Resolución de problemas matemáticos con el Método de Polya mediante el uso de Geogebra en primer grado de secundaria

Tesis para obtener el grado de:

Maestría en Educación con Acentuación en Procesos de Enseñanza Aprendizaje

Presenta:

Bellanith Aguilar Vásquez
Registro CVU 562424

Asesor tutor:
Mtra. Lorenza Illanes

Asesor titular:
Dr. Leopoldo Zúñiga Silva

Ibagué, Tolima, Colombia

Diciembre del 2014

Dedicatorias

A Dios por brindarme la oportunidad de realizar este estudio y crecer como profesional y personalmente.

A mi hijo Gabriel Feria Aguilar, que me motiva a seguir creciendo para poder darle un buen ejemplo y brindarle una mejor calidad de vida.

A mis padres Uriel Aguilar y Mireya Vásquez, que con mucho esfuerzo me ofrecieron todo el estudio, condiciones, apoyo y ejemplo de superación.

A mis hermanos; Miguel Ángel, José Luis y Víctor Alfonso, por ofrecerme su apoyo incondicional en todos los momentos de mi vida y sobre todo durante este estudio.

A mi esposo Diego Feria Salgado por acompañarme incondicionalmente en este proceso.

Agradecimientos

Al Dr. Leopoldo Zúñiga Silva, por ser el gestor para el éxito de este estudio y diseñador de este proceso de enseñanza y aprendizaje.

A la Mtra. Lorenza Illanes por sus orientaciones en pro del aprendizaje acerca de la investigación.

Al Esp. Fabián Elías Botero Guayara, rector de la institución donde laboro, por brindarme espacios e inclusive charlas motivadoras para la realización de este estudio.

A los estudiantes y padres de familia que dieron consentimiento de la institución que participó en este estudio, por permitirme implementar nuevas estrategias en pro del mejoramiento de la educación.

Resolución de problemas matemáticos con el Método de Polya mediante el uso de Geogebra en primer grado de secundaria

Resumen

La presente investigación, con un enfoque cuantitativo, tuvo por objetivo demostrar que un método didáctico y un recurso educativo abierto como ayuda tecnológica, favorecen el aprendizaje de un contenido matemático, se analizó el rendimiento académico en la resolución de problemas de situaciones aditivas y multiplicativas mediante el método de Polya con el uso del *software Geogebra*. Se revisaron cuatro momentos para solucionar un problema: primero, que se entienda el problema; segundo, que se elabore un plan; tercero, que se ejecute el plan; y cuarto, que se mire hacia atrás. Se utilizó una prueba pretest y postest cuyo instrumento fue un cuestionario, a tres grupos de primero de secundaria. El grupo A, con un tratamiento tradicional, y donde a cada problema se le abstrayeron los datos, realizaron operaciones y se le redacto una respuesta; El grupo B, en el que la solución de problemas se llevó a cabo mediante el método de Polya; y el Grupo C, en el que la solución de problemas se lleva acabo igual que en el grupo B agregando el uso del *software Geogebra*. Las pruebas de hipótesis demostraron que el uso del método produce un aumento del rendimiento académico frente a la enseñanza tradicional, pero es el uso del método junto con el *software Geogebra* que promueve un aumento estadísticamente significativo en el rendimiento académico, al solucionar problemas de índole aditiva y multiplicativa. La innovación educativa fue aplicada en esta investigación ya que implicó adoptar y adaptar nuevas estrategias que logran mejorar el proceso de la enseñanza-aprendizaje en el aula.

Índice

Índice de tablas

Capítulo 1. Planteamiento del problema

Se investigó la resolución de problemas matemáticos y específicamente con el uso de *Geogebra* (Hohenwarter, 2008) en el aprendizaje de la resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas; al análisis de lo que se ha trabajado a nivel institucional y en general en el uso de *Geogebra* dentro de los ambientes de aprendizaje en el área de matemáticas para resolver problemas en las situaciones antes mencionadas; también el planteamiento del problema, especificando el contexto en el cual se investiga, y la pregunta de investigación; igualmente se hace referencia a los objetivos; al supuesto, el cual se plantea de acuerdo a los resultados esperados; el por qué, para qué y cómo de este planteamiento; estableciendo las delimitaciones y limitaciones de la investigación.

Definido el planteamiento del problema se dió el horizonte de esta investigación, como punto de partida del estudio que pretende resolver problemas aplicando el método de cuatro pasos propuesto por Polya (1971) con el uso del *software Geogebra* (Hohenwarter, 2008), Iniciando con el establecimiento de los antecedentes que dieron lugar a la investigación que aquí se reporta.

1.1. Antecedentes

El tema de la resolución de problemas matemáticos, se involucró en la vida de los seres humanos desde el inicio de los tiempos, entre los acontecimientos que lo demostraron están los estudios de astrología, las estrategias comerciales, las estrategias de didáctica de las matemáticas a los que se refiere Sigarreta, Rodríguez y Ruesga (2006), así se ha trascendido a través de la historia, mostrando avances y la posibilidad de que cualquier persona instruida pueda resolver un problema matemático. A continuación se divide este recorrido histórico en cuatro etapas: la antigüedad, la edad media, la edad moderna y la edad contemporánea.

1.1.1. Resolución de Problemas en situaciones aditivas y multiplicativas. Las evidencias del trabajo realizado en la antigüedad, se encuentran en papiros o tablillas de barro con primitivos elementos aritméticos, en donde los egipcios de mediados del segundo milenio, plasmaban la solución de problemas con resultados basados en el anterior.

Asimismo los babilonios y griegos iniciaron con el principio de la analogía de utilizar problemas anteriores para resolver el nuevo problema y la aparición de diferentes filósofos como Sócrates (2006), veían la matemática como formación integral y necesaria para describir el universo y Platón (2006) cuya concepción de la resolución de problemas estuvo enfocado hacia la descripción geométrica en los razonamientos, así que el término heurística (Pearl,1983) surgió de estos dos últimos pensadores uniendo la lógica, con la filosofía y la psicología.

Así pues, en la antigüedad el uso de la resolución de problemas matemáticos estuvo más orientado al uso de los mejores recursos para estudios de astrología y de manejo de poder.

En la Edad Media, con el Renacimiento se abrió paso a la “matemática comercial” (Cruz, 2006. p. 17) en donde los estudiantes se convertían en auxiliares de comerciantes, pues en Europa a partir del siglo XV, se vio la necesidad de que los mercaderes estudiaran matemáticas para perfeccionar su labor, más adelante en el siglo XVII Leibniz creó una lógica deductiva del descubrimiento (Leibniz, 1986).

Durante la edad media, se le prestó mayor interés a la utilidad de la matemática para manejar todo el mercado que se venía con las nuevas ideas, también, se realizaron aportaciones como la estipulación de teorías que fueron retomadas, adoptadas y adaptadas para el mejoramiento de las mismas y la creación de otras que servirían más adelante para resolver problemas matemáticos.

En la época moderna, la sociedad se empezó a educar en teoría y en práctica, fundándose el racionalismo por René Descartes (1993), basado en la deducción de axiomas y teorías de forma intuitiva, cuyo primer aporte fueron grandes resultados para la resolución de problemas, ampliando para todos el hecho de que siguiendo esta concepción se puede llegar a resolver un problema matemático, y después, Euler con su idea de "potencialidad de los razonamientos por analogía" (Sigarreta, Rodríguez y Ruesga, 2006. p. 19) logró grandes aportes en el razonamiento matemático. Igualmente, otros matemáticos cuyo aporte a la resolución de problemas fue significante fueron Lagrange específicamente manejando las ecuaciones numéricas y Bolzano que retomó la heurística (Pearl, 1983) en gran parte de su trabajo.

La edad moderna fue un periodo en el que la resolución de problemas fue más contextual, pero al mismo tiempo teórico, en donde el ser humano y su personalidad frente a la sociedad evidenció conocimiento y aporte a nivel cultural y social.

Desde el siglo XX, los aportes se incrementaron y resultaron diferentes estrategias para la resolución de un problema matemático, tal es el caso de Poincaré (2006) con la creación de conceptos matemáticos, con sus cuatro fases: saturación, incubación, inspiración y verificación (Sigarreta, Rodríguez y Ruesga, 2006), también apareció Polya (1971) con su método de cuatro pasos: entender el problema, configurar un plan, ejecutar el plan y mirar hacia atrás (Polya, 1971). Schoenfeld (1992) por su parte, habló sobre el conocimiento de base, las estrategias específicas de resolución de problemas, los aspectos metacognitivos, los aspectos afectivos y sistemas de creencias y la comunidad donde se desarrolla la práctica (Schoenfeld, 1992).

En efecto, en la época contemporánea se pudo afirmar que se realizó una didáctica de la matemática en la medida que se crearon estrategias de enseñanza para resolver problemas aritméticos.

Con todo este proceso evolutivo que tuvo la resolución de problemas a través de la historia, las instituciones educativas han adoptado modelos, estrategias y documentos institucionales frente al trabajo de fomentar la lógica matemática de manera contextual (Schoenfeld, 1992).

1.1.2. Antecedente institucional. La Institución Educativa donde se hizo la investigación presenta por su situación geográfica y la procedencia de sus pobladores una caracterización especial, que la hace un poco inferior académicamente, frente a la generalidad de los establecimientos educativos del municipio. Consecuentemente sus requerimientos, necesidades y problemáticas obedecen a esa caracterización y por tanto merecen atención especial. Se pudo pensar que el problema que presenta es común a otras o todas las instituciones educativas, pero la tipología de la población es la que la hace particular.

Además, los componentes bajo los que se guió la formación de los chicos y chicas de la Institución no obedecieron al capricho de uno o dos docentes, ni al sometimiento de los mismos al rector o los coordinadores; fue el producto del trabajo en equipo y de los enormes esfuerzos de adoptar una estructura curricular ajustada a los requerimientos y necesidades de los estudiantes por alcanzar un desarrollo integral.

El fin de la educación básica primaria exige procesos de creación y recreación de conocimiento. Este propósito debe enmarcarse en procesos mentales que ayuden a dar explicaciones lógicas y correctas a los fenómenos cotidianos del saber. La edad mental de los estudiantes obliga a exigir la conceptualización y por tanto, los docentes no pueden estar validando respuestas alejadas de este proceso mental (Botero, 2014).

El ideal de la educación media en el territorio nacional es que los estudiantes al optar el título de bachiller accedan a la educación superior o al mercado laboral. Es en este propósito donde se requiere que los estudiantes del grado décimo y once una vez concluido su ciclo de básica sean lo bastante propositivos, para realizar ejecutorias aplicando el conocimiento en procura de soluciones a pequeñas, medianas o grandes problemáticas reales o creadas en procurar de obligar la creación y recreación del conocimiento desde el ensayo y el error, en la informática o en el ciberespacio.

Se requiere pues, que los promocionados ostenten un numeroso inventario de competencias que les posibilite posicionarse en su devenir; es ahí precisamente donde se encuentra la gran responsabilidad de la educación media de carácter técnico. Ella debe, de acuerdo al estudio de contexto, al diagnóstico o a la realidad situacional o a cualquiera de las connotaciones que se quiera dar; proporcionar una alternativa a los bachilleres, debe prepararlos a través de prácticas pedagógicas de campo, para que se enfrenten a la realidad que encontraran al momento de acceder al mercado laboral (Botero, 2014).

Dicha formación final, se entenderá como la apropiación de prácticas pertinentes, que se compadezcan de la situación, de las necesidades y de los requerimientos de los actores de contexto.

El plan de área de matemáticas en el apartado de metodología, hace énfasis sobre la importancia de la resolución de problemas en este contexto, una enseñanza basada en la resolución de problemas nos acerca a una matemática con sentido, donde el alumno se puede involucrar en la búsqueda de respuestas, donde lo que hace o aprende tiene una significación aportada por las situaciones que los nuevos conocimientos le permiten resolver, y que permite al alumno ingresar al universo matemático, no sólo conocer y aprender los conceptos fundamentales, sino también conocer y practicar las actividades propias de esta ciencia, su forma de actuar, de obtener nuevos resultados, de validarlos, y que fundamentalmente le permita involucrarse en el aprendizaje (Torres, Martínez y Aguilar, 2014).

1.1.3. Resolución de Problemas en Ambientes Virtuales de Aprendizaje. Los seres humanos desde la antigüedad han tratado de transmitir sus conocimientos de una generación a otra; de esta forma cuentan con las experiencias anteriores como base para las futuras. El mundo globalizado en el que se vive ha exigido al sector educativo un modelo de enseñanza-aprendizaje que se adapte a los constantes cambios, que sea capaz de transferir conocimientos, que encuentre significado a los saberes y que ayude en el desarrollo del proyecto de vida particular (Romero, 2011).

Hoy en el siglo XXI, existe una corriente educativa que ha tomado gran auge y que en muchos aspectos responde a los requerimientos del sector de la educación y a las necesidades endémicas de los niños, niñas, jóvenes y adolescentes. Así que, los procesos que han sufrido una evolución histórica desde mediados del siglo pasado han logrado crear ambientes virtuales de aprendizaje (Romero, 2011) que abarcan una gran cantidad de herramientas y técnicas, en donde algunos educadores con el ánimo de diversificar la forma de enseñar, buscando ser eficientes y eficaces en su trabajo, empezaron a ensayar con diversos instrumentos, dándole usos y significados a nivel educativo, tal como sucede con el uso del *software Geogebra* (Hohenwarter, 2008), que ha proporcionado mayor facilidad tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de las matemáticas.

En Colombia empezó desde 1948 cuando Monseñor Salcedo utilizó la radio para trasmitir conocimientos de cultura y educación religiosa (Muñoz, 2013), luego fue el cine y la televisión que brindaron la posibilidad de tener imágenes en movimiento, sonido y la capacidad de poder reflejar la cotidianidad, por ultimo ha nacido el video y la informática que es la herramienta actual; la cual permite crear nuevos entornos que faciliten a los usuarios realizar actividades de formación independientemente del tiempo y del espacio en el cual se encuentren situados, tanto el docente como el estudiante (Cabero, Llorente, Román, 2006).

A partir de la llegada de internet a las instituciones educativas, se ha apropiado de uso para el logro del aprendizaje de las diferentes asignaturas, es así, que las matemáticas han utilizado recursos tecnológicos para la enseñanza y aprendizaje de los contenidos curriculares, enfocado no solo en ir a la vanguardia del avance sino en conseguir un aprendizaje autónomo en el que el estudiante sienta mayor motivación y que el proceso enseñanza-aprendizaje cambie de estrategia.

A continuación, se presenta el planteamiento del problema, especificando el marco contextual y la definición del mismo, en grupos heterogéneos de una sociedad de bajos recursos, con problemáticas sociales, culturas y económicas y también académicas influyentes para no continuar con sus estudios ni aspirar a cargos bien remunerados, aspecto que afecta a su familia y a la comunidad de este sector.

1.2. Marco contextual.

La Institución Educativa en donde se hizo la investigación está conformada por una sede única, donde se atienden aproximadamente 1200 estudiantes en su modalidad formal, de la zona urbana, comprendida por los barrios: Jardín, Jardín Santander, Ciudadela Simón Bolívar, Villa del Sol, 02 de junio, entre otros. La institución está ubicada al noroeste de la ciudad de Ibagué del departamento del Tolima en Colombia, sector comprendido como comuna ocho del Barrio El Jardín Santander entre estratos socioeconómicos de nivel 1, 2 y 3.

Cuenta con algunos recursos que se utilizan para facilitar el aprendizaje como la sala AFT, proporcionada por el proyecto de la Fundación Telefónica en el año 2012, compuesto por 35 computadores portátiles hp mini 100e con sus respetivos cargadores, un computador portátil hp430 para el profesor, una pizarra electrónica *Smart Board* 680, un video proyector *infocus* modelo in2114, una UPS Tripplite SU3000XL, una cámara digital *EASYSHARE*, una videocámara Sony DCR-SR20, 4 *Acces Point* para interiores y exteriores *Levelone*, un *Router levelone* WBR-6003, un *switch levelone* FSW1650, cinco aulas dotadas de proyectores, video bean y sonido de auditorio, 30 equipos de computadores para educar (MinTIC, 2013) mobiliario y adecuación para su uso, además del acompañamiento constante a docentes.

El modelo pedagógico que esta Institución ha estructurado, se encuentra dentro de una concepción humanista-critico-social (Botero, 2014).

Para la presente investigación, se toma como muestra el 10% de la población estudiantil formal de la Institución Educativa en donde se hizo la investigación, constituida por tres grupos de primer grado de secundaria con 40 estudiantes cada uno.

Con respecto a su entorno familiar, social, económico y cultural, pertenecen en su mayoría a familias disfuncionales sin el rol paterno, materno o sin ambos, criados por los abuelos, tíos u hogares sustitutos, en la comuna ocho de la ciudad de Ibagué, existen algunos reinsertados, desplazados, expresidiarios, pandillas, consumidores de alucinógenos, expendedores, delincuencia, con estratos socio económicos entre los niveles 1 y 2 y con preferencias hacia la música popular y bailes modernos.

Los estudiantes de primer grado de secundaria, se acogen bajo la concepción humanista-critico-social (Botero, 2014) que propone la Institución, al adoptar hábitos y habilidades no solo en conocimiento sino en el crecimiento como individuos, en el reconocimiento y valores del sí mismo.

A continuación se define el problema, ubicándolo la pregunta de investigación, frente al tema de resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.

1.3. Planteamiento del problema

La presente investigación, debe considerar aspectos de contexto frente a la problemática de aprendizaje presentada en el grupo objeto de estudio, para dar respuesta al interrogante que se presenta frente a la necesidad observada o requerida, por medio de la definición del problema, iniciando con el marco contextual.

1.3.1. Definición del problema. Frente al gran reto de resolver problemas matemáticos que se presenten en la cotidianidad de quien los asume, surge la siguiente pregunta de investigación: ¿cómo el método de Polya puede constituirse en una estrategia que aumente el rendimiento académico de los estudiantes de primer grado de secundaria en la solución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas con el uso del *Geogebra*? pues dentro de las necesidades actuales se encuentra el uso de manera contextualizada de las matemáticas por medio de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC's).

Es necesario que el estudiante por medio de herramientas tecnológicas pueda hacer preguntas como: ¿por dónde inicio?, ¿cuáles son mis datos?, ¿qué busco teniendo internet?, ¿a quién pedirle ayuda?, ¿voy bien?, ¿en qué me equivoqué?, ¿qué pasaría si…? En fin, un sinnúmero de interrogantes que con ayuda del docente y de los ambientes virtuales de aprendizaje podrá resolver.

Para definir la dirección de esta investigación se definen los alcances u objetivos que se pretenden lograr con el desarrollo de la misma, a continuación se da a conocer tanto el objetivo general como los específicos que generan un paso a paso para lograr el primero antes mencionado, permitiendo tener clara la idea que se va abordar durante el desarrollo de la investigación.

1.4. Objetivos de la Investigación

En la búsqueda de encontrar la estrategia más adecuada en un contexto como la institución educativa en donde se hizo la presente investigación y de resolver la pregunta de investigación antes mencionada en la definición del problema se trazan los siguientes objetivos:

1.4.1. Objetivo general. Identificar si hay un aumento en el rendimiento académico al implementar el método de Polya con el uso del *software Geogebra* en la resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas con los números naturales en estudiantes de primer grado de secundaria.

Para conseguir el anterior objetivo se requiere cumplir con otros objetivos específicos mencionados a continuación, que con su logro, permitirá resolver el interrogante de la presente investigación.

1.4.2. Objetivos específicos. Con la dirección a conseguir el mayor alcance en esta investigación en la búsqueda de explorar métodos para el mejoramiento del rendimiento académico y por ende del aprendizaje y de la educación, se fijan los siguientes objetivos:

Fomentar el trabajo colaborativo para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.

Implementar el método de Polya para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.

Conocer el impacto en el rendimiento académico al usar *Geogebra* y el Método de Polya para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.

Una vez especificados los objetivos se plantea el supuesto de investigación, esperando que esto sea lo que suceda y teniendo en cuenta los aspectos considerados en las limitaciones y delimitación de la presente investigación, atendiendo a la necesidad del investigador y de la comunidad objeto de estudio.

1.5. Hipótesis de investigación

Mediante diferentes actividades que utilizaron el Método de Polya y *Geogebra* (Hohenwarter, 2008) para la solución de problemas aditivos y multiplicativos se espera comprobar la siguiente hipótesis:

El rendimiento académico para obtener la solución de problemas aditivos y multiplicativos con números naturales se incrementa si se aplica el método de Polya con el uso del *software Geogebra* (Hohenwarter, 2008), como método de solución.

El sentido de esta investigación, es presentar un estudio que ayuda a subsanar las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, que son ineludibles, justificación que se presenta a continuación.

1.6. Justificación

El aprendizaje de las matemáticas ya se ha evaluado en la aplicación del conocimiento para la solución de situaciones del contexto del aprendiz, pues la clase se convierte en una comunidad de discurso matemático (Lee, 2010) en donde el alumno reconozca su pensamiento numérico, métrico, espacial, aleatorio y variacional (MEN, 1998) conforme se presentan las relaciones convivenciales con sus compañeros, maestros y demás personas con quienes interactúan, ya que pueden existir diversidad de causas; estilos de aprendizaje, motivación, innovación, entre otras.

Por eso, esta investigación se centra en la implementación de un método de solución de problemas mediante el uso de *Geogebra* (Hohenwarter, 2008), para aprender a resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas con números naturales en estudiantes que cursan primer grado de educación de secundaria y se estudia el impacto de esta decisión en el aprendizaje, frente a los métodos de enseñanza tradicionales de este contenido matemático.

Se requiere conocer el método, si se analiza desde el punto de vista de Polya (1971), al buscar respuestas ante la dificultad de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, también se refiere al maestro como aquel, que ve desde la perspectiva del alumno, tratando de comprender lo que piensa, sin ayudarle mucho o demasiado poco para que logre su progreso, pues el docente debe hacer que el alumno se interese en resolver el problema (Polya, 1971) y como la sociedad de hoy está inmersa en las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC's) (Cabero, 2001), se ha observado el gran interés por el manejo de herramientas tecnológicas no solo para relacionarse entre sí, sino para divertirse y aprender, en donde las clases se vuelven más amenas, de mayor interacción y de aprendizaje.

Este estudio, pretende proporcionar otra estrategia para lograr resolver un problema en situaciones aditivas y multiplicativas, usando el método de cuatro pasos de Polya (1971) y *Geogebra* (Hohenwarter, 2008), este método se convierte en un paso a paso del cómo resolver un problema direccionando al estudiantes a tener un pensamiento más objetivo de la realidad y dando solución a problemas que se le pueden presentar en la cotidianidad, sea en la escuela, en su hogar o en el medio donde habita, al interactuar con otros.

De igual forma, la evaluación en el área de matemáticas, ha cambiado, y lo importante es enseñar al estudiante a pensar, de manera lógica utilizando sus saberes previos, proporcionándoles un saber a partir de otro y brindándoles confianza en sus habilidades y destrezas en su pensamiento o razonamiento. Cuando el alumno convive con el constante uso de los números, aprende a interactuar con ellos, así que es importante que consiga analizar una situación de su contexto, si requiere de solución, pues así no conozca su respuesta en el momento, pueda utilizar métodos o recursos que logren conseguir una respuesta acertada (Díaz y Poblete, 2001).

Atendiendo a conseguir el objetivo trazado, hay que tener en cuenta la existencia de limitaciones, para el desarrollo del proceso de investigación, así como la delimitación para evitar porcentajes de error.

1.7. Delimitaciones y limitaciones de la Investigación

Se realiza la prueba con 120 estudiantes en los tres grupos de primer grado de secundaria de la Institución Educativa en donde se hizo la presente investigación, comprendidos entre 11 y 12 años de edad, con una intensidad horaria de cuatro horas semanales en el área de matemáticas, elegido por ser los grupos a los cuales tiene acceso a orientar la investigadora y en el cual se desarrolla el contenido de problemas aditivos y multiplicativos (Torres, Martínez y Aguilar, 2014), en el que se ha presentado problemas en dicho tema, se cuenta para el desarrollo de esta investigación con la disponibilidad de las horas necesarias, cuatro horas por semana, pues la docente es autónoma de la asignatura en cuanto a disponibilidad, se pretende utilizar dos semanas para el desarrollo de la investigación con los estudiantes.

Las limitaciones que presenta esta investigación están enmarcadas por aspectos tecnológicos y de contenido al presentarse pérdida constante del flujo electrónico, equipos computacionales lentos o dañados, la conexión de internet inalámbrico es muy baja para las necesidades institucionales, pues la Institución cuenta con aproximadamente 100 computadores para el uso de estudiantes, docentes y directivos, a parte de los personales y de seis aulas con proyectores y *video beam* y otro limitante es la del contenido, pues solo se maneja los problemas que involucren adición y multiplicación con cifras de máximo 5 dígitos.

En este capítulo, se deja asentado en esta investigación el planteamiento del problema, los alcances, la hipótesis que se investigó para la obtención de buenos resultados frente a la implementación del método de Polya (1971) y de *Geogebra* (Hohenwarter, 2008). Así también se estableció sus limitantes, ya que la institución educativa cuenta con muy buenos recursos, pero sin estar exento de cualquier falla de internet o de disponibilidad. La investigación estudió problemas aditivos y multiplicativos, entendiendo que el objetivo es que tengan la habilidad de resolver problemas en las que se vean involucradas estas dos operaciones.

El sustento teórico que tiene la presente investigación, se encuentra en el siguiente capítulo, en donde se realiza la revisión literaria de cada uno de los aspectos a tratar durante la investigación.

Capítulo 2. Marco teórico

En esta sección de la tesis se realiza una revisión literaria de la propuesta de diferentes autores frente a la resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, así mismo posturas frente al *software Geogebra* (Hohenwarter, 2008) que ofrece internet en el aula de matemáticas para la resolución de problemas y finalmente, mostrar diez investigaciones fundamentalmente relacionadas con el tema de la implementación de este método y de una herramienta tecnológica para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos.

En esta contextualización teórica se visualiza el trabajo de selección de *Geogebra* (Hohenwarter, 2008) que permite resolver un problema matemático para situaciones aditivas y multiplicativas, promoviendo la utilización de conocimientos previos, el análisis de problemas similares, el uso de calculadoras graficadoras u operadores matemáticos, el trabajo colaborativo, la retroalimentación, la evaluación y la exploración durante la navegación en internet, sin ser imprescindible la orientación del docente; que en su rol de tutor va a tener un acompañamiento menos presencial pero más estrecho, en la medida que orienta procesos de enseñanza para obtener resultados en el aprendizaje y alumnos competentes en el área de matemáticas, con el uso educativo de las herramientas de informática.

Desde la problemática de la enseñanza y aprendizaje de esta área surge la estrategia de implementar las herramientas tecnológicas, y sacar provecho de todos los recursos que se va adquiriendo día tras día, gracias a políticas de calidad en tecnología y en educación.

A continuación se presenta los aspectos teóricos que enmarcan la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, así como los diferentes métodos o estrategias utilizadas para tal fin.

2.1. Métodos para la resolución de problemas matemáticos

El trabajo del docente de matemáticas, va más allá de mostrar la existencia de diferentes conjuntos numéricos y las relaciones entre ellos, porque el aprendizaje de esta área se evidencia en la aplicabilidad de la misma, cuando el maestro se da cuenta del bajo rendimiento académico y observa que estos estudiantes pueden resolver problemas propios de su contexto en las que su habilidad matemática se evidencia sin que ellos mismos lo perciban, es lo que lleva a afirmar "que presentar dificultades en una asignatura no quiere decir que se tengan Dificultades Específicas de Aprendizaje" por lo que pueden existir diferentes causas, sin embargo no hay que menospreciar la existencia de algún déficit cognitivo o discalculia por una anormalidad neuroevolutiva (Blanco, 2009, p.17).

De igual forma, la identificación del problema de aprendizaje está dada a su vez por la identificación del estilo de aprendizaje, sea activo, reflexivo, teórico o pragmático (Adán, 2004). Aspecto importante frente a la enseñanza de las matemáticas, es que los primeros años de colegio son claves para la aprehensión de la misma, no solo para detectar problemas de aprendizaje sino para iniciar la motivación, incentivando la curiosidad, indagación y demás estímulos por el uso de la lógica matemática; y si cae en el error, en matemáticas es un concepto importante para que el aprendiz llegue a resultados algorítmicos, por eso hay que tratar el error como "organizador didáctico en el aprendizaje de la Matemática" (Engler, 2004, p. 23)

Cuando el estudiante ha sido parte de la población con fracaso escolar puede ser producto de las creencias o emociones que pudieron haberse presentado durante su estancia en el colegio, determinados por un sinnúmero de factores afectivos (Gómez, 2005).

La dificultad del proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, van de la mano con teorías del aprendizaje, los cuales brindan fundamentos para la explicación de la posibles causas de este hecho, de igual forma, es preciso analizar las explicaciones de George Polya (1971) brinda frente al proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas como una valiosa ayuda para la mejor comprensión del lenguaje matemático, en vista de las dificultades que han tenido y tienen los estudiantes frente a la resolución de problemas.

Las siguientes posturas, dan un significado al análisis que se debe hacer frente a la enseñanza y por ende, al aprendizaje del cómo resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, así mismo, a las estrategias que han surgido para conseguir este objetivo, teniendo en cuenta que la sociedad ha emergido gracias a la innovación y creación de nuevas herramientas en la búsqueda de la calidad de vida, pues desde que la educación formal se preocupó por impartir conocimiento, se fueron adhiriendo procesos formativos con aplicaciones al contexto y con miras al crecimiento no solo profesional sino también al personal (Ramírez, 2012).

El primer método para resolver un problema que se va a analizar es el propuesto por Piaget, pues el tema de resolución de problemas matemáticos, también se ha abordado desde lo psicológico, estudio que realizó Jean Piaget (1964), con referencia a las etapas de maduración mental del individuo, que a continuación se expone.

2.1.1. Método de Piaget. En la etapa que considera este autor como adolescencia, en la que el individuo construye sistemas y tiene un interés por los problemas inactuales que no pertenecen a sus propias vidas, elaborando teorías abstractas también se pueden resolver problemas aritméticos sin necesidad de objetos tangibles, a partir de los 12 años, ya son capaces de entender un lenguaje en palabras o símbolos matemáticos, con un pensamiento formal, lo que llama Piaget (1964) hipotético-deductivo, pues tiene la habilidad de deducir las conclusiones que se extraen de las hipótesis y no solo de una observación.

El pensamiento formal (Piaget, 1964), incluye reflexionar sobre las operaciones aritméticas y sustituirlos por simples proposiciones que son la traducción abstracta de las operaciones concretas desarrolladas en la infancia, por lo que "el yo es lo suficientemente fuerte como para reconstruir el universo y lo suficientemente grande para incorporárselo" (Piaget, 1964, p. 87).

Piaget (1964) demostró que la capacidad cognitiva y la inteligencia estaba ligada al contexto social y física del individuo, cuyas capacidades también vinculaban a los factores genéticos y que durante esta etapa se era capaz de considerar las posibles variables en un problema aritmético, nombrada como estadio de las operaciones formales.

El nivel del pensamiento formal que plantea Piaget, hace alusión a la posibilidad que tiene el sujeto de trabajar en resolución de problemas aplicando modelos de razonamiento hipotético-deductivo, incorporando hipótesis como esquema proporcionada con la ley lógica de la necesidad, realizando una conversión entre lo real y lo posible, de acuerdo a los criterios explicativos de la acomodación y la asimilación, orientados al desarrollo del conocimiento como proceso de adaptación (García, 1994).

Dentro de las destrezas lógicas que plantea Piaget, se encuentra: la implicación, observando los pasos que el niño deba hacer para obtener un resultado esperado; la reversibilidad, como un resultado de un proceso que el niño quiere realizar; la generalización, abstrayendo una proposición general o generación de hipótesis; la inclusión, teniendo en cuenta conocimientos anteriores para adquirir nuevos; y la depuración, perfeccionando cada detalle (García, 1994).

A continuación se presenta el método de Vygotsky, para resolver un problema y los criterios que lo llevaron a tener la concepción dela psicología en educación.

2.1.2. Método de Vygotsky. Aunque se ha tratado de investigar lo que puede realizar o resolver por sí mismo el estudiante, Vygotsky (1989) plantea la resolución de cualquier situación problema con ayuda de otro quien posee una capacidad en un nivel de desarrollo más alto, lo que él llama: Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) (1989) rescatando el nivel de desarrollo real del niño determinado por la resolución de problemas bajo la guía del adulto o en colaboración con iguales más capaces" (Vygotsky, 1989).

Así que si un estudiante logra resolver un problema en situaciones aditivas y multiplicativas con ayuda de alguien, más adelante podrá ser capaz de resolverlo por sí mismo, teniendo como base lo que hizo en la ZDP, no tratándose de imitar sino de generalizar al interiorizar procesos cognitivos para el logro independiente.

Vygotsky (1989) no solo se destacó por el concepto de ZDP, sino que sus aportes hacia el desarrollo cognitivo estaban ligados con lo ofrecido por las herramientas psicológicas que se encuentran en el entorno del individuo, refiriéndose a las habilidades que ya trae el estudiante y lo que puede aprender con la orientación de alguien más competente.

Así que, aunque la psicología de la educación que planteó Vygotsky (1989) es amplia frente a el desarrollo cognitivo humano, esta investigación toma referencia de la Zona de Desarrollo próximo para que el estudiante sea capaz de resolver un problema en situaciones aditivas y multiplicativas con ayuda, para que lo interiorice y lo pueda resolver más delante de manera autónoma.

A partir del análisis de las posturas de Pearl (1983), Polya (1971), Piaget (1964) y Vygotsky (1989) frente a la resolución de problemas matemáticos, la presente investigación utiliza el método de Polya para resolver este tipo de problemas, por ser tan específico y metódico al manejar los cuatro pasos, sin embargo es preciso rescatar algunas ideas del método heurístico (Pearl, 1983) para lograr un aprendizaje independiente, tener en cuenta que los estudiantes de primer grado de secundaria están en el nivel de operaciones formales que plantea Piaget (1964), que se necesita la Zona de Desarrollo Próximo (Vygotsky, 1989) para trabajar de manera colaborativa.

En cuanto a la teoría sociocultural de Vygotsky (1989), se enfoca en la interacción entre el individuo y el entorno social, estableciendo que el niño interactúa con el ambiente y que para entender su desarrollo cognoscitivo se debe tener en cuenta el proceso social, histórico y político que lo está formando, de allí el trabajo con problema contextuales, en el que el niño pueda resolver una situación que se le presente en su entorno a partir de la academia (Vygotsky, 1989).

En la siguiente sección, se habla del aula de clase como Ambiente Virtual de Aprendizaje (Romero, 2011) para resolver problemas, en donde se analiza, la incursión de la tecnología en el ámbito escolar, el uso del internet en matemáticas y los recursos educativos abiertos como *Geogebra* utilizados en matemáticas.

2.1.3. Método de Polya. Polya (1971) plantea el hecho de resolver problemas como un proceso metódico y procedimental en el que el alumno utiliza su razonamiento en la búsqueda de una solución a una situación problémica, concibiendo un plan de acción para llegar al resultado correcto, es así que logra crear una estrategia para describir cómo debería enseñarse y aprender la manera de resolver problemas, esta teoría heurística también se relaciona con la Metacognición (Rodríguez, 2005), enseñando a pensar el pensar, en donde se pone a prueba la curiosidad dando soluciones por los propios medios del aprendiz, obteniendo el encanto del descubrimiento y el disfrute del triunfo para conseguir finalmente que el alumno sienta placer por las matemáticas al adquirir un sentido para él, en su contexto.

Polya (1971), recibió numerosas exaltaciones por su trabajo en la enseñanza de las matemáticas y su importante obra investigadora, frases como: sólo los grandes descubrimientos permiten resolver los grandes problemas, hay, en la solución de todo problema, un poco de descubrimiento, llevan a pensar que el ser humano se motiva en aplicar el conocimiento si en verdad se ve interesado en él.

Es necesario resaltar que la teoría plasmada en el trabajo de Polya (1971), ha sido y será retomada en muchos estudios concernientes a la resolución de problemas, a nivel internacional y no solo en el área de las matemáticas, sino en física, química, sociales, entre otras, sin embargo hay muchos aspectos que no han sido sistematizados y por ende tampoco son aún científicas, aunque este autor, utiliza bastantes recursos científicos en la colección de especímenes para luego analizar sus conexiones y relaciones entre ellas. Así, que se basó en los avances del método heurístico, en la sicología genética de Piaget (1964), en la sicología cognitiva de Ausubel (1983), pero sobre todo en la sicología culturista de Vygotsky (1989).

Polya (1971) advierte que para entender una teoría se debe conocer cómo fue descubierta, de ahí su concepción de descubrimiento, dentro de sus 250 documentos matemáticos y 3 libros se promueve un acercamiento al conocimiento de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, específicamente de la resolución de problemas, dejando reflexiones al docente de matemáticas como: interés, conocimiento, lectura de las caras de los estudiantes, descubrimiento por sí mismo, actitudes mentales, hábito del trabajo metódico, conjeturar, comprobar, rasgos del problema para su solución.

También se presente la situación por parte del estudiante al verse enfrentado a un problema matemático de sugerirse, preguntas como: ¿entiende lo que dice el problema?, ¿Cuáles son los datos?, ¿Sabes a qué quieres llegar?, ¿ya habías resuelto uno parecido?, ¿cuál es la pregunta?, ¿todos los datos son relevantes? entre otras preguntas que se hará el estudiante conforme se vaya ubicando en cada uno de los cuatro pasos del método de resolución de problemas de Polya (1971), que a continuación se especifican.

2.1.3.1. Método de cuatro pasos de Polya. Polya (1971), propone metódicamente cuatro pasos para resolver un problema de acuerdo a la necesidad del alumno y del docente de adquirir un trabajo personal del educando, en donde el maestro debe ayudarle pero no demasiado, aunque es cierto que resolver un problema también depende del estadio mental del individuo porque un problema para un niño entre 5 y 6 años, es un ejercicio aritmético para un adolescente entre 12 y 25 años de edad, la concepción de esta propuesta está basada en el pensamiento de autores como Piaget (1964) que consideran la importancia de la estructura física del cerebro humano, dentro de unas condiciones médicamente normales.

A continuación, se presenta una breve descripción de cada paso del método de resolución de problemas de George Polya (1971) que inicia con entender el problema, luego configurar un plan, ejecutarlo y mirar hacia atrás.

Entender el problema. Polya (1971) se refiere a este paso como la familiarización con el problema, primero se inicia con el análisis del enunciado tratando de visualizar el problema y comprenderlo en su totalidad no solo con los datos que nos arroja o a qué se quiere llegar, sino definiendo para qué le serviría resolverlo. Los estudiantes ya habiendo adquirido habilidades en las operaciones algorítmicas, abre paso a la interpretación del problema la cual se convierte en un punto crucial para resolverlo, pues si se comete errores en este paso, es seguro que los demás no funcionarán.

El enunciado consta de datos con información relevante, algunas veces datos con información irrelevante y mínimo una pregunta, de tal manera que surgen las siguientes preguntas siendo necesario tener clara su respuesta: ¿por dónde debo empezar?, ¿qué puedo hacer?, ¿qué gano haciendo esto?, ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos?, ¿qué datos son relevantes y cuáles son los irrelevantes?, ¿cuál es la condición?, ¿ya he resuelto uno parecido?

El profesor que desee desarrollar en sus alumnos la aptitud para resolver problemas debe hacerles interesarse en ellos y darles el mayor número posible de ocasiones de imitación y práctica. “No se va a contestar una pregunta que no se comprenda ni trabajar para un fin que no se desea” (Polya, 1971 p. 28), pero más allá de comprender el problema también de querer resolverlo y al querer extraer la información del enunciado, resultan las anteriores preguntas.

Configurar un plan. Se establece un plan, teniendo la seguridad de qué cálculos, razonamientos o construcciones se deben efectuar para determinar la incógnita, en este paso se puede establecer diferentes errores hasta llegar al adecuado y la labor del docente es guiarlo para ello, pero es imprescindible tener conocimientos previos en matemáticas que son los instrumentos básico para la conformación del plan, las siguientes preguntas, las puede formular principalmente el estudiante por sí solo y el docente para la elaboración del plan: ¿conoces algún problema relacionado con éste?, ¿puedes hacer uso del problema relacionado?, ¿puede enunciarse el problema de forma diferente?

Los recuerdos de otros problemas ya resueltos pueden ser punto de partida para poder resolver el nuevo problema o también encontrar problemas similares resueltos como punto de partida para realizar comparaciones, conclusiones y generalizaciones. El primer interrogante para este paso es ¿Cuál de las siguientes estrategias usar? (Polya, 1971): Ensayo y error, usar una variable, buscar un patrón, hacer una lista, resolver un problema similar más simple, hacer una figura, hacer un diagrama, usar razonamiento directo, usar razonamiento indirecto, usar las propiedades de los números, resolver un problema equivalente, trabajar hacia atrás, usar casos, resolver una ecuación, buscar una fórmula, usar un modelo, usar análisis dimensional, identificar sub- metas, usar coordenadas o usar simetría.

Aunque pueden existir otras estrategias, estas son las recomendadas para resolver problemas matemáticos (Polya, 1971) debido a su uso a través de la historia por matemáticos o estudiosos del área.

Después de escoger la estrategia, también pueden surgir estas preguntas: ¿ha empleado todos los datos?, ¿ha hecho uso de toda la condición?, ¿podría introducir algún tipo auxiliar que les permitiese emplearlo? (Polya, 1971).

Es necesario que se defina como mínimo dos planes para determinar cuál de ellos lleva a la respuesta correcta, o para tener certeza que en todos funciona, lo que permitirá hacer una mejor verificación.

Ejecutar el plan. Es colocar en funcionamiento el plan del segundo paso, con la implementación conjunta de los conocimientos previos, buenos hábitos de pensamiento y concentración. Lo que hay que hacer en este punto es concentrarse en los detalles que no estaban escritos en el plan, porque si llegara a faltar o ser olvidado algo se caería en el error, aspecto que no sucederá si el mismo estudiante ha creado su plan, pues si es impuesto por el maestro no será tan significativo como ser construido por él mismo, es importante que el maestro recalque la veracidad de cada paso preguntando su demostración para tener la certeza que le está quedando bien, lo importante es que el alumno esté seguro de cada paso, resultando ser el proceso más interesante que el mismo resultado.

Para este paso del método de Polya (1971) es necesario tener en cuenta dos aspectos: ¿para qué hacemos lo que hacemos? y si un camino no lleva a ninguna salida hay que dejarlo e iniciar otro.

Los aspectos a considerar en esta etapa son: la implementación de la(s) estrategia(s) para solucionar completamente el problema o redireccionarlo, conceder un tiempo razonable para la solución del problema (si no se logra en un tiempo estipulado hay que suspender por el momento) y no tener miedo de volver a empezar porque esto no es fracaso si no una prueba más para llegar al éxito.

Mirar hacia atrás. Polya (1971) afirma que ningún problema puede considerarse completamente terminado (Polya, 1971. p.35) que siempre queda algo pendiente y siempre se puede mejorar la solución o en su defecto su comprensión.

Hay que tener presente que siempre pueden haber errores más aún cuando el proceso ha sido largo y complejo, por eso es recomendable verificar y entonces surgen otras incógnitas que lo llevan más allá de su respuesta: ¿es tu solución correcta?, ¿existe una solución más sencilla o diferente?, ¿puedes generalizar tu solución?, ¿cuál era la información importante?, ¿presentaba contradicciones o redundancias?

Se puede hace verificación del problema utilizando herramientas tecnológicas como *software* y calculadoras o simplemente rectificando por otro medio la respuesta sin olvidar que la resolución de un problema es una aventura y entre más aventuras se tenga, mejor será la capacidad de resolución de problemas.

Así, se crea una estrategia de tipo metódico que organiza la mente de manera lógica y procedimental hacia la resolución de un problema matemático, dejando a un lado las operaciones algorítmicas para crear la motivación del cómo resolver estas situaciones.

Por otra parte, e método holístico que a continuación se expone, también aporta una parte importante en la resolución de un problema, teniendo en cuento el todo y sus partes.

2.1.4. Método heurístico. La Heurística (Pearl, 1983) es el conjunto de métodos para establecer cual, promete ser más efectivo a la hora de lograr alguna meta, entre una serie de diversas alternativas de acción, teniendo en cuenta que estos puedan ser diferenciados entre opciones favorables o no favorables, atendiendo a un conjunto de convicciones, sentimientos e ideas que desarrollan de manera integral la formación del individuo con la relación cognitiva y afectiva (Pearl, 1983), centrándose en el desarrollo de la persona para que dé lo mejor de sí, a partir de sus experiencias y vivencias para alcanzar sus metas, cuyo objetivo es preparar al alumno para vivir una vida productiva y plena, poniendo a prueba sus conocimientos y habilidades adquiridas durante el transcurso de su vida.

Además, se centra en el desarrollo intelectual, emocional, social, físico, creativo, hasta espiritual en la que el alumno se ve inmerso en su comunidad, capacitando a los aprendices en mirar de forma crítica los diferentes contextos culturales, religiosos, morales y políticos a los cuales pertenece (Universidad Autónoma Chapingo, 1995).

Autores como Descartes (1993) y Leibniz (1986), dan nacimiento a la ciencia del descubrimiento, presentando relaciones entre los diversos objetos que constituyen un problema, familiarizados con casi todas las ramas del saber de la época, permeando ciencias como la filosofía y la matemática y creando heurísticas para el desarrollo de sus trabajos.

La educación holística (Forbes, 2003) amplia todo el sistema educativo fomentando la responsabilidad, descargando un poco la obligación del maestro por enseñar, para que este enseñe a aprender de manera autónoma, que el individuo esté inmerso con las costumbres y creencias sociales que le rodea proporcionando elementos para que se desenvuelva en el mundo real.

En cuanto al estudiante educado bajo esta concepción, se puede decir que actúa con madurez, aprendizaje independiente, flexibilidad, creatividad, relaciones interpersonales, participación activa, toma de decisiones e interdisciplinariedad. Además, esta educación no solo va enfocada al docente y al estudiante, también al padre de familia y a la misma sociedad estableciendo entes transformadores y líderes para el progreso, porque son los padres quienes deciden abrir espacios para que sus hijos reciban la educación holística (Forbes, 2003).

El contexto en el cual se desarrolla la heurística (Pearl, 1983) es la resolución de problemas debido a la capacidad inductiva, deductiva, de generalización y particularización, en el cual se enseña a cómo hacer para pensar, esto para obtener un aprendizaje constructivo y por ende significativo (Ausubel, 1983).

Polya (1971) proporciona procedimientos heurísticos para resolver problemas en matemáticas, estos son: dibujar un problema; utilizando el método de modelización, uso del razonamiento hacia atrás; tomando la posible solución, deduciendo paso a paso su proceso y tratar un problema general; teniendo como referencia un problema más concreto.

De lo anterior, surgieron como métodos heurísticos (Pearl, 1983) las estrategias generales de resolución de problemas matemáticos, basados en los conocimientos previos con problemas similares, lo que Polya (1971) considera como pasos para resolver un problema, creando la capacidad de resolver cualquier tipo de problema matemático contextual al cual se vea involucrado el estudiante y que tenga la opción de dar más importancia al proceso que al mismo resultado.

En la siguiente sección, se analiza una ayuda tecnológica para resolver un problema, específicamente el *software* libre *Geogebra*, como recurso educativo abierto, en cuanto a sus ventajas de mejoramiento en el aprendizaje y de motivación en el aula.

2.2. Resolución de problemas matemáticos utilizando *Geogebra*.

De acuerdo a la implementación de la tecnología en las aulas de clase, se toman a consideración los siguientes aspectos, relevantes para el uso del *software Geogebra* en el aprendizaje de la resolución de problemas aditivos y multiplicativos.

2.2.1. Influencia de la Tecnología en el contexto escolar. Con la expansión tecnológica que ha tenido la sociedad, han surgido diferentes inquietudes frente a su uso en diversas dependencias, una de ellas, es la educación sobre todo en la búsqueda de mejorar la calidad educativa (Barrera, Maldonado, Rodríguez, 2012), como herramientas para incrementar los resultados del desempeño escolar (Palacios, Andrade, 2007).

Ya que las matemáticas son una asignatura que requiere de conocimientos previos en los pensamientos numéricos, variacional, métrico, aleatorio y espacial (MEN, 1998), las habilidades se van adquiriendo según su interacción con los demás de forma oral, escrita o gestual a través de lo que brinda hoy en día la tecnología llamado actualmente

Tecnologías de Información y Comunicación (Cabero, 2001), porque el aprendizaje requiere de estrategias en donde el estudiante se vea enfrentado a sus fortalezas y debilidades para llegar a un aprendizaje de manera autónoma (Moreno, Martínez, 2007).

La inclusión digital consiguió motivar a los estudiantes (Dussel, I. Quevedo, L. 2010), lo cual lleva implícito el hecho de mejorar el desempeño académico a nivel general a través de interacciones con sus pares, sus maestros y otros autores de manera autónoma, procedimental y creando mentes críticas y creativas frente a los medios que ofrece la tecnología (Chomski, 2012).

"El éxito en la implementación de una política de TIC será dependiente sobre el reconocimiento de la importancia de la aplicación sectorial a la educación e implementación sostenible" (Olarere, 2005, p. 320), es por ello que si los líderes políticos apuestan al uso de la tecnología en el entorno del ser humano y vela por su buen uso, se apostará también al mejoramiento de la calidad de vida.

Ahora, a nivel específico se analizará la forma en que se relacionan el internet con la educación, en la búsqueda de mejorar el proceso de enseñanza- aprendizaje en el ámbito escolar.

2.2.1.1. *Uso de tecnología en matemáticas*. Internet no es el único avance tecnológico de la humanidad ya que otras herramientas se utilizan, como la calculadora que es un recurso para dinamizar el aprendizaje de las matemáticas (Viñas, Navarro y Ortega, 2004); el computador personal con la aplicaciones que tiene dentro de él; la pizarra digital como proyector e interactividad del estudiante con ella; el sistema telemático ampliando la posibilidad de interconexión; el libro electrónico proporcionando de manera virtual contenidos matemáticos y otros recursos como la televisión, los videos, los equipos de sonido, los celulares, entre otros que promueven el aprendizaje de las matemáticas (Muñoz, 2012).

El internet además de ofrecerle a un profesor de matemáticas los elementos antes mencionados; correo electrónico, blogs, videos, tutoriales, plataformas y mucha información (Moreno, Martínez, 2007), también existen innumerables recursos propios del área, pero antes de eso se debe tener claras las diferentes percepciones que se tiene de las matemáticas como: razonamiento, resolución de problemas y comunicación (MEN, 1998), aspectos que permiten entender el mundo que nos rodea y transformarlo de tal manera que usen el internet como herramienta para el autoaprendizaje (Moreno, Martínez, 2007).

Para hacer buen uso de la tecnología en matemáticas se debe (Abánades, Botana y Tabera, 2009):

- Saber buscar información: gracias a la búsqueda avanzada se puede disminuir considerablemente la cantidad de páginas que contiene lo que se requiere, además e debe saber seleccionar la información primaria para finalmente, estructurarla y procesarla.
- Utilizar las herramientas para la comunicación presencial o no, fuera del aula: la idea es que el maestro brinde tutorías virtuales ante cualquier inquietud del estudiante, enviando periódicamente mensajes para que el alumno se sienta acompañado.
- Creación y diseño de sitios virtuales: pueden ser páginas web, blogs (Rodríguez, Leiva, Serrano, 2007) o plataformas, espacio de interacción, donde se reciba y

envía información, de acuerdo al plan de estudios, señalado en el currículo de la institución.

- Trabajar colectivamente: tanto el estudiante como el docente pueden desarrollar sus tareas o proyectos de manera conjunta con sus pares o maestros, permitiendo que las opiniones de los demás ayude a construir de manera más completa la meta trazada.

Existen direcciones en la web (Rodríguez, 2007) que ofrecen una buena cantidad de recursos para el desarrollo de una clase de matemáticas con diversos temas de geometría, algebra, aritmética, lógica, resolución de problemas, entre otros y así se pueden encontrar muchas más solo indicando en el buscador lo requerido, lo que se quiere fomentar es que el docente haga uso de los espacio virtuales que ofrece la internet para captar la atención de los estudiantes y que se sientan cómodos en el aprendizaje de las matemáticas.

Las habilidades numéricas utilizadas en la vida cotidiana y el uso de las matemáticas que le puede dar un estudiante en su entorno, es lo que permite que se le dé significancia a los trabajos en el aula, si un estudiante utiliza la matemática para ganar en juegos de video, está contextualizando su aprendizaje, aplicando cálculos matemáticos en su cotidianidad, de tal forma, que si internet está dispuesto a dar instrumentos para que el usuario aplique sus conocimientos y los contextualice, el desarrollo del pensamiento matemático se va a ver evidenciado cuando lo coloque en práctica (Norris, 2012).

El aula de clase, se puede considerar con uno de los espacios en donde las herramientas que ofrece internet pueden ser utilizadas como a continuación se especifica.

2.2.1.2. *Internet en el aula de matemáticas*. Internet se considera una de las herramientas didácticas en el aula de matemáticas que son el lenguaje con el cual está escrita la naturaleza por el cual nos permite entender el mundo que nos rodea y cambiarlo (Galileo, 1623), es un legado de conocimiento que se debe preservar e incrementar, razón de ser del individuo que utiliza internet como medio facilitador de su propio aprendizaje.

Todos los momentos de la clase se pueden manejar desde los recursos que puede brindar la red, por medio de una secuencia didáctica (Lozano y Herrera, 2013), esto es:

- Introducción al tema: Por medio de la exploración, visualización de videos, tutoriales, imágenes, lecturas virtuales que muestren por primera vez la temática, permitiendo relucir los conocimientos previos del estudiante.

- Práctica: Por medio de ejercicios interactivos, internet ofrece la posibilidad de realizar diferentes actividades de completar, unir con una línea, construir para el caso fe geometría, entre otros.

- Trabajo colaborativo (Alfageme, 2005): Se resuelve un taller, teniendo comunicación presencial o no, con sus pares y entregando un producto final por correo electrónico o plataforma educativa.

- Tareas: Para el diseño de tareas se debe tener en cuenta los contenidos trabajados, el medio a emplear, la actividad a desarrollar y la reflexión de su desarrollo, brindando el espacio para que el estudiante pregunte en caso tal que no entienda algo.

- Evaluación: Diferentes páginas ofrecen cuestionarios con diversos tipos de preguntas, definiendo la cantidad el nivel y el tema deseado, para finalmente obtener el puntaje final, para la valoración del desempeño académico que registrará el docente.

- Retroalimentación: El estudiante recibe retroalimentación de sus talleres y evaluación por correo electrónico o plataforma educativa.

El tema de la contextualización, es un aspecto que se facilita aún más cuando se tiene internet, el estudiante puede interpretar información de datos estadísticos, diagramas o textos planos para solucionar diferente problemas planteados por el docente, pues diariamente los periódicos o canales de televisión publican las noticias que muestran en la televisión, siendo más fácil estar enterados de lo sucedido en la actualidad, con cifras o datos verídicos.

En cuanto a los ordenadores e internet, no hay duda que existe un gran impacto en la sociedad y más aún en la educación, pero tienes sus ventajas y sus desventajas, Flores y sus colaboradores (2011), hacen mención a esto:

Ventajas. El tiempo es utilizado para la reflexión profunda de algo ya dado y no se dedica a realizar cálculos que poco llegan a la parte propositiva de la asignatura. Se puede experimentar, modificando condiciones iniciales, elaborando y comprobando hipótesis planteadas. El docente obtiene mayores datos, e información del contenido temático que quiere desarrollar. Los recursos son más llamativos, porque se utilizan, videos, imágenes o actividades interactivas. Las herramientas tecnológicas no son extrañas a los estudiantes y los motiva. Amplía la visión contextualizada por región, departamento, nación y mundo.

Desventajas. Depositar una total confianza en las máquinas, perdiendo el sentido crítico y de comprensión. Las inquietudes que le resulten al docente frente algún tema, no serán resueltas por el ordenador. Usar el ordenador en los talleres y no dejarlo para la evaluación. Reestructurar el plan de estudios de acuerdo a la época y los contenidos, para no estar desactualizado. Los estudiantes se quedan en el manejo del ordenador y no se cumple el objetivo pedagógico, convirtiéndose en una clase de informática. Poco compromiso de los docentes a capacitarse y prepararse para incluir las herramientas tecnológicas en el aula.

Se puede decir que la inclusión de internet en el aula de matemáticas, es un proceso de reflexión, sobre algo ya dado en el cual se puede llegar a la experimentación partiendo del planteamiento de una hipótesis para realizar una generalización, por medio de la comprobación (Florez y otros, 2011).

Finalmente, "el éxito de la tecnología depende de la planificación que lleve a cabo el profesor" (Florez y otros, 2011. p 134). Aunque los estudiantes piense que implementar una herramienta tecnológica es divertido y fuera de la rutinario, también puede ser contraproducente acostumbrarlos a una sola herramienta, es necesario estar en constante innovación, aprovechando todos los recursos que ofrece internet, no solo los multimedia si no talleres, investigaciones, libros, entre otros.

2.2.2. *Software Geogebra*. Es un *software* libre (Abánades, Botana, Tabera, 2009), de matemática para educación en todos sus niveles, disponible en múltiples plataformas, aunque inicialmente fue un *software* para la utilización de procesadores geométricos , desde una perspectiva dinámica y de gran auge, en especial en la educación universitaria, se han ido vinculando otras ramas de las matemáticas como el álgebra, la estadística o el cálculo, utilizando conceptos básicos de la geometría para llegar a todos los pensamiento del área fundamental.

Reúne dinámicamente, aritmética, geometría, álgebra y cálculo e incluso recursos de probabilidad y estadística. Ofrece representaciones diversas de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraica general y simbólica, estadísticas y de organización en tablas, planillas y hojas de datos dinámicamente vinculadas. Ha recibido numerosas distinciones y ha sido galardonado en Europa y USA en organizaciones y foros de *software* educativo. En su página oficial, está todo lo que se requiere para conocer acerca de su uso e implementación como docente, estudiante o conocedor.

La existencia de diferentes tutoriales en la red, permite que quien lo vaya a usar pueda recurrir en caso de alguna duda a esa información, por lo que el manejo del *software* no es un inconveniente para los que tengan acceso, pues diferentes construcciones e inclusive talleres de comprensión se encuentra en línea, permitiendo que el docente o el estudiante adquiera esta información.

Es así, que *Geogebra* cuenta con unas características clave para su implementación en el aula (Hohenwarter, 2008):

- Accesibilidad: que puede ser utilizado por el mayor número de personas a pesar de que no posean todas las condiciones técnicas ni económicas o tecnológicas.

- Adaptabilidad: Permite ajustar, modificar y personalizar el recurso sin ninguna implicación legal para la adaptación a la necesidad del alumno y por ende la del docente.

- Durabilidad: Tiene videncia y validez en el tiempo, usando tecnologías comunes y reconocidas.

- Flexibilidad: Responde y se integra con facilidad a diferentes escenarios digitales y a la configuraciones de preferencia para el usuario.

- Granulación: Relación directa entre su nivel de detalle, jerarquía o importancia y su articulación con otros componentes

- Interoperabilidad: cuenta con las condiciones y capacidad de ser implementado en diversos entornos digitales basado en los estándares.

- Modulación: Permite la interacción con los demás y ampliar el uso educativo del recurso.

- Portabilidad: son diseñados, construidos y ensamblados para ser empleados en plataformas, mejorando su capacidad de almacenamiento y distribución.

- Usabilidad: garantiza la correcta interacción con el usuario, con el fin de lograr una experiencia cómoda, fácil y eficiente.

- Reusabilidad: Puede ser utilizado en diferentes contextos y con distintas finalidades educativas, permitiendo que se modifique para ser adaptado a los requerimientos del usuario.

El hecho de que sea un Recurso Educativo Abierto (UNESCO), para poder modificar, reproducir y adaptar es debido al permiso otorgado por el titular del Derecho de Autor, a través de una licencia especial.

Es así, que el *software* libre (Abánades, Botana, Tabera, 2009) en general y en particular el *software* libre matemático (Abánades, Botana, Tabera, 2009) ya no es algo ajeno a la realidad, incluso se puede afirmar que ya es necesario su implementación para motivar a los estudiantes y obtener un aprendizaje por medio de las tecnologías, pero es importante que el maestro no solo “adapte, sino modifica, mejore y difunda con toda libertad" (Abánades, Botana, Tabera, 2009. P. 343), pues *Geogebra* tiene grupos de trabajo colaborativo, en el que las construcciones son compartidas entre la red de docentes y adaptadas de acuerdo a su necesidad.

Dentro de la importancia y las ventajas de *Geogebra*, es que se puede tomar como un espacio educativo que facilita los procesos de aprendizaje de las matemáticas, sin embargo, es el docente quien debe diseñar estrategias de enseñanza basados en la resolución de problemas, para que el estudiante con ayuda del programa pueda conseguir su objetivo y que no sea la manipulación del mismo, un reto, de igual forma, se recomienda el trabajo por simulaciones, trabajo en equipo y uso activo de las tecnologías computacionales.

Quizás una de las ventajas sea que el *Software Geogebra*, no necesita conexión a internet para ejecutarse, aunque si para descargarse, eso facilita en caso de problema de conexión y no casa algún atraso o frustración a la hora de trabajar con él.

Las construcciones pueden ser vistas desde cualquier navegador y posee dualidad de pantalla, con una vista algebraica y otra gráfica, con diversidad de herramientas y cálculos que anteriormente se realizaban manualmente, pues también posee una hoja Excel, con la propiedad no solo de incluir fórmulas si no de realizar tablas y exportarlas al área de trabajo, así como otros usos.

Es necesario el acompañamiento del docente, pues aunque en internet se encuentren diversidad de tutoriales y ejemplos, el docente puede ayudar a que el estudiante pueda encontrar por sí solo la respuesta con ayuda también de sus compañeros.

Geogebra está escrito en Java, por lo que está disponible en muchas plataformas en la red o portables, no solo se ha utilizado para el estudio de las matemáticas sino para diversas áreas del saber o carreras universitarias, entre ellas el diseño o la arquitectura.

Como última versión, y con la inclusión del aprendizaje *m-learning* (Ramírez, 2012), se ha vinculado como aplicación para *tablets* y dispositivos móviles en general, aunque no cuenta con todas las propiedades del *software* explorado en el computador y carece de herramientas necesarias para la resolución de problemas o actividades propias de carreras universitarias, aunque se pueden descargar construcciones ya hechas en la red y hasta modificarlas.

A continuación, se describe el uso de *Geogebra* para resolver problemas matemáticos en situaciones aditivas y multiplicativas.

2.2.3. Resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas utilizando *Geogebra*. Muchos de los problemas que se plantean tradicionalmente en el aula de clase, están basados en unos conocimientos que recién se han adquirido, colocando a prueba la interpretación del enunciado con la correcta aplicación de un algoritmo matemático, lo que ofrece *Geogebra* (Hohenwarter, 2008) es que se explore de diversas maneras acerca de cómo solucionar un problema e ir más allá de conseguir la respuesta o solución, en esta práctica, es más enriquecedor el método que el fin, los estudiantes en la búsqueda de resolver un problema pueden encontrarse con unos de características similares ya resueltos, e ir generalizando y creando una lógica matemática o permitirse construir a partir de sus conocimientos previos, figuras alternas que logren describir el enunciado para una mejor percepción.

GeoGebra (Hohenwarter, 2008) es un sistema de geometría dinámica, que añade capacidades algebraicas, estableciéndose una relación directa entre los objetos de la ventana algebraica y los de la ventana geométrica.

El docente de matemáticas no tiene que ser un programador o ingeniero de sistemas para implementar *Geogebra* (Hohenwarter, 2008) en su quehacer docente, de allí la existencia de los *software* libres (Abánades, Botana, Tabera, 2009) y de toda la información que de manera gratuita el docente y el alumno puede disfrutar.

En esta labor de utilizar *Geogebra* (Hohenwarter, 2008) para resolver problemas matemáticas también pueden existir dificultades, por ello, se realiza las siguientes recomendaciones (Abánades, Botana, Tabera, 2009):

- Planeación: Dentro del plan de estudios t planeación docente debe aparecer lo que se pretende hacer dentro y fuera de clase.

- Organización del tiempo: para que una actividad sea efectiva, se deben programar los tiempos para que no se quede en un continuará, sino que se cumpla todos los pasos que plantea Polya (1971) en su método.

- Tutoría: el docente deberá estar atento a las inquietudes del estudiante dentro y fuera del aula, de manera virtual, presencial o virtualmente.

- Método más no fin: es importante que el estudiante sienta su trabajo el proceso de solución de un problema y no solo en encontrar la solución y que después de lo haga no sienta que todo ha terminado.

- Variedad: usar diferentes herramientas del programa para solucionar un mismo problema y poder conseguir con éxito el último paso del método de Polya (1971): la verificación.

- Autoridad y no autoritarismo: va de la mano con dominio de grupo, no permitiendo que la emoción por tener conexión a internet deje que cambie de dirección la clase y se fomente la indisciplina.

- Trabajo colaborativo: existen diferentes formas de evaluar y compartir información, modificarla, adaptarla y mejorarla hace parte de un gran proceso de aprendizaje.

- Relaciones: La relaciones maestro-estudiantes y estudiante-estudiante es un aspecto de vital de importancia para el desarrollo de cualquier Ambiente Virtual de Aprendizaje (Romero, 2011), la cordialidad, empatía, respeto y ética profesional, son parte de las reglas de convivencia, necesarias para obtener cualquier resultado favorable así haya diferencias en opiniones.

De acuerdo a todo lo anterior y por las ventajas del uso de *Geogebra* (Hohenwarter, 2008) en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, para el caso de la resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas en primer grado de secundaria que se realizará en la presente investigación y por las diferentes herramientas que ofrece para escoger diferentes planes, se escoge el *software* libre: *Geogebra* (Abánades, Botana, Tabera, 2009) como recurso para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.

Desde la inclusión de las calculadoras al aula de clase, se ha intentado que los estudiantes utilicen la tecnología para lograr competencias matemáticas más allá de los algoritmos, repercutiendo en la sociedad al resolver un problema que requiere de hacer una ejercicio matemático, así que es la nueva tecnología la que permite ir más allá de un contenido memorizado, para realizar aprendizajes significativos y contextualizados que desde la academia, puedan resolver situaciones de su entorno, mas específicamente en matemáticas, cuando deban hacer cualquier cuenta o medir cualquier terreno o construir alguna edificación.

Frente a la preocupación por lograr el aprendizaje de resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas se ha hecho un compendio de diez investigaciones con relación a la presente investigación, donde se han aplicado métodos didácticos para la enseñanza de la resolución de problemas matemáticas y la implementación de recursos tecnológicos como *software*, calculadoras o cualquier ayuda computacional, en diferentes países con diferentes contextos, permitiendo hacer un análisis global de una problemática en el área de matemáticas frente a la solución de problemas y la vinculación de nuevas estrategias de enseñanza.

2.3. Investigaciones relacionadas con el uso del Método de Polya y *Geogebra* para la resolución de problemas

El tema de la resolución de problemas en las matemáticas ha creado controversias, porque cuando el estudiante obtiene esta habilidad, trae consigo los pensamientos lógicos matemáticos y conocimientos propios del área pero que realmente son aplicados al contexto, es por ello, que han resultado diversas investigaciones en torno a este tópico, los cuales han sido retomados para la creación de planes de estudio que cumplan con la creación de individuos competentes en matemáticas (MEN, 1998).

La competencia matemática ha despertado el interés por aplicar nuevos estrategias que promuevan no solo el aprendizaje de dicha área sino la motivación, gusto y mejoramiento de ambientes presenciales y virtuales, tratando de incluir modelos didácticos y la tecnología en el aula.

La preocupación por captar el interés y que los estudiantes sientan agrado para solucionar un problema matemático, es el origen de lo que resulta al implementar Ambientes Virtuales de Aprendizaje (Romero, 2011), pues el interés de los alumnos por las nuevas tecnologías móviles, juegos, redes sociales, *chats* y *software*, permiten deducir su empatibilidad con estos recursos que al ser permearlos con la enseñanza de las matemáticas obtiene grandes resultados en el aprendizaje y aplicación en la cotidianidad del aprendiz, promoviendo diferentes investigaciones en pro de esta preocupación. A continuación se analizan algunas de estas investigaciones.

"*Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas"* (Calvo, 2008). Surge a causa del bajo rendimiento académico en matemáticas y en su defecto por la deserción escolar y siendo la resolución de problemas el aspecto en el que mayor dificultad presentan los estudiantes es necesario una intervención pedagógica al respecto.

Específicamente habla sobre la implementación de la mejor metodología para la enseñanza de las matemáticas en resolución de problemas, iniciando con despertar el interés por medio de la motivación.

Los resultados obtenidos se dirigen a conocer el programa instruccional en resolución de problemas aritméticos, determinando los siguientes ítems:

El conocimiento lógico matemático: acciones efectuadas sobre los objetos y etos serán incorporados a os esquemas del sujeto y se acrecienta de acuerdo a la relación son su entorno, en donde el alumno le toma sentido a la matemática porque la evidencia en su contexto.

Enseñanza de la matemática: se necesita de un ambiente propicio y de una metodología adecuada para la enseñanza de las matemáticas y para no causar frustración frente a esta disciplina si lo que se aprende en el aula tendrá relevancia al evidenciarlo en su vida cotidiana. De igual forma es importante utilizar los conocimientos previos del estudiante a la hora de adquirir un conocimiento nuevo.

Desarrollo de habilidades intelectuales: es lograr que el estudiante sea competente en el área, obteniendo destrezas útiles para la vida, capaz de resolver un problema de su entorno e incluso proponer soluciones a problema más generales, por medio de la flexibilidad del pensamiento, la estimación, la generalización, la imaginación espacial y la reversibilidad del pensamiento.

Problemática en torno a la metodología empleada: es importante para obtener la actitud del estudiante frente a la materia, y no dejar la resolución de problemas como un tema más del currículo sino como eje central de la matemática.

Se puede decir que este estudio enfocó a que el docente cree la mejor estrategia para promover la asimilación e interiorización de conocimientos matemáticos para resolver problemas de su entorno, para esta investigación es importante reconocer la importancia de la creación ambientes motivantes y promotores de aprendizaje, específicamente en el aula de matemáticas, pues si el estudiante se siente motivado, a gusto con la adquisición de nuevos conocimiento, la calidad en el aprendizaje será mayor y la evaluación será tomada como un proceso formativo, en donde se aprende del error y se comparte información por medio de ayudas tecnológicas.

Para esta investigación, este estudió indujo hacia la importancia de la motivación del estudiante para adquirir cualquier conocimiento, pues hablaron más de la actitud para el desarrollo del pensamiento matemático, ser competente en matemáticas no fue cuestión de conocimiento si no de disposición.

"*Dificultades de los alumnos de sexto grado de educación primaria para la resolución de los problemas matemáticos. Análisis retrospectivo*". (Sánchez, L. 2001). En este estudio se revelan los diversos aspectos por el cual los estudiantes de sexto grado tienen grandes dificultades en la resolución de problemas tales como: el desentendimiento a la maduración psicogenética de los alumnos, la enfatización al manejo del aspecto mecánico de los algoritmos, el uso de situaciones descontextualizadas que no promueven la reflexión, y las formas y contenidos de los problemas planteados , así como la influencia de las expectativas socioculturales de los padres de familia, por medio de la aplicación de encuestas, entrevistas y observaciones.

De igual forma, plantea el punto de vista de diferentes teórico frente al desarrollo cognitivo del alumno hacia el pensamiento lógico matemático, y la estrecha relación que tiene el alumno con su profesor, sus padres y su entorno para el logro del aprendizaje y resolución de problemas. Es importante resaltar que para el contexto de esta investigación el grado sexto pertenece a la básica primaria y es de gran importancia que en este nivel se adquiera buenas bases en matemáticas, para cumplir con los siguientes estadios que según Piaget denomina "operaciones concretas y operaciones formales".

Claramente, Lourdes Mariela Sánchez quiere con este trabajo incentivar a la reflexión y análisis de las actividades realizadas al interior del aula, con el fin de que los maestros tomen conciencia de su labor y de ser pertinente reorientar su práctica docente, resaltando su desempeño como vocación y no como ocupación, creciendo cada día como personal y profesionalmente, por lo que orienta a esta investigación en la búsqueda pertinente de la mejora constante para obtener buenas bases conceptuales en la matemática y poder resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, la diferencia es que Sánchez utiliza como muestra un grado sexto pero de educación primaria, lo que hace un poco diferente la investigación, pues en la presente se supone que ya ha adquirido otras bases teóricas en las matemáticas.

En Colombia el grado sexto pertenece a secundaria, aspecto que genera diferencia en cuanto a nivel de conocimiento, sin embargo se tuvo que analizar los contenidos curriculares que se maneja en México, para mirar los aportes a esta investigación, también tener en cuenta la edad de los estudiantes, pues según Piaget, el desarrollo cognitivo depende de la edad, según Vygotsky, depende de su entorno social y según el método heurístico, el todo y sus partes es necesario comprenderlo para poder intervenir.

Es importante, que se tenga en cuenta el sistema educativo internacional, pues la población es movible, de allí la creación de estándares que promuevan la competitividad internacional en pruebas de esta índole.

"Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. Una Propuesta integradora desde el enfoque Antropológico". (Rodríguez, E. 2005). Se basa principalmente en la concepción de George Polya (1945) con su teoría frente a la dificultad en la resolución de problemas, así como en las de Rene Descartes, Dewey, Platón, Sócrates, Gestalt, entre otros, en la búsqueda de cómo mejorar la instrucción en matemáticas de modo que facilite la capacidad de resolución de problemas de los

alumnos”- estudios teóricos, investigaciones empíricas, conclusiones, reflexiones y replanteamientos del trabajo, incluso hace relación a las tareas problemáticas como parte primordial en el proceso de enseñanza, al conocimiento previo por medio de las tareas de modelización, de ejecución y las realizadas en clase.

Este trabajo se desarrolló con alumnos de primero de secundaria del Instituto público de Enseñanza Secundaria de la Comunidad Autónoma de Madrid con el tema de “funciones” y con dos profesores del área de matemáticas, analizando el tipo de conocimiento cognitivo requerido por la necesidad de elegir las técnicas más adecuadas, elaboración de técnicas a partir de otras más complejas, delimitación de distintos tipos de problemas y reelaboración de ingredientes tecnológicos antiguos para adaptarlos a los nuevos tipos de problemas.

Se concluyó afirmando que las situaciones problemáticas a las que los conocimientos matemáticos responder, constituyen las razones de ser de dichos conocimientos, que no se respetan suficientemente las leyes que rigen el desarrollo interno de las técnicas matemáticas, que la ausencia de todo tipo conocimiento tecnológico determina que los conocimientos matemáticos sean puntuales y rígidos y en consecuencia provoca que los conocimiento se presentes independientes entre sí.

Es así, que esta investigación presenta una estrategia que permite a la presente reconocer que en el primer grado de secundaria se puede crear conciencia de un conocimiento tecnológico y a la vez matemático para la resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, sin embargo hay que tener presente que la tecnología es un medio que permite llegar al aprendizaje de contenidos más allá de lo que pueda brindar, internet o una calculadora en el caso de las matemáticas, es preciso que sea un instrumento que motiva y facilite el aprendizaje.

"Resolución de problemas, matemática y computación" (Nieto, J. 2005). Cuyo objetivo es reflexionar acerca de la forma en que se deben resolver problemas a partir del método propuesto por George Polya, en especial con las Olimpiadas matemáticas y maratones de programación en computación.

Desde 1975, desde que se nacionalizó en Venezuela las Olimpiadas matemáticas y la creación de la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas se ha comenzado a desarrollar un amplio programa de selección y entrenamiento de estudiantes, creando estatus a nivel internacional, para más adelante articulando con otras áreas, se crea la ciencia de la computación como estudio de la resolución de problemas en el computador. Este estudio determina la importancia de los concursos (Olimpiadas matemáticas, maratón de programación) como una forma efectiva de estimular el entusiasmo por la resolución de problemas.

Las Olimpiadas de Matemáticas en Venezuela, promueven el interés del estudiante y aunque en esta investigación no se realice este tipo de competencias, se puede guardar la misma concepción en la medida que los estudiantes se sientan en un concurso, para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas por medio de programas computacionales, no para fomentar la competencia sino para medir sus conocimiento con sus pares.

En la Institución educativa que participa en esta investigación, se realizan las olimpiadas anuales de matemáticas, que fomentan el juego y la lógica matemática, mediante el trabajo en equipo, sin embargo, la debilidad se presenta al no poder interactuar con estudiantes de otras instituciones, esto sería mucho mas enriquecedor.

"*Los entornos de validación en la resolución de problemas matemáticos*" (Masachs, A. Camprubí, Naudi M. 2007). Su propósito, es el de mostrar que durante dos años se tuvo la experiencia de trabajar la resolución de problemas en el aula, compuesto en la creación de entornos de validación con intercambio de informaciones y argumentos. Los problemas se agruparon en tres niveles: nivel 1, con opciones de respuesta múltiples; nivel 2, consta de un enunciado general y dos adicionales en el que se puede llegar a la solución del problema si la información adicional (1) es suficiente para resolver problemas y la información adicional (2) es insuficiente o viceversa, si ambas de forma conjunta son suficientes, si cada una es suficiente, si ambas en conjunto son insuficientes y se requiere de otra información adicional; nivel 3, que son seleccionados de la bibliografía. Esta investigación después de realizar diferentes pruebas con problemas clasificados en cada uno de los niveles anteriores, determinó que los problemas de nivel 2 fueron los que mejor promovieron los procesos de validación.

Es importante resaltar que existen muchas estrategias para aprender a resolver problemas Masachs, Camprubí y Naudi, plantean un proceso de validación que aunque no se utilizará en esta investigación da dirección frente a la clasificación de los diferentes problemas matemáticos según estos autores.

La formulación de problemas, es la clave para que el proceso de resolver un problema cumpla su objetivo, en esta investigación, los problemas son contextualizados, los estudiantes resuelven situaciones que les han o irán presentando en el largo de su instancia escolar, o en su hogar.

"Aspectos epistemológicos y cognitivos de la resolución de problemas de matemáticas, bien y mal definidos. Un estudio con alumnos del primer ciclo de la ESO y maestros en formación". (Noda, 2000). Esta investigación aborda los problemas y la resolución de problemas, apoyados en los conceptos de personajes como Polya (1971), tras analizar que antes de resolver un problema hay que saber plantear un problema, este aspecto, es de gran interés en la presente investigación pues es otra aportación de Polya (1971) después del método de cuatro pasos, así que, se pudieron encontrar problemas bien y mal definidos determinando los comportamientos regulares e invariante, con el fin de construir una comprensión coherente de los procesos de solución de esos problemas, analizando el impacto que tienen sobre los estudiantes. También se recurrió al modelo de actuación de Schoenfeld (1985) basados en el método de Polya (1971) para resolver problemas con sujetos reales.

Dentro de sus resultados se tuvo la construcción de un modelo de competencia formal y de las representaciones semióticas posibles de las soluciones lógicas del problema, lo cual permitió mirar la caracterización del mismo.

De los tres objetivos se tuvo el logro de estos alcances, utilizando el razonamiento empírico, el razonamiento analítico, el contraejemplo y la contradicción como recursos de naturaleza interna y como externa se utilizó el ritual y las creencias, dividiéndose estas en la autoridad de la tarea, del profesor y del compañero competente.

Haciendo contraste con la presente investigación es la concepción del trabajo colaborativo que se necesita para obtener la solución del problema utilizando el método y el recurso, es preciso resaltar que el método que plantea Polya para resolver problemas ha sido retomado en esta investigación, cuyos resultados han sido favorables con su uso.

“Sobre habilidades en la resolución de problemas aritméticos verbales, mediante el uso de dos sistemas de representación yuxtapuestos”. (Hernández, 1997). Esta investigación cuyo objetivo es el análisis de las habilidades de los alumnos en la resolución de problemas aritméticos verbales, cuando son instruidos en un modelo de competencias que usa dos sistemas de representación yuxtapuestos, de las actitudes que tienen hacia las Matemáticas y hacia la resolución de problemas y el estudio de la implicación del profesorado en la instrucción y en la propia investigación, tuvo como resultado la consideración bajo el modelo de competencia, diferentes conceptos y relaciones, a veces no clasificados, regulando el funcionamiento del campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas.

De igual forma, hacen mención al Sistema de Representación Visual – Geométrico (SRVG), y a la estrategia general de Polya (1971) y al esquema parte-todo de Piaget (1964), pero lo que más llama la atención es que se arrojó una conclusión frente al profesorado y es que la implementación de un cambio curricular innovador se encuentra condicionado, entre otros elementos, por los conocimientos, creencias y decisiones de los profesores.

Algo a tener en cuenta en la formulación de los problemas que se utilizarán en esta investigación. Esta investigación muestra herramientas claves para articular problemas en situaciones aditivas u multiplicativas utilizando la geometría dinámica.

“GEOGEBRA en la resolución de un problema”. (Rechimont, Ferreyra, Parodi y otros, 2007). En esta investigación se pudo afirmar que la utilización del *software*, fue motivadora y ente disparador de procesos de resolución, elaboración de conjeturas y

validación, así pues, la visualización matemática por medio de imágenes mentales a través de *Geogebra*, permite descubrir y entender las matemáticas.

Este trabajo se centra en la resolución de problemas geométricos y algebraicos aplicables a cualquier contenido temático de las matemáticas. De igual forma utilizaron las demostraciones de diferentes postulados por medio del *software* aplicado a estudiantes de los primeros años de la carrera Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de La Pampa.

Para esta investigación es un apoyo, conocer un estudio que utiliza el mismo *software* que para la resolución de problemas, ya sean geométricos o algebraicos, es un programa que les permitió fortalecer la resolución de un problema, con resultados favorables.

"La influencia conjunta del uso de Geogebra *y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado".* (Iranzo y Fortuny, 2009). Se pretende buscar una relación entre las concepciones de los alumnos y las técnicas que utilizan en las estrategias de resolución de problemas, así como la interpretación del comportamiento de los estudiantes de Bachillerato Tecnológico en la resolución de problemas de geometría plana, mediante el análisis de la relación entre el uso de *Geogebra*, la resolución en lápiz y papel y el pensamiento geométrico, aspecto que favorece la presente investigación, pues el contraste entre una metodología tradicional y el uso de un programa como *Geogebra* para la enseñanza de las matemáticas es lo que marca un punto de partida para mejorar le educación matemática, porque se integra las nuevas tecnologías en la enseñanza secundaria por medio del *software Geogebra*, consiguiendo el aprendizaje y obtenido la motivación del aprendiz.

Este trabajo maneja una metodología de estudio de casos desde una perspectiva cuantitativa, analizando los comportamientos de los alumnos durante la resolución de problemas de Geometría Analítica. El uso de esta investigación permite esclarecer el análisis por cada estudiante, lo que sustenta la interpretación comportamental que se realiza para resolver un problema en lápiz y papel y con el *software Geogebra*.

Esta es otra investigación, que realiza una comparación con el método tradicional y el uso del mismo *software* de la presente investigación, sus resultados muestran el buen uso de este medio y los excelentes resultados que trajo consigo, lo que permitió que en este estudio se mostrara más optimista para el cumplimiento de la hipótesis planteada.

"Metodología basada en el método heurístico de Polya para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos". (Boscán y Klever, 2012). Este trabajo buscó favorecer el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos de los estudiantes atlanticenses de séptimo grado de Educación Básica, con un estudio de caso de la Institución Educativa Máximo Mercado (IEMM) de Sabanalarga. La prueba que se aplicó a los estudiantes, constaba de cinco problemas y una encuesta complementaria para determinar cuáles de los pasos propuestos con la metodología Polya seguían los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos.

El objetivo de esta investigación coincide con este trabajo, pues en base a un método teórico favorecerá el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos. Sin embargo la diferencia es que se utiliza pruebas escritas tipo pruebas saber, de selección múltiple para la comparación de resultados. Finalmente, se consigue que el estudiante no se preocupe solo por obtener una respuesta, sino que comprende dentro de un proceso cíclico y no como un producto final.

La educación y la sociedad actual requiere que los Ambientes de Aprendizaje en el área de matemáticas se vuelvan virtuales, siendo una estrategia el uso adecuado de los Recursos Educativos Abiertos (REA) por sus beneficios de accesibilidad, flexibilidad, durabilidad, adaptabilidad, interoperabilidad, portabilidad, usabilidad y reusabilidad, tanto el maestro como el alumno garantizarán un aprendizaje significativo en la práctica de la resolución de situaciones problema de las matemáticas de manera contextualizada y con trabajo colaborativo.

En síntesis, el capítulo anterior hace referencia al sustento teórico de la investigación, considerando que el lenguaje de las matemáticas se basa en reglas que deben ser aprendidas, es importante para la motivación que los estudiantes vayan más allá de las reglas para poder expresar las cosas en el lenguaje de las matemáticas. Esta transformación sugiere cambios tanto en contenidos curriculares y el estilo de enseñanza (Schoenfeld, A. H. 1992).

En el siguiente capítulo, se presentará toda la parte metodológica, el tipo de investigación, la definición de las fases de la misma, quienes son los participantes del estudio, de qué se tratan los instrumentos de recolección de información y cómo se analizarán estos datos.

Capítulo 3. Metodología

En la presente sección se describe la metodología de experimentación para poder investigar el problema que hemos descrito en los capítulos anteriores, inicialmente, se realiza una descripción del enfoque de investigación utilizado, siendo la decisión utilizar una investigación de naturaleza cuantitativa, mediante un modelo de diseño experimental y de control (Valenzuela J. y Flores M., 2012).

También, se hace referencia a los participantes de éste estudio y descripción de la muestra, a los instrumentos de recolección de datos, tanto en la parte inicial del procedimiento aplicando un pretest y en la parte final del proyecto implementado el postest, el cual arrojará el resultado con la escala de valoración de Likert (Page, 2003) de la pertinencia al utilizar el Método de Polya (1971) y *Geogebra* (Hohenwarter, 2008) en la enseñanza de la resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, y finalmente se establecen los mecanismos o estrategias de análisis de datos con los métodos estadísticos descriptivos.

Siendo esta investigación de tipo cuantitativo, a continuación se describe la razón por la cual se ha elegido este diseño y como desarrolla como método investigativo.

3.1. Método de investigación

La presente investigación, utilizó como método un enfoque de naturaleza cuantitativa de carácter positivista, pues recolectó datos cuantitativos con las valoraciones o calificaciones asignadas por el docente en la escala de valoración de Likert (Page, 2003) de 1 a 5 siendo 5 la mayor calificación, en la búsqueda de solucionar la pregunta de investigación, esta escala se utilizó en los instrumentos aplicado del pretest y del postest, para mostrar lo resultado y realizar el respectivo análisis estadístico de la información.

También utilizó métodos estadísticos para el análisis de datos, utilizando un diseño experimental de control (Valenzuela J. y Flores M., 2012), pues al ser tres grupos de primer grado de secundaria, se aplicó el tratamiento con el Método de Polya (Polya, 1971) y *Geogebra* (Hohenwarter, 2008) a un solo grupo y el tratamiento solo con el Método de Polya (Polya, 1971) al otro, siendo estos dos grupos de tipo experimental y el último grupo fue de control, pues no se aplicó el tratamiento, y se orientó la temática de forma tradicional: extrayendo datos, realizando la operación y redactando la respuesta.

3.1.1. Descripción de la investigación. En el diseño y construcción de la presente investigación, se inicia con el planteamiento del problema, realizando un análisis del contexto donde se aplicó el estudio, describiendo los antecedentes y justificando el problema de investigación, de acuerdo con la revisión literaria de lo referente a la resolución de problemas matemáticos, utilizando un método y un recurso o herramienta tecnológica ofrecida por internet, como concesión del autor Hohenwarter (2008) estableciendo que el método escogido para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas es el propuesto por Polya (1971) y el Recurso tecnológico a utilizar es *Geogebra*.

Una vez, planteada la pregunta de investigación, se procede a inducir cuál será la implicación de la investigación para mejorar la práctica educativa específicamente en el área de matemáticas con la resolución de problemas matemáticos definiendo los objetivos, la hipótesis a comprobar, las delimitaciones y las limitaciones, que se presentan.

Obtenidos los respetivos consentimientos por parte del rector y de los participantes (Ver apéndices A y B), reconociendo y aceptando su rol en el presente estudio, donde el director en su facultad de director administrativo concedió el espacio, tiempo, recursos y disponibilidad de estudiantes y los estudiantes, fueron conscientes que se les hizo un refuerzo pero de manera diferente en comparación con los otros grupos, se procedió a realizar la recolección de información por medio de los instrumentos.

Los pasos para la realización de este diseño fueron: aplicación de un pretest para la medida de la variable dependiente que fue empleada a los tres grupos, aplicación del tratamiento o variable independiente Método de Polya (1971) y *Geogebra* (Hohenwarter, 2008) a dos grupos, en uno, se trabajó solo el Método de Polya y en el otro se trabajó ambos y, al final, la aplicación de un postest para la medida de la variable dependiente, en el cual, se les pidió a los grupos donde fue aplicado el tratamiento, que realicen el procedimiento atendiendo al método de cuatro pasos de Polya (1971).

Para el desarrollo de esta investigación se contó con una población de todos los estudiantes que se encontraban en el primer grado de secundaria, con una muestra no aleatoria de 114 estudiantes, comprendidos en tres grupos pertenecientes al primer nivel académico de secundaria de la Institución Educativa en donde se hizo la presente investigación con aproximadamente 40 estudiantes cada uno, llamado en este contexto grados sextos.

El problema no solo había radicado en no saberse las tablas de multiplicar o los algoritmos correspondientes, si no que no conocen ni aplican un procedimiento adecuado y correcto para la solución del mismo, además que la utilización del lápiz y el papel es un aspecto que han utilizado durante muchos años, y es pertinente usar herramientas tecnológicas ofrecidas por internet.

Una vez establecido el método, el *software* y la muestra con la cual trabajar, se procedió a desarrollar las Fases en cada uno de los grupos experimentales y de control, obteniendo cuatro fases de diagnóstico, de tratamiento, de evaluación y de análisis.

3.1.2. Fases de la investigación. Para identificar el impacto que tiene la implementación del Método de Polya (1971) y el *Geogebra* (Hohenwarter, 2008), en la presente investigación se requirió la ejecución de cada una de las siguientes fases, realizando solo la parte de recolección y análisis de información y modificando lo propuesto por Monje (2011), frente a las fases en una investigación cuantitativa:

Fase 1. Diagnóstico. Para la resolución de problemas fue necesario utilizar los saberes previos del estudiante (Polya, 1971), así que antes de enseñar el contenido temático, se aplicó una prueba diagnóstica o pretest (ver apéndice D) con cinco problemas, esta prueba tuvo una duración de dos horas en una sola sesión de trabajo.

Se observó los procesos mentales para la identificación de la operación y la interpretación de una situación problema para su solución, estas preguntas estuvieron orientadas a la solución de problemas contextualizados en el entorno de los estudiantes (Díaz y Poblete, 2001), pues según Piaget (1964), los individuos entre 7 y 11 años están en la etapa de operaciones concretas, teniendo como prioridad la imitación, el juego simbólico, la imagen mental, y desarrollo hablado, aspectos que se tuvo en cuenta en el análisis de esta fase.

Fase 2. Tratamiento: para el primer grupo (6A); considerado de control (Valenzuela J. y Flores M., 2012), se solucionaron cinco problemas (ver apéndice E), que fueron resueltos de forma tradicional, sacando los datos, identificando la operación, realizándola y arrojando la respuesta, una vez resolvieron el taller, se realizó una socialización en donde los estudiantes hicieron saber sus inquietudes. La actividad se ejecutó en dos sesiones de dos horas cada una, en la primera sesión se efectúa la explicación de cómo sacar datos, hacer una operación y redactar una respuesta y en la segunda sesión, se resuelven las preguntas en grupo.

Para el segundo grupo (6-B); considerado experimental, se resolvieron los mismos cinco problemas del grupo anterior (ver apéndice F) y con la misma duración, aplicando el Método de solución de Polya (1971). En la primera sesión se explica paso a paso el método de Polya (1971) y en la segunda sesión se resuelven los problemas.

Para el tercer grupo (6-C); también considerado experimental, los mismos cinco problemas (ver apéndice G) que se aplicaron a 6A y 6B, fueron resueltos utilizando el Método de Polya y *Geogebra* que tuvo su respectivo tutorial (ver apéndice C), durante tres sesiones de dos horas cada una, en la primera se exploró el *software*, realizando algunos ejercicios con ayuda del tutorial, en la segunda sesión, se explicó el método de Polya y en la tercera sesión se utilizaron los conocimientos adquiridos para resolver los problemas matemáticos.

Los tres grupos tuvieron la oportunidad de socializar sus conocimientos con sus compañeros y docente. Al final de esta fase, se realizó la retroalimentación de sus problemas que fue de tipo contextual real y realista, el primero referido a situaciones en comprometer al alumno a actuar frente a su realidad y el segundo, hizo una simulación de la realidad (Díaz y Poblete, 2001), los estudiantes aprendieron a pensar matemáticamente, cuando utilizan su conocimiento para resolver una situación problémica que involucre aspectos matemáticos, para este caso, situaciones aditivas y multiplicativas con números naturales.

Atendiendo a lo propuesto por Díaz y Poblete (2001), en esta fase de tratamiento se trabajaron cinco problemas contextuales para los tres grupos, plasmados en los instrumentos del pretest (ver apéndice D) y del postest (ver apéndices H, I y J), teniendo en cuenta que cada grupo dio solución de manera diferente; de forma tradicional, utilizando solo el Método de Polya (Polya, 1971) y utilizando *Geogebra* (Hohenwarter, 2008) y el Método de Polya (Polya, 1971), para los grados 6A, 6B y 6C respectivamente, la resolución de estos problemas tuvieron una calificación de 1 a 5.

Fase 3. Evaluación: Los tres grupos objeto de estudio, tuvieron el mismo instrumento de evaluación que constaba de cinco problemas matemáticos contextuales de tipo real y realista (Díaz y Poblete, 2001), con una duración de dos horas en una sola sesión, excepto en el grupo 6C pues por disponibilidad de los computadores se tuvo que hacer en dos sesiones. Se calificó de acuerdo a la escala de Likert, para el caso del método tradicional, se le dio un valor de 1 a 5, a cada uno de los tres pasos que son, extracción de datos, operación y redacción de la respuesta. Para los grupos que utilizaron Polya, se le asignó la valoración de 1 a 5, a cada pregunta de cada paso del Método y finalmente, se utiliza la escala de 1 a 5 para medir solo el método de Polya, entre los grupos 6B y 6C, para realizar el análisis del método con y sin *Geogebra*.

Fase 4. Análisis de resultados: Se utilizaron técnicas estadísticas descritas más adelante, que permitieron comparar los datos recolectados, por medio de las medidas de tendencia central, las medidas de dispersión, entre otras, para comprobar la hipótesis planteada en el capítulo 1, de la presente investigación.

A continuación se presenta un esquema que resume las anteriores fases por las que atraviesa la presente investigación, para la obtención de la comprobación de hipótesis, que sintetiza lo mencionado anteriormente, como una gráfica que demuestra un proceso pues cada fase es pre requisito de otra, exceptuando la primera.

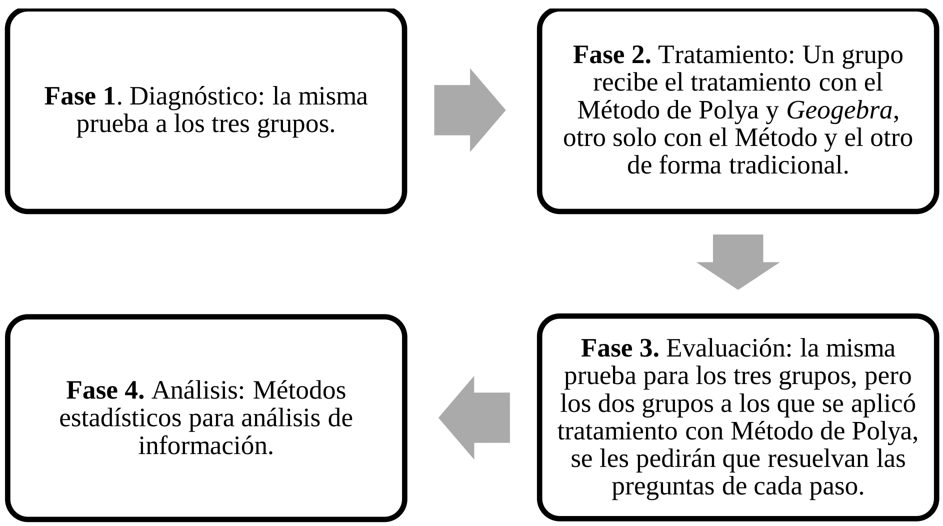


Figura 1. Fases de la investigación

Con estas cuatro fases, se abrió paso a la discusión de resultados y conclusiones, que determinaron el alcance de la investigación, iniciando con los objetivos específicos y determinando el cumplimiento de la hipótesis, para el logro del objetivo general, los resultados arrojados fueron analizados con métodos estadísticos descritos más adelante.

Es importante que se conociera la realidad de los estudiantes para diseñar un plan de estudios y para este caso, formular los problemas que en el aula de matemáticas se desea resolver, por eso, a continuación, se describe quienes son los participantes objeto de estudio de la presente investigación y como son las condiciones específicas de la población para realizar la investigación en el aprendizaje de la resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas con los números naturales.

3.2 Participantes en el estudio

El bajo rendimiento de los alumnos en la solución de problemas está relacionado con las habilidades lingüísticas para comprender y asimilar un conjunto de procesos de representación y traducción de lenguajes, diferentes perspectivas (Icfes, 2014; Pisa, 2014; Hughes, 1986), han concordado que existe una dificultad en el aprendizaje de las matemáticas, la institución objeto de estudio no es la excepción, además en un análisis de rendimiento académico realizado por la secretaría de educación municipal (2014), se reveló que en el primer periodo del año lectivo, el grado con más bajo rendimiento académico, fue el grado primero de secundaria en el área de matemáticas, lo que permitió establecer los participantes de esta investigación.

Los estudiantes objeto de estudio, se encontraron comprendidos entre 10 y 12 años de edad, aspecto a tener en cuenta según los niveles de pensamiento planteados por Piaget (1991) pues al estar en la etapa de operaciones concretas, es necesario que se utilicen problemas contextuales, en la comprensión de objetos concretos al ser experimentado por sus sentidos, una de las razones por los que fueron escogidos para el presente estudio.

La muestra quedo configurada por 114 estudiantes de primer grado de secundaria distribuidos así: 40 alumnos en el grupo A; 38 alumnos en el grupo B y; 36 alumnos en el C, a quienes se les aplicaron todas las actividades propuestas en las tres primeras fases, estos 114 estudiantes fueron escogidos, por disponibilidad del grupo con el docente investigador, por estar en el rango de operaciones concretas (Piaget, 1991) para resolver problemas aritméticos y por presentar dificultad al resolver un problema en cada de uno de los temas que se les enseñaba, en el trascurso de su año lectivo.

El otro participante fue el docente investigador quien orientó cada una de las fases, además de realizar la presente investigación, fue una mujer Normalista Superior con Énfasis en Matemáticas, Licenciada en Matemáticas y Especialista Tecnológica en Gestión de Proyectos, con tres años de trayectoria en el sector oficial y dos años y medio en el sector privado, orientaba el área de matemáticas en los grados de primero de secundaria, primero y último año de bachillerato en la institución que fue objeto de estudio en esta investigación.

A continuación se hace referencia a los instrumentos de recolección de datos antes y después de la aplicación de tratamiento correspondientes a las Fases 1 y 3, respectivamente.

3.3 Instrumentos de recolección de datos

En la investigación de tipo cuantitativo se utilizó el test como técnica para recolectar datos, permitiendo que “la respuesta sea codificada objetivamente y procesada estadísticamente” (Valenzuela y Flores, 2012. P. 84), en ésta investigación se utilizó un test (ver apéndices H, I y J) que mide habilidades específicas en donde el docente evaluaba el aprendizaje de los alumnos de manera cuantitativa (Valenzuela J. y Flores M., 2012).

En seguida, se revelan las categorías e indicadores que permiten la elaboración y análisis de la información obtenida, de acuerdo a los instrumentos aplicados durante la experimentación, determinando las metas a alcanzar por medio de preguntas basadas en el método de Polya (1971).

3.3.1. Categorías e indicadores. Para la elaboración de los instrumentos pretest y postest es necesario definir las categorías o constructos basados en el método de cuatro pasos que plantea Polya (1971) (ver tabla 1), aunque el método no se aplica en uno de los tres grupos es necesario evaluar la existencia y pertinencia de cada uno de estos pasos, por lo que se muestran las diferentes preguntas que plantea Polya (1971), para ser observadas en los grupos B y C.

Tabla 1
Categorías e indicadores de resolución de problemas aditivos y multiplicativos

CATEGORÍAS	*INDICADORES*	*PREGUNTAS (Método Polya)*
Constructo 1 Dominio de la suma y la multiplicación	Suma y multiplica de manera correcta. Aplican las propiedades de la adición y la multiplicación.	¿Usa correctamente el algoritmo de la suma? ¿Usa correctamente el algoritmo de la multiplicación?
Constructo 2 Interpretación del enunciado	Identificación del significado de los valores numéricos. Reconocimiento de los datos Identificación de la pregunta o preguntas	¿Por dónde debo empezar? ¿Qué puedo hacer? ¿Qué gano haciendo esto? ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Qué datos son relevantes y cuáles son los irrelevantes? ¿Cuál es la condición? ¿Ya he resuelto uno parecido?
Constructo 3 Elaboración del plan de solución	Reconocimiento de la o las operaciones (suma, multiplicación o ambas). Conocimiento de diferentes estrategias para solucionar problemas (gráficas, dibujos, ecuaciones, etc.)	¿Cuál estrategia usar: ensayo y error, variable, patrón, lista, problema similar más simple, figura, diagrama, razonamiento directo, problema equivalente, hacia atrás, casos, ecuación, fórmula, modelo, análisis dimensional, sub- metas, coordenadas o simetría?
Constructo 4 Ejecución del plan de solución	Desarrolla el plan con la implementación conjunta de los conocimientos previos, buenos hábitos de pensamiento y concentración.	¿Para qué hacemos lo que hacemos?
Constructo 5 Revisión de la solución	Frente a la respuesta obtenida en la ejecución del plan, mejorar la solución o en su defecto su comprensión. Verifica el problema.	¿Es tu solución correcta? ¿Existe una solución más sencilla o diferente? ¿Puedes generalizar tu solución? ¿Cuál era la información importante? ¿Presentaba contradicciones o redundancias?

El experimento dividió a los sujetos de estudio en tres grupos, en donde se aplicaron los mismos problemas aditivos y multiplicativos pero con condiciones diferentes. En dos de ellos (grupo experimental) el tratamiento o factor testeado fue aplicado, uno solo con el Método de Polya (1971) y el otro con el Método y *Geogebra* (2009). En el otro (grupo de control) el factor testeado no fue aplicado. Luego se compararon los resultados. Si la proporción de resultados deseados fue mayor en el grupo experimental con el Método de Polya (1971) y *Geogebra* (2009) que en e otro grupos experimental y en el grupo de control, entonces el tratamiento fue eficiente. Si fue igual, es ineficiente. Y si fue menor, es contraproducente (Valenzuela J. y Flores M., 2012).

Se realizó la misma prueba a cada uno de los tres grupos de primer grado de secundaria, pero cada uno de ellos tuvo una estrategia de enseñanza diferente para resolver problemas aditivos y multiplicativos y debió resolverla de forma diferente de acuerdo al tratamiento aplicado para el caso de los dos grupos en los que se aplicaron, en el grupo donde se realizó el trabajo de forma tradicional, se les pidió proceso, pero no un método en especial, por lo menos, que apareciera la extracción de datos, la operación y el resultado. Además, los estudiantes estuvieron al tanto del trabajo investigativo que se realizó con ellos, para efectos del conocimiento de estudio y como proceso evaluativo en el área de conocimiento.

Se aplicaron dos instrumentos de recolección de información en la primera y tercera fase, una antes de aplicar la estrategia de enseñanza llamada pretest y la otra después llamada postest como se describe a continuación, o de diagnóstico y de evaluación de conocimientos.

3.3.2. Pretest. El pretest permitió comprobar la semejanza inicial de los tres grupos objeto de estudio, pretendiendo neutralizar o controlar las diferencias iniciales de los sujetos, quedando sensibilizados, aprendiendo a responder lo que se espera de ellos y facilitando ya un determinado aprendizaje (Morales, 2013), que para este caso es que los alumnos dominen la suma, la multiplicación y la interpretación de enunciados. Como el pretest precede al tratamiento de los sujetos en algunos diseños no es necesario, pero en esta investigación se requería que el estudiante tenga las tres habilidades antes mencionadas para que pueda resolver un problema aditivo y multiplicativo, de no haber aprobado el pretest con más de 5, debió esmerarse por superar esas habilidades en el trascurso del desarrollo de la Fase 2.

La prueba del pretest estuvo compuesta por cinco problemas contextuales (ver apéndice D), que debieron tener su respectiva justificación o procedimiento, de acuerdo al método tradicional: sacar datos, realizar la operación y redactar la respuesta para llegar a la opción correcta. Se aplicó de manera individual por medio físico.

Se parte del supuesto que los alumnos saben sumar y multiplicar, pero ¿saben identificar la operación? En un problema matemático, el pretest es la herramienta para ver si los grupos son estadísticamente comparables e identificar si tienen estadísticamente las mismas medias de calificaciones.

3.3.2. Postest. Es la prueba realizada después de aplicar el tratamiento (x) a cada uno de los tres grupos, la que nos arrojó una calificación por estudiante de 1 a 5, que valoró cuantitativamente la habilidad de resolver problemas matemáticos cuya solución implicaba hacer una suma, una multiplicación o ambas de números naturales.

En la aplicación de esta prueba se midió el conocimiento académico adquirido, comprendido en los cinco constructos de la Tabla 1, la capacidad de utilizar las habilidades matemáticas en su entorno.

El postest tuvo cinco preguntas con problemas contextuales (ver apéndices H, I y J) en el que involucra situaciones aditivas y multiplicativas con números naturales, cada una tiene el mismo porcentaje de valor, se aplicó la misma prueba para los tres grupos, pero su solución fue pedida de forma diferente según el tratamiento aplicado.

En seguida, se describe el procedimiento para la aplicación de cada uno de los instrumentos, en cuanto a espacio, tiempo, duración y método.

3.4. Aplicación de instrumentos

Habiendo establecido los instrumentos de recolección de información, en éste apartado se indica los momentos, metodología y competencias que alcanza cada uno de ellos.

El primer instrumento a diligenciar es el pretest, se aplicó en la Fase 1 de diagnóstico el mismo día de la obtención del consentimiento a los estudiantes, para que se evidenciara los saberes previos e interpretación de situaciones problema, con una duración de dos horas y atendiendo a las competencias de: suma y multiplicación, utilizando sus respectivas propiedades, reconoce la suma y la multiplicación en una situación problema e interpreta información en una situación problema.

Se presumió que estas tres competencias o habilidades, ya se habían adquirido durante el trascurso escolar en la básica primaria, sin embargo, fue necesario identificar qué tan desarrolladas están.

Para el instrumento correspondiente al postest, se otorgó una duración de dos horas aplicadas en la Fase 3 después de emplear la estrategia de enseñanza, la cual se resolvió de manera diferente según el tratamiento aplicado; en el grado sexto A, se pidió datos, operación y resultado como proceso para la solución de cada problema (ver apéndice H), para el grado sexto B, se pidió que cumplieran con los cuatro pasos del método de Polya (1971), por medio de las preguntas generadoras que plantea este autor (ver apéndice I) y para el grado sexto C, se pidió que utilizaran *Geogebra* y el método de Polya, en donde registraron la solución del problema por el método de Polya, crearon un archivo por pregunta (ver apéndice J), este grupo tuvo dos sesiones, pero la prueba para cada estudiante tuvo la misma duración que los otros dos grupos, solo que por disponibilidad de equipos, se tuvo que realizar la prueba por grupos.

Para cada grupo se seleccionó una competencia diferente, para los estudiantes que tuvieron la estrategia de enseñanza tradicional se pretendió que resolvieran problemas matemáticos, para el grupo en el que se aplicó el Método de Polya (9171) que resolvieran problemas utilizando el Método y para el tercer grupo que resolvieran problemas utilizando el Método y que use *Geogebra* para su solución.

Una vez aplicados estos instrumentos de recolección de información se procedió a analizar la información, en especial la del postest que es la que arrojó la implicación de cada estrategia de enseñanza en la competencia de resolver problemas aditivos y multiplicativos con números naturales, la estrategia o diferentes técnicas de análisis de datos se describen a continuación, teniendo en cuenta que la presente investigación tiene un enfoque cuantitativo.

3.5. Estrategia para el análisis de datos

Después de recolectar la información en los instrumentos antes mencionados, se procedió a realizar un análisis estadístico que arrojó conclusiones de manera precisa y eficiente, de tal forma que se procesaron esos datos para convertirlos en la información que permitiera comprobar o no la hipótesis planteada en la presente investigación.

Con un enfoque positivista, se pretendió probar la hipótesis y sacar inferencias para una población a partir de una muestra de 144 estudiantes de primer grado de secundaria, se utilizó como estrategia de análisis de datos, medidas de la estadística descriptiva, teniendo en cuenta los parámetros descriptivos (Valenzuela y Flores, 2012).

Las medidas a las que se hace referencia en la estadística descriptiva, son las de tendencia central y de dispersión. Analizando el dato central, se encontró la media aritmética y las medidas de dispersión que indicaron la variabilidad entre los datos, por lo que se debió calcular: la varianza y las desviación estándar.

Finalmente, se realizaron gráficas estadísticas como diagramas de barras para la representación de información, las calificaciones en función de cada pregunta, para los tres grupos en una misma gráfica, analizando en qué preguntas y en qué grupos se obtuvieron las mayores calificaciones en la prueba del postest y así se determinaron si el método de Polya (1971) y *Geogebra* pudieron mejorar el aprendizaje en resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas con números naturales.

En cuanto a las proyecciones del estudio, se esperó que los estudiantes crearan habilidades para pensar frente a situaciones problemas que se les proponían y utilizar no solo, los presaberes, si no estrategias de solución y ayudas que pudieran ofrecer las ayudas tecnológicas.

Este capítulo, contiene la parte metodológica de la investigación, correspondiente al cómo se realiza cada uno de los momentos desde la revisión de literatura, el consentimiento de la ejecución de la misma, la aplicación de cada uno de los instrumentos, la implementación de nuevos método de enseñanza, hasta el análisis de la información recolectada que fueron compartidas con la institución.

Este capítulo especificó el proceso que tiene la investigación en cuanto a la recolección de información, por medio del diseño de instrumentos basados en sustentos teóricos, el método de implementación de los mismos, el cómo se analiza y representa los resultados obtenidos de días aplicaciones, tomando en cuenta las revisiones teóricas realizadas en el capítulo 2 y el planteamiento del problema del capítulo 1, mediante las cuatro fases: diagnóstico, tratamiento, evaluación y análisis, siendo la implementación de la estrategia o tratamiento el punto climático, pues en la evaluación se midieron el resultado obtenido en la fase 2.

Los resultados se presentan y analizan en el siguiente capítulo con los métodos estadísticos descritos en las estrategias de análisis de datos, lo que permitió arrojar conclusiones más exactas de acuerdo a los resultados y análisis de información, siendo presentados mediante gráficas estadísticas para las medias y las varianzas.

Capítulo 4. Análisis y discusión de resultados

En esta parte del estudio se muestra los principales resultados estadísticos obtenidos en cada una de las fases de recopilación de datos, atendiendo a lo explicado en la metodología del capítulo anterior, por medio del uso de tablas y gráficas estadísticas, que permitieron realizar los cálculos para posteriormente ser analizados de acuerdo a la información abstraída de los instrumentos pretest y postest en los tres grupos de primer grado de secundaria, de manera cuantitativa con el objetivo de aceptar o rechazar la hipótesis de investigación.

Por otra parte, es imprescindible tener en cuenta que el individuo cumple diferentes roles en la sociedad, de esta forma dan consentimiento y participan activamente del proceso de indagación o experimentación.

Estos instrumentos se aplicaron con la siguiente planeación.

Tabla 2
Planeación de experimentación

Instrumentos / *Grupos*	*Pretest: con los mismos problemas*	*Fase 2: taller con los mismos problemas*	*Postest: con los mismos problemas*
Grupo A	Tradicional	Tradicional-Refuerzo	Tradicional: datos, operación y resultado
Grupo B	Tradicional	Pasos del Método de Polya en cada problema	Pasos del Método de Polya en cada problema
Grupo C	Tradicional	Pasos del Método de Polya en cada problema y *Geogebra*	Pasos del Método de Polya en cada problema y *Geogebra*

De acuerdo a la información anterior, se aplicaron los instrumentos, de tal forma que se guardó el mismo tiempo de solución para los tres grupos de primero de secundaria y que todos los estudiantes estuvieron al tanto del objetivo de cada prueba, teniendo en cuenta el tratamiento que fue aplicado, para efectos de análisis de datos solo se utilizó la información arrojada por el pretest y el postest.

Se utiliza la escala de Likert (Page, 2003) de 1 a 5 para poder utilizar una sola escala de evaluación y poder comparar los diversos resultados, dada la forma de evaluación utilizada en los reactivos de los cuestionarios, donde 5 es el puntaje que se le dio al que lograra desarrollar correctamente el problema y 1 al que tenía bastante dificultad para solucionarlo, las valoraciones intermedias, son aquellas que aunque tenían idea de cómo solucionar un problema, todavía presentaban algo de dificultad.

Para cada instrumento, se realizó un proceso estadístico en el cual se calculó la media, la varianza, los intervalos de confianza y se realizó la prueba de hipótesis de igualdad de medias y de varianzas, determinando en el pretest si los grupos son comparables y en el postest qué grupo cumple con la hipótesis de investigación que consiste en que el rendimiento académico se incrementa en la solución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas (Wayne, 1991), esto es, cuándo se rechaza la hipótesis nula.

Dentro del estudio cuantitativo, se realizó un análisis para el método de Polya, valorando 1 a 5 según la escala de Likert en cada pregunta de cada paso del método, 1 significa que no respondió la pregunta y 5 que sí la respondió, los datos intermedio hacen mención a la calidad de la respuesta, de acuerdo a estos datos, se analizaron sus medias y sus varianzas para la respectiva prueba de hipótesis.

Recordando la pregunta de investigación, este estudio determinó ¿cómo el método de Polya puede constituirse en una estrategia que aumente el rendimiento académico de los estudiantes de primer grado de secundaria en la solución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas con el uso del Geogebra?, de allí se mira los objetivos al fomentar el trabajo colaborativo para resolver problemas, implementar el método de Polya para resolver problemas y conocer el impacto en el aumento del rendimiento académico al usar *Geogebra* y el Método de Polya para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, todo para llegar a alcanzar el objetivo de la presente investigación, el cual es identificar si se incrementa el rendimiento académico al implementar el método de Polya con el uso del *software Geogebra* en la resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas con los números naturales en estudiantes de primer grado de secundaria.

4.1. Presentación de datos obtenidos

Para observar cuál de los tres grupos tenía el más alto rendimiento académico en resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, se analizaron los resultados obtenidos por los instrumentos pretest y postest aplicados a 114 estudiantes distribuidos así: 40 alumnos en el grupo A, en el cual se utilizó un tratamiento tradicional; 38 alumnos en el grupo B utilizando solo el método de Polya; y 36 alumnos en el C, en donde se aplicó el método de Polya con el uso del *software Geogebra*, es la configuración de la muestra total, por grado, que es el objeto de este estudio, dentro del desarrollo de la presente investigación, lo que da confiabilidad institucional.

Se presentaron los resultados de manera cuantitativa, con el método de Polya, de acuerdo a cada constructo, con una valoración por cada pregunta de 1(uno) a 5 (cinco), y la calificación de los instrumentos pretest y postest se realizó con una valoración de 1 a

5, de acuerdo a la calidad de desarrollo de cada pregunta en cada paso del método de Polya.

A continuación se muestran los resultados de la prueba diagnóstica o pretest, aplicada a la totalidad de los estudiantes objeto de estudio de esta investigación.

4.1.1. Resultados de la prueba pretest. En los tres grados se aplicaron las mismas pruebas, partiendo del método tradicional, de acuerdo a los saberes previos de los estudiantes, así que con los conocimientos de años anteriores se obtuvieron los siguientes datos:

Tabla 3

Medias, Varianzas e Intervalos de Confianza del Pretest del grupo A

Pregunta	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Intervalo Superior	2.96	2.96	2.95	3.32	3.04
Media ($\bar{X}$)	2.38	2.38	2.40	2.67	2.50
Intervalo Inferior	1.94	1.94	1.98	2.21	2.08
Intervalo Superior	3.02	3.02	2.84	3.37	2.78
Varianza (s^2)	1.83	1.83	1.72	2.05	1.69
Intervalo Inferior	1.23	1.23	1.16	1.37	1.13

En el pretest del grupo A, la media aritmética rodeó la mitad de la escala de 1 a 5, de valoración y en cuanto a las varianzas se observa que hubo una dispersión significativa entre las calificaciones obtenidas por los estudiantes, se identifican dificultades para la resolución de problemas, al identificar los datos, plantear una operación matemática y redactar la respuesta. A continuación se tiene los resultados del pretest grupo B.

En el pretest para el grupo B, la media aritmética estuvo por debajo de la mitad entre 1 y 5 de valoración, comparando con el grupo A, este obtuvo más bajo rendimiento. A continuación se tiene los resultados del pretest del grupo C.

Tabla 4

Medias, Varianzas e Intervalos de Confianza del Pretest del grupo B

Pregunta	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Intervalo Superior	2.83	2.83	2.80	3.24	2.74
Media ($\bar{X}$)	2.26	2.26	2.27	2.50	2.25
Intervalo Inferior	1.83	1.83	1.86	2.01	1.86
Intervalo Superior	2.87	2.87	2.68	3.78	2.46
Varianza (s^2)	1.71	1.71	1.60	2.26	1.47
Intervalo Inferior	1.14	1.14	1.07	1.50	0.98

Tabla 5

Medias, Varianzas e Intervalos de Confianza del Pretest del grupo C

Pregunta	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Intervalo Superior	2.93	2.93	2.93	3.05	3.18
Media ($\bar{X}$)	2.31	2.31	2.31	2.39	2.46
Intervalo Inferior	1.85	1.85	1.85	1.92	1.97
Intervalo Superior	3.13	3.13	3.13	3.34	3.58
Varianza (s^2)	1.84	1.84	1.84	1.96	2.11
Intervalo Inferior	1.21	1.21	1.21	1.29	1.38

La media aritmética estuvo por debajo de la mitad entre 1 y 5 de valoración. De todo lo anterior, se dedujo que para la pregunta 1 en el grupo A, con respecto al grupo B tuvo una disminución de un 2.24% y el grupo B con respecto al grupo C también se disminuyó 0.85% es decir, en el grupo C se presentó menor asertividad en la pregunta 1 con 1.39%, con respecto al grupo A.

Para la segunda pregunta, se presentó la misma disminución del grupo B y del grupo C con respecto al A que en la primera pregunta. En la tercera pregunta el grupo A, siguió teniendo la mayor media, pues el grupo B disminuyó en un 2.56% con respecto al grupo A y el grupo C disminuye en un 1.89% también con respecto al grupo A. La cuarta pregunta también tuvo como media mayor el grupo A, y se disminuyó en un 3.33% en el grupo B y en un 3.33% en el grupo C. Finalmente, en la quinta pregunta la mayor media aritmética también se presentó en el grupo A y disminuyó en un 4.91% en el grupo B y en un 0.74% en el grupo C.

En la siguiente gráfica se realizó la comparación entre las medias, dejando de manera observable evidenciar la comparación de resultados del grupo A, B y C.

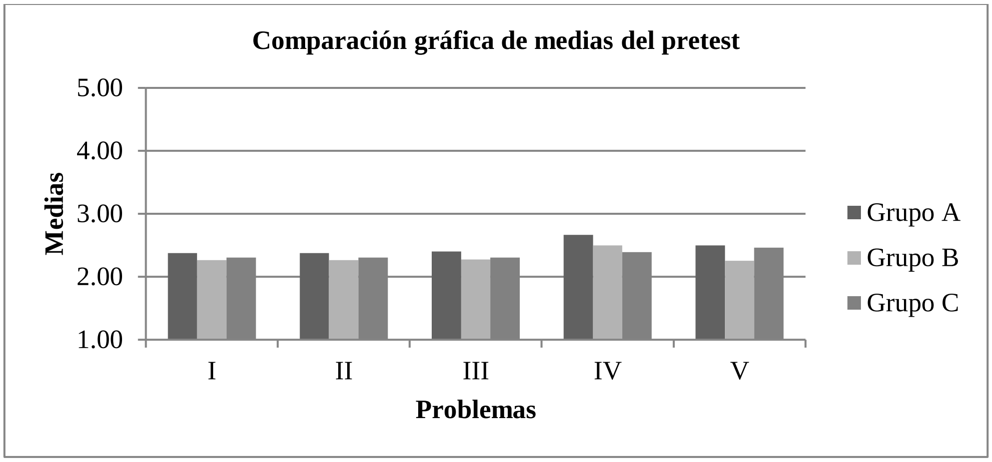


Figura 2. Comparación gráfica de las medias del pretest

La media de los tres grupos estuvo en su mayoría por debajo de la mitad de la valoración en la escala de Likert convertida de 1 a 5, por lo que con el conocimiento tradicional presentaron dificultades para resolver un problema en situaciones aditivas y multiplicativas. Para la comparación de las varianzas se realiza la siguiente gráfica (ver figura 3)

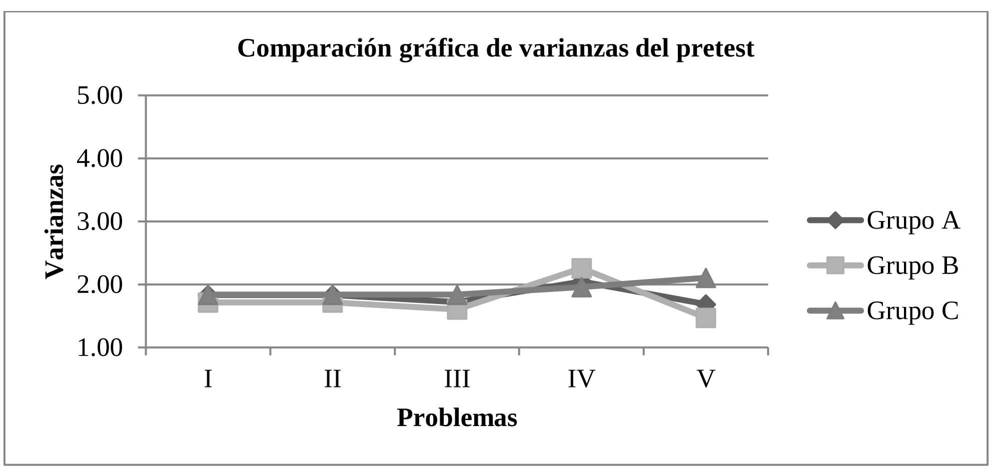


*Figura 3.*Comparación gráfica de las varianzas del pretest

4.1.2. Resultados de la prueba postest. Este es el último instrumento de recolección de datos, que permitió determinar la comprobación de la hipótesis. De igual manera, se realizó un análisis del método de Polya, verificando si cada uno de los pasos del método, fue resuelto con la valoración de 1 a 5 si se resolvió cada pregunta de cada paso y si favoreció para dar solución al problema.

A continuación se presentan las medias, las varianzas y los intervalos de confianza en el postest de los tres grupos y las gráficas de comparaciones de medias y varianzas.

Tabla 6
Medias, Varianzas e Intervalos de Confianza del Postest del grupo A

Pregunta	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Intervalo Superior	3.79	3.79	4.02	3.56	3.56
Media ($\bar{X}$)	3.45	3.45	3.73	3.34	3.34
Intervalo Inferior	3.12	3.12	3.42	3.08	3.08
Intervalo Superior	1.78	1.78	1.50	1.11	1.11
Varianza (s^2)	1.08	1.08	0.91	0.68	0.68
Intervalo Inferior	0.72	0.72	0.61	0.45	0.45

En el postest para el grupo A, le media aritmética sobrepasó la mitad en la escala de 1 a 5, de valoración. A continuación se tiene los resultados del postest del grupo C, presentando los valores del grupo, en cuanto a medias aritméticas por pregunta, varianzas por pregunta e intervalos de confianza también por pregunta, de acuerdo a la valoración que se hizo de 1 a 5 por cada constructo.

Tabla 7
Medias, Varianzas e Intervalos de Confianza del Postest del grupo B

Pregunta	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Intervalo Superior	4.08	4.22	4.08	4.09	4.05
Media ($\bar{X}$)	3.85	4.01	3.80	3.70	3.68
Intervalo Inferior	3.58	3.75	3.49	3.34	3.34
Intervalo Superior	1.17	1.05	1.45	1.97	1.84
Varianza (s^2)	0.70	0.62	0.86	1.18	1.10
Intervalo Inferior	0.47	0.42	0.57	0.78	0.73

En el postest para el grupo B, le media aritmética sobrepasó la mitad en la escala de 1 a 5, de valoración.

A continuación se tiene los resultados del postest del grupo C, presentando los valores del grupo, en cuanto a medias aritméticas por pregunta, varianzas por pregunta e intervalos de confianza también por pregunta, de acuerdo a la valoración que se hizo de 1 a 5 por cada constructo.

Tabla 8

Medias, Varianzas e Intervalos de Confianza del Postest del grupo C

Pregunta	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Intervalo Superior	4.37	4.58	4.43	4.48	4.34
Media ($\bar{X}$)	4.16	4.34	4.17	4.21	4.04
Intervalo Inferior	3.89	4.06	3.88	3.90	3.73
Intervalo Superior	1.05	1.19	1.31	1.39	1.48
Varianza (s^2)	0.62	0.70	0.77	0.82	0.87
Intervalo Inferior	0.41	0.46	0.51	0.54	0.57

En el postest para el grupo C, le media aritmética sobrepasó la mitad en la escala de 1 a 5, de valoración.

De lo anterior se dedujo que en el postest para la pregunta 1 en el grupo A, con respecto al grupo B tuvo un aumento de 3.45 a 3.85 con una diferencia de 0.4, por lo que hubo una mayor aprobación de este pregunta en el grupo B en un 8.05% y con respecto al grupo C también se aumentó, es decir, en el grupo C se presentó mayor asertividad en la pregunta 1 con 14.11% con respecto al grupo A.

Para la segunda pregunta, también se presentó un aumento del grupo B con respecto al A en un 11.21% y también un aumento de C con respecto al A de 17.78%. En la tercera pregunta el grupo C, siguió teniendo la mayor media, pues el grupo B disminuyó en un 7.44% con respecto al grupo C y el grupo A disminuyó en un 8.94% también con respecto al grupo C. La cuarta pregunta también tuvo como media mayor el grupo C, y se disminuyó en un 10.11% en el grupo B y en un 17.28% en el grupo A. Finalmente, en la quinta pregunta la mayor media aritmética también se presentó en el grupo C y disminuyó en un 7.2% en el grupo B y en un 14.06% en el grupo A.

En la siguiente gráfica se realizó la comparación entre las medias de los tres grupos en el postest, dejando de manera observable evidenciar la comparación de resultados del grupo A, B y C, esta gráfica será un histograma o diagrama de barras, recordando que 1 es la valoración más baja para cada problema y 5 la más alta.

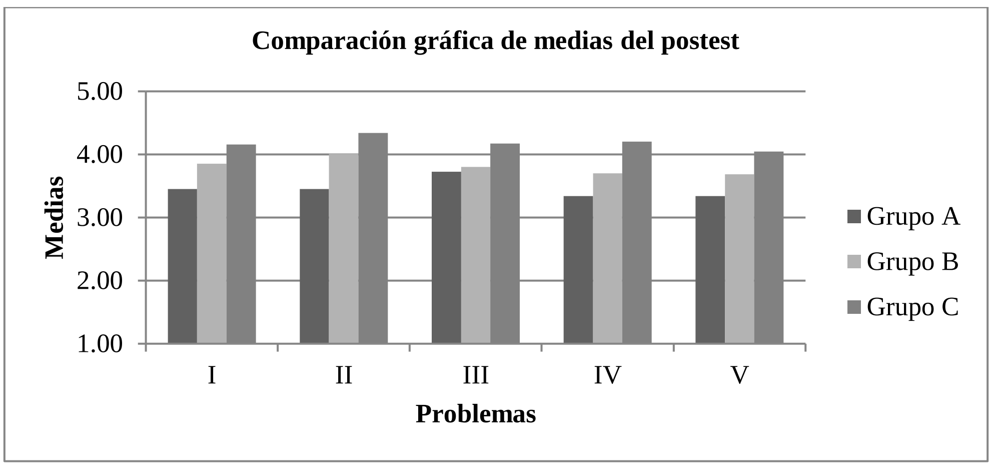


Figura 4. Comparación gráfica de las medias del postest

La media aritmética del grupo C, fue la más alta en cada una de los cinco problemas que se les presentó a los estudiantes en la prueba postest, sin embargo fue de analizar, que el grupo B quien utilizó solo el método de Polya, le precedía en cantidad con respecto a la media al grupo C, excepto en el problema número tres, recordando en el pretest, las medias aritméticas del grupo A, siempre estaban por encima de los otros dos grupos, sin embargo después del tratamiento este grupo, quedó con la media más baja. Para la comparación de las varianzas se realizó la siguiente figura, que permitió visualizar la variabilidad de los tres grupos con respecto a sus valoraciones.

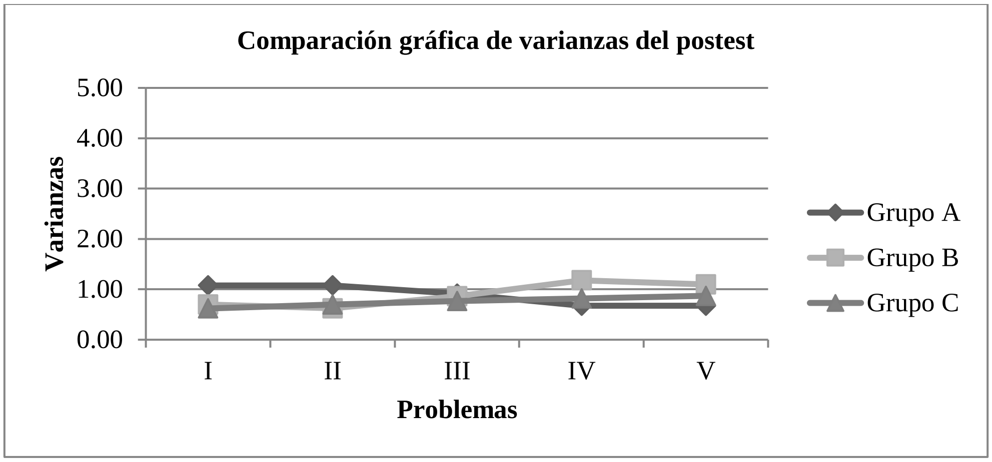


*Figura 5.*Comparación gráfica de las varianzas del postest

4.1.3. Resultados del método de Polya. El método de Polya fue valorado en el postest, con los grupos B y C, obteniendo los siguientes resultados.

Tabla 9
Medias, Varianzas e Intervalos de Confianza Método de Polya grupo B

Pregunta	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Intervalo Superior	4.19	4.42	4.28	4.25	4.2
Media ($\bar{X}$)	3.9	4.14	3.96	3.93	3.87
Intervalo Inferior	3.59	3.831	3.64	3.6	3.54
Intervalo Superior	1.48	1.45	1.61	1.62	1.68
Varianza (s^2)	0.89	0.87	0.96	0.97	1.003
Intervalo Inferior	0.59	0.58	0.62	0.64	0.67

A continuación se presentan los datos correspondientes al método de Polya del grupo C.

Tabla 10
Medias, Varianzas e Intervalos de Confianza Método de Polya grupo C

Pregunta	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Intervalo Superior	4.59	4.73	4.63	4.65	4.6
Media ($\bar{X}$)	4.22	4.41	4.25	4.34	4.15
Intervalo Inferior	3.87	4.09	3.89	4.01	3.75
Intervalo Superior	1.83	1.58	1.89	1.57	2.29
Varianza (s^2)	1.08	0.93	1.11	0.923	1.34
Intervalo Inferior	0.71	0.61	0.73	0.61	0.88

El grupo C, en comparación al grupo B, usó el *software Geogebra* para resolver las preguntas en el método de Polya, así que la media aritmética en la primera pregunta del grupo C tuvo un aumento de 10.91% con respecto al B, en la segunda pregunta el grupo C aumentó 8.78%, en la tercera pregunta se incrementó en un 9.51%, en la cuarta pregunta acrecentó en un 13.9% y finalmente en la pregunta cinco el aumento fue de 9.5%. En cuanto a las varianzas tanto en el grupo B con el grupo C, oscilaron entre 0.05 y 0.08. A continuación se presenta la comparación gráfica del Método de Polya.

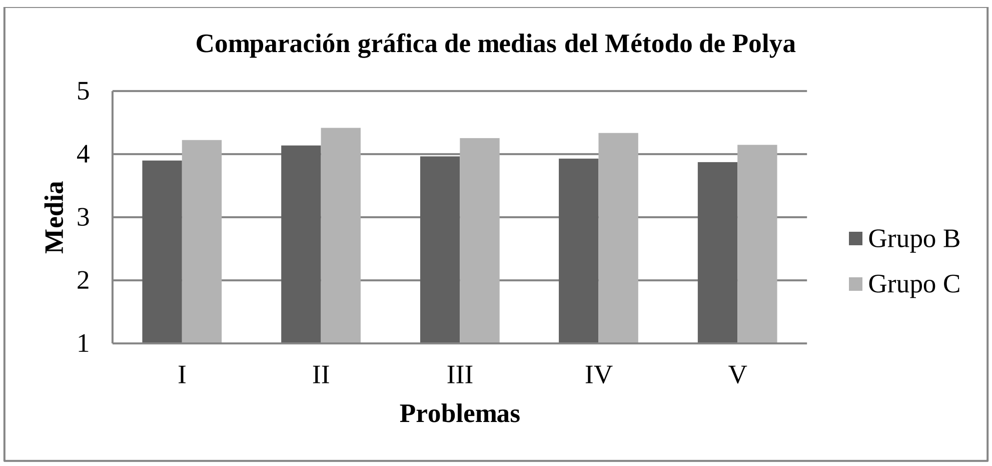


Figura 6. *Comparación gráfica de medias del Método de Polya*

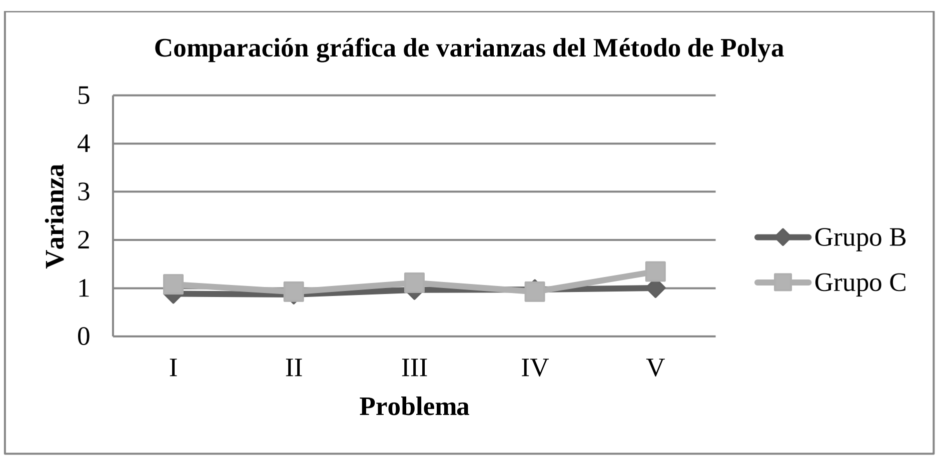


Figura 7. *Comparación gráfica de varianzas del Método de Polya*.

Lo que se mostró en la sección se analizará en la siguiente sección, finalizando con una gráfica e comparación el pretest y postest de cada uno de los tres grupos.

4.2 Resultados: análisis e interpretación de datos

Los resultados arrojados fueron analizados desde cálculos estadísticos como la prueba de hipótesis, esta última determina el objetivo tanto del pretest como del postest, y así se pudo determinar si se cumplen o no con dichos objetivos trazados en la presente investigación. Se realiza con la escala de Likert, un análisis estadístico acerca de la aplicación del método de Polya, sobre si respondió o no cada pregunta de cada paso del método.

Ho: $\mu_{A} - \mu_{B} = 0$ No hay una diferencia significativa entre el promedio de los alumnos en el grupo experimental y el promedio de los alumnos en el grupo de control.

Ha:-$\mu_{A} - \mu_{B} \neq 0$ Sí hay una diferencia significativa entre el promedio de los alumnos en el grupo experimental y el promedio de los alumnos en el grupo de control, siendo el primero mayor que el segundo.

Primero se realizó una prueba hipótesis de igualdad de medias utilizando el estadístico t

$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{s^2 p\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$ con $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i f_i}{n-1}$, donde x_i es el rango de la escala de Likert y fi es la frecuencia de respuesta. También se calculó la varianza con $s^2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) f_i}{n-1}}$ a un nivel de significancia de α= 0.05, si $|t| > t_{\alpha/2}$ se rechaza la hipótesis nula, donde la t, es el estadístico t y $t_{\alpha/2}$ es el valor en tablas con $n_A + n_B - 2$ grados de libertad, al 95% de confianza.

En cuanto a la prueba de hipótesis de igualdad de varianzas se utiliza la prueba de distribución F, permitiendo terminar la variabilidad entre dos muestras. La hipótesis nula se acepta cuando $\frac{{\sigma_1}^2}{{\sigma_2}^2} = 1$ y se acepta la hipótesis alternativa si $\frac{{\sigma_1}^2}{{\sigma_2}^2} > 1$, así que el criterio a observar es que si la F estimada es mayor que F_α, con n_A-1 grados de libertad en el numerador y n_B-1 grados de libertad en el denominador.

Ho: $\frac{{s_A}^2}{{s_B}^2} = 1$ No hay una diferencia significativa entre las varianzas de los alumnos en el grupo experimental y el promedio de los alumnos en el grupo de control.

Ha: $\frac{{s_A}^2}{{s_B}^2} \neq 1$ Sí hay una diferencia significativa entre las varianzas de los alumnos en el grupo experimental y las varianzas de los alumnos en el grupo de control, siendo el primero mayor que el segundo.

A continuación se analiza los resultados presentado en el pretest, por medio del método estadístico de prueba de hipótesis de igualdad de medias y de varianzas.

4.2.1 Análisis de la prueba pretest. Después de tener claro los resultados obtenidos de esta prueba, aunque el grupo A tuvo una media de 2.46, el grupo B de 2.31 y el grupo C de 2.35, cuando se hizo la prueba de hipótesis de igualdad de medias, se consideró como hipótesis nula que los tres grupos tienen igualdad estadística de medias con un nivel de significancia del 5%.

Para el caso de esta investigación fue importante probar en el pretest que las medias de los grupos son iguales, pues eso permite que exista igualdad inicial en la muestra y que las comparaciones sean estadísticamente confiables en el postest, por lo que conviene aceptar Ho y rechazar Ha.

Ahora, se presenta la prueba de hipótesis por pregunta.

Tabla 11
Prueba de hipótesis de igualdad de medias pretest grupo A y pretest grupo B

Pregunta	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
t estimado	0.37	0.37	0.44	0.50	0.86
Valor $t_{\alpha/2}$			1.9917		
Aceptar	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho

Se aceptó la hipótesis nula y se determinó que los grupos A y B se encontraron en las mismas circunstancias de conocimiento antes de la aplicación del tratamiento. A continuación se realiza la prueba de hipótesis de igualdad de medias entre el grupo A y el grupo C.

Tabla 12
Prueba de hipótesis de igualdad de medias pretest grupo A y pretest grupo C

Pregunta	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
t estimado	0.2231634	0.223163	0.307832	0.85481	0.116724
Valor $t_{\alpha/2}$			1.9925		
Aceptar	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho

Se aceptó la hipótesis nula y se determinó que los grupos A y C se encontraron en las mismas circunstancias de conocimiento antes de la aplicación del tratamiento. A continuación se realiza la prueba de hipótesis de igualdad de medias entre el grupo B y el grupo C.

Tabla 13
Prueba de hipótesis de igualdad de medias pretest grupo B y pretest grupo C

Pregunta	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
t estimado	0.136727	0.136727	0.110103	0.32931	0.669177
Valor $t_{\alpha/2}$			1.9935		
Aceptar	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho

Se aceptó la hipótesis nula y se determinó que los grupos B y C se encontraron en las mismas circunstancias de conocimiento antes de la aplicación del tratamiento. Se realizó la prueba de hipótesis de igualdad de varianzas, para determinar si hubo variabilidad entre los datos al comparar dos muestras, pues también se compararon el grupo A con C, A con el B y B con el C, con el fin de mirar si se rechaza o no la hipótesis nula (Ho).

Tabla 14
Prueba de hipótesis de igualdad de varianzas pretest grupo A y pretest grupo B

Pregunta	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
F estimada	0.936523461	0.936562824	0.931243851	1.10322731	1.14718948
Valor F_{α}			1.69		
Aceptar	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho

La prueba de hipótesis arrojó que no hay variabilidad entre los grupos A y B, así que se rechazó la hipótesis alternativa.

La prueba de hipótesis arrojó que no hay variabilidad entre los grupos A y C, así que se rechazó la hipótesis alternativa.

Tabla 15
Prueba de hipótesis de igualdad de varianzas pretest grupo A y pretest grupo C

Pregunta	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
F estimada	1.004747024	1.004789255	1.067936037	0.958391107	1.248128196
Valor F_{α}			1.74		
Aceptar	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho

Tabla 16
Prueba de hipótesis de igualdad de varianzas pretest grupo B y pretest grupo C

Pregunta	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
F estimada	1.072847682	1.072847682	1.146784524	0.868715902	1.431839536
Valor F_{α}			1.74		
Aceptar	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho

La prueba de hipótesis arrojó que no hay variabilidad entre los grupos B y C, así que se rechazó la hipótesis alternativa.

Estas dos pruebas de hipótesis tanto para igualdad de medias como para igualdad de varianzas, es lo que permitió evidenciar si los grupos son comparables o no, pues si las medias y las varianzas son iguales, quiere decir que los estudiantes estuvieron en igualdad de circunstancias y con dificultades y procesos mentales semejantes, aspecto a tener en cuenta, pues la institución no tiene mayor fluctuación en cuanto a entrada de estudiantes nuevos, así que el proceso formativo de la mayoría de los estudiantes ha sido el mismo, aunque la parte social y cultural pueda influenciar en su proceso de aprendizaje.

Igualmente, al comparar las varianzas del grupo A, del grupo B y del grupo C, se afirma que al comparar los grupos A con B, A con C y B con C se acepta de igual manera la hipótesis nula en la que las varianzas son iguales. Por lo tanto, los tres grupos fueron comparables evidenciando la dificultad que presentaban para extraer datos, identificar la operación matemática y redactar la respuesta o solución al problema.

A continuación se presentan los resultados de la prueba postest, la cual respondió a la pregunta de investigación y mostró si se logró o no el objetivo de la presente investigación, que era obtener un aumento en el rendimiento académico en resolución de problemas con situaciones aditivas y multiplicativas en estudiantes de primer grado de secundaria, aplicando el método de Polya con el uso del *software Geogebra*.

4.2.2 Análisis de la prueba postest. De igual manera, que el pretest, se realizó la prueba de hipótesis de igualdad de medias y de varianzas, comparando los grupos A con el B, A con el C y B con el C.

Inicialmente se hizo la prueba de hipótesis de medias de acuerdo a los resultados presentados y luego se realizará la prueba de hipótesis de igualdad de varianzas, lo que se espera es que las varianzas seas iguales, por lo que se acepte la hipótesis nula, por procedimiento de aprendizaje, pues sea con cualquier método se está encaminando hacia el aprendizaje, pero que las medias sean diferentes y que muestren quien obtuvo el mayor rendimiento académico en resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, entonces se tendrá que rechazar la hipótesis cuando se realiza esta prueba.

A continuación se realiza la prueba de hipótesis de medias y de varianzas por comparación de grupos de la prueba postest.

Tabla 17
Prueba de hipótesis de igualdad de medias postest grupo A y postest grupo B

Pregunta	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
t estimado	1.89088158	2.69173208	0.351465483	1.63770508	1.60025748
Valor $t_{\alpha/2}$			0.6777		
Aceptar	Ha	Ha	Ho	Ha	Ha

Se aceptó la hipótesis alternativa y se determinó que los grupos A y B se encontraban diferentes circunstancias de conocimiento después de la aplicación del tratamiento, mostrando que es el grupo B es quien tuvo el más alto rendimiento académico en la resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas con respecto al grupo A. A continuación se realiza la prueba de hipótesis de igualdad de medias entre el grupo A y el grupo C, para determinar si se aceptó la hipótesis alternativa para determinar cuál de los dos grupos tuvo mejor rendimiento académico.

Tabla 18
Prueba de hipótesis de igualdad de medias postest grupo A y postest grupo C

Pregunta	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
t estimado	3.35837809	4.12639802	2.129151402	4.3424812	3.46752899
Valor $t_{\alpha/2}$			0.6778		
Aceptar	Ha	Ha	Ha	Ha	Ha

Se aceptó la hipótesis alternativa y se determinó que los grupos A y C se encontraban en diferentes circunstancias de conocimiento después de la aplicación del tratamiento, mostrando que es el grupo C tiene el más alto rendimiento académico en resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas con respecto al grupo A. A continuación se realiza la prueba de hipótesis de igualdad de medias entre el grupo B y el grupo C.

Tabla 19

Prueba de hipótesis de igualdad de medias postest grupo B y postest grupo C

Pregunta	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
t estimado	1.60478484	1.73251363	1.772430982	2.18175864	1.56270527
Valor $t_{\alpha/2}$			0.6779		
Aceptar	Ha	Ha	Ha	Ha	Ha

Se aceptó la hipótesis alternativa y se determinó que los grupos B y C se encontraban en diferentes circunstancias de conocimiento después de la aplicación del tratamiento, mostrando que es el grupo C tiene el más alto rendimiento académico en resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas con respecto al grupo A.

A continuación se realiza la prueba de hipótesis de igualdad de varianzas entre los tres grupos, así, grupo A con grupo B, A con C y B con C, de tal forma que por ser un proceso de aprendizaje lo que se pretendió mostrar es que no hay diferencia significativa entre las varianzas de los grupos.

Tabla 20

Prueba de hipótesis de igualdad de varianzas postest grupo A y postest grupo B

Pregunta	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
F estimada	1.5387586	1.7237627	1.05341952	0.57320734	0.61390119
Valor F_{α}			1.69		
Aceptar	Ha	Ha	Ha	Ha	Ha

La prueba de hipótesis arrojó que no hay variabilidad entre los grupos A y B en la mayoría de preguntas del postest, así que se rechazó la hipótesis alternativa, las varianzas son iguales estadísticamente.

Tabla 21
Prueba de hipótesis de igualdad de varianzas postest grupo A y postest grupo C

Pregunta	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
F estimada	1.73780557	1.53560344	1.18573625	0.82623832	0.77502117
Valor F_{α}			1.74		
Aceptar	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho

La prueba de hipótesis arrojó que no hay variabilidad entre los grupos A y C en el postest, así que se rechazó la hipótesis alternativa.

Tabla 22
Prueba de hipótesis de igualdad de varianzas postest grupo B y postest grupo C

Pregunta	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
F estimada	1.12935556	0.89084387	1.12560687	1.4414301	1.26245263
Valor F_{α}			1.74		
Aceptar	Ha	Ha	Ho	Ho	Ho

La prueba de hipótesis arrojó que no hay variabilidad entre los grupos B y C en el postest, así que se rechazó la hipótesis alternativa.

Estas dos pruebas de hipótesis tanto para igualdad de medias como para igualdad de varianzas, es lo que permitió evidenciar que los grupos no presentaron diferencia de varianzas, pero en las medias sí. Al comparar el grupo A con el grupo B, el que mejor rendimiento académico tuvo fue el B, al comparar el A con el C, el que mejor tuvo rendimiento fue el C y al comparar el B con el C, el que mejor tuvo rendimiento fue el grupo C, por tanto, es el grupo C quien tuvo el más alto rendimiento académico de los tres grupos.

Igualmente, al comparar las varianzas del grupo A, del grupo B y del grupo C, se afirmó que al comparar los grupos A con B, A con C y B con C se aceptó de igual manera la hipótesis nula en la que las varianzas son iguales.

En las medias, se pudo observar que existe diferencia, donde se aceptaron las hipótesis alternativas al relacionar A con C y B con C, obteniendo la siguiente relación $\mu_{A<}\ \mu_{B<}\ \mu_C$ pues se obtuvieron mejores resultados en el grupo C.

Es el grupo C, donde los mayores porcentajes se evidenciaron en las valoraciones en la escala de Likert cumpliendo con la ejecución de cada uno de los cuatro pasos del método de Polya y apoyándose en *Geogebra* para realizar las operaciones o la ejecución del plan que ellos mismos elaboraron en el paso dos del método descrito. En el tercer grupo se presentó además de estar entusiasmado por incluir elementos tecnológicos en su aprendizaje, la opción de que si no se acuerdan de alguna tabla de multiplicar o necesitan hacer una figura precisa lo pueden realizar en el *software Geogebra*.

4.2.3 Análisis del método de Polya. De acuerdo a los resultados obtenidos donde el grupo B tuvo una media de 3.96 y una varianza de 0.93 y el grupo C, una media de 4.27 y una varianza de 1.07 se realizó la siguiente prueba de hipótesis de igualdad de medias y de varianzas.

Tabla 23
Prueba de hipótesis de igualdad de medias método de Polya grupo B y grupo C

Pregunta	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
t estimado	2.173219792	1.869312731	1.884016796	2.623990658	1.724279245
Valor $t_{\alpha/2}$			1.9917		
Aceptar	Ha	Ho	Ho	Ha	Ho

Hay diferencia de medias en las preguntas 1 y 4 acerca de problemas con situaciones aditivas y multiplicativas, así que se aceptó la hipótesis alternativa.

Tabla 24

Prueba de hipótesis de igualdad de varianzas Método de Polya grupo B y pretest grupo C

Pregunta	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
F estimada	0.822254547	0.936953352	1.153843927	0.956313635	1.340056657
Valor F_{α}			1.69		
Aceptar	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho

No hay diferencia de varianzas en las preguntas, por lo que se rechazó la hipótesis alternativa, así que las varianzas son iguales.

Tabla 25

Análisis por categoría del método de Polya

CATEGORÍAS	***PREGUNTAS (Método Polya)***	***GRUPO B ($\bar{x}$/38)***	***GRUPO C ($\bar{x}$/36)***
Constructo 1 Dominio del algoritmo de la suma y la multiplicación	¿Usa correctamente el algoritmo de la suma?	35/38	34/36
	¿Usa correctamente el algoritmo de la multiplicación?	35/38	34/36
Constructo 2 Interpretación del enunciado	¿Por dónde debo empezar?	38/38	36/36
	¿Cuáles son los datos?	28/38	20/36
	¿Qué datos son relevantes y cuáles son los irrelevantes?	35/38	23/38
	¿Cuál es la incógnita?	24/38	27/36
	¿Ya he resuelto uno parecido?	14/38	27/36
Constructo 3 Elaboración del plan de solución	¿Cuál estrategia usar: ensayo y error, variable, patrón, lista, problema similar más simple, figura, diagrama, razonamiento directo, razonamiento indirecto propiedades de los números, problema equivalente, hacia atrás, casos, ecuación, fórmula, modelo, análisis dimensional, sub- metas, coordenadas o simetría?	25/38	31/36
Constructo 4 Ejecución del plan de solución	¿Para qué hacemos lo que hacemos?	35/38	34/36
Constructo 5 Revisión de la solución	¿Es tu solución correcta?	25/38	27/36
	¿Existe una solución más sencilla o diferente?	13/38	12/36
	¿Puedes generalizar tu solución?	9/38	12/36
	¿Cuál era la información importante?	8/38	30/36

En la anterior tabla se observó que en las preguntas donde hubo mayor fortaleza con el uso del *software* en comparación al grupo B, fue en los dos últimos constructos, que consistían en la ejecución del plan y en la revisión de la solución, aspecto que el *software* ofrecía al utilizar operaciones en la hoja de cálculo de *Geogebra* y el área de trabajo para hacer gráficas, tablas entre otras estrategias de solución.

A continuación se realiza la discusión de resultados frente a los resultados presentado y a los analizados.

A continuación se presenta la gráfica e comparación de medias entre el pretest y el postest e los tres grupos, que fueron objeto en la investigación. Con esta gráfica se analiza el incremento en el rendimiento académico en los tres grupos, en especial en el grupo C, en el que se evidenció un porcentaje de incremento del 36.6 %, mientras que en el grupo B hubo un incremento de 30% y en el A de 20%, por lo que hubo mayor índice de rendimiento académico en el grupo donde se aplicó el método de Polya con el uso del *software Geogebra*.

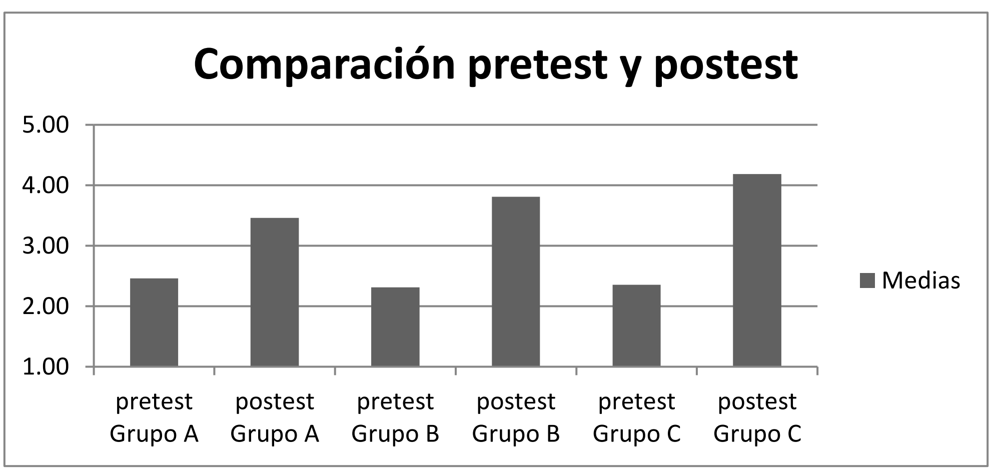


Figura 8. *Comparación gráfica de medias entre el pretest y el postest*.

48.1%, por lo que hubo mayor índice de rendimiento académico en el grupo donde se aplicó el método de Polya con el uso del *software Geogebra*.

4.2.4 Discusión de resultados. El presente estudio se realizó con el propósito de identificar si se presenta aumento en el rendimiento académico para la solución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas aplicando el método de Polya con el uso del *software Geogebra* en el primer grado de secundaria, estuvo basado en el método mixto, pues se utilizó datos numéricos con la escala de valoración de Likert y se realizó cálculos y métodos estadísticos para el análisis de datos, como la media aritmética, la varianza, los intervalos de confianza y las pruebas de hipótesis de igualdad de medias y de varianzas. Esta investigación se sustentó bajo la aplicación de instrumentos a los estudiantes objeto de estudio, pues se les dio una valoración de 1 a 5 donde 5 era la nota más alta por cada problema, de acuerdo al tratamiento que hayan recibido, tradicional para el grupo A, método de Polya para el grupo B y método de Polya con el uso de *Geogebra* para el grupo C.

Con respecto a la teoría de agregar un factor innovador, mediante un modelo de gestión de aprendizaje (Ramírez, 2012) en el área de matemáticas implicó el poder cambiar concepciones y rutinas en las que no solo mejoraran el ambiente de aprendizaje si no que se consiguieran un mayor rendimiento académico, para el caso de la implementación del método de Polya con el uso del *software Geogebra*, los estudiantes prestaban más atención hacia lo nuevo y creían que tenía una especie calculadora o ayuda con el *software*, pues podían realizar operaciones que tal vez sin el programa pudiesen cometer algún error, sin embargo, es importante que en la etapa de tratamiento o fase dos, el uso de *Geogebra* quedara claro y que los estudiantes desarrollaran diferentes ejercicios con el programa, trabajando en equipo.

A continuación se realiza una explicación de la confiabilidad y validez de la presente investigación.

4.2.5 Confiabilidad y validez. Con el fin de validar el grado de confiabilidad de la información recogida por medio de los instrumentos pretest y postest, se diseñaron cuatro formatos (ver apéndices D, F, G y H), bajo la concepción de Díaz y Poblete (2001), en el que se requiere que los problemas sean contextuales de tipo real y realista y bajo los parámetros de Polya (1971), con el uso de las preguntas en cada paso de su método de resolución de problemas.

La prueba diagnóstica o pretest que fue el mismo para los tres grupos, y la prueba postest con los mismos problemas pero requiriendo una proceso de solución diferente de acuerdo al tratamiento por grupo, y se elaboró una tabla donde se organizaron los datos obtenidos según la valoración que se le dio a cada estudiante, cuyas preguntas estuvieron direccionadas a resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas utilizando los tres diferentes tratamientos, se verificaron si los estudiantes cumplieron con lo requerido y de ser así se les dio una valoración de 10 por problema.

La confiabilidad de los datos se determinó en la medida de no presentar discrepancias al realizar los cálculos estadísticos por muestra al comparar los datos obtenidos y evidencias fotográficas (ver apéndices K, L y M).

Partiendo de este aspecto, la metodología de la presente investigación parte de los aspectos éticos, dando a conocer los objetivos de la investigación y los roles que cada persona desempeña durante ella, así que se proponen dos formatos de consentimiento una para el rector y otra para los estudiantes de la institución educativa en donde se hizo la presente investigación (ver apéndices A y B), ya que es importante contar con la aprobación de todo este proceso investigativo del rector de la institución educativa elegida y de los estudiantes participantes de este estudio.

Este capítulo presentó los resultados y análisis generados por la implementación del método de Polya con el uso del *software Geogebra*, comprobando la hipótesis de investigación, además se discutieron los resultados y se explicaron las pruebas de confiabilidad y validez de la presente investigación.

El próximo capítulo presenta los principales hallazgos que resultaron después de realizar un análisis de la información, de igual forma las recomendaciones para investigaciones y trabajos futuros.

Capítulo 5. Conclusiones y recomendaciones

Este capítulo presenta las ideas esenciales que se arrojaron después de analizar los resultados frente a la solución de la pregunta de investigación, la cual consistió en saber si el método de Polya pudo constituirse en una estrategia que aumentó el rendimiento académico de los estudiantes de primer grado de secundaria en la solución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas con el uso del *Geogebra*.

Al inicio, se concluye los alcances obtenidos de acuerdo a los objetivos de la presente investigación y luego se expone las recomendaciones como resultado de la reflexión que dejó el desarrollo de este estudio.

5.1. Conclusiones

El desarrollo de esta investigación apoyado en la implementación del método de Polya con el uso del *software Geogebra* tuvo resultados favorables al utilizar el trabajo colaborativo para la resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, pues en esta institución educativa objeto de estudio, se ha apoyado la enseñanza y aprendizaje entre pares, con un muy buen resultado, al socializar ideas y compartir el aprendizaje.

Inicialmente, con el diagnóstico se resuelve que se presentó una gran dificultad para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, contenido que para un nivel de primero de secundaria deberían estar apropiados, los algoritmos de la suma y de multiplicación no son un obstáculo, sino en la interpretación de la situación problema y la identificación de una operación o estrategia que lleve a la solución.

Así que identificada esta problemática, al utilizar un modelo didáctico y un *software* educativo como lo son el método de Polya y *Geogebra*, para incrementar el rendimiento académico en resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, se realizaron los siguientes hallazgos:

Los estudiantes se sentían cómodos explicándose entre sí y entregando trabajos en grupo, pues los resultados son compartidos y las diferentes percepciones se ven integradas para obtener un producto lo mejor posible.

La implementación del método de Polya, fue favorable en la resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, pues todos los estudiantes podían responder las primeras preguntas sin necesidad de tener mayor conocimiento sobre el contenido matemático, solo abstrayendo información del problema.

Aunque es un método más largo de solución a comparación del tradicional en el cual había que sacar los datos, realizar la operación y redactar la respuesta, al entender el problema, se ideaban un plan de acción para poder resolverlo, en donde no estaban obligados a realizar una suma o una multiplicación, bien podían hacer un dibujo, una tabla, organizar datos, entre otras opciones, pues en el tercer paso de este método, hacían realidad este plan, para dar la solución. Sin embargo, en el cuarto paso al pensar en tener que devolverse los hacía sentir mejor, porque se hacía revisión de lo que habían hecho y podrían pensar en otras posibilidades al cambiar algún dato o saber si todos los datos eran importantes.

Las actividades realizadas con el grupo C, al implementar el método de Polya con el uso del *software Geogebra*, condujeron a resultados satisfactorios obteniendo la mayor media que es de 8.08, en comparación a los grupos A con 6.9 y al grupo B con

7.25, aunque en la mayoría de las veces solo utilizaron la hoja de cálculo del programa, esto no les permitió cometer errores algorítmicos para dar la solución del problema y cumplir con los cuatro pasos del método de Polya, algunos estudiantes intentaron realizar dibujos pero se apoyaban en las operaciones con la hoja de cálculo, ellos lo comparaban como tener una calculadora, quizás pensaban que era una ventaja, sobre todo, para los que tenían dificultad para realizar una suma o una multiplicación.

El limitante se presentó al implementar el *software Geogebra*, pues en la primera sesión a algunos computadores ya les habían desinstalado el programa, así que mientras descargaba, se tuvo que utilizar la pizarra digital para que fueran visualizando el manejo del *software*, por lo que se pasó a algunos estudiantes a la pizarra para manipularlo, aspecto que no estaba planeado, pero que sirvió para el aprendizaje entre pares, como no todos los computadores quedaron con *Geogebra*, se trabajó en grupos de dos y tres estudiantes, dando inicio a la fase de tratamiento.

Otro limitante, también con el programa fue cuando se presentó el postest, pues cada nueva sesión de trabajo habían menos computadores con el *software*, teniendo en cuenta que otros docentes con sus grupos, también tenían acceso a esos computadores, entonces se tuvo que aplicar el instrumento por pequeños grupos, mientras se instalaba de nuevo el programa, así que esta prueba postest se tomó más tiempo de lo esperado, pero cada estudiante solo tuvo dos horas al igual que los otros grupos para presentar dicha prueba.

Dando respuesta a la pregunta de investigación, se obtuvo un mayor rendimiento académico en resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas implementando el método de Polya con el uso del *software Geogebra*, este estudio afirma la idea de que la innovación (Ramírez, 2012) debe ser una constante en el aula de matemáticas, despertar la curiosidad del estudiante, darle prioridad a resolver una situación problema con un contenido matemático más que poder realizar un algoritmo, y que utilizando una estrategia o un método de solución requiere de un acompañamiento del docente, un trabajo en equipo y una producción individual para un producto colectivo.

De lo anterior se afirma que se cumplieron con los objetivos trazados en esta investigación, probando la hipótesis que hay un aumento en el rendimiento académico en resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas aplicando el método de Polya con el uso del *software Geogebra*.

A continuación, se realizan algunas recomendaciones basándose en las conclusiones de la sección anterior.

5.2. Recomendaciones

Las recomendaciones que se describen a continuación son el producto de la reflexión de los hallazgos obtenidos en esta investigación, pensando el mejoramiento de la calidad educativa y en especial de la adquisición de la competencia matemática.

Recomendaciones a los docentes. Se sugiere a los docentes del área de matemáticas además de utilizar recursos tecnológicos ofrecidos en internet, como cursos en línea, videos, *software* libres, actividades interactivas, entre otros, apropiarse de los diferentes modelos didácticos que han surgido a través de la historia y han sido aplicados en otros estudio con hallazgos favorables, consiguiendo no solo el aprendizaje de un contenido matemático sino que el estudiante sea competente al utilizar las matemáticas en su contexto.

Los instrumentos de evaluación deben estar diseñados con preguntas claras y aplicadas al contexto de estudiante, la escuela, su barrio, su hogar, entre otros entornos que él reconozca, para que vea la aplicación de su conocimiento en una situación real y que en cualquier momento se le puede presentar.

Recomendaciones a la educación matemática. Para la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos, se propone el uso del método de Polya, que consiste en cuatro pasos: entender el problema, configurar un plan, ejecutar el plan y mirar hacia atrás, método que lleva poco a poco al estudiante a realizar una lectura de la situación problema que él debe resolver e inclusive pensar en otras situaciones más sencillas que el haya resuelto o posibles situaciones que tenga que resolver más adelante, todo esto para que el aprendizaje se vuelva aplicado o contextualizado.

Recomendaciones a la educación. Es necesario realizar pruebas diagnósticas que permitan identificar conocimientos previos que deban ser fortalecidos y afianzados durante una fase de tratamiento, que permitan arrojar datos satisfactorio en un prueba formativa, como producto del trabajo equipo y de un proceso en el cual se adquiere un conocimiento que proporciona una competencia matemática.

Revisar los requerimientos mínimos tecnológicos para un estudio que requiera del uso de computadores o dispositivos móviles y acceso a internet en la muestra de la investigación, pues el aprovechamiento de la implementación, resultados y hallazgos dependerán de ello.

Los aspectos tecnológicos, suelen tener fallar de conectividad, flujo eléctrico, disponibilidad, así que es necesario realizar pruebas con anterioridad e idear algún plan de apoyo para cuando suceda alguna eventualidad.

Se sugiere realizar de manera interdisciplinaria grupos de estudio que generen una mayor calidad educativa a partir de la resolución de problemas, desde todas las ciencias: matemáticas, sociales, naturales, filosóficas, entre otras, que promuevan modelos didácticos y el uso de herramientas tecnológicas que ofrece internet.

Para futuras investigaciones se sugiere partir de los resultados presentados en este estudio para realizar un análisis cualitativo siguiendo las características: presentando los resultados agrupados por las categorías que fueron relevantes, presentando evidencia del trabajo de campo, realizando métodos comparativos de forma constante, incidencias de respuesta en cada uno de las preguntas de cada pasa del método de Polya (1971).

Una nueva pregunta que puede formularse a partir de esta investigación es ¿cómo un modelo didáctico se puede implementar en la enseñanza de resolución de problemas matemáticos que involucren el uso de las nuevas tecnologías de información y de comunicación de manera contextual?, desprendiendo otra pregunta ¿lo innovador se puede volver rutinario? Y otra ¿el uso de herramientas tecnológicas puede interferir en el trabajo en de aula?

Finalmente, esta investigación es el punto de partida para otros estudios que quieran incluir un factor innovador como lo fue la combinación del método de Polya con el uso del *software* Geogebra, al promover el mejoramiento del proceso enseñanza-aprendizaje en el contexto de las matemáticas aplicadas al entorno, ofreciendo una ayuda al docente de matemáticas en su labor como orientador de procesos.

Referencias

Abánades, M. Botana, F. Tabera, L. (2009). Software matemático libre. La Gaceta de la RSME. *La Columna de Matemática Computacional*, 12(2), 325-346

Adán, I. (2004). *Estilos de aprendizaje y rendimiento académico en las modalidades de bachillerato* (Tesis Doctoral). UNED, España. Recuperado de: http://www.estilosdeaprendizaje.es/Iadan.pdf

Agudelo, G. Bedoya, V. Restrepo, A. (2008). *Método heurístico en la resolución de problemas matemáticos.* Universidad Tecnológica de Pereira. Facultad de ciencias en la educación. Colombia.

Aiello, M. (2004). El blended learning como práctica transformadora. *Pixel-Bit. Revista de Medios y comunicación.* 23(1). 21-26. Recuperado de: http://www.sav.us.es/pixelbit/pixelbit/articulos/n23/PIXEL_BIT_23.pdf

Alfageme, M. (2005). El trabajo colaborativo en situaciones no presenciales. *Píxel-Bit. Revista de Medios y Educación*. 26, 5-16. Recuperado de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=36802601

Álvarez, A. Brunel, N. Díaz, A. Hernández, F. (2012). Uso de recursos educativos abiertos para fomentar el razonamiento matemático en alumnos del nivel medio superior. *Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*. 8.

Ausubel, N. (1983). *Psicología educativa*. Un punto de vista cognoscitivo. 2° Ed. México. Trillas.

Barrera, F. Maldonado, D. Rodríguez, C. (2012). Calidad de la educación básica y media en Colombia: diagnóstico y propuestas. Colombia. *Serie de documentos de trabajo*, 126. Recuperado de: http://www.urosario.edu.co/urosario_files/7b/7b49a017-42b0-46de-b20f-79c8b8fb45e9.pdf

Blanco, M. (2009). *Dificultades específicas del aprendizaje de las matemáticas en los primeros años de escolaridad: detección precoz y características evolutivas*. Ministerio de Educación de España. 188. Educación.es. Recuperado de: http://redined.mecd.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/66225/00820112013529.pdf?sequence=1

Blanco, M. Anglada, M. Fernández, M. Arbonés, M. (2002). Problemas conductuales relacionados con el uso de Internet: Un estudio exploratorio. *Publicaciones de la Universidad de Murcia*. Murcia, España. 18(2), 272-292.

Bobadilla, M., Domínguez, M. y Cuéllar, M. (2010). El uso de un recurso educativo abierto como facilitador en la construcción de aprendizajes significativos. *Revista Digital Sociedad de la Información*, 20, 1-9.

Boscán, M. y Klever, K. (2012). Metodología basada en el método heurístico de Polya para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos. *Escenarios*, *10*(2), 7-19.

Botero, F. (2014). Manual de procesos y procedimientos Institución Educativa Raíces del Futuro. Ibagué - Tolima

Botero, F. (2014). Proyecto Educativo Institucional de la Institución Educativa Raíces del Futuro. Ibagué - Tolima

Burgos, J. y Ramírez, M. (2011). *Transformando Ambientes de Aprendizaje en la Educación con Recursos Educativos Abiertos*. México. 150 págs.

Cabero, J., Llorente, C., Román, P. (2007), *La tecnología cambio los escenarios: El efecto pigmalion se hizo realidad.* Comunicar. Vol. 28. 104duca. 167-175. http://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/1339/b15281310.pdf?sequence=1

CABERO, J. (2001): Las TICs: una conciencia global en la educación, en C.P.R. DE LORCA (2001): TICEMUR. Tecnologías de la información y la comunicación en educación en la región de Murcia, Lorca, Centro de Profesores, 19(36).

Calvo, M. 2008. Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas. Universidad de costa Rica. San José, Costa Rica. *Revista educación*, 32(1),123-138

Castro, R. Castro, R. 2011. Didáctica de las matemáticas: de preescolar a secundaria. Ecoe Ediciones. Colombia. 296 páginas.

Chomski, D. (2012). *L'ús didàctic dels mitjans de 104ducación104ió i les TIC a l'educació infantil.* Editorial UOC. España.

Colectivo de autores de la UMCC. (2007) *Resolución de problemas.* Editorial Universitaria. Cuba. 52 páginas.

Cruz, M. (2006): *La enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas*. Tomo 1. La Habana: Educación Cubana.

Descartes, R. (1993). *Discurso del método. Meditaciones metafísicas*. Edición de Manuel García Morente. Espasa Calpe, Madrid.

Diaz, M. V. y Poblete, A. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. Números. *Revista de didáctica de las matemáticas*. *45*, 33-41.

Dussel, I. Quevedo, L. (2010). Educación y nuevas tecnologías: los desafíos pedagógicos ante el mundo digital. *VI Foro Latinoamericano de Educación*. Santillana. Buenos Aires.

Engler, A. Gregorini, M. y otros. (2004). *Los errores en el aprendizaje de matemática.* Facultad de Ciencias Agrarias – Universidad Nacional del Litoral – Argentina. Recuperado de: http://soarem.org.ar/Documentos/23%20Engler.pdf

Ferreira, Y. Magalhães, P. y otros. (2007). *Navegadores web*. Universidad Federal Fluminense.

Flores, P. Lupiáñez, J. y otros. (2011). *Materiales y recursos en el área de matemáticas.* Universidad de Granada. 266 páginas.

Forbes, S. (2003). *Holistic Education: An Analysis of its Ideas and Nature.* Brandon (Vermont, EE. UU.): Foundation for Educational Renewal.

Galileo, G. (1623). Il Saggiatore. Questo testo è distribuito con la licenza Recuperado de: http://www.liberliber.it/biblioteca/licenze/. Edizione elettronica del: 30 dicembre 1997.

García, Ana. González, Luis. (2011). *Uso pedagógico de materiales y recursos educativos de las TIC: sus ventajas en el aula*. Recuperado de: http://www.eyg-fere.com/TICC/archivos_ticc/AnayLuis.pdf. 2014

García, J. (1994). *Resolución de problemas: de Piaget a otros autores*. Rev. Filosofía Univ. Costa Rica. XXXII. 131-138

Gómez, B. (2005). *Aprendizaje basado en problemas (ABP): una innovación didáctica para la enseñanza universitaria.* Colombia. Educación y Educadores. Universidad de La Sabana. 8. 9-19.

Gómez, I. De La Orden Hoz, A. (2005). *Procesos de aprendizaje en matemáticas con poblaciones de fracaso escolar en contextos de exclusión social. Las influencias* *afectivas en el conocimiento de las matemáticas*. Universidad Complutense de Madrid. España. 701 páginas.

Gómez, T. (2011). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista DIDAC.* Universidad Iberoamericana. 56-57

Gross, B. Bautista, G. Borges, F. (2011). *Evolució i reptes de l'educació virtual: construint l'e-learning del segle XXI.* Editorial UOC. España. 183 páginas.

Hernández, J (1997). *Ciencias y tecnologías*. Universidad la laguna. Recuperado de: ftp://tesis.bbtk.ull.es/ccppytec/cp19.pdf

Herrera, L. (2002). Las fuentes del aprendizaje en ambientes virtuales educativos. *Revista Redalyc. 35*, 69-74

Hohenwarter, M. (2008). *Introduction to GeoGebra.* International GeoGebra Institute, Creative Commons Attribution-Noncommercial-Share Alike.

Howson, A. Kahane, J. (1985). *The influence of computer and Informatics on Mathematics and its teaching.* Universidad de Cambrige. Strang bourg.

Hughes, M. (1986), Los niños y los números. Las dificultades en el aprendizaje de las matemáti cas. Barcelona: Nueva Paideia

Icfes. (2014). Resultados pruebas saber 3°, 5°, 9° y 11°. Recuperado de: http://www2.icfes.gov.co/resultados/saber-11-resultados/2014-06-13-22-13-50

Iranzo, N. y Fortuny, J. (2009). *La influencia conjunta del uso de Geogebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado.* Departament de Didàctica de les Matemàtiques. Universitat Autònoma de Barcelona.

Lee, C. 2010. *El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas: la evaluación formativa en la práctica.* Ediciones Morata, S. L. España.

Leibniz, G. W. (1986). Discurso de metafísica. Edición de Julián Marías. Alianza Editorial, Madrid.

Lozano, A. y Herrera, J. (2013). *Diseño de programas educativos basados en competencias.* Editorial Digital. Tecnológico de Monterrey.

Marín, M. Bautista, A. (2006). *Estudio de los ambientes de enseñanza – aprendizaje generados en redes de ordenadores.* Universidad Complutense de Madrid. España. 847 páginas.

Martí, O. (2010). *Moodle para docentes.* España. Editorial CEP, S.L. 111.

Masachs, A. Camprubí, Naudi M. (2007). Los entornos de validación en la resolución de problemas matemáticos CPU-e, *Revista de Investigación Educativa.* Instituto de Investigaciones en Educación. México *4*, 1-11.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas.* Cooperativa editorial Magisterio.

MEN. (2006). Lanzamiento de la Red Nacional Académica de Tecnología Avanzada. *RENATA.* Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/fo-article-92864.pdf

Mestre, U. Fonseca, J. Valdés, P. (2007). *Entornos virtuales de enseñanza aprendizaje.* Ciudad de Las Tunas: Editorial Universitaria. El Vedado, Ciudad de La Habana

Ministerio de Educación Nacional. (2012). *Recursos Educativos Digitales Abiertos.* Primera Edición. Bogotá D.C., Cundinamarca, Colombia: Graficando Servicios Integrados. 157 páginas.

Ministerio de Industria Turismo y comercio. (2006). *La pizarra interactiva como recurso en el aula.* España.

MinTIC. (2013). *Proyecto: computadores para educar.* Recuperado de http://www.computadoresparaeducar.gov.co/website/es/Documentos/DocumentosTecnicos/Concurso_Tabletas/Documento%20tecnico%20tabletas%20CPE%202013.pdf

Monje, C. (2011). *Metodología de la investigación cuantitativa y cualitativa. Guía didáctica*. Universidad Surcolombiana. Neiva, Colombia. 216 páginas.

Morales, P. (2913). *Investigación experimental, diseños y contraste de medias.* Universidad Pontificia Comillas, Madrid. Recuperado de: http://web.upcomillas.es/personal/peter/107ducación107ión/Dise%F1osMedias.pdf

Moreno, R. Martínez, R. (2007). Aprendizaje autónomo. Desarrollo de una definición. Acta Comportamentalia. *Revista Latina de Análisis de Comportamiento,* 15(1), 51-62. México.

Muñoz, G. (2013), Las nuevas tecnologías de comunicación en el sistema educativo colombiano. *Signo y Pensamiento*. *6*(10), 77-93. Recuperado de: http://revistas.javeriana.edu.co/index.php/signoypensamiento/article/view/5752/4643

Nieto, J. (2005). Resolución de problemas, Matemática y Computación. *Revista Venezolana de Información, tecnología y conocimiento*. Universidad del Zulia Venezuela 2, 37-45.

Noda, M. (2000). *Aspectos epistemológicos y cognitivos de la resolución de problemas de matemáticas, bien y mal definidos. Un estudio con alumnos del primer ciclo de la ESO y maestros en formación*. Universidad la laguna. Recuperado de: ftp://tesis.bbtk.ull.es/ccppytec/cp130.pdf

Norris, E. (2012). *Solving the maths problem: international perspectives on mathematics education.* RSA projects. OCR.

Olarere, M. (2005). *Information and communication technology and education: Analysing the Nigerian national policy for information technology*. Department of Science Education, University of Ilorin, Nigeria. International Education Journal. 6(3), 316-321.

Page, H. (2003). *The value of Likert scales in measuring attitudes of online learners*. Bucci.

Palacios, J. R. Andrade, P. (2007). Desempeño académico y conductas de riesgo en adolescentes. Universidad Nacional Autónoma de México. *Revista de Educación y Desarrollo. 7*. 5-16.

Pearl, J. (1983). *Heuristics: Intelligent Search Strategies for Computer Problem Solving*. Addison-Wesley.

Piaget, J. (1991). S*eis estudios de psicología.* Editorial LABOR, S.A. España. Edición original: editions Gonthier. 1964.

Pisa. (2014). Evaluación por ordenador: resolución de problemas, matemáticas y lectura. Recuperado de: http://www.mecd.gob.es/inee/Ultimos_informes/PISA-2012-resolucion-de-problemas.html

Polya, G. (1971). *How to solve it*. *A New Aspect Of Mathematical Method.* México. Universidad de Stanford. Trillas.

Ramírez M. (2012) *Modelos y estrategias de enseñanza para ambientes innovadores.* México: Instituto tecnológico y de estudios superiores de monterrey. 288 páginas.

Rechimont, E. Ferreyra, N. Parodi, C. Scarímbolo, M. y Pedro, I. (2007). GEOGEBRA en la resolución de un problema. ITCR. Costa Rica. *V Congreso sobre*

Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora. 5, 6, 7. Universidad Nacional de La Pampa, Argentina.

Rodríguez, A. (2007). *Iniciación a la red internet.* Concepto, funcionamiento, servicios y aplicaciones de internet. España. Ideas propias Editorial. 104.

Rodríguez, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico.* Facultad de educación. Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación.

Rodríguez, J. Leiva, J. Serrano, J. (2007). T*ecnologías de la información: Google Talk, Podcasts, Blogs, Web 2.0.* España. EPI – El Profesional de la Información. 14.

Romero A. (2011). *Diseño de Ambientes Virtuales de Aprendizaje (AVA), con metodología de Aprendizaje Basado en Problemas (ABP): un modelo para el abordaje de contenidos y construcción de conocimiento en AVA.* Colombia. Fundación Universitaria del Área Andina.

Sánchez, L. M. (2001). *Dificultades de los alumnos de sexto grado de educación primaria para la resolución de problemas matemáticos. Análisis retrospectivo.* (Tesis de Maestría). Universidad de Colima, México. Recuperado de: http://www.digeset.ucol.mx/tesis_posgrado/indic1.php

Sánchez, R. (2000). *Las autoayudas y los simuladores informáticos en la integración escolar*. España. Universidad de Cádiz. Recuperado de: http://diversidad.murciaeduca.es/tecnoneet/docs/2000/12-2000.pdf

Sandia, B. Montilva, J. Barrios, J. (2005) *Cómo evaluar cursos en línea.* Educere. Universidad de los Andes. Venezuela. 9. 31. 523-530.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical problem solving. Academic Press: New York.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning. New York. 334-370.

Sigarreta, J. M. Rodríguez J. M. y Ruesga P. (2006). *La resolución de problemas: una visión histórico-didáctica.* Boletín de la Asociación Matemática Venezolana. Departamento de Didácticas Específicas. Universidad de Burgos, España.13. 1. 53-65.

Talaván, N. Martín, E. Palazón, F. (2011). *Technological innovation in the teaching and processing of LSPs: proceedings of TISLID'10.* UNED – Universidad Nacional de Educación a Distancia. España. 401 páginas.

Torres, F. Martínez, J. Aguilar, B. (2014). Plan de área de matemáticas de la Institución Educativa Raíces del Futuro. Ibagué, Colombia.

Trabucco, J. Fridson, D. Benhayón, M. Weisleder, J. (2006). *Entorno virtual de aprendizaje apoyado en elementos de resolución de problemas.* Facultad de Ciencias y Artes – Escuela de Matemáticas. San José. Presentación en Congresos Nacionales e Internacionales

Trillos, M. (2012). *Recursos Educativos Abiertos: Evolución y modelos.* Madrid (España). Disponible en: http://recursostic.educacion.es/blogs/europa/index.php/2012/09/21/la-situacion-actual-de-los-recursos-educativos-abiertos-a-nivel-mundial-2

Trujillo, S. (2010). Actividades interactivas en matemáticas. *Revista Didáctica, 34*. 401-402. Recuperado de: http://www.andaluciaeduca.com/hemeroteca/ed34/ed34_401-645.pdf

UNESCO. (2011). *A Basic Guide to Open Educational Resources: Frequently asked questions*. (A. Kanwar (COL), & S. Uvalic´-Trumbic´ (UNESCO), Edits.) Obtenido de The Commonwealth of Learning (COL): http://www.col.org/PublicationDocuments/Basic-Guide-To-OER.pdf

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA CHAPINGO (1995): *Global Alliance For Transforming Education*, en: Cuadernos de formación de investigadores. México, Universidad Autónoma Chapingo.

Valenzuela, J. y Flores, M. (2012).*Fundamentos de Investigación Educativa. 1* y *2* México, Editorial Digital Tecnológico de Monterrey.

Vidal, M. (2004). Uso y evaluación de la plataforma de enseñanza-aprendizaje virtual blackboard. España. *Píxel-Bit. Revista de Medios y Educació, 24*, 89-100.

Viñas, M. M. Navarro, P. Ortega, E. (2004) *La calculadora: una fuente de exploraciones conceptuales. Zona Próxima*. Universidad del Norte. Colombia.5.28-41.

Vygotsky, L. S. (1989). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Barcelona: Crítica.

Wayne, D. (1991). *Bioestadística. Base para el análisis de las ciencias de la salud.* Georgia StateUniversity. España. Mexico. Venezuela. Colombia. Argentina. Puerto Rico. Ed. Limusa Noriega. Recuperado de:

http://148.206.53.84/tesiuami/Libros/Libros%20digitalizados%2010ene2004/L12.pdf

Zapato, G. Múnera, J. (2003). Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática. *Revista educación y pedagogía 15*(35), 183-199.

Apéndice A. Consentimiento rector

EGE

Señor rector ***Fabián Elías Botero Guayara*** soy Bellanith Aguilar Vásquez, estudiante del curso Proyecto IIde la maestria en educación ofertada en la Universidad Tecnológico de Monterrey, Escuela de Graduandos en Educación EGE, quien ha emprendido una investigación cuyos propósitos u objetivos principales son:

a. Identificar como mejorar el aprendizaje de resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas con los números naturales al utilizar el Método de Polya y *Geogebra* en estudiantes de primer grado de secundaria.
b. Implementar la utilización de *Geogebra* en el desarrollo de los contenidos del área de matemáticas como herramientas de apoyo a los procesos de enseñanza – aprendizaje.
c. Motivar a los estudiantes hacia la adquisición de los conocimientos en el área de matemáticas empleando herramientas tecnológicas como apoyo a sus aprendizajes.

Queremos vincular a los estudiantes de los grados sextos a esta investigación para comprobar si es cierto que por la falta de usar estrategias nuevas, novedosas y atractivas, los estudiantes de hoy se les dificulta resolver problemas en matemáticas. La vinculación de los estudiantes generara una serie de actividades que ellos deben realizar propias de la investigación, pero además queremos generar una posible información que será usada en el mejoramiento del rendimiento académico institucional, abriendo nuevos espacios de aprendizaje mediante la utilización de *Geogebra*.

El grupo investigador se compromete entregarle al final de la investigación un informe con algunas propuestas para el mejoramiento de la calidad académica institucional.

FIRM

Apéndice B. Consentimiento de participación de los estudiantes

Queridos estudiantes de los grados sextos, mi nombre es Bellaniţh Aguilar Vásquez, estudiante del curso Proyecto I de la maestría en educación ofertada en la Universidad Tecnológico de Monterrey, Escuela de Graduandos en Educación EGE, he emprendido una investigación cuyos propósitos u objetivos principales son:

d. Identificar como mejorar el aprendizaje de resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas con los números naturales al utilizar el Método de Polya y *Geogebra* en estudiantes de primer grado de secundaria.
e. Implementar la utilización de *Geogebra* en el desarrollo de los contenidos del área de matemáticas como herramientas de apoyo a los procesos de enseñanza – aprendizaje.
f. Motivar a los estudiantes hacia la adquisición de los conocimientos en el área de matemáticas empleando herramientas tecnológicas como apoyo a sus aprendizajes.

Quiero vincularlos voluntariamente a esta investigación para comprobar de alguna manera algunas hipótesis que afirman que utilizando un método y una ayuda tecnológica se puede resolver problemas matemáticos. Es posible que su vinculación a esta investigación les genere la participación en el diligenciamiento de algunos instrumentos de recolección de información, solución de problemas que buscan establecer el conocimiento que tienen del tema, la utilización unos *Geogebra* para realizar tareas que en su momento se explicaran, en fin, deberán realizar ciertas actividades que son necesarias para lograr el objetivo de la investigación.
Agradecemos a quienes quieran participar voluntariamente firmar donde se indica. El grupo de investigación se compromete a manejar la confidencialidad de la información recogida y en caso de ser necesario, la socialización de resultados.

Acepto Participar | No deseo participar

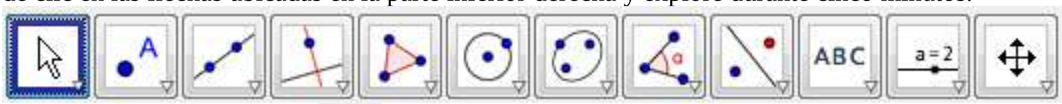
Firma del estudiante | Firma del estudiante

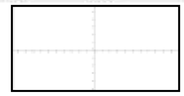
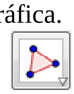
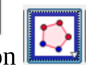
ACUDIENTE: ____________________

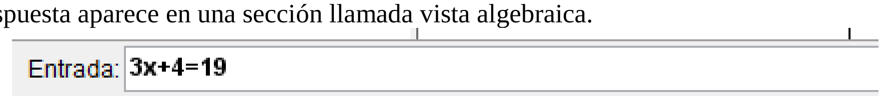
Apéndice C. Tutorial *Geogebra*

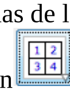
Para trabajar en Geogebra la resolución de problemas con situaciones aditivas y multiplicativas utilizando el Método de Polya, se crea el siguiente tutorial.

1. Descargue el *software*, digitando la palabra Geogebra en google, en caso de no tenerlo ya instalado. Una vez seleccione la página de descargue, siga con las instrucciones que allí se muestran.
2. Cuando el programa esté abierto, coloque el mouse encima de cada uno de los íconos con dibujos, dé clic en las flechas ubicadas en la parte inferior derecha y explore durante cinco minutos.



3. De clic en el siguiente ícono  y mueva el plano cartesiano que se muestra  en el área de trabajo, para que quede dividida en cuatro parte iguales.
4. Escriba en la parte izquierda superior de cada cuadrado, las fases correspondientes al método de Polya: Fase 1: Entender el problema, fase 2: configurar un plan, fase 3: ejecutar el plan y fase 4: verificación y responder cada una de las preguntas que contienen cada fase.
5. Para la fase 3, se puede ampliar de ser necesario el espacio, corriendo el área con la opción de *Desplaza vista gráfica*, pues allí se ejecutará el plan en el que deben hacer las operaciones, formular y resolver ecuaciones, realizar gráficas y figuras, etc.
6. Para grafiar líneas, segmentos, líneas paralelas, perpendiculares se despliega el tercer ícono de izquierda a derecha, dando clic en la opción deseada y luego en el área de trabajo se colocan los puntos en donde se quiere que aparezca la gráfica.
7. Para grafiar polígonos, se da clic en el ícono  en la opción que necesite, por ejemplo si desea graficar un cuadrado, deberá utilizar la opción  correspondiente al polígono regular, al ubicar dos puntos en el área de trabajo se le pedirá que escriba la cantidad de vértices requeridos, así que para un rectángulo se necesitarán 4 vértices.
8. Para mover cualquier punto, recta o figura se utiliza la opción  elije y mueve.
9. Para colocar distancias de un punto a otro se elige la opción  y luego se señalan los dos puntos.
10. Si el dibujo se quiere hacer a mano alzada, se utiliza la opción de  se puede utilizar también para cualquiera de las otras fases.
11. Para realizar operaciones se utiliza una hoja de cálculo, esta se despliega, dando clic en **vista** y luego en **hoja de cálculo**, se ubica en una de las celdas y realiza la operación, ejemplo: =15*60, recuerde que siempre sebe escribir antes el igual, en la multiplicación se utiliza el *, en la división el /, si desea insertar algún símbolo matemático está la opción *fx*.
12. Para escribir resolver ecuaciones, se escriben en la sección de **entrada** y se teclea **Enter**, la respuesta aparece en una sección llamada vista algebraica.



13. Para insertar tablas en el área de trabajo se debe ingresar los datos en las celdas de la hoja de cálculo, se selecciona la tabla que se quiere que aparezca y se utiliza la opción , del mismo modo en ese mismo espacio se podrá graficar datos para ser analizados y realizar operaciones como suma.
14. Finalmente, guarde dando clic en **archivo-guardar como** o si lo quiere guardar como imagen entonces hacer clic en **archivo-exporta-guarda-vista gráfica a imagen**.

Observación: Para revisar detalladamente el funcionamiento de *Geogebra*, consultar el Manual Oficial en Español / Castellano en: http://www.geogebra.org/help/docues.pdf accesible desde la página de Centro Babbage http://www.centrobabbage.com/soft.htm

Apéndice D. Pretest

El presente cuestionario, tiene el objetivo de identificar si hay mejora en el aprendizaje al implementar el método de Polya con el uso del *software Geogebra* en la resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas con los números naturales en estudiantes de primer grado de secundaria de la institución objeto de la presente investigación en el área de matemáticas, solo con fines académicos.

Responsable: Bellanith Aguilar Vásquez: estudiante de maestría en educación, cuarto semestre. Matrícula: A01317000

Instrucciones: Para resolver los siguientes problemas, debe sacar los datos, realizar la operación y escribir la solución, favor utilizar la tabla de respuesta.

Nombre del estudiante: ____

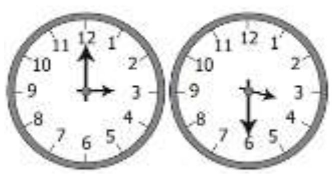
Grado: 6°____ Fecha de diligenciamiento: ______________________________

Conocimientos previos acerca de situaciones problema en matemáticas que involucren la adición y sustracción.

Problema 1.

De acuerdo a la imagen de los siguientes relojes que muestran las horas de iniciación y terminación del recreo en un colegio, ¿cuál es la operación que se debe efectuar para saber cuántos segundos duró el recreo? Y ¿Cuántos minutos avanzó el minutero desde que se inició el recreo?

INICIO FIN



DATOS	OPERACIÓN	SOLUCIÓN

Problema 2.

En la evaluación que hizo la profesora Constanza, Ernesto obtuvo 3 puntos, Sebastián 2, Daniela 4 y Miguel 5, ¿cuál fue el puntaje menor?

DATOS	OPERACIÓN	SOLUCIÓN

Problema 3.

Una estudiante tiene $500 en un bolsillo, $350 en otro y $1200 en su maletín ¿cuánto dinero tiene en total?

DATOS	OPERACIÓN	SOLUCIÓN

Problema 4.

¿Qué operación se debe hacer para saber el número de dedos de las manos y de los pies de 350 personas? ¿Cuál sería el total de dedos?

DATOS	OPERACIÓN	SOLUCIÓN

Problema 5.

Si compro 6 cuadernos y cada uno me cuesta $1200, ¿cuánto dinero costaron los 6 cuadernos?

DATOS	OPERACIÓN	SOLUCIÓN

Agradezco su colaboración

Apéndice E. Problemas Fase 2 grupo A

Para hallar la solución a cada problema debe sacar los datos, realizar la operación y dar la solución:

Problema 1. Un estudiante, desea presentar su trabajo de artística en un octavo de cartón paja y desea colocar en el borde, una cinta de tela para decorarlo, si el cartón paja mide 30 cm de largo y 21 cm de ancho, ¿cuánto debe medir la cinta de tela que utilizará?

DATOS	OPERACIÓN	SOLUCIÓN

Problema 2. Katerine, desea comprar un lazo para colocarlo de un extremo del salón de clase al otro extremo, pero no tiene una regla o cinta métrica para medir, así que decide utilizar sus pies, dando como resultado 15 pies de Katerine, al llegar a su casa midió su pié dando 25 cm, ¿cuánto debe medir el lazo?

DATOS	OPERACIÓN	SOLUCIÓN

Problema 3. Pedro y María, tienen alcancías y deciden sacar el dinero, había 20 monedas de $500, 7 monedas de $1000, 4 billetes de $2000, 2 billetes de $5000 y 1 billete de $10.000, ¿cuánto dinero tienen ambos?, si Pedro tenía cinco veces más de lo que tenía maría y María había ahorrado $9.000 en su alcancía ¿cuánto tenía Pedro?

DATOS	OPERACIÓN	SOLUCIÓN

Problema 4. Una escalera de 5 metros de largo, está inclinada a una pared a una distancia de 3 metros desde su base hasta la pared, y la longitud desde el piso hasta la punta de la escalera en el muro, es de 4 metros, ¿qué figura se forma al colocar esta escalera?, si una persona que está en la cima de la escalera deja caer una esfera sin rebote, esta cae en el filo de la pared y rueda hasta la base de la escalera ¿cuántos metros recorrió la esfera?

DATOS	OPERACIÓN	SOLUCIÓN

Problema 5. Gabriela tiene $8000 y decide comprar 5 helados, para compartirlos con sus hermanos. Si cada uno cuesta $600. ¿Cuánto dinero le sobró?

DATOS	OPERACIÓN	SOLUCIÓN

Apéndice F. Problemas Fase 2 grupo B

Para hallar la solución a cada problema debe utilizar el método de Polya, llenando la tabla para cada problema:

Problema 1. Un estudiante, desea presentar su trabajo de artística en un octavo de cartón paja y desea colocar en el borde, una cinta de tela para decorarlo, si el cartón paja mide 30 cm de largo y 21 cm de ancho, ¿cuánto debe medir la cinta de tela que utilizará?

1. Comprensión del problema	
¿Por dónde debo empezar?	¿Cuáles son los datos?
¿Qué datos son relevantes y cuáles son los irrelevantes? ¿Ya he resuelto uno parecido?	¿Cuál es la incógnita?
2. Configuración del plan	
¿Cuál estrategia usar: suma, multiplicación, ensayo y error, patrón, lista, problema similar más simple, figura, diagrama, razonamiento, propiedades de los números, problema equivalente, hacia atrás, ecuación, fórmula, sub- metas, coordenadas o simetría?	
3. Ejecución del plan	
¿Para qué hacemos lo que hacemos? Haz tu plan.	
4. Verificación	
¿Es tu solución correcta?	¿Existe una solución más sencilla o diferente?
¿Puedes generalizar tu solución?	¿Cuál era la información importante?

Problema 2. Katerine, desea comprar un lazo para colocarlo de un extremo del salón de clase al otro extremo, pero no tiene una regla o cinta métrica para medir, así que decide utilizar sus pies, dando como resultado 15 pies de Katerine, al llegar a su casa midió su pié dando 25 cm, ¿cuánto debe medir el lazo?

1. Comprensión del problema	
¿Por dónde debo empezar?	¿Cuáles son los datos?
¿Qué datos son relevantes y cuáles son los irrelevantes? ¿Ya he resuelto uno parecido?	¿Cuál es la incógnita?
2. Configuración del plan	
¿Cuál estrategia usar: suma, multiplicación, ensayo y error, patrón, lista, problema similar más simple, figura, diagrama, razonamiento, propiedades de los números, problema equivalente, hacia atrás, ecuación, fórmula, sub- metas, coordenadas o simetría?	
3. Ejecución del plan	
¿Para qué hacemos lo que hacemos? Haz tu plan.	

4. Verificación	
¿Es tu solución correcta?	¿Existe una solución más sencilla o diferente?
¿Puedes generalizar tu solución?	¿Cuál era la información importante?

Problema 3. Pedro y María, tienen alcancías y deciden sacar el dinero, había 20 monedas de $500, 7 monedas de $1000, 4 billetes de $2000, 2 billetes de $5000 y 1 billete de $10.000, ¿cuánto dinero tienen ambos?, si Pedro tenía cinco veces más de lo que tenía maría y María había ahorrado $9.000 en su alcancía ¿cuánto tenía Pedro?

1. Comprensión del problema	
¿Por dónde debo empezar?	¿Cuáles son los datos?
¿Qué datos son relevantes y cuáles son los irrelevantes? ¿Ya he resuelto uno parecido?	¿Cuál es la incógnita?
2. Configuración del plan	
¿Cuál estrategia usar: suma, multiplicación, ensayo y error, patrón, lista, problema similar más simple, figura, diagrama, razonamiento, propiedades de los números, problema equivalente, hacia atrás, ecuación, fórmula, sub- metas, coordenadas o simetría?	
3. Ejecución del plan	
¿Para qué hacemos lo que hacemos? Haz tu plan.	
4. Verificación	
¿Es tu solución correcta?	¿Existe una solución más sencilla o diferente?
¿Puedes generalizar tu solución?	¿Cuál era la información importante?

Problema 4. Una escalera de 5 metros de largo, está inclinada a una pared a una distancia de 3 metros desde su base hasta la pared, y la longitud desde el piso hasta la punta de la escalera en el muro, es de 4 metros, ¿qué figura se forma al colocar esta escalera?, si una persona que está en la cima de la escalera deja caer una esfera sin rebote, esta cae en el filo de la pared y rueda hasta la base de la escalera ¿cuántos metros recorrió la esfera?

1. Comprensión del problema	
¿Por dónde debo empezar?	¿Cuáles son los datos?
¿Qué datos son relevantes y cuáles son los irrelevantes? ¿Ya he resuelto uno parecido?	¿Cuál es la incógnita?
2. Configuración del plan	
¿Cuál estrategia usar: suma, multiplicación, ensayo y error, patrón, lista, problema similar más simple, figura, diagrama, razonamiento, propiedades de los números, problema equivalente, hacia atrás, ecuación, fórmula, sub- metas, coordenadas o simetría?	

3. Ejecución del plan	
¿Para qué hacemos lo que hacemos? Haz tu plan.	
4. Verificación	
¿Es tu solución correcta?	¿Existe una solución más sencilla o diferente?
¿Puedes generalizar tu solución?	¿Cuál era la información importante?

Problema 5. Gabriela tiene $8000 y decide comprar 5 helados, para compartirlos con sus hermanos. Si cada uno cuesta $600. ¿Cuánto dinero le sobró?

1. Comprensión del problema	
¿Por dónde debo empezar?	¿Cuáles son los datos?
¿Qué datos son relevantes y cuáles son los irrelevantes? ¿Ya he resuelto uno parecido?	¿Cuál es la incógnita?
2. Configuración del plan	
¿Cuál estrategia usar: suma, multiplicación, ensayo y error, patrón, lista, problema similar más simple, figura, diagrama, razonamiento, propiedades de los números, problema equivalente, hacia atrás, ecuación, fórmula, sub- metas, coordenadas o simetría?	
3. Ejecución del plan	
¿Para qué hacemos lo que hacemos? Haz tu plan.	
4. Verificación	
¿Es tu solución correcta?	¿Existe una solución más sencilla o diferente?
¿Puedes generalizar tu solución?	¿Cuál era la información importante?

Gracias por su colaboración

Apéndice G. Problemas Fase 2 grupo C

Para hallar la solución a cada problema debe aplicar el método de Polya con el uso del *software Geogebra*, llenando la siguiente tabla para cada problema y mostrando evidencia de lo trabajado en el *software*:

Problema 1. Un estudiante, desea presentar su trabajo de artística en un octavo de cartón paja y desea colocar en el borde, una cinta de tela para decorarlo, si el cartón paja mide 30 cm de largo y 21 cm de ancho, ¿cuánto debe medir la cinta de tela que utilizará?

1. Comprensión del problema	
¿Por dónde debo empezar?	¿Cuáles son los datos?
¿Qué datos son relevantes y cuáles son los irrelevantes? ¿Ya he resuelto uno parecido?	¿Cuál es la incógnita?
2. Configuración del plan	
¿Cuál estrategia usar: suma, multiplicación, ensayo y error, patrón, lista, problema similar más simple, figura, diagrama, razonamiento, propiedades de los números, problema equivalente, hacia atrás, ecuación, fórmula, sub- metas, coordenadas o simetría?	
3. Ejecución del plan	
¿Para qué hacemos lo que hacemos? Haz tu plan.	
4. Verificación	
¿Es tu solución correcta?	¿Existe una solución más sencilla o diferente?
¿Puedes generalizar tu solución?	¿Cuál era la información importante?

Problema 2. Katerine, desea comprar un lazo para colocarlo de un extremo del salón de clase al otro extremo, pero no tiene una regla o cinta métrica para medir, así que decide utilizar sus pies, dando como resultado 15 pies de Katerine, al llegar a su casa midió su pié dando 25 cm, ¿cuánto debe medir el lazo?

1. Comprensión del problema	
¿Por dónde debo empezar?	¿Cuáles son los datos?
¿Qué datos son relevantes y cuáles son los irrelevantes? ¿Ya he resuelto uno parecido?	¿Cuál es la incógnita?
2. Configuración del plan	
¿Cuál estrategia usar: suma, multiplicación, ensayo y error, patrón, lista, problema similar más simple, figura, diagrama, razonamiento, propiedades de los números, problema equivalente, hacia atrás, ecuación, fórmula, sub- metas, coordenadas o simetría?	
3. Ejecución del plan	
¿Para qué hacemos lo que hacemos? Haz tu plan.	

4. Verificación	
¿Es tu solución correcta?	¿Existe una solución más sencilla o diferente?
¿Puedes generalizar tu solución?	¿Cuál era la información importante?

Problema 3. Pedro y María, tienen alcancías y deciden sacar el dinero, había 20 monedas de \$500, 7 monedas de \$1000, 4 billetes de \$2000, 2 billetes de \$5000 y 1 billete de \$10.000, ¿cuánto dinero tienen ambos?, si Pedro tenía cinco veces más de lo que tenía maría y María había ahorrado \$9.000 en su alcancía ¿cuánto tenía Pedro?

1. Comprensión del problema	
¿Por dónde debo empezar?	¿Cuáles son los datos?
¿Qué datos son relevantes y cuáles son los irrelevantes? ¿Ya he resuelto uno parecido?	¿Cuál es la incógnita?
2. Configuración del plan	
¿Cuál estrategia usar: suma, multiplicación, ensayo y error, patrón, lista, problema similar más simple, figura, diagrama, razonamiento, propiedades de los números, problema equivalente, hacia atrás, ecuación, fórmula, sub- metas, coordenadas o simetría?	
3. Ejecución del plan	
¿Para qué hacemos lo que hacemos? Haz tu plan.	
4. Verificación	
¿Es tu solución correcta?	¿Existe una solución más sencilla o diferente?
¿Puedes generalizar tu solución?	¿Cuál era la información importante?

Problema 4. Una escalera de 5 metros de largo, está inclinada a una pared a una distancia de 3 metros desde su base hasta la pared, y la longitud desde el piso hasta la punta de la escalera en el muro, es de 4 metros, ¿qué figura se forma al colocar esta escalera?, si una persona que está en la cima de la escalera deja caer una esfera sin rebote, esta cae en el filo de la pared y rueda hasta la base de la escalera ¿cuántos metros recorrió la esfera?

1. Comprensión del problema	
¿Por dónde debo empezar?	¿Cuáles son los datos?
¿Qué datos son relevantes y cuáles son los irrelevantes? ¿Ya he resuelto uno parecido?	¿Cuál es la incógnita?
2. Configuración del plan	
¿Cuál estrategia usar: suma, multiplicación, ensayo y error, patrón, lista, problema similar más simple, figura, diagrama, razonamiento, propiedades de los números, problema equivalente, hacia atrás, ecuación, fórmula, sub- metas, coordenadas o simetría?	

3. Ejecución del plan	
¿Para qué hacemos lo que hacemos? Haz tu plan.	
4. Verificación	
¿Es tu solución correcta?	¿Existe una solución más sencilla o diferente?
¿Puedes generalizar tu solución?	¿Cuál era la información importante?

Problema 5. Gabriela tiene $8000 y decide comprar 5 helados, para compartirlos con sus hermanos. Si cada uno cuesta $600. ¿Cuánto dinero le sobró?

1. Comprensión del problema	
¿Por dónde debo empezar?	¿Cuáles son los datos?
¿Qué datos son relevantes y cuáles son los irrelevantes? ¿Ya he resuelto uno parecido?	¿Cuál es la incógnita?
2. Configuración del plan	
¿Cuál estrategia usar: suma, multiplicación, ensayo y error, patrón, lista, problema similar más simple, figura, diagrama, razonamiento, propiedades de los números, problema equivalente, hacia atrás, ecuación, fórmula, sub- metas, coordenadas o simetría?	
3. Ejecución del plan	
¿Para qué hacemos lo que hacemos? Haz tu plan.	
4. Verificación	
¿Es tu solución correcta?	¿Existe una solución más sencilla o diferente?
¿Puedes generalizar tu solución?	¿Cuál era la información importante?

Gracias por su colaboración

Apéndice H. Postest grupo A

El presente cuestionario, tiene el objetivo de identificar si hay mejora en el aprendizaje al utilizar el método tradicional en la resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas con los números naturales en estudiantes de primer grado de secundaria de la institución objeto de la presente investigación en el área de matemáticas, solo con fines académicos.
Responsable: Bellanith Aguilar Vásquez: estudiante de maestría en educación, cuarto semestre.
Matrícula: A01317000
Instrucciones: Para hallar la solución a cada problema debe sacar los datos, realizar la operación y dar la solución

Nombre del estudiante: ____
Grado: 6°____ Fecha de diligenciamiento: ___________________________________

Conocimiento acerca de resolución de problemas en situaciones aditivas.

Problema 1. Hay 3 compañeros Daniel, María y Luis y quisieron sumar sus edades: Daniel tiene 12 años, Luis tiene 10 años y los tres juntos suman 34 años ¿Cuántos años tiene María?

DATOS	OPERACIÓN	SOLUCIÓN

Problema 2. Si cada día se vende en la cafetería $50000 ¿Cuánto se vende en una semana?

DATOS	OPERACIÓN	SOLUCIÓN

Problema 3. Josefa va al supermercado con $1000, compró un kilo de pan a $450 y compró 2 jugos de naranja. Si a Josefa le entregaron $50 de vuelto ¿Cuánto costo cada jugo?

DATOS	OPERACIÓN	SOLUCIÓN

Problema 4. La entrada a un circo cuesta $6000 adulto y $4000 niño, entonces ¿cuánto deben pagar 5 adultos? y si entran 20 niños y 46 adultos, ¿cuánto se recolectó?

DATOS	OPERACIÓN	SOLUCIÓN

Problema 5. La cancha de fútbol del colegio es de forma rectangular, Pedro es el encargado de colocar un lazo alrededor para que nadie entre a la cancha, si el lado más largo mide 100 metros y el lado más corto mide 64 metros, ¿cuánto debe medir el lazo?

DATOS	OPERACIÓN	SOLUCIÓN

Agradezco su colaboración

Apéndice I. Postest grupo B

El presente cuestionario, tiene el objetivo de identificar si hay mejora en el aprendizaje al utilizar el método de Polya en la resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas con los números naturales en estudiantes de primer grado de secundaria de la institución objeto de la presente investigación en el área de matemáticas, solo con fines académicos.
Responsable: Bellanith Aguilar Vásquez: estudiante de maestría en educación, cuarto semestre.
Matrícula: A01317000
Instrucciones: Para hallar la solución a cada problema debe utilizar el método de Polya, llenando la tabla para cada problema.
Nombre del estudiante: ____
Grado: 6°____ Fecha de diligenciamiento: __________________________________

Conocimiento acerca de resolución de problemas en situaciones aditivas.

Problema 1. Hay 3 compañeros Daniel, María y Luis y quisieron sumar sus edades: Daniel tiene 12 años, Luis tiene 10 años y los tres juntos suman 34 años ¿Cuántos años tiene María?

1. Comprensión del problema	
¿Por dónde debo empezar?	¿Cuáles son los datos?
¿Qué datos son relevantes y cuáles son los irrelevantes? ¿Ya he resuelto uno parecido?	¿Cuál es la incógnita?
2. Configuración del plan	
¿Cuál estrategia usar: suma, multiplicación, ensayo y error, patrón, lista, problema similar más simple, figura, diagrama, razonamiento, propiedades de los números, problema equivalente, hacia atrás, ecuación, fórmula, sub- metas, coordenadas o simetría?	
3. Ejecución del plan	
¿Para qué hacemos lo que hacemos? Haz tu plan.	
4. Verificación	
¿Es tu solución correcta?	¿Existe una solución más sencilla o diferente?
¿Puedes generalizar tu solución?	¿Cuál era la información importante?

Problema 2. Si cada día se vende en la cafetería $50000 ¿Cuánto se vende en una semana?

1. Comprensión del problema	
¿Por dónde debo empezar?	¿Cuáles son los datos?

¿Qué datos son relevantes y cuáles son los irrelevantes? ¿Ya he resuelto uno parecido?	¿Cuál es la incógnita?
2. Configuración del plan	
¿Cuál estrategia usar: suma, multiplicación, ensayo y error, patrón, lista, problema similar más simple, figura, diagrama, razonamiento, propiedades de los números, problema equivalente, hacia atrás, ecuación, fórmula, sub- metas, coordenadas o simetría?	
3. Ejecución del plan	
¿Para qué hacemos lo que hacemos? Haz tu plan.	
4. Verificación	
¿Es tu solución correcta?	¿Existe una solución más sencilla o diferente?
¿Puedes generalizar tu solución?	¿Cuál era la información importante?

Problema 3. Josefa va al supermercado con $1000, compró un kilo de pan a $450 y compró 2 jugos de naranja. Si a Josefa le entregaron $50 de vuelto ¿Cuánto costo cada jugo?

1. Comprensión del problema	
¿Por dónde debo empezar?	¿Cuáles son los datos?
¿Qué datos son relevantes y cuáles son los irrelevantes? ¿Ya he resuelto uno parecido?	¿Cuál es la incógnita?
2. Configuración del plan	
¿Cuál estrategia usar: suma, multiplicación, ensayo y error, patrón, lista, problema similar más simple, figura, diagrama, razonamiento, propiedades de los números, problema equivalente, hacia atrás, ecuación, fórmula, sub- metas, coordenadas o simetría?	
3. Ejecución del plan	
¿Para qué hacemos lo que hacemos? Haz tu plan.	
4. Verificación	
¿Es tu solución correcta?	¿Existe una solución más sencilla o diferente?
¿Puedes generalizar tu solución?	¿Cuál era la información importante?

Problema 4. La entrada a un circo cuesta $6000 adulto y $4000 niño, entonces ¿cuánto deben pagar 5 adultos? y si entran 20 niños y 46 adultos, ¿cuánto se recolectó?

1. Comprensión del problema	
¿Por dónde debo empezar?	¿Cuáles son los datos?

¿Qué datos son relevantes y cuáles son los irrelevantes? ¿Ya he resuelto uno parecido?	¿Cuál es la incógnita?
2. Configuración del plan	
¿Cuál estrategia usar: suma, multiplicación, ensayo y error, patrón, lista, problema similar más simple, figura, diagrama, razonamiento, propiedades de los números, problema equivalente, hacia atrás, ecuación, fórmula, sub- metas, coordenadas o simetría?	
3. Ejecución del plan	
¿Para qué hacemos lo que hacemos? Haz tu plan.	
4. Verificación	
¿Es tu solución correcta?	¿Existe una solución más sencilla o diferente?
¿Puedes generalizar tu solución?	¿Cuál era la información importante?

Problema 5. La cancha de fútbol del colegio es de forma rectangular, Pedro es el encargado de colocar un lazo alrededor para que nadie entre a la cancha, si el lado más largo mide 100 metros y el lado más corto mide 64 metros, ¿cuánto debe medir el lazo?

1. Comprensión del problema	
¿Por dónde debo empezar?	¿Cuáles son los datos?
¿Qué datos son relevantes y cuáles son los irrelevantes? ¿Ya he resuelto uno parecido?	¿Cuál es la incógnita?
2. Configuración del plan	
¿Cuál estrategia usar: suma, multiplicación, ensayo y error, patrón, lista, problema similar más simple, figura, diagrama, razonamiento, propiedades de los números, problema equivalente, hacia atrás, ecuación, fórmula, sub- metas, coordenadas o simetría?	
3. Ejecución del plan	
¿Para qué hacemos lo que hacemos? Haz tu plan.	
4. Verificación	
¿Es tu solución correcta?	¿Existe una solución más sencilla o diferente?
¿Puedes generalizar tu solución?	¿Cuál era la información importante?

Agradezco su colaboración

Apéndice J. Postest grupo C

El presente cuestionario, tiene el objetivo de Identificar si hay mejora en el aprendizaje al implementar el método de Polya con el uso del *software Geogebra* en la resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas con los números naturales en estudiantes de primer grado de secundaria de la institución objeto de la presente investigación en el área de matemáticas, solo con fines académicos.

Responsable: Bellanith Aguilar Vásquez: estudiante de maestría en educación, cuarto semestre.
Matrícula: A01317000

Instrucciones: Para hallar la solución a cada problema debe aplicar el método de Polya con el uso del *software Geogebra*, llenando la siguiente tabla para cada problema y mostrando evidencia de lo trabajado en el *software*

Nombre del estudiante: ____
Grado: 6°____ Fecha de diligenciamiento: ___________________________________

Conocimiento acerca de resolución de problemas en situaciones aditivas.

Problema 1. Hay 3 compañeros Daniel, María y Luis y quisieron sumar sus edades:
Daniel tiene 12 años, Luis tiene 10 años y los tres juntos suman 34 años ¿Cuántos años tiene María?

1. Comprensión del problema	
¿Por dónde debo empezar?	¿Cuáles son los datos?
¿Qué datos son relevantes y cuáles son los irrelevantes? ¿Ya he resuelto uno parecido?	¿Cuál es la incógnita?
2. Configuración del plan	
¿Cuál estrategia usar: suma, multiplicación, ensayo y error, patrón, lista, problema similar más simple, figura, diagrama, razonamiento, propiedades de los números, problema equivalente, hacia atrás, ecuación, fórmula, sub- metas, coordenadas o simetría?	
3. Ejecución del plan	
¿Para qué hacemos lo que hacemos? Haz tu plan.	
4. Verificación	
¿Es tu solución correcta?	¿Existe una solución más sencilla o diferente?
¿Puedes generalizar tu solución?	¿Cuál era la información importante?

Problema 2. Si cada día se vende en la cafetería $50000 ¿Cuánto se vende en una semana?

1. Comprensión del problema	
¿Por dónde debo empezar?	¿Cuáles son los datos?
¿Qué datos son relevantes y cuáles son los irrelevantes?	¿Cuál es la incógnita?

¿Ya he resuelto uno parecido?	
2. Configuración del plan	
¿Cuál estrategia usar: suma, multiplicación, ensayo y error, patrón, lista, problema similar más simple, figura, diagrama, razonamiento, propiedades de los números, problema equivalente, hacia atrás, ecuación, fórmula, sub- metas, coordenadas o simetría?	
3. Ejecución del plan	
¿Para qué hacemos lo que hacemos? Haz tu plan.	
4. Verificación	
¿Es tu solución correcta?	¿Existe una solución más sencilla o diferente?
¿Puedes generalizar tu solución?	¿Cuál era la información importante?

Problema 3. Josefa va al supermercado con $1000, compró un kilo de pan a $450 y compró 2 jugos de naranja. Si a Josefa le entregaron $50 de vuelto ¿Cuánto costo cada jugo?

1. Comprensión del problema	
¿Por dónde debo empezar?	¿Cuáles son los datos?
¿Qué datos son relevantes y cuáles son los irrelevantes? ¿Ya he resuelto uno parecido?	¿Cuál es la incógnita?
2. Configuración del plan	
¿Cuál estrategia usar: suma, multiplicación, ensayo y error, patrón, lista, problema similar más simple, figura, diagrama, razonamiento, propiedades de los números, problema equivalente, hacia atrás, ecuación, fórmula, sub- metas, coordenadas o simetría?	
3. Ejecución del plan	
¿Para qué hacemos lo que hacemos? Haz tu plan.	
4. Verificación	
¿Es tu solución correcta?	¿Existe una solución más sencilla o diferente?
¿Puedes generalizar tu solución?	¿Cuál era la información importante?

Problema 4. La entrada a un circo cuesta $6000 adulto y $4000 niño, entonces ¿cuánto deben pagar 5 adultos? y si entran 20 niños y 46 adultos, ¿cuánto se recolectó?

1. Comprensión del problema	
¿Por dónde debo empezar?	¿Cuáles son los datos?
¿Qué datos son relevantes y cuáles son los irrelevantes?	¿Cuál es la incógnita?

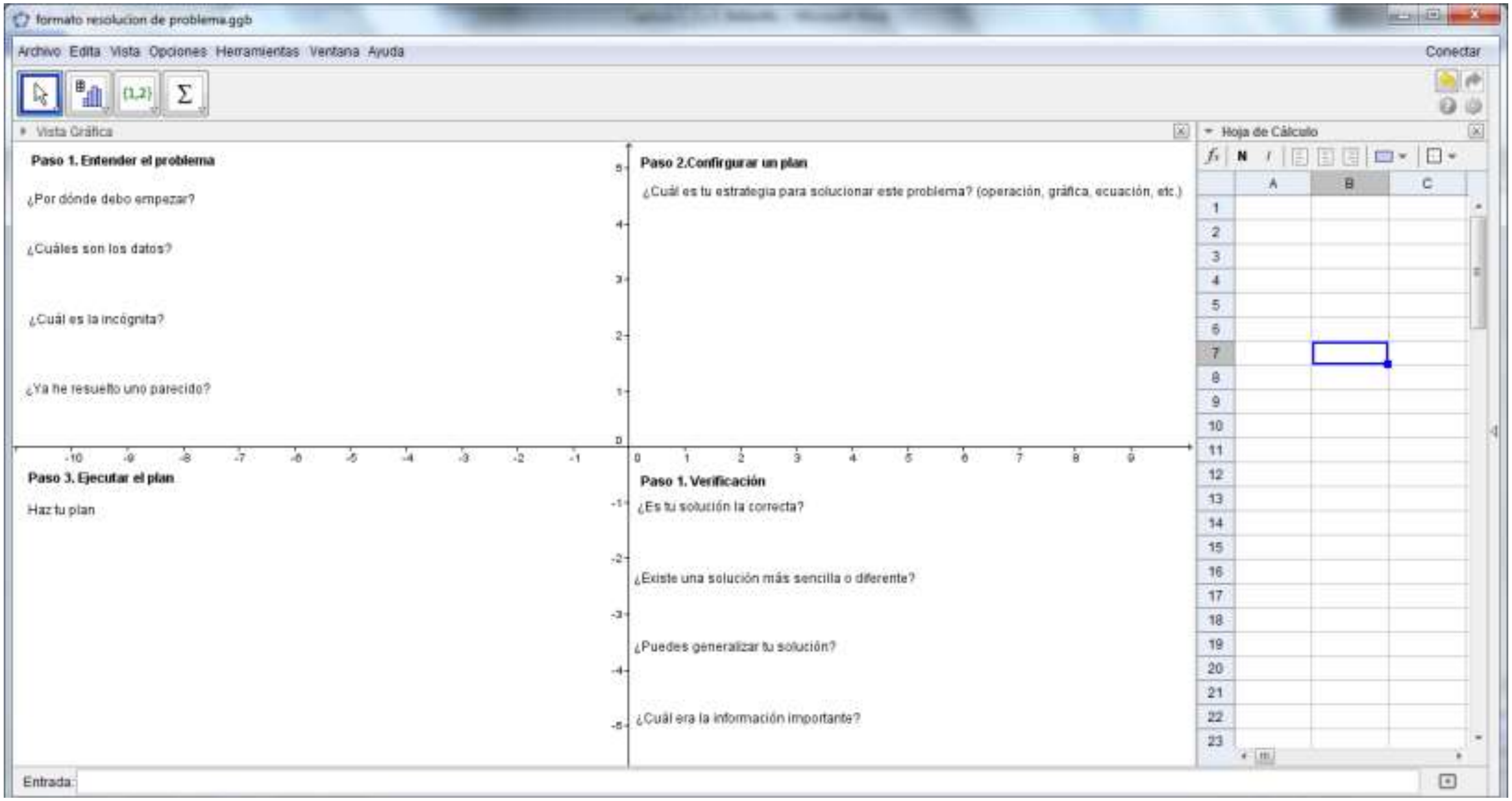
¿Ya he resuelto uno parecido?	
2. Configuración del plan	
¿Cuál estrategia usar: suma, multiplicación, ensayo y error, patrón, lista, problema similar más simple, figura, diagrama, razonamiento, propiedades de los números, problema equivalente, hacia atrás, ecuación, fórmula, sub- metas, coordenadas o simetría?	
3. Ejecución del plan	
¿Para qué hacemos lo que hacemos? Haz tu plan.	
4. Verificación	
¿Es tu solución correcta?	¿Existe una solución más sencilla o diferente?
¿Puedes generalizar tu solución?	¿Cuál era la información importante?

Problema 5. La cancha de fútbol del colegio es de forma rectangular, Pedro es el encargado de colocar un lazo alrededor para que nadie entre a la cancha, si el lado más largo mide 100 metros y el lado más corto mide 64 metros, ¿cuánto debe medir el lazo?

1. Comprensión del problema	
¿Por dónde debo empezar?	¿Cuáles son los datos?
¿Qué datos son relevantes y cuáles son los irrelevantes? ¿Ya he resuelto uno parecido?	¿Cuál es la incógnita?
2. Configuración del plan	
¿Cuál estrategia usar: suma, multiplicación, ensayo y error, patrón, lista, problema similar más simple, figura, diagrama, razonamiento, propiedades de los números, problema equivalente, hacia atrás, ecuación, fórmula, sub- metas, coordenadas o simetría?	
3. Ejecución del plan	
¿Para qué hacemos lo que hacemos? Haz tu plan.	
4. Verificación	
¿Es tu solución correcta?	¿Existe una solución más sencilla o diferente?
¿Puedes generalizar tu solución?	¿Cuál era la información importante?

Agradezco su colaboración

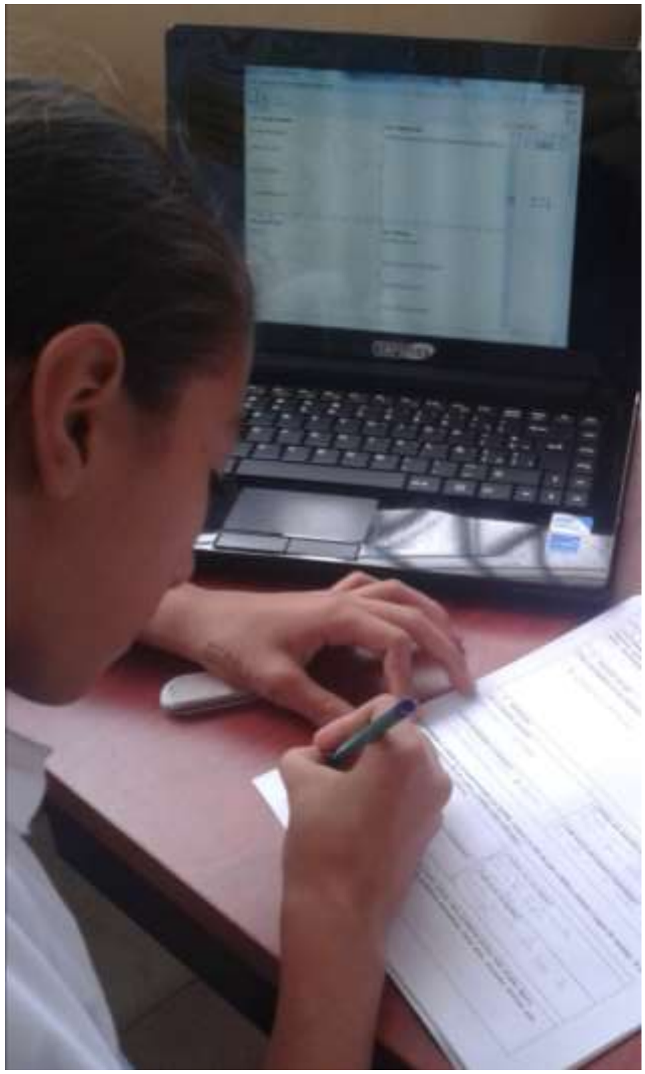
Formato que se debe presentar en *Geogebra*



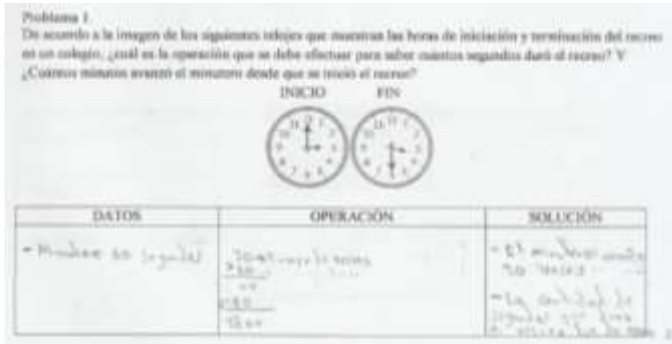
Apéndice K. Evidencia fotográfica tratamiento tradicional grupo A

Apéndice L. Evidencia fotográfica uso de *Geogebra* en la fase de tratamiento

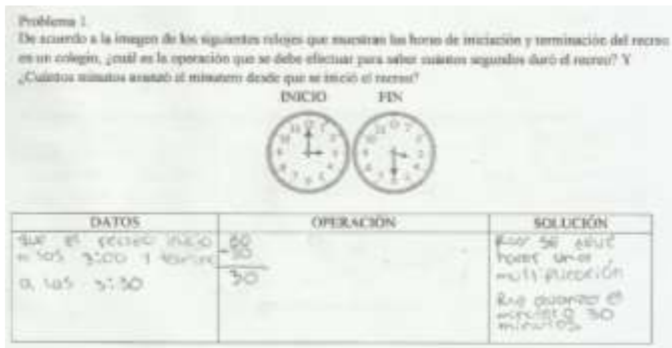
Apéndice M. Evidencia fotográfica uso de *Geogebra* en la prueba postest



Apéndice N. Evidencia del problema 1 del pretest por grupo



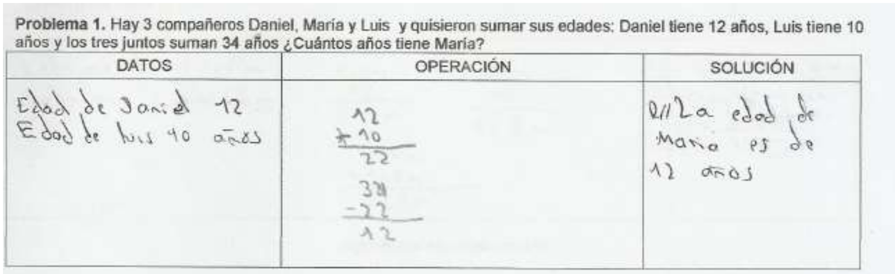
Grupo A



Grupo B

Grupo C

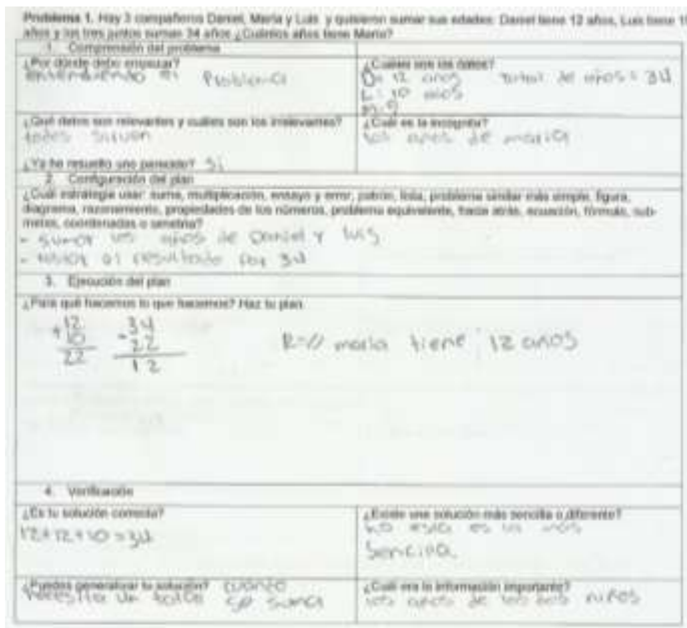
Apéndice Ñ. Evidencia del problema 1 del postest por grupo



Problema 1. Hay 3 compañeros Daniel, María y Luis y quisieron sumar sus edades: Daniel tiene 12 años, Luis tiene 10 años y los tres juntos suman 34 años ¿Cuántos años tiene María?

DATOS	OPERACIÓN	SOLUCIÓN
Edad de Daniel 12 Edad de luis 10 años	12 +10 22 34 −22 12	R//La edad de Mario es de 12 años

Grupo A



Problema 1. Hay 3 compañeros Daniel, María y Luis y quisieron sumar sus edades: Daniel tiene 12 años, Luis tiene 10 años y los tres juntos suman 34 años ¿Cuántos años tiene María?

1. Comprensión del problema

¿Por dónde debo empezar? entendiendo el problema	¿Cuáles son los datos? D= 12 años total de años = 34 L= 10 años M=?
¿Qué datos son relevantes y cuáles son los irrelevantes? todos sirven ¿Ya he resuelto uno parecido? Si	¿Cuál es la incógnita? los años de maria

2. Configuración del plan

¿Cuál estrategia usar: suma, multiplicación, ensayo y error, patrón, lista, problema similar más simple, figura, diagrama, razonamiento, propiedades de los números, problema equivalente, hacia atrás, ecuación, fórmula, submetas, coordenadas o simetría?
- sumar los años de Daniel y luis
- restar el resultado por 34

3. Ejecución del plan

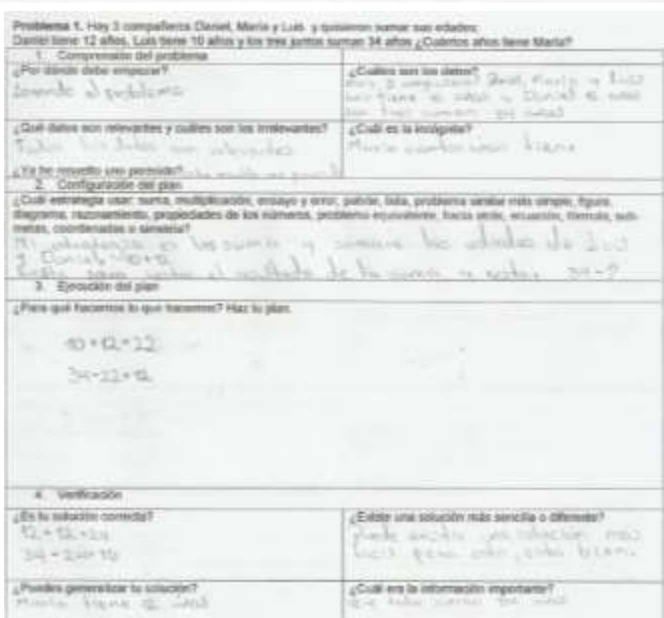
¿Para qué hacemos lo que hacemos? Haz tu plan.

+12 10 22   34 −22 12   R=// maria tiene 12 años

4. Verificación

¿Es tu solución correcta? 12+12+10=34	¿Existe una solución más sencilla o diferente? no esta es una más sencilla
¿Puedes generalizar tu solución? Necesito ver todos cuanto se suma	¿Cuál era la información importante? los años de los tres niños

Grupo B



Problema 1. Hay 3 compañeros Daniel, María y Luis y quisieron sumar sus edades: Daniel tiene 12 años, Luis tiene 10 años y los tres juntos suman 34 años ¿Cuántos años tiene María?

1. Comprensión del problema

¿Por dónde debo empezar? leyendo el problema	¿Cuáles son los datos? [illegible]
¿Qué datos son relevantes y cuáles son los irrelevantes? [illegible] ¿Ya he resuelto uno parecido? [illegible]	¿Cuál es la incógnita? [illegible]

2. Configuración del plan

¿Cuál estrategia usar: suma, multiplicación, ensayo y error, patrón, lista, problema similar más simple, figura, diagrama, razonamiento, propiedades de los números, problema equivalente, hacia atrás, ecuación, fórmula, submetas, coordenadas o simetría?
[illegible]

3. Ejecución del plan

¿Para qué hacemos lo que hacemos? Haz tu plan.

10+12=22
34−22=12

4. Verificación

¿Es tu solución correcta? 12+12=24 34−24=10	¿Existe una solución más sencilla o diferente? [illegible]
¿Puedes generalizar tu solución? María tiene 12 años	¿Cuál era la información importante? [illegible]

Grupo C

Currículum Vitae

Bellanith Aguilar Vásquez

Correo electrónico personal:

Registro CVU: 562424

Originaria de Ibagué, Colombia, Bellanith Aguilar Vásquez realizó estudios profesionales en Licenciatura en Matemáticas en la Universidad del Tolima, Colombia. La investigación titulada "*Resolución de problemas con el Método de Polya mediante el uso de Geogebra*" es la que presenta en este documento para aspirar al grado de Maestría en Educación con Acentuación en procesos de Enseñanza y Aprendizaje.

Su experiencia de trabajo ha girado, principalmente, alrededor del campo de la enseñanza matemática, específicamente en la educación básica secundaria y media vocacional desde hace aproximadamente 4 años. Asimismo ha participado en iniciativas como la Especialización en Gestión de Proyectos y seminario para Educación a Distancia.

Actualmente, Bellanith Aguilar Vásquez funge como docente del área de matemáticas en secundaria, Ibagué, Colombia. Como Normalista Superior con énfasis en matemáticas, Licenciada en matemáticas y Especialista en Gestión de Proyecto, tengo un camino por implementar conocimientos y aprender a través de la experiencia, estando dispuesta a seguir instruyéndome, junto con mis estudiantes.