

# Un procedimiento basado en GRASP para un problema de asignación de equipos médicos de diagnóstico en una red de hospitales públicos

Rodolfo Mendoza-Gómez<sup>1</sup>, Roger Z. Ríos-Mercado<sup>2</sup>, Karla B. Valenzuela-Ocaña<sup>3</sup>

*Resumen*--En este artículo se introduce un modelo de programación entera para la planificación de equipos médicos de diagnóstico de alto costo en una red de hospitales públicos integrada por diferentes instituciones de salud. El modelo permite identificar en qué hospitales de cada institución se deben instalar equipos médicos minimizando los costos de inversión y operativos para satisfacer la demanda del servicio. Dada la inherente complejidad computacional del problema, se propone un GRASP. El esquema constructivo de GRASP consiste en dos etapas en cada iteración. En una primera etapa se van fijando decisiones de qué hospitales habilitar y su capacidad de equipos médicos. En una segunda etapa, se resuelve un problema de trasbordo relativamente fácil. Se resolvieron diferentes instancias de prueba que muestran que la heurística propuesta encuentra soluciones factibles de muy buena calidad. Las soluciones mejoran conforme aumenta el tamaño de la red y disminuye la capacidad de los equipos.  
*Palabras clave* GRASP, localización de instalaciones, investigación de operaciones en salud.

## I. INTRODUCCIÓN

Algunos países en desarrollo cuentan con un sistema de salud segmentado compuesto por múltiples instituciones de salud que atienden a diferentes sectores de la población. Este tipo de sistemas enfrentan una serie de problemas que afectan directamente la calidad del servicio, entre los cuales se encuentran una mala distribución de los recursos provenientes del estado, saturación de los servicios, insuficiencias en la coordinación entre instituciones para atacar los problemas de salud y una mala planificación de la infraestructura [6]. Un caso particular de este tipo de sistemas es el de México, donde por varios años se han intentado realizar reformas políticas para integrar el sistema de salud con el fin de mejorar su calidad y cobertura de servicios de manera sustentable.

En particular, los servicios médicos de alta especialidad son muy costosos y de difícil acceso en el sector público, ocasionando falta de oportunidades en los pacientes para recibir un tratamiento oportuno y de buena calidad. La creciente tendencia de enfermedades crónicas degenerativas, así como

padecimientos de tipo oncológico en México han incrementado la demanda de estos servicios, es por ello que se requiere de una buena planificación estratégica.

La presente investigación introduce un modelo de optimización que permita realizar la planificación de equipos médicos de diagnóstico. Se considera toda la red de hospitales públicos del sistema de salud, colaboración entre instituciones y tercerización de servicios para maximizar la capacidad de respuesta. El objetivo del problema es la minimización de los costos de inversión y operativos a fin de encontrar la mejor estrategia de adquisición de equipos para satisfacer la demanda del servicio. Dada la complejidad computacional del problema y el tamaño de instancias reales, se propone una metaheurística basada en el Procedimiento de Búsqueda Voraz Aleatoria y Adaptativa (GRASP, por sus siglas en inglés) con el fin de encontrar soluciones de buena calidad a instancias grandes de problemas en tiempos computacionales razonables. Esta investigación aborda únicamente la fase de construcción probabilística de GRASP, la cual es evaluada mediante diferentes instancias de prueba que varían la cantidad de hospitales, capacidad y valores del umbral de calidad. El procedimiento explota el hecho de que se obtiene un modelo de menor complejidad al fijar ciertas variables de decisión del problema original.

Los resultados de las pruebas indican que la calidad de la solución encontrada es mejor para instancias con redes de hospitales de mayor tamaño y cuando la capacidad de los equipos disminuye. En los experimentos realizados se muestra la eficiencia de la función voraz utilizada donde claramente se observa que se mejora la calidad de la solución en valores del umbral de calidad alrededor de 0.5. El número de iteraciones recomendado es alrededor de 700, donde se observó que al aumentar las iteraciones

<sup>1</sup> Centro de Investigación en Ingeniería Industrial, Tecnológico de Monterrey, Campus Toluca. Av. Eduardo Monroy Cárdenas 2000, San Antonio Buenavista, Toluca 50110, México. E-mail: rodolfo.mendoza@invitados.itesm.mx.

<sup>2</sup> Programa de Posgrado en Ingeniería de Sistemas, UANL, Cd. Universitaria, San Nicolás de los Garza, NL 66450. México. E-mail: roger.rios@uanl.edu.mx

<sup>3</sup> Departamento de Ingeniería Industrial, Tecnológico de Monterrey, Campus Toluca. Av. Eduardo Monroy Cárdenas 2000, San Antonio Buenavista, Toluca 50110, México. E-mail: kvalenzuela@itesm.mx

la calidad de la soluciones ya no mejora significativamente.

La calidad de las soluciones obtenidas es relativamente buena ya que se reportan, para las instancias mayores soluciones en promedio dentro del intervalo de 0.4 a 0.9% en comparación con la cota inferior reportada al intentar resolver el correspondiente Programa Entero Mixto (MIP, por sus siglas en inglés) por el algoritmo de Ramificación y Acotamiento (B&B).

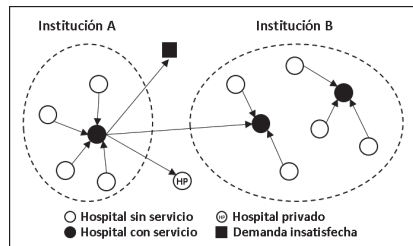


Fig. 1. Ejemplo gráfico del problema.

## II. REVISIÓN DE LA LITERATURA

En la actualidad la diversidad de servicios y equipos que los hospitales pueden proporcionar imposibilitan que cada hospital pueda contar con una cobertura total, esto debido a limitaciones económicas, logísticas y de recursos. En este sentido el área de localización de instalaciones permite encontrar la mejor estrategia para distribuir los recursos de modo que sea económicamente viable y a la vez se pueda garantizar la cobertura del servicio.

Desde su comienzo hasta la fecha, el área de localización de instalación en investigación de operaciones se ha extendido enormemente y a la fecha se han formulado problemas en una infinidad de áreas de aplicación, una recopilación de problemas clásicos de localización se puede encontrar en [3] y [4]. En particular para el sector público se han desarrollado diversos modelos debido a que los objetivos son diferentes a los problemas de la industria, por ejemplo el objetivo puede estar en función de la reducción de costos, tiempos de espera o mejora de la calidad del servicio. Una recopilación de estos modelos la podemos encontrar en [9].

En el sector salud han ido en aumento en los últimos años los estudios sobre localización de instalaciones tanto para el sector público como el privado. En [2] se muestra una recopilación de los principales modelos utilizados en esta área y algunas aplicaciones importantes de las últimas décadas se encuentran en [12], [14], [15], [18], [19], [24], y [25].

En particular, un problema similar al de esta investigación es propuesto en [8] en la cual se determina en dónde instalar capacidad de un servicio especializado en una red de hospitales, tomado consideraciones financieras y de nivel de servicio. Algunas características como la evaluación financiera, la clasificación de los tipos de demanda y

traslado entre hospitales fueron tomados en cuenta para esta investigación. Otras propuestas relacionadas se encuentran en [22] y [23], donde se propone un modelo y posteriormente una extensión del mismo para la localización de servicios especializados para un segmento específico de la población, este modelo incluye el subsidio total de los costos de los pacientes incluyendo costos de transporte y hospedaje como parte de sus prestaciones, dado la complejidad del modelo se propuso un método de solución heurística basado en simulado recocido.

En [7] se realizó un modelo de simulación donde el aspecto geográfico y la urgencia del servicio son factores importantes. Como ejemplo de aplicación se consideraron servicios hospitalarios tales como cirugías cardíacas o dentales en una región, considerando la capacidad de servicio, la distribución de la demanda y la dificultad del acceso a los servicios.

Otras investigaciones en el estado del arte relacionadas a problemas de localización de servicios hospitalarios que es importante mencionar son [1], [16], [17], [20] y [21].

En esta investigación se propone el empleo de una metaheurística basada en GRASP [5] para resolver grandes instancias del problema, sin embargo la aplicación de metaheurísticas no ha sido muy extensamente utilizada en esta área. Algunos metaheurísticas se han logrado implementar exitosamente en esta área, como por ejemplo simulado recocido en [23], búsqueda Tabú en [21], algoritmos genéticos en [18] o algoritmos que aprovechan la estructura del problema como en [25]. Sin embargo esta tendencia irá a la alza en los próximos años debido a que las aplicaciones actuales requieren satisfacer problemas cada vez de más grande escala.

## III. MODELO DE OPTIMIZACIÓN

Para una red de hospitales integrada por instituciones públicas y servicios médicos particulares, el problema consiste en identificar qué hospitales públicos deben contar con el servicio médico y la cantidad de equipos requeridos para satisfacer la demanda a fin de minimizar los costos de inversión y costos operativos de las instituciones públicas. El modelo considera tres niveles de cobertura: cobertura interna, cobertura inter-institucional y cobertura por servicios tercerizados. El primer nivel se refiere a los servicios que pueden ser otorgados por una institución a través de sus propios equipos, el segundo se emplea cuando el servicio es otorgado por un hospital de otra institución y el tercero cuando el servicio es otorgado por un servicio médico particular, que de aquí en adelante por simplicidad solo los llamaremos como hospitales privados. Para este modelo se establece el supuesto de que la demanda y la capacidad de

servicio son discretos, además de que los costos de servicio y transporte entre hospitales son cubiertos por las mismas instituciones y no por el paciente.

En la Fig. 1 se muestra un pequeño ejemplo del problema, se puede observar que la demanda de cada institución es primero asignada internamente y posteriormente reasignada a otros hospitales de otra institución, hospitales privados o a un nodo que indica la demanda insatisfecha. Este problema lo denominaremos de ahora en adelante como  $P_A$ , sus variables y parámetros se muestran en la Fig. 2 y el modelo matemático en la Fig. 3.

**A. Descripción del problema**

El conjunto  $K$  representa las instituciones públicas en la red, cada elemento se representa como  $k \in K$ . El conjunto  $I$  representa los hospitales de la red donde cada elemento se puede representar como  $i$  ó  $j \in I$ . El subconjunto  $G \subset I$  representa los hospitales públicos de la red, donde  $G(k)$  es el subconjunto de hospitales que integran la institución  $k$ ,  $G_i$  es el subconjunto de hospitales de la institución a la que el hospital  $i$  pertenece y  $k_i$  es la institución a la que pertenece el hospital  $i$ . El subconjunto  $P \subset I$  representa los hospitales privados de la red. El conjunto  $U$  se utiliza para los niveles de urgencia del servicio, donde cada elemento se representa por  $u \in U$ .

Parámetros	
$FC$	Valor anual de los costos fijos por instalar el servicio en un hospital
$VC$	Valor anual de los costos de adquisición de un equipo
$OC^u$	Costo operativo unitario del servicio con nivel de urgencia $u$
$CT_{ij}^u$	Costo por transferir un paciente que requiere el servicio con nivel de urgencia $u$ del hospital $i$ al hospital $j$
$CD_k^u$	Costo adicional unitario del servicio con nivel de urgencia $u$ en la institución $k$ para demanda proveniente de otra institución
$PC_j^u$	Costo unitario del servicio con nivel de urgencia $u$ en el hospital privado $j$
$\mu_i^u$	Demanda anual del servicio con nivel de urgencia $u$ en el hospital $i$
$C$	Capacidad anual de servicio del equipo
$CP_j$	Capacidad anual de servicio del hospital privado $j$
$Q_j$	Número máximo de equipos para el hospital $j$
$H_j$	Número mínimo de equipos para el hospital $j$
$\delta_k$	Porcentaje mínimo de demanda que debe ser cubierta internamente por la institución $k$
$\sigma_k$	Porcentaje máximo demanda adicional con respecto a la capacidad que puede ser asignada a un hospital de la institución $k$ en caso de brindar el servicio.
$\omega_k$	Porcentaje máximo de demanda que la institución $k$ puede asignar a hospitales privados
$M$	Valor muy grande
Variables de decisión	
$x_{ij}^u$	Demanda con nivel de urgencia $u$ del hospital $i$ asignada al hospital $j$ . ( $\forall i \in G, j \in I, u \in U$ )
$\alpha_j^u$	Demanda con nivel de urgencia $u$ del hospital $j$ que no fue asignada en el grupo $G_j$ . ( $\forall j \in G, u \in U$ )
$\beta_j$	Capacidad en el hospital $j$ que no fue asignada a ningún hospital del grupo $G_j$ . ( $\forall j \in G$ )
$v_i^u$	Demanda con nivel de urgencia $u$ del hospital $j$ que no fue asignada en ningún hospital en la red. ( $\forall i \in G, u \in U$ )
$s_j^u$	Cantidad de demanda con nivel de urgencia $u$ atendida en el hospital $j$ . ( $\forall j \in G$ )
$t_j$	Cantidad de equipos en el hospital $j$ . ( $\forall j \in G$ )
$y_j$	1 si el servicio es instalado en el hospital $j$ , 0 en otro caso. ( $\forall j \in G$ )

Fig. 2. Parámetros y variables del problema.

La función objetivo (1) minimiza el costo total anual del servicio médico, incluye los costos relacionados con la inversión inicial a valor anual para los equipos instalados y los costos operativos según las alternativas de cobertura y una penalización para la demanda que no pudo ser cubierta.

Las restricciones (2) aseguran que toda la demanda con diferentes niveles de urgencia de cada hospital sea asignada a algún hospital dentro de la misma institución. Las restricciones (3) determinan la demanda asignada y capacidad que se ofrecerá en un hospital en caso de que se instale el servicio, en caso de que exista capacidad ociosa tomará valor  $\beta_j$  y en caso de demanda insatisfecha tomará valor una o varias  $\alpha_j^u$  según sea el caso. Las restricciones (4) impiden asignar demanda a un hospital que no cuente con el servicio. Las restricciones (5) impiden que la variable de demanda insatisfecha del hospital  $j$  sea mayor a la demanda asignada a dicho hospital, mientras que las restricciones (6) restringen a que las variables de capacidad ociosa puedan tomar valores mayores a la capacidad del servicio de cada hospital.

**Minimizar**

$$z^A = \sum_{j \in G} FC \cdot y_j + \sum_{j \in G} VC \cdot t_j + \sum_{j \in G} OC^u \cdot s_j^u + \sum_{k \in K} \sum_{u \in U} CD_k^u \cdot (\sum_{i \in G(k)} \sum_{j \in G(k)} x_{ij}^u) + \sum_{i \in G} \sum_{j \in P} \sum_{u \in U} PC_j^u \cdot x_{ij}^u + \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \sum_{u \in U} CT_{ij}^u \cdot x_{ij}^u + \sum_{j \in G} \sum_{u \in U} DC^u \cdot v_j^u \quad (1)$$

**Sujeto a:**

$$\sum_{j \in G_i} x_{ij}^u = \mu_i^u, \quad \forall i \in G, u \in U \quad (2)$$

$$\sum_{i \in G_j} \sum_{u \in U} x_{ij}^u = C \cdot t_j + \sum_{u \in U} \alpha_j^u - \beta_j, \quad \forall j \in G \quad (3)$$

$$\sum_{i \in G} \sum_{u \in U} x_{ij}^u \leq M \cdot y_j, \quad \forall j \in G \quad (4)$$

$$\alpha_j^u \leq \sum_{i \in G_j} x_{ij}^u, \quad \forall j \in G, u \in U \quad (5)$$

$$\beta_j \leq C \cdot t_j, \quad \forall j \in G \quad (6)$$

$$\sum_{i \in G} \sum_{u \in U} x_{ij}^u \leq (1 + \sigma_k) \cdot C \cdot t_j, \quad \forall j \in G \quad (7)$$

$$\sum_{i \in G(k)} \sum_{j \in P} \sum_{u \in U} x_{ij}^u \leq \omega_k \cdot \sum_{i \in G(k)} \sum_{u \in U} \mu_i^u, \quad \forall k \in K \quad (8)$$

$$\sum_{j \in G(k)} C \cdot t_j \geq \delta_k \cdot \sum_{i \in G(k)} \sum_{u \in U} \mu_i^u, \quad \forall k \in K \quad (9)$$

$$\sum_{j \in G} \alpha_j^u + v_j^u = \alpha_j^u, \quad \forall i \in G, u \in U \quad (10)$$

$$\sum_{i \in G} \sum_{u \in U} x_{ij}^u \leq \beta_j, \quad \forall j \in G \quad (11)$$

$$\sum_{i \in G} x_{ij}^u - \alpha_j^u = s_j^u, \quad \forall j \in G, u \in U \quad (12)$$

$$\sum_{i \in G} \sum_{u \in U} x_{ij}^u \leq CP_j, \quad \forall j \in P \quad (13)$$

$$t_j \leq Q_j \cdot y_j, \quad \forall j \in G \quad (14)$$

$$y_j \leq t_j, \quad \forall j \in G \quad (15)$$

$$t_j \geq H_j, \quad \forall j \in G \quad (16)$$

$$x_{ij}^u \in Z^+, \quad \forall i \in G, j \in I, u \in U \quad (17)$$

$$\alpha_j^u, v_j^u \in Z^+, \quad \forall j \in G, u \in U \quad (18)$$

$$\beta_j, s_j, t_j \in Z^+, \quad \forall j \in G \quad (19)$$

$$y_j \in \{0,1\}, \quad \forall j \in G \quad (20)$$

Fig. 3. Problema  $P_A$

Las restricciones (7) establecen el máximo de demanda asignada a un hospital que tenga el servicio instalado con respecto a su capacidad de servicio. Las restricciones (8) establecen una cota mínima de demanda que deber ser satisfecha internamente por cada institución. Las restricciones (9) establecen una cota máxima de demanda que puede ser enviada a hospitales privados para cada institución. Las restricciones (10) asignan la demanda insatisfecha de hospitales de una institución a otros hospitales de otras instituciones u hospitales

privados, donde la variable  $v_i^u$  representa la demanda insatisfecha final que no pudo ser cubierta por ningún hospital de la red. Las restricciones (11) permiten asignar la capacidad ociosa de algún hospital a la demanda procedente de hospitales de otras instituciones. Las restricciones (12) establecen el nivel de servicio de cada hospital para cada tipo de urgencia. Las restricciones (13) limitan la asignación de demanda a los hospitales privados de acuerdo a su capacidad. Las restricciones (14) se emplean para establecer una cota superior en cuanto al número de equipos que se pueden disponer en cada hospital, esto puede ser debido a limitantes de espacio, personal o recursos del hospital. Las restricciones (15) se emplean para asociar las variables de activación del servicio  $y_j$  con las variables de cantidad de equipos  $t_j$ . Las restricciones (16) indican la cota inferior del número de equipos que se pueden disponer en cada hospital, estas restricciones se emplean para activar aquellos hospitales que actualmente ya cuentan con el servicio y determinados equipos. Por último, las restricciones (17)-(19) indican las variables que son enteras positivas y las restricciones (20) indican las variables binarias.

Este modelo pertenece a los Problemas de Localización de Plantas Capacitados (CPLP, por sus siglas en ingles), donde existen variables de decisión binarias para indicar las plantas que se abrirán, variables de decisión positivas o enteras para asignar la demanda de un conjunto de clientes a las plantas. La función objetivo considera un costo fijo por apertura y un costo variable por asignar clientes a las plantas. La asignación de la demanda del CPLP está restringida por la capacidad de cada planta. En nuestro problema, todas las características están contenidas por lo que se puede asumir que este problema presenta al menos la misma complejidad computacional, es muy conocido que el CPLP es fuertemente NP-duro [13] y ha sido extensamente estudiado en la teoría de localización. Como resultado se han desarrollado una gran cantidad de métodos de solución heurísticos en las últimas décadas, entre ellos el GRASP.

*B. Subproblema de Transbordo*

$P_A$  es un MIP cuya principal dificultad radica en identificar la localización y capacidad óptima de equipos médicos de modo que los costos asociados a la apertura del servicio y a la cobertura de la demanda sean minimizados. Ahora bien, si las decisiones discretas sobre la ubicación y la capacidad de los hospitales  $y_j$  y  $t_j$  se fijaran con valores  $\bar{y}_j$  y  $\bar{t}_j$  respectivamente, el problema restante se vuelve más sencillo ya que se reduce a un problema de tipo trasbordo, el cual puede ser resuelto de forma óptima como un problema de programación lineal. Este subproblema, denominado como  $P_B$  se muestra en la Fig. 4.

En  $P_B$  se utiliza casi la misma notación que  $P_A$ . Adicionalmente se define un nuevo subconjunto  $O \subset G$ , de la siguiente forma  $O = \{j | \bar{t}_j \geq 1, \forall j \in G\}$  para identificar a los hospitales con capacidad activada, donde  $\bar{t}_j$  es parámetro del problema. Para las variables  $x_{ir}^u$ , el subíndice  $r$  se utiliza para identificar la demanda con nivel de urgencia  $u$  del hospital  $i$  que al final no fue cubierta, equivalente a las variables  $v_j^u$  de  $P_A$ .

Los valores óptimos  $\bar{x}_{ij}^u$  y  $\bar{s}_j^u$  de  $P_B$  para los valores pre fijados de  $\bar{t}_j$ , representan una solución de  $P_A$ . De esta forma, utilizando un procedimiento iterativo que actualice los valores de  $\bar{t}_j$  y solucionando el correspondiente  $P_B$  en cada iteración se puede llegar a encontrar una solución factible de  $P_A$  de buena calidad. Con base en esto, en la siguiente sección se describe un procedimiento GRASP que explota favorablemente esta característica.

$z^B = \sum_{j \in O} \sum_{u \in U} OC^u \cdot s_j^u + \sum_{i \in O} \sum_{j \in P} \sum_{u \in U} PC_j^u \cdot x_{ij}^u + \sum_{k \in K} \sum_{u \in U} CD_k^u \cdot (\sum_{i \in O/O(k)} \sum_{j \in O(k)} x_{ij}^u) + \sum_{i \in I} \sum_{j \in O \cup P} \sum_{u \in U} CT_{ij}^u \cdot x_{ij}^u + \sum_{i \in O} \sum_{u \in U} DC^u \cdot x_{ir}^u$	(21)
$\text{Sujeto a:}$	
$\sum_{j \in O} x_{ij}^u = \mu_i^u, \quad \forall i \in G, u \in U$	(23)
$\sum_{i \in G} x_{ij}^u - \sum_{i \in O \cup P, i \neq j} x_{ij}^u - x_{jr}^u = s_j^u, \quad \forall j \in O, u \in U$	(24)
$\sum_{u \in U} s_j^u \leq C \cdot \bar{t}_j, \quad \forall j \in O$	(25)
$\sum_{i \in O} \sum_{u \in U} x_{ij}^u \leq CP_j, \quad \forall j \in P$	(26)
$\sum_{i \in G} \sum_{u \in U} x_{ij}^u \leq (1 + \sigma_k) \cdot C \cdot \bar{t}_j, \quad \forall j \in O$	(27)
$\sum_{i \in O(k)} \sum_{j \in P} \sum_{u \in U} x_{ij}^u \leq \omega_k \cdot \sum_{i \in G(k)} \sum_{u \in U} \mu_i^u, \quad \forall k \in K$	(28)
$0 \leq s_j^u, \quad j \in O, u \in U$	(29)
$0 \leq x_{ij}^u, \quad \forall i \in G, j \in O \cup P \cup r, u \in U$	(30)

Fig. 4. Problema  $P_B$ .

IV. GRASP PROPUESTO

GRASP consiste típicamente de un proceso iterativo de dos etapas: una construcción y una búsqueda local. La etapa de construcción genera una solución factible y la búsqueda local intenta mejorar la solución. Al final, la mejor solución encontrada es la que se entrega como resultado [5].

Para este problema se sabe por ejemplo en el caso de México en 2011, se tenía registro de 1,372 hospitales públicos y 12 instituciones de salud, lo que hace prácticamente imposible resolver  $P_A$  de forma exacta. Esto motivó el desarrollo del metaheurístico GRASP implementado para este problema y que se muestra en la Fig. 5. Cabe señalar que el alcance de este artículo únicamente se enfoca al desarrollo de la fase de construcción voraz probabilística. La implementación de la fase de búsqueda local (Paso 4 en la Fig. 5) es trabajo en proceso.

En este procedimiento se agrega en cada iteración capacidad de servicio (un equipo médico adicional) a la red de hospitales y se resuelve  $P_B$  para encontrar la solución actual de  $P_A$ .

*A. Preprocesamiento*

Para iniciar cada iteración de GRASP es necesario realizar un preprocesamiento (paso 3, Fig.

5) que permita asignar valores iniciales a  $\bar{t}_j$  de forma que  $P_B$  pueda ser evaluado. Para ello se requiere que al menos cada institución cuente con el servicio instalado en uno de sus hospitales, esto es  $\sum_{j \in G(k)} \bar{t}_j \geq 1, \forall k \in K$ . Se inicia asegurando que las restricciones (16) de  $P_A$  se cumplan, por lo que  $\bar{t}_j = H_j, \forall i \in G$ . En caso de que una institución después de este paso aun no tenga capacidad asignada se deberá seleccionar un hospital de esta institución y agregar un equipo médico. También se debe asegurar que las restricciones (14) no sean infactibles, respetando  $\bar{t}_j \leq Q_j, \forall j \in G$ . Las restricciones (9) de  $P_A$  son las únicas que no serán considerada inicialmente, estas restricciones deberán cumplirse una vez terminada la fase de construcción voraz probabilística.

```

Procedimiento GRASP(Max_Iteraciones,  $\alpha$ )
1   $S^m = \emptyset$ 
2  para  $k = 1, \dots, Max\_Iteraciones$  hacer
3     $t \leftarrow$  Preprocesamiento()
4     $S \leftarrow$  Construcción_Voraz_Probabilista( $\alpha, t$ );
5     $S \leftarrow$  Búsqueda_Local( $S$ );
6    si  $z^A(S) < z^A(S^m)$  hacer
7       $S^m \leftarrow S$ ;
8    fin_si
9  fin_para
10 retornar  $S^m$ ;
fin GRASP
    
```

Fig. 5. Pseudo-código de GRASP

### B. Fase de Construcción Voraz Probabilista

El pseudo-código de esta fase se muestra en la Fig. 6. Lo primero que se requiere es determinar la solución inicial de  $P_A$  dado el vector  $t$  generado en el preprocesamiento. Para ello, se resuelve  $P_B(t)$  y los resultados se almacenan en la solución actual  $S$  mediante la función Resolver\_Problema\_B( $t$ ).

Los valores actuales de  $\bar{t}_j$  y los valores óptimos  $\bar{x}_{ij}^u$  y  $\bar{s}_j^u$  de  $P_B(t)$  se almacenan en la solución actual  $S$ . A partir de la solución  $S$  es fácil calcular el valor actual de la función objetivo de  $P_A$ , este valor se expresa como  $z^A(S)$ . Se utiliza  $S^p$  para identificar la solución de la iteración previa y poder compararla con la solución de la iteración actual  $S$ .

En la parte iterativa de la fase de construcción, se busca un equilibrio entre calidad y variedad de soluciones, lo cual se logra mediante una aleatorización parcial. El procedimiento se realiza iterativamente agregando un elemento a la vez, es seleccionado aleatoriamente de una Lista de Candidatos Restringida (RCL, por sus siglas en inglés) que contiene a los mejores candidatos de acuerdo a una función voraz establecida. Para este problema un elemento corresponde a un hospital candidato al que se le puede adicionar un equipo médico para aumentar su capacidad de servicio.

Primero es necesario identificar el conjunto de elementos candidatos  $H$ , que está integrado por aquellos hospitales que dado los valores actuales de  $\bar{t}_j$  no violen las restricciones (14) y (16) de  $P_A$ . Después se requiere evaluar una función voraz, para

este problema se utiliza el costo total proporcional a cada hospital público de la red  $OC_i, \forall i \in G$ ; donde  $\sum_{i \in G} OC_i = z^A(S)$ . La función voraz se muestra en la ecuación (33) para la que se requiere calcular previamente los costos de las ecuaciones (31) y (32) a partir de los valores de la solución  $S$ . Al agregar capacidad propia a los hospitales con mayores costos operativos se les reducen sus costos de tercerización y penalización por demanda insatisfecha.

Costos para hospitales con servicio instalado ( $\forall j \in O$ ):

$$CTU_j = FC \cdot \bar{y}_j + VC \cdot \bar{t}_j + \sum_{u \in U} VOC^u \cdot \bar{s}_j^u + \sum_{k \in K} \sum_{u \in U} CDT_k^u \cdot \sum_{i \in O(k)} \bar{x}_{ij}^u + \sum_{u \in U} DC^u \cdot \bar{x}_{ij}^u + \sum_{u \in U} PSC_p^u \cdot \bar{x}_{jr}^u + \sum_{i \in O(p)} \sum_{u \in U} CT_i^u \cdot \bar{x}_{ij}^u \quad (31)$$

$$\text{donde } \bar{y}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{t}_j \geq 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}, \forall j \in G$$

$$UC_j = \frac{CTU_j}{\sum_{i \in G} \sum_{u \in U} \bar{x}_{ij}^u} \quad (32)$$

Costos para todos los hospitales públicos ( $\forall i \in G$ ):

$$OC_i = \sum_{j \in O} \sum_{u \in U} UC_j \cdot \bar{x}_{ij}^u + \sum_{j \in O_j} \sum_{u \in U} CT_i^u \cdot \bar{x}_{ij}^u, \quad (33)$$

donde  $i^* \in G/O$

En cada iteración se incluirán en la RCL, los hospitales con valor de  $OC_i$  que estén dentro de un rango determinado por un umbral de calidad  $\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$ . Para establecer este rango se utiliza la ecuación (36) que consideran los valores  $OC^{\min}$  y  $OC^{\max}$  obtenidos por (34) y (35) respectivamente.

$$OC^{\min} = \min \{ OC_i \mid i \in H \} \quad (34)$$

$$OC^{\max} = \max \{ OC_i \mid i \in H \} \quad (35)$$

$$RCL = \{ i \in O \mid OC_i \geq OC^{\max} - \alpha(OC^{\max} - OC^{\min}) \} \quad (36)$$

Una vez generada la RCL se selecciona aleatoriamente un hospital  $e$  de la lista, a éste se le adiciona un equipo médico, es decir,  $\bar{t}_j = \bar{t}_j + 1$  para  $j = e$ . Para evaluar la mejora de esta nueva solución se resuelve nuevamente  $P_B$  con  $\bar{t}_j$  actualizado.

Por otro lado, las restricciones (9) de  $P_A$  establecen un mínimo de capacidad interna que cada institución debe garantizar, delimitado por  $\delta_k$ . Como el procedimiento inicia con una capacidad muy baja en la red de hospitales y va aumentando en cada iteración, en las primeras iteraciones estas restricciones serán infactibles, pero al terminar el procedimiento se debe garantizar su factibilidad. Para ello se calcula el valor del indicador  $\Delta$  de acuerdo a la ecuación (37) con un valor de 1 si alguna restricción (9) no se cumple para algún  $k \in K$  y 0 en otro caso. Con este indicador el procedimiento deberá seguir iterando incluso cuando el mejor valor  $z^A(S)$  haya sido encontrado mientras  $\Delta = 1$ . Por lo que si esto ocurre se debe agregar capacidad únicamente a las instituciones que aún no satisfagan la restricción (9) de  $P_A$ .

$$\Delta = \begin{cases} 1 & \text{si para algun } k \in K, n \in N: \frac{\sum_{j \in G(k)} C \cdot \bar{t}_j}{\sum_{i \in G(k)} \sum_{u \in U} \mu_i^u} < \delta_k \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (37)$$

El procedimiento iterativo se debe detener hasta que ya no se pueda mejorar la solución y se cumpla

la restricción (9), es decir que  $z^A(S) > z^A(S^p)$  y además que  $\Delta = 0$ .

```

Procedimiento Construcción_Voraz_Probabilista( $\alpha, t$ )
1  $S \leftarrow$  Resolver_Problema_B( $t$ );
2 hacer
3    $S^p \leftarrow S$ ;
4   determinar conjunto de elementos candidatos H;
5   evaluar función voraz  $OC_i, \forall i \in H$ ;
6    $OC^{\max} = \min\{OC_i \mid i \in H\}$ ;
7    $OC^{\min} = \max\{OC_i \mid i \in H\}$ ;
8    $RCL \leftarrow \{i \in H \mid OC_i \geq OC^{\max} - \alpha(OC^{\max} - OC^{\min})\}$ ;
9    $e \leftarrow$  random(RCL)
10   $t_e \leftarrow t_e + 1$ ;
11   $S \leftarrow$  Resolver_Problema_B( $t$ );
12  determinar  $\Delta$ ;
13  mientras ( $z^A(S) \leq z^A(S^p)$  OR  $\Delta = 1$ );
14  retornar  $S$ ;
fin Construcción_Voraz_Probabilista.
    
```

Fig. 6. Pseudo-código de fase de construcción.

V. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Para evaluar el procedimiento GRASP se utilizaron instancias con diferentes tamaños de red y diferentes capacidades de equipos médicos como se muestra en las Tablas I y II.

TABLA I  
TAMAÑO DE LA RED

Tamaño de la Red	Instituciones	Hospitales por Institución	Hospitales Privados
30	5	5	5
60	5	10	10
180	5	30	30

TABLA II  
NIVELES DE CAPACIDAD

Capacidad	Tiempo Unitario de Servicio (horas)	Capacidad Total (servicios)
I	1	8760
II	2	4380
III	4	2190
IV	5	1752

Para cada instancia (combinación de tamaño de la red y capacidad) se evaluó GRASP para valores de  $\alpha = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$ , donde  $\alpha=0$  representa el procedimiento completamente voraz y  $\alpha=1$  el procedimiento completamente aleatorio. La demanda anual de las muestras se generó de forma aleatoria siguiendo una distribución de probabilidad estimada a partir de la base de datos del Sistema Nacional de Información en Salud (SINAIS) de México para el año 2012 donde se analizó la demanda del servicio de Imagen por Resonancia Magnética con información de 500 hospitales públicos, para estos ejemplos se consideró dos niveles de urgencia: regular y urgente.

Los experimentos fueron desarrolladas en una PC con procesador Intel Core i7-2620M 2.7GHz y 16 GB RAM. Para la resolución de los problemas y el desarrollo del algoritmo se utilizó GAMS 23.5.1 con interfaz GAMS/CPLEX.

Como indicador se utiliza el Índice de Optimalidad Relativo (IOR). El IOR mide que tan buena es una solución con respecto a la mejor solución del problema, se calcula de la siguiente forma  $IOR =$

(solución heurística – solución óptima) / solución óptima; en caso de no contar con la solución óptima se utiliza la mejor cota inferior conocida. Para comparar los resultados de GRASP se resolvieron las instancias de prueba con el método B&B con GAMS/CPLEX. Para las redes de 30 y 60 hospitales se logró encontrar la solución óptima de cada problema y para las redes de 180 hospitales se utilizó la mejor cota inferior encontrada en una hora de procesamiento.

En un primer análisis se evaluaron los valores del umbral de calidad con 100 iteraciones, se encontró que la mejor calidad en las soluciones es generada por  $\alpha=0.5$  de acuerdo a la Fig. 7. También se observa que utilizando el procedimiento GRASP ( $0 < \alpha < 1$ ) se encontraron soluciones de mejor calidad que las generadas utilizando un procedimiento completamente voraz ( $\alpha = 0$ ) y un procedimiento completamente aleatorio ( $\alpha = 1$ ).

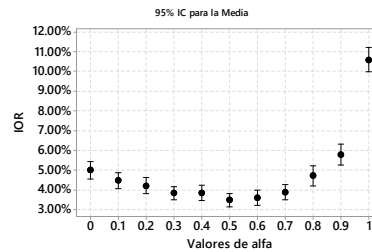


Fig. 7. Gráfica de Intervalos de valores de alfa vs IOR.

Para establecer un número adecuado de iteraciones para cada procedimiento, se evaluaron diferentes valores de acuerdo a la Fig. 8 con un umbral de calidad de  $\alpha=0.5$ . Se encontró que a partir de las 700 iteraciones los valores de las soluciones comienzan a decrecer en menor grado, encontrado soluciones en alrededor de un IOR del 0.8 %.

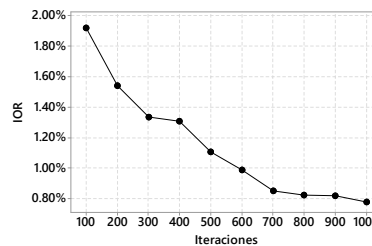


Fig. 8. Gráfica de Iteraciones vs IOR

En la Tabla III se muestra los promedios de los resultados de GRASP con 700 iteraciones para las diferentes instancias tomando 30 muestras. En general las soluciones encontradas son de buena calidad, para el valor del umbral de calidad de  $\alpha = 0.5$  se encontraron en promedio soluciones entre 0.4% y 1.6% con respecto a la mejor solución encontrada por el B&B. Para redes de 30 y 60 hospitales no se logró superar las soluciones del B&B pero para los problemas de 180 hospitales con GRASP se encontraron mejores soluciones que las

soluciones enteras encontradas por el B&B en una hora de procesamiento.

De las instancias probadas, se puede observar en la Fig. 9 que la calidad de las soluciones mejora conforme la capacidad de los equipos disminuye, esto se debe a que cuando la capacidad de los equipos es menor, se requieren más equipos para satisfacer la demanda y por consiguiente se requieren un mayor número de iteraciones en la fase constructiva, generando mayor diversificación.

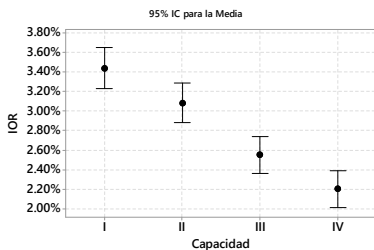


Fig. 9. Gráfica de Intervalos de Capacidad vs IOR.

Se encontró que conforme el tamaño de la red de hospitales aumenta las soluciones que se generan son de mayor calidad de acuerdo a la Fig. 10 y el rango de variación disminuye, esto también es debido a la mayor diversificación que se genera en la fase constructiva. Ésta es una ventaja del procedimiento porque en sí mismo está diseñado para problemas con redes de hospitales de gran tamaño.

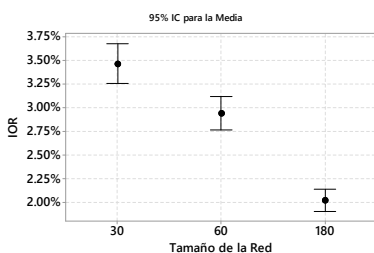


Fig. 10. Gráfica de Intervalos de Tamaño de la red vs IOR

### VI. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

El modelo propuesto en esta investigación es una nueva alternativa en el área de aplicación, teniendo un potencial como herramienta en la toma de decisiones con respecto a la planificación en infraestructura de este tipo de equipos médicos y este tipo de sistemas de salud, sobre todo para cuando se trata de recursos limitados.

Resolver el problema propuesto por el método convencional de B&B resulta adecuado cuando se trata de redes relativamente pequeñas o cuando el tiempo computacional no es una limitante para el tomador de decisiones, sin embargo, para instancias grandes del problema donde el tiempo de solución juega un papel importante se requiere la implementación de una metaheurística. En este sentido se introduce una fase constructiva de GRASP como primera etapa de la investigación.

TABLA III  
RESULTADOS EXPERIMENTALES

Red Cap.	30				60				180							
	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV				
GRASP ( $\alpha = 0.0$ )	2.8	2.9	2.6	1.9	2.6	4.4	2.8	1.9	1.3	2.6	2.8	2.7	2.1	1.9	2.4	2.5
( $\alpha = 0.1$ )	2.7	2.6	2.3	1.8	2.4	3.5	2.3	1.5	1.2	2.1	2.8	2.6	1.9	1.6	2.2	2.3
( $\alpha = 0.2$ )	2.6	2.2	2.1	2.4	2.3	3.6	2.2	1.5	1.5	2.2	2.5	2.0	1.5	1.1	1.8	2.1
( $\alpha = 0.3$ )	2.2	2.9	2.3	2.0	2.4	3.2	1.8	1.7	1.1	1.9	2.0	1.8	1.3	0.7	1.4	1.9
( $\alpha = 0.4$ )	1.7	1.6	1.9	1.5	1.7	2.3	1.5	1.0	0.7	1.4	1.2	1.0	0.6	0.5	0.8	1.3
( $\alpha = 0.5$ )	1.4	1.4	1.1	1.4	1.3	1.6	1.1	0.9	0.5	1.0	0.9	0.9	0.4	0.4	0.6	1.0
( $\alpha = 0.6$ )	1.6	1.9	1.7	1.6	1.7	2.0	1.5	0.9	0.6	1.3	0.9	0.9	0.5	0.4	0.6	1.2
( $\alpha = 0.7$ )	2.8	2.4	2.5	2.9	2.6	3.1	2.4	1.8	1.4	2.1	1.5	1.4	0.8	0.3	1.0	1.9
( $\alpha = 0.8$ )	4.6	3.5	3.1	2.6	3.4	3.3	2.9	1.6	1.6	2.4	1.9	2.2	1.5	0.6	1.6	2.5
( $\alpha = 0.9$ )	5.9	5.8	4.7	5.1	5.4	5.4	3.9	3.7	2.7	3.9	2.7	2.8	2.1	1.1	2.2	3.9
( $\alpha = 1.0$ )	11.4	12.9	12.9	12.9	12.5	13.8	12.3	10.4	9.3	11.5	8.3	8.6	7.5	6.3	7.7	10.6
B&B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.2	1.5	1.3	1.7	1.4	1.4

En general, se encontró que el tamaño de la red y la capacidad del equipo están relacionados con la calidad de las soluciones, sin embargo estas características del problema no son controlables pero sí nos permiten darnos una idea de lo que implican. Actualmente se están probando instancias con redes de hospitales de mayor tamaño donde no es posible encontrar soluciones factibles con el B&B en una hora de procesamiento, por ejemplo para redes de 600 hospitales o más.

Una nota importante a señalar sobre los tiempos de cómputo de la heurística, es que en la fase constructiva, cuando se intenta resolver  $P_B$ , esto se hace mediante GAMS/CPLEX, es decir, se resuelve un problema nuevo de forma independiente en cada iteración. Como se sabe, esto incurre en un costo de overhead significativo [8]. Por tal motivo, en el presente trabajo nos concentramos en discutir la calidad de las soluciones y no los tiempos de procesamiento. Ahora bien, una de nuestras tareas inmediatas es reemplazar este llamado a GAMS/CPLEX por el llamado directo a las rutinas de la biblioteca de optimización de CPLEX escritas en C ó C++ con lo cual se esperaría una reducción del tiempo dramática ya que puede aprovecharse el estado de la solución de  $P_B$  de la iteración anterior y no empezarlo cada vez de cero como hace GAMS.

Dada la estructura del procedimiento se pueden evaluar fácilmente distintas estrategias de búsqueda local con diferentes tipos de vecindarios que agreguen, quiten o intercambien equipos médicos en la red de hospitales. Se espera que la calidad de solución pueda ser mejorada aún más con la implementación de la búsqueda local. Esta mejoría se ha evidenciado en diversos problemas de localización. Esta etapa aún se encuentra en proceso de desarrollo.

Naturalmente, una vez implementados los esquemas de búsqueda local se abrirá la puerta a otros metaheurísticas como búsqueda tabú, búsqueda dispersa, búsqueda de vecindarios variables entre otras.

## AGRADECIMIENTOS

La investigación está apoyada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México (CONACYT) apoyo No. CB2011-01-166397.

## REFERENCIAS

- [1] Branas, C., MacKenzie, E. & ReVelle, C. (2000). A trauma resource allocation model for ambulances and hospitals. *Health Services Research*, 35(2), 489-507.
- [2] Daskin, M. S. & Dean, L. K. (2004). Location of Health Care Facilities. En F. Sainfort, M. Brandeau, & W. Pierskalla, *Handbook of OR/MS in Health Care: A Handbook of Methods and Applications* (págs. 43-76). Springer.
- [3] Drezner, Z. & Hamacher, H. W. (2004). *Facility Location: Applications and Theory* (Segunda ed.). Berlin: Springer.
- [4] Farahani, R. Z., & Hekmatfar, M. (2009). *Facility Location: Concepts, Models, Algorithms and Case Studies*. Heidelberg: Physica-Verlag.
- [5] Feo, T. A. & Resende, M. G. C. (1995). Greedy randomized adaptative search procedures. *Journal of Global Optimization*, 6(2), 109-133.
- [6] Giedion, U., Villar, M. & Ávila, A. (2010). *Los Sistemas de Salud en Latinoamérica y el papel del Seguro Privado*. Madrid: FUNDACIÓN MAPFRE.
- [7] Harper, P., Shahani, A., Gallagher, J. & Bowie, C. (2005). Planning health services with explicit geographical considerations: a stochastic location-allocation approach. *Omega*, 33(2), 141-152.
- [8] Kallrath, J. (2012). *Algebraic Modeling Systems: Modeling and Solving Real World Optimization Problems*. Heidelberg: Springer Berlin.
- [9] Mahar, S., Bretthauer, K. M. & Salzarulo, P. A. (2011). Locating specialized service capacity in a multi-hospital network. *European Journal of Operational Research*, 212(3), 596-605.
- [10] Marianov, V. & Serra, D. (2002). Location problems in the public sector. En Z. Drezner, & H. Hamacher, *Facility location: Applications and theory* (págs. 119-144). New York: Springer.
- [11] McLafferty, S. & Broe, D. (1990). Patient outcomes and regional planning of coronary care services: A location-allocation approach. *Social Science and Medicine*, 30(3), 297-304.
- [12] Mehrez, A., Sinuany-Stern, Z., Arad-Geva, T. & Binyamin, S. (1996). On the implementation of quantitative facility location models: the case of a hospital in a rural region. *Journal of the Operational Research Society*, 47(5), 612-625.
- [13] Mirchandani, P. B. & Francis R. L. (1990). *Discrete location theory*. John Wiley & Sons, New York.
- [14] Mitropoulos, P., Mitropoulos, I., Giannikos, I. & Sissouras, A. (2006). A biobjective model for the locational planning of hospitals and health centers. *Health Care Management Science*, 9(2), 171-179.
- [15] Ndiaye, M. & Alfares, H. (2008). Modeling health care facility location for moving population groups. *Computers and Operations Research*, 35(7), 2154-2161.
- [16] Oliveira, M., & Bevan, G. (2006). Modelling the redistribution of hospital supply to achieve equity taking account of patient's behavior. *Health Care Management Science*, 9(1), 19-30.
- [17] Price, W. & Turcotte, W. (1986). Locating a blood bank. *Interfaces*, 16(2), 17-26.
- [18] Radiah Shariff, S., & Noor Hasnah Moin, M. O. (2012). Location allocation modeling for healthcare facility planning in Malaysia. *Computers and Industrial Engineering*, 62(4), 1000-1010.
- [19] Rahman, S. & Smith, D. K. (2000). Use of location-allocation models in health service development planning in developing nations. *European Journal of Operational Research*, 123(3), 437-452.
- [20] Schweikhart, S. & Smith-Daniels, V. (1993). Location and service mix decisions for a managed health care network. *Socio-Economic Planning Sciences*, 27(4), 289-302.
- [21] Stummer, C., Doerner, K., Focke, A. & Heidenberger, K. (2004). Determining location and size of medical departments in a hospital network. *Health Care Management Science*, 7(1), *Health Care Management Science*.
- [22] Syam, S. S. & Côté, M. J. (2010). A location-allocation model for service providers with application to not-for-profit healthcare organizations. *Omega*, 38(3-4), 157-166.
- [23] Syam, S. S. & Côté, M. J. (2012). A comprehensive location-allocation method for specialized healthcare services. *Operations Research for Health Care*, 1(2), 73-83.
- [24] Toregas, C., Swain, R., ReVelle, C. & Bergman, L. (1971). The location of emergency service facilities. *Operations Research*, 16(6), 1363-1373.
- [25] Zhanga, Y., Berman, O. & Verte, V. (2009). Incorporating congestion in preventive healthcare facility network design. *European Journal of Operational Research*, 198(3), 922-935.