

**INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS
SUPERIORES DE MONTERREY**

CAMPUS CIUDAD DE MEXICO



VALOR EN RIESGO NO LINEAL

DOCTORADO EN ADMINISTRACION

**TESIS PRESENTADA POR
ELIAS RAMIREZ RAMIREZ**

**ASESOR
DR. ARTURO LORENZO VALDES**

OCTUBRE 2004



RESUMEN

Las metodologías de Valor en Riesgo (VaR) que se basan sobre combinaciones lineales de los factores de riesgo, tienden a sobreestimar el valor en riesgo real de la posición. La técnica más ampliamente utilizada conocida como el enfoque o metodología delta-normal involucra el considerar el efecto lineal del factor (o factores) de riesgo en cada activo, lo cual permite considerar inclusive las correlaciones entre los factores de riesgo. Sin embargo, en aquellos portafolios que incluyen bonos u opciones la metodología delta sobre estima la posición en riesgo. En este trabajo se propone un enfoque cuadrático basado en el cálculo de la delta y la gamma del activo. Se desarrolla en expansión el cambio de un portafolio con n activos y m factores de riesgo, se analiza la distribución cuadrática del cambio del portafolio suponiendo una distribución normal en los cambios porcentuales de los factores de riesgo y se trabaja con los momentos de la distribución cuadrática para que a través de la expansión Cornish-Fisher se desarrollen expresiones para calcular el Valor en Riesgo de un portafolio con n activos y m factores de riesgo. Por último se presenta un ejemplo de aplicación de la metodología.

INDICE

Introducción.....	1
1. Precursores del Valor en Riesgo.....	5
1.1. Medidas basadas en el valor nocional.....	5
1.2. Medidas de Sensibilidad de Tasa de Interés.....	6
1.3. Medidas de Sensibilidad basadas en Opciones.....	20
1.4. Debilidad de las medidas tradicionales.....	35
2. Valor en Riesgo.....	36
2.1 Origen y desarrollo del Valor en Riesgo.....	36
2.2. El concepto del Valor en Riesgo.....	37
2.3. Metodologías para calcular el Valor en Riesgo.....	42
2.3.1. Metodologías basadas en simulaciones.....	43
2.3.2. Metodología analítica de Varianza-Covarianza.....	54
2.3.3. Ventajas y Desventajas de cada una de las metodologías para calcular el VaR.....	65
3. Estimación de la matriz de Varianza-Covarianza usando el modelo GARCH(1,1).....	68
3.1. El Modelo GARCH (1,1).....	69
3.2. Estimación de Parámetros en el modelo GARCH(1,1).....	74
3.3. Pruebas del modelo GARCH.....	76
4. Metodología.....	80
4.1. Modelo Lineal.....	80
4.2. Expansiones en Serie de Taylor para el cambio en el valor del Portafolio ...	82
4.3. Modelo Delta de Varianza-Covarianza.....	85
4.4. Modelo Cuadrático Delta-Gamma de Varianza-Covarianza.....	87

4.5. Aplicación del modelo delta y el cuadrático delta-gamma a portafolios de activos.....	95
--	----

ANEXOS

Anexo A: Derivación de la fórmula de Valor en Riesgo lineal cuando los rendimientos del portafolio se distribuyen normalmente.....	101
Anexo B: Estimación de la matriz de Varianza Covarianza con pesos iguales y EWMA.....	105
Anexo C: Derivación de la fórmula de cambio de un portafolio con m factores de riesgo.....	112
Anexo D: Derivación de los momentos del cambio en el valor de un portafolio cuando los activos dependen de un solo factor de riesgo con una distribución de densidad normal.....	115
Anexo E: Expansión de Cornish-Fisher.....	119
Anexo F: Momentos de formas cuadráticas de una distribución normal.....	121
Anexo G: Backtesting (Verificación del Modelo).....	123
Anexo H: Precisión del Valor en Riesgo.....	129
Conclusiones.....	134
Bibliografía.....	136

LISTA DE FIGURAS Y TABLAS

FIGURAS

1.1. Aproximación del cambio del precio de un bono basado en duración	13
1.2. Aproximación del cambio del precio de un bono basado en duración y convexidad.	18

TABLAS.

1. Ventajas y Desventajas del Método de Simulación Histórica.....	65
2. Ventajas y Desventajas del Método de Simulación MonteCarlo.....	66
3. Ventajas y Desventajas del Método analítico de Varianza-Covarianza	67
4. Parámetros GARCH Portafolio 1.....	95
5. Parámetros GARCH Portafolio 2.....	96
6. Valores en Riesgo Obtenidos del Portafolio 1.....	97
7. Valores en Riesgo Obtenidos del Portafolio 2.....	97
8. BackTesting del Portafolio 1.....	98
9. BackTesting del Portafolio 2.....	98
10. Valores críticos para la distribución normal.....	104
11. Valores Críticos de Kupiec.....	126
12. Zonas de acuerdo al BIS.....	127
13. Multiplicadores del Requerimiento de Capital de acuerdo al BIS.....	128

INTRODUCCIÓN

La publicación en octubre de 1994 del documento técnico y bases de datos de RiskMetrics de JP Morgan, las pérdidas del banco de Barings en 1995 y su posterior quiebra, las pérdidas del condado de Orange en 1994, las pérdidas del banco Daiwa en 1995, entre otros, y la Enmienda al Acuerdo de Capital para incorporar Riesgos de Mercado publicada por parte del Banco de Pagos Internacionales (BIS) en enero de 1996, fueron hitos que provocaron un interés considerable por parte del medio financiero y académico por desarrollar métodos cada vez más robustos para cuantificar el nivel asociado de riesgo en las posiciones de las instituciones financieras.

Dentro de estos hitos, la Enmienda¹ al Acuerdo de Capital de 1988² permitió el uso de modelos internos de administración de riesgo para los bancos, una vez que estos cumplieran con ciertos requisitos; complementando a lo que anteriormente se había propuesto de que se usara una metodología estandarizada para el cálculo del requerimiento de capital. Los modelos internos incluían el uso de metodologías de Valor en Riesgo calculadas a través de la matriz de Varianza-Covarianza, simulación histórica o simulación MonteCarlo.

Para poder cuantificar el Valor en Riesgo, es necesario hacer supuestos importantes sobre la forma de la distribución de los cambios relativos en los precios de los activos financieros. De manera empírica, los investigadores han encontrado que en general los rendimientos no se comportan con una distribución normal y en su lugar presentan colas anchas, sesgo y periodos de volatilidad agrupados³. Lo anterior ha provocado que para modelar los rendimientos se busquen diversas alternativas como el uso de distribuciones t-student, mezclas de

¹ Basle Committee on Banking Supervision [1996], "Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks", Bank For International Settlements, Enero

² Basle Committee on Banking Supervision [1988], International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards (BASLE I), Bank For International Settlements, Julio

³ Dentro de los trabajos seminales en el tema de las distribuciones empíricas de los rendimientos se encuentran Mandelbrot, B. [1963], Fama, E. [1965] y Barndorff-Nielsen, O.E. [1977] y [1978].

distribuciones normales, brincos de Poisson, modelos de dependencia intertemporal como el ARCH y el GARCH, distribuciones hiperbólicas, etc.

Por otro lado, se tiene la relación no lineal de los instrumentos financieros derivados con el activo subyacente, lo cual provoca que el uso de una aproximación de Taylor de primer orden no sea suficiente para capturar el cambio en el valor del portafolio (que contiene derivados) debido al cambio en los precios de los activos financieros.

El propósito de este trabajo es el desarrollo de una metodología basada en aproximaciones de segundo orden para el cálculo del Valor en Riesgo para portafolios con m factores de riesgo y n activos, denotada como Modelo Cuadrático Delta-Gamma de varianza-covarianza, en el cual los activos que integran el portafolio presentan una relación no lineal con el factor de riesgo (y de manera general cualquier relación no lineal entre el factor de riesgo y el valor del portafolio). La metodología propuesta se presenta como un conjunto de fórmulas matriciales las cuales permiten el cálculo del Valor en Riesgo del Portafolio, utilizando como insumos las matrices de varianza-covarianza de los factores de riesgo y la primera y segunda derivadas de las relaciones entre los factores de riesgo y los activos que integran el portafolio; la cual es compatible con los métodos de actualización de matrices de varianza-covarianza como EWMA y GARCH.

Para el desarrollo de este trabajo se parte del supuesto de que los cambios relativos de los factores de riesgo tienen una distribución normal y se usa una aproximación Delta-Gamma para el cambio del valor del portafolio. A través de esta aproximación se encuentra la función generadora de momentos del cambio del portafolio, con lo que se corrige el supuesto del modelo Delta-Gamma Normal de que la aproximación de segundo orden del cambio del portafolio se distribuye normalmente⁴. Una vez que se conoce la función generadora de momentos se

⁴ Dowd [1998].

está en condiciones de utilizar la aproximación de Cornish-Fisher para encontrar el Valor en Riesgo.

Sin embargo, y a efecto de corregir el supuesto de la distribución normal en los cambios relativos de los factores de riesgo, se puede utilizar el modelo de actualización GARCH para las volatilidades, la cual de acuerdo a Kim, D y Kon, S. [1994] permite modelar la distribución no condicional de los cambios relativos de una manera superior a otros métodos como la distribución t-student, la mezcla de distribuciones normales o los brincos de Poisson. No obstante, en la literatura existen otros métodos basados en distribuciones hiperbólicas, exponenciales, gaussianas inversas, valores extremos, mejoras del modelo GARCH como AGARCH y EGARCH, entre otras, que se usan para modelar los rendimientos de los activos financieros, contra los cuales el modelo GARCH no necesariamente se ajusta mejor a los datos.

Del modelo GARCH se desarrollan expresiones para obtener los parámetros a partir de la información histórica de los factores de riesgo. De esta forma, la matriz actualizada de Varianza-Covarianza se usa junto con el modelo propuesto para encontrar la medida de Valor en Riesgo del portafolio. Por último, siguiendo a Gupton, G.M., Finger, C.C, y Bhatia, M (1997), se presenta una metodología para determinar la precisión del estimador del Valor en Riesgo.

En el presente trabajo se desarrollan 4 capítulos. El primer capítulo se relaciona con los precursores del Valor en Riesgo y se explican las medidas basadas en el valor nocional, las basadas en la sensibilidad de tasa de interés y las basadas en las "griegas" de las opciones financieras. En el segundo capítulo se explica el origen y desarrollo de las metodologías del Valor en Riesgo explicando las metodologías basadas en simulaciones, histórica o MonteCarlo, y el método analítico de Varianza-Covarianza. En el tercer capítulo se desarrollan las expresiones que permiten el uso del modelo GARCH(1,1), a partir de datos históricos a fin de actualizar la matriz de Varianza-Covarianza de los cambios

relativos de los factores de riesgo, y se desarrollan las ecuaciones para estimar los parámetros. En el cuarto capítulo, se desarrolla la metodología para el cálculo del Valor en Riesgo a través de los métodos Lineal Delta y el Cuadrático Delta-Gamma, obteniendo la función generadora de momentos y desarrollando las expresiones para encontrar el Valor en Riesgo del portafolio utilizando la aproximación Cornish-Fisher. Asimismo, se aplica el modelo desarrollado para dos portafolios, el primero compuesto por acciones y el segundo compuesto por bonos cupón cero.

CAPITULO I

PRECURSORES DEL VALOR EN RIESGO.

El Valor en Riesgo fue diseñado para medir el riesgo de mercado. Representa un intento por medir el riesgo de pérdida para un portafolio, resultante de la variación de los factores de mercado. Sin embargo, el VaR no es la primera medida de este tipo. Como lo establecen varios autores entre ellos Smithson [1998], la medición del riesgo ha evolucionado de indicadores simples como el valor nominal de un activo individual, pasando por medidas como la duración y convexidad para un bono, hasta llegar a metodologías sofisticadas basadas en el Valor en Riesgo. Cada medida ha sido aplicada en su primera etapa para medir la exposición para un solo activo y entonces se han adaptado para medir el riesgo en portafolios complejos (que pueden incluir derivados). El desarrollo de los diferentes tipos de medición o modelos utilizados para el riesgo se ha visto impulsado en una gran medida una vez que los desastres financieros demuestran las limitaciones del modelo vigente, utilizado para cuantificar el riesgo.

1.1. Medidas basadas en el Valor nominal.

El enfoque nominal mide el riesgo como un aproximación del valor nominal, o nominal, de un activo. De esta forma el riesgo de un portafolio se calcula simplemente como la suma de los nominales de cada uno de los activos que forman ese portafolio.

Sin embargo, como lo indica Crouhy , Galai y Mark [2001] este método presenta varias deficiencias entre ellas:

- No diferencia entre las posiciones largas y cortas.
- No refleja la volatilidad de los precios y sus correlaciones.

- En algunos activos existe una discrepancia grande entre la cantidad en riesgo y el valor nocional (por ejemplo en el caso de los derivados).
- No refleja las posiciones de cobertura utilizadas para disminuir el riesgo.

1.2. Medidas de Sensibilidad de Tasa de Interés.

Dentro de las medidas principales de sensibilidad para la tasa de interés se encuentran: el diferencial de vencimientos (maturity gap), valor de un 01, duración y convexidad.

Diferencial de Vencimientos (Maturity Gap).

También conocido como análisis de brecha, diferencial de fondeo, brecha de vencimientos, entre otros. A diferencia de otras medidas, el Diferencial de vencimientos es una medida de “flujos” mas que de un “precio”. Esto es, el diferencial de vencimientos se enfoca en el impacto de un cambio en la tasa de interés en el ingreso y/o gastos, en lugar del valor del portafolio al cierre (mark to market). De hecho, el análisis de vencimientos se emplea principalmente por las instituciones financieras para medir el impacto de los cambios en las tasas de interés sobre sus ingresos netos por intereses (Net Interest Income, NII). Bajo este enfoque, todos los activos y pasivos se clasifican en grupos de acuerdo a si sus ingresos (en el caso de activos) o los costos por intereses (en el caso de pasivos) varían con el nivel general de las tasas de interés. De esta forma es importante observar que el análisis de diferencial o brecha se basa en los ingresos por intereses o costos en los activos o pasivos y no en el efecto de los cambios en las tasas de interés en el valor del activo. La brecha es la diferencia entre la cantidad de los activos sensible a las tasas de interés y la de los pasivos sensibles a las tasas de interés. Esta brecha comúnmente se expresa de varias formas, la más simple es la diferencia entre las cantidades de activos y pasivos sensibles a las tasas de interés.

$$\$Gap = \$ASI - \$PSI$$

donde \$ASI es la cantidad de activos sensibles a la tasa de interés y \$PSI es la cantidad de los pasivos sensibles a la tasa de interés. Algunas medidas relativas utilizadas son la brecha relativa y la razón de sensibilidad a la tasa de interés.

$$Brecha\ relativa = \frac{\$Gap}{\$Activos\ totales}$$

$$Razon\ de\ sensibilidad = \frac{\$ASI}{\$PSI}$$

De esta forma, una institución financiera en un tiempo dado será sensible a los activos a los pasivos. Si es sensible a los activos (por ejemplo, que tenga \$100 millones en activos sensibles a la tasa de interés y \$50 millones solo a los pasivos sensibles a la tasa de interés), tendría una brecha positiva, una brecha relativa positiva, y una razón de sensibilidad mayor que la unidad. De manera inversa, si es sensible a los pasivos (por ejemplo, que tenga \$50 millones en activos sensibles a la tasa de interés y \$100 millones en pasivos) tendrá una brecha negativa, una brecha relativa negativa, y una razón de sensibilidad menor que la unidad.

Las instituciones financieras que son sensibles a los activos experimentan un incremento en su ingreso neto por intereses cuando las tasas de interés aumentan y una disminución en su ingreso neto por intereses cuando las tasas de interés caen. Al contrario, las que son sensibles en los pasivos experimentan una disminución en su ingreso neto por intereses cuando las tasas de interés aumentan y un aumento en su ingreso neto por intereses cuando las tasas de interés aumentan.

El cambio esperado en el ingreso neto por intereses debido a una variación en las tasas de interés se ilustra en la siguiente fórmula:

$$E(\Delta NII) = \$ASI(E(\Delta r)) - \$PSI(E(\Delta r)) = \$Gap(E(\Delta r))$$

donde $E(NII)$ es el cambio esperado en el ingreso neto por intereses y $E(\Delta r)$ es el cambio esperado en la tasa de interés, $\$ASI(E(\Delta r))$ es el cambio en los activos sensibles a la tasa de interés debido al cambio esperado en la tasa de interés y $\$PSI(E(\Delta r))$ es el cambio en los pasivos sensibles a la tasa de interés debido al cambio esperado en la tasa de interés.

Por ejemplo, suponga que una institución financiera tiene \$55 millones en activos sensibles a la tasa de interés y \$35 millones en pasivos sensibles a la tasa de interés, y entonces tiene un Gap de \$20 millones, por lo que es sensible en los activos. Si la tasa de interés se elevara de 8% a 10%, el ingreso neto por intereses se elevaría en \$4 millones.

Valor de un 01¹.

El valor de un 01 (también conocido como DV01²) mide el cambio en el valor de un activo o pasivo asociado con un cambio paralelo de un punto base en la curva de rendimientos. Es decir:

$$\text{Valor de un 01} = \frac{\Delta V}{\Delta R} \quad (1.1)$$

donde ΔV es el cambio en el valor del activo o pasivo y ΔR se define como el cambio de la tasa de interés de un punto base. El valor de un 01 describe la sensibilidad de los precios de los activos respecto a un cambio paralelo en la curva de estructura de tasas de un punto base.³

¹ Algunos autores como Fabozzi [1993] lo llaman el valor precio de un punto base (Price Value of a Basis Point)

² Es una abreviación utilizada para el cambio ("delta") en el valor del activo debido a un cambio en el rendimiento de un punto base, es decir un uno por ciento de punto porcentual.

³ La medida del Valor de un 01 es consistente con la medida convencional de duración utilizada para los bonos.

Duración.

La duración fue propuesta casi simultáneamente por Frederick Macaulay (1938)⁴ y Sir John Hicks (1939). Sin embargo, ambos investigadores tenían diferentes objetivos. El objetivo de Macaulay era definir una medida por la cual dos bonos con vencimientos comunes pero diferentes estructuras de pagos podían ser comparados. En el sentido de Macaulay, la duración mide, en promedio, cuando se recibe el valor del bono. Hicks intentaba medir la sensibilidad a las tasas de interés de un bono particular. En la tradición de Hicks, la duración proporciona una medida de la exposición de los bonos a las tasas de interés. Usando la notación de Hicks, se puede definir la duración (D) como:

$$D = - \frac{\text{cambio porcentual en el valor}}{\text{cambio porcentual en la tasa de descuento}}$$

Debido a que el cambio porcentual es simplemente el cambio sobre el total, entonces la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} D &= - \frac{\Delta V/V}{\Delta r/(1+R)} \\ &= - \left(\frac{\Delta V}{\Delta r} \right) \left(\frac{1+R}{V} \right) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Como se podrá observar en las ecuaciones correspondientes al valor de un 01 y de duración, se tiene que ambas son medidas lineales de riesgo. En ambos casos, la medida de riesgo es la pendiente en la gráfica de valor contra tasa de interés, $\Delta V/\Delta R$. El problema radica aquí en que el valor de un 01 y la duración son solo aproximaciones lineales del riesgo verdadero. Sin embargo, esta aproximación

⁴ Macaulay Frederick, "Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States Since 1865" (National Bureau of Economic Research, 1938).

solo sirve para cambios pequeños y en caso de cambios mayores el error de aproximación se hace mayor.

Para definir con mayor detalle a la duración, es necesario definir algunos conceptos relacionados a bonos.

Los bonos prometen a sus tenedores una serie de pagos periódicos hasta la fecha de vencimiento del acuerdo. Este conjunto de flujos se ve caracterizado a través de:

- El vencimiento del bono, n , en el cual el principal, o valor nominal, del bono se paga al tenedor.
- Tasa de cupón, expresada en términos anuales, la cual permite calcular el pago de los cupones periódicos que se realizan hasta el vencimiento del bono.

La fórmula para calcular el precio del bono viene dada por:

$$B = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{(1 + R_i)^i} \quad (1.3)$$

En donde:

c_i : son los pagos de flujos de efectivo periódicos.

R_i : es la tasa de interés spot del periodo

n : es el número de periodos

B : es el precio del bono

i : son los tiempos en que se reciben los flujos de efectivo.

El rendimiento al vencimiento de un bono (Yield to Maturity), es la tasa de interés que satisface la relación:

$$B = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{(1 + R)^i} \quad (1.4)$$

Es decir que el rendimiento al vencimiento de un bono es la tasa de interés que hace que la suma de los valores presentes de los flujos futuros de efectivo del bono sean iguales a su precio.

La duración del bono se define como el promedio ponderado de los tiempos de cada flujo de efectivo, donde los pesos son los valores presentes de cada flujo de efectivo (utilizando el rendimiento al vencimiento) divididos por el precio del bono. Es decir:

$$D = \sum_{i=1}^n i \left[\frac{\frac{c_i}{(1+R)^i}}{B} \right] \quad (1.5)$$

donde el término entre paréntesis es la razón del valor presente de los flujos en el tiempo t_i con respecto al precio del bono.⁵

Derivando la ecuación (1.4) con respecto a R se tiene:

$$\frac{dB}{dR} = - \sum_{i=1}^n \frac{ic_i (1+R)^{i-1}}{(1+R)^{2i}} \quad (1.6)$$

⁵ La duración en término de años se calcula con: Duracion(años)=Duracion(periodos)/k , donde k representa el número de periodos en un año.

Reagrupando la ecuación (1.6) se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{dB}{dR} &= -\sum_{i=1}^n \frac{ic_i(1+R)^i}{(1+R)^{2i}(1+R)} \\ &= -\sum_{i=1}^n \frac{ic_i}{(1+R)^i(1+R)} \\ &= -\frac{1}{(1+R)} \sum_{i=1}^n i \frac{c_i}{(1+R)^i}\end{aligned}\tag{1.7}$$

Utilizando (1.5) puede escribirse la última expresión como:

$$\frac{dB}{dR} = -\frac{BD}{(1+R)}\tag{1.8}$$

Si se realizan pequeños desplazamientos paralelos de la curva de rendimientos, se tiene que la ecuación (1.8) se aproxima a:

$$\Delta B = -\frac{BD}{(1+R)} \Delta R\tag{1.9}$$

o también:

$$\frac{\Delta B}{B} = -\frac{D}{(1+R)} \Delta R\tag{1.10}$$

Si a la duración, en el caso de la tasa de rendimiento compuesta discretamente, la dividimos entre $(1+R)$, se tiene :

$$D^* = \frac{D}{(1+R)}\tag{1.11}$$

Y además de (1.8):

$$D^* = \frac{1}{B} \frac{dB}{dR} \quad (1.12)$$

A la expresión de D^* en (1.11) y (1.12) se le conoce como la duración modificada.

De acuerdo a la ecuación (1.10) se tiene que existe una relación lineal entre el cambio porcentual en el valor del bono y el cambio en el rendimiento (desplazamiento paralelo en la curva de rendimiento). A mayor duración, mayor es la volatilidad en el precio. Sin embargo, debido a que la relación precio-rendimiento de un bono no es lineal, la duración es solo una aproximación de primer orden para el impacto del cambio del rendimiento en el precio de un bono⁶.

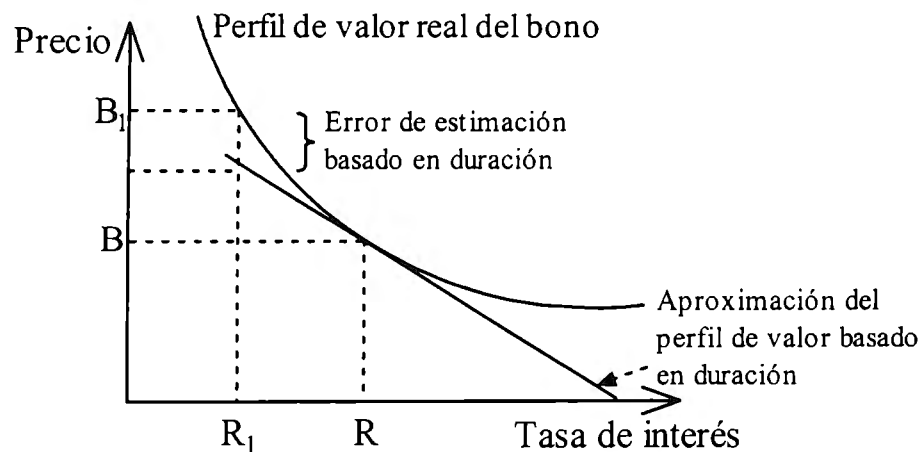


Figura 1.1. Aproximación del cambio del precio de un bono basado en duración

⁶ La duración para un bono cupón cero, en el caso de tasas compuestas discretamente es:
 $D = n$

El análisis anterior se realizó suponiendo que los rendimientos se componen de forma discreta, si el rendimiento se expresara en forma continua se tendría que el valor del bono es⁷:

$$B = \sum_{i=1}^n c_i e^{-yt_i} \quad (1.13)$$

donde:

$y = \ln(1 + R)$ la tasa de rendimiento al vencimiento expresada en términos de composición continua

t_i : es el tiempo en años en que se recibe el flujo de efectivo c_i .

La duración se expresa como⁸:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n t_i c_i e^{-yt_i}}{B} \quad (1.14)$$

Además derivando (1.13) con respecto a y :

$$\frac{dB}{dy} = -\sum_{i=1}^n c_i t_i e^{-yt_i} \quad (1.15)$$

De la ecuación (1.14) se tiene que:

$$\frac{dB}{dy} = -BD \quad (1.16)$$

⁷ Hull, J. [2003].

⁸ La duración para un bono cupón cero, en el caso de tasas de interés compuestas continuamente es:

$$D = t_n$$

Realizando pequeños desplazamientos paralelos de la curva de tasas de interés, la ecuación (1.16) se aproxima:

$$\Delta B = -BD\Delta y \quad (1.17)$$

o también:

$$\frac{\Delta B}{B} = -D\Delta y \quad (1.18)$$

Aplicando (1.12) en (1.16), la expresión para la duración modificada⁹ en el caso de rendimientos expresados con composición continua es:

$$D^* = \frac{1}{B} \frac{dB}{dy} \quad (1.19)$$

Propiedades de la duración.

De la definición de duración en (1.5), se puede observar que su valor depende del tiempo al vencimiento, el cupón y el rendimiento al vencimiento. De acuerdo con Fabozzi [1993] se tiene que las propiedades de la duración son las siguientes:

- La duración de un bono es menor que su vencimiento, con la excepción de un bono cupón cero en el cual su duración es el tiempo al vencimiento del bono.
- La duración de un bono cuponado es generalmente mayor mientras más pequeña sea la tasa del cupón, manteniendo constantes el tiempo al vencimiento y el rendimiento del bono¹⁰.
- La duración de un bono es mayor mientras mayor sea el tiempo para el vencimiento del bono, manteniendo todo lo demás constante.

⁹ Técnicamente la duración modificada no es la pendiente de la curva rendimiento-precio de un bono, como se llega a citar en algunos textos, esta sería cuando se graficara la relación del logaritmo natural del precio del bono contra el rendimiento, en lugar del precio contra el rendimiento.

¹⁰ Esta propiedad no necesariamente se mantiene para bonos de largo plazo y con tasas de cupón muy pequeñas respecto al rendimiento al vencimiento.

Duración de un portafolio.

La duración modificada de un portafolio se puede obtener a través del promedio ponderado de la duración modificada de los bonos que lo integran, donde los pesos son las proporciones invertidas en cada bono. Matemáticamente, la duración modificada de un portafolio es:

$$D_p^* = \sum_{j=1}^K w_j D_j^* \quad (1.20)$$

donde:

D_p^* : es la duración modificada del portafolio de bonos.

w_j : es la proporción invertida en el bono j dentro del portafolio P , $1 \leq j \leq K$.

D_j^* : es la duración modificada del bono j .

K : es el número de bonos que integran el portafolio.

Convexidad.

La duración es esencialmente una medida de la pendiente del perfil de valor del precio de un bono y las tasas de interés. La convexidad es una medida de la curvatura – el cambio en la pendiente – del perfil de valor, a las tasa de interés y precios del bono actuales.

El uso de la convexidad supone que la forma de la curvatura permanecerá siendo la misma para todos los niveles de tasas de interés. Así la convexidad es también una aproximación. Este error puede ser cada vez mayor mientras mayores sean los cambios en la tasa de interés; sin embargo, el error de aproximación puede ser mayor si solo se utilizara la medida de duración para medir este cambio.

La expansión de Taylor para el precio de un bono es:

$$B(R + \Delta R) = B(R) + \frac{\Delta B}{\Delta R} \Delta R + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2 B}{\Delta R^2} (\Delta R)^2 + \dots \quad (1.21)$$

Despreciando los términos de mayor orden al segundo, se tiene que el cambio porcentual en el precio del bono es:

$$\frac{\Delta B}{B} = \frac{B(R + \Delta R) - B(R)}{B(R)} = \frac{1}{B} \frac{\Delta B}{\Delta R} \Delta R + \frac{1}{2} \frac{1}{B} \frac{\Delta^2 B}{\Delta R^2} (\Delta R)^2 \quad (1.22)$$

Aplicando (1.12) en (1.22), el cambio porcentual en el precio del portafolio se puede escribir.

$$\frac{\Delta B}{B} = -D^* \Delta R + \frac{1}{2} C (\Delta R)^2 \quad (1.23)$$

donde:

$D^* = \frac{1}{B} \frac{\Delta B}{\Delta R}$ es la duración modificada y,

$C = \frac{1}{B} \frac{\Delta^2 B}{\Delta R^2} = \frac{1}{B} \frac{\Delta}{\Delta R} \left[\frac{\Delta B}{\Delta R} \right]$ es la convexidad del bono.

Para el caso de tasas de interés discretas, la convexidad¹¹ se mide por¹²:

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{1}{B} \frac{d^2 B}{dR^2} = \frac{1}{B} \frac{d}{dR} \left[-\sum_{i=1}^n \frac{ic_i}{(1+R)^i (1+R)} \right] \\
 &= \frac{1}{B} \frac{d}{dR} \left[-\sum_{i=1}^n \frac{ic_i}{(1+R)^{i+1}} \right] = \frac{1}{B} \left[\sum_{i=1}^n \frac{ic_i (1+i)(1+R)^i}{(1+R)^{2i+2}} \right] \\
 &= \frac{1}{B} \left[\sum_{i=1}^n \frac{ic_i (1+i)(1+R)^i}{(1+R)^{2i+2}} \right] = \frac{1}{(1+R)^2 B} \left[\sum_{i=1}^n \frac{i(1+i)c_i}{(1+R)^i} \right] \\
 &= \frac{1}{(1+R)^2} \sum_{i=1}^n i(1+i) \left[\frac{c_i}{B} \frac{(1+R)^i}{(1+R)^i} \right]
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

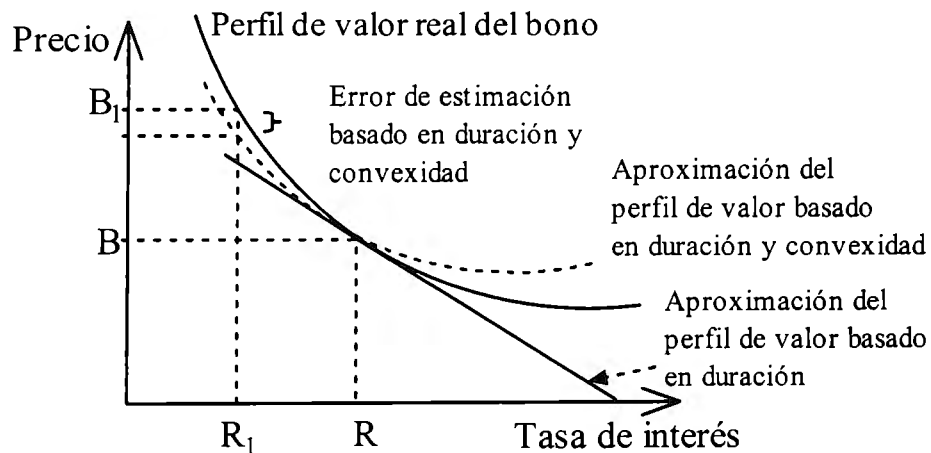


Figura 1.2. Aproximación del cambio del precio de un bono basado en duración y convexidad

¹¹ La convexidad en término de años se puede expresar como:

$Convexidad(años) = Convexidad(periodos) / k^2$, con k el número de periodos en un año.

¹² La convexidad para un bono cupón cero, en el caso de tasas compuestas discretamente, es simplemente:

$$C = \frac{n(n+1)}{(1+R)^2}$$

Y para el caso de las tasas de interés compuestas continuamente¹³, la convexidad se mide por:

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{1}{B} \frac{d^2 B}{dy^2} = \frac{1}{B} \frac{d}{dy} \left[-\sum_{i=1}^n c_i t_i e^{-y t_i} \right] \\
 &= \frac{1}{B} \left[\sum_{i=1}^n c_i t_i^2 e^{-y t_i} \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n t_i^2 \left[\frac{c_i e^{-y t_i}}{B} \right]
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

De acuerdo con Crouhy M, Galai D., Mark R [2001], una buena aproximación numérica del valor de la convexidad se puede obtener utilizando la siguiente fórmula:

$$C = 10^8 \left[\frac{B(R+1 \text{ bp}) - B(R)}{B(R)} - \frac{B(R) - B(R-1 \text{ bp})}{B(R)} \right] \tag{1.26}$$

donde el cambio en el rendimiento ΔR se establece a un punto base, 1 bp, es decir 10^{-4} .

Propiedades de la Convexidad¹⁴.

Las propiedades de un bono relacionadas a la convexidad son:

- Para un nivel dado de rendimiento y vencimiento, mientras menor sea la tasa de cupón, mayor es la convexidad del bono. De esta forma, de dos bonos con el mismo vencimiento, un bono cupón cero tiene mayor convexidad que un bono cuponado.

¹³ La convexidad para un bono cupón cero para el caso de tasas compuestas continuamente es:

$$C = t_n^2$$

¹⁴ Fabozzi[1993].

- Para un nivel dado de duración modificada y rendimiento, cuando disminuye la tasa de cupón, la convexidad tiende a disminuir. De esta forma, los bonos cupón cero tienen la menor convexidad para un nivel de duración modificada dada.
- La convexidad de un bono aumenta en una tasa creciente con respecto al crecimiento de la duración. Por ejemplo, la convexidad aumenta más que el doble cuando se duplica la duración.
- Además, los bonos libres de opción presentan una propiedad llamada convexidad positiva que se refiere a que cuando el rendimiento disminuye, la duración aumenta y cuando el rendimiento aumenta la duración disminuye. Esta propiedad es deseable para un inversionista largo ya que él desea que aumente el precio del bono tanto como sea posible, lo cual se logra cuando el rendimiento disminuye. Esta característica viene relacionada con la propiedad de los bonos de que los aumentos en precio serán mayores a los decrementos de precio dado un cambio de rendimiento establecido.

1.3. Medidas de Sensibilidad basadas en Opciones.

La debilidad de algunas medidas tradicionales para medir el riesgo en el caso de la existencia de una relación no lineal entre el precio del instrumento y el factor de riesgo, provoca que se busquen otras alternativas para cuantificar el riesgo. Debido a lo anterior, para el mercado de derivados se han desarrollado una serie de medidas de riesgo basadas en la sensibilidad del instrumento derivado a varios factores de riesgo. A estas medidas de riesgo se les ha denominado comúnmente como las "Griegas".

Fórmulas de Black-Scholes y sus extensiones.

Antes de explicar los conceptos relacionados con las “griegas” se describirán las fórmulas de Black-Scholes [1973] y sus extensiones para obtener el precio de las opciones de compra y venta del tipo Europeo sobre activos que no pagan dividendos, que paguen dividendos a una tasa continua, opciones de divisas y opciones sobre futuros:

Para una opción de compra europea que no paga dividendos, el valor de la prima, c , se obtiene con:

$$c = S_0 N(d_1) - X e^{-rT} N(d_2) \quad (1.27)$$

Y para la opción de venta europea que no paga dividendos, la fórmula para obtener el valor de la prima, p , es:

$$p = X e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \quad (1.28)$$

donde:

S_0 : es el precio del activo¹⁵,

X : es el precio de ejercicio.

$N(\cdot)$: es la función de distribución normal estándar acumulativa

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-u^2/2} du \quad (1.29)$$

r : es la tasa de interés libre de riesgo con composición continua.

σ : es la desviación estándar instantánea del rendimiento del activo.

T : es el tiempo para el vencimiento de la opción.

¹⁵ La distribución del precio del activo se supone log-normal.

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (1.30)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Reemplazando S_0 por $S_0 e^{-qT}$ en las fórmulas de Black-Scholes, (1.27) y (1.28), se obtienen las expresiones para obtener el precio de una opción de compra Europea, c y de una opción de venta Europea, p ¹⁶, en la cual el activo S pague dividendos continuos¹⁷, q , a una tasa constante¹⁸, la cual se conoce en la práctica como la fórmula de Black-Scholes-Merton:

$$c = S_0 e^{-qT} N(d_1) - X e^{-rT} N(d_2) \quad (1.31)$$

$$p = X e^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-qT} N(-d_1) \quad (1.32)$$

Y debido a que:

$$\ln\left(\frac{S_0 e^{-qT}}{X}\right) = \ln\left(\frac{S_0}{X}\right) - qT$$

¹⁶ Estos resultados fueron obtenidos por Merton[1973].

¹⁷ De manera general la fórmula de Black-Scholes es correcta si se descuentan los dividendos durante la vida de la opción, de esta forma, conociendo los dividendos lo que se hace es descontarlos a la tasa libre de riesgo del precio actual del activo, y en el caso de que los dividendos se paguen a una tasa continua, el precio inicial a usar en la fórmula de Black-Scholes es $S_0 e^{-qT}$.

¹⁸ Si la tasa de dividendos no es constante durante la vida de la opción, los resultados de las ecuaciones (1.31) y (1.32) siguen siendo ciertos, lo que en este caso se utiliza es que q es igual a el dividendo anualizado promedio durante la vida de la opción.

Entonces las expresiones para d_1 y d_2 son:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (1.33)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Los supuestos usados para derivar las fórmulas de Black-Scholes-Merton son los siguientes:

- El precio del activo sigue un proceso log-normal con parámetros μ y σ conocidos y constantes.
- Se permiten las ventas en corto.
- No existen costos de transacción, ni impuestos.
- Los activos subyacentes son perfectamente divisibles.
- No existen oportunidades de arbitraje.
- Los mercados operan continuamente.
- La tasa de interés libre de riesgo, r , es constante y la misma para todos los vencimientos.

Para el caso de opciones sobre divisas¹⁹, la fórmula de Black-Scholes correspondiente es²⁰:

$$c = Se^{-rT}N(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2) \quad (1.34)$$

$$p = Xe^{-rT}N(-d_2) - Se^{-rT}N(-d_1) \quad (1.35)$$

¹⁹ Garman, M.B. y Kohlhagen, S.W. [1983].

²⁰ Como se puede observar, las fórmulas para valuación de opciones europeas de divisas son idénticas a las de activos que pagan dividendos, únicamente sustituyendo q por r_f . Lo anterior es debido a que la moneda extranjera se puede considerar como un activo que paga una "tasa de dividendo" igual a la tasa libre de riesgo extranjera, r_f .

donde:

S : es el tipo de cambio spot.

r_f : es la tasa libre de riesgo extranjera compuesta continuamente

r : es la tasa libre de riesgo doméstica compuesta continuamente

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (1.36)$$
$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - r_f - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

σ : es la desviación estándar del tipo de cambio.

Para el caso de opciones sobre futuros se tiene que las fórmulas para el precio de una opción de compra, c y el de una opción de venta, p , vienen dados por las fórmulas²¹:

$$c = e^{-rT} [F_0 N(d_1) - XN(d_2)] \quad (1.37)$$

$$p = e^{-rT} [XN(-d_2) - F_0 N(-d_1)] \quad (1.38)$$

donde:

F_0 : es el precio del futuro en el tiempo cero.

r : es la tasa libre de riesgo compuesta continuamente

²¹ El primero en obtener estas fórmulas fue Black[1976], el supuesto implícito es que el precio futuro tiene una distribución log-normal.

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_0}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (1.39)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{F_0}{X}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

σ : es la desviación estándar del precio del futuro²².

Las Griegas.

Delta. La delta de una opción, Δ , se define como la tasa de cambio del precio de una opción con respecto al precio del activo subyacente. Es la pendiente de la curva que relaciona el precio de la opción al precio del subyacente. Por ejemplo, para el caso de una opción de compra, la delta es la derivada parcial del precio de la opción con respecto al precio del activo subyacente, expresada matemáticamente se tiene:

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S} \quad (1.40)$$

De esta forma, para una opción Europea de compra sobre un activo que no pague dividendos, la delta es:

$$\Delta = N(d_1) > 0 \quad (1.41)$$

donde d_1 se define por (1.30).

²² Para las fórmulas de Black, no se requiere que los vencimientos del contrato futuro y de la opción coincidan.

Para una opción Europea de venta sobre una acción que no paga dividendos, la delta viene dada por:

$$\Delta = N(d_1) - 1 < 0 \quad (1.42)$$

Con d_1 definida como en (1.30). Se puede observar que la delta de una opción put siempre es negativa²³.

Para una opción de compra Europea sobre un activo que pague dividendos a la tasa q , la delta se define por:

$$\Delta = e^{-qT} N(d_1) > 0 \quad (1.43)$$

donde d_1 se define como en (1.33).

Para una opción de venta sobre una acción que paga dividendos, la delta es:

$$\Delta = e^{-qT} [N(d_1) - 1] < 0 \quad (1.44)$$

Para una opción de compra Europea sobre divisas, la delta es:

$$\Delta = e^{-r_f T} N(d_1) > 0 \quad (1.45)$$

con d_1 definida por la ecuación (1.36).

²³ El hecho de que la delta de una opción de venta europea cuyo activo no paga dividendos, tiene implicaciones importantes para una cobertura delta en la cual si se tiene una posición larga en la opción de venta, esta deberá cubrirse con una posición larga en el activo subyacente. Y una posición corta deberá cubrirse con una posición corta en el activo subyacente.

Y para la opción opción de venta Europea sobre la moneda:

$$\Delta = e^{-rT} [N(d_1) - 1] < 0 \quad (1.46)$$

Para opciones de compra Europeas sobre futuros:

$$\Delta = e^{-rT} N(d_1) > 0 \quad (1.47)$$

donde d_1 se define por (1.39).

Y para una opción put europea sobre futuros

$$\Delta = e^{-rT} [N(d_1) - 1] < 0 \quad (1.48)$$

La delta de un portafolio de opciones puede calcularse de las deltas individuales de las opciones en el portafolio. Suponiendo que un portafolio consiste de una cantidad, w_i , de opción ($1 \leq i \leq n$), la delta del portafolio se da por:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n w_i \Delta_i \quad (1.49)$$

donde Δ_i es la delta de la i -ésima opción.

Gamma. La gamma, Γ , de un derivado sobre un activo subyacente es la tasa de cambio de la delta del derivado con respecto al precio del activo subyacente. Esta es la segunda derivada parcial del derivado con respecto al precio del activo²⁴. Por ejemplo para el caso de una opción de compra sobre el activo subyacente S :

$$\Gamma = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \quad (1.50)$$

Para las opciones de compra y de venta Europeas, sobre un activo que no pague dividendos, la gamma se calcula con:

$$\Gamma = \frac{n(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}} > 0 \quad (1.51)$$

donde d_1 se define por (1.30) y $n(z)$ es la función de densidad de una distribución normal estándar:

$$n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad (1.52)$$

Para las opciones de compra y de venta Europeas, sobre un activo que pague dividendos a la tasa q , la gamma se define por:

$$\Gamma = \frac{n(d_1) e^{-qT}}{S_0 \sigma \sqrt{T}} > 0 \quad (1.53)$$

²⁴ Para el caso de coberturas, la gamma da un indicativo de la frecuencia con la cual se tiene que rebalancear un portafolio para hacerlo delta neutral, si la gamma es pequeña, entonces la delta cambia lentamente por lo que los ajustes para mantener el portafolio delta neutral se hacen con poca frecuencia. Sin embargo, si la gamma es grande, en términos absolutos, la delta es muy sensible al precio del subyacente, por lo que los ajustes en el portafolio se tienen que hacer frecuentemente.

donde d_1 se define como en (1.33).

Para las opciones de compra y de venta Europeas sobre divisas, la gamma es:

$$\Gamma = \frac{n(d_1)e^{-rT}}{S_0\sigma\sqrt{T}} > 0 \quad (1.54)$$

con d_1 definida por la ecuación (1.36).

Para opciones de compra y de venta Europeas sobre futuros:

$$\Gamma = \frac{n(d_1)e^{-rT}}{F_0\sigma\sqrt{T}} > 0 \quad (1.55)$$

donde d_1 se define por (1.39).

Vega. La medida conocida como vega, v , mide la sensibilidad del valor de la opción a los cambios en la volatilidad del instrumento subyacente. La vega es la derivada parcial del precio de la opción respecto a la desviación estándar del precio del subyacente²⁵. Por ejemplo para el caso de una opción de compra, la vega se expresa como:

$$v = \frac{\partial c}{\partial \sigma} \quad (1.56)$$

si la vega es alta en términos absolutos, el valor del portafolio es muy sensible a pequeños cambios en la volatilidad. Si la vega es baja en términos absolutos, los cambios en la volatilidad tienen relativamente poco impacto en el valor del portafolio.

²⁵ La vega para una posición larga de una opción de compra o de venta siempre es positiva.

Para una opción Europea de compra o de venta sobre un activo que no paga dividendos, la vega está dada por:

$$v = S_0 \sqrt{T} n(d_1) > 0 \quad (1.57)$$

donde d_1 se define por (1.30) y $n(z)$ se define como en (1.52)

Para una opción de compra o de venta Europea, sobre un activo o índice que pagan un dividendo continuo a la tasa q , la vega se obtiene con:

$$v = S_0 \sqrt{T} n(d_1) e^{-qt} > 0 \quad (1.58)$$

Donde d_1 se define como en (1.33).

Para las opciones de compra y de venta Europeas sobre divisas, la vega se obtiene con:

$$v = S_0 \sqrt{T} n(d_1) e^{-r_f T} > 0 \quad (1.59)$$

con d_1 definida por la ecuación (1.36).

Para opciones de compra y de venta Europeas sobre futuros, la vega es:

$$v = F_0 \sqrt{T} n(d_1) e^{-r_f T} > 0 \quad (1.60)$$

donde d_1 se define por (1.39).

Calcular la vega del modelo de Black-Scholes y sus extensiones podría resultar extraño por el supuesto implícito de B-S de que la volatilidad es constante. Esto sería teóricamente más correcto si calculáramos la vega de un modelo donde la volatilidad se supusiera estocástica. Sin embargo, calcular la vega de un modelo de volatilidad estocástica es muy similar a la vega de B-S y en la práctica calcular la vega de un modelo de volatilidad constante funciona razonablemente bien.²⁶

Theta. La theta de un portafolio de derivados, θ , es la tasa de cambio en el valor del portafolio con respecto al paso del tiempo cuando todo permanece constante. Equivalentemente, es la tasa de cambio del valor del portafolio con respecto al decremento en los tiempos al vencimiento de los derivados en el portafolio²⁷.

Theta también es conocido como el tiempo de decaimiento (time decay) del portafolio. Si se tiene una opción de compra, la theta se expresa como:

$$\theta = -\frac{\partial c}{\partial T} \quad (1.61)$$

Para una opción Europea de compra sobre un activo que no paga dividendos, la theta está dada por:

$$\theta = -\frac{S_0 n(d_1) \sigma}{2\sqrt{T}} - rXe^{-rT} N(d_2) \quad (1.62)$$

Y para una opción de venta sobre un activo que no paga dividendos, se tiene:

$$\theta = -\frac{S_0 n(d_1) \sigma}{2\sqrt{T}} + rXe^{-rT} N(-d_2) \quad (1.63)$$

²⁶ En Hull, J. White, A. [1987] se demuestra que cuando la volatilidad estocástica es independiente del precio del activo, el precio de la opción es el valor esperado de los precios Black-Scholes, en donde el valor esperado se toma sobre la distribución de la media de las varianzas.

²⁷ Basado en que la medida de tiempo T se mide en años, cuando es necesario calcular el valor de θ en días, se acostumbra a dividir la medida entre el número de días de operación del mercado durante el año que es de 252.

donde d_1 y d_2 se define por (1.30) y $n(z)$ se define como en (1.52)

Para una opción de compra o de venta Europea, sobre un activo o índice que pagan un dividendo continuo a la tasa q , la theta se obtiene con:

$$\theta = -\frac{S_0 n(d_1) \sigma e^{-qT}}{2\sqrt{T}} + qS_0 N(d_1) e^{-qT} - rXe^{-rT} N(d_2) \quad (1.64)$$

Donde d_1 y d_2 se definen como en (1.33).

Para una opción put europea sobre un subyacente que pague dividendos a la tasa q se tiene que:

$$\theta = -\frac{S_0 n(d_1) \sigma e^{-qT}}{2\sqrt{T}} + qS_0 N(-d_1) e^{-qT} + rXe^{-rT} N(-d_2) \quad (1.65)$$

Para las opciones de compra y de venta Europeas sobre divisas, la theta se obtiene con:

$$\theta = -\frac{S_0 n(d_1) \sigma e^{-r_f T}}{2\sqrt{T}} + r_f S_0 N(d_1) e^{-r_f T} - rXe^{-rT} N(d_2) \quad (1.66)$$

con d_1 y d_2 definidas por la ecuación (1.36).

Para una opción de venta europea sobre divisas, se tiene que:

$$\theta = -\frac{S_0 n(d_1) \sigma e^{-r_f T}}{2\sqrt{T}} + r_f S_0 N(-d_1) e^{-r_f T} + r X e^{-r T} N(-d_2) \quad (1.67)$$

Para opciones de compra Europea sobre futuros, la theta es:

$$\theta = -\frac{F_0 n(d_1) \sigma e^{-r T}}{2\sqrt{T}} + r F_0 N(d_1) e^{-r T} - r X e^{-r T} N(d_2) \quad (1.68)$$

donde d_1 y d_2 se define por (1.39).

Para una opción de venta Europea sobre futuros se tiene que:

$$\theta = -\frac{F_0 n(d_1) \sigma e^{-r T}}{2\sqrt{T}} + r F_0 N(-d_1) e^{-r T} + r X e^{-r T} N(-d_2) \quad (1.69)$$

Rho. La Rho, ρ , de un portafolio de derivados es la tasa de cambio del valor del portafolio con respecto a la tasa de interés. Por ejemplo para el caso de una opción de compra, la rho se expresa como:

$$\rho = \frac{\partial c}{\partial r} \quad (1.70)$$

Para una opción Europea de compra sobre un activo que no paga dividendos, que pague dividendos a una tasa continua q o sobre divisa, la rho está dada por:

$$\rho = X T e^{-r T} N(d_2) > 0 \quad (1.71)$$

y para una opción Europea de venta es:

$$\rho = -XTe^{-rT}N(-d_2) < 0 \quad (1.72)$$

donde d_2 se define por (1.30) en el caso de que el activo no pague dividendos, por (1.33) en el caso de que pague dividendos, y por (1.36) en el caso de opciones sobre divisas.

En el caso de opciones de compra sobre futuros, rho se define por:

$$\rho = -Tc < 0 \quad (1.73)$$

con c definida por (1.37).

Y para opciones de venta sobre futuros:

$$\rho = -Tp < 0 \quad (1.74)$$

con p definida por (1.38).

En el caso de las opciones de divisas, se puede calcular también la rho correspondiente a la tasa de interés extranjera. En el caso de una opción de compra de divisas se tiene que:

$$\rho_{r_f} = -Te^{-r_f T}S_0N(d_1) < 0 \quad (1.75)$$

y para la opción de venta Europea se tiene que:

$$\rho_{r_f} = Te^{-r_f T}S_0N(-d_1) > 0 \quad (1.76)$$

con d_1 definida por la ecuación (1.36).

1.4. Debilidad de las medidas tradicionales

De acuerdo a Smithson [1998] y Crouhy, Galai y Mark [2001] son tres las principales razones por la cuales las medidas tradicionales de riesgo, son poco satisfactorias:

1. Las medidas tradicionales de riesgo no pueden ser agregadas a través de los diferentes tipos de factores de riesgo. Por ejemplo, las medidas de delta, gamma y vega se complementan entre ellas, pero no pueden ser agregadas para producir una medida total de riesgo. Además, los factores de riesgo no pueden ser agregados a través de los mercados. Por ejemplo, la delta de una opción de compra sobre una moneda y la de una opción de compra sobre una acción no son aditivas.
2. Las medidas tradicionales de riesgo no miden la cantidad monetaria que esta en riesgo.
3. Las medidas tradicionales de riesgo no facilitan el control. Las posiciones limitadas por el riesgo de un factor no siempre son efectivas.

Las razones anteriores provocaron que los administradores de riesgo buscaran una medida sumaria de riesgo de mercado, siendo la respuesta la medida de Valor en Riesgo.

CAPITULO 2. VALOR EN RIESGO.

2.1 Origen y desarrollo del Valor en Riesgo.

A finales de la década de los 70's y principios de los 80's las mayores instituciones financieras iniciaron la construcción de sus modelos internos para medir el riesgo agregado de sus operaciones. Estos sistemas fueron desarrollados fundamentalmente con el propósito de medir el riesgo inherente a sus operaciones; además de servir en la consultoría sobre riesgos y, como consecuencia esto desarrollo los sistemas comerciales para la medición del riesgo de las empresas.

Uno de los sistemas más conocidos fue el desarrollado por JP Morgan¹, del cual surgió la medida de Valor en Riesgo. En sus inicios esta medida fue derivada de un sistema basado en la teoría de portafolios estándar, usando los estimados de las desviaciones estándar y correlaciones entre los rendimientos de los diferentes instrumentos comercializados.

Inclusive otras instituciones financieras, estuvieron trabajando sobre sus propias medidas de riesgo y empezó la competencia de establecer el estándar de la industria. Esto provocó que las mediciones de riesgo difirieran considerablemente unas de otras. Sin embargo, todo este desarrollo inicial se vio reflejado en las técnicas de medición de valor en riesgo actuales.

El hecho que marcó un hito en la medición de riesgo fue la publicación por parte de JP Morgan en octubre de 1994 del documento técnico del sistema RiskMetrics.

¹ De acuerdo con Dowd, K. [1998], este sistema fue originado cuando el director de JP Morgan Dennis Weatherstone, pidió a su staff un reporte de una página indicando el riesgo y las pérdidas potenciales del portafolio del banco, para las próximas 24 horas. Este reporte se conoció como el "reporte 4.15", el cual se le tenía que entregar a las 4.15 cada día, después del cierre de las operaciones. De esta forma el staff desarrolló un sistema para medir el riesgo en las diferentes posiciones del banco y las consolidaban en una sola medida de riesgo, el valor en riesgo.

Este movimiento provocó que muchas empresas que proveían sistemas para medición de riesgo decidieran adoptar el modelo de RiskMetrics o que buscaran la compatibilidad de sus sistemas con el de JP Morgan. De acuerdo a lo anterior, quizá el mérito de JP Morgan no sea en sí el desarrollo de RiskMetrics, sino el exponer públicamente sus bases de datos y el modelo utilizado, lo cual permitió que el concepto de Valor en Riesgo se haya visto impulsado fuertemente en la industria financiera internacional y con esto las instituciones financieras tuvieron la posibilidad de construir sus modelos de medición de riesgo basados en el estándar de la industria.

2.2. El concepto del Valor en Riesgo.

De acuerdo con Linsmeier y Pearson [1996], el Valor en Riesgo se describe como:

El valor en riesgo es una medida estadística única y resumida de las posibles pérdidas en un portafolio. Específicamente, el valor en riesgo es una medida de las pérdidas debidas a los movimientos "normales" del mercado. Las pérdidas mayores al valor en riesgo se presentan solamente con una probabilidad pequeña específica. Sujeto a los supuestos simples usados en su cálculo, el valor en riesgo agrega todos los riesgos inherentes al portafolio en un solo número que puede reportarse de manera directa a los consejos directivos y a los reguladores, o detallarse en un reporte anual.... Es solo una forma simple de describir la magnitud de las pérdidas probables en el portafolio.

Una definición más técnica es la que presentan Jorion [1997], Crouhy, Galai y Mark [2001] como:

El Valor en Riesgo, resume la pérdida máxima esperada (o peor pérdida) a lo largo de un horizonte de tiempo objetivo dentro de un intervalo de confianza dado.

Sobre este mismo esquema Dowd [1998] establece que el Valor en riesgo puede ser usado en una de las cuatro formas siguientes, dependiendo del contexto:

1. En su sentido más literal, el VaR se refiere a una cantidad de dinero particular, como la máxima cantidad que podemos perder sobre algún periodo de tiempo, en un nivel de confianza específico.
2. Se especifica como un procedimiento de estimación del VaR, ya sea estadístico, numérico o matemático para producir el valor del VaR. Un procedimiento de VaR es lo que produce el valor numérico del VaR.
3. Podemos referirnos a la metodología del VaR, un procedimiento o conjunto de procedimientos que puede usarse para producir los valores del VaR, pero también se puede usar también para estimar otros riesgos. Las metodologías de VaR pueden ser usadas para estimar otros montos de riesgo –tales como el riesgo crédito –.
4. Yendo más allá de los temas de riesgo, podemos hablar de la administración del riesgo basado en el VaR. Esto se refiere a como usar los valores del VaR, cómo organizar la empresa para producirlo y el cómo tratar los diferentes temas de administración de riesgo asociados (por ejemplo, ajustar las remuneraciones por los riesgos tomados, etc).

De las definiciones anteriores, se tiene que el valor en riesgo no responde a la pregunta de ¿cuánto se podría perder en un portafolio en un horizonte de tiempo dado?. La respuesta a la pregunta anterior es “todo” o prácticamente todo del valor del portafolio. En cambio el valor en riesgo contesta a la siguiente pregunta: ¿cuál es la máxima pérdida, dentro de un horizonte de tiempo dado, tal que existe una probabilidad pequeña, digamos 1%, de que la pérdida real, en ese mismo intervalo de tiempo, exceda este valor de pérdida máxima?²

² Crouhy, M. Galai D. Mark, R. [2001], pag. 187.

De una manera más formal, el Valor en Riesgo se define como la máxima pérdida esperada dado un nivel de confianza c y un horizonte de tiempo N . De esta forma el VaR es la distancia que se tiene del percentil $(1-c)\%$ a la media de la distribución del cambio en el valor del portafolio ΔP .

Lo anterior en fórmula quiere decir que:

VaR = Pérdida/Ganancia esperada - Máxima pérdida con un nivel de confianza c

Ahora, si definimos a la variable R como el rendimiento del portafolio P en el intervalo de tiempo Δt :

$$R_{t+\Delta t} = \frac{\Delta P}{P_t} \quad (2.1)$$

Continuando con el análisis anterior, se tiene que μ_R se define por $E[R_{t+\Delta t}] = \mu_R$, el valor esperado de $R_{t+\Delta t}$, y además la variable $R_{t+\Delta t}^*$ se define como el rendimiento correspondiente al cambio del portafolio de P_t a $P_{t+\Delta t}^*$, el valor del portafolio en el percentil $(1-c)$ - el valor de la máxima pérdida esperada del portafolio con un nivel de confianza de c .

El valor del portafolio en el nivel de máxima pérdida esperada se puede expresar como:

$$P_{t+\Delta t}^* = P_t (1 + R_{t+\Delta t}^*) \quad (2.2)$$

Y además, el valor del portafolio esperado en el tiempo $t + \Delta t$ es:

$$E[P_{t+\Delta t}] = P_t (1 + \mu_R) \quad (2.3)$$

Utilizando la definición de VaR³, la máxima pérdida esperada, se puede escribir como:

$$VaR(\Delta t, c) = E(P_{t+\Delta t}) - P_{t+\Delta t}^* \quad (2.4)$$

De esta forma, si se sustituye (2.2) y (2.3) en (2.4) se obtiene:

$$VaR(\Delta t, c) = P_t(1 + \mu_R) - P_t(1 + R_{t+\Delta t}^*)$$

simplificando:

$$VaR(\Delta t, c) = P_t(\mu_R - R_{t+\Delta t}^*) \quad (2.5)$$

La cual, es la fórmula general del Valor en Riesgo, e indica que para calcularlo se requiere simplemente conocer la distancia entre el valor esperado del portafolio y su valor en el percentil $(1-c)\%$ de la distribución de los valores del portafolio, en el tiempo $t + \Delta t$. O visto de otra forma, se calcula restando el rendimiento esperado del rendimiento en el percentil $(1-c)\%$ de la distribución de rendimientos en el tiempo $t + \Delta t$, y se multiplica por el valor del portafolio al inicio del periodo.

Una vez definido en palabras y formalmente el valor en riesgo, se pueden comentar algunos usos que actualmente se le están dando al Valor en Riesgo, dentro de los cuales se encuentran:

³ Una definición alternativa del Valor en Riesgo consiste en calcular la distancia del percentil $(1-c)$ y un cambio en el valor del portafolio de cero, la cual se conoce como Valor en Riesgo absoluto. De acuerdo a la definición de Valor en Riesgo Absoluto, se tiene que su fórmula es: $VaR^1(\Delta t, c) = P_t(1+0) - P_t(1 + R_{t+\Delta t}^*)$ y simplificando, el Valor en Riesgo absoluto es igual a: $VaR^1(\Delta t, c) = -P_t R_{t+\Delta t}^*$.

- Da a los directivos de las instituciones financieras un mejor manejo del riesgo basado en una administración más informada de las pérdidas posibles.
- Conduce a sistemas de control más robustos que hacen más difíciles los fraudes y los errores humanos. Los sistemas se orientan a prevenir que se repitan los desastres financieros más sonados de los últimos años.
- Proporciona un tratamiento del riesgo integrado y consistente dentro de la institución, conduciendo a una mayor transparencia del riesgo y los factores que lo integran.
- Proporciona reglas de decisión operativas que guían la inversión, cobertura y operación. Estas reglas toman en cuenta todas las implicaciones de riesgo de cada alternativa de solución y mejora sustancialmente la calidad de la toma de decisiones.
- Proporciona nuevas reglas de remuneraciones para los traders, administradores y otros empleados basados en los riesgos que ellos toman. De esta forma apoya en desincentivar la toma de riesgos excesivos que ocurren cuando la base de las recompensas de los empleados se basan exclusivamente sobre los ingresos sin hacer referencia a los riesgos tomados para obtener dichos ingresos.
- Los sistemas basados en la metodología de VaR pueden usarse para medir otros riesgos, tales como los riesgos de liquidez, crédito y operativos, incluyendo los asociados a los riesgos de mercado. Esto conduce a un enfoque más integrado en la administración de los diferentes tipos de riesgo, una planeación mejorada y una mejor administración estratégica de las empresas.
- Este nuevo enfoque permite que las empresas respondan apropiadamente a las regulaciones, particularmente las reservas de capital que deben realizar las instituciones financieras. De manera específica, les puede indicar a las instituciones el cómo cumplir las regulaciones y al mismo tiempo optimizar los portafolios minimizando la carga que tales regulaciones les impone.

Sin embargo, y pese a sus ya mencionados usos, el Valor en Riesgo tiene algunas limitaciones, dentro de las cuales se encuentran⁴:

- El Valor en Riesgo no proporciona alguna indicación de la cantidad en que las pérdidas reales exceden a la medida de Valor en Riesgo.
- La medida de valor en riesgo no es sub-aditiva, es decir, dados dos portafolios X e Y , existen situaciones en las cuales se cumple que:

$$VaR(X+Y) > VaR(X) + VaR(Y)$$

La cual ocurre en la práctica para aquellas distribuciones que se agrupan alrededor de la media y presentan solo unos pocos valores extremos.

2.3. Metodologías para calcular el Valor en Riesgo.

Para calcular el valor en riesgo se tienen tres metodologías generales. Las primeras dos basadas en simulaciones, en donde el objetivo es simular el valor del factor de riesgo en el futuro —es decir en el tiempo $t + \Delta t$; y la tercera es la conocida como la metodología analítica de varianza covarianza.

A fin de seleccionar la metodología apropiada para calcular el valor en riesgo, es necesario realizar los siguientes pasos preliminares:

1. Seleccionar los factores de riesgo. Se refiere a seleccionar aquellos factores de mercado que afecten al precio de cada instrumento que integra el portafolio. Por ejemplo en el caso de un portafolio de acciones, la elección de los factores de riesgo son los precios de las acciones de manera individual que componen el portafolio. En el caso de un bono cuponado emitido en un país extranjero, los factores de riesgo que podrían ser considerados van desde la consideración de la estructura de tasas extranjera y el tipo de cambio.

⁴ Crouhy, M, Galai, D. Mark, R. [2001], pags. 252-254.

2. Elección de la metodología para modelar los cambios en los factores de riesgo. Para este caso particular se tiene que la elección de la metodología que se escoja influye en la distribución de probabilidad que se supone tengan los factores de riesgo. Por ejemplo en la metodología analítica de varianza-covarianza comúnmente se supone que los rendimientos continuos tienen una distribución normal. Mientras que en la simulación histórica no se supone una distribución de antemano para los factores. Por último, en la simulación Monte Carlo se puede escoger cualquier distribución de probabilidad multivariada para los factores de riesgo, e inclusive se pueden modelar cualquier mezcla de distribuciones de los factores.

2.3.1. Metodologías basadas en simulaciones.

Si, $y_{j,t}$ es el valor del factor de mercado j en el tiempo t , entonces el k -ésimo valor simulado del factor de mercado en el día $t + \Delta t$ se puede expresar como:

$$y_{j,t+\Delta t,k} = y_{j,t} + \Delta y_{j,k}$$

donde $\Delta y_{j,k}$ es uno de los posibles cambios en el factor de riesgo en el intervalo de tiempo Δt . De esta forma, lo importante es la forma en que se obtiene este cambio en el factor de riesgo; una de las formas de obtenerlo se basa en valores históricos de la variable y otro es a través del uso de simulación Monte Carlo.

Método de simulación histórica.

Para llevar a cabo el método de simulación histórica se requiere obtener los valores históricos reales de los factores de riesgo, los cuales se toman dentro de un periodo relevante para el análisis. Tomando en consideración a los valores históricos se calcula el cambio de valor de los factores de riesgo y con ello se calcula el valor del portafolio. De esta forma, cada cambio simulado en el valor del portafolio se considera una observación en la distribución de los rendimientos del portafolio.

Para ilustrar el procedimiento de simulación histórica supóngase que se tienen m factores de riesgo en el portafolio y se cuenta con los datos de los últimos 255 días de operación del portafolio (un año de datos históricos). De esta forma, los cambios en el valor del factor de riesgo j se pueden calcular a través de:

Valores históricos del factor de riesgo y_j	Cambio en el valor de y_j
$y_{j,t-255}$	
$y_{j,t-254}$	$\Delta y_{j,-254} = y_{j,t-254} - y_{j,t-255}$
$y_{j,t-253}$	$\Delta y_{j,-253} = y_{j,t-253} - y_{j,t-254}$
...	
$y_{j,t-2}$	$\Delta y_{j,-2} = y_{j,t-2} - y_{j,t-3}$
$y_{j,t-1}$	$\Delta y_{j,-1} = y_{j,t-1} - y_{j,t-2}$

Donde $y_{j,t}$ indica el j -ésimo factor de riesgo en el tiempo t .

Con lo que aplicando los cambios en el valor de y_j al valor actual del factor de riesgo $y_{j,t}$, se tiene un vector de valores para los cambios observados en el valor actual del factor de riesgo y_j , es decir:

Valores simulados de y_j en el tiempo 1.
$y_{j,t+1,1} = y_{j,t} + \Delta y_{j,-1}$
$y_{j,t+1,2} = y_{j,t} + \Delta y_{j,-2}$
.....
$y_{j,t+1,254} = y_{j,t} + \Delta y_{j,-254}$
$y_{j,t+1,255} = y_{j,t} + \Delta y_{j,-255}$

Donde $y_{j,t,k}$ indica el j -ésimo factor de riesgo, en el tiempo t , para el paso de simulación k .

Una vez que se tienen los cambios en los factores de riesgo, se calcula el valor del portafolio para cada uno de los m factores de riesgo en el tiempo actual, P_t , y con los valores simulados de cada factor de riesgo para el tiempo $t+1$, $P_{t+1,1}, P_{t+1,2}, \dots, P_{t+1,255}$, revaluando el portafolio tantas veces como el número de días en la muestra histórica, es decir:

Valor actual de los factores de riesgo					Valor del portafolio
$y_{1,t}$	$y_{2,t}$...	$y_{m,t}$	→	P_t
Valores simulados de los factores de riesgo					
$y_{1,t+1,1}$	$y_{2,t+1,1}$...	$y_{m,t+1,1}$	→	$P_{t+1,1}$
$y_{1,t+1,2}$	$y_{2,t+1,2}$...	$y_{m,t+1,2}$	→	$P_{t+1,2}$
...
$y_{1,t+1,255}$	$y_{2,t+1,255}$...	$y_{m,t+1,255}$	→	$P_{t+1,255}$

Conociendo los valores del portafolio para cada uno de los intentos de la simulación, en este caso particular los correspondientes a los 255 días de información de datos históricos, se procede a calcular el cambio en el valor del portafolio:

Cambio en el valor del portafolio
$\Delta P_1 = P_{t+1,1} - P_t$
$\Delta P_2 = P_{t+1,2} - P_t$
...
$\Delta P_{255} = P_{t+1,255} - P_t$

Por último, se construye el histograma del cambio en el valor del portafolio y se calcula el valor del percentil $(1-c)\%$, que se encuentra en la cola izquierda de la distribución de los datos obtenidos después de la simulación. Es decir, se aplicarían las ecuaciones (2.4) o la ecuación (2.5) para calcular el VaR del portafolio.

Método de Simulación Monte Carlo.

La simulación Monte Carlo⁵ consiste en obtener de manera repetida los valores de los precios o rendimientos de un activo o portafolio de activos a partir de la distribución de probabilidad conocida que gobierna el comportamiento de un activo subyacente. Cada valor generado aleatoriamente, conocido como intento, paso o escenario, nos da un valor posible para nuestro activo o portafolio de activos en el horizonte de tiempo establecido. El propósito es generar una cantidad “suficientemente” grande de escenarios, de manera tal que la distribución simulada de los valores del activo o portafolio converja hacia su distribución de

⁵ Usada por Boyle, P.[1977] por primera vez para valorar opciones.

probabilidad real. Una vez inferida la distribución del activo o portafolio, el paso siguiente es calcular el Valor en Riesgo.

Para obtener el Valor en Riesgo comúnmente se llevan a cabo los siguientes cuatro pasos:

Paso 1. Especificar la distribución de probabilidad para cada factor de riesgo de mercado. Habiendo escogido la distribución y la dinámica del comportamiento del factor de riesgo, se estiman los parámetros, volatilidades, correlaciones, etc. Estos parámetros pueden estimarse a partir de los datos históricos.

Un modelo de comportamiento comúnmente usado para los precios de las acciones es el movimiento Browniano geométrico, este proceso se describe a través de la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (2.6)$$

con:

μdt = es el valor esperado del rendimiento del activo.

σ : es la volatilidad del rendimiento del activo.

$W = W_t$: es un proceso de Wiener o movimiento Browniano

Paso 2. Construir diferentes caminos de los factores de riesgo. Estos son contruidos basados en los números aleatorios⁶ obtenidos de un generador de números aleatorios⁷. De esta forma, cada conjunto de factores de riesgo se utilizan para producir un precio terminal hipotético para el instrumento relevante.

⁶ Estrictamente hablando son números pseudoaleatorios. Una de las desventajas de esto, es que la generación de números aleatorios se hace por ciclos, los cuales después de algunas iteraciones se repiten en la misma secuencia, provocando que el rango de valores posibles esté incompleto y conduzca a una medida incorrecta de VaR.

⁷ Una alternativa a la generación de números aleatorios consiste en la técnica llamada Bootstrap, la cual fue propuesta por Efron [1979], la cual consiste en realizar un muestreo de los datos históricos disponibles con sustitución, en el cual se asigna una probabilidad igual a cada realización, la cual se considera independiente.

Continuando con el ejemplo del punto anterior, si el precio del activo sigue un movimiento Browniano Geométrico como el que se indica en la ecuación (2.6), la solución de esta ecuación diferencial estocástica es:

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)} \quad (2.7)$$

donde:

S_t : Precio del activo en el tiempo t .

S_0 : Precio inicial del activo.

$W(t)$: Indica las innovaciones acumuladas desde el tiempo 0 hasta el t .

Para construir una trayectoria discreta del precio del activo, la ecuación (2.7) se modifica para obtener:

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma \sqrt{t} Z} \quad (2.8)$$

con:

Z : Variable aleatoria normal estándar, $Z \sim N(0,1)$.

De esta forma, se tiene que al generar los diferentes caminos de cada factor de riesgo y_j , se está generando un vector de los cambios simulados de cada factor de riesgo, el cual consiste de k elementos generados en cada simulación.

Dentro de sus ventajas se tiene la posibilidad de generar distribuciones con colas anchas, saltos y variables correlacionadas. Sin embargo, depende de que se tenga una cantidad suficientemente grande de datos, también depende del supuesto de que los rendimientos se consideran independientes y además con el muestreo aleatorio se rompe cualquier patrón de variación en el tiempo.

Valores simulados del cambio en el factor de riesgo y_j .
$\Delta y_{j,1} = y_{j,t+\Delta t,1} - y_{j,t}$
$\Delta y_{j,2} = y_{j,t+\Delta t,2} - y_{j,t}$
.....
$\Delta y_{j,k-1} = y_{j,t+\Delta t,k-1} - y_{j,t}$
$\Delta y_{j,k} = y_{j,t+\Delta t,k} - y_{j,t}$

En el caso de que los factores de riesgo estén correlacionados, se hace necesario modelar distribuciones multivariadas. Continuando con el ejemplo anterior, se requiere modelar un portafolio de n acciones, $S_t^1, S_t^2, \dots, S_t^n$, cada una de ellas descritas por el proceso de la ecuación (2.6) con sus propios parámetros de rendimiento esperado, volatilidad y proceso de Wiener, μ_i, σ_i y W_t^i , $i = 1, \dots, n$.

La idea de que los rendimientos estén correlacionados instantáneamente significa que: $E(W_t^i W_t^j) = \rho_{i,j}$, para $i \neq j$ con $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$.

De esta forma, la ecuación (2.8), se puede volver a escribir como:

$$S_t^i = S_0 e^{\left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)t + \sigma_i \sqrt{t} Z_t^i} \quad (2.9)$$

en donde $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)^T$ es una normal multivariada con media cero y matriz de varianza-covarianza Σ ⁸, con el componente i, j igual a: $\Sigma_{i,j} = E(ZZ^T) = \rho_{i,j}$ ⁹, la cual es una matriz simétrica, positiva definida¹⁰.

Para obtener la trayectoria multivariada de los factores de riesgo, se generan n variables aleatorias normales estándar independientes, $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T$.¹¹

El procedimiento tradicional para generar números aleatorios correlacionados es la descomposición de Choleski¹². Este procedimiento consiste en encontrar una matriz triangular inferior, A , tal que: $Z = AY$ y entonces $\Sigma = AA^T$ ¹³.

⁸ En el Capítulo 3: “Estimación de la matriz de Varianza-Covarianza usando el modelo GARCH(1,1)” se explica el procedimiento de cálculo de la matriz de Varianza-Covarianza actualizada a través de la metodología GARCH(1,1) y en el ANEXO B: “Estimación de la matriz de Varianza Covarianza con pesos iguales y EWMA”, se explica el procedimiento de cálculo de la matriz de Varianza-Covarianza usando promedios móviles y promedios móviles exponenciales.

⁹

$$E(ZZ^T) = \begin{pmatrix} E(Z_1Z_1) & E(Z_1Z_2) & \cdots & E(Z_1Z_n) \\ E(Z_2Z_1) & E(Z_2Z_2) & \cdots & E(Z_2Z_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(Z_nZ_1) & E(Z_nZ_2) & \cdots & E(Z_nZ_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,n} \\ \rho_{2,1} & 1 & \rho_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{n,1} & \rho_{n,2} & 1 \end{pmatrix}$$

¹⁰ Sea A una matriz simétrica, entonces lo siguiente es equivalente:

a) A es definida positiva.

b) Sus n menores principales son positivos (estrictamente). Por ejemplo, suponga que se tiene la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ la cual tiene de menores principales: } \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

c) Existe una matriz no singular B tal que: $A = B^T B$

d) Existe una matriz no singular Q tal que: $Q^T A Q = I$

Una matriz es no singular si y solo si su determinante no es cero.

¹¹ Al ser $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ multinormal estándar con variables independientes, se tiene que $E(YY^T) = I$

¹² La descomposición de Choleski es eficiente cuando la matriz a descomponer es definida positiva. Vea Zangari[1996].

Para ilustrar lo anterior, se hará la descomposición de Choleski para el caso de dos variables.

En el caso de dos variables, la descomposición de la matriz se encuentra resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 + c^2 \end{pmatrix}$$

por lo que resolviendo de manera recursiva las ecuaciones, se tiene:

$$a = 1$$

$$b = \rho$$

$$c = \sqrt{1 - \rho^2}$$

Entonces, la matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1 - \rho^2} \end{pmatrix}$$

Y de esta manera para obtener los números aleatorios normales correlacionados se hace:

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1 - \rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = AY$$

¹³ Para ver porque $\Sigma = AA^T$, se tiene que $Z = AY$, entonces $\Sigma = E(ZZ^T) = E(AYY^T A^T) = AE(YY^T)A^T$ y como $E(YY^T) = I$ por ser Y multinormal con media cero y matriz de varianza-covarianza igual a la identidad, entonces: $\Sigma = AIA^T = AA^T$

con lo que:

$$\begin{aligned} Z_1 &= Y_1 \\ Z_2 &= \rho Y_1 + \sqrt{1-\rho^2} Y_2 \end{aligned}$$

Una de las desventajas del procedimiento de Choleski consiste en que funciona únicamente cuando la matriz es definida positiva¹⁴. Un procedimiento alternativo que funciona aún cuando la matriz es semidefinida positiva¹⁵ consiste en el análisis de componentes principales.

El análisis de componentes principales o también conocido como descomposición por eigenvalores¹⁶, consiste en descomponer a la matriz simétrica de varianza-covarianza Σ en el siguiente producto matricial:

$$\Sigma = \Omega \Lambda \Omega^T \quad (2.10)$$

donde:

$$\Omega = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{pmatrix} : \text{matriz cuadrada que contiene los eigenvectores de}$$

Σ .¹⁷

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} : \text{matriz diagonal que contiene a los eigenvalores de } \Sigma$$

¹⁴ Crouhy, M., Galai, D., Mark, R. [2001], Pag. 214.

¹⁵ Una matriz A es semidefinida positiva si y solo si todos los eigenvalores de la matriz A son ≥ 0

¹⁶ Clewlow, L., Strickland, C. [1998], pag. 128 y 129.

¹⁷ La matriz Ω tiene las siguientes propiedades:

a) $\Omega^T = \Omega^{-1}$, es decir se dice que es una matriz cuyos vectores son ortogonales.

b) $\Omega^T \Omega = I$

Ya que Ω tiene una transpuesta igual a su inversa, entonces las filas de Ω representan las proporciones de un conjunto de n variables independientes, Y_i , $i=1,\dots,n$, las cuales cuando se combinan linealmente reproducen las correlaciones entre variables. Los eigenvalores representan las varianzas de las variables. Entonces, las variables aleatorias correlacionadas se pueden reproducir de las combinaciones lineales de variables aleatorias independientes de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Z_1 &= v_{11}\sqrt{\lambda_1}Y_1 + v_{12}\sqrt{\lambda_2}Y_2 + \dots + v_{1n}\sqrt{\lambda_n}Y_n \\ Z_2 &= v_{21}\sqrt{\lambda_1}Y_1 + v_{22}\sqrt{\lambda_2}Y_2 + \dots + v_{2n}\sqrt{\lambda_n}Y_n \\ &\dots \\ Z_n &= v_{n1}\sqrt{\lambda_1}Y_1 + v_{n2}\sqrt{\lambda_2}Y_2 + \dots + v_{nn}\sqrt{\lambda_n}Y_n \end{aligned}$$

Paso 3. Obtener el valor del portafolio para cada escenario. Una vez calculado el precio de cada instrumento para cada escenario, se procede a calcular el valor hipotético final del portafolio para los k pasos de la simulación, es decir:

Valor actual de los factores de riesgo					Valor del portafolio
$y_{1,t}$	$y_{2,t}$...	$y_{m,t}$	→	P_t
Valores simulados de los factores de riesgo					
$y_{1,t+\Delta t,1}$	$y_{2,t+\Delta t,1}$...	$y_{m,t+\Delta t,1}$	→	$P_{t+\Delta t,1}$
$y_{1,t+\Delta t,2}$	$y_{2,t+\Delta t,2}$...	$y_{m,t+\Delta t,2}$	→	$P_{t+\Delta t,2}$
...
$y_{1,t+\Delta t,k}$	$y_{2,t+\Delta t,k}$...	$y_{m,t+\Delta t,k}$	→	$P_{t+\Delta t,k}$

Conociendo los valores del portafolio para cada uno de los k pasos de la simulación, se procede a calcular el cambio en el valor del portafolio:

Cambio en el valor del portafolio
$\Delta P_1 = P_{t+\Delta t,1} - P_t$
$\Delta P_2 = P_{t+\Delta t,2} - P_t$
...
$\Delta P_k = P_{t+\Delta t,k} - P_t$

Paso 4. Obtener el Valor en riesgo del portafolio. Para obtener el Valor en Riesgo del portafolio se utiliza el vector de cambios del portafolio. Es necesario recordar que se debe generar un número suficientemente grande de pasos de la simulación¹⁸, en cada paso se obtiene un valor hipotético final del portafolio, y entonces la distribución simulada del portafolio se acercará a la distribución real.

2.3.2. Metodología analítica de Varianza-Covarianza.

El método analítico de varianza-covarianza supone que la distribución de los cambios en el valor del portafolio son normales y son el resultado de una combinación lineal de diversos factores de riesgo que se distribuyen también con una distribución normal. Siguiendo a Dowd [1998] los pasos del método analítico de Varianza-Covarianza son:

¹⁸ La generación de un número muy grande de simulaciones para lograr un estimado aceptable estadísticamente, comúnmente es un problema ya que las corridas que se requieren están del orden de los millones. Esto puede resolverse utilizando los métodos de reducción de varianza.

Paso 1. Especificar las distribuciones de los factores de riesgo.

En el método analítico de varianza-covarianza, se hacen los siguientes supuestos importantes:

- a) El cambio de los factores de riesgo de mercado tienen una distribución normal multivariada.
- b) El cambio del valor del portafolio se ve afectado de manera lineal por los cambios en los factores de riesgo de mercado¹⁹.
- c) El cambio del valor del portafolio tiene una distribución normal²⁰.
- d) Las observaciones individuales son independientes serialmente.

En el enfoque analítico de varianza-covarianza, toda la información histórica se ve completamente caracterizada a través de las medias, varianzas y covarianzas de los factores de riesgo de mercado, de esta forma no es necesario mantener grandes bases de datos históricas.

Paso 2. Descomponer cada uno de los instrumentos del portafolio en instrumentos más simples.

El método de varianza-covarianza supone que los cambios en los instrumentos financieros complejos, pueden mapearse a través de los cambios de factores de riesgo simples. Por ejemplo, un contrato adelantado sobre una acción que pague dividendos se puede descomponer en tres factores de riesgo estándar: la tasa de dividendos del activo, la tasa de interés libre de riesgo y el precio del activo.

¹⁹ Este supuesto fácilmente puede contradecirse si el portafolio contiene activos no lineales tales como las opciones.

²⁰ El hecho de que la distribución de los cambios de valor del portafolio es una distribución normal viene como consecuencia de que la composición lineal de variables normales es otra variable distribuida normalmente.

Paso 3. Estimar las varianzas y covarianzas de los factores de riesgo estándar.

En este paso se calculan las varianzas y covarianzas de los factores de riesgo a través de la información histórica disponible²¹.

Paso 4. Calcular el Valor en Riesgo.

Para calcular el valor en riesgo del portafolio se utilizan técnicas estándar de estadística de un portafolio de activos, es decir:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} \alpha_i \alpha_j \sigma_i \sigma_j \quad (2.11)$$

donde:

σ_p^2 : es la varianza del portafolio.

σ_i : es la desviación estándar del factor de riesgo de mercado i , $i = 1, \dots, m$

ρ_{ij} : es el coeficiente de correlación entre el factor de riesgo de mercado i y j .

En notación matricial, esta relación sería:

$$\sigma_p^2 = \mathbf{a}^T \Sigma \mathbf{a} \quad (2.12)$$

con:

$\mathbf{a} = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_m)'$: el vector de valores presentes de las posiciones en los factores de mercado.

Σ es la matriz de varianza-covarianza de los factores de riesgo de mercado.

²¹ Véase el Capítulo 3: “Estimación de la matriz de Varianza-Covarianza”.

Una vez conocida la desviación estándar del portafolio, el Valor en Riesgo del portafolio es simplemente una constante, que depende del nivel de confianza c , multiplicada por la desviación estándar del portafolio, es decir:

$$VaR(c) = -z_{1-c} \sigma_p \quad (2.13)$$

en el caso particular de que el nivel de confianza fuera del 99% el VaR equivale a ²² $2.33\sigma_p$

Método Analítico de Varianza-Covarianza aplicado a Bonos.

En el caso de que se quiera calcular el Valor en Riesgo de un bono, el procedimiento tradicional consiste en suponer que los cambios en la curva de rendimiento son pequeños y paralelos, con lo que se aproximan los cambios en el valor del bono a través del producto de su duración modificada²³ por el cambio en el valor de la tasa de interés, es decir:

$$\Delta B = -B \frac{D}{(1+y)} \Delta y \quad (2.14)$$

donde:

$D^* = \frac{D}{(1+y)}$: es la duración modificada del bono.

B : es el precio del bono.

y : es la tasa de interés.

²² Véase el ANEXO A: “ Derivación de la fórmula de Valor en Riesgo lineal cuando los rendimientos del portafolio se distribuyen normalmente” para una derivación formal de la ecuación (2.13).

²³ Véase la sección 1.2.

A partir de la ecuación (2.14) se obtiene la desviación estándar del cambio en el valor del bono:

$$\sigma_{\Delta B} = -B \frac{D}{(1+y)} \sigma_{\Delta y} \quad (2.15)$$

Con lo que el Valor en Riesgo del bono es:

$$VaR(c) = -z_{1-c} \sigma_{\Delta B} \quad (2.16)$$

Alternativamente se puede aplicar el método de Mapeo de Flujos de efectivo para manejar las tasas de interés en un bono. Este método consiste en usar como variables de mercado los precios de los bonos cupón cero con vencimiento estándar. Por ejemplo en el caso de México: 28 días, 91 días, 182 días, 270 días, 365 días, etc. De esta forma se considera al bono objetivo como constituido por bonos cupón cero. La posición en cada bono cupón cero del bono objetivo es entonces mapeada en una posición equivalente para un bono cupón cero estándar.

Método Analítico de Varianza-Covarianza: Mapeo de Flujos de Efectivo.

En la metodología utilizada para valuación de bonos, estos son descompuestos en sus flujos de efectivo futuros, los cuales son llevados a valor presente y sumados para encontrar el precio del instrumento. Para analizar el riesgo en estos instrumentos se puede utilizar una metodología análoga, la cual consistiría en descomponer cada bono en sus flujos futuros, considerar a cada flujo como un bono cupón cero, analizar el riesgo para cada bono cupón cero, y por último aplicar la metodología tradicional de varianza-covarianza de portafolios para encontrar la varianza del portafolio y con esto el VaR del portafolio. Sin embargo, esta técnica presenta la desventaja de que se pueden presentar una gran cantidad de combinaciones para las fechas de los flujos de efectivo, lo que conllevaría un

gran tiempo para calcular la matriz de varianza covarianza de los factores de riesgo (bonos cupón cero) asociados.

Tomando en cuenta lo anterior, se puede mapear cada flujo de efectivo futuro a un conjunto pre-especificado de tiempos de los factores de riesgo de los cuales se conoce la desviación estándar y correlaciones entre ellos²⁴ a los cuales se les conoce simplemente como vértices. La metodología del mapeo consiste en asignar un flujo de efectivo entre dos vértices adyacentes²⁵, lo cual se realiza a través de los siguientes pasos:

1) Se determinan los vértices apropiados.

Por ejemplo: $t=28/360$, $t=91/360$, $t=182/360$, $t=270/360$, $t=365/360$, $t=2$, $t=3$, $t=5$ años

2) Se calculan las desviaciones estándar y correlaciones para estos vértices.

Para el ejemplo, esto significa calcular las desviaciones estándar y la matriz de correlaciones para cada una de las tasas de interés correspondientes a los bonos cupón cero de $t=28/360$, $t=91/360$, $t=182/360$, $t=270/360$, $t=365/360$, $t=2$, $t=3$, $t=5$ años.

3) Se calcula la tasa de interés interpolada para el flujo de efectivo. Sea y_t la tasa compuesta continuamente correspondiente al flujo de efectivo S_t , en el tiempo t . Para encontrarla se interpolan las tasas de interés de los vértices correspondientes a un tiempo menor t_d y un tiempo mayor t_u , las cuales corresponden a y_d y y_u , respectivamente, en cuyo intervalo de tiempo se encuentra t . Es decir:

$$y_t = \theta y_d + (1 - \theta) y_u \quad (2.17)$$

²⁴ Mina, J. Xiao, J. [2001], pag. 43.

²⁵ No existe una forma única para mapear, una de las originalmente usadas consistía en interpolar linealmente las volatilidades de los vértices subyacentes. Sin embargo esto tiene el inconveniente de que tiende a producir resultados incorrectos cuando la correlación de los rendimientos de los bonos cupón cero correspondientes a dos vértices vecinos es pequeña. Mina[1999]

Donde:

$$\theta = \frac{t_u - t}{t_u - t_d} \quad (2.18)$$

corresponde al coeficiente lineal para realizar la interpolación de las tasas.

4) Se determina el valor presente del flujo S_t , V_0 . Es decir²⁶:

$$V_0 = S_t e^{-y_t t} \quad (2.19)$$

5) Se determinan las cantidades que deben asociarse a cada vértice²⁷. Para esto se supone que la cantidad V_0 se distribuye en valor presente entre las cantidades S_d y S_u traídas a valor presente más una constante. Es decir:

²⁶ En el caso de tasas compuestas discretamente, el valor presente se calcula con la fórmula:

$$V_0 = S_t (1 + y_t/m)^{-mt}, \text{ con } m \text{ el número de capitalizaciones en el periodo nominal de la tasa } y_t.$$

²⁷ En procedimientos anteriores, basados en la interpolación lineal de las volatilidades de los vértices subyacentes (Vease Longerstacy, J, Spencer M. [1996] pags. 117-121), una vez conocido el parámetro θ y el valor presente del flujo S_t , V_0 se encontraba el peso a asociarse para cada vértice a través del siguiente procedimiento alternativo:

i) Se calcula la desviación estándar correspondiente al tiempo t en que se da el flujo de efectivo S_t , a través de interpolación lineal usando el parámetro θ y las desviaciones estándar para los vértices d y u , σ_d y σ_u respectivamente, es decir:

$$\sigma_t = \theta \sigma_d + (1 - \theta) \sigma_u$$

ii) Se calculan los pesos a distribuirse para cada vértice de riesgo, resolviendo la ecuación:

$$\sigma_t^2 = \omega^2 \sigma_d^2 + (1 - \omega)^2 \sigma_u^2 + 2\omega(1 - \omega) \sigma_d \sigma_u \rho_{du}$$

con:

σ_d : es la desviación estándar del factor de riesgo correspondiente al vértice d .

σ_u : es la desviación estándar del factor de riesgo correspondiente al vértice u .

ρ_{du} : es la correlación entre el factor de riesgo asociado al vértice d y el asociado al vértice u .

iii) Una vez conocidos los pesos, las cantidades a asignar para cada uno de los vértices se calculan como:

$$V_0 = S_t e^{-y_t t} = S_d e^{-y_d t_d} + S_u e^{-y_u t_u} + C \quad (2.20)$$

Un punto importante a notar respecto a este valor presente es que las cantidades asociadas para S_d y S_u deben preservar la sensibilidad del valor presente del flujo S_t respecto a las tasas de interés para los vértices inferior y superior²⁸. Esto equivale a que las derivadas respecto a y_d (o y_u) en las ecuaciones (2.19) y (2.20) con y_t dada por (2.17) deben ser iguales.

Derivando respecto a y_d en las ecuaciones (2.19) y (2.20) e igualando se tiene:

$$-\theta t S_t e^{-y_t t} = -S_d t_d e^{-y_d t_d}$$

de lo cual se tiene que:

$$S_d = \theta \frac{t}{t_d} S_t e^{-y_t t} e^{y_d t_d} \quad (2.21)$$

Derivando respecto a y_u a las ecuaciones (2.19) y (2.20) e igualando, se obtiene la ecuación para S_u , es decir:

$$-(1-\theta) t S_t e^{-y_t t} = -S_u t_u e^{-y_u t_u}$$

inferior: $\omega S_t e^{-y_t t}$

superior: $(1-\omega) S_t e^{-y_t t}$

iv) Con lo que se puede calcular el Valor en Riesgo usando la ecuación (2.11) o la ecuación (2.12).

²⁸ El cambio en el valor presente del flujo S_t debido al cambio en una de las tasas en los vértices debe ser igual al cambio producido en el valor presente del portafolio S_d y S_u , correspondiente a los vértices.

despejando a S_u se tiene:

$$S_u = (1-\theta) \frac{t}{t_u} S_i e^{-y_i t} e^{y_u t_u} \quad (2.22)$$

Sustituyendo en (2.20) a las ecuaciones (2.21) y (2.22) se tiene el valor para C :

$$S_i e^{-y_i t} = \theta \frac{t}{t_d} S_i e^{-y_i t} e^{y_d t_d} e^{-y_i t_d} + (1-\theta) \frac{t}{t_u} S_i e^{-y_i t} e^{y_u t_u} e^{-y_u t_u} + C$$

despejando a C se tiene:

$$C = \left[\frac{(t_d - t)(t_u - t)}{t_d t_u} \right] S_i e^{-y_i t} \quad (2.23)$$

Una vez conocidos los factores S_d y S_u , se tiene que las cantidades a asignar para los vértices inferior y superior (factores de riesgo) son en valor presente los siguientes:

$$\begin{aligned} \text{inferior: } & \theta \frac{t}{t_d} S_i e^{-y_i t} \\ \text{superior: } & (1-\theta) \frac{t}{t_u} S_i e^{-y_i t} \end{aligned} \quad (2.24)$$

con y_i y θ calculadas por (2.17) y (2.18) respectivamente.

- 6) Calcular el Valor en Riesgo. Conociendo las desviaciones estándar de los vértices, las correlaciones entre ellos (calculadas en el paso 2) y las cantidades a asignar a cada vértice en valor presente (calculadas en el paso 5), se utiliza la ecuación (2.11) o la ecuación (2.12).

Método Analítico de Varianza-Covarianza: El enfoque delta-normal.

El enfoque delta-normal aproxima los cambios en el valor de una opción a través de la aproximación de primer orden de Taylor:

$$dC = \frac{\partial C}{\partial S} dS \quad (2.25)$$

donde:

C : es el precio de la opción.

S : es el precio del activo subyacente.

$\delta = \frac{\partial C}{\partial S}$: se conoce como la delta de la opción²⁹.

De esta forma el Valor en Riesgo de la opción es simplemente:

$$VaR^{opcion}(c) \approx \delta VaR^{activo\ subyacente}(c) \quad (2.26)$$

y:

$$VaR^{activo\ subyacente}(c) = -z_{1-c} \sigma_{\Delta S} \quad (2.27)$$

²⁹ Véase la sección 1.3.

Método Analítico de Varianza-Covarianza: El enfoque delta-gamma normal.

El enfoque delta-normal aproxima los cambios en el valor de una opción a través de la aproximación de segundo orden de Taylor:

$$dC = \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} (dS)^2 \quad (2.28)$$

donde:

C : es el precio de la opción.

S : es el precio del activo subyacente.

$\delta = \frac{\partial C}{\partial S}$: se conoce como la delta de la opción.

$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$: se conoce como la gamma de la opción³⁰.

De esta forma la desviación estándar de la opción es:

$$\sigma_{opcion} = \sqrt{\delta^2 \sigma_S^2 + (\gamma/2)^2 \sigma_S^4} \quad (2.29)$$

y:

$$VaR^{opcion}(c) = -z_{1-c} \sigma_{opcion} \quad (2.30)$$

³⁰ Véase la sección 1.3.

2.3.3. Ventajas y Desventajas de cada una de las metodologías para calcular el VaR

Tabla 1. Ventajas y Desventajas del Método de Simulación Histórica.³¹	
Ventajas	Desventajas
<ul style="list-style-type: none"> • No es necesario hacer ningún supuesto acerca de la distribución de los factores de riesgo. • No es necesario estimar las volatilidades y correlaciones: ellas están implícitamente capturadas por los valores diarios reales de los factores de mercado. • Las colas anchas de las distribuciones, y otros eventos extremos, son capturados, siempre y cuando se encuentren en el conjunto de datos históricos. • Agregar la información de diversos mercados es directo. • Permite el cálculo de los intervalos de confianza para el VaR 	<ul style="list-style-type: none"> • Dependencia completa sobre un conjunto de datos históricos y los eventos ocurridos en el intervalo de tiempo de muestra. Es decir, los eventos extremos tales como las crisis de los mercados pueden quedar fuera del conjunto de datos o pueden ser ignorados. O también pueden ser incorporados al conjunto de datos y distorsionar las medidas. • No pueden modelarse los cambios en la estructura de mercado, tales como la introducción del Euro en enero de 1999. • Las bases de datos reducidas pueden conducir a estimaciones sesgadas e imprecisas del VaR • No se puede utilizar para realizar análisis de sensibilidad. • No siempre es eficiente computacionalmente cuando los portafolios contienen instrumentos complejos.

³¹ Tablas elaboradas con información de Crouhy M, Galai D., Mark R. [2001] y Jorion [1997].

Tabla 2. Ventajas y Desventajas del Método de Simulación MonteCarlo	
Ventajas	Desventajas
<ul style="list-style-type: none"> • Se puede ajustar para utilizar cualquier distribución de los factores de riesgo • Puede usarse para modelar portafolios complejos • Permite el cálculo de intervalos de confianza para el Var • Permite al usuario el análisis de sensibilidad y stress testing. • Permite el cálculo del error estándar para los estimados que genera. 	<ul style="list-style-type: none"> • Las observaciones extremas no se incorporan comúnmente en las distribuciones • Intenso en el uso de los recursos de computo

Tabla 3. Ventajas y Desventajas del Método analítico de Varianza-Covarianza

Ventajas	Desventajas
<ul style="list-style-type: none">• Computacionalmente eficiente: toma solo unos pocos minutos correr la posición de riesgo de todo un banco.• Debido al Teorema del Límite Central, la metodología puede aplicarse aún cuando los factores de riesgo no se distribuyan normalmente. • Ningún modelo de precios se requiere: solo las griegas son necesarias, y estas pueden ser proporcionadas directamente por la mayoría de los sistemas que existen en los bancos.• Es fácil el manejo del VaR incremental	<ul style="list-style-type: none">• Supone normalidad de los rendimientos del portafolio.• Supone que los factores de riesgo siguen una distribución multivariada normal (log normal en los precios), y esto no funciona convenientemente cuando se tienen colas anchas.• Requiere la estimación de volatilidades de los factores de riesgo, así como las correlaciones de sus rendimientos. • Los rendimientos de los activos pueden ser aproximados a través de la expansión de Taylor. En algunos casos una expansión de segundo orden no es suficiente para capturar el riesgo de una opción (especialmente en el caso de opciones exóticas).• No puede usarse para análisis de sensibilidad.• No puede usarse para derivar el intervalo de confianza del VaR

CAPITULO 3

ESTIMACIÓN DE LA MATRIZ DE VARIANZA-COVARIANZA USANDO EL MODELO GARCH(1,1)

Estimar el valor de la volatilidad de los factores de riesgo es fundamental para la administración de riesgos en los portafolios de instrumentos financieros. Para el cálculo del Valor en Riesgo es necesario dar un seguimiento adecuado del valor de las volatilidades y correlaciones históricas. Bajo este principio, se utilizan comúnmente diversas metodologías para calcular la volatilidad, dentro de las cuales se encuentra la varianza muestral, de la cual una variante es utilizar una ventana móvil de datos históricos, que tiene la característica de que los datos tienen el mismo peso independientemente del tiempo en que se hayan presentado¹. Otras metodologías, dentro de las cuales se encuentra la EWMA², utilizada por RiskMetrics, dan más peso a las observaciones recientes; e inclusive permiten el modelado de que los mercados en ocasiones presentan periodos de calma y de alta volatilidad, como el modelo GARCH.

En este capítulo se desarrollarán las expresiones que permiten la actualización de la matriz de varianza-covarianza usando un modelo GARCH (1,1) y en el Anexo B se explica la estimación de la varianza utilizando promedios móviles y la metodología EWMA.

¹ Una característica importante de la metodología de ventana móvil de datos históricos es que las observaciones de rendimientos de los factores de riesgo son consideradas con la misma importancia, sin tomar en cuenta de que la historia reciente podría tener mayor relevancia para el cálculo de la varianza de los rendimientos con respecto a las observaciones más alejadas en el tiempo. Además, se presenta un problema en la elección de la ventana de datos, ya que mientras más datos se consideren, se incrementa la precisión de la estimación, sin embargo, al mismo tiempo podría dejar de considerarse la variación implícita reciente.

² Una de las limitaciones del modelo de promedios móviles ponderados exponencialmente (EWMA) es que no captura el efecto de que la volatilidad en los mercados financieros tiende a presentarse en “conjuntos”, donde los periodos de tranquilidad con rendimientos bajos son interrumpidos con periodos volátiles de rendimientos altos. De esta forma, la estructura de la volatilidad debería tener un comportamiento con reversión a la media, con la volatilidad de corto plazo cayendo por arriba o por debajo de una volatilidad de largo plazo, dependiendo de si las condiciones de mercado son de alta o baja volatilidad. Las limitaciones de este modelo son corregidas a través de la familia de modelos GARCH.

3.1. El Modelo GARCH (1,1)

Sea σ_t^2 la varianza del cambio relativo del factor de riesgo³, y , en el tiempo t , estimada al final del periodo que va de $t-1$ a t . Además, se define a σ_t como la desviación estándar en el tiempo t .

Por notación se define al cambio relativo del factor de riesgo, y , como la variable x_t , correspondiente al tiempo t . La cual se calcula con:

$$x_t = \frac{\Delta y_t}{y_{t-1}} \quad (3.1)$$

con y_{t-1} el valor del factor de riesgo en el tiempo $t-1$ y $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$

El modelo GARCH(1,1)⁴ (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity), o modelo generalizado autorregresivo con heteroscedasticidad condicional. Heteroscedasticidad significa "varianza cambiante", así la heteroscedasticidad condicional significa varianza condicional cambiante⁵. Una serie de tiempo presenta heteroscedasticidad condicional si tiene periodos de baja volatilidad intercalados por periodos de alta volatilidad, es decir se tienen conjuntos de volatilidad.

³ Se puede también pensar a este cambio relativo como el rendimiento de un activo o un portafolio de activos.

⁴ Propuesto por Bollerslev en 1986.

⁵ La idea de varianza incondicional se basa en que la distribución que gobierna a cada dato en una serie de datos es independiente y se puede caracterizar a cada dato como obtenido de una distribución simple, llamada la distribución incondicional. Sin embargo, los datos en su conjunto se pueden considerar como generados por un proceso estocástico con la volatilidad que varíe en el tiempo. En este caso, no sería correcto colapsar los datos en una sola distribución, ignorando la dinámica presentada por los datos. La distribución condicional cambia en cada punto del tiempo, y en particular el proceso de volatilidad es estocástico.

El modelo GARCH(1,1), el más conocido de los modelos GARCH, se basa en la siguiente ecuación^{6,7}:

$$\sigma_t^2 = \gamma V + \alpha \sigma_{t-1}^2 + \beta x_t^2 \quad (3.2)$$

con:

V : la varianza de los rendimientos promedio de largo plazo

σ_{t-1}^2 : la varianza de los rendimientos en el tiempo $t-1$

x_t^2 : el rendimiento en el tiempo t dado por la ecuación (3.1)

Además se cumple que la suma de los coeficientes debe ser uno⁸:

$$\gamma + \alpha + \beta = 1 \quad (3.3)$$

Una forma útil para la estimación de parámetros en el modelo GARCH(1,1) es:

$$\sigma_t^2 = w + \alpha \sigma_{t-1}^2 + \beta x_t^2 \quad (3.4)$$

Con $w = \gamma V$.

Un modelo GARCH supone que los x_t se distribuyen con una distribución condicional normal con media cero⁹ y con varianza condicional σ_t^2 . De esta forma,

⁶ El modelo general de GARCH(p,q) calcula la σ_t^2 de las p observaciones recientes de los rendimientos x_t^2 y de los más recientes q estimaciones de la varianza.

⁷ En la literatura se pueden encontrar muchos tipos de modelos GARCH, dentro de los cuales se citan el IGARCH (Integrated GARCH), AGARCH (Asymmetric GARCH), EGARCH (Exponential GARCH), Components GARCH y Factor GARCH entre otros, Bollerslev, T., Chou, R.Y. y Corner, K.f. (1992).

⁸ Para estabilidad del proceso GARCH(1,1), se requiere que $\alpha + \beta < 1$.

⁹ Varios autores dentro de los cuales se pueden mencionar a Kim, J., Malz A. M., Mina, J. [1999] y Hull, J. [2003], soportan este supuesto para calcular el Valor en Riesgo, estableciendo que en intervalos de tiempo menores a tres meses la media del rendimiento es significativamente menor que la desviación estándar de los rendimientos, por lo que el incorporar cualquier estimado de la media de los rendimientos en los cálculos de la varianza es tan bueno como utilizar el supuesto de que la media de los rendimientos es cero

las distribuciones no condicionales de los rendimientos serán leptokúrticas –es decir, con colas más anchas que una distribución normal- debido a que la varianza condicional cambiante permite tomar en cuenta para el análisis los valores extremos u observaciones inusualmente grandes ¹⁰. Sin embargo, en situaciones de alta frecuencia de los datos (por ejemplo datos intradía) se puede presentar que el modelo GARCH no capture en su totalidad los efectos de las colas anchas, para lo cual en la literatura se han propuesto correcciones a través de la mezcla de distribuciones normales¹¹.

Iterando hacia el pasado a la ecuación (3.4) se sustituye la expresión para σ_{t-1}^2 :

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= w + \alpha [w + \alpha\sigma_{t-2}^2 + \beta x_{t-1}^2] + \beta x_t^2 \\ &= w + \alpha w + \alpha^2 \sigma_{t-2}^2 + \beta x_t^2 + \alpha \beta x_{t-1}^2\end{aligned}$$

Ahora, sustituyendo para σ_{t-2}^2 :

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= w + \alpha w + \alpha^2 [w + \alpha\sigma_{t-3}^2 + \beta x_{t-2}^2] + \beta x_t^2 + \alpha \beta x_{t-1}^2 \\ &= w + \alpha w + \alpha^2 w + \alpha^3 \sigma_{t-3}^2 + \beta x_t^2 + \alpha \beta x_{t-1}^2 + \alpha^2 \beta x_{t-2}^2\end{aligned}$$

Si se tiene la historia de n observaciones de rendimiento, más la observación del tiempo t , la fórmula anterior se simplifica en:

$$\sigma_t^2 = \alpha^{n+1} \sigma_0^2 + \sum_{i=0}^n \alpha^i (w + \beta x_{t-i}^2) \quad (3.5)$$

¹⁰ Alexander, C. [1996], pags. 134-135.

¹¹ Hull, J, White, W. [1998].

Al ser α un valor entre cero y uno, se tiene que al ser n grande, α^{n+1} tiende a ser cero, por lo que la ecuación (3.5) se reduce a:

$$\sigma_i^2 = \sum_{i=0}^n \alpha^i (w + \beta x_{t-i}^2) \quad (3.6)$$

Trabajando un poco mas la expresión (3.6) se tiene que:

$$\sigma_i^2 = w \sum_{i=0}^n \alpha^i + \sum_{i=0}^n \alpha^i \beta x_{t-i}^2 \quad (3.7)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación (3.7) se reduce a $w/(1-\alpha)$ ¹², por lo que la expresión para calcular la varianza basado en un proceso GARCH(1,1) es:

$$\sigma_i^2 = \frac{w}{1-\alpha} + \sum_{i=0}^n \alpha^i \beta x_{t-i}^2 \quad (3.8)$$

¹² Sea :

$$\begin{aligned} S &= w \sum_{i=0}^n \alpha^i \\ &= w [1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^n] \end{aligned}$$

si se obtiene αS y se resta de la expresión para S , se tiene:

$$S - \alpha S = w [1 - \alpha^{n+1}]$$

por lo que simplificando la expresión anterior, y con α^{n+1} que tiende a cero cuando n es grande, resulta:

$$S = \frac{w}{(1-\alpha)}$$

Y de manera análoga, la expresión para la covarianza entre los rendimientos de dos factores de riesgo j y k en el tiempo t , es la siguiente:

$$\sigma_{j,k,t} = \frac{w_{j,k}}{1-\alpha} + \sum_{i=0}^n \alpha^i \beta x_{j,t-i} x_{k,t-i} \quad (3.9)$$

Con $w_{j,k} = \gamma V_{j,k}$ y $V_{j,k}$ es la covarianza de largo plazo entre los factores j y k .

Basándose en las ecuaciones (3.8) y (3.9) se tiene que la matriz de varianza-covarianza para m factores de riesgo y $n+1$ datos para cada serie basado en el modelo GARCH(1,1), se calcula con:

$$\Sigma = \mathbf{R}^T \mathbf{R} + \frac{w_{j,k}}{1-\alpha} \quad (3.10)$$

con:

$$\mathbf{R} = \sqrt{\beta} \begin{pmatrix} x_{1,t} & x_{2,t} & \dots & x_{m,t} \\ \sqrt{\alpha} x_{1,t-1} & \sqrt{\alpha} x_{2,t-1} & \dots & \sqrt{\alpha} x_{m,t-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sqrt{\alpha^n} x_{1,t-n} & \sqrt{\alpha^n} x_{2,t-n} & \dots & \sqrt{\alpha^n} x_{m,t-n} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Un punto importante a notar es que el modelo EWMA equivale a un caso particular del modelo GARCH (1,1), cuando $\gamma=0$ (o $w=0$), $\alpha=\lambda$ y $\beta=1-\lambda$.

Una característica importante del modelo GARCH (1,1) es que incorpora reversión a la media¹³, es decir que reconoce la tendencia de la varianza en la práctica de regresar a un nivel de varianza promedio de largo plazo¹⁴; en el caso de la fórmula

¹³ La reversión a la media se define como la tendencia de una variable de mercado (por ejemplo la tasa de interés) de regresar a un nivel promedio de largo plazo.

¹⁴ Hull, J. [2003] pag. 377.

(3.2) este valor corresponde a V . Además, el modelo GARCH(1,1) equivale a un modelo donde la varianza sigue un proceso estocástico dado por¹⁵:

$$d\sigma^2 = a(V - \sigma^2)dt + \xi\sigma^2 dz \quad (3.12)$$

con:

$$\begin{aligned} a &= 1 - \alpha - \beta \\ \xi &= \alpha\sqrt{2} \\ V &= \frac{w}{1 - \alpha - \beta} \end{aligned} \quad (3.13)$$

De tal manera que la varianza tiene una tendencia a regresar al valor de V con una velocidad o tasas dada por a ¹⁶. De tal manera que si $\sigma^2 > V$ entonces se tiene una tendencia negativa, y en caso contrario, si $\sigma^2 < V$ entonces se tiene una tendencia positiva; las cuales son reguladas por el valor de a . El parámetro ξ se puede ver como la volatilidad de la varianza.

3.2. Estimación de Parámetros en el modelo GARCH(1,1).

Ahora se mostrará la forma en que pueden estimarse los parámetros cuando se usa un modelo GARCH(1,1) o un EWMA.

¹⁵ En la literatura se encuentran varios trabajos que incorporan un proceso estocástico de varianza con reversión a la media, dentro de los cuales se pueden citar a : Stein E., Stein J. [1991], Scott [1987], Jiang [2001], Bailey W., Stulz R. [1989], Wiggins, J. [1987], Heston, S. [1993] y Hull, J., White A. [1987].

¹⁶ Duan, J. [1995], muestra que se puede usar un modelo GARCH (1,1) para calcular el precio de opciones financieras consistente con el supuesto de volatilidad estocástica.

Suponiendo que se tienen $n+1$ observaciones $x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-n}$ de los rendimientos del factor de riesgo, los cuales se comportan normalmente con media cero y varianza σ_t^2 . La función de verosimilitud es¹⁷:

$$\prod_{i=0}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{t-i}^2}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_{t-i}}{\sigma_{t-i}^2} \right)^2} \right) \quad (3.14)$$

Tomando logaritmos de la ecuación (3.14) y sustituyendo σ_t^2 por v_t , se tiene que la función a maximizar es:

$$L(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{i=0}^n \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \ln v_{t-i} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \frac{x_{t-i}^2}{v_{t-i}} \quad (3.15)$$

Por lo tanto, el máximo de la función de verosimilitud puede ser encontrado, buscando los valores de w , α y β que maximizan la ecuación (3.15)¹⁸.

Un procedimiento alternativo para la estimación de parámetros en el modelo GARCH(1,1) es el propuesto por Engle y Mezrich¹⁹, en el cual la varianza de largo plazo se calcula de la varianza muestral y entonces el valor de w se obtiene a

¹⁷ Suponiendo que los rendimientos del factor de riesgo se comportan normalmente con media cero y varianza σ^2 . Además, se cuenta con n observaciones x_1, x_2, \dots, x_n . Se tiene que la verosimilitud de que se de el valor x_i es la función de densidad evaluada en el punto x_i , es decir:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_i}{\sigma^2} \right)^2}$$

De esta forma la función de verosimilitud es el producto de la función de verosimilitud de todas las observaciones:

$$\prod_{i=0}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{t-i}^2}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_{t-i}}{\sigma_{t-i}^2} \right)^2} \right)$$

¹⁸ Otros procedimientos alternativos basados también en iteraciones se pueden encontrar en Bollerslev, T. [1986] y en Harvey [1976].

¹⁹ Engle, R. y Mezrich, J., [1996].

través de $V(1-\alpha-\beta)$ con lo que para maximizar la ecuación (3.15), solo los parámetros α y β tienen que ser encontrados.

Para el caso de un modelo EWMA, la estimación se hace suponiendo $w = 0$, $\alpha = \lambda$ y $\beta = 1 - \lambda$, con lo que solo tiene que estimarse el valor de λ que maximiza la ecuación (3.15).

En el caso de que se tengan m factores de riesgo, la estimación de los parámetros α , β y γ se realiza como en Bollerslev, T., Engle, R. y Wooldridge, J. [1988], en la cual se estiman los parámetros buscando maximizar la suma de las funciones de verosimilitud de cada factor de riesgo, es decir:

$$L(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{j=1}^m L_j(\alpha, \beta, \gamma) \quad (3.16)$$

Donde $L_j(\alpha, \beta, \gamma)$ es la función de verosimilitud del factor de riesgo j , $j = 1, \dots, m$.

3.3. Pruebas del modelo GARCH.

Una de las más importantes preguntas que tienen que realizarse antes de utilizar un modelo GARCH, es si realmente la varianza sigue un proceso de este tipo. La forma de probar lo anterior es verificar la estructura de autocorrelación en las series de tiempo de los rendimientos al cuadrado, x_t^2 .

Si los rendimientos al cuadrado exhiben autocorrelación, entonces la manera de probar de que el modelo GARCH funciona es estandarizando los rendimientos al dividirlos por la desviación estándar estimada a través del modelo GARCH, y entonces probar la autocorrelación de los rendimientos estandarizados al cuadrado. Si la autocorrelación se ha removido, entonces el modelo GARCH ha realizado bien su trabajo y es exitoso para explicar las autocorrelaciones de los

rendimientos al cuadrado y por ende las varianzas y covarianzas de los rendimientos.

Dentro de las pruebas más populares para probar autocorrelación se encuentran: la Durbin-Watson, la Box-Pierce y la Ljung-Box, las cuales se describen a continuación:

Prueba Durbin-Watson.

La prueba Durbin-Watson²⁰ es la prueba más usada para probar autocorrelación en los datos de una serie. El estadístico de prueba, suponiendo que se tienen en la serie histórica $n+1$ datos (n datos históricos más el del tiempo t), es:

$$d = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (x_{t-i}^2 - x_{t-i-1}^2)^2}{\sum_{i=0}^n x_{t-i}^4} \quad (3.17)$$

La hipótesis nula y la alternativa son:

$$\begin{aligned} H_0 : \rho &= 0 \\ H_a : \rho &\neq 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

La distribución exacta de d depende de la serie de datos con que se cuente. Sin embargo, Durbin y Watson encontraron que la distribución real de d cae entre dos estadísticos, d_l y d_u , los límites inferior y superior respectivamente, de tal forma que el valor crítico del 5% para la verdadera distribución de d debe caer a la derecha de d_l y a la izquierda de d_u . Los valores de d_l y d_u dependen de los valores del tamaño de la muestra y del número de regresores K , excluyendo el

²⁰ Durbin, J y Watson, G. [1950] y [1951]

intercepto, en nuestro caso para un modelo GARCH(1,1) este valor de K sería de uno²¹.

Por lo tanto, de acuerdo con Greene [1993], la prueba de la hipótesis nula se puede realizar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{No Rechazar } H_0 \text{ si } d > d_u \\ &\text{Rechazar } H_0 \text{ si } d \leq d_l \end{aligned} \tag{3.19}$$

Sin embargo no se puede obtener ninguna conclusión si $d_l < d \leq d_u$.

Prueba de Box-Pierce.

La prueba de Box-Pierce²² se basa en el siguiente estadístico $Q \sim \chi^2(L)$:

$$Q = (n+1) \sum_{j=1}^L \varphi_j^2 \tag{3.20}$$

con:

$$\varphi_j = \frac{\sum_{i=0}^{t-j-1} x_{t-i}^2 x_{t-i-j}^2}{\sum_{i=0}^n x_{t-i}^4} \tag{3.21}$$

La hipótesis nula es:

$$H_0 : \text{No autocorrelacion} \tag{3.22}$$

²¹ Sin embargo, vale la pena mencionar que la prueba de Durbin-Watson se ha encontrado que no funciona correctamente cuando se tiene dentro de la ecuación de regresión a la variable dependiente retrasada, como en el caso de un proceso GARCH[1,1], ya que el estadístico estaría sesgado hacia no encontrar correlación, como lo estudiaron Nerlove y Wallis [1966].

²² Box, G., Pierce, D. [1970].

Por lo tanto, para la prueba de la hipótesis nula, con un nivel de confianza de $1 - \alpha$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{No Rechazar } H_0 \text{ si } \chi^2_{(\alpha/2)} \leq Q \leq \chi^2_{(1-\alpha/2)} \\ \text{Rechazar } H_0 \text{ si } Q \leq \chi^2_{(\alpha/2)} \text{ o } Q \geq \chi^2_{(1-\alpha/2)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Prueba de Ljung-Box.

La prueba de Ljung-Box²³ es un refinamiento de la prueba de Box-Pierce, en la cual el estadístico $Q \sim \chi^2(L)$ es ahora:

$$Q = (n+1)(n+3) \sum_{j=1}^L \frac{\varphi_j^2}{n+1-j} \quad (3.24)$$

con φ_j dada como en (3.21), la hipótesis nula es como en (3.22) y las condiciones para realizar la prueba son como en (3.23).

²³ Ljung, G, Box, G., [1979]

Capítulo 4

Metodología de Valor en Riesgo No Lineal

4.1. Modelo Lineal

Sea P un portafolio de activos compuesto por las cantidades $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)'$ para los activos $1, 2, \dots, n$ con los valores en el tiempo t de $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)'$. De esta manera se tiene que el cambio en el valor del portafolio en el intervalo de tiempo de t a $t + \Delta t$ es:

$$\Delta P = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta v_i \quad (4.1)$$

donde ΔP es el cambio en el valor del portafolio de P_t a $P_{t+\Delta t}$ y $\alpha_i \Delta v_i$ es el cambio en el valor de la inversión en el activo i .

En esta situación el Valor en Riesgo para el portafolio de activos α para un nivel de confianza c se mide por el nivel de pérdida ΔP^* tal que:

$$\text{Prob}(\Delta P \leq \Delta P^*) = 1 - c \quad (4.2)$$

Con ΔP^* definido como el VaR (Valor en Riesgo) con un nivel de confianza de c .¹

Lo cual se puede interpretar como la máxima pérdida esperada dentro de un horizonte de tiempo, con un nivel de confianza de c .

¹ Algunos autores como Lehar [2000], Jiang [2001], definen el VaR como:

$$\text{Prob}(\Delta P \leq -\Delta P^*) = 1 - c$$

Definiendo a la variable u_i como:

$$u_i = \frac{\Delta v_i}{v_i} \quad (4.3)$$

y sustituyendo en (4.1), se obtiene:

$$\Delta P = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \Delta u_i \quad (4.4)$$

Las ecuaciones (4.1) y (4.4) corresponden al modelo conocido como lineal, en donde para calcular el Valor en Riesgo primeramente se calcula la varianza (desviación estándar) de ΔP :

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} \alpha_i \alpha_j \sigma_i \sigma_j \quad (4.5)$$

Donde σ_p , σ_i y σ_j representan la desviación estándar para ΔP , Δv_i y Δv_j respectivamente y ρ_{ij} es el coeficiente de correlación entre Δv_i y Δv_j .

Conociendo la desviación estándar del portafolio, el Valor en Riesgo con un nivel de confianza de c es de^{2, 3}:

$$VaR(\Delta t, c) = -z_{1-c} \sigma_p \quad (4.6)$$

con lo que z_{1-c} puede tomar diferentes valores con respecto al nivel de confianza del Valor en Riesgo, para el caso particular de que el nivel de confianza fuera del 99% el valor de $z_{1-0.99} = z_{0.01} = -2.33$.

sin embargo la interpretación que se debe de mantener es que ΔP^* es el cuantil $1 - c$ de la distribución de ΔP .

² En este caso particular se está suponiendo que las u_i 's se distribuyen de manera normal por lo que cualquier combinación lineal de variables aleatorias distribuidas normalmente se distribuye normalmente. (Mood y otros [1974] pag. 194.

4.2. Expansiones en Serie de Taylor para el cambio en el valor del Portafolio.

Un solo factor de Riesgo.

Supóngase que los activos v_i ($i=1,2,3,\dots,n$) dependen del tiempo y de un solo factor de riesgo y , en este caso particular tenemos que la fórmula del cambio en el valor del portafolio es igual a:

$$\Delta P = \mu_p + \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial v_i}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} (\Delta y)^2 \quad (4.7)$$

con:

$$\mu_p = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial v_i}{\partial t} \Delta t \quad (4.8)$$

Donde ΔP es el cambio de valor del portafolio y α_i ($i=1,2,3,\dots,n$) son las cantidades invertidas en cada activo v_i .

El término μ_p captura el efecto de primer orden del cambio del valor del portafolio debido al paso del tiempo.⁴

Se define ahora a la variable x como:

$$\Delta x = \frac{\Delta y}{y} \quad (4.9)$$

Esto implica que:

$$\Delta P = \mu_p + \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial v_i}{\partial y} y \Delta x + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} y^2 (\Delta x)^2 \quad (4.10)$$

³ En el ANEXO H: "Precisión del Valor en Riesgo", se explica como calcular el intervalo de confianza para este estimador.

n factores de Riesgo (cada activo depende de un solo factor).

Supóngase que los activos v_i dependen del tiempo y del factor de riesgo de mercado y_i , para este caso la fórmula del cambio en el valor del portafolio es igual a:

$$\Delta P = \mu_p + \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial v_i}{\partial y_i} \Delta y_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_i^2} (\Delta y_i)^2 \quad (4.11)$$

con:

$$\mu_p = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial v_i}{\partial t} \Delta t \quad (4.12)$$

Se define ahora a la variable x_i como:

$$\Delta x_i = \frac{\Delta y_i}{y_i} \quad (4.13)$$

Esto implica que:

$$\Delta P = \mu_p + \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \frac{\partial v_i}{\partial y_i} \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^2 \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_i^2} (\Delta x_i)^2 \quad (4.14)$$

m factores de de Riesgo (los n activos dependen de m factores de riesgo).

Supóngase que los activos v_i dependen del tiempo y de m factores de riesgo, con $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)'$ el vector de factores de riesgo de mercado, para este caso la fórmula del cambio en el valor del portafolio es igual a⁵:

$$\Delta P = \mu_p + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^m \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \Delta y_j + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_k \partial y_j} \Delta y_k \Delta y_j \quad (4.15)$$

⁴ En la práctica μ_p es tan pequeño que usualmente es ignorado.

con:

$$\mu_p = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial v_i}{\partial t} \Delta t \quad (4.16)$$

Donde μ_p se define de la misma forma que en la ecuación (4.12) en la sección anterior.

Si se define la variable x_i como en (4.13), la ecuación (4.15), se puede expresar como:

$$\Delta P = \mu_p + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^m \frac{\partial v_i}{\partial y_j} y_j \Delta x_j + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_k \partial y_j} y_k y_j \Delta x_k \Delta x_j \quad (4.17)$$

Para calcular el valor en Riesgo del portafolio se puede utilizar directamente simulación Monte Carlo en las ecuaciones (4.10), (4.14) o (4.17); a este tipo de simulación se le conoce como Simulación Monte Carlo Parcial, ya que no requiere que se calcule el valor del portafolio antes y después del cambio de la (s) variable (s) de riesgo, la cual sería la Simulación Monte Carlo Total o valuación Total, el cual se aplicaría en la ecuación (4.1).

Un punto importante a notar para el resto del análisis, es el supuesto de normalidad de los cambios relativos de los factores de riesgo. Para el caso particular de las simulaciones Monte Carlo Parcial y Total, no es necesario hacer ningún supuesto específico a priori sobre alguna distribución única de los cambios relativos de los factores de riesgo, ya que de antemano se puede simular cualquier distribución de probabilidad que presenten. Sin embargo, tanto en el modelo Delta, como para el modelo Cuadrático Delta-Gamma, es necesario el supuesto de que los cambios relativos se comportan como una distribución multinormal, siendo el caso cuando se obtenga la matriz de varianza-covarianza a través de un modelo GARCH; pero, si la matriz se obtiene a través de promedios móviles o promedios

⁵ Véase el ANEXO C: “Derivación de la fórmula de cambio de un portafolio con m factores de riesgo” para

móviles exponenciales, entonces es necesario que los cambios relativos se comporten normalmente individualmente, y en caso de que no sea así, se puede utilizar una aproximación a través de la combinación lineal de distribuciones normales, como el método de Hull, J. , White, A. [1998].

4.3. Modelo Delta de Varianza-Covarianza

En el modelo delta de Varianza-Covarianza, en lo sucesivo el modelo delta, la relación no lineal entre los valores de los activos y los factores de riesgo subyacentes es reemplazada por una aproximación lineal basada en la delta⁶ de cada activo. El método delta es útil para reducir la dimensionalidad del problema de estimar el valor en riesgo de un portafolio de activos ya que éste se enfoca en los factores de riesgo en lugar de las posiciones de riesgo. De esta manera es el método que se utiliza como una primera aproximación para portafolios complicados⁷. Sin embargo uno de sus principales problemas es que no captura las relaciones no lineales en los factores de riesgo.

Si se supone que todos los activos del portafolio se ven afectados por un solo factor de riesgo, en la ecuación (4.10), solo se consideran los factores lineales, es decir:

$$\Delta P = \mu_p + \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial v_i}{\partial y} y \Delta x \quad (4.18)$$

lo cual es equivalente a:

$$\Delta P = \mu_p + \sum_{i=1}^n \delta_i y \Delta x \quad (4.19)$$

los detalles de la fórmula.

⁶ La delta de un activo, δ , se define como la tasa de cambio del valor del activo respecto al cambio en el valor del activo subyacente (Vea la sección 1.3. para una explicación más detallada de la delta de un activo)

con:

$$\delta_i = \alpha_i \frac{\partial v_i}{\partial y} \quad (4.20)$$

En el caso de que se considere que cada activo es afectado individualmente por un factor de riesgo, se tiene que en la ecuación (4.14), solo se consideran los primeros dos términos, es decir:

$$\Delta P = \mu_p + \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \frac{\partial v_i}{\partial y_i} \Delta x_i \quad (4.21)$$

Lo cual es equivalente a:

$$\Delta P = \mu_p + \sum_{i=1}^n \eta_i y_i \Delta x_i \quad (4.22)$$

con:

$$\eta_i = \alpha_i \frac{\partial v_i}{\partial y_i} \quad (4.23)$$

la delta del activo i respecto al factor de riesgo y_i multiplicada por la cantidad α_i .

Por otro lado, si se supone que n activos del portafolio son afectados por m factores de riesgo, se tiene que la ecuación (4.17) se transforma en:

$$\Delta P = \mu_p + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^m \frac{\partial v_i}{\partial y_j} y_j \Delta x_j \quad (4.24)$$

La ecuación (4.24) se puede describir como:

$$\Delta P = \mu_p + \sum_{j=1}^m \beta_j y_j \Delta x_j \quad (4.25)$$

⁷ Wilson, T. [1998], pag. 83

con:

$$\beta_j = \alpha' \psi_j \quad (4.26)$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)' \quad (4.27)$$

$$\psi_j = \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_j}, \frac{\partial v_2}{\partial y_j}, \dots, \frac{\partial v_n}{\partial y_j} \right)' \quad (4.28)$$

Si se comparan las ecuaciones (4.19) con coeficiente $\delta_{i,y}$, (4.22) con coeficiente η_{i,y_i} y (4.25) con coeficiente β_{j,y_j} , con (4.4) que tiene de coeficiente a α_i , se puede observar que para calcular el valor en riesgo en el modelo delta, lo único que se tiene que hacer es calcular la varianza (desviación estándar) usando la ecuación (4.5) y después calcular el Valor en Riesgo usando (4.6).⁸ Obsérvese que en el caso de que el activo sea un bono la derivada $(\partial v_i / \partial y_i)$ representa la duración modificada multiplicada por el precio del bono⁹ y en el caso de las opciones representa a la delta de la opción¹⁰.

4.4. Modelo Cuadrático Delta-Gamma de Varianza-Covarianza.

Cuando un portafolio incluye bonos, el efecto de la curvatura de la relación precio-rendimiento se hace más evidente cuanto más pequeña es la tasa de cupón o cuando se incrementa el tiempo al vencimiento (considerando todo lo demás constante) y entonces el valor obtenido a través del método delta tendería a obtener valores menores a los reales. Además, en el caso de que un portafolio incluya opciones, el efecto del parámetro gamma¹¹ se hace más importante ya que sus efectos se ven incrementados cuando las opciones están “at-the-money”¹². Sin embargo es poco importante cuando las opciones están “in-the-money” ya que la

⁸ Para lo cual se está suponiendo que los factores de riesgo se comportan con una distribución normal.

⁹ Véase la sección 1.2.. para una explicación más detallada sobre la duración y la duración modificada.

¹⁰ Véase la sección 1.3.. para una explicación más detallada sobre la delta de una opción.

¹¹ El parámetro gamma se define como la tasa de cambio de la delta de un portafolio con respecto al precio del activo subyacente. (Véase la sección 1.3. para una explicación más detallada de la gamma de un activo).

¹² Jorion, P. [1999] pag. 164

gamma es pequeña debido a que la opción equivale esencialmente a una posición en la acción y cuando están “out-of-the-money” ya que la delta es cercana a cero y por ende la gamma es baja. Además, una gamma positiva (por ejemplo una opción call larga) tiende a hacer que la distribución del valor de la opción con respecto al activo subyacente tenga una cola izquierda delgada (es decir quede sesgada a la derecha) comparada con una distribución normal, por lo que si solamente se usara el método delta-normal se tendería a calcular una medida de VaR superior a la real y por otro lado una gamma negativa (por ejemplo una opción call corta) tiende a generar una distribución sesgada a la izquierda y así el VaR calculado únicamente con el método delta-normal obtendría valores menores a los reales¹³.

Un solo factor de riesgo.

Supóngase que, en primera instancia, los activos del portafolio se ven afectados por un solo factor de riesgo, el cual se comporta normalmente, es decir:

$$\Delta x \sim N(\mu_x, \sigma_x^2) \quad (4.29)$$

El cambio en el valor del portafolio es como en (4.10), es decir¹⁴:

$$\Delta P = \mu_p + \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial v_i}{\partial y} y \Delta x + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} y^2 (\Delta x)^2 \quad (4.30)$$

Esta expresión se puede escribir como:

$$\Delta P = \mu_p + \delta \Delta x + \frac{1}{2} \gamma (\Delta x)^2 \quad (4.31)$$

¹³ Hull, J. [2003] pag. 356

¹⁴ Como un procedimiento alternativo para calcular el valor en riesgo en un portafolio con un solo factor de riesgo, Britten-Jones, M, Schaefer, S. [1999], desarrollan una metodología basada en completar el binomio al cuadrado de los factores de Taylor en la ecuación (4.30).

Donde:

$$\delta = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial v_i}{\partial y} y^2 \quad (4.32)$$

$$\gamma = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} y$$

Obsérvese que en el caso de que el activo sea un bono, la derivada $(\partial v_i / \partial y)$ representa la duración modificada multiplicada por el precio del bono, y la segunda derivada $(\partial^2 v_i / \partial y^2)$ representaría la convexidad del bono multiplicada por el precio del bono¹⁵; y en el caso de las opciones representa a la delta y la gamma de la opción, respectivamente¹⁶.

Ahora se procede a calcular los primeros tres momentos del cambio en el valor del portafolio, los cuales son¹⁷:

$$E[\Delta P] = \mu_p + \delta E[\Delta x] + \frac{1}{2} \gamma E[(\Delta x)^2] \quad (4.33)$$

$$E[(\Delta P)^2] = \mu_p^2 + 2\mu_p \delta E[\Delta x] + (\mu_p \gamma + \delta^2) E[(\Delta x)^2] + \delta \gamma E[(\Delta x)^3] + \frac{1}{4} \gamma^2 E[(\Delta x)^4] \quad (4.34)$$

$$E[(\Delta P)^3] = \left[\begin{aligned} & \mu_p^3 + 3\mu_p^2 \delta E[\Delta x] + \left(3\mu_p \delta^2 + \frac{3}{2} \mu_p^2 \gamma \right) E[(\Delta x)^2] + \\ & + (\delta^3 + 3\mu_p \delta \gamma) E[(\Delta x)^3] + \left(\frac{3}{4} \mu_p \gamma^2 + \frac{3}{2} \delta^2 \gamma \right) E[(\Delta x)^4] \\ & + \frac{3}{4} \delta \gamma^2 E[(\Delta x)^5] + \frac{1}{8} \gamma^3 E[(\Delta x)^6] \end{aligned} \right] \quad (4.35)$$

¹⁵ Véase la sección 1.2.. para una explicación más detallada sobre la convexidad.

¹⁶ Véase la sección 1.3.. para una explicación más detallada sobre la gamma de una opción.

¹⁷ Los primeros tres momentos del cambio en el valor del portafolio se derivan en el ANEXO D: "Derivación de los momentos del cambio en el valor de un portafolio cuando los activos dependen de un solo factor de riesgo con una distribución de densidad normal"

Y si se supone que $\mu_x = 0$ ¹⁸, entonces se tiene:

$$E[\Delta P] = \mu_p + \frac{1}{2} \gamma \sigma_x^2 \quad (4.36)$$

$$E[(\Delta P)^2] = \mu_p^2 + (\mu_p \gamma + \delta^2) \sigma_x^2 + \frac{3}{4} \gamma^2 \sigma_x^4 \quad (4.37)$$

$$E[(\Delta P)^3] = \mu_p^3 + \left(3\mu_p \delta^2 + \frac{3}{2} \mu_p^2 \gamma\right) \sigma_x^2 + \left(\frac{9}{4} \mu_p \gamma^2 + \frac{9}{2} \delta^2 \gamma\right) \sigma_x^4 + \frac{15}{8} \gamma^3 \sigma_x^6 \quad (4.38)$$

La media, varianza y sesgo se definen por:

$$\begin{aligned} \mu_{\Delta P} &= E[\Delta P] \\ \sigma_{\Delta P}^2 &= E\left[\{\Delta P - E[\Delta P]\}^2\right] = E[(\Delta P)^2] - \{E[\Delta P]\}^2 \\ \xi_{\Delta P} &= \frac{E\left[\{\Delta P - E[\Delta P]\}^3\right]}{\sigma_{\Delta P}^3} = \frac{E[(\Delta P)^3] - 3E[(\Delta P)^2] \mu_{\Delta P} + 2\mu_{\Delta P}^3}{\sigma_{\Delta P}^3} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Conociendo los parámetros de media, varianza y sesgo de ΔP se está en condiciones de aproximar el percentil que se necesita para estimar el Valor en Riesgo obtenido de la distribución real del cambio del valor del portafolio, a través de la expansión de Cornish-Fisher¹⁹. De esta forma, el $(1-c)$ -ésimo cuantil de la distribución de ΔP se aproxima con²⁰:

$$\Delta P_{1-c} = \mu_{\Delta P} + \ell_{1-c} \sigma_{\Delta P} \quad (4.40)$$

¹⁸ En la práctica se acostumbra suponer que el cambio esperado en una variable de mercado (factor de riesgo) es cero para el intervalo de tiempo de análisis. Este supuesto surge debido a que el cambio esperado es generalmente muy pequeño en comparación con la desviación estándar del cambio. Hull J. [2003] pag. 351.

¹⁹ En el ANEXO E: "Expansión de Cornish-Fisher", se explican los detalles de la expansión.

²⁰ Jaschke, S. [2001] reporta que la aproximación de Cornish-Fisher produce buenos resultados cuando la distribución del portafolio es relativamente cercana a la normal. Además de que, computacionalmente, es más eficiente respecto a técnicas numéricas que permiten encontrar el percentil exacto de una distribución o inclusive la Simulación Monte-Carlo Parcial. Wallace, D. [1958] reporta que la aproximación Cornish-Fisher ha producido buenos resultados sobre distribuciones Chi-Cuadrada, aumentando su precisión al aumentar los grados de libertad. Sin embargo, ambos autores concluyen que el error de la aproximación se incrementa para los niveles cercanos a 0 o 1.

donde:

$$\ell_{1-c} = z_{1-c} + \frac{1}{6}(z_{1-c}^2 - 1)\xi_{\Delta P}\sigma_{\Delta P}^3 \quad (4.41)$$

Y entonces el Valor en riesgo con un nivel de confianza de $c\%$ se estima con:

$$VaR[c] = -\ell_{1-c}\sigma_{\Delta P} \quad (4.42)$$

m factores de riesgo.

Para este caso, supóngase que los m factores de riesgo, $\Delta \mathbf{x} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m)'$, que afectan a los n activos del portafolio se comportan con una distribución normal multivariada, es decir:

$$\Delta \mathbf{x} \sim N_m[\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\Sigma}] \quad (4.43)$$

con:

$$\boldsymbol{\mu}_x = (\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_m})' \quad (4.44)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \dots & \sigma_{x_1, x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{x_m, x_1} & & \sigma_{x_m}^2 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

donde:

$\boldsymbol{\Sigma}$: la matriz de varianza-covarianza de los cambios relativos de los factores de riesgo; la cual puede obtenerse a través de un modelo GARCH(1,1) (Capítulo 3) o a través de promedios móviles o promedios móviles exponenciales (Anexo B).

Utilizando los resultados del ANEXO C, el cambio en el valor de cada activo se puede escribir, utilizando notación vectorial, como:

$$\Delta v_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} \Delta t + \delta_i' \Delta \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}' \Gamma_i \Delta \mathbf{x} \quad (4.46)$$

con:

$$\delta_i = \left(y_1 \frac{\partial v_i}{\partial y_1}, y_2 \frac{\partial v_i}{\partial y_2}, \dots, y_m \frac{\partial v_i}{\partial y_m} \right)' \quad (4.47)$$

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} y_1 y_1 \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_1 \partial y_1} & & \frac{1}{2} y_1 y_m \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_1 \partial y_m} \\ & \ddots & \\ \frac{1}{2} y_m y_1 \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_m \partial y_1} & \dots & \frac{1}{2} y_m y_m \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_m \partial y_m} \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

Y entonces, la ecuación del cambio en el valor del portafolio (4.17) se puede escribir, utilizando notación matricial, como:

$$\Delta P = \mu_p + \delta_v' \Delta \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}' \Gamma_v \Delta \mathbf{x} \quad (4.49)$$

con:

$$\mu_p = \boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{\theta} dt \quad (4.50)$$

$$\boldsymbol{\theta} = \left(\frac{\partial v_1}{\partial t}, \frac{\partial v_2}{\partial t}, \dots, \frac{\partial v_n}{\partial t} \right)' \quad (4.51)$$

$$\delta_v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_i' \quad (4.52)$$

$$\Gamma_v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Gamma_i \quad (4.53)$$

De esta forma utilizando las ecuaciones del ANEXO F, se tiene que los momentos de la distribución del cambio del portafolio, ΔP , son:

$$E[\Delta P] = g^{(0)} \quad (4.54)$$

$$E[(\Delta P)^2] = g^{(1)} + [g^{(0)}]^2 \quad (4.55)$$

$$E[(\Delta P)^3] = g^{(2)} + 3g^{(1)}g^{(0)} + [g^{(0)}]^3 \quad (4.56)$$

con:

$$g^{(k)} = \frac{1}{2} k! \sum_{j=1}^m (2\lambda_j)^{k+1} + \frac{(k+1)!}{2} \sum_{j=1}^m b_j^{*2} (2\lambda_j)^{k-1}, k \geq 1 \quad (4.57)$$

$$g^{(k)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (2\lambda_j) + (\mu_p + \delta_\nu' \mu_x + \mu_x' \Gamma_\nu \mu_x), k = 0 \quad (4.58)$$

y:

$$\mathbf{M}' \Sigma^{1/2} \Gamma_\nu \Sigma^{1/2} \mathbf{M} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

$$(4.59)$$

$$\mathbf{M} \mathbf{M}' = \mathbf{I} \quad (4.60)$$

$$\mathbf{M}' (\Sigma^{1/2} \delta_\nu + 2\Sigma^{1/2} \Gamma_\nu \mu_x) = \mathbf{b}^* = (b_1^*, \dots, b_m^*)' \quad (4.61)$$

La media varianza y sesgo se definen como en (4.39) por:

$$\begin{aligned}
 \mu_{\Delta P} &= g_{\bullet}^{(0)} \\
 \sigma_{\Delta P}^2 &= g_{\bullet}^{(1)} + [g_{\bullet}^{(0)}]^2 - [g_{\bullet}^{(0)}]^2 = g_{\bullet}^{(1)} \\
 \xi_{\Delta P} &= \frac{g_{\bullet}^{(2)} + 3g_{\bullet}^{(1)}g_{\bullet}^{(0)} + [g_{\bullet}^{(0)}]^3 - 3[g_{\bullet}^{(1)} + [g_{\bullet}^{(0)}]^2][g_{\bullet}^{(0)}] + 2[g_{\bullet}^{(0)}]^3}{[g_{\bullet}^{(1)}]^{3/2}} \\
 &= \frac{g_{\bullet}^{(2)}}{[g_{\bullet}^{(1)}]^{3/2}}
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

Aplicando la expansión de Cornish-Fisher, el $(1-c)$ -ésimo cuantil de la distribución de ΔP es:

$$\Delta P_{1-c} = g_{\bullet}^{(0)} + \ell_{1-c} \sqrt{g_{\bullet}^{(1)}} \tag{4.63}$$

con:

$$\ell_{1-c} = z_{1-c} + \frac{1}{6} (z_{1-c}^2 - 1) \frac{g_{\bullet}^{(2)}}{[g_{\bullet}^{(1)}]^{3/2}} \tag{4.64}$$

Por lo que el Valor en riesgo del portafolio P con un nivel de confianza del $c\%$ es:

$$VaR[c] = -\ell_{1-c} \sqrt{g_{\bullet}^{(1)}} \tag{4.65}$$

Por último, utilizando la expresión (4.57), se pueden derivar las fórmulas para $g_{\bullet}^{(1)}$ y $g_{\bullet}^{(2)}$:

$$g_{\bullet}^{(1)} = \sum_{j=1}^m 2\lambda_j^2 + b_j^{*2} \tag{4.66}$$

$$g_{\bullet}^{(2)} = \sum_{j=1}^m 8\lambda_j^3 + 6b_j^{*2}\lambda_j \tag{4.67}$$

4.5. Aplicación del Modelo Delta y el Cuadrático Delta-Gamma a portafolios de activos.

Se aplicará el modelo Delta y Delta-Gamma a dos portafolios de activos. El primero compuesto por tres acciones y el segundo compuesto por cinco bonos cupón cero. Para realizar lo anterior se reunieron datos diarios del periodo del 10 de enero del 2002 al 2 de abril del 2004, correspondientes a las acciones en el mercado mexicano de las empresas Cemex, Walmart y Telmex y las tasas correspondientes de CETES de 28, 91, 182, 272 y 360 días.

El primer portafolio esta compuesto por las tres acciones, Cemex (500 Acciones) , Walmart (700 Acciones) y Telmex (1000 Acciones).

El segundo portafolio esta compuesto por flujos de efectivo (los cuales pueden ser el valor nominal de bonos cupón cero) con las siguientes cantidades y plazos: 105,000 en un plazo de 28 días, 105,000 en un plazo de 91 días, 500,000 en un plazo de 180 días, 105,000 en un plazo de 272 días y 500,000 en un plazo de 360 días)²¹.

Se estimaron los parámetros GARCH(1,1) correspondientes (utilizando la metodología propuesta en la sección 3.2). Los valores resultantes se muestran en las tablas 4 y 5.

Tabla 4. Parámetros GARCH Portafolio 1		
α	β	γ
0.861	0.004	0.135

²¹ Esta metodología puede aplicarse en combinación con el método de mapeo de flujos de efectivo (Sección 2.3.2.).

Tabla 5. Parámetros GARCH Portafolio 2		
α	β	γ
0.844	0.050	0.106

Una vez obtenidos los parámetros GARCH(1,1) se procedió a calcular las matrices de Varianza-Covarianza para cada punto en el tiempo, utilizando las ecuaciones (3.2), (3.10), y (3.11) del capítulo 3 para el modelo de Varianza-Covarianza actualizada con GARCH y (B.4) y (B.5) del anexo B, para el modelo de Matriz de Varianza-Covarianza con pesos iguales en las observaciones .

Conociendo las matrices de Varianza-Covarianza históricas de los datos, se calculó el Valor en Riesgo usando el método de simulación histórica , el método Delta con la matriz de Varianza-Covarianza con pesos iguales , el método Delta con la matriz de Varianza-Covarianza actualizada con GARCH , el método Cuadrático Delta-Gamma con la matriz de Varianza-Covarianza con pesos iguales y el método Cuadrático Delta-Gamma con la matriz de Varianza-Covarianza actualizada con GARCH , así mismo se calculó el intervalo de confianza al 95% por ciento para cada uno de los métodos, usando los métodos mostrados en el Anexo H. Los resultados obtenidos se muestran en las tablas 6 y 7.

Tabla 6. Valores en Riesgo Obtenidos del Portafolio 1		
Metodología	VaR	Intervalo de Confianza (95%)
Simulación Histórica	1862.28	(1563.06 , 2417.66)
Delta Var.-Cov. y pesos iguales	2293.31	(2164.58 , 2433.81)
Delta Var.-Cov. actualizada con GARCH	2279.02	(2151.09 , 2418.65)
Delta-Gamma Var-Cov y pesos iguales	2293.31	(2164.58 , 2433.81)
Delta-Gamma Var.-Cov. actualizada con GARCH	2279.02	(2151.09 , 2418.65)

Tabla 7. Valores en Riesgo Obtenidos del Portafolio 2		
Metodología	VaR	Intervalo de Confianza (95%)
Simulación Histórica	3564.15	(3270.09 , 8083.74)
Delta Var.-Cov. y pesos iguales	2600.12	(2454.17 , 2759.42)
Delta Var.-Cov. actualizada con GARCH	2604.69	(2458.48 , 2764.27)
Delta-Gamma Var-Cov y pesos iguales	2597.69	(2360.65 , 2834.73)
Delta-Gamma Var.-Cov. actualizada con GARCH	2600.38	(2363.83 , 2836.93)

A fin de probar cada una de las metodologías, se realizó el BackTesting, basado en el estadístico de Kupiec, (Anexo G). Los resultados se muestran en las tablas 8 y 9.

Tabla 8. BackTesting del Portafolio 1		
Metodología	Excepciones (510 datos)	Excepciones (255 datos)
Simulación Histórica	11	2
Delta Var.-Cov. y pesos iguales	6	1
Delta Var.-Cov. actualizada con GARCH	5	1
Delta-Gamma Var-Cov y pesos iguales	6	1
Delta-Gamma Var.-Cov. actualizada con GARCH	5	1

Tabla 9. BackTesting del Portafolio 2		
Metodología	Excepciones (510 datos)	Excepciones (255 datos)
Simulación Histórica	4	0
Delta Var.-Cov. y pesos iguales	9	3
Delta Var.-Cov. actualizada con GARCH	8	4
Delta-Gamma Var-Cov y pesos iguales	8	2
Delta-Gamma Var.-Cov. actualizada con GARCH	8	4

Con respecto al portafolio 1, se tiene que el método de simulación histórica se rechaza con 510 datos al tener un número de excepciones mayor a 10 (de acuerdo con Kupiec²² el máximo número de excepciones para 510 datos es de 10), no pudiéndose rechazar los otros 4 métodos. Si se analizan los resultados con los últimos 255 datos (información reciente) se observa que no se puede rechazar ninguno de los métodos (el criterio para 255 datos es que el número de excepciones sea menor que 7). Y si se analizan los datos con los 255 datos más antiguos se tiene que se rechaza nuevamente el método de simulación histórica (con 9 salidas obtenidas de la diferencia de 11 salidas para 510 datos y 2 salidas para los últimos 255 datos) y los demás no se rechazan.

Sin embargo, al analizar los datos de acuerdo al criterio de Basilea²³ y realizando el escalamiento de sus tablas para 510 datos y 255 datos²⁴, se tiene que el modelo de simulación histórica estaría en la zona amarilla, el método Delta de matriz de Varianza-Covarianza con pesos iguales estaría en amarillo si se analizan los datos más antiguos (5 salidas), el método Delta con la matriz de Varianza-Covarianza actualizada con GARCH estaría en verde. Vale la pena mencionar que en este portafolio conformado por acciones, la aproximación Delta-Gamma da los mismos resultados que la aproximación Delta.

Con respecto al portafolio 2, se tiene que el método de simulación histórica no se puede rechazar con 510 datos ni con 255 datos y de acuerdo al criterio de Basilea estaría en Verde. Respecto de los métodos Delta y Delta-Gamma de la matriz de Varianza-Covarianza con pesos iguales se tiene que no se pueden rechazar con 510 datos ni con 255 datos, tanto con los primeros 255 como con los últimos 255 datos, sin embargo de acuerdo al criterio de Basilea estaría en Amarillo porque los

²² Véase el ANEXO G, para una descripción detallada para la realización de BackTesting usando el estadístico de Kupiec.

²³ Explicado en el ANEXO G.

²⁴ Un modelo se encuentra en la zona verde si el número de excepciones va entre 0 y 4.99 para 255 datos y entre 0 y 9.99 para 510 datos; se encuentra en la zona amarilla si el número de excepciones queda entre 5 y 9.99 para 255 datos y entre 10 y 19.99 para 510 datos y por último se encuentra en la zona roja si se tienen más de 10 excepciones para 255 datos y más de 20 excepciones para 510 datos. Y de acuerdo a la zona en que se encuentre un modelo, es entonces que se establece un multiplicador de corrección que va creciendo conforme el modelo esté en verde, amarillo o rojo de 1.00 hasta 3.00.

255 datos más antiguos tienen en ambos casos 6 excepciones (9 menos 3 para el método Delta con pesos iguales y 8 menos 2 para el método Delta-Gamma con pesos iguales). Por último, los métodos Delta y Delta-Gamma con la matriz de Varianza-Covarianza actualizada con GARCH, no se pueden rechazar con 510 datos ni con 255 datos y en el criterio de Basilea estaría en Verde.

Un punto importante a notar es que aunque los métodos Delta y Delta-Gamma con la matriz de Varianza-Covarianza actualizada por GARCH, en los dos portafolios tuvieron buenos resultados, el estimado de Valor en Riesgo del método Delta-Gamma es menor o igual al del Delta, lo cual en términos de regulación es deseable para la institución financiera que busca tener menos reservas de capital como contingencia para las pérdidas no esperadas.

Anexo A

Derivación de la fórmula de Valor en Riesgo lineal cuando los rendimientos del portafolio se distribuyen normalmente

El Valor en Riesgo se define como la máxima pérdida esperada dado un nivel de confianza c y un horizonte de tiempo N , entonces el VaR es la distancia que se tiene del percentil $(1-c)\%$ a la media de la distribución del cambio en el valor del portafolio ΔP .

Esto es:

VaR = Pérdida/Ganancia esperada - Máxima pérdida con un nivel de confianza c

Si se define la variable R como:

$$R_{t+\Delta t} = \frac{\Delta P}{P_t} \quad (\text{A.1})$$

es el rendimiento del portafolio, con $E[R_{t+\Delta t}] = \mu_R$ el valor esperado de $R_{t+\Delta t}$ y $R_{t+\Delta t}^*$ se define como el rendimiento correspondiente al cambio del portafolio de P_t a $P_{t+\Delta t}^*$, el valor del portafolio en el percentil $(1-c)$.

Entonces se tiene que:

$$P_{t+\Delta t}^* = P_t (1 + R_{t+\Delta t}^*) \quad (\text{A.2})$$

Y además:

$$E[P_{t+\Delta t}] = P_t (1 + \mu_R) \quad (\text{A.3})$$

De acuerdo a la definición de VaR, se puede escribir:

$$VaR(\Delta t, c) = E(P_{t+\Delta t}) - P_{t+\Delta t}^* \quad (A.4)$$

Sustituyendo (A.2) y (A.3) en (A.4) se tiene:

$$VaR(\Delta t, c) = P_t(1 + \mu_R) - P_t(1 + R_{t+\Delta t}^*)$$

simplificando:

$$VaR(\Delta t, c) = P_t(\mu_R - R_{t+\Delta t}^*) \quad (A.5)$$

Hasta el momento no se ha hecho ningún supuesto sobre la distribución del rendimiento del portafolio, por lo que (A.5) es una fórmula general para el valor en riesgo.

Si se supone que:

$$R_{t+\Delta t} \sim N(\mu_R, \sigma_R) \quad (A.6)$$

Es posible encontrar $R_{t+\Delta t}^*$ a partir de:

$$\text{Prob}(R_{t+\Delta t} < R_{t+\Delta t}^*) = \int_{-\infty}^{R_{t+\Delta t}^*} f(R) dR = \text{Prob}\left(Z < \frac{R_{t+\Delta t}^* - \mu_R}{\sigma_R}\right) = 1 - c \quad (A.7)$$

con:

$$f(R) = \phi(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_R^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_R^2}(R-\mu_R)^2}$$

y,

$$Z = \frac{R_{t+\Delta t} - \mu_R}{\sigma_R} \sim N(0,1).$$

En el caso de los rendimientos con distribución normal, la derivación de $R_{t+\Delta t}^*$ es relativamente sencilla y depende solo de valores conocidos de la función de distribución normal acumulativa. De esta manera si se define:

$$z_{1-c} = \frac{R_{t+\Delta t}^* - \mu_R}{\sigma_R}$$

se tiene:

$$R_{t+\Delta t}^* = \mu_R + z_{1-c}\sigma_R \quad (\text{A.8})$$

Sustituyendo (A.8) en (A.5) se obtiene:

$$\begin{aligned} VaR(\Delta t, c) &= P_t(\mu_R - \mu_R + z_{1-c}\sigma_R) = \\ &= -P_t z_{1-c}\sigma_R \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Definiendo $\sigma_P = P_t\sigma_R$ como la desviación estándar del valor del portafolio la ecuación (A.9) se transforma en:

$$VaR(\Delta t, c) = -z_{1-c}\sigma_P \quad (\text{A.10})$$

De la distribución normal se sabe que:

Tabla 10. Valores críticos para la distribución normal.		
1-c	c	$z_{1-c} = \frac{R_{t+\Delta t}^* - \mu_R}{\sigma_R}$
0.03%	99.97%	-3.43
0.13%	99.87%	-3.01
1.00%	99.00%	-2.33
2.50%	97.50%	-1.96
5.00%	95.00%	-1.64
10.00%	90.00%	-1.28

Con lo que el Valor en Riesgo para un nivel de confianza del 99% es:

$$VaR(\Delta t, c) = 2.33\sigma_p$$

Anexo B
Estimación de la matriz de Varianza Covarianza con pesos iguales y EWMA.

Estimación de la varianza con pesos iguales.

Un estimador insesgado para la varianza en el tiempo t , σ_t^2 , es la fórmula de la varianza muestral, la cual se calcula usando los últimos n datos disponibles (muestra) de los valores del cambio relativo del factor de riesgo, y , es decir:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{t-i} - \bar{x})^2 \quad (\text{B.1})$$

Donde:

x_t : es el cambio relativo del factor de riesgo, y , el cual se calcula con:

$$x_t = \frac{\Delta y_t}{y_{t-1}} \quad (\text{B.2})$$

y_{t-1} : es el valor del factor de riesgo en el tiempo $t-1$

Δy_t : es el cambio del factor de riesgo en el tiempo t , dado por $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$

\bar{x} : es la media muestral, dada por:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{t-i} \quad (\text{B.3})$$

Sin embargo, para el cálculo del Valor en Riesgo, tradicionalmente se supone que la media de los rendimientos \bar{x} se aproxima a cero, y además, debido a que se supone que los rendimientos tienen un comportamiento normal se

acostumbra utilizar el estimador de la varianza por máxima verosimilitud¹, entonces la fórmula para la varianza sería:

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{t-i}^2 \quad (\text{B.4})$$

con x_{t-i} dado por la ecuación (B.3)².

De manera similar, la fórmula para la covarianza entre los rendimientos de dos factores de riesgo j y k , ($j=1, \dots, m$; $k=1, \dots, m$) es la siguiente:

$$\sigma_{j,k,t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{j,t-i} x_{k,t-i} \quad (\text{B.5})$$

¹ Suponiendo que los rendimientos del factor de riesgo se comportan normalmente con media cero y varianza σ^2 . Además, se cuenta con n observaciones x_1, x_2, \dots, x_n . Se tiene que la verosimilitud de que se de el valor x_i es la función de densidad evaluada en el punto x_i , es decir:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i}{\sigma^2}\right)}$$

De esta forma la función de verosimilitud es el producto de la función de verosimilitud de todas las observaciones:

$$\prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i}{\sigma^2}\right)} \right)$$

De acuerdo al método de Máxima Verosimilitud es equivalente maximizar la expresión anterior o una transformación monotónica de la misma. De esta forma aplicando el logaritmo natural a la expresión anterior y sustituyendo a σ^2 por ν se tiene:

$$\sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \ln \nu - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\nu}$$

Derivando la expresión anterior respecto a ν e igualando a cero se tiene:

$$-\frac{n}{\nu} + \frac{1}{\nu^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$$

Cuyas raíces son: $\nu = 0$ y $\nu = \sum_{i=1}^n x_i^2 / n$

² Una de las mayores desventajas de calcular la varianza y covarianza de los datos dándole a cada uno el mismo peso, es que los eventos extremos son igualmente importantes para las estimaciones, aún cuando ocurran en una fecha reciente o una fecha lejana, esto es se tiene un efecto “fantasma” durante largos periodos de tiempo. De esta forma, en caso de que se tengan periodos de tranquilidad, la volatilidad estimada se mantendrá artificialmente en valores altos, y en caso de situaciones con alta volatilidad, esta será estimada artificialmente con valores bajos.

con:

$\sigma_{j,k,t}$: la covarianza entre los factores de riesgo j y k en el tiempo t

$x_{j,t-i}$: la observación en el tiempo $t-i$ para el rendimiento del factor de riesgo j

$x_{k,t-i}$: la observación en el tiempo $t-i$ para el rendimiento del factor de riesgo k

En las ecuaciones (B.4) y (B.5) se tiene que todas las observaciones de rendimientos son consideradas con la misma importancia, sin tomar en cuenta de que la historia reciente podría tener mayor relevancia para el cálculo de la varianza de los rendimientos con respecto a las observaciones más alejadas en el tiempo.

Estimación de la varianza con pesos diferentes.

Los modelos utilizados para tomar en cuenta el efecto mayor que tienen las observaciones recientes en la estimación de la varianza a través del promedio móvil³ de las últimas n observaciones históricas, se basan en dos posibilidades, la primera es un modelo donde se toma un promedio ponderado de los rendimientos, es decir⁴:

$$\sigma_t^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_{t-i}^2 \quad (\text{B.6})$$

con:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \quad (\text{B.7})$$

³ Un promedio móvil es un promedio aritmético sobre una ventana de datos que va “recorriéndose” sobre el conjunto de datos sucesivos en una serie de tiempo.

⁴ El uso de esta corrección por peso, permite eliminar el efecto “fantasma” de algunas observaciones históricas extremas.

Otra posibilidad es que se tome el promedio ponderado por los rendimientos de corto plazo más el efecto de una varianza de largo plazo, a este modelo se le conoce como ARCH(n)⁵ (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity).

La ecuación del modelo ARCH(n) es:

$$\sigma_t^2 = \gamma V_L + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_{t-i}^2 \quad (\text{B.8})$$

con:

$$\gamma + \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \quad (\text{B.9})$$

La ecuación (B.8) se puede ver como una extensión de la (B.6) en donde V_L corresponde a la varianza promedio de largo plazo.

El modelo EWMA

Si en la ecuación (B.6) se tiene que los pesos decrecen exponencialmente conforme se mueve hacia observaciones más lejanas en el pasado; en específico $\alpha_i = \lambda \alpha_{i-1}$, con λ una constante entre cero y uno; se tiene el modelo conocido como EWMA (Exponentially Weighted Moving Average), cuya fórmula es⁶:

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) x_t^2 \quad (\text{B.10})$$

El modelo EWMA puede interpretarse en el sentido de que el valor estimado para la varianza en la fecha t se puede calcular usando la información de la varianza en la fecha $t-1$ y el rendimiento obtenido en la fecha t .

⁵ Engle, R [1982].

⁶ Mina, J, Xiao, J. [2001]

Una de las ventajas más importantes del modelo EWMA es que para estimar la varianza del día t sólo es necesario conocer la varianza pasada y el rendimiento en el día t . Es decir que conociendo la varianza del tiempo anterior y el nuevo dato del valor del rendimiento del factor se puede utilizar la ecuación (B.10) para actualizar el valor de la varianza al tiempo t .

El modelo EWMA permite darle seguimiento a los cambios en la volatilidad del factor de mercado y el parámetro λ ⁷ da la sensibilidad de respuesta del estimado de la volatilidad diaria a la nueva información disponible, es decir, determina el grado de reacción de la volatilidad a los eventos de mercado, mientras que $(1-\lambda)$, el coeficiente de la varianza del tiempo anterior, determina la persistencia en volatilidad. Una alta λ (cercana a uno) produce estimados que responden lentamente a la nueva información de los cambios relativos del factor, en cambio una baja λ (cercana a cero) produce estimados de volatilidad que responden rápidamente a la nueva información⁸.

Iterando hacia el pasado a la ecuación (B.10) se sustituye la expresión para σ_{t-1}^2 :

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \lambda[\lambda\sigma_{t-2}^2 + (1-\lambda)x_{t-1}^2] + (1-\lambda)x_t^2 \\ &= \lambda^2\sigma_{t-2}^2 + (1-\lambda)(x_t^2 + \lambda x_{t-1}^2)\end{aligned}$$

Ahora, si se sustituye para σ_{t-2}^2 :

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \lambda^2[\lambda\sigma_{t-3}^2 + (1-\lambda)x_{t-2}^2] + (1-\lambda)(x_t^2 + \lambda x_{t-1}^2) \\ &= \lambda^3\sigma_{t-3}^2 + (1-\lambda)(x_t^2 + \lambda x_{t-1}^2 + \lambda^2 x_{t-2}^2)\end{aligned}$$

⁷ En la práctica se acostumbra a designar a λ como el factor de decaimiento.

⁸ Tanto en Longerstae J., Spencer, M. [1996], como en Fleming, J. Kirby, C y Ostdiek, B. [2001] se ha encontrado que el factor de decaimiento que permite obtener buenos estimados de volatilidad diaria es $\lambda = 0.94$

Conociendo la historia de n observaciones de rendimiento, más la observación del tiempo t , la fórmula anterior se simplifica en:

$$\sigma_t^2 = \lambda^{n+1} \sigma_0^2 + (1-\lambda) \sum_{i=0}^n \lambda^i x_{t-i}^2 \quad (\text{B.11})$$

Al ser λ un valor entre cero y uno, se tiene que al ser n grande, λ^{n+1} tiende a ser cero, por lo que la ecuación (B.11) se reduce a:

$$\sigma_t^2 = (1-\lambda) \sum_{i=0}^n \lambda^i x_{t-i}^2 \quad (\text{B.12})$$

La ecuación (B.12) es la expresión para calcular la varianza de un factor de riesgo, basado en promedios móviles exponenciales.

Y de manera análoga, la expresión para la covarianza entre los rendimientos de dos factores de riesgo j y k en el tiempo t , es la siguiente:

$$\sigma_{j,k,t} = (1-\lambda) \sum_{i=0}^n \lambda^i x_{j,t-i} x_{k,t-i} \quad (\text{B.13})$$

Basándose en las ecuaciones (B.12) y (B.13), se tiene que la matriz de varianza-covarianza para m factores de riesgo y $n+1$ datos para cada serie, es:

$$\Sigma = \mathbf{R}^T \mathbf{R} \quad (\text{B.14})$$

con:

$$\mathbf{R} = \sqrt{1-\lambda} \begin{pmatrix} x_{1,t} & x_{2,t} & \dots & x_{m,t} \\ \sqrt{\lambda} x_{1,t-1} & \sqrt{\lambda} x_{2,t-1} & \dots & \sqrt{\lambda} x_{m,t-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sqrt{\lambda^n} x_{1,t-n} & \sqrt{\lambda^n} x_{2,t-n} & \dots & \sqrt{\lambda^n} x_{m,t-n} \end{pmatrix} \quad (\text{B.15})$$

Una de las limitaciones del modelo EWMA es que no captura el efecto de que la volatilidad en los mercados financieros tiende a presentarse en “conjuntos”, donde los periodos de tranquilidad con rendimientos bajos son interrumpidos con periodos volátiles de rendimientos altos.

Anexo C

Derivación de la fórmula de cambio de un portafolio con m factores de riesgo

Sea:

$$\Delta P = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta v_i \quad (\text{C.1})$$

el cambio del portafolio en el intervalo de tiempo de t a $t + \Delta t$ compuesto de n activos, con $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)'$ el vector de cantidades en el tiempo t y $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)'$ el vector de precios de los activos.

Si se supone que los activos v_i dependen del tiempo y de m factores de riesgo, con $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)'$ el vector de factores de mercado de riesgo, el desarrollo en serie de Taylor es:

$$\Delta v_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} \Delta t + \sum_{j=1}^m \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \Delta y_j + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} (\Delta t)^2 + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_k \partial y_j} \Delta y_k \Delta y_j + \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 v_i}{\partial t \partial y_j} \Delta t \Delta y_j + \dots \quad (\text{C.2})$$

Sea:

$$\Delta y_j \approx a_j(t, y_j) \Delta t + b(t, y_j) \Delta W_j \quad (\text{C.3})$$

con ΔW_j un proceso de Wiener estándar.

Aplicando las reglas de cálculo de Ito y (C.3) en (C.2) se tiene que:

$$\Delta v_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} \Delta t + \sum_{j=1}^m \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \Delta y_j + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_k \partial y_j} \Delta y_k \Delta y_j \quad (\text{C.4})$$

Haciendo la sustitución de la ecuación (C.4) en (C.1) se obtiene:

$$\begin{aligned}\Delta P &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \Delta t + \sum_{j=1}^m \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \Delta y_j + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_k \partial y_j} \Delta y_k \Delta y_j \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial v_i}{\partial t} \Delta t + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^m \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \Delta y_j + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_k \partial y_j} \Delta y_k \Delta y_j\end{aligned}\quad (\text{C.5})$$

y entonces:

$$\Delta P = \mu_p + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^m \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \Delta y_j + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_k \partial y_j} \Delta y_k \Delta y_j \quad (\text{C.6})$$

con:

$$\mu_p = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial v_i}{\partial t} \Delta t \quad (\text{C.7})$$

Se define ahora a la variable x_i como:

$$\Delta x_i = \frac{\Delta y_i}{y_i} \quad (\text{C.8})$$

Esto implica que:

$$\Delta P = \mu_p + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^m \frac{\partial v_i}{\partial y_j} y_j \Delta x_j + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_k \partial y_j} y_k y_j \Delta x_k \Delta x_j \quad (\text{C.9})$$

Utilizando notación matricial y la ecuación (C.8), la ecuación (C.4) se puede escribir como:

$$\Delta v_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} \Delta t + \delta_i' \Delta \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}' \Gamma_i \Delta \mathbf{x} \quad (\text{C.10})$$

con:

$$\delta_i = \left(y_1 \frac{\partial v_i}{\partial y_1}, y_2 \frac{\partial v_i}{\partial y_2}, \dots, y_m \frac{\partial v_i}{\partial y_m} \right)' \quad (\text{C.11})$$

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} y_1 y_1 \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_1 \partial y_1} & & \frac{1}{2} y_1 y_m \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_1 \partial y_m} \\ & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} y_m y_1 \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_m \partial y_1} & \dots & \frac{1}{2} y_m y_m \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_m \partial y_m} \end{pmatrix} \quad (\text{C.12})$$

$$\Delta \mathbf{x} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m)' \quad (\text{C.13})$$

Por último, la ecuación (C.6) se puede escribir:

$$\Delta P = \mu_p + \delta_v' \Delta \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}' \Gamma_v \Delta \mathbf{x} \quad (\text{C.14})$$

con:

$$\mu_p = \boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{\theta} dt \quad (\text{C.15})$$

$$\boldsymbol{\theta} = \left(\frac{\partial v_1}{\partial t}, \frac{\partial v_2}{\partial t}, \dots, \frac{\partial v_n}{\partial t} \right)' \quad (\text{C.16})$$

$$\delta_v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_i' \quad (\text{C.17})$$

$$\Gamma_v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Gamma_i \quad (\text{C.18})$$

Anexo D

Derivación de los momentos del cambio en el valor de un portafolio cuando los activos dependen de un solo factor de riesgo con una distribución de densidad normal.

El cambio en el valor del portafolio cuyos activos dependen de un solo factor de riesgo se aproxima con la siguiente ecuación :

$$\Delta P = \mu_p + \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial v_i}{\partial y} y \Delta x + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} y^2 (\Delta x)^2 \quad (\text{D.1})$$

con:

$$\mu_p = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial v_i}{\partial t} dt \quad (\text{D.2})$$

Si se hace:

$$\begin{aligned} \delta &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial v_i}{\partial y} y \\ \gamma &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} y \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Entonces se tiene:

$$\Delta P = \mu_p + \delta \Delta x + \frac{1}{2} \gamma (\Delta x)^2 \quad (\text{D.4})$$

La expresión para los primeros tres momentos del cambio en el valor del portafolio, ΔP , es:

$$E[\Delta P] = E\left[\mu_p + \delta\Delta x + \frac{1}{2}\gamma(\Delta x)^2\right]$$

$$E[\Delta P] = \mu_p + \delta E[\Delta x] + \frac{1}{2}\gamma E[(\Delta x)^2] \quad (D.5)$$

$$\begin{aligned} E[(\Delta P)^2] &= E\left[\left(\mu_p + \delta\Delta x + \frac{1}{2}\gamma(\Delta x)^2\right)^2\right] = \\ &= E\left[\mu_p^2 + \delta^2(\Delta x)^2 + \frac{1}{4}\gamma^2(\Delta x)^4 + 2\mu_p\delta\Delta x + \mu_p\gamma(\Delta x)^2 + \delta\gamma(\Delta x)^3\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[(\Delta P)^2] &= \mu_p^2 + 2\mu_p\delta E[\Delta x] + (\mu_p\gamma + \delta^2)E[(\Delta x)^2] + \\ &+ \delta\gamma E[(\Delta x)^3] + \frac{1}{4}\gamma^2 E[(\Delta x)^4] \end{aligned} \quad (D.6)$$

$$\begin{aligned} E[(\Delta P)^3] &= E\left[\left(\mu_p + \delta\Delta x + \frac{1}{2}\gamma(\Delta x)^2\right)^3\right] = \\ &= E\left[\begin{aligned} &\mu_p^3 + (\mu_p\delta^2 + \mu_p^2\gamma)(\Delta x)^2 + \frac{1}{4}\mu_p\gamma^2(\Delta x)^4 + 2\mu_p^2\delta\Delta x + \mu_p\delta\gamma(\Delta x)^3 + \\ &+ \mu_p^2\delta\Delta x + (\delta^3 + \mu_p\delta\gamma)(\Delta x)^3 + \frac{1}{4}\delta\gamma^2(\Delta x)^5 + 2\mu_p\delta^2(\Delta x)^2 + \delta^2\gamma(\Delta x)^4 + \\ &+ \frac{1}{2}\mu_p^2\gamma(\Delta x)^2 + \frac{1}{2}(\delta^2\gamma + \mu_p\gamma^2)(\Delta x)^4 + \frac{1}{8}\gamma^3(\Delta x)^6 + \mu_p\delta\gamma(\Delta x)^3 + \frac{1}{2}\delta\gamma^2(\Delta x)^5 \end{aligned}\right] \end{aligned}$$

$$E[(\Delta P)^3] = \left[\begin{aligned} &\mu_p^3 + 3\mu_p^2 \delta E[\Delta x] + \left(3\mu_p \delta^2 + \frac{3}{2} \mu_p^2 \gamma\right) E[(\Delta x)^2] + \\ &+ (\delta^3 + 3\mu_p \delta \gamma) E[(\Delta x)^3] + \left(\frac{3}{4} \mu_p \gamma^2 + \frac{3}{2} \delta^2 \gamma\right) E[(\Delta x)^4] \\ &+ \frac{3}{4} \delta \gamma^2 E[(\Delta x)^5] + \frac{1}{8} \gamma^3 E[(\Delta x)^6] \end{aligned} \right] \quad (D.7)$$

Entonces, si Δx se distribuye normal:

$$\Delta x \sim N(\mu_x, \sigma_x^2) \quad (D.8)$$

Los momentos de Δx son:

$$E[\Delta x] = \mu_x \quad (D.9)$$

$$E[(\Delta x)^2] = \sigma_x^2 + \mu_x^2 \quad (D.10)$$

$$E[(\Delta x)^3] = 3\sigma_x^2 \mu_x + \mu_x^3 \quad (D.11)$$

$$E[(\Delta x)^4] = 3\sigma_x^4 + 6\sigma_x^2 \mu_x^2 + \mu_x^4 \quad (D.12)$$

$$E[(\Delta x)^5] = 15\sigma_x^4 \mu_x + 10\sigma_x^2 \mu_x^3 + \mu_x^5 \quad (D.13)$$

$$E[(\Delta x)^6] = 15\sigma_x^6 + 45\sigma_x^4 \mu_x^2 + 15\sigma_x^2 \mu_x^4 + \mu_x^6 \quad (D.14)$$

Y entonces, los primeros tres momentos del portafolio de activos se pueden obtener sustituyendo las ecuaciones (D.9), (D.10), (D.11), (D.12), (D.13) y (D.14) en (D.5), (D.6) y (D.7).

Como caso particular¹ supóngase que el factor de riesgo Δx se distribuye con media cero, es decir:

$$\mu_x = 0 \quad (\text{D.15})$$

Con lo que los primeros seis momentos de la distribución de Δx son:

$$E[\Delta x] = 0 \quad (\text{D.16})$$

$$E[(\Delta x)^2] = \sigma_x^2 \quad (\text{D.17})$$

$$E[(\Delta x)^3] = 0 \quad (\text{D.18})$$

$$E[(\Delta x)^4] = 3\sigma_x^4 \quad (\text{D.19})$$

$$E[(\Delta x)^5] = 0 \quad (\text{D.20})$$

$$E[(\Delta x)^6] = 15\sigma_x^6 \quad (\text{D.21})$$

Y sustituyendo los resultados de las ecuaciones de la (D.16) a la (D.21) en las ecuaciones (D.5), (D.6) y (D.7) se obtiene:

$$E[\Delta P] = \mu_p + \frac{1}{2} \gamma \sigma_x^2 \quad (\text{D.22})$$

$$E[(\Delta P)^2] = \mu_p^2 + (\mu_p \gamma + \delta^2) \sigma_x^2 + \frac{3}{4} \gamma^2 \sigma_x^4 \quad (\text{D.23})$$

$$E[(\Delta P)^3] = \mu_p^3 + \left(3\mu_p \delta^2 + \frac{3}{2} \mu_p^2 \gamma\right) \sigma_x^2 + \left(\frac{9}{4} \mu_p \gamma^2 + \frac{9}{2} \delta^2 \gamma\right) \sigma_x^4 + \frac{15}{8} \gamma^3 \sigma_x^6 \quad (\text{D.24})$$

¹ Hull, J. [2003]

Anexo E

Expansión de Cornish-Fisher.

De acuerdo con Johnson, N. y Kotz, S. ¹, si cualquier distribución se ajusta igualando los primeros s momentos de la distribución real con los de la distribución ajustada, es posible, calcular los cuantiles de la distribución ajustada y considerar a estos como aproximaciones de los correspondientes cuantiles de la distribución real. Y de acuerdo a lo anterior, se tienen estimadores de los cuantiles reales, los cuales son funciones de estos s momentos.

En el trabajo de Cornish-Fisher [1937]² se desarrolló una expansión para obtener los cuantiles de una distribución real a partir de una distribución ajustada, cuyos términos son funciones polinomiales de los cuantiles apropiados de una normal estándar y sus coeficientes son funciones de los momentos de la distribución real.

Si se define:

$$\int_{-\infty}^{X_\alpha} g(x)dx = \alpha = \int_{-\infty}^{U_\alpha} Z(x)dx \quad (\text{E.1})$$

donde:

$g(x)$: es la función de densidad de la distribución real de la variable X .

X_α : es el valor correspondiente en el cuantil α de la función de densidad $g(x)$

$Z(x)$: es la función de densidad de una distribución normal estándar-

U_α : es el valor correspondiente en el cuantil α de la función de densidad $Z(x)$.

¹ Johnson, N. y Kotz, S. [1970] pp. 33-35.

² Algunos trabajos posteriores han hecho refinamientos de los trabajos originales de Cornish-Fisher [1937], dentro de los cuales se encuentran: Fisher, R.A, Cornish, E. A. [1960] y el de Finney, D.J. [1963]

La expansión de Cornish-Fisher es:

$$\begin{aligned}
X_\alpha = X(U_\alpha) = & U_\alpha + \frac{1}{6}(U_\alpha^2 - 1)\kappa_3 \\
& + \frac{1}{24}(U_\alpha^3 - 3U_\alpha)\kappa_4 - \frac{1}{36}(2U_\alpha^3 - 5U_\alpha)\kappa_3^2 \\
& + \frac{1}{120}(U_\alpha^4 - 6U_\alpha^2 + 3)\kappa_5 - \frac{1}{24}(U_\alpha^4 - 5U_\alpha^2 + 2)\kappa_3\kappa_4 \\
& + \frac{1}{324}(12U_\alpha^4 - 53U_\alpha^2 + 17)\kappa_3^3 \\
& + \frac{1}{720}(U_\alpha^5 - 10U_\alpha^3 + 15U_\alpha)\kappa_6 \\
& - \frac{1}{180}(2U_\alpha^5 - 17U_\alpha^3 + 21U_\alpha)\kappa_3\kappa_5 \\
& - \frac{1}{384}(3U_\alpha^5 - 24U_\alpha^3 + 29U_\alpha)\kappa_4^2 \\
& + \frac{1}{288}(14U_\alpha^5 - 103U_\alpha^3 + 107U_\alpha)\kappa_3^2\kappa_4 \\
& - \frac{1}{7776}(252U_\alpha^5 - 1688U_\alpha^3 + 1511U_\alpha)\kappa_3^4 \\
& + \dots
\end{aligned} \tag{E.2}$$

Con las expresiones para las κ 's (cumulants) dadas por:

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= E[X] \\
\kappa_2 &= Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 \\
\kappa_3 &= \sigma_X^3 \xi_X = E\{(X - E[X])^3\} = E[X^3] - 3E[X^2]E[X] + 2(E[X])^3 \\
\kappa_4 &= E[X^4] - 4\kappa_3\kappa_1 - 3\kappa_2^2 - 6\kappa_2\kappa_1^2 - \kappa_1^4 \\
\kappa_5 &= E[X^5] - 5\kappa_4\kappa_1 - 10\kappa_3\kappa_2 - 10\kappa_3\kappa_1^2 - 15\kappa_2^2\kappa_1 - 10\kappa_2\kappa_1^3 - \kappa_1^5 \\
\kappa_6 &= E[X^6] - 6\kappa_5\kappa_1 - 15\kappa_4\kappa_2 - 15\kappa_4\kappa_1^2 - 10\kappa_3^2 - 60\kappa_3\kappa_2\kappa_1 - 20\kappa_3\kappa_1^3 - 15\kappa_2^3 \\
&\quad - 45\kappa_2^2\kappa_1^2 - 15\kappa_2\kappa_1^4 - \kappa_1^6
\end{aligned} \tag{E.3}$$

Anexo F

Momentos de formas cuadráticas de una distribución normal.

De acuerdo a Mathai y Provost [1992, pags. 53 y 54), el r -ésimo momento de una forma cuadrática del tipo $Q(\mathbf{X}) = \mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}$ con $\mathbf{X} \sim N_p[\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}]$, $\boldsymbol{\Sigma} > \mathbf{0}$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$, está dado por:

$$E[Q(\mathbf{X})^r] = \left\{ \sum_{r_1=0}^{r-1} \binom{r-1}{r_1} g^{r-1-r_1} \sum_{r_2=0}^{r_1-1} \binom{r_1-1}{r_2} g^{(r_1-1-r_2)} \dots \right\} \quad (\text{F.1})$$

donde:

$$g^{(k)} = 2^k k! \left\{ \text{tr}(\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma})^{k+1} + (k+1) \boldsymbol{\mu}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma})^k \mathbf{A}\boldsymbol{\mu} \right\}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{F.2})$$

De esta forma se tiene que con $r=1$:

$$E[Q(\mathbf{X})] = g^{(0)} = \text{tr}(\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}) + \boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} \quad (\text{F.3})$$

con $r=2$:

$$\begin{aligned} E[Q(\mathbf{X})^2] &= g^{(1)} + [g^{(0)}]^2 \\ &= 2 \left[\text{tr}(\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma})^2 + 2\boldsymbol{\mu}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma})\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} \right] + \left[\text{tr}(\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}) + \boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

y con $r=3$:

$$\begin{aligned} E[Q(\mathbf{X})^3] &= g^{(2)} + 3g^{(1)}g^{(0)} + [g^{(0)}]^3 \\ &= 8 \left[\text{tr}(\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma})^3 + 3\boldsymbol{\mu}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma})^2 \mathbf{A}\boldsymbol{\mu} \right] \\ &\quad + 6 \left[\text{tr}(\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma})^2 + 2\boldsymbol{\mu}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma})\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} \right] \left[\text{tr}(\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}) + \boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} \right] \\ &\quad + \left[\text{tr}(\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}) + \boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} \right]^3 \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

La ecuación (F.1) puede escribirse de la siguiente forma:

$$E[Q(\mathbf{X})^0] = 1 = \mu_0 \quad (\text{F.6})$$

$$E[Q(\mathbf{X})] = g^{(0)} = \mu_1 \quad (\text{F.7})$$

$$E[Q(\mathbf{X})^2] = \binom{1}{0} g^{(1)} \mu_0 + \binom{1}{1} g^{(0)} \mu_1 = \mu_2 \quad (\text{F.8})$$

$$E[Q(\mathbf{X})^3] = \binom{2}{0} g^{(2)} \mu_0 + \binom{2}{1} g^{(1)} \mu_1 + \binom{2}{2} g^{(0)} \mu_2 = \mu_3 \quad (\text{F.9})$$

$$E[Q(\mathbf{X})^4] = \binom{3}{0} g^{(3)} \mu_0 + \binom{3}{1} g^{(2)} \mu_1 + \binom{3}{2} g^{(1)} \mu_2 + \binom{3}{3} g^{(0)} \mu_3 = \mu_4 \quad (\text{F.10})$$

y así en adelante..

Para el caso en que la forma cuadrática sea del tipo $Q'(\mathbf{X}) = \mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{a}'\mathbf{X} + d$ con $\mathbf{X} \sim N_p[\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}]$, $\boldsymbol{\Sigma} > \mathbf{0}$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$, el r -ésimo momento vendrá dado por la expresión (F.1) con g reemplazado por g_* , el cual está dado por:

$$g_*^{(k)} = \frac{1}{2} k! \sum_{j=1}^p (2\lambda_j)^{k+1} + \frac{(k+1)!}{2} \sum_{j=1}^p b_j^{*2} (2\lambda_j)^{k-1}, \quad k \geq 1 \quad (\text{F.11})$$

$$g_*^{(k)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p (2\lambda_j) + (d + \mathbf{a}'\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}), \quad k = 0 \quad (\text{F.12})$$

con:

$$\mathbf{P}'\boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \mathbf{P} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \quad (\text{F.13})$$

$$\mathbf{P}\mathbf{P}' = \mathbf{I} \quad (\text{F.14})$$

$$\mathbf{P}'(\boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \mathbf{a} + 2\boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{b}^* = (b_1^*, \dots, b_p^*)' \quad (\text{F.15})$$

Anexo G

Backtesting (Verificación del Modelo)

Existen diversas fuentes de error en un sistema de Valor en Riesgo, que van desde que los datos hayan sido capturados incorrectamente, los estimados de correlaciones y volatilidades sean incorrectos, no sean considerados todos los factores de riesgo, hasta que los modelos de valoración sean incompletos.

Para realizar el Back-testing de un modelo de VaR se verifica si los rendimientos realizados son consistentes con el VaR diario correspondiente producido por el modelo, a un nivel de confianza dado. Esto se realiza contando las observaciones de pérdidas y/o ganancias que exceden a la medida del VaR. Así por ejemplo, si el nivel de confianza es del 99%, solo se esperaría que un valor realizado dentro de 100 días excediera el nivel del VaR, en promedio.

De esta forma, el concepto de Back-Testing es importante tanto para la institución financiera como para las autoridades regulatorias, ya que si las pérdidas exceden a lo esperado, entonces el regulador podría imponer cargos de capital adicionales, a través de multiplicadores mayores. Por lo anterior, es imprescindible verificar si el modelo es adecuado y, de ser necesario, realizar los ajustes necesarios al modelo.

Los pasos para realizar un back-testing son los siguientes¹:

1. Las pérdidas y ganancias se calculan como cambios en la valoración de los instrumentos (mark to market).

Por consistencia, la valoración de las pérdidas y ganancias se hace considerando que las posiciones del día anterior se mantienen para el día siguiente.

¹ De Lara, A. [2001], pags. 151-152.

2. Se debe comparar periódicamente el valor en riesgo observado ajustado a un día con las pérdidas y ganancias diarias (el Banco Internacional de Pagos –BIS- recomienda que esta prueba se realice trimestralmente utilizando una ventana de un año).

El VaR usualmente se calcula al cierre del día, y se basa en las posiciones de mercado reportadas en ese momento. No toma en cuenta las operaciones del día siguiente, es decir se deriva bajo el supuesto de que las posiciones de la institución financiera permanecerán iguales durante el día siguiente al que el VaR fue calculado.

3. Los errores o excepciones detectados se calculan contando el número de veces que las pérdidas y ganancias exceden al valor en riesgo estimado.
4. El nivel de eficiencia del modelo será el número de excepciones/ número de observaciones.

Modelo de Kupiec: Un modelo basado en la frecuencia de las pérdidas excesivas.

Este modelo es quizá el más intuitivo de todos y se basa en investigar cuántas veces las pérdidas realizadas exceden el valor del VaR. Por ejemplo, si el nivel de confianza del VaR es del 95% se esperaría que en promedio se tuvieran 5 pérdidas en exceso sobre el VaR. Sin embargo, si se obtiene una frecuencia de pérdidas de 4 o de 6, en la práctica el objetivo es determinar si el número realizado es estadísticamente diferente del pronosticado (en el ejemplo 5%) con un nivel de significancia dado.

Una prueba sugerida por Kupiec [1995]² establece que si se tienen N excesos de pérdidas sobre el VaR, en un periodo de T días, entonces se tendría una

² Kupiec, P., "Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models", Journal of Derivatives, 3 (1995), pp. 73-84

frecuencia estimada de N/T , denotada por p . El propósito es determinar si este valor es significativamente diferente del nivel de excesos pronosticado por el nivel de confianza del VaR, c (por ejemplo el 99%). En otras palabras, la hipótesis nula y la alternativa consisten en:

$$\begin{aligned} H_0 : p &= 1 - c \\ H_a : p &\neq 1 - c \end{aligned} \tag{G.1}$$

La probabilidad de observar N salidas (excesos de pérdida) en un periodo de T días está caracterizada por un proceso binomial, siendo esta probabilidad:

$$p^N (1 - p)^{T - N} \tag{G.2}$$

El estadístico de Kupiec para realizar la prueba es el siguiente:

$$LR = -2 \ln \left[c^{T - N} (1 - c)^N \right] + 2 \ln \left[\left(1 - \frac{N}{T} \right)^{T - N} \left(\frac{N}{T} \right)^N \right] \tag{G.3}$$

el cual se distribuye con una distribución Chi-Cuadrada con un grado de libertad, bajo la hipótesis nula.

Por lo tanto, para la prueba de la hipótesis nula, con un nivel de confianza de $1 - \alpha$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{No Rechazar } H_0 &\text{ si } \chi_{(1-\alpha)}^2 \leq LR \leq \chi_{(\alpha)}^2 \\ \text{Rechazar } H_0 &\text{ si } LR > \chi_{(\alpha)}^2 \text{ o } LR < \chi_{(1-\alpha)}^2 \end{aligned} \tag{G.4}$$

De acuerdo con el estadístico de Kupiec, un método de estimación de Valor en Riesgo es exitoso cuando incorpore en el proceso el mejor ajuste del exceso de curtosis, ya que tanto el sesgo como la desviación estándar de los estimadores

de los valores críticos para $(1-c)$ se incrementan a medida de que la distribución subyacente sea más leptocúrtica³.

Kupiec desarrolló una tabla en la cual indica la región de no rechazo para el número de observaciones en exceso del VaR, N , basado en el número de datos, T y el nivel de confianza del VaR, c .

Tabla 11. Valores Críticos de Kupiec⁴			
$(1-c)$	T=255	T=510	T=1000
0.010	$N < 7$	$1 < N < 11$	$4 < N < 17$
0.025	$2 < N < 12$	$6 < N < 21$	$15 < N < 36$
0.050	$6 < N < 21$	$16 < N < 21$	$37 < N < 65$
0.075	$11 < N < 28$	$27 < N < 51$	$59 < N < 92$
0.100	$16 < N < 36$	$38 < N < 65$	$81 < N < 120$

Kupiec encontró que esta prueba con una cantidad pequeña de datos es poco poderosa⁵, por lo que para incrementar la potencia de la prueba es necesario incrementar el número de observaciones (T) para realizarla.

Por último, de acuerdo al Banco Internacional de Pagos (BIS), los resultados se clasifican en tres zonas de colores : verde, amarilla y roja. La zona verde corresponde a los resultados del Backtesting que no sugieren problemas con la calidad o exactitud del modelo. La zona amarilla sugiere que posiblemente existan algunos problemas con el modelo, sin obtener conclusiones definitivas. La zona roja indicaría que existe un problema real con el modelo de la institución financiera.

³ Ramírez, J.C. [2004]

⁴ Tomada de Jorion [1999]

⁵ La potencia de una prueba es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando esta es falsa.

Tabla 12. Zonas de acuerdo al BIS	
Zona	Número de Excepciones⁶
Verde	0-19
	20-39
	40-59
	60-79
	80-99
Amarilla	100-119
	120-139
	140-159
	160-179
	180-199
Roja	200 ó más

⁶ El número de excepciones se calcula tomando como base las observaciones de los últimos 250 días, en una muestra de 20 contrapartes, las cuales incluyen las 10 más importantes, decididas por cada banco con arreglo a su propia metodología de medición de riesgos, y otras 10 seleccionadas aleatoriamente. En total son 5000 observaciones. Bank of International Settlement, Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks, Bank of International Settlement, Enero 1996.

De lo anterior, el incremento en el factor de capital requerido para las instituciones, que era de tres veces el Valor en Riesgo⁷, se establece en el nuevo acuerdo^{8, 9} de la siguiente manera:

Tabla 13. Multiplicadores del Requerimiento de Capital de acuerdo al BIS		
Zona	Número de Excepciones	Multiplicador del requerimiento de capital
Verde	0-19	1.0
	20-39	1.0
	40-59	1.0
	60-79	1.0
	80-99	1.0
Amarilla	100-119	2.0
	120-139	2.2
	140-159	2.4
	160-179	2.6
	180-199	2.8
Roja	200 ó más	3.0

⁷ Bank of International Settlement, Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks, Bank of International Settlement, Enero 1996.

⁸ Párrafo 49 del Basle Committee on Banking Supervision, The New Basel Capital Accord, Bank For International Settlements (BASLE II), Julio 2003.

⁹ El nuevo acuerdo entrará en vigor en enero del 2006.

Anexo H

Precisión del Valor en Riesgo.

Estimación del Intervalo de Confianza para el método de Varianza-Covarianza

Para el método de Valor en Riesgo usando Varianza-Covarianza, en el cual se supone normalidad de los rendimientos, el VaR verdadero es $z_{1-c}\sigma_p P$, donde c es el nivel de confianza, σ_p es la desviación estándar del rendimiento del portafolio, z_{1-c} es el número de desviaciones estándar correspondiente al percentil $1-c$ en una distribución normal estándar y P es el valor del portafolio. Sin embargo, un problema que se presenta es que la varianza no es conocida, por lo tanto se usa un estimador estadístico para encontrar su valor.

Si se supone que el rendimiento se distribuye de manera normal y contamos con n observaciones independientes, entonces se tiene que el estadístico:

$$X^2 = \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \quad (\text{H.1})$$

se distribuye como una variable Chi-Cuadrada con $(n-1)$ grados de libertad, donde:

$\hat{\sigma}^2$: es la varianza muestral estimada.

σ^2 : es la varianza poblacional desconocida.

De tal manera que un intervalo para la varianza poblacional con un nivel de confianza de $(1-\zeta)\%$ para el valor de la varianza poblacional se tiene con:

$$\frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\chi_{\zeta/2}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\chi_{1-\zeta/2}^2} \quad (\text{H.2})$$

Y de esta forma, con un nivel de confianza de $(1-\zeta)\%$ se tiene que el intervalo de confianza para el valor en riesgo, suponiendo normalidad en los rendimientos es:

$$z_{1-\zeta} \sqrt{\frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\chi_{\zeta/2}^2}} P \leq VaR = z_{1-\zeta} \sigma_P P \leq z_{1-\zeta} \sqrt{\frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\chi_{1-\zeta/2}^2}} P \quad (H.3)$$

Por ejemplo, para un nivel de confianza del 95% para el estimado del Valor en Riesgo y $n = 254$ datos (un año de muestra), se tiene que $\zeta = 0.05$ y los grados de libertad son $(n-1) = 253$, por lo que los valores críticos son: $\chi_{1-0.05/2}^2 = 210.83546$ y $\chi_{0.05/2}^2 = 298.950996$ ¹.

Estimación del Intervalo de Confianza para las metodologías que implican simulación (Histórica o MonteCarlo)

Una vez obtenido el valor del Valor en Riesgo a través de la simulación MonteCarlo o usando simulación histórica se tiene el problema de cuantificar el tamaño del error en la estimación y de esta forma establecer los niveles de confianza del estimado de riesgo que se obtiene².

Sea ψ_c el valor real del percentil c de una simulación, compuesta de m escenarios. Este valor del percentil representa una probabilidad de c de que el valor de cada escenario caiga por debajo del valor ψ_c ³. Sea N_c la variable que representa el número de escenarios de la simulación que caen por debajo de ψ_c , esta variable N_c sigue una distribución binomial con parámetros m y c ⁴.

¹ Valores obtenidos con Microsoft Office Excel 2003.

² Esta metodología está basada en la "teoría de orden" discutida por Pritsker [1997].

³ O más precisamente es la probabilidad de que el valor de cada escenario sea menor que el percentil ψ_c .

⁴ Una variable aleatoria X se dice que sigue una distribución binomial si su función de densidad discreta esta dada por:

$$f_x(x) = f_x(x; n, p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & \text{para } x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De esta forma, el valor esperado y la varianza de N_c es:

$$E[N_c] = mc \quad (\text{H.4})$$

$$\text{Var}[N_c] = \sigma_{N_c}^2 = mc(1-c) \quad (\text{H.5})$$

Cuando el tamaño de la simulación m es muy grande, se aproxima a una distribución normal⁵.

De acuerdo a lo anterior, suponiendo un número grande de escenarios en la simulación entonces se sabe de la distribución normal que:

$$\Pr\left[mc - \sqrt{mc(1-c)} \leq N_c \leq mc + \sqrt{mc(1-c)}\right] \approx 0.68$$

Y de manera general:

$$\Pr\left[mc + z_{p/2}\sqrt{mc(1-c)} \leq N_c \leq mc - z_{p/2}\sqrt{mc(1-c)}\right] = (1-p) \quad (\text{H.6})$$

Donde los dos parámetros n y p satisfacen $0 \leq p \leq 1$, n es un número entero, y $q = 1 - p$.

Además:

$$E[X] = np$$

$$\text{Var}[X] = npq$$

$$m_x(t) = (q + pe^t)^n$$

⁵ De acuerdo con el Teorema del límite de De Moivre-Laplace, una variable aleatoria X que tiene una distribución binomial con parámetros n y p ; se tiene que para las constantes $a \leq b$ se tiene:

$$P\left[a \leq \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right] = P\left[np + a\sqrt{npq} \leq X \leq np + b\sqrt{npq}\right] \rightarrow \Phi(b) - \Phi(a) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

Con $\Phi(\cdot)$ la función de distribución acumulativa de una variable normal estándar. Mood, A.; Graybill F. y Boes D. [1974]

Donde:

$1-p$: representa el nivel de confianza del estimador (por ejemplo 95%)

$z_{p/2}$: representa el percentil correspondiente de una distribución normal estándar (por ejemplo $z_{p/2} = -1.6449$ si $p = 10\%$)

Por último si N_c es mayor o igual que $mc + z_{p/2}\sqrt{mc(1-c)}$, entonces al menos $mc + z_{p/2}\sqrt{mc(1-c)}$ escenarios son menores que ψ_c (el valor en el c -ésimo percentil). De esta forma se define a la variable ψ_l como el escenario que representa el percentil en el lugar $mc + z_{p/2}\sqrt{mc(1-c)}$. Por otro lado si N_c es menor o igual que $mc - z_{p/2}\sqrt{mc(1-c)}$ entonces debe ser cierto que ψ_c no debe ser mayor que el $mc - z_{p/2}\sqrt{mc(1-c)}$ escenario de la simulación, es decir ψ_u . De lo anterior se tiene que:

$$\Pr\left[mc + z_{p/2}\sqrt{mc(1-c)} \leq N_c \leq mc - z_{p/2}\sqrt{mc(1-c)}\right] = \Pr[\psi_l \leq \psi_c \leq \psi_u] \quad (\text{H.7})$$

Con lo que para encontrar el intervalo de confianza del estimador del percentil c lo que se tiene que hacer es lo siguiente:

1. Ordenar los valores de los escenarios de la simulación.

Por ejemplo suponga que se realizaron 10,000 escenarios de la simulación, es decir $m = 10,000$, los cuales se ordena del menor al mayor.

2. Conociendo el percentil a estimar del valor en riesgo se calcula el valor esperado y la desviación estándar del número de eventos que quedan por debajo del percentil c .

Del ejemplo: si el valor en riesgo que se calculó fue con un nivel de confianza del 99%, entonces $1-c = 0.99$ o lo que es lo mismo $c = 0.01$. El

valor del valor en riesgo corresponde al valor que se encuentra en la posición $10,000 \cdot 0.01 = 100$, es decir $\psi_{0.01}$ y suponga que este valor en la lista corresponde a $-\$978$. De esta forma el valor esperado de N_c se calcula con: $10,000 \cdot 0.01 = 100$ y la desviación estándar: $\sqrt{10,000(.01)(1-.01)} = 9.9499$.

3. Se determina el nivel de confianza para el intervalo de confianza $1-p$ y se encuentran los valores correspondientes para $z_{p/2}$, de la distribución acumulativa de una variable normal estándar.

Del ejemplo: si se quiere estimar un nivel de confianza del intervalo del 90% entonces $p = 1 - 0.9 = 0.1$ con lo que de tablas de distribución normal se tiene: $z_{p/2} = -1.6449$.

4. Se determina el intervalo de confianza para la variable N_c .

$$\begin{aligned} \Pr[100 - 1.6449(9.9499) \leq N_{0.05} \leq 100 + 1.6449(9.9499)] &= \\ = \Pr[83.6335 \leq N_c \leq 116.3665] &= 0.90 \end{aligned}$$

5. Por último, se localizan en los escenarios de la simulación a los valores correspondientes para conocer el intervalo de confianza del Valor en Riesgo.

Redondeando los valores para ψ_l y ψ_u se trata de encontrar los valores que corresponde a las posiciones $83.6335 \approx 84$ y $116.3635 \approx 116$. Suponiendo que los valores 84 y 116 de la lista de escenarios corresponden a: $\psi_l = -996$ y $\psi_u = -960$ con lo que:

$$\Pr[-996 \leq VaR(99\%) \leq -960] = 90\%$$

Con una media de $\psi_{0.01} = -978$.

CONCLUSIONES.

En este trabajo se tuvo un objetivo principal, el cual fue el desarrollar una metodología de cálculo de Valor en Riesgo, denotada como Modelo Cuadrático Delta-Gamma de Varianza-Covarianza, que permitiera capturar los efectos no lineales de los factores de riesgo en los activos que componen un portafolio. Para lograr lo anterior, se obtuvieron expresiones para el cambio del valor del portafolio con n activos y m factores de riesgo, y a partir del supuesto de que los cambios relativos de los factores de riesgo se comportan con una distribución normal, utilizar los primeros tres momentos en conjunción con la expansión Cornish-Fisher para obtener un conjunto de expresiones matriciales que dan el estimado del percentil de la distribución real del cambio de valor del portafolio y con ello un estimado del Valor en Riesgo con el nivel de confianza requerido. Como punto importante de este modelo se tiene que puede clasificarse dentro de las metodologías analíticas de Varianza-Covarianza, populares entre los administradores de riesgo de las instituciones financieras, por lo que la información que requiere se puede obtener directamente de la matriz de Varianza-Covarianza obtenida de los datos históricos, ya sea utilizando pesos iguales y ventana móvil o a partir de la actualización basada en GARCH(1,1). A fin de mostrar la aplicabilidad del modelo, se realizaron dos portafolios, el primero compuesto por acciones y el segundo compuesto por bonos cupón cero (lo cual permite el uso de metodologías basadas en vértices de riesgo como la de RiskMetrics); los resultados mostraron que la metodología Delta y Cuadrática Delta-Gamma usando GARCH(1,1) comparada con respecto a la simulación histórica y la metodología Delta y Cuadrática Delta-Gamma con pesos iguales, ajustaron convenientemente los excesos de pérdida respecto de la medida de Valor en Riesgo y entonces no pudieron ser rechazadas en las pruebas de Verificación del modelo o BackTesting.

Como un resultado complementario de este trabajo, se desarrollaron las expresiones que permitan obtener, a partir de un conjunto de datos históricos o a partir de empezar a generarlos, la matriz de Varianza-Covarianza actualizada con el modelo GARCH(1,1) a fin de que pueda utilizarse para el análisis de

riesgo de portafolios, y en específico en la metodología Analítica de Varianza-Covarianza de Valor en Riesgo. Si bien, en la literatura se han realizado varios estudios empíricos, dentro de los cuales se encuentra el de Kim, D y Kon, S. [1994], y el modelo GARCH ha capturado los efectos de heteroscedasticidad de la varianza y volatilidad por grupos de una manera conveniente, quedan como posibles extensiones de este trabajo el desarrollar las expresiones para utilizar otros modelos que se citan en la literatura y que también han modelado convenientemente las distribuciones de los rendimientos, tales como distribuciones hiperbólicas (Barndorff-Nielsen, O.E. [1978]) u otras variantes del modelo GARCH (Nelson, D. B. [1989] para EGARCH).

BIBLIOGRAFIA

Akgiray, V., [1989], "Conditional heteroscedasticity in time series of stock returns: Evidence and forecast". *Journal of Business*, 62 (January), 55-80.

Alexander, C. [1998], *Risk Management and Análisis. Vol 1: Measuring and Modelling Financial Risk*. Edited by Carol Alexander, John Wiley & Sons Ltd.

Bailey, W., Stulz R. [1989], "The Pricing of Stock Index Options in a General Equilibrium Model", *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 24 (1), 1-12.

Barndorff-Nielsen, O.E. [1977], "Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size", *Proceedings of the Royal Society London*, 401-419.

Barndorff-Nielsen, O.E. [1978], "Hyperbolic distributions and distributions on hyperbolae", *Scandinavian Journal of Statistics*, 5, 151-157.

Basle Committee on Banking Supervision [1988], *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards (BASLE I)*, Bank For International Settlements, Julio.

Basle Committee on Banking Supervision [1996], "Supervisory Framework for the use of backtesting in conjunction with the internal models approach to market risk capital requirements", Bank For International Settlements, Enero.

Basle Committee on Banking Supervision [1996], "Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks", Bank For International Settlements, Enero.

} Basle Committee on Banking Supervision [2003], *The New Basel Capital Accord*, Bank For International Settlements (BASLE II), Julio.

Beder, T., [1995], "VAR: Seductive but dangerous", *Financial Analyst Journal*, September-October , 12-24.

Bhattacharya, R., Waymire, E. [1990], *Stochastic Processes with Applications*, Wiley series in probability and mathematical statistics, John Wiley & Sons, New York.

Bickel, P., Freedman, D. [1981], "Some Asymptotic Theory for The Bootstrap" *The Annals of Statistics*, 9 , 1196-1271.

Black, F., Sholes, M. [1973], "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" , *Journal of Political Economy*, 81 (May-June), 637-659.

- Bollerslev, T. [1986], "Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity", *Journal of Econometrics*, 31 , 307-327
- Bollerslev, T., Chou, R.Y. y Corner, K.F. [1992], "ARCH modeling in finance", *Journal of Econometrics*, 52, 5-59.
- Bollerslev, T., Engle, R. y Wooldridge, J. [1988], "A capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances", *Journal of Political Economy*, 96 (1), 116-131.
- Box, G., Pierce, D. [1970], "Distribution of Residual Autocorrelations in Autoregressive Moving Average Time Series Models", *Journal of the American Statistical Association*, 65, 1509-1526.
- Boyle, P.P. [1977], "Options: A Monte Carlo Approach", *Journal of Financial Economics*, 4, 323-338.
- Britten-Jones, M., Schaefer, S. [1999], "Non-Linear Value-at-Risk", *European Finance Review*, 2 , 161-187.
- Clelow, L., Carverhill, A. [1994], "On the simulation of contingent Claims", *Journal of Derivatives*, 2, 66-74
- Clelow, L., Strickland, C. [1999], *Implementing Derivatives Models*, First Edition, John Wiley & Sons, Chichester. UK.
- Cochran, W.G. [1952], "The χ^2 Test of Goodness of Fit", *Annals of Mathematical Statistics*, 23 , 315-345.
- Cornish, E.A., Fisher, R.A. [1937], "Moments and cumulants in the specifications of distributions", *Review of the International Statistical Institute*, 5, 307-322.
- Crouhy M, Galai D., Mark R. [2001], *Risk Management* , First Edition, Mc Graw Hill, New York.
- Daniel, W.W. [1979], *Bioestadística*, 1a. Edición, Editorial Limusa, México.
- De Lara, A. [2001], *Medición y Control de Riesgos Financieros*, Limusa, México.
- DeFusco, R., McLeavey, D. [2001], Pinto, J., Runkle, D. *Quantitative Methods for Investment Analysis*, AIMR, 2001, United States of America.
- Doob, J. L., [1953], *Stochastic Processes*, First Edition, John Wiley & Sons, Canada.
- Dowd, K. [1998], *Beyond Value At Risk: The new science of Risk Management*, John Wiley and Sons, Chichester U.K.

- Duan J. [1995], "The GARCH Option Pricing Model", *Mathematical Finance*, 5, 13-32.
- Duffie, D., Pan, J. [1997], "An overview of value at risk", *Journal of Derivatives*, 4 (3), Spring, 7-49
- Durbin, J y Watson, G. [1950], "Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression- I", *Biometrika*, 37, 409-428.
- Durbin, J y Watson, G. [1951], "Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression- II", *Biometrika*, 38, 159-178.
- Efron, B. [1979], "Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife", *The Annals of Statistics*, 7, 1-26.
- Engle, R. [1982], "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation". *Econometrica*, 50, 987-1008
- Engle, R. y Mezrich, J. [1996], "GARCH for Groups", *RISK*, August, 36-40.
- Engle, R., [2001], "GARCH 101: The Use of ARCH/GARCH Models in Applied Econometrics", *Journal of Economic Perspectives*, 15 (4), Fall, 157-168.
- Fabozzi F. [1993] , *Fixed Income Mathematics: Analytical and Statistical Techniques*, Probus Publishing Company, Chicago.
- Fama, E.F. [1965], "The behavior of stock market prices". *Journal of Business*, 38 (January), 34-105.
- Finney, D.J. [1963], "Some properties of a distribution specified by its cumulants", *Technometrics*, 5, 63-69.
- Fisher, R.A., Cornish, E.A. [1960], "The percentile points of distributions having known cumulants", *Technometrics*, 2 , 209-226.
- Fleming, J., Kirby, C y Ostdiek, B. [2001]. *The Economic Value of volatility Timing*, *Journal of Finance* 56 (1), 329-352.
- Fraser R., Benton, G., Kolari J. [1995], *Commercial Banking The Management of Risk*, West Publishing Company, New York.
- Gaarder, E. [1998], *The Complete Guide To Option Pricing Formulas*, McGraw-Hill, New York.
- Garman, M.B. y Kohlhagen, S.W. [1983], "Foreign Currency Option Values", *Journal of International Money and Finance*, 2 (December), 231-37.

Glosten, L.R., Jagannathan, R, Runkle, D. [1993], "On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks", *Journal of Finance*, 48 (December), 1779-1801.

Glyn, H. [1998], "Simulating value-at-risk", *Journal of Performance Measurement*, 3 (1), 11-21.

Goodman, L.A. [1954], "Kolmogorov-Smirnov Tests for Psychological Research", *Psychological Bulletin*, 51 , 160-168.

Greene, W. [1993], *Econometric Analysis*, 2nd Edition, Macmillan Publishing Company, New York.

Gupton, G.M., Finger, C.C, y Bhatia, M [1997], *CreditMetrics-Technical Document*, Morgan Guaranty Trust Co.

Hamilton, J. [1991], "A quasi-Bayesian approach to estimating parameters for mixtures of normal distributions", *Journal of Business and Economic Statistics*, 9 (1), 27-39

Hammersley, J.M. y Morton, K.W. [1956], "A new Monte Carlo technique antithetic variables", *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 52, 449-475.

Harvey, A., [1976], "Estimating Regression Models with Multiplicative Heteroscedasticity", *Econometrica*, 44, 461-465.

Heston, S. [1993], "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options", *The Review of Financial Studies*, 6 (2), 327-343.

Hsieh, D., [1995], "Nonlinear dynamics in financial markets: Evidence and implications", *Financial Analyst Journal*, 51 (July-August) 55-62.

Hull, J y White A, [1987], "The pricing of options on assets with Stochastic Volatilities", *Journal of Finance*, 42 (June), 281-300.

Hull, J., White, A. [1998], "Value At Risk when daily changes in market variables are not normally distributed", *Journal of Derivatives*, 5 (3), Spring, 9-19

Hull, J. [1999], *Options, Futures, and Other Derivatives*, 4th edition, Prentice Hall. Upper Saddle River, New Jersey

Hull, J., [2003], *Options, Futures, and Other Derivatives*, 5th. Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.

Jarrow, R, Rosenfeld, E. [1984], "Jump risk and the intertemporal capital asset pricing model", *Journal of Business*, 57 (July), 337-351.

Jaschke, S. [2001], "The Cornish-Fisher-Expansion in the Context of Delta-Gamma-Normal Approximations", Discussion Paper, Humboldt-Universität Berlin

Jiang, G. [2001], "VaR with stochastic volatility", *Derivatives Use, Trading & Regulation*, 7 (1), 73-80.

Johnson, N., Kotz, S., [1970], *Continuous Univariate Distributions-1*, First Edition, John Wiley & Sons. New York.

Johnson, N., Kotz, S. Balakrishnan, N. [1994], *Continuous Univariate Distributions Volume 1. Second Edition*, John Wiley & Sons, New York .

Jorion, P. [1996], "Risk²: Measuring the Risk in Value at Risk", *Financial Analyst Journal*, November-December, 47-56.

Jorion, P. [1999], *Valor en Riesgo*, Ed. Limusa, México.

Jorion, P. [2000], *Value at Risk: the new benchmark for managing financial risk*, 2a. Edición, Mc Graw Hill, New York.

Kahn, H. [1950], "Modification of the Monte Carlo method", *Seminar on Scientific Computation*, C.C. Hurd (ed.), November 16-18, 1949, IBM.

Kiefer, N [1983], Salmon, M. "Testing Normality in Econometric Models", *Economics Letters*, 11, 123-128.

Kim, D., Kon, S. [1994], "Alternative models for the condicional heteroscedasticity of stock returns", *Journal of Business*, 67 (4) , 563-598.

Kim, J., Malz, A. M. y Mina, J. [1999], "Long Run Technical Document", RiskMetrics Group.

Kolb, R. [1999], *Futures, Options, & Swaps*, 3th Edition, Blackwell Publishers.

Kolmogorov, A.N. [1933], , "Sulla Determinazione Empirica di una Legge di Distribuzione", *Giornale dell' Istitute Italiano degli Altuari*, 4, 83-91.

Kon, S. J., [1984], "Models of stock returns: A comparison", *Journal of Finance*, 39 (March), 147-165.

Kupiek, P. [1995] "Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models", *Journal of Derivatives*, Vol. 2 (December), 73-84.

Lamoureux, C., Lastrapes, W., [1990a], "Heteroskedasticity in stock return data: Volume versus GARCH effects", *Journal of Finance*, 45 (March), 221-229.

Lamoureux, C., Lastrapes, W., [1990b], "Persistence in variance, structural change, and the GARCH model". *Journal of Business and Economic*, 8 (April), 225-234.

Lau, A., Lau, H., Wingender, J. [1990], "The distribution of stock returns: New evidence against the stable model", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8 (April), 217-223.

Lehar, A. [2000], "Alternative Value-at-Risk Models for Options", Working Paper. Department of Business Studies, University of Vienna, March.

Ljung, G, Box, G., [1979], "On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models", *Biometrika*, 66, 265-270.

Longerstae, J, Spencer M. [1996]. *Riskmetrics- Technical Document*, 4th edition, December, JP Morgan/ Reuters, New York.

Mandelbrot, B. [1963a], "New method in statistical economics", *Journal of Political Economy*, 71 (october), 421-440.

Mandelbrot, B. [1963b], "The variation of certain speculative prices", *Journal of Business*, 36 (october), 394-419.

Mandelbrot, B. [1967], "The variation of some other speculative prices", *Journal of Business*, 406 (october), 393-413.

Massey, F.J. [1951], "The Kolmogorov-Smirnov Test for Goodness of Fit", *Journal of the American Statistical Association*, 46, 68-78.

Mathai, A.M; Provost, S. B., [1992], *Quadratic Forms in random Variables*. First Edition. Marcel Dekker, Inc. New York.

Merton, R.C. [1973], "Theory of rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (Spring), 141-183.

Mina, J. [1999], "Improved Cash-Flow Map". Working paper. Riskmetrics Group.

Mina, J., Xiao J [2001]. "Return to Riskmetrics: The Evolution of a Standard", *Riskmetrics*, 2001.

Mood, A., Graybill, F., Boex, D., [1974], *Introduction to the theory of Statistics*, Third Edition, Mc-Graw Hill, Japan.

Nelson, D. B. [1989], "Modeling stock market volatility changes. Proceedings of the American Statistical Association Business and Economic Statistics Section, 93-98.

Nelson, D.B. [1991], "Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach", *Econometrica*, 59 (March), 347-370.

Nerlove, M., Wallis, K. [1966], "Use of the Durbin-Watson Statistic in Inappropriate Situations", *Econometrica*, 34, 235-238.

Noether, G.E. [1967], *Elements of Nonparametric Statistics*, Wiley, Nueva York.

Parzen, E., [1960], *Modern Probability Theory and Its Applications*, First Edition, John Wiley and Sons, New York.

Press, S.J., [1967], "A compound events model for security prices". *Journal of Business*, 1967, 40 (July), 317-335.

Pritsker, M. [1997], "Evaluating Value-at-Risk Methodologies: Accuracy versus computational Time". *Journal of Financial Services Research*, 12, 201-242.

Ramírez, J.C. [2004], "Usos y limitaciones de los procesos estocásticos en el tratamiento de distribuciones de rendimientos con colas gordas", *Revista de Análisis Económico*.(ILADES/Georgetown University, Santiago de Chile, Chile) , 19, 1.

Ríos, D., Ríos, S., Martín, J., [2000], *Simulación: Métodos y aplicaciones*, Primera Edición, Alfomega, Colombia.

Schwert, G. , Seguin, P. [1990], "Heteroskedasticity in stock returns", *Journal of Finance*, 45 (September), 1129-1155

Scott, L. [1987], "Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation, and Application", *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22 (4), 419-438.

Simon, C., Blume L. [1994] "Mathematics for Economists", Norton, New York.

Slakter, M.J. [1965], "A comparison of the Pearson Chi-Square and Kolmogorov Goodness of Fit Tests with Respect to Validity", *Journal of the American Statistical Association*, 60, 854-858.

Smirnov, N.V. [1939], "Estimate of Deviation Between Empirical Distribution Functions in Two Independent Samples", *Bulletin Moscow University*, 2, 3-16.

Smithson, Charles W. [1998], *Managing financial Risk*, Mc Graw Hill, New York

Stein, E., Stein J. [1991], "Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach", *The Review of Financial Studies*, 4 (4), 727-752.

Venkataraman, S. [1997], "Value at risk for a mixture of normal distributions: the use of quasi-Bayesian estimation techniques" *Economic Perspectives*, Federal Reserve Bank of Chicago, March / April, 2-13.

Wallace, D. [1958], "Asymptotic Approximations to Distributions", *The Annals of Mathematical Statistics*, 29 (3), Sep., 635-654.

Wilson, T., [1998], *Risk Management and Analysis. Vol.1: Measuring and Modelling Financial Risk*. Edited by Carol Alexander © Thomas Wilson, McKinsey & Company, Inc.

Yates, R., Goodman, D. [1999], *Probability and Stochastic Processes: A friendly introduction for Electrical and Computer Engineers*, First Edition, John Wiley & Sons, New York.

Zangari, P. [1996a], "An improved methodology for measuring VaR" *RiskMetrics Monitor*, Reuters/JP Morgan.

Zangari, P. [1996b], "When is non-normality a problem? The case of 15 time series from emerging markets" *RiskMetrics Monitor*, Reuters/JP Morgan. Fourth Quarter, 20-31.