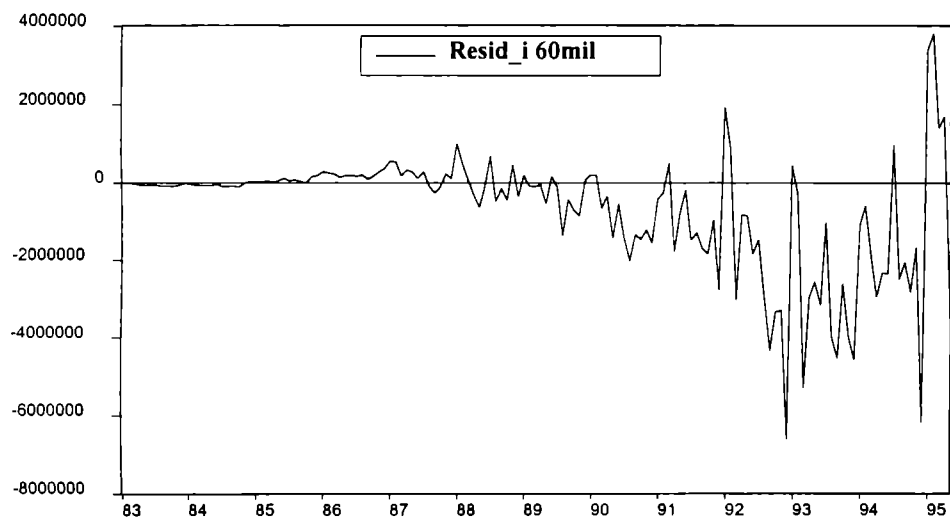
**Fig. 5.4: Respuesta de la red con 300 etapas de entrenamiento**

Después de entrenar la red con 300 etapas, se puede apreciar una considerable mejoría en su respuesta, asimismo se puede observar que la red ha identificado que la curva de la demanda de dinero presenta una marcada tendencia.



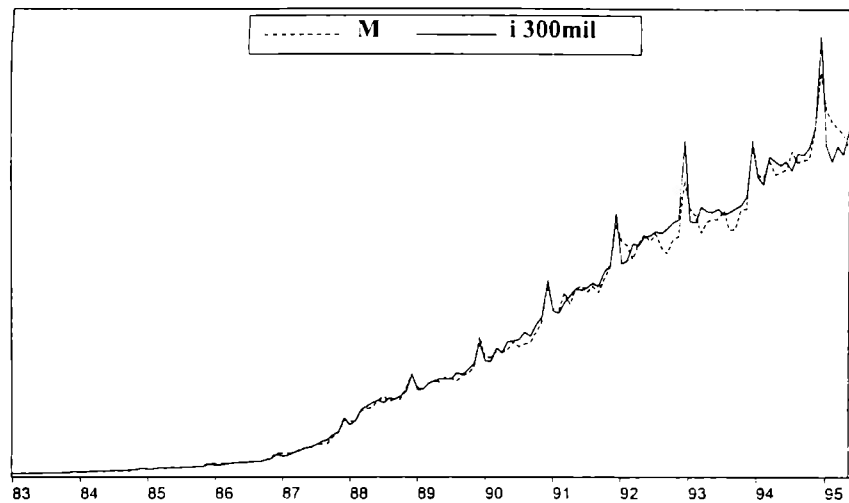
**Fig. 5.5: Respuesta de la red con 60,000 etapas de entrenamiento**

Después de dos fases de entrenamiento o 60,000 etapas, la red no sólo ha identificado la tendencia de la demanda de dinero, sino que también ha identificado que ésta presenta una marcada estacionalidad, esto se ve claramente para los meses de diciembre donde la red ha respondido con valores altos, en general, la red tiende a amplificar este efecto de estacionalidad.



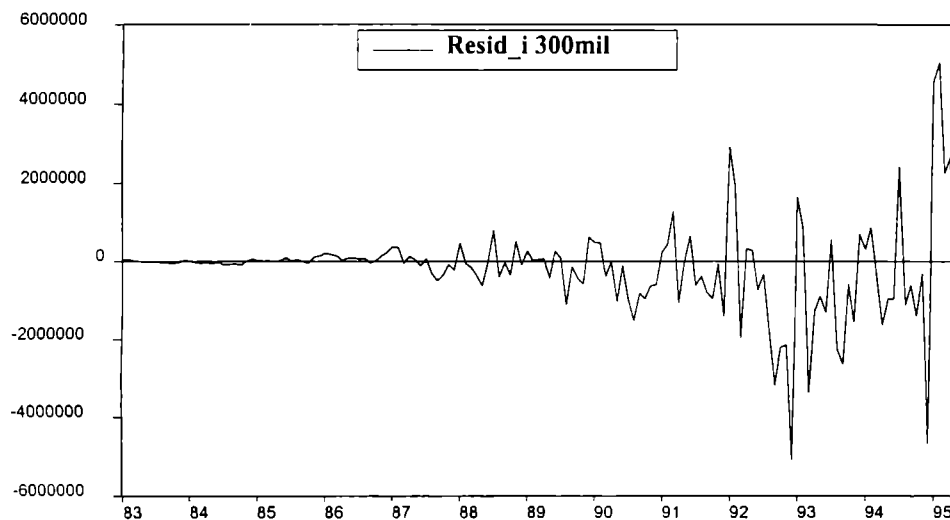
**Fig. 5.6: Residuales con 60,000 etapas de entrenamiento**

En ésta gráfica se puede observar que los residuales que se presentaron entre los valores reales de la demanda de dinero y los valores producidos por la red, tienden a crecer a medida que la demanda de dinero es mayor.



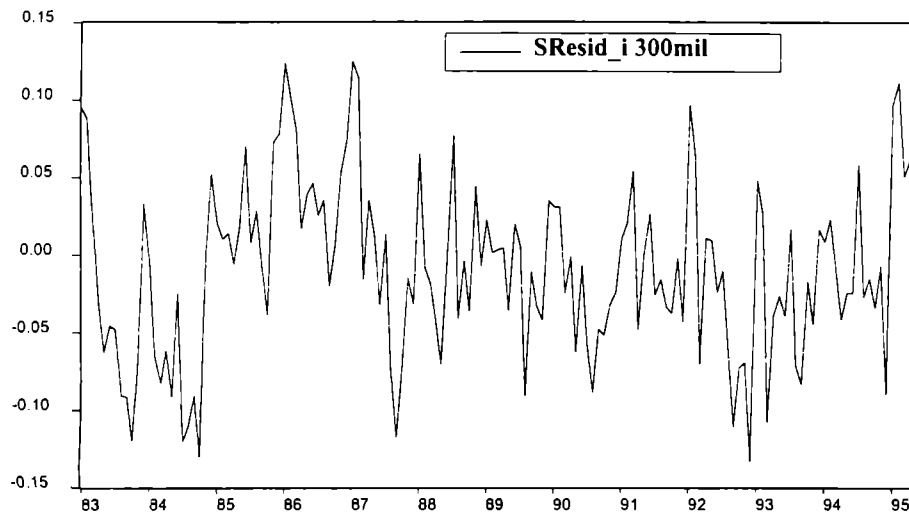
**Fig. 5.7: Respuesta de la red con 300,000 etapas de entrenamiento**

La respuesta de la red ha mejorado después de diez fases de entrenamiento o 300,000 etapas y el ajuste a la curva de la demanda de dinero se acerca aún más a la curva real: la tendencia es muy parecida a la que presenta la curva real y la red ya no amplifica tanto la estacionalidad.



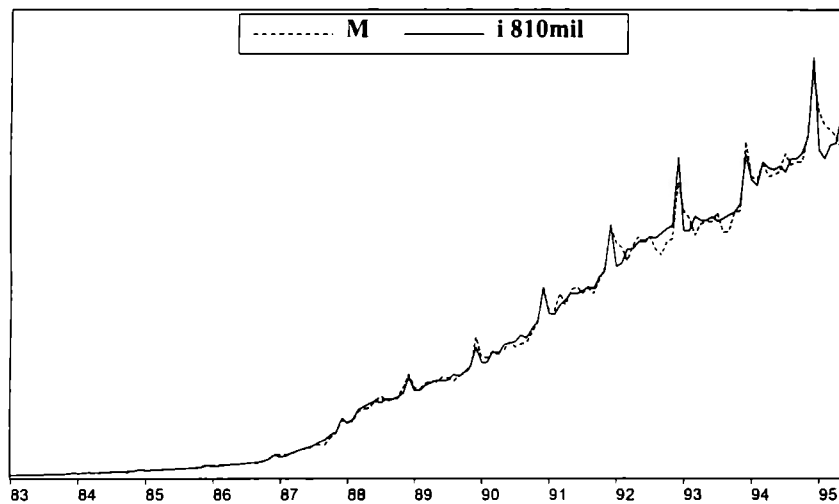
**Fig. 5.8: Residuales con 300,000 etapas de entrenamiento**

En esta gráfica se muestran los residuales después de diez fases de entrenamiento; se puede observar la misma tendencia a amplificar los errores a medida que la demanda de dinero es mayor. Sin embargo, es conveniente conocer los residuales estandarizados ya que éstos dan mayor información respecto a la magnitud del error que se tiene entre el valor real de la demanda de dinero y el valor ajustado. En la siguiente gráfica se muestran los residuales estandarizados.



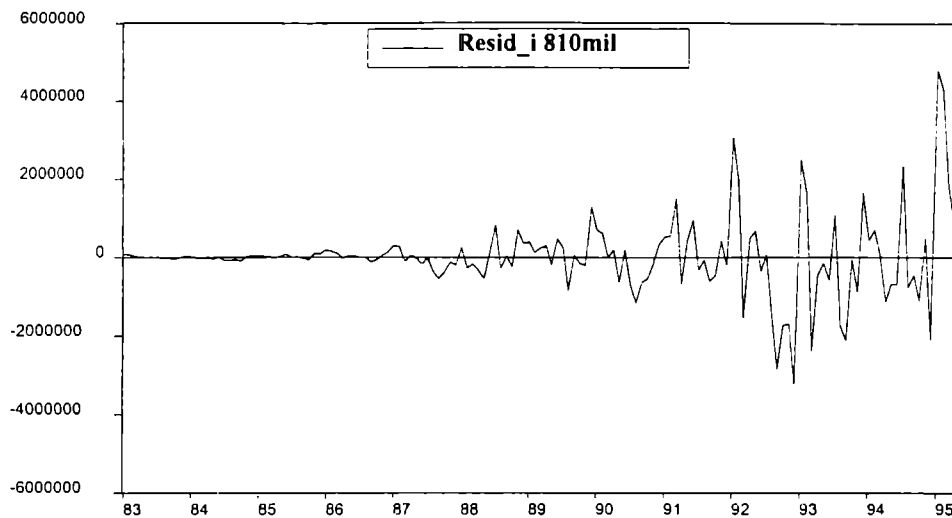
**Fig. 5.9: Residuales estandarizados, 300,000 etapas de entrenamiento**

Después de diez fases de entrenamiento los residuales estandarizados muestran que la mayor parte de las diferencias del ajuste a la curva de la demanda de dinero varían alrededor del 10% del valor real.

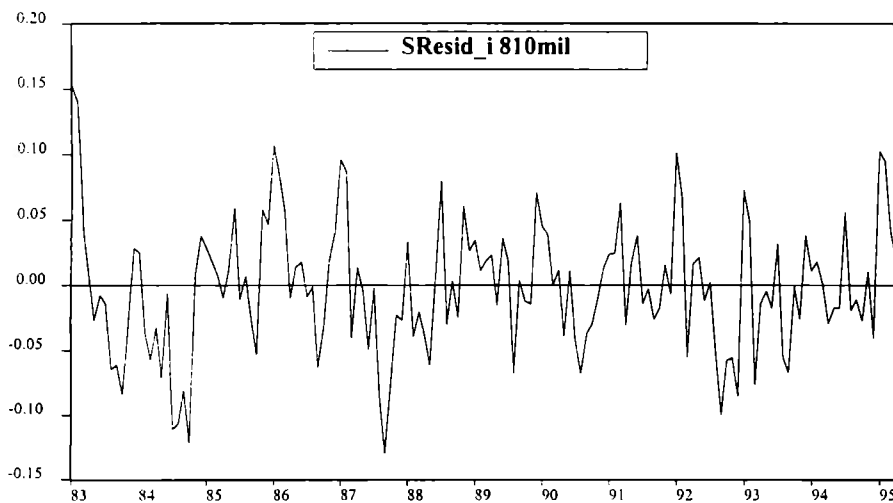


**Fig. 5.10: Respuesta de la red con 810,000 etapas de entrenamiento**

En ésta gráfica se muestra la respuesta de la red al finalizar 27 fases de entrenamiento, es decir 810,000 etapas, lo cual requirió aproximadamente de 13 horas con 30 minutos de proceso.



**Fig. 5.11: Residuales con 810,000 etapas de entrenamiento**



**Fig. 5.12: Residuales estandarizados con 810,000 etapas de entrenamiento**

La gráfica de la Figura 5.11 muestra los residuales después de 27 fases de entrenamiento; el comportamiento de los errores es similar al que se presentó cuando se tenían sólo diez fases de entrenamiento pero con menos variaciones.

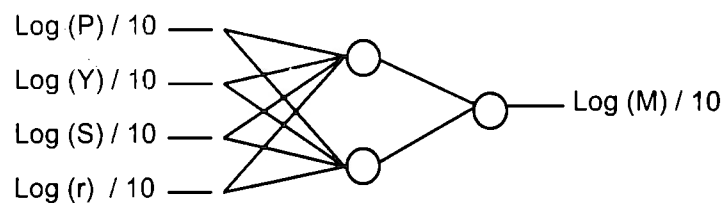
La gráfica de la Figura 5.12 muestra los residuales estandarizados, se puede apreciar que en general, los errores se encuentran dentro de la banda de  $\pm 10\%$  del valor real.

## 5.2 PRONÓSTICO DE LA DEMANDA DE DINERO.

Para el segundo caso, consistente en realizar el pronóstico de la demanda de dinero, se conformó un conjunto de entrenamiento con las primeras 120 observaciones del conjunto de datos, es decir, se consideró el período de enero de 1983 a diciembre de 1992 por lo que tenemos un conjunto de entrenamiento con 120 muestras; el conjunto restante, es decir las muestras correspondientes al período de enero de 1993 a mayo de 1995 se utilizaron como conjunto de producción para obtener el pronóstico de la demanda de dinero. Nótese que ahora la variable ficticia pol93 no es necesaria debido a que el año 1993 ya no forma parte del conjunto de entrenamiento. Por lo anterior, la red neuronal para este caso, tendrá sólo cuatro neuronas de entrada, una neurona de salida, y evaluando nuevamente (5.2), tenemos que:

$$j = \frac{120 \times 0.10}{4 + 1} = 2.4$$

Por lo que la configuración de la red para este caso es 4:2:1, como se muestra en la siguiente figura:



**Fig. 5.13: Configuración de la red para pronosticar la demanda de dinero**

En la siguiente gráfica se tiene para el período de enero de 1985 a diciembre de 1992 la respuesta de la red después de 14 fases de entrenamiento, esto es, 420,000 etapas; fue en esta fase del entrenamiento cuando el error promedio del sistema disminuyó al 10%, dicho entrenamiento se realizó en aproximadamente 4 horas y 40 minutos de proceso. En la misma gráfica se muestra el pronóstico de la red de la demanda de dinero para el período de enero de 1993 a mayo de 1995.





**Fig. 5.14: Ajuste y pronóstico de la curva de la demanda de dinero**

El ajuste a la curva de la demanda de dinero es similar al que se obtuvo en el primer caso; por otro lado, podemos observar que la red pronosticó el año de 1993 en forma aceptable, pero a partir de enero de 1994 el pronóstico de la red fue inferior al valor real de la demanda de dinero; este error se incrementa a medida que el período pronosticado es mayor.

Podemos observar que el pronóstico de la demanda de dinero en general no resulta muy acertado, en especial, a partir del segundo año de pronóstico; por otro lado, tratar de pronosticar más allá de 12 meses no es práctico, ya que a medida que el período pronosticado se prolongue, los errores se incrementarán considerablemente. La limitante anterior, se presenta independientemente del método que se aplique para realizar dicho pronóstico. Sin embargo, la red logró reproducir un comportamiento de la demanda de dinero para 30 meses de pronóstico.

Este mismo caso se intentó resolver con un modelo econométrico pero no se obtuvieron resultados debido a que el conjunto de muestras se reduce a sólo 120, y al tener menos muestras, se incrementa la multicolinealidad que existe entre las variables independientes, esto es una limitante para el método de mínimos cuadrados ordinarios ya que este método requiere invertir una matriz que por la característica de multicolinealidad entre las variables, presenta vectores linealmente dependientes.

## **CONCLUSIONES**

## CONCLUSIONES

Los objetivos que se plantearon para este trabajo se cumplieron satisfactoriamente. El primer objetivo era desarrollar un modelo con redes neuronales artificiales con retropropagación del error para pronosticar las tendencias a corto y mediano plazo del volumen de dinero en efectivo requerido para satisfacer la demanda nacional y de acuerdo a los resultados obtenidos, se mostró que con esta técnica de Inteligencia Artificial se pueden lograr buenos resultados y que puede utilizarse como una herramienta adicional para realizar pronósticos de series de tiempo económicas.

El segundo objetivo era dar a conocer en el Banco de México el uso de estas técnicas computarizadas de la Inteligencia Artificial y mostrar que tienen un potencial que puede apoyar a la toma de decisiones. Para lograr este objetivo, el trabajo se planteó como una aplicación práctica que mostrara resultados útiles para una de las funciones que lleva a cabo este Instituto Central, la cual consiste en satisfacer la cantidad demandada de dinero en efectivo. Desde su inicio, el proyecto despertó el interés de los investigadores que ahí laboran, lo anterior facilitó cumplir con el segundo objetivo: dar a conocer esta técnica de la Inteligencia Artificial como herramienta para pronosticar series de tiempo económicas.

Una vez obtenidos los resultados, se organizaron algunas pláticas para presentar dichos resultados y difundir a otras áreas de esa institución el uso de dichas técnicas, asimismo, dentro del trabajo se incluye un capítulo dedicado a la teoría de las Redes Neuronales para que se tome como introducción al tema para aquellos investigadores interesados en conocer estas técnicas de la Inteligencia Artificial.

Este trabajo ha servido como punto de partida para desarrollar nuevas aplicaciones, pero también causó gran incertidumbre en cuanto a que no existen suficientes indicadores analíticos para poder evaluar el desempeño de este tipo de técnicas, esto a su vez ha motivado un interés adicional para investigar más sobre estas técnicas.

Como trabajos a futuro podemos plantear que dado que se mostró que las Redes Neuronales pueden aplicarse para pronosticar variables a partir de otras variables económicas, podemos desarrollar más proyectos prácticos aplicando las Redes Neuronales para pronóstico de éste tipo

de datos; asimismo, investigar más éste tipo de modelos de la Inteligencia Artificial con la finalidad de obtener mejores indicadores para poder evaluar su desempeño y estar en condiciones de hacer una comparación más objetiva respecto a otros modelos.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Dornbusch, R. y Fischer, E. "Macroeconomía" 6ª Ed. McGraw-Hill, Madrid, 1992.
- [2] Banco de México, Dirección de Emisión. "Fabricación de Billeto. El Caso Mexicano". Estudios Especiales No. E-7, 1992.
- [3] Baumol W. "The Transactions Demand for Cash: An Inventory Theoretic Approach" Quaterly Journal of Economics, 66 noviembre 1952, pp. 545-556.
- [4] Tobin J. "The Interest-Elasticity of Transactions Demand for Cash" The Review of Economics and Statistics, Volume XXXVIII, number 3, august 1956, pp. 241-247
- [5] Laidler D. "La Demanda de Dinero Teorías y Evidencia Empírica " 2ª. Ed. Antoni Bosch, Barcelona, 1977.
- [6] Sargent Thomas J. "Macroeconomic Theory", Academic Press, Inc., 1987.
- [7] Pindyck R. y Rubinfeld D. "Econometric Models and Economic Forecasts", Mc. Graw-Hill, Inc., 1991.
- [8] Bannock G., Baxter R. y Rees R. "Diccionario de Economía", Trillas, S.A. de C.V., 1988.
- [9] Guerrero V. "Análisis Estadístico de Series de Tiempo Económicas", Colección CBI, Universidad Autónoma Metropolitana, 1991.
- [10] Arbib M. "Cerebros, Máquinas y Matemáticas", Alianza Editorial, 1976.
- [11] Mei Lin y Frank C. Lin "Analysis of Financial Data Using Neural Nets" The Neural Network Special Report, AI Expert, 1993.
- [12] Pao Yoh-Han, "Adaptive Pattern Recognition and Neural Networks", Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1989.
- [13] Chavoya Oscar, Apuntes del curso "Reconocimiento Estadístico de Patrones" del Programa de Maestría en Ciencias Computacionales, DGI, ITESM-CEM, 1993.

- [14] Haykin Simon, "Neural Networks" Macmillan College Publishing Company, Inc., 1994.
- [15] Skapura David, "Building Neural Networks" Addison-Wesley Publishing Company, 1996.
- [16] Wiener Norbert, "Dios & Golem, S.A." Siglo XXI Editores, S.A. de C.V. , 1988.