INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS

SUPERIORES DE MONTERREY

CAMPUS CIUDAD DE MÉXICO

VALUACIÓN DE SWAPTIONS BERMUDA BASADO EN EL MODELO LIBOR Y ADAPTADO AL MODELO DE VECTORES FRONTERA PARA EL CÁLCULO DE OPCIONES AMERICANAS

MAESTRÍA EN CIENCIAS FINANCIERAS

TESIS PRESENTADA POR

ENZO D'ANTONIO DI VITO DUCOING

ASESOR
DR. IGOR PATRICIO RIVERA GONZÁLEZ

LECTORES
DR. ANDRÉS DANIEL FUNDIA AIZENSTAT
DR. FRANCISCO VENEGAS MARTINEZ

MAYO 2008

Un agradecimiento muy especial al Dr. Andrés Fundia por toda su asesoría, trabajo y tiempo dedicado a este trabajo.

Agradezco también al Dr. Igor Rivera por su ayuda y apoyo para la culminación de esta tesis y al Dr. Francisco Venegas por participar como lector y por la invitación a este programa de Maestría.

Dedicada a mi esposa
Dedicada a mis hermanos
Dedicada a mi madre a quien además agradezco y agradeceré siempre todas y cada una de mis metas alcanzadas durante mi vida gracias a su apoyo y formación.

TECNOLÓGICO
DE MONTERREY

Hacemos constar que en la Ciudad de México, el día 9 de mayo de 2008, el alumno:

Enzo D'Antonio di Vito Ducoing

sustentó el Examen de Grado en defensa de la Tesis titulada:

"Valuación de Swaptions Bermuda basada en el Modelo Libor y adaptada al Modelo de Vectores Frontera para el cálculo de opciones americanas."

Presentada como requisito final para la obtención del Grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS FINANCIERAS

Ante la evidencia presentada en el trabajo de tesis y en este examen, el *Comité Examinador*, presidido por el **Dr. Andrés Daniel Fundia Aizenstat** ha tomado la siguiente resolución:

— APROBADO —

Dr. Igor Patricio Rivera González
Director de Tesis

Dr. Andrés Daniel Fundia Aizenstat
Lector

Dr. Francisco Venegas Martinez
Lector

Dr. José Antonio Núñez Mora
Director del Programa Doctoral

RESUMEN

Este trabajo estudia el cálculo del precio de Swaptions tipo Bermuda, basados en el Modelo Libor o de Mercado de tasa de interés adaptado al algoritmo de vectores de frontera de ejercicio para valuar opciones americanas. Este algoritmo basado en simulaciones Monte Carlo, obtiene una frontera de tasas de ejercicio que permite valorar la decisión de seguir en la opción o ejercerla de forma anticipada. Concluimos que este modelo tiene la ventaja de ser fácil de implementar y puede obtener un resultado rápido y aproximado del valor de un Swaption bermudano, mejor conocido en el mercado como Swaptions Bermuda.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Actualmente el uso de derivados sofisticados es cada vez mas solicitado en los mercados financieros y entre las razones principales de esta creciente demanda se encuentra la posibilidad de aprovechar y generar oportunidades de negocio que se derivan de la evolución y cambios de las necesidades de los clientes y participantes de los mercados.

Entre los productos más comunes en el mercado de derivados de tasas, se encuentran los Caps, Floors y los Swaps. Los Caps son opciones de tasas de interés que le garantizan al tenedor que una tasa variable no exceda de un nivel específico; los Floors, contrario a los Caps, garantizan al tenedor que una tasa variable no disminuya de un cierto nivel, la cotización de ambos en el mercado generalmente se realiza en términos de volatlidad de tasas.

Caps y Floors en el Mercado

Intercapital

CAPS/FLRS	STRIKES		OTM - STRIKE (MIDs)					
	ATM		-3	-2	-1	+1	+2	+3
1 Yr	6.65	7.65	N/A	N/A	8.15	11.15	N/A	N/A
2 Yr	8.05	9.05	N/A	9.55	9.55	10.80	12.95	N/A
3 Yr	9.15	10.15	10.65	10.65	10.65	10.90	13.25	14.15
4 Yr	9.50	10.50	11.00	11.00	11.00	11.20	12.95	13.45
5 Yr	9.65	10.65	10.65	10.65	10.90	11.35	12.55	13.05
7 Yr	10.25	11.25	11.25	11.25	11.50	11.95	12.95	13.35
10Yr	10.50	11.50	11.50	11.50	11.75	12.00	13.00	13.50

BLACK VOLS expressed as a percent
of yield volatility

Por otra parte los “Swaps” son contratos en el que las contrapartes acuerdan el intercambio de flujos futuros en una misma o en diferentes monedas y a tasas fijas o flotantes. Dado que el uso de “Swaps” en los mercados es cada vez más común, la necesidad de utilizar un derivado sofisticado como los “Swaptions” se ha incrementado considerablemente.

Los “Swaptions” son un producto con un grado mayor de sofisticación, que, como su nombre lo indica; son opciones que permiten tener el derecho de entrar en un “Swap” y recibir o pagar la tasa fija.

Igual que las opciones de tasas de interés los “Swaptions” cotizan en términos de volatlidad de tasas y la tasa de ejercicio está dada por la tasa fija del swap subyacente al que se puede entrar. Igual que las opciones tradicionales pueden ser Europeos y Americanos. Los “Swaptions” Europeos pueden ejercerse

solo al vencimiento de la opción, y los americanos pueden ser ejercidos en cualquier momento antes del vencimiento. Tanto en las opciones americanas como en los “Swaptions” americanos, existe una variante, llamada opciones bermuda; que te permiten ejercer este derecho en un calendario de fechas definido antes del vencimiento. Igualmente existen contratos “Call” y “Put”; en un “Call Swaption“ o “payer swaption” el comprador tiene el derecho de entrar a un “swap“ pagando la tasa fija y en un “Put swaption” o “receiver swaption” el comprador tiene el derecho de entrar a un “swap” pagando la tasa flotante.

Swaptions en el Mercado

SWAPTION VOLS ATM: NO BASIS

	1 Year Bid	1 Year Offer	2 Year Bid	2 Year Offer	3 Year Bid	3 Year Offer	5 Year Bid	5 Year Offer
1 Month	6.30	7.80	6.75	8.25	7.50	9.00	7.95	9.45
3 Month	7.50	9.00	7.30	8.80	8.30	9.80	8.85	10.35
6 Month	7.90	9.40	8.10	9.60	8.80	10.30	9.35	10.85
1 Year	9.95	11.45	10.05	11.55	10.75	12.25	10.75	12.25
2 Year	10.80	12.30	11.00	12.50	11.30	12.80	11.55	13.05
5 Year	11.75	13.25	12.05	13.55	12.25	13.75	12.50	14.00
10 Year	11.75	13.25	12.05	13.55	12.25	13.75	12.75	14.25

	7 Year Bid	7 Year Offer	10 Year Bid	10 Year Offer	15 Year Bid	15 Year Offer	20 Year Bid	20 Year Offer
1 Month	8.10	9.60	8.40	9.90	8.50	10.00	8.55	10.05
3 Month	9.20	10.70	9.55	11.05	10.15	11.65	10.15	11.65
6 Month	9.60	11.10	10.40	11.90	10.70	12.20	10.75	12.25
1 Year	10.85	12.35	11.05	12.55	11.25	12.75	12.00	13.50
2 Year	11.65	13.15	11.70	13.20	12.35	13.85	12.35	13.85
5 Year	12.75	14.25	13.20	14.70	13.50	15.00	13.50	15.00
10 Year	12.95	14.45	13.45	14.95	13.50	15.00	13.50	15.00

BLACK VOLS Expressed as a % of yield volatility - WITHOUT BASI

Este tipo de derivados además de ser utilizados con objeto de negociación y especulación cobran gran importancia al usarse como instrumentos de cobertura. Esto implica que se incrementen los usuarios que negocian este tipo de productos; los "swaptions bermuda" generalmente están implícitos en swaps que pueden ser cancelables ("llamables") los cuales la mayoría de las veces forman parte de canastas de activos o de bonos cancelables.

Por ejemplo, cuando se utilizan con objeto de negociación o especulación por intermediarios o tesorerías de bancos, los Swaptions (al igual que Caps y Floors) se cotizan en términos de volatilidad. La operación se basa en comprar a niveles de volatilidad bajo y vender a niveles altos; generalmente se negocian "Swaptions" tipo europeo y en estrategias básicas. También muchas de las veces se utilizan para cubrir niveles de volatilidad provocados por posiciones propias o de clientes.

Otra operación importante ocurre cuando la banca los utiliza como cobertura de activos, es decir, si la banca otorga un crédito a tasa fija en el que el cliente pueda prepagar de forma anticipada, la banca debe cubrirse de ese posible prepago. Esto es, el crédito de forma natural es cubierto por la institución con un "Swap", al mismo tiempo compra un "swaption" que otorgue el derecho de recibir la tasa fija y en el caso de que el cliente decida prepagar el crédito (esto asume que el prepago se realiza por ventajas en el mercado), el "swaption" será ejercido y cubrirá la falta de esa tasa fija (activo) por el crédito cancelado.

En la siguiente tabla se muestra numéricamente como funciona la cobertura con "Swaptions" en este ejemplo particular.

Nominal	100,000,000
Tasa Credito	9%

Dias Flujos	Flujos Crédito	Cobertura Swap		Cobertura de Prepago Swaption		Flujos Finales
		Paga Fija	Recibe Flotante	Recibe Fija	Paga Flotante	
90	2,250,000	-2,250,000	2,047,594	Swaption sin ejercer		2,047,594
180	2,250,000	-2,250,000	2,100,441			2,100,441
270	2,250,000	-2,250,000	2,155,787			2,155,787
360	2,250,000	-2,250,000	2,201,852			2,201,852
450	2,250,000	-2,250,000	2,224,232			2,224,232
540	2,250,000	-2,250,000	2,257,211			2,257,211
630	2,250,000	-2,250,000	2,294,328			2,294,328
720	2,250,000	-2,250,000	2,331,460			2,331,460
810	PREPAGO	-2,250,000	2,305,378	2,250,000	-2,305,378	0
900		-2,250,000	2,315,715	2,250,000	-2,315,715	0
990		-2,250,000	2,335,458	2,250,000	-2,335,458	0
1080		-2,250,000	2,355,844	2,250,000	-2,355,844	0
1170		-2,250,000	2,380,951	2,250,000	-2,380,951	0

OBJETIVO

El objetivo de este trabajo es aplicar un modelo de cálculo de precio de opciones americanas a los Swaptions tipo *Bermuda*. Este modelo se basa en simulaciones Monte Carlo sobre el modelo Libor o de Mercado para tasas, y propone una alternativa a los modelos ya existentes para la aproximación del precio de este tipo de instrumentos. Hay diferentes modelos para el cálculo de opciones americanas utilizando simulación Montecarlo; como el modelo de Glasserman (Ver: 2 y 5) o el de Andersen (Ver: 2 y 4) que muestran lógicas parecidas; y para el cálculo de Swaptions tipo Bermuda entre otros se encuentra el Leif Andersen (Ver: 7), que utiliza el Modelo Libor Multifactorial.

Para opciones americanas los árboles binomiales funcionan muy bien a diferencia de las simulaciones Monte Carlo que resultan más complicadas. Por otro lado, es conveniente utilizar el modelo Libor porque se ajusta de forma natural a las tasas observadas y no requiere de parámetros inobservables; casi siempre se utiliza con simulación Monte Carlo (Ver: 1, 2 y 3).

Dado que las opciones tipo bermuda son un caso especial de opciones americanas, se tratarán inicialmente en este trabajo las diferencias entre utilizar árboles binomiales y simulación Monte Carlo para valuar este tipo de opciones; a continuación se hablará de algunos métodos para valuar con simulación Monte Carlo incluyendo el que se desarrollará y del modelo Libor. Finalmente se describirá el caso específico de los Swaptions y la implementación del modelo a través de un ejemplo ejecutado en Visual Basic.

Sección I: Opciones Americanas y Swaptions Bermuda

1.1 Valuación de Opciones Americanas a través de Simulaciones Monte Carlo y Árboles Binomiales.

El uso de árboles binomiales para el cálculo de precios de opciones americanas de una y hasta dos dimensiones, es muy utilizado (*Ver 1y2*); un árbol binomial representa un diagrama de diferentes trayectorias recombinantes que pudieran seguir los precios del bien subyacente durante la vida de la opción, partiendo del supuesto que el subyacente en cada período de tiempo se mueve hacia arriba o hacia abajo en una magnitud determinada (Figura 1). Una vez trazado el árbol la forma de trabajar es partiendo del final del árbol hasta el principio, probando cada uno de los nodos para ver donde es óptimo ejercer antes del vencimiento (*Ver 1 y,2*).

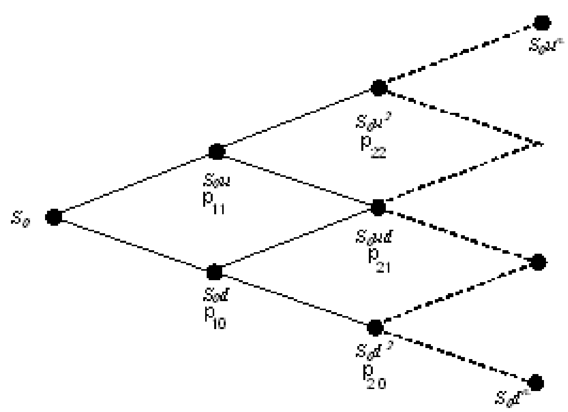


Figura 1

En general es un modelo muy recurrido para el cálculo de este tipo de opciones, el cual comienza a complicarse si la función de pago de la opción depende de la trayectoria que sigue el subyacente y no solo del valor final en cada uno de los pasos, además de complicarse con problemas de mas de dos dimensiones. Las simulaciones Monte Carlo, en cambio, se adaptan fácilmente al problema de alta dimensión. (*Ver 5*)

En las simulaciones Monte Carlo pueden incorporarse dependencias de trayectoria, esto dado que no se ven afectadas con problemas de dimensión. En este método se generan diferentes trayectorias aleatorias con algún proceso estocástico definido para el subyacente (Figura 2); se calcula la función de pagos para cada trayectoria y posteriormente la media para estimar el valor esperado de la función de pagos del derivado. La desventaja de la simulación Monte Carlo radica en que para Opciones Americanas, la posibilidad de ejercicio óptimo antes de vencimiento; es complicado de implementar (*Ver 1y2*).

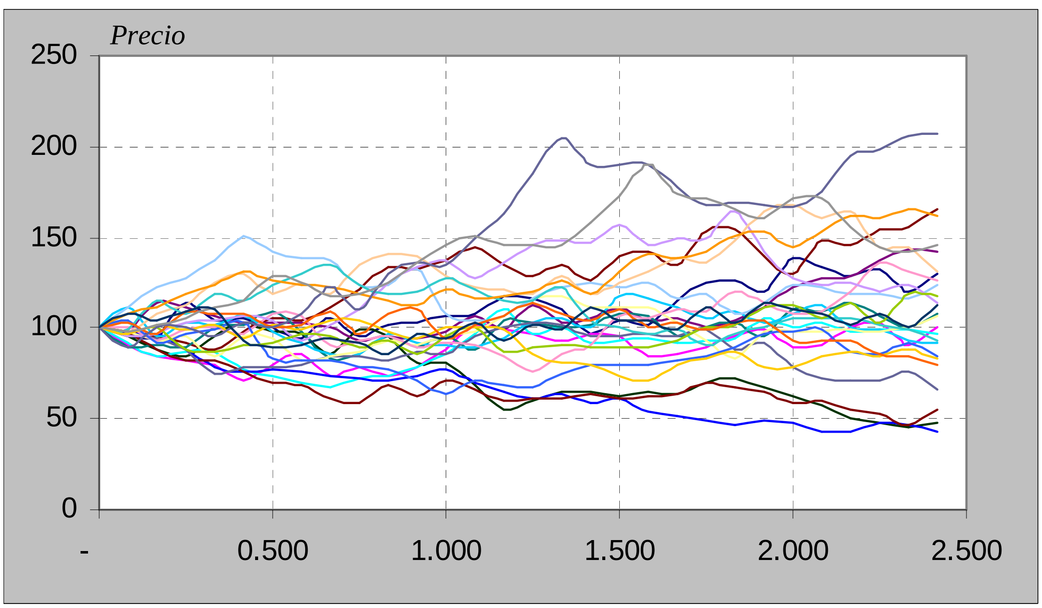


Figura 2

En algunas investigaciones como Broadie&Glasserman 1997; Fundia 2002, I. P. Rivera 2003; se han realizado diferentes aproximaciones para buscar la manera de utilizar simulación Monte Carlo en la valuación de opciones americanas. Esto resuelve el problema de dependencia en trayectorias como el proceso del modelo Libor, así como una función de pago con posible ejercicio antes de vencimiento.

1.2 Modelo Libor o de Mercado

Los modelos de tasas de interés proponen describir la evolución de las tasas de interés a través del tiempo; algunos describen una estructura temporal de tasas basados en el comportamiento de la tasa de corto plazo como el Ho & Lee, mientras que otros se basan en procesos que siguen tasas "forward" instantáneas como el Heath, Jarrow y Morton.

La característica de tasas "forward" instantánea de modelos anteriores, en la práctica es considerada como una desventaja ya que estas tasas no se observan directamente en el mercado y el modelo es difícil de calibrar para los instrumentos negociados. En respuesta a esto Brace, Gatarek y Musiela, y simultáneamente Farshid Jamshidian; propusieron el modelo *BGM* o Modelo LIBOR de mercado; el cual puede expresarse en términos de las tasas "forward" que se observan en los mercados actuales.

Resulta conveniente usar este modelo sobre las tasas aplicables a los derivados de tasas de interés en los períodos líquidos, estos períodos son de por lo menos un mes y comúnmente de tres y seis meses resultando su uso menos complicado que las tasas instantáneas no observadas.

Una de las variantes del modelo Libor ó de Mercado asume la mayoría de las veces que las tasas forward siguen una distribución lognormal y que usualmente debe ser implementado usando simulación Monte Carlo.

Este modelo se utiliza en productos comunes del mercado de derivados de tasas, mencionados al inicio de este trabajo como los Caps y Floors (Ver 2y3).

Sección II: Algoritmos Para Valuar Con Simulación Monte Carlo

Existen diferentes modelos para el cálculo de primas de opciones americanas utilizando simulación Monte Carlo; en general se caracterizan por utilizar métodos numéricos y en algunos casos métodos iterativos; en esta sección se describen los principales.

2.1 Aproximación de mínimos cuadrados. (Modelo Longstaff & Schwartz, "L&S")

Para valuar opciones americanas, es necesario elegir en cada posible punto de ejercicio entre continuar con la opción o ejercer. El modelo de L&S muestra una manera de determinar el valor de "continuar", usando simulaciones Monte Carlo a través del análisis ordinario de mínimos cuadrados. El método consiste en generar un gran número de trayectorias y analizar los posibles valores del subyacente para cada periodo de ejercicio en cada una de las trayectorias. Se compara el valor de ejercicio en cada punto con el valor de no ejercer; donde el valor de no ejercicio, está dado por la relación $V = a + bS + cS^2$, donde "S" es el precio del subyacente en el i-ésimo período y "V" es el valor de no ejercer calculado al tiempo correspondiente, es decir, el valor de ejercer en el siguiente periodo descontado al periodo i-ésimo. Para todos los valores se encuentran a, b y c tal que se determine el $MIN\sum\left(Vi - a - bS - cS^2\right)^2$, a través de mínimos cuadrados. Se realiza de atrás hacia delante hasta obtener el valor de ejercer inmediatamente.

Este modelo podría llegar a complicarse cuando el precio de la opción se vea afectado por más de un factor, resultando la aproximación ordinaria por mínimos cuadrados impráctica para el cálculo de la función condicional "V";

resultando más eficiente utilizar otras técnicas como mínimos cuadrados ponderados o mínimos cuadrados generalizados entre otros. Podría también encontrarse algunas otras implicaciones numéricas para la significancia estadística de las regresiones de mínimos cuadrados al definir la función condicional (*Ver 10*).

2.2 Aproximación a través de Fronteras de Ejercicio. (Modelo Andersen)

Después de calcular un número considerable de trayectorias Monte Carlo, en este método se propone una aproximación en la cual la frontera de ejercicio es parametrizable.

Primeramente se define una función de ejercicio anticipado $I\ (t)$ que es igual a 1 si el ejercicio anticipado es óptimo en el tiempo t y "0" en otro caso. $I\ (t)$ es una función con un vector de parámetros; cuyos valores óptimos son determinados iterativamente, iniciando por el vencimiento de la opción hasta el inicio.

Se prueban cada uno de los valores del precio "*S*" del subyacente, en cada período t de las diferentes trayectorias, y en el que el valor esperado de ejercicio sea mayor/menor dependiendo del tipo de opción, es decir, el valor que maximice el precio promedio de la opción se definirá como punto frontera. Se obtiene el punto frontera para cada período t y así hasta llegar a t=0 (*Ver 2,5*).

En este modelo la parametrización de las fronteras es única para cada tipo de operación; y en ocasiones podría resultar complicada la forma en que debe ser parametrizada la frontera de ejercicio anticipado.

2.3 Vectores Frontera para el "pricing" de Americanas. ("Fast Monte Carlo American Option Pricing" ; Fundia)

Los vectores frontera se calculan iniciando por el vencimiento de la opción hasta el inicio, es decir haciendo el recorrido hacia atrás en el tiempo. En el tiempo final "*N*", el valor está determinado por el precio de ejercicio de la opción, y para encontrarlos en cualquier tiempo *k* es necesario haber obtenido los valores futuros, es decir entre el tiempo *k* y *N*.

En cada uno de los períodos primeramente debe definirse el techo y el piso de la frontera y se define "*y*" como el punto medio de dichos puntos; y la pregunta que debe responderse es si la función de pago es mayor o igual al valor estimado de continuar con la opción; de acuerdo a la respuesta, "*y*" será el nuevo piso o techo del período *k*;.

Para contestar estas preguntas, se define primero la función de valor de la opción si el tenedor decide no ejercer. Se simulan trayectorias desde el tiempo *k* hasta el tiempo *N*; en cada una de ellas se obtiene un valor observado.

Para las n trayectorias que se calculan, se obtienen valores observados; de los cuales si se obtiene el valor esperado de dicho valor (estimador) se obtendrá el valor esperado de continuar en la opción; las respuestas a la pregunta antes mencionada, serían las siguientes:

- ejercer si la función de pago es mayor o igual al valor estimado de continuar,
- no ejercer si la función de pago es menor al valor estimado de continuar.

Esto se repite hasta que el valor del piso y del techo coincidan (es decir, difieran en un valor no mayor a ε).

Una ventaja de este modelo es que es un método iterativo y con alta velocidad de cálculo.

El algoritmo descrito anteriormente es el que se implementó en este trabajo; siendo la base para el desarrollo en VBA y se describirá con mayor detalle en la Sección III (*Ver 6*).

Sección III: Implementación

Se iniciará esta sección, con una descripción general del algoritmo a seguir para el cálculo la frontera de ejercicio, el cual combinado con el modelo de tasas, conformará un método alternativo a los ya existentes; posteriormente se explicará a detalle tomando como ejemplo un swaption semestral con plazo de 10 años.

La idea fundamental que se propone es, implementar el modelo "Fast Monte Carlo American Option Pricing", para obtener una aproximación de la frontera de ejercicio de tasas swaps que permita calcular el valor de un "swaption" Bermuda. Se pretende utilizar este método de aproximación para opciones americanas, combinado con el modelo Libor de mercado[1].

Es importante señalar que el ejemplo implementado con fines experimentales para el cálculo de la frontera, tiene como supuestos los siguientes:

- Se considera la curva de tasas libre de riesgo como plana en todos los plazos para este ejemplo en particular.
- La Curva de volatilidad se considera plana para todos los plazos para este ejemplo en particular.
- Es un modelo de una sola dimensión.

[1] Permite obtener el proceso de las tasas forward generadoras de las tasas swaps.

Este método puede aplicarse de manera general para cualquier plazo de swaps observados en el mercado, además de que puede generalizarse fácilmente a estructuras temporales de tasas observadas y volatilidades.

3.1 Descripción General del Algoritmo

Los vectores frontera se calculan iniciando por el vencimiento de la opción (tiempo "N") hasta el inicio. En el tiempo "N" el valor de la frontera está determinado por el precio de ejercicio de la opción, y para encontrar este valor en cualquier tiempo k es necesario haber obtenido los valores futuros, es decir entre k y N.

En cada uno de los períodos primeramente debe definirse el techo y el piso de la frontera, los cuales pueden ser " 0 " y un número " B "; con un número " u " tal que " u " pertenece al intervalo y se quiere encontrar un único número " u^* " tal que (x, u^*) sea un vector frontera.

Primero se define " y " como el punto medio del piso y techo definidos anteriormente (0, B); y la pregunta que debe responderse es si $y \geq u^*$; de acuerdo a la respuesta "y " será el nuevo piso o techo de u^*; esto se repetirá hasta que la diferencia entre el piso y el techo no sea mayor a un número ε definido.

Para contestar estas preguntas, se define primero g_k, como el valor de la opción si el tenedor decide no ejercer. Se simulan trayectorias comenzando en S_k $(S_k, S_{k+1}, \ldots, S_N)$; con cada una de ellas se obtiene un valor observado G_k.

Este valor G_k se define como:

$$G_k = D_{k,t} * h(S_t);$$

Donde

t = min (k+1, . . . , N), si $S_t \geq V$ para cualquier V que pertenezca a la frontera de ejercicio ó t = N; si $S_t < V$;

h( ) es el valor de ejercer en ese momento;

$D_{k,t}$ es el factor de descuento.

De hecho para las n trayectorias que se calculan, se obtienen valores de G_k; si se hace que $g_k = 1/n\ \Sigma\ G_k$, es decir el estimador del valor esperado de continuar; las respuestas a las preguntas antes mencionadas, serías las siguientes:

- $y \geq u^*$ si $h(x) \geq g_k$, es decir, ejercer si la función de pago es mayor o igual al valor estimado de continuar.
- $y < u^*$ si $h(x) < g_k$, es decir, no ejercer si la función de pago es menor al valor estimado de continuar.

Esto se repite hasta que el valor del piso y del techo coincidan es decir, difieran en un valor no mayor a ε.

En el documento referente a este modelo (Referencia 6) se puede encontrar la demostración teórica de que el número de trayectorias converge a una solución para dar respuesta a las preguntas de ejercer o continuar.

El número de trayectorias y el tiempo de simulación dependerán del subyacente sobre el que se esté calculando y del proceso estocástico que se defina para este.

3.2 Cálculo e implementación del modelo para Swaptions Bermuda.

Para este modelo se supondrá, una opción tipo bermuda sobre un swap con periodicidad semestral, en el que se adquiere el de derecho de pagar la tasa fija ("payer") y con posibilidad de ejercer en cualquier período de vencimiento de cupón.

Las características del instrumento son las siguientes:

Vencimiento T: 10 años.

Frecuencia: Semi anual

Precio de ejercicio K: 9.5%

Volatilidad: 12.15%

Tasa libre de riesgo: 8.15 %

Tipo de Opción: Bermuda

Antes de iniciar con el algoritmo para construir la frontera de tasas se describirá el proceso a utilizar con el modelo Libor de mercado, para las simulaciones de trayectoria de tasas.

Como ya se mencionó anteriormente el modelo Libor de Mercado puede ser implementado usando simulación Monte Carlo y expresado en términos de volatilidad. El modelo libor que se utilizará es el proceso definido para tasas forwards, de las cuales pretende obtenerse las tasas swaps; entonces la expresión a utilizar que define el proceso estocástico del las tasas forward, es como sigue:

$$F(t, j+1) = F(t, j)\exp\left[\left(\frac{\delta F(t, j)\sigma^2}{1+\delta F(t, j)} - \frac{\sigma^2}{2}\right)\delta + \sigma Z\sqrt{\delta}\right] \quad (1)$$

Donde:

$F(t, j+1)$: tasa forward para el siguiente período

$F(t, j)$: tasa forward del período actual

δ: periodicidad de la tasa

σ: volatilidad

Z: variable aleatoria con distribución normal estándar con media cero y desviación estándar uno.

Esta expresión a través de simulaciones permitirá obtener trayectorias de las tasas forwards de las que derivarán las tasas swaps que formarán parte de la frontera de ejercicio.

De acuerdo a la descripción general anterior, se tiene:

El algoritmo inicia el cálculo en el vencimiento del subyacente., es decir en el tiempo N, en este caso el año 10 o como se está hablando de frecuencia semestral equivale a 20 períodos. Dado que el punto frontera en el período 20 está dado por el precio de ejercicio[1], el primer punto de análisis es el N-1, es decir el 19 en este ejemplo. El análisis inicia con definir un piso ("0") y un techo ("*B*") iniciales, los cuales se irán cerrando a través de un proceso iterativo, hasta converger a la tasa forward frontera que se busca. En este ejercicio se definió como techo inicial *B*= 2*K*, es decir *B* = 19%; entonces el intervalo inicial está dado por los valores (0, 19%).

[1] La tasa swap y la tasa forward en el último período es la misma.

Siguiendo con la descripción hecha anteriormente del modelo; se encuentra el punto medio del intervalo (0, B), es decir y = 9.5%, a partir de este valor se harán simulaciones que permitirán obtener el valor esperado de la tasa forward (Figura 1).

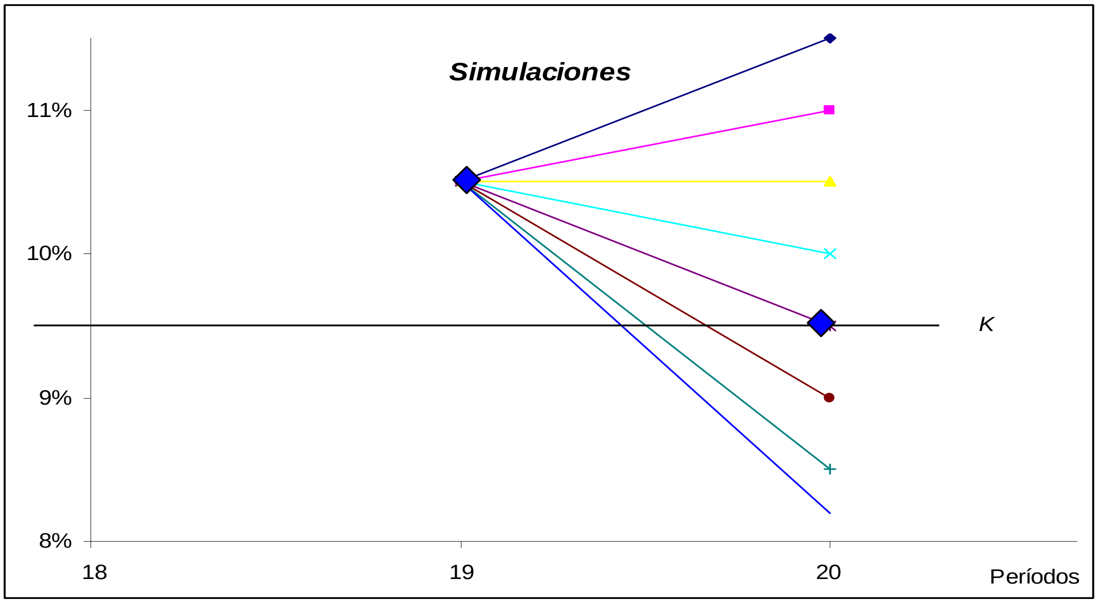


Figura 1

Usando el proceso de tasas forward (1), se tiene:

$$F(20_i) = 0.095\exp\left[\left(\frac{0.5*0.095*(0.1215)^2}{1+0.5*0.095} - \frac{(0.1215)^2}{2}\right)0.5 + 0.1215*Z*\sqrt{0.5}\right]$$

Donde el valor Z es un número aleatorio con distribución Normal (0,1). Entonces deben realizarse un número alto de simulaciones para obtener el valor esperado de F.

Para cada valor de F(20, i) debe determinarse el valor G_k.

Entonces G_k esta dado por:

$$G_k = (F(20, i) - K) * FD$$

Donde FD es el factor de descuento dado por la tasa libre de riesgo entre el periodo n y n-1.

Para cada simulación se encuentra un valor G_k, de los cuales si se hace $g_k = 1/n \Sigma G_k$; se obtiene el valor esperado es decir el valor de permanecer en la opción si así lo decidiera el tenedor.

De aquí la comparación del valor g_k con el valor *y,* en caso de que el valor de permanecer en la opción sea mayor que ejercer; entonces el valor *y* será el nuevo piso para la siguiente iteración, es decir el procedimiento de cálculo descrito anteriormente se realiza ahora con el intervalo (*y*, B) o (9.5%, 19%) en este caso. Este proceso se repite hasta que la diferencia entre el piso y el techo sea inferior a un número ε, este es el error con el que finalmente está calculado el valor frontera.

Una vez que se calculó el valor en el período n-1 o el 19 en este ejemplo, se debe continuar con el período inmediatamente anterior n-2 o el 18. En este punto se parte nuevamente del piso y techo iniciales definidos anteriormente (0, B), se obtiene el valor medio *y* , y se harán simulaciones, esta vez desde el período n-2 hasta N; las trayectorias inician en el período n-i y terminarán en el punto en que se encuentren mayor al punto frontera anteriormente calculado o en el período N. La figura 2 muestra como se generan las trayectorias desde cualquier punto n-i con i > 1.

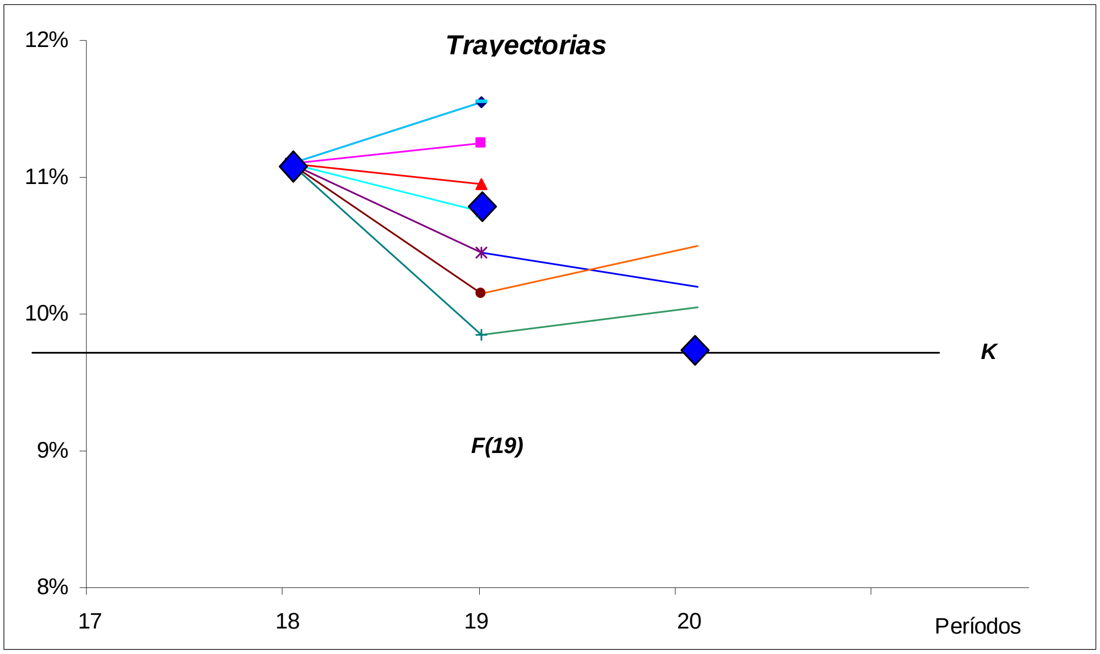


Figura 2

Con los valores G_k encontrados con las simulaciones, se encuentra el valor esperado g_k; se compara con el punto medio y , y así de forma sucesiva hasta llegar al período n=1.

Una vez obtenida la tasa forward frontera para cada uno de los puntos; se puede obtener la tasa swap de cada uno de ellos; esto a través de la relación entre estas tasas y que se describe a continuación:

$$S_i = \frac{\prod_{j=i}^{n-1}(1+\delta F(t_i))-1}{\sum_{j=i}^{n-1}\delta\prod_{k=j-1}^{n-1}(1+\delta F(t_k))}$$

Donde:

S_i : tasa swap para el siguiente período

$F(t_k)$: tasa forward del período actual

δ : periodicidad de la tasa

Finalmente el precio de la opción al principio del período corresponde al valor de permanecer en la opción ya que el tenedor no ejercería de forma instantánea, es decir el valor de g_k.

3.3 Resultados.

Para el ejemplo descrito en la sección anterior, se obtuvo lo siguiente:

Características:

Vencimiento T: 10 años.

Frecuencia: Semi anual

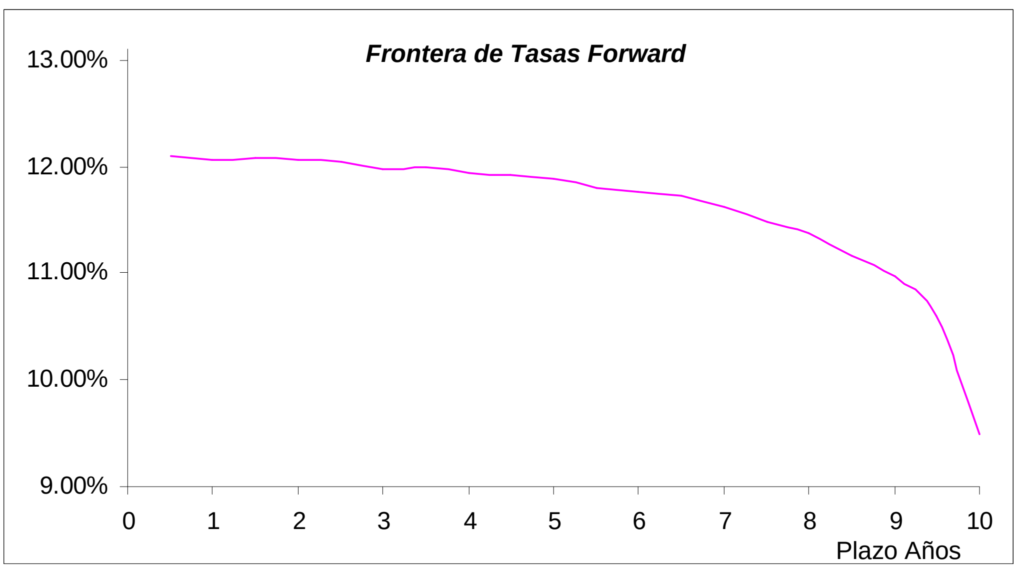
Precio de ejercicio *K*: 9.5%

Volatilidad: 12.15%

Tasa libre de riesgo: 8.15 %

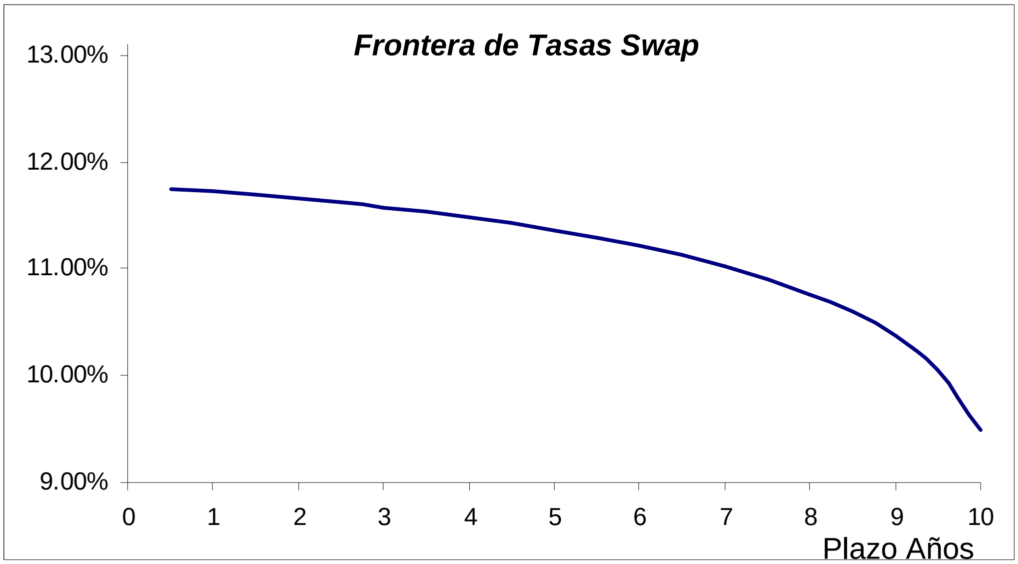
Tipo de Opción: Bermuda

Frontera de ejercicio, tasas forward (Gráfica 1):



Gráfica 1

Frontera de ejercicio, tasas swap (Gráfica 2):



Gráfica 2

Entonces la frontera de ejercicio indica que si la tasa observada se encuentra por arriba de esta (en el caso de un payer swaption), al tenedor le convendría ejercer la opción de forma anticipada.

Para obtener el precio de la opción en el tiempo cero, solo es necesario calcular el valor de permanecer en la opción como se realizaría en cualquier tiempo “t “.

En este ejemplo el precio de la opción resulta 1.75%; este valor parece ser razonable, pero para saber realmente la efectividad del algoritmo, a continuación se presenta un cuadro comparativo del precio de algunos "swaptions" tipo bermuda que se cotizan en el mercado y cuyo proceso de cálculo tiene un grado mayor de sofisticación.

Swaptions Bermuda	Vectores	Trinomial Hull&White*	Otro*
Plazo 3 años K = 8.5	0.37%	0.33% - 0.69%	0.32% - 0.69%
Plazo 5 años K = 9.00	0.64%	0.56% - 0.99%	0.56% - 1.00%
Plazo 10 años K = 9.5	1.75%	1.65% - 2.13%	1.68% - 2.12%

* Precios Compra/Venta

Como se muestra en el cuadro anterior, los resultados obtenidos por el modelo de vectores son comparables con los niveles de compra y de venta que se cotizan en el mercado mexicano.

Finalmente en el anexo se detalla el programa desarrollado en Visual Basic para efectos de la implementación de este algoritmo.

CONCLUSIONES

La intención de esta tesis fue proponer una alternativa eficiente de cálculo para valuar los "Swaptions" y en particular los tipos *Bermuda*. Basados en un modelo iterativo para el cálculo de opciones americanas y aplicado al Modelo Libor o de Mercado se logró obtener una rápida aproximación del valor de este tipo de productos.

El modelo iterativo basado en simulaciones Monte Carlo; permite calcular el valor de permanecer en la opción o de ejercerla en cada un de los períodos definidos.

El número de simulaciones que después de diferentes corridas se sugiere manejar, es de 100,000; un número menor de simulaciones puede causar desviaciones grandes en el resultado. Por otro lado en cada un de los puntos, el número de iteraciones sugeridas es 15, es decir el subproceso de definir un nuevo piso o techo para definir el valor frontera, se repite 15 veces. Esto implica que el grado de error, es decir la diferencia entre el piso y el techo es menor a 0.00001.

El proceso estocástico utilizado en las simulaciones es el modelo Libor estándar para tasas forward. El algoritmo aquí definido encuentra una frontera de tasas forward y a partir de estas es posible encontrar la frontera de tasas "swap".

Este modelo tiene la ventaja sobre algunos ya existentes, de que es fácil de implementar y se puede obtener un resultado rápido y muy aproximado del valor de un "Swaption" bermuda. Entre las desventajas, este modelo se trabaja en una sola dimensión y el modelo Libor de un factor lognormal, es más difícil de aplicar a un problema con multifactores.

En la comparación de precios realizada al final de la sección anterior, puede observarse que los precios calculados por el modelo de vectores son cercanos a las cotizaciones de compra y venta encontradas en el mercado mexicano; pero si se supone que el precio teórico real, se aproxima al precio promedio entre las posturas de compra y de venta, se puede observar que los precios calculados están subvaluados, esto se atribuye a los supuestos considerados de volatilidad, curva de tasas de interés y de modelo.

Finalmente logra cumplirse con el objetivo al poder aplicar el modelo de "pricing" para opciones americanas a un derivado de tasas, encontrando resultados razonables dado los supuestos. Además se muestra el desarrollo del algoritmo en VBA con el que se logró la implementación.

Como trabajos posteriores podrían realizarse desarrollos para el cálculo de sensibilidades y compararlas con otros modelos; o bien desarrollar el algoritmo para el modelo Libor "multifactor"; eliminando el supuesto de una estructura temporal plana de volatilidades y de tasas.

Estudios empíricos como el de Driessen, Klaassen y Melenberg; han demostrado que no es necesario utilizar un modelo de muchos factores para capturar la volatilidad total de los mercados; tres factores son suficientes para explicar en promedio el 97.8% del movimiento y un solo factor explica la mayoría, es decir en promedio puede explicar el 83.7% (*Ver 11*).

REFERENCIAS

1. WILMOTT, Paul
   Introduces Quantitative Fianance
   John Wiley & Sons Ltd.
   England, 2001

2. HULL, John C.
   Options, Futures and Other Derivatives
   Prentice Hall
   Fifth Edition
   New Jersey, 2002

3. JAMSHIDIAN, Farshid
   Libor and swap market models and measures
   Finance Stochastic
   1,293-330(1997)

4. ANDERSEN, Leif
   ANDREASEN, Jesper.
   Volatility skews and extensions of the Libor Market Model
   Applied Matemathical Finance.
   7,1-32 (2000)

5. BROADIE, Mark
   GLASSERMAN, Paul.
   Pricing American-style securities using simulation
   Journal of Economic Dynamics & Control.
   21, (1997). 1323-1352

6. FUNDIA, Andrés
Fast Monte Carlo American Option Pricing

7. ANDERSEN, Leif
A simple approach to the pricing of Bermudan swaptions in the multifactor Libor market model.
General Re Financial Products
New York

8. BRIGO, Damiano.
MERCURIO, Fabio.
Interest Rate Models
Springer Finance
Fifth Edition
Italy, 2001

9. LITTERMAN and Scheinkman.
Common Factors Affecting Bond Returns
Journal of Fixed Income
1:54-61. 1991

10. LONGSTAFF, Francis A.
SCHWARTZ, Eduardo S.
Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach.
The Review of Financial Studies. 2001
Vol. 14, N° 1; pp 113-147

11. DRIESSEN, Joost
KLAASSEN, Pieter
MELENBERG, Bertrand
The Performance of Multi-Factor Term Structure for pricing and Hedging Caps and Swaptions.
Journal of Financial and Quantitative Analysis. Sep 2003
38, 3; ABI/INFORM Global pg. 635

ANEXOS

I. Algoritmo y Código en Visual Basic

En esta parte se presenta el algoritmo desarrollado para realizar el cálculo propuesto en este trabajo y se realizará la descripción de la sintaxis en cada una de las partes del programa.

```
 ' Cuerpo principal del programa
Sub simula()

   spot = Range("B1") ' tasa en el periodo 0 ( 0.0814 )
   tasa = Range("B5") ' tasa de interés ( 0.0815 )
   vol = Range("B2")  ' volatilidad ( 0.1215 )
   frec = Range("B3") ' frecuencia de pagos ( 0.5 años)
   k = Range("B4")    ' tasa de ejercicio ( 0.095 )
   techo = 2 * k      ' techo inicial
   piso = k           ' piso inicial
   numtray = Range("E1")    ' número de trayectorias (10000)
   numtray2 = Range("F1")
   plazo = Range("E2")      ' plazo ( 10 años)
   periodos = plazo / frec  ' número de períodos ( 10 años)
   t = periodos
   itera = 15  ' iteraciones por trayectoria que definen margen de error “ε“

   ReDim ptofinal(t) As Double
   ReDim FD(t) As Double
   ReDim tswap(t) As Double
   ptofinal(t) = k
```

```
Do
  t = t - 1
  For y = 0 To itera          ' Iteraciones para definir la tasas fwd frontera
      ptof = (techo + piso) / 2  ' Punto medio entre piso y techo
    If (ptof - k) > proceso(ptof, tasa, vol, frec, numtray, t, k) Then  'Compara el valor de ejerecer vs el valor de continuar en la opción (llamando a la función "proceso" )
       techo = ptof   ' Define nuevo piso o techo.
    Else: piso = ptof
    End If
  Next y
 ptofinal(t) = ptof ' almacena tasa fwd frontera.
 piso = k: techo = 2 * k
Loop Until t = 1  ' Termina el ciclo en el primer período.
x = 1
Do  'Calcula factores de descuento correspondiente a cada tasa fwd.
 x = x + 1
 FD(x) = 1 / (1 + ptofinal(x) * frec)
Loop Until x = periodos


' Calculo de la tasa swap frontera.

tswap(periodos) = ptofinal(periodos)
x = periodos - 1

Do
 CalcuFD x, sumaFD, UlFD  'calcula factores de descuento acumulados para las tasas swap (llama función "CalcuFD").
 tswap(x) = (1 - UlFD) / sumaFD / frec 'calculo de tasas swap para cada período.
```

```
  x = x - 1
Loop Until x = 1
a = 2
Do ' Inserta Frontera de ejercicio resultante
 Cells(7 + a, 4) = tswap(a) ' Inserta tasas swap
 Cells(7 + a, 5) = ptofinal(a) ' Inserta tasas forward
 a = a + 1
Loop Until a = periodos + 1

 precio = prima(spot, tasa, vol, frec, numtray2, k) ' Calcula precio final
 Cells(7, 2) = precio

End Sub
```

```
'Función "proceso": cálculo del valor esperado de permanecer en la opción.
Function proceso(ptof, tasa, vol, frec, numtray, t, k)

  Do
        tray = ptof: yy = t
        Do
          tray = tray * lnormalT(tasa, vol, frec, tray) 'calculo de trayectoria aplicando el proceso de tasas (llama a función "lnormalT")
          yy = yy + 1
        Loop Until tray >= ptofinal(yy) Or yy = periodos ' Si la tasa generada es menor que la tasa frontera entonces sigue calculando la trayectoria hasta que sea mayor o llegue al último período.
 If tray > k Then
          vpint = (tray - k) * frec / (1 + tasa * frec) ^ (yy - t)  ' valor de no ejercer.
Else
            vpint = 0
```

```
End If
    acumula = acumula + vpint
    x = x + 1
  Loop Until x = numtray   ' termina al completar el número de trayectorias.
 proceso = acumula / numtray / frec  ' Cálculo del Valor esperado gk
End Function
```

```
'Función "lnormal": define el proceso estocástico de tasas.
Function lnormalT (tasa, vol, frec, tray)
  lnormalT = Exp((frec * tray * vol ^ 2 / (1 + frec * tray) - (vol ^ 2 / 2)) * frec +
  vol * (frec ^ 0.5) * norm)
End Function
```

```
'Función "calcuFD": calcula factores de descuento para obtener tasas swap..
Sub calcuFD(x, ByRef sumaFD, ByRef UlFD)

  numper = periodos - x + 1            ' periodos de swap
  ReDim calFD(numper) As Double
  j = numper: i = numper
 Do
    acum = 1

 Do
                        acum = acum * FD(periodos + j - numper)
```

```
    j = j - 1
Loop Until j = 0
   calFD(i) = acum
   i = i - 1
   j = i
 Loop Until i = 0

   UlFD = calFD(numper)
   sumaFD = WorksheetFunction.Sum(calFD())
 End Sub
```

```
'Función "norm": calcula números aleatorios normales
Function norm()
  Dim fac As Double, r As Double, V1 As Double, V2 As Double

1   V1 = 2 * Rnd - 1
   V2 = 2 * Rnd - 1
   r = V1 ^ 2 + V2 ^ 2
   If (r >= 1) Then GoTo 1
   fac = Sqr(-2 * Log(r) / r)
   norm = V2 * fac

End Function
'Función "prima": calcula el valor de la opción.
Function prima(spot, tasa, vol, frec, numtray2, k)

 Do
         tray = spot: yy = 1
  Do
       tray = tray * lnormalT(tasa, vol, frec, tray) ' Precio * proceso de precios
```

```
        yy = yy + 1
    Loop Until tray >= tswap(yy) Or yy = periodos 'Si el nuevo precio < el punto de    frontera entonces sigue la trayectoria.
    If tray > k Then
        vpint = (tray - k) * frec * swpFD(tray, periodos - yy + 1, frec, tasa) / (1 + tasa * frec) ^ (yy - 1) 'valor de ejercicio
    Else
        vpint = 0
    End If
   acumula = acumula + vpint
          x = x + 1
  Loop Until x = numtray2
  prima = acumula / numtray2 'Valor esperado

End Function
```

```
'Función “swpFD”: calcula factor de descuento de los cupones swap.
Function swpFD(tray, tswp, frec, tasa)

   fdacu = 0: i = 0
  Do
    i = i + = 1
    fdacu fdacu + 1 / (1 + tasa * frec) ^ i 'genera factores de descuento del swap
  Loop Until i = tswp
    swpFD = fdacu

End Function
```