



Universidad TecVirtual
Escuela de Graduados en Educación

**La enseñanza y el aprendizaje del concepto de flujo
del campo eléctrico en el nivel superior**

Disertación que para obtener el grado de:

Doctor en Innovación Educativa

presenta:

Cynthia Concepción Castro Ling

Asesor titular:
Dr. Ricardo Pulido Ríos

Monterrey, Nuevo León, México

Mayo 2013

Dedico de todo corazón este trabajo
a mi esposo, Mauricio,
y a mis hijos Fiorella y Mauricio,
quienes han sido mi inspiración constante,
y a Dios por acompañarme en este viaje.

Agradecimientos

A la Escuela de Graduados en Educación de la Universidad TecVirtual y al Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey por brindarme la oportunidad de realizar mis estudios doctorales.

A mi asesor de tesis, el Dr. Ricardo Pulido Ríos, por su constante impulso, guía y paciencia en el desarrollo de esta investigación.

A mis sinodales, la Dra. Ruth Rodríguez Gallegos y el Dr. Jaime Ricardo Valenzuela González, por sus valiosos comentarios y la ayuda brindada para la realización de este trabajo de investigación.

A toda mi familia, en especial a mis padres; gracias por su maravilloso apoyo y por su gran amor.

A mis amigos del Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey y del Doctorado en Innovación Educativa, quienes me ofrecieron su apoyo incondicional y maravillosos momentos.

La enseñanza y el aprendizaje del concepto de flujo del campo eléctrico en el nivel superior

Resumen

El objetivo de esta disertación es evidenciar el aprendizaje con significado del concepto de flujo de un campo que tienen los estudiantes universitarios que hayan cursado Matemáticas III para Ingeniería con una propuesta de un Diseño Integral, en contraste con los que no lo cursaron así. Diversas investigaciones han analizado las dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de flujo de un campo; sin embargo, existe actualmente la necesidad de tener una investigación que considere que esas dificultades de la enseñanza-aprendizaje del concepto de flujo de un campo están influenciadas por deficiencias de una enseñanza matemática no apropiada. Esta disertación ofrece esa perspectiva. El estudio se realizó con estudiantes universitarios del Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey, que cursaron Matemáticas III para ingeniería y que estuvieran cursando Electricidad y Magnetismo. Se diseñó y se implementó un examen de preguntas abiertas a 104 alumnos de la institución, y también se realizaron entrevistas a los alumnos que presentaron el examen. Además, se realizó un análisis de contenido a los libros de texto de la Física escolar, y se efectuaron observaciones a un grupo de Matemáticas III para ingeniería y a un grupo de Física III. Los aportes más importantes de esta investigación son: (1) un análisis de las evidencias encontradas como muestras de aprendizaje con significado alrededor del concepto de flujo de un campo que tienen los estudiantes universitarios que llevaron la propuesta de Diseño Integral en un curso de Matemáticas III para

ingeniería en contraste con los que no lo llevaron; y (2) un análisis de los elementos teóricos que explican las razones del porqué la enseñanza del concepto de flujo del campo eléctrico, basada solamente en los libros de texto de Física, no contribuye al logro de aprendizajes con significado. Estos aportes tienen implicaciones directas para los investigadores del área y también para profesores que enseñan este concepto.

Índice

Capítulo 1. Planteamiento del problema	1
Antecedentes	1
Dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de flujo del campo eléctrico.	2
Dificultades en el aprendizaje de la Física en general.	2
Dificultades del aprendizaje del concepto de flujo dentro de los cursos de Electricidad y Magnetismo.	3
Dificultades del aprendizaje relacionadas con la matemática involucrada con la noción de flujo eléctrico	4
Diferentes explicaciones de las dificultades en el aprendizaje del concepto de flujo de un campo eléctrico	8
Explicaciones de la problemática del aprendizaje del concepto de flujo de un campo desde el punto de vista cognitivo.	8
Explicaciones de la problemática del aprendizaje del concepto de flujo de un campo desde el punto de vista didáctico.....	9
Explicaciones de la problemática del aprendizaje del concepto de flujo de un campo desde el punto de vista epistemológico	10
Explicaciones de las dificultades en el aprendizaje atribuidos al soporte matemático del concepto de flujo proveniente de los libros de texto tradicionales de Cálculo.	14
Diferentes propuestas didácticas para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de flujo de un campo.	16
Propuestas didácticas para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de flujo de un campo para los cursos del Electricidad y Magnetismo	17
La enseñanza del flujo de un campo propuesta en el Diseño Integral en los cursos de Matemáticas III para ingeniería.	20
Planteamiento del problema	23
Objetivos de la investigación	25
Hipótesis.....	26
Justificación.....	28
Limitaciones del estudio	28
Capítulo 2. Marco teórico	30
Consideraciones teóricas generales bajo las cuales fue construido el Diseño Integral, del que forma parte el M3DI	31
El uso de la historia de las matemáticas como un recurso en la investigación educativa	33
El concepto del flujo eléctrico y el uso de analogías desde un contexto histórico.....	35
Del modelo efluvio de Gilbert al modelo del fluido eléctrico.	36
Del modelo de acción a distancia al modelo de las líneas de fuerza...	37
El flujo como medida de la intensidad de campo eléctrico.	43

El flujo como una integral de superficie.....	45
El uso de analogía para la construcción del concepto de flujo.....	47
Teoría de las representaciones semióticas.....	49
Representaciones semióticas.....	50
El tratamiento y la conversión para el análisis de los aprendizajes con significado del concepto de flujo de un campo.....	54
La Teoría de la Transposición Didáctica.....	57
Capítulo 3. Método.....	63
Enfoque y diseño metodológico.....	63
Contexto sociodemográfico.....	66
Población y muestra.....	67
Instrumentos.....	69
Examen de preguntas abiertas.....	69
Entrevista semi-estructurada.....	73
Análisis de contenido de cómo es presentado el concepto de flujo eléctrico en los libros de texto de la Física escolar.....	75
Observación participante.....	75
Participantes y descripción de las implementaciones de los instrumentos.....	76
Participantes y descripción de las implementaciones del examen de preguntas abiertas.....	77
Participantes y descripción de las implementaciones de la entrevista semi-estructurada.....	77
Procedimientos.....	79
Procedimiento de estudio para el instrumento del examen de preguntas abiertas.....	79
Procedimiento de estudio para el instrumento de la entrevista semi-estructurada.....	80
Procedimiento de estudio para el instrumento del análisis de contenido de los libros de texto de la Física escolar.....	81
Procedimiento de estudio para el instrumento de observación participante.....	81
Estrategias de análisis de datos.....	82
Estrategias de análisis para el examen de preguntas abiertas.....	82
Confiability del instrumento.....	91
Validación de jueces.....	92
Validez de contenido.....	92
Estrategias de análisis para la entrevista semi-estructurada.....	93
Estrategias de análisis de contenido de los libros de texto de la Física escolar.....	94
Estrategias de análisis para la observación participante en el curso de Física III y en el M3DI.....	95
Estrategia para la validez de los resultados obtenidos.....	95
Capítulo 4. Análisis y discusión de resultados.....	97
Análisis de las respuestas obtenidas del examen de preguntas abiertas.....	97

Descripción y análisis de los porcentajes de patrones de respuestas encontradas del examen de preguntas abiertas.	98
Validación de jueces para el instrumento de preguntas abiertas.....	131
Confiabilidad del instrumento.....	134
Validez de contenido.....	136
Análisis y discusión de resultados de la implementación de las entrevistas.	136
Interpretación de los resultados del examen de preguntas abiertas y de las entrevistas.....	140
Análisis y discusión de los resultados de la exploración de contenido de los libros de texto de la Física escolar.....	143
Descripción y análisis de patrones de respuestas encontradas del análisis de contenido de los libros de texto de la Física escolar (definición cualitativa, uso de analogías, definición formal).	143
Descripción y análisis de patrones de respuestas encontradas del análisis de contenido de los libros de texto de la Física escolar (definición matemática).....	148
Análisis y discusión de los resultados obtenidos de la observación participante y la exploración de las situaciones problema.	154
Descripción y análisis de los resultados obtenidos de la observación participante en el curso de Física III y en el curso de M3DI.....	154
Interpretación de los resultados del análisis de contenido de los libros de texto de la Física escolar y de las observaciones realizadas.	159
Capítulo 5. Conclusiones.....	163
Hallazgos de la investigación realizada.....	163
Comentarios finales sobre las limitaciones de este estudio.....	166
Recomendaciones para futuros estudios.....	168
Aporte al campo científico del área de la investigación en la educación	169
Referencias.....	172
Apéndices.....	182
Apéndice A: Secuencia didáctica empleada en el M3DI.....	182
Apéndice B: Examen de preguntas abiertas.....	184
Apéndice C: Resultados de la prueba piloto.....	186
Apéndice D: Guión de Entrevista.....	202
Apéndice E: Rejilla de observación.....	203
Apéndice F: Hoja de consentimiento.....	204
Apéndice G: Ejemplos del análisis de respuestas del examen de preguntas abiertas.....	205
Apéndice H: Planilla de validación.....	207
Apéndice I: Comparación de reactivos codificados en la escala de Likert de acuerdo con la rúbrica.....	209
Apéndice J: Resultados de la rejilla de observación.....	210
Currículum Vitae.....	215

Índice de tablas

Tabla 1. Hallazgos reportados de la deficiencia en el aprendizaje del concepto de flujo de un campo eléctrico.....	7
Tabla 2. Hallazgos reportados de las explicaciones de las dificultades de la enseñanza y el aprendizaje del concepto de flujo de un campo eléctrico	13
Tabla 3. Hallazgos reportados de las propuestas didácticas para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de flujo de un campo para los cursos de Electricidad y Magnetismo	19
Tabla 4. Descripción de cada uno de los problemas e incisos del examen de preguntas abiertas.....	71
Tabla 5. Rúbrica para los significados asociados en la expresión del flujo de un campo eléctrico	84
Tabla 6. Categorías de las respuestas encontradas del significado de flujo eléctrico... ..	101
Tabla 7. Categorías de las respuestas encontradas del significado de campo eléctrico E	103
Tabla 8. Categorías de las respuestas encontradas del significado de el diferencial de área dA	105
Tabla 9. Categorías de las respuestas encontradas del significado del símbolo $E \cdot dA$	107
Tabla 10. Categorías de las respuestas encontradas del significado del símbolo $\oint E \cdot dA$	109
Tabla 11. Reactivos codificados en la escala de <i>Likert</i> de acuerdo con la rúbrica propuesta.....	115
Tabla 12. Medidas descriptivas de las calificaciones de los grupos M3DI y M3T ..	120
Tabla 13. Prueba de normalidad para las calificaciones de los grupos M3DI y M3T	122
Tabla 14. Prueba no paramétrica Mann- Whitney U para comparar las calificaciones entre el GM3DI y el GM3T (Rangos).....	128

Tabla 15. Prueba no paramétrica Mann- Whitney U para comparar las calificaciones entre el GM3DI y el GM3T	129
Tabla 16. Índice de correlación entre cada reactivo.....	133
Tabla 17. Alfa de <i>Cronbach</i> calculado para todo el instrumento	135
Tabla 18. Concepto de flujo de un campo en los libros de texto de la Física escolar.....	144
Tabla 19. Concepto de flujo de un campo (definición matemática), en los libros de texto de la Física escolar.....	150
Tabla 20. Resultados del instrumento de observación participante	155
Tabla 21. Resultados de la prueba piloto: Categorías de las respuestas encontradas del significado de flujo eléctrico.....	189
Tabla 22. Resultados de la prueba piloto: Categorías de las respuestas encontradas del significado de campo eléctrico <i>E</i>	191
Tabla 23. Resultados de la prueba piloto: Categorías de las respuestas encontradas del significado de el diferencial de área <i>dA</i>	193
Tabla 24. Resultados de la prueba piloto: Categorías de las respuestas encontradas del significado del símbolo <i>E · dA</i>	195
Tabla 25. Resultados de la prueba piloto: Categorías de las respuestas encontradas del significado del símbolo $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$	197
Tabla 26. Comparación de reactivos codificados en la escala de Likert de acuerdo con la rúbrica	209

Índice de figuras

Figura 1. Curvas magnéticas que rodean un imán (realizado por Faraday).	41
Figura 2. Comparación gráfica de las respuestas encontradas para cada reactivo entre el GM3DI y GM3T	111
Figura 3. Gráficos Q-Q para las calificaciones de los grupos M3DI y M3T	124
Figura 4. Histogramas de las calificaciones de los grupos M3DI y M3T	125
Figura 5. Diagrama de cajas de las calificaciones obtenidas por los grupos M3DI y M3T	130
Figura 6. Resultados de la prueba piloto: Comparación gráfica de las respuestas encontradas para cada reactivo entre el GM3DI y GM3T	200

Introducción

El concepto de flujo está presente en distintos momentos del currículo de las carreras de ingeniería. Aparece como tema de estudio en los cursos de Electricidad y Magnetismo, Fenómenos de Transporte, Termodinámica y Mecánica de Fluidos. Además, el flujo se estudia dentro del curso de Cálculo de Varias Variables¹ y está asociado con el concepto de campo vectorial.

La importancia que reviste el aprendizaje del concepto de flujo para los estudiantes, en su formación científica, queda de manifiesto cuando Feynman (1987, 1-8) menciona que “con estas dos nociones –flujo y circulación– se pueden describir todas las leyes de la Electricidad y Magnetismo”. A su vez, el estudio de esta área de la Física es de fundamental importancia para comprender e incursionar en el desarrollo de tecnologías para el bienestar social, como lo son la generación de energía eléctrica y las telecomunicaciones. El mismo Feynman (1987, p. 1-16) menciona que “el descubrimiento de Maxwell de las leyes de la electrodinámica es el hecho más significativo del siglo XIX”.

La presente disertación doctoral es una investigación centrada en el concepto de flujo del campo eléctrico y está dividida en cinco capítulos. El capítulo uno inicia con los antecedentes de la problemática que se ha reportado alrededor de la enseñanza y aprendizaje del concepto de flujo de un campo. Continúa con el planteamiento del problema de investigación. Después se presentan los objetivos y la justificación del

¹ En el Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey

planteamiento general de la investigación y, finalmente, se exponen las limitaciones de la misma.

En el capítulo dos se muestra bajo qué perspectiva se dará un sustento teórico al estudio realizado, que dé respuesta a las preguntas de investigación. En esta dirección, se exponen: las consideraciones teóricas generales bajo las cuales fue construida la propuesta de diseño integral del que forma parte el curso de Matemáticas III para Ingeniería; el concepto de flujo eléctrico y el uso de analogías, desde un contexto histórico, como un marco sustancial para la construcción del concepto de flujo; la Teoría de las representaciones semióticas para sustentar los procesos cognitivos desarrollados alrededor del concepto de flujo de un campo que den margen a un aprendizaje con significado; la Teoría de la Transposición Didáctica para enmarcar los elementos teóricos que explican las razones del porqué la enseñanza del concepto de flujo del campo eléctrico basada solamente en los libros de texto de Física no contribuye al logro de aprendizajes con significados.

En el capítulo tres se detalla la propuesta metodológica para responder las preguntas de investigación. En este capítulo se describe el enfoque y diseño metodológico, las características de la muestra seleccionada, los instrumentos y procedimientos empleados para la recolección de datos y la validación de los mismos. Además, se describen las estrategias de análisis para los datos obtenidos. Finalmente, se expone el análisis y la interpretación de los datos recabados en una prueba piloto.

En el cuarto capítulo se muestra el análisis y la discusión de los resultados, y por último en el quinto capítulo se presenta la conclusión en la que se detalla el valor de los hallazgos del estudio, las implicaciones de la investigación y las

recomendaciones a los directamente involucrados y a los que podrían trabajar en futuros estudios.

Capítulo 1. Planteamiento del problema

La investigación de esta tesis doctoral gira alrededor de la enseñanza y aprendizaje del concepto de flujo de un campo eléctrico, que se aborda en los cursos de Electricidad y Magnetismo en las carreras de ingeniería. Este capítulo inicia con los antecedentes de la problemática en la cual se centra la investigación. Continúa con el planteamiento del problema, en donde se exponen las preguntas de investigación de esta tesis. Después se presentan los objetivos y la justificación del planteamiento general de la investigación y, finalmente, se exponen las limitaciones de la misma.

Antecedentes

En este apartado se describe una serie de investigaciones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje del flujo del campo eléctrico que se han llevado a cabo en los niveles educativos medio superior y superior, tanto en México como en otros países. Estas investigaciones han sido agrupadas de la siguiente manera: aquellas que reportan dificultades en el aprendizaje del concepto de flujo del campo eléctrico, aquellas que ofrecen explicaciones del porqué de ciertas dificultades en ese aprendizaje y, finalmente, aquellas que proponen alguna forma de resolver esas dificultades. En este último grupo se incluye la propuesta de lo que en adelante será llamada el “Diseño Integral” (DI), abreviación del Diseño Integral de Matemáticas para Ingeniería, que fue creado por un grupo de profesores del Departamento de Matemáticas del Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey, y que será descrito

en este mismo capítulo, en la que se expone una forma alterna a las referenciadas de construir el concepto de flujo de un campo.

Dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de flujo del campo eléctrico. A continuación se exponen las dificultades reportadas en la literatura sobre el aprendizaje del concepto de flujo de un campo eléctrico desde tres perspectivas distintas, según al área de interés en donde se percibe se presenta la dificultad. En esta dirección se evidencia que esta problemática puede ubicarse: a) como una falla en el aprendizaje de la Física en general (Albe, Venturini y Lascours, 2001; Guisasola, Grass-Mart, Martínez- Torregrosa, 2004; Guisasola, Zubimendi, Almudí y Ceberio, 2007; Goldberg y Bendall, 1995; Mc Dermott, Rosenquist y Van Zee, 1987; Tobias, 2000); b) como dificultades en el aprendizaje dentro de los cursos de Electricidad y Magnetismo, que es donde se estudia propiamente la noción de flujo del campo eléctrico (Guisasola, Almudí y Zuza, 2010; Guisasola, Almudí y Zubimendi, 2003; Albe et al., 2001; Catalán, Caballero y Moreira, 2010); c) como dificultades de aprendizaje relacionadas con la matemática involucrada en el concepto de flujo (Alvarez, 2010; Llancaqueo, Caballero y Moreira, 2003; Cui, Rebello y Bennett, 2005).

Dificultades en el aprendizaje de la Física en general. Síntomas preocupantes relacionados con la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de conceptos en la Física en general se advierten en Becerra-Labra, Gras-Martí y Martínez-Torregrosa (2007, p. 96), quienes mencionan que “en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Física en los primeros niveles universitarios, resulta preocupante el fracaso bastante generalizado de los estudiantes, hecho que se

manifiesta en un alto índice de reprobación y abandono” en los cursos de esta ciencia. Más preocupante aún es que, aunque los alumnos logren una calificación exitosa al término de un curso de Física o logren resolver ciertos ejercicios, eso no garantiza que puedan explicar el significado de sus respuestas o interpretarlas (Redish, 1994; Gil y Vilches, 1999); ahí mismo se habla de un aprendizaje deficiente en cuanto que los alumnos recurren a la memorización para resolver ciertos problemas. Como resultado, se tiene “una tendencia generalizada hacia un aprendizaje memorístico” (Ferreyra y González, 2000, p. 194). Esto es, los estudiantes se inclinan por una simple utilización y manejo de procedimientos rutinarios (ecuaciones y fórmulas matemáticas) en la resolución de problemas de aplicación de los libros de texto, sin poner énfasis en la comprensión del fenómeno físico (Guisasola, Almudí, y Zubimendi, 2003).

Dificultades del aprendizaje del concepto de flujo dentro de los cursos de Electricidad y Magnetismo. Estas dificultades han sido reportadas en diversos trabajos de investigación (Albe et al., 2001; Bango y Eylon, 1997; Guisasola, Almudí y Zuza, 2010; Guisasola et al., 2003; Furió y Guisasola, 1998; Dunn y Barbanel, 2000). Conceptos como el de flujo, campo eléctrico, campo magnético y potencial son los más frecuentemente reportados con dificultades de aprendizaje en los cursos de Electricidad y Magnetismo (Guisasola et al., 2010; Guisasola et al., 2003; Catalán et al., 2010). Baste decir que el concepto de flujo, por ejemplo, es clave para la comprensión de la Ley de Gauss (Alvarez, 2010), la cual, es esencial en el entendimiento cabal de los fenómenos de la Electricidad y Magnetismo.

Maloney, O'Kuma, Hieggelke y Van Heuvelen (2001) analizan las dificultades de aprendizaje de los conceptos involucrados en la teoría electromagnética mediante la aplicación de un pre-test y post-test llamado CSEM (*Conceptual Survey of Electricity and Magnetism*). Los resultados de esta investigación muestran que un bajo porcentaje de estudiantes son los que logran un aprendizaje significativo de los temas en Electricidad y Magnetismo. Por su parte, Singh (2006) realiza una investigación por medio de la aplicación masiva de un examen de opción múltiple que evalúa el conocimiento y entendimiento de la Ley de Gauss, sus consecuencias y la manera en la que se utiliza para resolver problemas; encuentra la persistencia de errores conceptuales clave que impiden el entendimiento de la Ley de Gauss y que los estudiantes recurren con frecuencia a memorizar casos especiales que, en su gran mayoría, son generalizados de manera incorrecta.

Guisasola, Almudí y Zubimendi, (2003, p. 80) muestran una recopilación bibliográfica de once investigaciones realizadas con estudiantes de nivel superior, alrededor de tema del aprendizaje de los conceptos del electromagnetismo, en las cuales se ve reflejado que “la mayoría de los estudiantes no presenta un aprendizaje comprensivo de las nociones básicas de la teoría de campo electromagnético”. Aunado a esta situación, los autores consideran como supuesto que el aprendizaje significativo o conocimiento significativo de los conceptos de campo eléctrico y campo magnético “es un prerrequisito básico” para que los estudiantes razonen adecuadamente sobre los fenómenos electromagnéticos.

Dificultades del aprendizaje relacionadas con la matemática involucrada con la noción de flujo eléctrico. El estudio del concepto de flujo se hace junto con el

concepto de campo. Un aspecto importante que señala Alvarez (2010, p.145) es que “desde la perspectiva del cálculo, se identifica al flujo de un campo vectorial como el objeto matemático, de cuyo concepto se pretende que se apropie el estudiante, antes de enfrentarlo a ley física en la que éste aparece involucrado”. Llancaqueo et al. (2003) ha reportado como resultado de sus investigaciones que los estudiantes universitarios de los cursos de Electricidad y Magnetismo utilizan la parte matemática que involucra el concepto como una rutina de procedimientos donde no se aporta significado.

Catalán et al. (2010, p.126) mencionan que debido a las “deficiencias matemáticas” los estudiantes tienen poca comprensión de los fenómenos propios del área de Electricidad y Magnetismo. Por ejemplo, señalan que: “las mayores dificultades se encuentran en ciertas deficiencias matemáticas y en el insuficiente manejo del espacio tridimensional; les cuesta reconocer las superficies de flujo y no diferencian claramente una superficie abierta de una cerrada”. En esta dirección, Furió y Guisasola (1999) identifican como dificultad en el entendimiento conceptual del campo eléctrico, la deficiencia en el conocimiento matemático requerido para entender el concepto de campo vectorial (concepto de vector, cálculo diferencial e integral, etc.), que dificulta la visualización del fenómeno y la realización de cálculos. Guisasola, Salinas, Almudí y Velazco (2003, p. 203) mencionan que las dificultades en la comprensión y el uso de la Ley de Gauss y la Ley de Ampere también se pueden deber al uso de razonamientos erróneos “como la reducción y fijaciones funcionales²

² En Guisasola (2003, p. 197) se menciona que la reducción funcional es “aquella tendencia a razonar en la que no se toman en consideración todas las variables que

que evidencian una falta de significado de los operadores flujo y circulación de campo”. Cabe mencionar que la Ley de Ampere es utilizada para el cálculo del campo magnético, de ahí la importancia de la misma.

En la Tabla 1 se resumen los hallazgos relevantes encontrados en el análisis de estas investigaciones, desde las diferentes perspectivas en que fueron agrupadas.

influyen en un problema”; y las fijaciones de funciones son un tipo de razonamiento que se pueden producir en el estudiante cuando se repite un mismo algoritmo para llegar a una solución.

Tabla 1

Hallazgos reportados de la deficiencia en el aprendizaje del concepto de flujo de un campo eléctrico

Perspectiva	Conclusiones
Aprendizaje de la Física en general	Se detectan altos porcentajes de estudiantes universitarios que no aprueban los cursos introductorios de Física Los estudiantes se enfocan en aprendizajes memorísticos dejando de lado la parte conceptual.
Aprendizaje en los cursos de Electricidad y Magnetismo	Se detectan fallas en el aprendizaje de los conceptos de flujo eléctrico, campo eléctrico, y potencial, fundamentales para el aprendizaje de la Ley de Gauss.
Aprendizaje cuando se toma en cuenta la matemática involucrada en los conceptos	Se ha encontrado que los alumnos muestran poca o nula comprensión en el concepto de campo vectorial. Las fórmulas matemáticas las perciben sin relación al concepto físico.

Diferentes explicaciones de las dificultades en el aprendizaje del concepto de flujo de un campo eléctrico. En este apartado se muestra un panorama de las diferentes perspectivas que adoptan los investigadores cuando tratan de explicar el origen del problema de aprendizaje relacionado con el concepto de flujo de un campo. A continuación se exponen las explicaciones de la problemática del aprendizaje del concepto de flujo de un campo desde un punto de vista ubicado en: a) los estudiantes o lo cognitivo, b) la enseñanza o lo didáctico; y c) el saber físico matemático involucrado o lo epistemológico.

Explicaciones de la problemática del aprendizaje del concepto de flujo de un campo desde el punto de vista cognitivo. Hay reportes de investigación en los que se afirma que existen preconcepciones sobre distintos fenómenos relacionados con el concepto de flujo que obstaculizan el proceso de aprendizaje de los estudiantes en esas áreas (Sabella y Redish, 2007; Greca y Moreira, 1998; Mendoza, 2001). Algunos señalan que esas preconcepciones son muy arraigadas y difíciles de eliminar (Scott, Asoko y Leach, 2007). Guisasola, Almudí y Zubimendi (2003, p. 79) señalan que “las personas construimos representaciones mentales para ayudarnos a comprender el funcionamiento de un sistema físico y que estas representaciones mentales incluyen diferentes categorías explicativas de la realidad en un mismo individuo dependiendo del contexto y del contenido que se trate”. En este sentido, Llancaqueo, Caballero y Moreira (2003) presentan los resultados de una investigación del concepto de campo, con alumnos de primer año de universidad, en el marco de la Teoría de campos

conceptuales de Vergnaud³, adoptada como referencial teórico para comprender y explicar el proceso de aprendizaje de este concepto fundamental de la Física.

En la misma dirección de las preconcepciones, Mendoza (2001) señala que los alumnos consideran que en realidad fluye algo cuando se habla del flujo eléctrico de un campo (cuando en realidad esto no sucede). Es interesante mencionar que, en Furió y Guisasola (1998) se detallan trabajos de investigación en donde se pone de manifiesto que algunas preconcepciones de los estudiantes alrededor del concepto de flujo podrían corresponderse con algunos momentos en la evolución histórica del concepto. Por lo cual, conocer el origen y evolución del concepto de flujo de un campo, pudiera dar respuesta de porqué, por ejemplo, se llama flujo de un campo cuando en el campo eléctrico no está fluyendo nada.

Explicaciones de la problemática del aprendizaje del concepto de flujo de un campo desde el punto de vista didáctico. Diversas investigaciones reportan que parte de las deficiencias en el aprendizaje de la Física pueden atribuirse a la forma en que se enseña la Física, es decir, a la didáctica de la misma (Becerra-Labra et al., 2007; Furió y Guisasola, 2001; Guisasola et al., 2007; Muñoz-Chápuli, 1995; Martín y Solves, 2001). Guisasola et al. (2007, p. 92) mencionan que “la investigación en enseñanza de las ciencias critica como inapropiada la enseñanza habitual de la Física en los cursos universitarios”. Más específicos, Ferreyra y González (2000, p. 197) mencionan que la enseñanza de la Física en las carreras universitarias de formación

³ La Teoría de campos conceptuales de Vergnaud es una teoría cognitiva que pretende ofrecer un legado más fructífero que el piagetiano para el estudio del desarrollo cognitivo y del aprendizaje de competencias complejas, particularmente aquellas implicadas en las ciencias y en las técnicas, teniendo en cuenta los propios contenidos del conocimiento y el análisis conceptual de su dominio.

científica “tiene las características de estar *desproblematizada* (enseñanza de conceptos terminados, ausencia de los problemas que dieron origen a los mismos), *descontextualizada* (en relación tanto con el nivel para el que se imparte como con la realidad cotidiana que vive y conoce el alumno) y *desintegrada* (en cuanto a sus aspectos conceptuales, metodológicos y actitudinales)”.

En ese tenor, Furió y Guisasola (2001) observan la presencia de fijaciones funcionales alrededor del concepto de campo como una consecuencia de la instrucción del curso de Electricidad y Magnetismo, esto es, las respuestas que dan los estudiantes a alguna situación problemática planteada son en forma de *receta* donde siempre aplican el mismo razonamiento para llegar a la solución. Martín y Solves (2001, p. 401) mencionan que las dificultades del aprendizaje del concepto de campo son una “consecuencia de un tratamiento didáctico deficiente y confuso”, es decir, son producto de una didáctica donde sólo intervienen definiciones operativas y manipulaciones cuantitativas de los conceptos, sin profundizar en su significado, sin relacionarlos, ni diferenciarlos entre sí. Un ejemplo de las dificultades que ellos encuentran es que el alumno tiene una idea poco precisa del campo, “lo consideran como una región del espacio o volumen que delimita la influencia de una masa, carga o imán”, esto es, un concepto carente de significado, en donde el alumno sigue concibiendo el concepto de campo en términos del concepto de fuerza (Martín y Solves, 2001, p. 394).

Explicaciones de la problemática del aprendizaje del concepto de flujo de un campo desde el punto de vista epistemológico. Diversas investigaciones revelan que las dificultades en el aprendizaje del concepto de flujo del campo eléctrico están

asociadas al concepto mismo que se quiere enseñar y a su forma de representarlo (Alomá y Martins, 2008; Furió y Guisasola, 1997; Furió y Guisasola, 1999; Sandoval y Mora, 2009). Gil (1993) menciona que conocer la historia alrededor de cómo se construyó un concepto ayuda a comprender los problemas que originaron su construcción y a entender ciertas dificultades en el aprendizaje del mismo. De hecho, la noción de obstáculo epistemológico como una limitación para construir un conocimiento está ligada al desarrollo histórico del pensamiento científico (Bachelard, 1979). En este sentido, Jankvist (2009) menciona que usar la historia como herramienta cognitiva, ayuda a la identificación de obstáculos epistemológicos, es decir, comprender las dificultades que sucedieron en la historia para construir un concepto, y que pueden relacionarse con las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje del mismo.

Con relación al concepto de campo, por ejemplo, Furió y Guisasola (1999) critican el hecho de que en la mayoría de los libros de texto, la transición entre el punto de vista newtoniano del electromagnetismo (explicado por medio de la Ley de Coulomb⁴) y el punto de vista energético (explicado por medio del concepto de campo eléctrico⁵) se haga sin explicar la diferencia fundamental entre estas dos perspectivas (es decir, las características y límites de cada uno de estos modelos).

⁴ En la visión coulombiana del campo eléctrico, se maneja que el concepto de interacción eléctrica está ligado al concepto de carga localizada en una zona del espacio o en un cuerpo cargado, es decir, en esta visión se tiene que considerar la existencia de la interacción eléctrica siempre y cuando estén localizadas en el espacio las cargas eléctricas que interaccionan.

⁵ En la visión del concepto de campo, “el concepto de interacción eléctrica deja de estar asociado a dos cargas eléctricas para extenderse a lo largo del espacio de influencia de una de ellas” (Furió y Guisasola, 1997, p.263), es decir, puede haber interacción eléctrica, sin que estén dos cargas presentes.

Este tipo de saltos cualitativos, sin tomar en cuenta la evolución histórica del concepto, favorece a que se produzcan fallas en el aprendizaje del mismo en los alumnos, así como en la habilidad que les posibilite resolver problemas que demanden un análisis de los temas abordados.

Otra perspectiva analizada sobre las dificultades que se presentan en la enseñanza del concepto de flujo de un campo en el área de la Electricidad y Magnetismo es considerar la complejidad matemática empleada alrededor de este concepto como un factor que propicia dificultades en la comprensión del mismo (Monk, 1994). Las investigaciones realizadas en la enseñanza de las Matemáticas mencionan que la dificultad para el aprendizaje de esta asignatura se encuentra en la característica abstracta intrínseca que posee (Duval, 2006a). Dado que la enseñanza del concepto de flujo de un campo se da dentro de un contenido formal y matemático, se favorece en los estudiantes el uso de representaciones aisladas y no articuladas, donde se ve el uso de definiciones sin explicaciones (Greca y Moreira, 1998) y por ende no se logra un aprendizaje significativo alrededor del concepto de flujo de un campo. En la Tabla 2 se resumen los hallazgos relevantes encontrados en el análisis de estas investigaciones, desde las diferentes perspectivas en que fueron agrupadas.

Tabla 2

Hallazgos reportados de las explicaciones de las dificultades de la enseñanza y aprendizaje del concepto de flujo de un campo

Perspectiva	Conclusiones
Cognitiva	Se detectan preconcepciones que los estudiantes pueden tener alrededor del tema de flujo de un campo, que provienen principalmente del sentido común.
Didáctica	Se detectan fallas en la enseñanza indicando que favorecen un aprendizaje memorístico.
Epistemológica	Se considera que la historia de cómo fue la evolución del concepto puede facilitar la identificación de obstáculos epistemológicos. Se detecta saltos cualitativos en los libros de texto de electromagnetismo. La idea asociada a la palabra flujo en los estudiantes trae problemas en la comprensión del concepto de flujo eléctrico.

Explicaciones de las dificultades en el aprendizaje atribuidos al soporte matemático del concepto de flujo proveniente de los libros de texto tradicionales de Cálculo. Considerando que los estudiantes de ingeniería reciben una enseñanza de la Física y de las Matemáticas donde el concepto de flujo de un campo es un objeto de estudio común para ambas disciplinas, una importante fuente de problemas con el aprendizaje de este concepto se reporta en Pulido (1998). El autor menciona que en la Física existe un estilo de matematizar sus resultados, basado en consideraciones infinitesimales, llamado estilo diferencial; en este estilo la estrategia de la toma del elemento diferencial es fundamental para desarrollar sus fórmulas. Este estilo de proceder es muy poderoso y ha resultado ser muy fecundo para el desarrollo de la Física. De hecho la expresión matemática para el flujo de un campo es construido con ese recurso.

Una situación grave para el aprendizaje del concepto de flujo del campo eléctrico, y de la Física en general, se revela cuando se reconoce la existencia de un paradigma de la enseñanza del Cálculo (Salinas y Alanís, 2009; Salinas, 2010). Soportando esta enseñanza, que será llamada en adelante, tradicional, están los libros de texto de Cálculo donde el estilo diferencial no tiene cabida en cuanto a que la base epistemológica de esta herramienta (los infinitesimales) es de una naturaleza esencialmente distinta a la Matemática de aquellos libros de texto; es decir, no tiene sustento teórico en los cursos de Cálculo (Pulido, 1998). La afirmación anterior se sustenta con el argumento de que el estilo diferencial tiene su base epistemológica en el Cálculo de Leibniz, mientras que los libros de texto de Cálculo siguieron una línea

de desarrollo más apegada al Cálculo de Newton. Ambos cálculos son esencialmente distintos, epistemológicamente hablando.

Sólo para ejemplificar la naturaleza del Cálculo de Leibniz y el contenido en los libros de texto tradicionales, se puede mencionar que para el primero, y en la Física en general, tramos infinitamente pequeños de una curva son rectos, se habla de la pendiente de la curva, mientras que en los libros de texto del Cálculo se habla de la pendiente de la recta tangente a la curva, en el sentido de que una curva nunca puede llegar a ser una recta.

En consecuencia, en el desarrollo del pensamiento científico ocurrió un fenómeno que explica una serie de problemas preocupantes para la educación de la Física y las Matemáticas (Arcos, 2004; Artigue y Viennot, 1987; Pulido, 1998). Por el lado de las Matemáticas, la línea Newtoniana del Cálculo favoreció el devenir del llamado Análisis Matemático en cuyos rasgos epistemológicos esenciales los libros de texto actuales de Cálculo, tomaron de base; la línea Leibniziana (de los diferenciales, infinitamente pequeños) fue literalmente desterrada de las Matemáticas. El problema surge porque los físicos continuaron usando, y lo hacen hoy en día, esa matemática no oficial, simplemente porque les funciona. Sucede entonces que un recurso matemático frecuentemente utilizado en la Física no se enseña ni en los cursos de Física (porque eso correspondería a los cursos de Matemáticas), ni en los de Matemáticas (porque no se le reconoce dentro de lo que sería la normalidad Matemática representada por los libros de texto de Cálculo actuales).

El problema mencionado en el párrafo anterior atañe al concepto de flujo de un campo en cuanto que su representación matemática envuelve elementos

infinitesimales (integral de superficie y diferenciales) que se ligan al estilo diferencial. Se puede percibir un conflicto en el estudiante relacionado con el aprendizaje de este concepto: por el lado de la Física hay el empleo libre de una forma de matematizar usando magnitudes infinitamente pequeñas con el estilo diferencial, mientras por el lado de sus cursos de Matemáticas este recurso es desconocido, de hecho, rechazado como parte de las Matemáticas. El estudiante vive un fuego cruzado de ideas con bases epistemológicas esencialmente distintas. Igualmente en Pulido (1998), se menciona que es frecuente encontrar en los libros de Física argumentos extraños, confusos, cuando tratan de explicar una fórmula como la del flujo de un campo a través de una superficie, derivada con la estrategia de la toma del elemento diferencial (del Cálculo de Leibniz), con argumentos apegados a la norma oficial Matemática (Análisis Matemático, derivado del Cálculo de Newton).

Como se verá, en el siguiente apartado, la investigación en Pulido (1998) contribuyó a la creación de una propuesta de Cálculo para la Ingeniería que intenta en principio remediar la grave situación expuesta en los párrafos anteriores e incorpora para la enseñanza el pensamiento infinitesimal, con el que fórmulas como la del flujo de un campo son construidas.

Diferentes propuestas didácticas para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de flujo de un campo. Ya presentadas las deficiencias en el aprendizaje del concepto del flujo del campo eléctrico, y de las explicaciones del origen de estas fallas, en este apartado se exponen algunas propuestas que buscan contribuir a resolver la problemática señalada anteriormente con relación a la enseñanza y el aprendizaje del concepto de flujo de un campo eléctrico. Se observará, como es

natural esperar, que la forma de concebir la propuesta está ligada a las explicaciones que se tengan de las dificultades en el aprendizaje reportadas.

Propuestas didácticas para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de flujo de un campo para los cursos del Electricidad y Magnetismo. En el estudio de Alomá y Martins (2008) se propone modificar la secuencia didáctica de los cursos de Electricidad y Magnetismo; más específicamente, se diseñan y desarrollan actividades didácticas donde los alumnos explican sus propias ideas acerca del concepto de flujo de un campo eléctrico; esta propuesta tiene como objetivo esclarecer y confrontar las preconcepciones por la connotación de la palabra flujo que pudieran tener los estudiantes al momento de estudiar el concepto de flujo eléctrico. En el estudio de Furió y Guisasola (2001) se hace hincapié en el salto cualitativo que hay tanto en las explicaciones en los libros de texto como en la didáctica empleada en los cursos de Electricidad y Magnetismo al abordar el concepto de campo, esto es, cómo se pasa del concepto de campo estudiado desde la Ley de Coulomb a explicarse posteriormente desde el concepto de campo vectorial; los autores proponen modificaciones en la secuencia didáctica de los cursos de Electricidad y Magnetismo que permitan esclarecer las consideraciones eléctricas al momento de introducir el concepto de campo eléctrico, para abordar de manera más clara y comprensible el concepto de campo desde las dos perspectivas mencionadas.

En el estudio de Sandoval y Mora (2009) se presenta una propuesta didáctica basada en la historia de la ciencia para tratar de mejorar la comprensión de los conceptos de los cursos de Electricidad y Magnetismo, se apoya en una técnica socio-constructivista llamada Jigsaw (esta técnica orienta a cómo distribuir los grupos de

los estudiantes para desarrollar un tema y que permita obtener aprendizajes significativos en torno a lo que se está estudiando) para discutir los temas históricos de los conceptos de carga eléctrica y campo eléctrico. El estudio de Chabay y Sherwood (2006) enfatiza que los cursos introductorios de Cálculo (que son base para los cursos de Electricidad y Magnetismo) manejan conceptos abstractos y que son desarrollados en exposiciones formales, además de ser introducidos rápidamente, y como consecuencia los alumnos de los cursos de Electricidad y Magnetismo suelen tener serias dificultades en el aprendizaje de los conceptos de este curso; para ofrecer una alternativa y solución a esta problemática, los autores proponen una diferente estructura de los cursos de Electricidad y Magnetismo, que profundice y consolide el concepto abstracto de campo en su forma matemática y así facilitar el aprendizaje desde la perspectiva física. Chabay y Sherwood (2006, p. 329) mencionan que “los alumnos que cuenten con una base sólida de la parte matemática empleada en este curso de Física” podrán comprender y explicar con facilidad los modelos y principios que se desarrollan en el curso de Electricidad y Magnetismo.

Las propuestas didácticas analizadas orientadas a atender la problemática del aprendizaje de flujo de un campo, coinciden en realizar modificaciones a la secuencia didáctica de los cursos de Electricidad y Magnetismo, y se basan en investigaciones de las preconcepciones que detectan o son reportadas en otras investigaciones. Además, están orientadas al área de la enseñanza de la Física. En la Tabla 3 se resumen los hallazgos relevantes encontrados en el análisis de estas investigaciones.

Tabla 3

Hallazgos reportados de las propuestas didácticas para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de flujo de un campo para los cursos del Electricidad y Magnetismo

Propuestas Didácticas	Hallazgos
Para los cursos del Electricidad y Magnetismo	<p>Se realizan propuestas didácticas basándose en:</p> <ul style="list-style-type: none"> • La connotación de la palabra flujo. • Los saltos cualitativos que hay en las explicaciones del concepto del campo eléctrico en los libros de texto y en la didáctica de la Física. • La construcción del concepto de campo eléctrico apoyándose en la historia de las ciencias respecto a cómo surge este concepto. • El tratamiento matemático del concepto de flujo de un campo.

La enseñanza del flujo de un campo propuesta en el Diseño Integral en los cursos de Matemáticas III para ingeniería. Con el nombre de Diseño Integral se identifica en este escrito la propuesta de enseñanza de los cursos de Matemáticas para Ingeniería que un grupo de 6 profesores-investigadores del Departamento de Matemáticas del Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey, ha desarrollado y puesto en práctica. En Enero de 1998 este grupo, constituido en Comité Para el Rediseño Integral de las Matemáticas para Ingeniería, inició sus trabajos con el objetivo de construir una propuesta de enseñanza aprendizaje de las Matemáticas para las carreras de ingeniería del Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey, distinta a la que se considera el modelo tradicional, cuya existencia se reporta en Salinas (2010, p. 2):

La revisión de diferentes estudios que sistematizan resultados a escala mundial sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje permite reconocer lo que puede llamarse un modelo tradicional de enseñanza del Cálculo; se trata de un paradigma de enseñanza que se observa ya normalizado en las aulas y cuyos alcances de aprendizaje están fuertemente cuestionados.

Son varias las razones que condujeron a ese grupo a llevar a cabo la tarea de construir un nuevo discurso matemático escolar para las carreras de ingeniería. Una de ellas es la existencia de una profunda y duradera crisis en el aprendizaje y la enseñanza del Cálculo (que se cubre en los primeros cuatro semestres de las carreras de ingeniería: Cálculo de una y varias variables y ecuaciones diferenciales) que trasciende fronteras (Artigue, 2003); como reflejo de esta crisis está el alto número de reprobados y, más preocupante aún, es que los que acreditan no saben para qué sirve el Cálculo; de hecho, en general, el estudiante no aprecia lo relevante del Cálculo para el estudio de la ciencia.

Otro motivo para emprender la construcción de la nueva propuesta fue el constatar, como se reporta en (Pulido, 2007), que en los cursos de especialidad de las carreras de ingeniería se empleaban frecuentemente herramientas matemáticas que no eran enseñadas en los cursos de matemáticas, en los cuales recae la tarea de hacerlo; más aún, esas herramientas matemáticas no aparecen en los libros de texto tradicionales de Cálculo.

Si se piensa que una propuesta para la enseñanza del Cálculo envuelve un *Qué* enseñar, un *Cómo* enseñar y un *Para qué* enseñar, puede decirse que el aporte más significativo de la propuesta del Diseño Integral está en dirección del *Qué*. Aunque es importante mencionar que en esta propuesta estas tres dimensiones están fuertemente vinculadas. El antecedente es una necesidad de dotar al estudiante de herramientas matemáticas que le ayuden a profundizar en el estudio de los fenómenos propios de su carrera; el *Para qué*. Ahora bien, para que el estudiante logre hacerse de esas herramientas intelectuales es necesario involucrarlo en actividades relacionadas con temas de su interés académico que conlleven al surgimiento y construcción de nociones y procedimientos matemáticos pertinentes para atender la problemática planteada en la actividad; el *Cómo*. Para el diseño de este tipo de actividades una valiosa ayuda es recurrir a la historia en busca de la génesis del conocimiento (Jankvist, 2009; Grattan-Guinness, 1991); se trata de reconocer las problemáticas que dieron pie al surgimiento y evolución conceptual de las nociones matemáticas que se revelaron esenciales para resolver esa problemática: el *Qué*.

Las tesis doctorales de dos miembros del grupo: Alanís (1996) y Pulido (1998), estuvieron encaminadas a indagar sobre el surgimiento del Cálculo. Con la

primera, ubicada en la línea del pensamiento Newtoniano, se descubrió que era posible construir una propuesta de Cálculo problematizando una sola idea: *la de predecir el valor de una magnitud que está cambiando*; conceptos como derivada y antiderivada, que en un principio eran fluxiones y fluentes, surgen en el intento de dar respuestas más elaboradas a esa problemática. Con la segunda tesis, adentrándose en el pensamiento Leibniziano, se visualiza un modo de descubrir *la magnitud de un todo a través de considerar la magnitud de sus partes*; diferenciales y sumas, a la postre las integrales, emergen en la profundización de esta problematización. Por esta razón y tomando en cuenta las otras dimensiones del *Para qué* y del *Cómo*, podría decirse que la producción del grupo de Rediseño Integral es una especie de Cálculo Newtoniano y Leibniziano, didácticamente integrados.

Desde 1998 a la fecha el grupo ha producido 5 libros (Salinas, Alanís, Pulido, Santos, Escobedo y Garza, 2002; Salinas, Alanís, Pulido, Santos, Escobedo y Garza, 2003; Salinas, Alanís, Pulido, Santos, Escobedo y Garza, 2011; Salinas, Alanís, Pulido, Santos, Escobedo y Garza, 2012; Salinas, Alanís, Pulido, Santos, Escobedo y Garza, 2013). En este escrito se identifica el Diseño Integral con la propuesta de enseñanza contenida en los tres tomos del Cálculo Aplicado. Los primeros dos contienen lo que podría identificarse comúnmente como el Cálculo Diferencial e Integral de una variable, mientras que el contenido del Tomo III lo haría con el Cálculo de varias variables.

Precisamente, en el Tomo III del Cálculo Aplicado se encuentra una propuesta de enseñanza del flujo de un campo vectorial. De hecho en este Tomo se exhibe un

contenido que va ligado a la idea de representar matemáticamente hablando en su forma más acabada el flujo y la circulación; en el Prefacio de este libro se lee:

En este Tomo III se considera la problemática de dar sustento matemático o, dicho de otra manera, de matematizar dos nociones fundamentales de la Física: flujo y circulación. Surgidas de la Hidrodinámica, estas nociones pronto fueron utilizadas en otras áreas de la Física, se habla por ejemplo del flujo eléctrico, circulación del campo magnético, flujo de calor, etc. Para mostrar la importancia que tienen estas dos nociones para la Física, y por tanto para la ingeniería, basta señalar lo que declara Richard Feynman (1987, 1-8) en su libro de Física, Volumen 2: “Solamente con estas dos nociones-flujo y circulación-podremos describir de una vez las leyes de la electricidad y magnetismo”.

Planteamiento del problema

Con lo que se ha escrito en los antecedentes se ha evidenciado la existencia de una problemática alrededor del aprendizaje del flujo del campo eléctrico. La enseñanza de este concepto se realiza en cursos de Física (en Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey, corresponde al curso de Física III, de Electricidad y Magnetismo) que forman parte del currículo de la mayoría de las carreras de Ingeniería. En cuanto a que el aprendizaje del flujo del campo eléctrico está encadenado al aprendizaje del flujo de un campo en general (el campo eléctrico es un caso particular de un campo; el campo magnético, el campo gravitacional, por ejemplo, son otros casos especiales de lo que se llama en general un campo vectorial) y que éste es un concepto propio de los cursos de Cálculo (y más específico en el curso de Cálculo de varias variables) se tiene que el aprendizaje del flujo del campo eléctrico compete a la forma como se presenta tanto en los libros de texto de Cálculo, en cuanto al concepto en general de flujo de un campo, como en los libros de texto de Física, en cuanto al concepto más específico de flujo del campo eléctrico.

Ahora bien, la incursión en el escenario educativo del Diseño Integral, rompiendo con el paradigma del Cálculo signado por los libros tradicionales de texto de Cálculo (CALITECA⁶: Zill, 2005; Leithold, 1992; Thomas y Finney, 1987; Larson, 2005; Purcell, 2007; y Stewart 2006), hace suponer el surgimiento de manifestaciones de aprendizaje del concepto de flujo del campo eléctrico distintas a las correspondientes en el ambiente tradicional de enseñanza. Además, el reconocimiento de que el Cálculo tradicional eliminó y sustituyó ideas de corte infinitesimal empleadas por la Física, en general, para la construcción y definición de sus conceptos, y el hecho de que los actuales cursos de Física universitaria, en los que se enseña Electricidad y Magnetismo, están influidos por el paradigma de enseñanza tradicional del Cálculo, hace pensar que buena parte de las dificultades que presentan los estudiantes relacionadas con el aprendizaje del concepto de flujo del campo eléctrico proviene de la enseñanza de la Física influenciada por una enseñanza matemática no apropiada.

Con base en lo anterior, esta investigación se propone en responder lo siguiente:

¿Hay diferencias apreciables que pueden utilizarse para argumentar que hay aprendizajes con significado alrededor del concepto de flujo del campo eléctrico en los estudiantes que han llevado el Diseño Integral a través del curso de Matemáticas III para ingeniería?

⁶ Acrónimo CALITECA, que significa "el Cálculo de una clase de libros de texto de Cálculo", propuesto en Pulido (1998, p.1),

Se habla de aprendizaje con significado en el marco de las representaciones semióticas de (Duval, 1993; Duval, 2000) que será discutido en el siguiente capítulo. Además, en esta investigación se busca responder lo siguiente:

¿Qué elementos de tipo teórico podrían esgrimirse que den cuenta de que ciertas dificultades en el aprendizaje del concepto de flujo del campo eléctrico provienen sólo del hecho de que los cursos de Física se apoyan en la matemática tradicional?

Objetivos de la investigación

El objetivo general de la presente investigación es: Evidenciar que los estudiantes que cursaron la materia de Matemáticas III para ingeniería con el Diseño Integral (M3DI) logran aprendizajes con significado del concepto de flujo de un campo eléctrico, en contraste con los que no lo cursaron.

A partir del objetivo general se derivan dos objetivos específicos:

- Identificar si hay diferencias significativas que se presentan como muestras de aprendizajes con significado logrados en los estudiantes, en cuanto al aprendizaje del concepto de flujo del campo eléctrico se refiere, al llevar esta propuesta didáctica integral.
- Descubrir los elementos teóricos que explican las razones del porqué la enseñanza del concepto de flujo del campo eléctrico basada solamente en los libros de texto de Física (que se apoyan en la matemática tradicional) no contribuye al logro de aprendizajes con significados.

Hipótesis

A continuación se exponen la hipótesis nula (H_0) y la hipótesis alternativa (H_a) de la investigación.

- H_0 : No hay diferencias significativas en los aprendizajes con significado logrados alrededor del concepto de flujo de un campo entre los estudiantes que cursaron Matemáticas III para Ingeniería con Diseño Integral y los que no.
- H_a : Hay diferencias significativas en los aprendizajes con significado logrados alrededor del concepto de flujo de un campo en los estudiantes que cursaron Matemáticas III para Ingeniería con Diseño Integral y los que no.

En esta investigación se realizan dos análisis estadísticos (que serán expuestos en el capítulo 4). Para el primero se realizó una prueba de asociación entre las respuestas que daban los estudiantes y el reactivo al cual daban respuesta, esto es, la prueba de χ_2 . Esta prueba compara la distribución de frecuencias observada de las respuestas encontradas para cada reactivo (F_o) con una distribución teórica llamada distribución de frecuencias esperada (F_e). El propósito de la prueba es averiguar si existen diferencias estadísticamente significativas entre la distribución observada (F_o) y la distribución esperada (F_e).

En este trabajo para la prueba se plantearon las siguientes hipótesis estadísticas:

- Hipótesis estadística nula: $H_0: F_o = F_e$
- Hipótesis estadística alterna: $H_a: F_o \neq F_e$

En el caso de que se haya podido rechazar la H_0 , se dice que existe asociación entre las dos variables medidas al grupo. En este caso, si se rechaza la hipótesis nula, se dice que la respuesta que dan los estudiantes no se deben al azar, por lo cual, las respuestas encontradas para ese reactivo si dependen del grupo a que perteneces (el grupo que llevó la propuesta de Diseño Integral o al grupo tradicional de Matemáticas III para ingeniería).

Para el segundo análisis estadístico se realizó una prueba no paramétrica para los promedios obtenidos por cada grupo (estudiantes del grupo de Matemáticas III para Ingeniería que llevaron la Propuesta de Diseño Integral y los que no). Se realizó la prueba U de Mann- Whitney. En esta prueba se realiza una comparación de medianas. Como se verá en el capítulo 4, se realizó una prueba no paramétrica porque los datos obtenidos no tuvieron una distribución normal. Esta prueba es la contraparte de la prueba t de *Student* para distribuciones normales. El propósito de la prueba es indagar si la mediana (Me) de las dos poblaciones son iguales.

- Hipótesis estadística nula: $H_0: Me_1 = Me_2$
- Hipótesis estadística alterna: $H_a: Me_1 \neq Me_2$

En el caso de que se haya podido aceptar la H_0 , se dice que no existen diferencias entre medianas de los grupos. En este caso, si se acepta la hipótesis nula, la mediana del promedio de las respuestas encontradas es igual entre los grupos.

Justificación

Las siguientes consideraciones dan cuenta de la pertinencia de este trabajo de investigación.

- a) En cuanto atañe a la problemática de enseñanza aprendizaje de un concepto, el flujo, que es de suma importancia para el estudio y comprensión de las leyes de la Electricidad y el Magnetismo, así como para la Mecánica de los fluidos, entre otras áreas de la ciencia.
- b) En cuanto a la originalidad del enfoque de la problemática. Se busca hacer explícitas, desde un punto de vista teórico, las implicaciones que para el aprendizaje del concepto de flujo del campo eléctrico tiene el hecho de ser un objeto de enseñanza de la Física que lleva la carga de utilizar una matemática tradicional, fuertemente cuestionada como propicia para soportar la tarea que se le propone.
- c) En cuanto trae a discusión una propuesta didáctica alterna a la tradicional, el Diseño integral, que apunta a contribuir a la mejora de una parte significativa del sistema de enseñanza científica del país.

Limitaciones del estudio

Siendo que el Diseño Integral se ha implementado sólo en las carreras de Ingeniería del Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey, las conclusiones en cuanto a los aprendizajes con significado del concepto de flujo del campo eléctrico serán obviamente relativas al grupo de estudiantes pertenecientes a estas carreras. Sin embargo, en cuanto a que el paradigma de la enseñanza tradicional del Cálculo y su

influencia en la Física puede ubicarse en un ámbito educativo mucho más amplio que el del Campus Monterrey, puede pensarse que las explicaciones de corte teórico que en este estudio se realicen sobre aprendizajes magros, seguirán siendo válidas en esos ambientes.

En este capítulo se presentaron diversas investigaciones sobre una problemática alrededor del aprendizaje y la enseñanza del concepto de flujo del campo eléctrico. También se reportaron explicaciones del porqué de esa problemática y propuestas de solución, sobre todo en el área de la Física. Se expuso además la existencia de una propuesta de enseñanza alterna de Cálculo, el Diseño Integral, en atención a las graves deficiencias de una enseñanza tradicional de las Matemáticas; dentro de este Diseño Integral está una propuesta de enseñanza para el curso de Matemáticas III para ingeniería (Cálculo de varias variables), donde se ubica el concepto de flujo de un campo. La irrupción de esta alternativa didáctica, ligada a ciertas consideraciones teóricas, hace pertinente investigar sobre el aprendizaje con significado del concepto de flujo del campo eléctrico atribuible al Diseño Integral en los estudiantes universitarios. En el siguiente capítulo se presenta el marco teórico en donde se apoyará la investigación a realizar.

Capítulo 2. Marco teórico

En este capítulo se exponen una serie de perspectivas teóricas que enmarcan las discusiones encaminadas a mostrar el cumplimiento de los objetivos que se persiguen con esta investigación y que fueron señalados en el capítulo anterior. En tanto se busca evidenciar que los estudiantes que han cursado Matemáticas III para ingeniería con el Diseño Integral (M3DI) logran aprendizajes con significado del concepto de flujo de un campo eléctrico, en contraste con los que no lo cursaron, se describirán en primer lugar, las consideraciones teóricas generales bajo las cuales fue construido el Diseño Integral, del que forma parte el M3DI. Inmediatamente después, se expondrán los aspectos teóricos particulares asociados con la construcción del M3DI, y más específicamente, los relacionados con la enseñanza aprendizaje del concepto de flujo del campo eléctrico; esto es, se discutirá la pertinencia de utilizar ciertas *consideraciones históricas* alrededor de ese concepto, así como la conveniencia de emplear analogías para la enseñanza del mismo.

En cuanto lo que se entiende por aprendizaje con significado, será enmarcado principalmente con la *Teoría de las representaciones semióticas*. Con respecto al objetivo de identificar los elementos teóricos que explican las razones del porqué la enseñanza del concepto de flujo del campo eléctrico basada solamente en los libros de texto de Física no puede lograr aprendizajes con significados, esta investigación se acogerá a la *Teoría de la Transposición Didáctica*, que será discutida en el último punto de este capítulo.

Consideraciones teóricas generales bajo las cuales fue construido el Diseño Integral, del que forma parte el M3DI

El Diseño Integral, del que forma parte el M3DI, fue construido bajo el marco de la *Socioepistemología*, acercamiento teórico creado por la escuela mexicana de Matemática Educativa encabezada por Ricardo Cantoral. La *Socioepistemología*, o epistemología de las prácticas sociales relativas al saber, se ha constituido como un enfoque teórico para entender y comprender, al seno de la Matemática Educativa, fenómenos específicos relacionados con la construcción y transmisión de conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple, “pues articula en una misma unidad de análisis a las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos que le son asociados y los mecanismos de su institucionalización vía la enseñanza” (Cantoral, 2004, p. 1).

Lo trascendental de esta perspectiva teórica es el incorporar la dimensión sociocultural en el estudio del fenómeno educativo a través del análisis de las *prácticas de referencia*. Es decir, mientras que en la investigación clásica la dimensión psicopedagógica está sujeta a la intención de enseñar-aprender un contenido fijo, el de los libros de texto de Cálculo en este caso el CALITECA, (Pulido, 2004), en el acercamiento socioepistemológico *el qué enseñar* está intrínsecamente ligado al *para qué*. Importa lo que las personas que estudian van a hacer con lo que aprenden. Esto es, la *socioepistemología*, enfatiza el carácter funcional que debe permear la elección del contenido matemático a enseñar; es indudable la pertinencia de este hecho en el caso de la enseñanza de las matemáticas en las carreras de ingeniería.

En este sentido Salinas (2010, p.31) menciona que:

El marco socioepistemológico nos permite apoyar la idea de la necesidad de construir y consolidar un nuevo discurso escolar del Cálculo que, si bien no obedece a las leyes internas de la Matemática per se, sin embargo sí resulte funcional, esto es, eficazmente adecuado para sus fines como parte integral del currículo universitario y preuniversitario. El carácter instrumental del sector curricular de Cálculo en las diversas carreras universitarias sugiere que en su diseño se atienda, sobre todo, la facilidad y utilidad de su empleo en el análisis de fenómenos relativos a otras áreas del conocimiento en las que el estudiante se verá involucrado.

En Salinas (2010) también se señala que, congruente con el acercamiento socioepistemológico, la dimensión social reformula las otras dimensiones, cognitiva, didáctica y epistemológica, además de incorporar las prácticas sociales y con ello la actividad humana con intencionalidad. La propuesta del Diseño Integral ha sido construida con la intención de atender diversas prácticas que se realizan en contextos propios de las carreras de ingeniería, más allá de los cursos de Matemáticas; estas prácticas son la de *predecir el valor de una magnitud que está cambiando*, la de *medir la cualidad de un todo a través de la medida de esa cualidad en cada parte en la que ha sido dividido el todo*, y la de *matematizar las nociones de flujo y circulación*.

El M3DI atiende, primordialmente, la práctica de *matematizar las nociones de flujo y circulación*, mientras que las otras dos prácticas (predecir el valor de una magnitud que está cambiando, la de medir la cualidad de un todo a través de la medida de esa cualidad en cada parte en la que ha sido dividido el todo) son atendidas por los cursos de Matemáticas para Ingeniería I y Matemáticas para Ingeniería II, respectivamente, del Diseño integral y cuyo contenido se expone en los Tomos I y II

de Cálculo Aplicado (Alanís y Salinas, 2010; Salinas et al. 2011; Salinas et al. 2012). La manera en que las prácticas respectivas influenciaron la dimensión cognitiva, didáctica y epistemológica para las propuestas correspondientes a estos primeros dos cursos, está descrita en: Salinas (2010), Salinas y Alanís (2009), Salinas, Alanís y Pulido (2011). Esta investigación, está orientada a aportar ciertos elementos teóricos importantes que permiten entender, con relación al M3DI, el contenido matemático que presenta (la epistemología), la forma en que lo despliega (la didáctica) y porqué se piensa que el estudiante mejora su oportunidad de hacerse del contenido que se desarrolla (lo cognitivo).

El uso de la historia de las matemáticas como un recurso en la investigación educativa. El estudio del origen y evolución de ideas, conceptos, procedimientos y teorías matemáticas es un recurso utilizado en la investigación en Matemática Educativa con la idea de producir matemáticas para la escuela (Cantoral y Farfán, 2003; Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza, 2006; Cantoral, Covián Farfán, Lezama y Romo, 2008). En Salinas (2010), por ejemplo, se menciona que a través de las investigaciones reportadas en las tesis de doctorado de Alanís (1996) y Pulido (1998) se impulsó el diseño de cursos, la producción de materiales y la publicación de dos libros de texto, Tomos I y II de Cálculo Aplicado (Salinas et al. 2011; Salinas et al. 2012), en los que se tomaron en cuenta los procesos cognitivos y la asociación de significados pertinentes para el estudiante como usuario del Cálculo en sus cursos de especialidad.

Como ya se mencionó en el capítulo 1, estas investigaciones giraron sobre las ideas que dieron origen a las nociones básicas del cálculo, las derivadas y las

integrales. En la tesis de Alanís (1996), asociada con el Cálculo Newtoniano, se identifica que con la práctica de predecir el valor de una magnitud que está cambiando se generan las nociones básicas de este acercamiento al cálculo: fluentes y fluxiones, a la postre, derivadas y antiderivadas. En la tesis de Pulido (1998) se enfoca al nacimiento del Cálculo Leibniziano donde surgen las magnitudes infinitamente pequeñas y cuyas nociones básicas son el diferencial y la suma (de la que se deriva, posteriormente la integral); la práctica de referencia que desemboca en este acercamiento es la obtener la medida del todo a partir de la suma de las medidas de sus partes.

Existen referencias en las que se argumenta a favor del estudio del desarrollo histórico de las ideas y conceptos matemáticos en apoyo de distintos aspectos de la enseñanza aprendizaje de las Matemáticas (Jankvist, 2009; Furió, Guisasola y Zubimendi, 1998; Acevedo, 2004; Furió y Guisasola, 1997). En Jankvist (2009) se menciona que la historia, aparte de mostrar la cara humana de las matemáticas, puede utilizarse como herramienta *cognitiva*; ahí mismo señala que el desarrollo histórico ayuda a establecer un orden y forma de tratar ciertos temas en el aula, es decir ayuda a la *didáctica* de las Matemáticas. Por su parte las investigaciones de Alanís (1996) y Pulido (1998) contemplan en gran medida un análisis de corte epistemológico e influyeron decididamente en el contenido a enseñar en los primeros dos cursos del Diseño Integral; es decir, ayudaron en el aspecto *epistemológico* de la enseñanza del Cálculo.

La historia ha sido usada también para señalar razones por las que el modelo tradicional de enseñanza del Cálculo no atiende adecuadamente el carácter funcional

que se espera tengan las Matemáticas, sobre todo en las carreras de ingeniería. Un ejemplo en este sentido se encuentra en Grattan-Guinness (1984, p.152):

Así fue apareciendo un verdadero cisma entre la teoría y la práctica del cálculo, al mismo tiempo que el nivel de rigor en el propio cálculo iba subiendo: los que se dedicaban a cuestiones de fundamentos tenían un sistema de reglas y los aplicados otro. La situación ha persistido hasta hoy en día, produciendo en los estudiantes confusiones innecesarias y de lo más desdichadas; por un lado tienen la experiencia general de aprender en los libros de cálculo que las diferenciales infinitamente pequeñas no existen, pero al mismo tiempo de usarlas en los cursos de física matemática. Aunque el Cálculo euleriano no es riguroso se le debería enseñar para aquello para lo que sirve: como una poderosa herramienta para el análisis de los fenómenos físicos y geométricos, y que ha dejado su marca indeleble tanto en las concepciones como en la terminología y la notación de las exposiciones posteriores del tema.

Cabe mencionar que el Cálculo euleriano es una evolución inmediata del cálculo de Leibniz y fue creado por Leonard Euler a principios del Siglo XVIII.

El M3DI forma parte de la propuesta de Diseño Integral descrita en los párrafos anteriores. Es oportuno señalar que el concepto de flujo (noción que es uno de los ejes de este curso) es construido tomando en cuenta las consideraciones históricas que dieron origen al mismo. Esta parte se verá con mayor profundidad en la siguiente sección.

El concepto del flujo eléctrico y el uso de analogías desde un contexto histórico

Al respecto de esta investigación sobre el concepto de flujo del campo eléctrico, se revisan algunos pasajes históricos claves relacionados con este concepto que ayudarán a entender, por un lado, la forma que adopta la construcción del concepto de flujo de un campo (vectorial) en el curso M3DI, y por el otro, las razones

que explican las dificultades en el aprendizaje del flujo del campo eléctrico atribuidas a la forma como se enseña ese concepto en los cursos de Física.

Del modelo efluvio de Gilbert al modelo del fluido eléctrico. Las propiedades eléctricas de ciertos materiales fueron conocidas por civilizaciones antiguas. En el año 600 AC, Tales de Mileto comprobó que al frotar el ámbar, éste atraía hacia sí a objetos más livianos. Se creía que la electricidad residía en el objeto frotado. Derivado de esta situación el término electricidad proviene del vocablo griego *elektron*, que significa ámbar. Posteriormente, en la época del renacimiento comenzaron los primeros estudios metodológicos, en los cuales la electricidad estuvo íntimamente relacionada con el magnetismo. William Gilbert explicó que los fenómenos eléctricos eran debidos a algo de la naturaleza del material que al frotar era liberado en los cuerpos eléctricos y le llamó modelo del efluvio. Este modelo explicó la atracción eléctrica entre los cuerpos cargados, la carga por frotamiento y la clasificación de los cuerpos en eléctricos y no eléctricos (Furió, Guisasola y Zubimendi, 1998; Furió y Guisasola, 1997).

El modelo del efluvio falló cuando se tenía que explicar una fuerza de repulsión detectada por Nicolo Cabeo y la transmisión eléctrica mostrada por S. Gray en la segunda década del siglo XVIII. En 1729 Stephen Gray mostró que la virtud eléctrica de un tubo de vidrio frotado podía ser transmitida a algunos cuerpos, dándoles a ellos la misma propiedad de atraer o repeler cuerpos ligeros. Esto dió pie a una nueva clasificación de los materiales los eléctricos y no eléctricos electrizados por frotamiento; y los conductores y aislantes electrizados por contacto.

Con el descubrimiento de Gray se tuvo que admitir que los efluvios (emanaciones) no sólo llegaban a un cuerpo porque habían emanados por otro por frotamiento, sino que tenían una existencia independiente. Por consiguiente, “estos efluvios fueron reconocidos bajo el nombre de *fluido eléctrico* como una de las sustancias que constituían el mundo” (Furió, Guisasola y Zubimendi, 1998, p. 169).

A partir de estos descubrimientos los científicos de esa época trataron de explicar el nuevo modelo de *fluido eléctrico* involucrado en los fenómenos de repulsión y atracción eléctrica por frotamiento, transmisión o inducción. Charles François Du Fay a través de sus experimentos encuentra que hay dos tipos de carga vítrea y resinosa y que los cuerpos considerados como no eléctricos pueden adquirir cualquiera de estas dos cargas. Por lo cual, se extiende la idea de que todos los cuerpos pueden poseer *fluido eléctrico* (Furió et al., 1998)

Benjamín Franklin realizó experimentos con un tubo de vidrio explicando que la electricidad no se crea por el frotamiento del vidrio, sino solamente el *fluido* asociado a una electricidad positiva se transfiere al cristal desde el material frotado, de tal modo que el material pierde tanto como gana el vidrio, y la cantidad total de electricidad en cualquier sistema aislado es invariante. Las aportaciones de Franklin Du Fay y Franklin, entre otros, venían a confirmar un modelo que describía a la *electricidad como un fluido* y calificó a las sustancias en eléctricamente positivas y negativas de acuerdo con el exceso o defecto de ese *fluido* (Franklin, 1751).

Del modelo de acción a distancia al modelo de las líneas de fuerza. F. Aepinus desarrolló y modificó el modelo del fluido. En 1759 publicó su libro *Tentamen Theoria Electricitatis et Magnetismi* (Propuesta de una teoría de la

Electricidad y el Magnetismo), en la cual se rechazaba la teoría del modelo del fluido eléctrico, siendo sus explicaciones fuertemente basadas en la teoría newtoniana.

Aepinus hablaba de fuerzas y explicaba los fenómenos de inducción asumiendo que las partículas del fluido eléctrico (considerado como positivo) pueden moverse en un conductor bajo la influencia de un cuerpo cargado. También encontró que las atracciones y repulsiones disminuyen con la distancia de acuerdo con una ley universal desconocida para él. Joseph Priestley profundizó en la teoría de la acción a distancia y llegó a la correcta conclusión de que este comportamiento era análogo a lo que ocurría en la ley de Gravitación universal y por tanto, que la fuerza eléctrica debía variar con la distancia existente entre las cargas.

Charles Agustín Coulomb relaciona por primera vez la masa eléctrica (carga eléctrica) en valores absolutos con magnitudes mecánicas fundamentales, de forma que puede ser sometida a cálculos. Coulomb no aceptó la teoría del fluido único de Franklin y Aepinus, sino la de Du Fay que establecía que había dos fluidos eléctricos, de forma que cuando un cuerpo está cargado positivamente posee más parte de uno de los fluidos eléctricos y cuando está cargado negativamente tiene más cantidad del otro fluido.

En Furió, Guisasola y Zubimendi (1998, p. 171) se menciona que Coulomb desarrolla estas ideas y las relaciona con su ley:

Cualquiera que sea la causa de la Electricidad, podemos explicar todos los fenómenos suponiendo que hay dos fluidos eléctricos, las partes del mismo fluido repeliéndose según el cuadrado del inverso de la distancia y atrayendo las partes del otro fluido de acuerdo con la misma ley del inverso del cuadrado.

Con la ley de Franklin de conservación de la carga y la ley de Coulomb de la atracción de los cuerpos cargados, la electricidad fue llevada a la misma posición de la mecánica. La ley de Coulomb ya establecida permitió describir los fenómenos electrostáticos y centraron su base en la teoría de acción a distancia.

Ampère investigó matemáticamente las fuerzas eléctricas basándose en la ley coulombiana. Ampère apoyó sin reservas la visión newtoniana del mundo que Coulomb había extendido a la electricidad. A partir de 1822 Ampère se dedicó a formular matemáticamente, con mucha precisión y elegancia, todos los descubrimientos que había hecho. En el año de 1826 publicó un libro, *Teoría de fenómenos electrodinámicos*, en la cual resume los conocimientos experimentales y teóricos de la electricidad y el magnetismo. Además, introduce por primera vez los conceptos de *corriente eléctrica* y *electromagnetismo*. Entre otras cosas, Ampère demostró que dos alambres paralelos que lleven corriente eléctrica, se atraen entre sí si las corrientes van en la misma dirección y se repelen cuando las corrientes viajan en dirección opuesta (Acevedo, 2004).

Los experimentos de Ampère llevaron a formular su famosa ley del electromagnetismo, llamada ley de Ampère, que describe matemáticamente la fuerza magnética entre dos corrientes eléctricas. Demostró que la fuerza magnética era aparentemente circular, produciendo un efecto de cilindro magnético alrededor del alambre. Nunca antes se había observado una fuerza circular. Sus investigaciones, que reportaba semanalmente ante la *Académie des Sciences de París*, dio origen a la nueva ciencia de la electrodinámica. También fue el primero en desarrollar técnicas para medir la electricidad. Ampère construyó un instrumento para medir el flujo de

electricidad. Michael Faraday se empezó a interesar en los fenómenos eléctricos y repitió en su laboratorio los experimentos, tanto de Oersted como de Ampère, para posteriormente investigar si se podía obtener magnetismo de la electricidad.

Faraday en 1831 realizó un dibujo de las curvas magnéticas alrededor de una barra de imán (ver Figura 1), el cual fue publicado en el primer volumen de su serie de memorias tituladas *Experimental Researches in Electricity* (1839-1855). Faraday afirmaba que las fuerzas eléctricas se transmitían entre las partículas de un medio y utilizó la noción de líneas de fuerza para representarlas geoméricamente. En

Acevedo (2004, p. 194) se menciona que:

La geometría empleada para trazar estas curvas magnéticas le eran bastante familiar (a Faraday) porque otros científicos las habían usado para describir los fenómenos magnéticos, basándose en la similitud con las líneas de latitud y longitud terrestres y con las isothermas que representaban la distribución de temperatura de la Tierra.

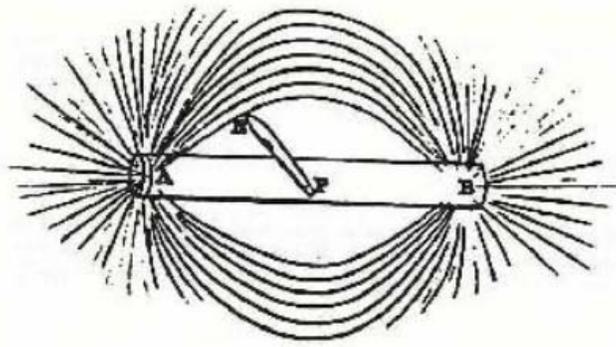


Figura 1. Curvas magnéticas que rodean un imán (realizado por Faraday).

En 1837, Faraday propuso la idea de que la línea de fuerza tenía realidad física, esto sólo pudo ponerlo de forma intuitiva debido a que el no contaba con una preparación matemática adecuada. Sin embargo, Faraday describió de una forma extraordinaria esta idea de manera gráfica y se basó en modelos de la física mecánica para lograr una representación adecuada de los fenómenos. Faraday sostenía que las fuerzas eléctricas se transmitían entre las partículas de un medio, y usó la noción de líneas de fuerza para representar geoméricamente la disposición de las fuerzas eléctricas y magnéticas en el espacio. En 1845, introdujo el concepto de campo, llamando así a la región del espacio que hay entre los polos magnéticos, la cual está llena de líneas de fuerza. Faraday siempre entendió el campo como un espacio lleno de líneas de fuerza eléctrica o magnética. En 1850 el concepto de campo estaba bien establecido en la física, pero faltaba una explicación de su constitución física.

Faraday mencionó que es posible concebir la corriente eléctrica como un fluido, o dos fluidos moviéndose en direcciones opuestas, o una vibración, o alguna otra forma o estado. En este sentido, Faraday asociaba las ideas propuestas por algunos científicos como Mayer y Joule en torno al principio de conservación de la energía, afirmando, que existe un principio general que abarca a todos los fenómenos naturales, por lo que esas equivalencias deben existir también en los fenómenos eléctricos (Berkson, 1981). Maxwell, tomando como referencia las observaciones cualitativas realizadas por Faraday al describir los fenómenos electromagnéticos y su relación con la óptica, en su escrito "*On Physical Lines of Force*", asume a la corriente eléctrica a partir de:

Un modelo geométrico del campo en el que imaginaba un fluido incompresible moviéndose por tubos formados por líneas de fuerza.... De este modo, la dirección y la intensidad de la fuerza quedaban respectivamente representadas en cualquier punto del campo por la dirección e intensidad del fluido imaginario (Berkson, 1981, pp. 179-180).

En estas visiones propuestas por Faraday y Maxwell, se puede resaltar la importancia que enmarca el concepto de flujo (o fluidos) como base fundamental para la construcción de la Teoría Electromagnética (Feynman, 1987).

El flujo como medida de la intensidad de campo eléctrico. El artículo publicado por Maxwell en las Actas de la Sociedad Filosófica de Cambridge, es un extenso ensayo físico-matemático en cuya primera parte se plantea una analogía entre líneas de flujo en hidrodinámica y las líneas de fuerza de Faraday en electromagnetismo (Ladera, 1994). Maxwell utilizó la analogía de líneas de flujo de hidrodinámica para explicar el flujo en electromagnetismo, a lo largo de todo su trabajo (sobre el electromagnetismo) hizo uso de analogías físicas, lo que le permitió construir herramientas matemáticas que podían aplicarse con provecho en la resolución de aquellos problemas en los que estaba interesado. En su primer artículo sobre el electromagnetismo *On Faraday's Lines of Force* (Berkson, 1981, p. 179) lo expresa de esta forma:

Para conseguir ideas físicas sin adoptar una teoría física debemos familiarizarnos con la existencia de analogías físicas. Entiendo por analogía física esa similitud parcial entre las leyes de una ciencia y las de otra que hace que las unas iluminen a las otras.

El concepto de flujo de un campo eléctrico surgió por primera vez apoyado en ideas de la hidrodinámica (Berkson, 1981). Sin embargo, en el primer escrito de Maxwell, *On Faraday's Lines of Force*, enfatizó en que el modelo geométrico

descrito no podía considerarse como una representación física verdadera del campo, puesto que el fluido incompresible ni siquiera era hipotético; tan sólo se trataba de presentar las ideas matemáticas de una forma más tangible. Esto es, el concepto de flujo de un fluido se había tomado “por una analogía matemática entre el flujo de calor y el flujo de fuerza eléctrica”, pero esa representación geométrica no era propiamente una hipótesis física (Acevedo, 2004, p. 195).

Maxwell en su segundo trabajo titulado *On Physical Lines of Force* (Berkson, 1981) estableció la Teoría electromagnética basándose en la hipótesis de un éter único como sustrato del campo electromagnético. Para explicar este modelo, Maxwell utilizó analogías mecánicas e imágenes mecanicistas, acerca de la constitución del éter, de acuerdo con la tradición inaugurada por Thomson en su *Mechanical Representation of Electric, Magnetic, and Galvanic Forces* (1847); ofreciendo así ilustraciones concretas de las ideas de Faraday en forma de modelos de analogías físicas mecánicas.

Desde esta perspectiva, Maxwell consideró que el campo estaba constituido por el éter (fluido incompresible) y las acciones de éste no actúan sobre los cuerpos a distancia, sino en forma contigua. Esto dio pie a que Maxwell introdujera de una forma matemática el concepto de líneas de fuerza y de campo, definiendo “al campo como una propiedad física extendida en una región del espacio y descrita por medio de una función de la posición y el tiempo. Para ello, utilizó como conceptos fundamentales: vectores, potencial, gradiente, divergencia, flujo y circulación” (Maxwell, 1879, p. 44).

Además, gracias a esta analogía utilizada por Maxwell, así como a los aportes de Faraday, el término flujo adquirió, en electromagnetismo, un nuevo significado, Maxwell (1879, p. 12) menciona:

En el caso del flujo eléctrico no sabemos nada de su densidad o velocidad en el conductor, solamente conocemos su valor de lo que en la teoría de los fluidos (hidrodinámica) correspondería al producto de la velocidad y la densidad. En consecuencia, para todos estos casos debemos aplicar el método más general de medida de flujo a través de un área.

De esta forma el flujo eléctrico se estableció posteriormente como una medida de la intensidad de campo eléctrico.

El flujo como una integral de superficie. A Maxwell se le atribuye la formulación de lo que hoy se conoce como la Teoría clásica de la Electricidad y el Magnetismo. Se pueden señalar tres hechos que intervinieron para lograr tal proeza: valorar la riqueza del trabajo de Faraday, su destreza en el manejo matemático y utilizar el recurso de la analogía con la hidrodinámica para matematizar sus resultados. En “*A Treatise on Electricity & Magnetism*”, Maxwell (1879, pp. 23-24), señala:

En tanto proseguía con el estudio de Faraday, percibí que su método de concebir el fenómeno era también matemático, mas no expuesto en la forma tradicional de símbolos matemáticos. Encontré también que estos métodos eran capaces de expresarse en las formas ordinarias matemáticas y por tanto comparables con aquellos que profesaban los matemáticos. Por ejemplo, Faraday a los ojos de su mente, miraba líneas de fuerza atravesando todo el espacio donde los matemáticos miraban centros de fuerza atrayendo a distancia: Faraday veía un medio donde ellos no miraban sino distancia. Faraday buscó la base de los fenómenos en acciones reales que se dan en el medio, los matemáticos seguían satisfechos con lo que habían encontrado en un poder de acción a distancia aplicada a los fluidos eléctricos. Cuando llevé las ideas de Faraday a una forma matemática, encontré que en general los resultados de los dos métodos coincidían, así que el mismo fenómeno era descrito y las mismas leyes de acción deducidas por ambos

métodos, pero que el de Faraday concordaba con aquellos que empiezan con el todo y arriban a las partes por medio del análisis, mientras que los métodos matemáticos comunes se fundaban en el principio de empezar con las partes y construir el todo por medio de la síntesis. También encontré que varios de los métodos más fértiles de investigación descubiertos por los matemáticos podían expresarse mucho mejor e términos de ideas provenientes de Faraday que en su forma original.

Conviene resaltar lo que afirma sobre el método en el que se empieza con el todo y se arriba a las partes por medio del análisis; esto recuerda la práctica de referencia comentada como base para el desarrollo del Tomo II de Cálculo Aplicado (Salinas et al. 2012) de Diseño Integral: *Obtener la magnitud del todo a través de la suma de las medidas de sus partes*. Esta práctica conlleva una estrategia: *la toma del elemento diferencial*, donde se captura la magnitud de una parte infinitamente pequeña del todo, el diferencial de la magnitud, que al ser sumadas vía la integral generan el todo.

En particular para el flujo a través de una superficie, se toma una región infinitesimal de la superficie a través de la cual se quiere calcular el flujo, se calcula el flujo de esa porción, obteniendo así un diferencial de flujo; al sumar todas esas cantidades, es decir al integrar, se obtiene el flujo total. El mismo Maxwell (1879, p. 26) escribe: “En el caso de los flujos tenemos que tomar la integral sobre una superficie”.

En este sentido, para efectos de esta investigación, conviene observar que los diferenciales de Leibniz, devinieron con Maxwell en otros más sofisticados que el tratamiento de problemáticas más complejas requería, pero que conservan ciertas propiedades geométrico-algebraicas de los primeros. Por ejemplo si un tramo

infinitamente pequeño de una curva puede verse como recto en Leibniz, con Maxwell, regiones infinitamente pequeñas de superficies curvas pueden verse como planas. Si con Leibniz las razones de cambio pueden considerarse constantes en un tramo infinitesimal de la curva, ahora con Maxwell, los campos vectoriales se considerarán constantes en porciones infinitamente pequeñas de la superficie. Estas consideraciones infinitesimales junto con explotar lo cercano a la experiencia del estudiante con el flujo de agua, están detrás de la construcción del M3DI.

El uso de analogía para la construcción del concepto de flujo. En el trabajo científico las analogías suponen mucho más que una forma de hablar, pues se convierten en un potente instrumento cognitivo para el razonamiento y la explicación en ámbitos conceptuales novedosos y más abstractos (Gentner y Stevens, 1983). Maxwell utilizó a lo largo de todo su trabajo sobre el electromagnetismo el método de analogías físicas, exhibiendo en su manejo una extraordinaria flexibilidad de pensamiento para proponer imágenes y modelos que, si bien muchas veces parecía poco verosímiles, le permitían elaborar procesos matemáticos que podían aplicarse con provecho (Berkson, 1981).

Las analogías desde una perspectiva epistemológica permiten ser usadas: como explicación, como modelo tentativo, como forma de validación, como forma de predicción (Godoy, 2002). En la propuesta didáctica integral, se pretende que el uso de las analogías sea como explicación. Godoy (2002) menciona que la función de la analogía en este sentido permite “asimilar lo nuevo en términos de cosas conocidas, y evita que las nuevas premisas explicadoras resulten demasiado extrañas” (p. 424). Brown y Clement (1989) muestran que las analogías proporcionan a los estudiantes

recursos para desarrollar sus ideas, inspeccionando su conjetura inicial con las explicaciones que se van dando alrededor del concepto abordado. Duping y Joshua (1990) mencionan que la analogía proporciona un mecanismo pausado para explicar un fenómeno, y que al utilizarla se debe evitar el ser una simple metáfora, esto es debe ser estructurada y a la vez accesible.

El concepto de flujo eléctrico y de campo eléctrico en la enseñanza tradicional de los cursos de Física se ve rápidamente en las primeras sesiones del curso de Electricidad y Magnetismo y la matemática que involucra estos conceptos se ve en los cursos de Cálculo de Varias Variables tradicionales sin el uso de un contexto adecuado para capturar la esencia de estos conceptos (Flores y González, 2006). Chabay y Sherwood (2006, p. 332) mencionan “las integrales de superficie no son familiares para los estudiantes”, debido a que los alumnos de los cursos de Electricidad y Magnetismo no han llevado un curso completo de un curso de Cálculo de Varias Variables.

Desde esta perspectiva se considera una parte fundamental el envolver un contexto físico adecuado en los temas de matemáticas para poder construir el concepto de flujo eléctrico con el uso de analogías siendo necesario recorrer en la historia los elementos y condiciones que dieron origen a este concepto (Jankvist, 2009). El M3DI utiliza como contexto para la construcción del concepto de flujo de un campo el análisis de una problemática que se presenta con *el fluir del agua*. De acuerdo al origen histórico del concepto de flujo se está utilizando el contexto de donde históricamente proviene la construcción del concepto de flujo.

Olivia (2004) menciona el uso de analogías como un proceso o un camino que el alumno habrá de recorrer para lograr la transferencia analógica de los conceptos. El M3DI se considera el presentar analogías adecuadas que permitan al alumno experimentar o se enfrentarse a un proceso de transferencia analógica donde se exige la construcción de un modelo más profundo. Esto es, se pretende propiciar que el alumno abstraiga elementos o consideraciones de situaciones que se presentan en la hidrodinámica y que pueden ser usadas en la Electricidad y Magnetismo.

Alomá y Martins (2008, p. 544) mencionan que en algunos de los libros de texto de física usados para el curso de Electricidad y Magnetismo “aparece la definición operacional clásica de flujo, como la integral de superficie del campo eléctrico multiplicado por el diferencial de área”, la cual no provee una definición cualitativa lo suficientemente clara del término flujo y de flujo eléctrico. La secuencia didáctica empleada en el M3DI parte del uso de analogías (ver Apéndice A), buscando facilitar la construcción y aprendizaje del concepto de flujo eléctrico y campo eléctrico a través de contextos adecuados. Además, esta secuencia ofrece una enseñanza conjunta, es decir, considera a las matemáticas como una herramienta para otras ciencias, en este caso para la física.

Teoría de las representaciones semióticas.

Una parte fundamental del curso de M3DI es que está enfocado a construir un concepto y que éste sea ganado en términos de aprendizaje con significado por los estudiantes, en este caso, el concepto de flujo de un campo. En este sentido, bajo el marco de las representaciones semióticas se presentan dos apartados:

Representaciones semióticas; el tratamiento y la conversión para el análisis de los aprendizajes con significado del concepto de flujo de un campo.

Representaciones semióticas. Desde la perspectiva de la Teoría de representaciones semióticas de Duval (1993), los conceptos matemáticos se ven obligados a recurrir a las representaciones del mismo (siendo la representación un objeto que se pone en el lugar de algo más) para su estudio y tratamiento, estas representaciones externas pueden ser de carácter geométrico, algebraico y numérico del objeto. Duval (2000, p. 4) menciona que el uso de sistemas de representaciones semióticas para el pensamiento matemático es esencial, “debido a que a diferencia de otros campos de conocimiento (biología, geología, física), no existen otras maneras de lograr el acceso a los objetos matemáticos sino producir algunas representaciones”.

Las representaciones mentales son un conjunto de imágenes y concepciones que una persona puede tener sobre un objeto, situación y lo que este asociado al mismo. Las representaciones semióticas son un medio del cual dispone una persona para comunicar sus representaciones mentales, es decir hacerlas accesibles a otros. Las representaciones semióticas en matemáticas son indispensables para la comunicación y son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática. Godino (2002, p. 5) menciona: “un objeto matemático es todo lo que es indicado, señalado, nombrado, cuando se construye, se comunica o se aprende matemáticas”.

Duval (1993, p. 38) menciona:

El aprendizaje de los objetos matemáticos, no puede ser sino un aprendizaje conceptual, y, por otra, es sólo por medio de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Esta paradoja puede

constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. ¿Cómo sujetos en fase de aprendizaje no podrían confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas si ellos no pueden más que tener relación solo con dichas representaciones? La imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, fuera de toda representación semiótica, vuelve la confusión casi inevitable. Y, al contrario, ¿cómo podrían ellos adquirir el dominio de los tratamientos matemáticos, necesariamente ligados a las representaciones semióticas, si no tienen ya un aprendizaje conceptual de los objetos representados? Esta paradoja es aún más fuerte si se identifica actividad matemática con actividad conceptual y si se consideran las representaciones semióticas como secundarias o extrínsecas.

En este sentido, el acceso al conocimiento matemático es usando los signos, palabras o símbolos, expresiones o dibujos, y al mismo tiempo es importante que los objetos matemáticos no se confundan con las representaciones semióticas utilizadas (Salinas, 2010). En consecuencia cuando el estudiante entra en contacto con un objeto matemático entra en contacto sólo con una representación semiótica particular de ese objeto matemático. Si el estudiante no tiene un acceso directo al objeto matemático, irremediablemente se bloquea y “no puede hacer más que confundir el objeto con su representación semiótica porque no se da cuenta, porque no lo sabe” (D’ Amore, 2004, p. 6).

Si el estudiante no tiene medios críticos, ni culturales, ni cognitivos, hará uso y adquisición del concepto del sentido que él le dé en su representación semiótica. Duval (2000, p. 56) menciona: “aprender Matemáticas no es sólo ganar una práctica de conceptos/objetos particulares y aplicar algoritmos, es además adquirir los procesos de pensamiento que permiten al estudiante comprender los conceptos y sus aplicaciones”.

Considerar lo anterior en los procesos de enseñanza- aprendizaje da lugar a replantear la situación de que el estudiante “realiza la actividad matemática relacionada con cierto objeto en un contexto de representación, pero a su vez, deberá ser capaz de reconocer el mismo objeto matemático en otros contextos de representación y continuar con la actividad matemática en ellos” (Salinas, 2010, p. 48). En esta dirección, tiene sentido que en el aprendizaje y la enseñanza de concepto de flujo de un campo el estudiante puede tener dificultades asociadas a la connotación de la palabra *flujo* (Alomá y Martins, 2008), y a la poca o nula comprensión de la expresión matemática que lo define (Pulido, 2010).

Los contextos de representación usados en la actividad matemática son necesariamente semióticos y tener en cuenta la naturaleza semiótica de los mismos implica tener en cuenta tanto las formas en que se utilizan como los requisitos cognitivos que involucran. Duval (2006b, p.145) menciona dos puntos:

- (1) Lo que importa es su propiedad de transformación porque el procesamiento matemático siempre implica alguna transformación de representaciones semióticas. En matemáticas los signos no son prioritarios para presentar objetos sino para sustituirlos por otros como, por ejemplo, en el cálculo. Además esta transformación depende del sistema semiótico de representación dentro de las representaciones que se producen. En ese sentido no hay una mediación semiótica sino *mediaciones semióticas* bastante diferentes.
- (2) La actividad matemática requiere que aunque los individuos empleen diversos sistemas de representación semiótica (registros de representación), sólo elijan una según el propósito de la actividad. En otras palabras la actividad matemática requiere una coordinación interna, que ha de ser construida, entre los diversos sistemas de representación que pueden ser elegidos y usados; sin esta coordinación dos representaciones diferentes significarán dos objetos diferentes, sin ninguna relación entre ambos, incluso si son dos contextos de representación diferentes del mismo objeto.

Estas dos afirmaciones de la actividad matemática, no se pueden analizar por separado, y da la pauta de comprender los problemas de aprendizaje que se dan y los procesos cognitivos presentes en el pensamiento matemático. Duval (2000, p. 65) menciona “aprender Matemáticas consiste en desarrollar progresivamente coordinaciones entre varios sistemas de representación semiótica”. En esta dirección, en un sistema de representación semiótica se efectúan transformaciones de las representaciones en otras representaciones, e inherente a este proceso está la actividad intelectual que lo permite, es decir, las actividades cognitivas realizadas por el sujeto que reconoce y realiza este proceso. Duval (1993) menciona que para que un sistema semiótico sea un sistema de representación, se realizan tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis: la *formación*, el *tratamiento* y la *conversión* de una representación. La primera está relacionada con la *formación* de las representaciones, esto es, para expresar una representación mental o evocar un registro (Duval, 1993).

Las otras dos actividades, el *tratamiento* y la *conversión*, están relacionadas con la transformación de las representaciones. En Duval (2006a) se menciona que el *tratamiento* se refiere a transformaciones en las representaciones semióticas que ocurren en el mismo registro de representación (algebraico, numérico, gráfico). El *tratamiento* está asociado a la ganancia de información, esto es, “se realiza un tratamiento cuando se tiene una ecuación y se hace una simplificación de la misma” (Duval 1999, p. 46). Los tratamientos tienen una complejidad cognitiva específica, principalmente los que usan el lenguaje y la visualización (Duval, 1999). La *conversión* se relaciona con las transformaciones que pueden darse cuando hay cambios de registro de representación (cuando se pasa del gráfico a numérico, por

ejemplo). En Salinas (2010, p.48) se menciona que la *conversión*: “Se trata de operaciones cognitivas que se agrupan en la solución de problemas, y entre ellas se incluye la transformación de un enunciado lingüístico en una ecuación”.

El tratamiento y la conversión para el análisis de los aprendizajes con significado del concepto de flujo de un campo. El *tratamiento* tiene lugar en un mismo registro semiótico y corresponde a una secuencia, para esta investigación, como se explica en la metodología, los estudiantes analizaron una secuencia de pasos que se da en la expresión de flujo cuando se resuelve un problema. El problema presentado es un ejercicio muy típico de la curso de Electricidad y Magnetismo (ver Apéndice B). La *conversión* tiene lugar cuando se cambia de un registro semiótico a otro; en este estudio, se analizará la *conversión* que se realiza por los estudiantes cuando se pasa de un registro semiótico de lenguaje algebraico a un registro semiótico de lenguaje natural.

Duval (1999) plantea que la *conversión* es un proceso de partida para poder interpretar un problema, esto es, pasar a un registro simbólico (lenguaje simbólico) lo que hay en un lenguaje natural. El registro del lenguaje natural no se debe descuidar en el marco de la enseñanza matemática, Satre, Boubée, Rey y Delorenzi (2008, p. 4) mencionan que: “el lenguaje natural debe ser considerado a la vez como un registro de partida y como uno de llegada”, pero esta conversión interna no se hace directamente sino que pasa por representaciones intermedias no discursivas. La *conversión* es un proceso de vital importancia para el aprendizaje, “puesto que la habilidad de efectuar conversiones favorece la coordinación de los distintos registros, imprescindible para la conceptualización de los objetos matemáticos”. Duval, (2006b,

p.162) expone que “la *conversión* se convierte en un método para analizar lo que es matemáticamente significativo en el contenido de la representación dada y este método puede ser utilizado para el análisis de textos”.

En el proceso de aprendizaje las conversiones resultan de fundamental importancia, dado que la habilidad de efectuar las mismas favorece la coordinación de distintos registros semióticos, imprescindible para la conceptualización de los objetos matemáticos (Duval, 2006b). El proceso de pasar de un registro del lenguaje natural al registro del lenguaje simbólico, en ambos sentidos, forma parte de un proceso de conversión, que en algunas ocasiones pueden resultar no congruentes dando lugar a dificultades en el proceso de enseñanza y que no siempre son consideradas por los docentes, en esta dirección Duval (2006, p. 114) menciona:

Y en el aula tenemos una práctica muy específica de uso simultáneo de dos registros. Se habla en lenguaje natural, mientras se escribe en expresiones simbólicas como si las explicaciones verbales pudieran hacer el tratamiento simbólico transparente.

En este sentido, el manejo adecuado de símbolos matemáticos depende del aprendizaje y del entrenamiento en su uso. Aunado a que la capacidad de razonamiento abstracto presenta asociaciones con el manejo de símbolos (Sternberg, 1986).

De lo expuesto anteriormente, se puede reconocer la importancia de las representaciones semióticas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y a su vez, se vislumbra que a través de ellas se pueda indagar en cierta forma por los procesos de conceptualización de los estudiantes. Para los propósitos de

nuestra investigación, el estudio se centra en analizar el uso que el estudiante hace de la conversión entre el registro simbólico al registro del lenguaje natural y viceversa.

En esta misma dirección es pertinente señalar que el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA) de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) reconoce el utilizar el lenguaje simbólico y formal como una de las competencias matemáticas⁷. De las Fuentes, Arcos y Navarro (2010, p. 35) mencionan: “que la eficiencia del conocimiento se considera que puede expresarse mediante las competencias matemáticas de PISA”. Para alcanzar la competencia en el lenguaje simbólico y natural, PISA (2003) menciona los siguientes indicadores y que han sido considerados en el desarrollo de la presente investigación:

- Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural.
- Traducir desde el lenguaje natural al simbólico y formal.
- Manejar enunciados y expresiones que contengan símbolos y fórmulas.
- Utilizar variables, resolver ecuaciones.
- Utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos.

Las consideraciones expuestas anteriormente justifican la necesidad y la relevancia de centrar el análisis propuesto en esta investigación en los procesos

⁷ Martínez (2008) define en término de competencias en educación como el uso eficiente y responsable del conocimiento para hacer frente a situaciones problemáticas relevantes para el éxito en el desempeño profesional. Dentro del proyecto PISA se realizó una definición y selección de las competencias consideradas esenciales para la vida de las personas y el buen funcionamiento de la sociedad (Martínez, 2008); y dentro de esa perspectiva se identifican 8 competencias básicas y entre ellas se encuentra la competencia matemática.

semióticos de conversión, en particular, para pasar del registro del lenguaje simbólico al natural o viceversa. En cuanto al proceso semiótico de tratamiento, se ubicara en el reconocimiento del mismo, esto es, que para un tratamiento ya dado, los estudiantes puedan dar explicaciones o asociar significados de lo que pasa durante ese proceso.

Tomando en cuenta que el objetivo de la investigación es evidenciar que los estudiantes que han cursado M3DI logran aprendizajes con significado del concepto de flujo de un campo eléctrico, en contraste con los que no lo cursaron. Se considera oportuno definir que el aprendizaje con significado alrededor de un concepto estará presente si en los procesos de *conversión y tratamiento* (del lenguaje simbólico al lenguaje natural o viceversa) que manejan los estudiantes alrededor de este concepto hay evidencia de estos indicadores. En el desarrollo de esta investigación se va a utilizar el término de aprendizaje con significado a dar un significado a cada uno de los elementos que conforman la expresión del concepto de flujo, esto es, hacer un uso adecuado de los registros de: el lenguaje simbólico, el lenguaje natural y el algorítmico. Para el uso adecuado de los registros (lenguaje simbólico, el lenguaje natural y el algorítmico) se considerara que el significado asociado a algún símbolo de la expresión de flujo de un campo eléctrico involucre una interpretación del símbolo cuestionado y de su función dentro de esta expresión.

La Teoría de la Transposición Didáctica.

Se mencionó en la introducción de este capítulo que con el objetivo de identificar los elementos teóricos que explican las razones del porqué la enseñanza del concepto de flujo del campo eléctrico basada solamente en los libros de texto de

Física no puede lograr aprendizajes con significados, esta investigación se acogerá a la *Teoría de la Transposición Didáctica*. Esta teoría permite aclarar, en primera instancia, que el saber físico o matemático contenido en los libros de texto universitarios no es lo que podría llamarse propiamente *la Física* o *la Matemática* de los especialistas. De hecho, esta teoría, hace natural ver que en el contenido de los libros de texto aparezcan saberes correspondientes a ciertos momentos de la evolución del conocimiento físico o matemático.

Yves Chevallard (1998, p. 45), el creador de esta teoría, señala que cuando un saber sabio o saber especializado es elegido para ser enseñado “sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar en los objetos de enseñanza. El trabajo que transforma un objeto de saber en un objeto de enseñanza, es denominado Transposición Didáctica”

Aunque Chevallard alude al saber de los especialistas contemporáneos como el que se pretende llevar al aula, en Pulido (1998) se introduce una modificación a esta teoría al agregar que los libros de texto también toman saberes de otras épocas dentro de la evolución histórica de los conceptos. En este sentido, afirma, la Física escolar y la Matemática escolar, son propuestas que se explican con base en transposiciones de saberes especializados bien establecidos, en algún período de la evolución matemática o física.

En Pulido (1998, p. 212) se menciona que:

En los discursos escolares, tanto de física como de matemáticas, operan, necesariamente, transposiciones didácticas, en tanto no puede llevarse un saber completo, con sus significaciones, elementos, intenciones, etc.; se necesita hacer recortes y, al mismo tiempo, crear una articulación propia que encadene o trate de encadenar lo que ha tomado de los saberes especializados,

de hoy o de antaño; lo que toma, de donde lo toma, y la forma en que lo articula, distingue un discurso escolar de otro, como es el caso de los discursos escolares matemáticos y físicos.

A través de un análisis epistemológico del contenido de los libros de texto de Cálculo tradicionales (CALITECA) con el apoyo de la Transposición Didáctica, en Pulido (1998) se explica la incapacidad tienen los cursos de Cálculo basados en estos libros en soportar un estilo de matematizar muy utilizado en la Física, el estilo diferencial. Este estilo involucra consideraciones infinitesimales como el que los diferenciales son magnitudes infinitamente pequeñas, que tramos infinitamente pequeños de curvas son rectos, etc. Estas consideraciones provienen del Cálculo Leibniziano. El CALITECA utiliza reglas con los diferenciales que toma del mismo cálculo pero sus explicaciones no contienen los infinitesimales, porque alude al Análisis Matemático, teoría matemática especializada que excluye de sus fundamentos a estas magnitudes. De ahí una fuente de pasajes incoherentes de estos libros y las consecuencias funestas para el aprendizaje de la Física que busca en ellos el respaldo matemático que requiere.

De igual manera, con el apoyo de la Transposición Didáctica, en esa investigación se señala la presencia de argumentos extraños y confusos en los libros de Física alrededor de los diferenciales. Aunque utiliza libremente el estilo diferencial para construir fórmulas, no explica su proceder, y cuando lo hace, deja ver su apego al CALITECA, provocando con ello la confusión a cualquiera que intente genuinamente aprender, como ya se había referido con Grattan-Guinness (1984).

Aunque cualquier propuesta educativa de Física o Matemáticas, estructurará contenidos que ha tomado de ciertos períodos de la historia de los conceptos, conocer la existencia de la Transposición Didáctica puede ayudar a tomar en cuenta los aspectos epistemológicos que se derivarán necesariamente del hecho de haber transpuesto el contenido a ambientes ajenos al que los vio nacer.

De acuerdo con las investigaciones revisadas en los antecedentes se puede percibir que el concepto de flujo es afectado en la parte matemática bajo la perspectiva de la Transposición Didáctica (Pulido, 1998). Antes de ser presentado el concepto de flujo de un campo en los libros de texto de Electricidad y Magnetismo, se presentan las leyes que describen el comportamiento de las cargas, estas leyes son abordadas desde dos perspectivas, el modelo newtoniano (modelo de acción a distancia) y el modelo maxwelliano (modelo de campo). Furió y Guisasola (1997, p. 264) mencionan que estos enfoques pueden “considerarse de distinto estatus ontológico y epistemológico pero no contrarios”, además sostienen la idea de que “la introducción del campo eléctrico no es posible sin el conocimiento de los prerrequisitos de carga y fuerza eléctricas coulombiana”.

Sin embargo, las raíces del modelo propuesto por Coulomb están en las teorías de Newton y las raíces del modelo de Maxwell están en la teoría de campos, la cual tiene su base matemática en el uso de los diferenciales y las consideraciones infinitesimales que en Pulido (1998), como se mencionó anteriormente, se expone que esa matemática muy usada por los físicos no es aceptada del todo por los matemáticos. Esto es, en los cursos de matemáticas tradicionales se usan los diferenciales pero no se explican sus propiedades, sus bases epistemológicas, sólo se

enseña la forma de operar con ellos porque facilitan la parte algorítmica o de solución a los problemas donde se utilizan.

Como parte de esta investigación más adelante se analizará cómo es introducido el concepto de flujo eléctrico en los libros de texto de la Física escolar, en la clase de un curso de Electricidad y Magnetismo, y en la clase de un curso de Matemáticas III para ingeniería donde se lleva el Diseño Integral. Es importante señalar que en un curso de Matemáticas III para ingeniería que utiliza el CALITECA (Matemática tradicional) no se aborda la construcción o introducción del concepto de flujo de un campo.

En este capítulo, en el primer apartado se señalaron las consideraciones teóricas generales, bajo las cuales fue construido el Diseño Integral del cual forma parte el M3DI. El M3DI está orientado a la práctica de matematizar las nociones de flujo y circulación. En la segunda sección se expuso las consideraciones históricas que deben de estar presentes en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de flujo de un campo; así como la conveniencia del uso de contextos adecuados apoyados en analogías para la enseñanza del mismo.

En la tercera parte se presentaron los elementos de *tratamiento y conversión* de las representaciones semióticas, que permitirán sustentar los aprendizajes con significado alrededor del concepto de flujo de un campo en los estudiantes, bajo el marco de la Teoría de las representaciones semióticas. Finalmente, se presentó la Teoría de la Transposición Didáctica, como un marco de referencia a utilizar para identificar los elementos teóricos que explican las razones del porqué la enseñanza del concepto de flujo del campo eléctrico basada solamente en los libros de texto de

Física no puede lograr aprendizajes con significado. En el siguiente capítulo se presenta la metodología propuesta para esta investigación.

Capítulo 3. Método

Este capítulo está dividido en siete secciones. En la primera sección se presenta una descripción general del enfoque metodológico y de la metodología de este estudio. En la segunda se describe el contexto sociodemográfico en el cual se desarrolla la investigación y en la tercera sección se detalla la población que participa en el estudio. En la cuarta se presentan los instrumentos utilizados, y en la quinta sección se describen los participantes y las diversas implementaciones de estos instrumentos. En la sexta se establece el procedimiento seguido en el estudio, y en la séptima sección se describen las estrategias de análisis de datos.

Enfoque y diseño metodológico

En el primer capítulo de esta investigación se mencionó que las preguntas de investigación son: 1) ¿Hay diferencias apreciables que pueden utilizarse para argumentar que hay aprendizajes con significado alrededor del concepto de flujo del campo eléctrico en los estudiantes que han llevado el Diseño Integral a través del curso de Matemáticas III para ingeniería?; 2) ¿Qué elementos de tipo teórico podrían esgrimirse que den cuenta de que ciertas dificultades en el aprendizaje del concepto de flujo del campo eléctrico provienen sólo del hecho de que los cursos de Física se apoyan en la matemática tradicional? Las preguntas de investigación propician dos situaciones: analizar las diferencias significativas en el aprendizaje con significado del concepto de flujo de un campo eléctrico que tienen los estudiantes universitarios en términos de frecuencias y distribuciones; y analizar cómo se introduce el concepto

de flujo de un campo eléctrico en los cursos de Física III (Electricidad y Magnetismo). Para la primera es necesario cuantificar eventos y para la segunda es necesario describir una situación dada. Estas consideraciones implican que el enfoque de este estudio sea mixto.

En esta sección también se presenta una descripción general y justificación de la metodología seguida en este estudio. Las situaciones señaladas en el párrafo anterior conllevan a una metodología mixta concurrente que estará dividida en dos partes y realizadas en forma simultánea: una parte cuantitativa y otra cualitativa. Buscando así, que los resultados obtenidos en ambas partes se complementen (Johnson y Onwuegbuzie, 2004).

Para la primera pregunta de investigación, se consideró necesario realizar un estudio de las evidencias de los aprendizajes con significado alrededor del concepto de flujo de un campo eléctrico de los estudiantes universitarios que cursaron M3DI y M3T. Esta determinación implicó el diseño de un instrumento basado en explorar el proceso de conversión semiótico (del lenguaje simbólico al natural) alrededor de la expresión de flujo, usada en unos de los temas de Electricidad y Magnetismo, en este caso, el tema de la Ley de Gauss. El diseño de este instrumento fue un set de preguntas abiertas enfocado a identificar los significados asociados a los elementos que conforman la expresión del flujo eléctrico, para analizar si estaba presente un proceso de conversión semiótica en las respuestas dadas por los alumnos. En esta parte del estudio, la recolección de datos se extrae de forma cualitativa, para posteriormente en su análisis cuantificarlos. Se realizó una prueba piloto con el instrumento (con una muestra de 46 participantes) y luego se implementó en su

versión definitiva a una muestra más grande. Para la prueba piloto sólo se realizaron tablas de contingencia a partir de los resultados obtenidos y se calculó el estadístico de prueba χ^2 . Para la implementación definitiva se decidió realizar una rúbrica para aplicar una escala de *Likert* a las respuestas obtenidas; y a través de este proceso (como se verá en siguiente capítulo) obtener calificaciones para cada alumno que hubiese presentado el examen. Con las calificaciones obtenidas se efectuó una comparación entre los promedios de las medianas del grupo del M3DI y M3T (con la prueba U de Mann-Whitney) y así poder aceptar o rechazar la hipótesis planteada en el capítulo 1. La consistencia interna del instrumento fue determinada a través del alfa de *Cronbach*; y también se realizó la fiabilidad de jueces descrita más adelante en este mismo capítulo para la rúbrica aplicada.

Con la intención de profundizar en algunas de las respuestas que se dieron en el examen de preguntas abiertas se realizaron entrevistas semi-estructuradas. Para que a través de ellas se pudiera tener una visión más cercana de los comentarios de los estudiantes relacionados con la enseñanza y aprendizaje de este concepto.

Para la segunda pregunta de investigación, se consideró necesario indagar qué elementos teóricos son un diferenciador en la enseñanza del concepto de flujo de un campo eléctrico. Por cual, fue conveniente realizar un análisis de contenido del tema donde aparece en los libros de texto de la Física escolar el concepto de flujo de un campo eléctrico. Además, se realizaron observaciones en un curso de Física III (que es donde tiene lugar este concepto) y un curso de M3DI, con la finalidad de registrar cómo se introduce este concepto en esos cursos. No se consideró necesario ir a un

curso de Matemáticas III para ingeniería sin el Diseño Integral, debido a que en ese curso no se ve ese tema. Esta parte del estudio es cualitativa.

Contexto sociodemográfico

La investigación se efectuó en el Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey, siendo ésta una universidad privada de México ubicada al noreste del país que cuenta con alrededor de 16000 estudiantes. La población escolar la constituyen jóvenes de diferentes estados de la República Mexicana y en menor proporción, por extranjeros. La universidad ofrece diez áreas de estudio: agricultura y alimentos, arquitectura, ciencias sociales y humanidades, comunicación y periodismo, derecho, diseño y arte aplicado, ingeniería y ciencias, negocios y administración, salud, tecnologías de información y electrónica. Aproximadamente la mitad de la población estudia en el área de ingeniería.

En el modelo educativo de esta universidad, deben de estar presentes en sus cursos las siguientes características (independientemente del nivel y la disciplina): aprendizaje activo, innovación y formación integral. El curso de Física III (Electricidad y Magnetismo) está en el plan de estudios de profesional de casi todas las carreras de ingeniería (29) y de una carrera de licenciatura (Licenciado en Ciencias Químicas), ubicado en las materias de tercer semestre. El curso de Matemáticas III para ingeniería (Cálculo de varias variables) está en el plan de estudios de todas las ingenierías (31) y de una carrera de licenciatura (Licenciado en Ciencias Químicas), ubicado en las materias de tercer semestre.

Población y muestra

El objetivo principal de esta investigación es, analizar si hay evidencias de un aprendizaje con significado del concepto de flujo de un campo eléctrico que tienen los estudiantes universitarios que hayan llevado el curso M3DI en contraste con los que no. Este objetivo delimita la población de estudio. Como se mencionó anteriormente, los cursos de Matemáticas III para ingeniería y Física III están ubicados en tercer semestre de las carreras que se ofrecen en el Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey. Sin embargo, un porcentaje de alumnos tiene la opción de cursar Matemáticas III para ingeniería y posteriormente Física III, debido a diversas circunstancias. Además, a excepción de dos carreras de ingeniería, el resto de las carreras de ingeniería y una licenciatura cursa ambas materias, a veces de forma simultánea, y a veces de forma desfasada.

En el curso de Física III se cubren principalmente los temas de Electricidad y Magnetismo, siendo el tema de flujo eléctrico una noción esencial para desarrollar otros temas como la Ley de Gauss. En el curso de Matemáticas III para ingeniería se cubren principalmente los temas de cálculo diferencial e integral de varias variables, funciones vectoriales en dos y tres dimensiones y elementos de análisis vectorial. Los cursos de Matemáticas III para ingeniería con Diseño Integral (M3DI) tienen como eje de desarrollo de los temas dos nociones, flujo y circulación. En los cursos de Matemáticas III para ingeniería donde no se lleva la propuesta (modelo tradicional donde se emplea de referencia los libros de CALITECA) no se introduce el concepto de flujo de un campo vectorial.

En concordancia con el objetivo principal de investigación y dadas las características de los planes de estudio de la universidad donde se realizó el estudio, los estudiantes que cumplen con esas características son: los alumnos de ingeniería, excepto de dos carreras (que no tienen en su plan de estudios el curso de Física III) y la carrera de Licenciado en Ciencias Químicas (LCQ), que hayan cursados Matemáticas III para ingeniería con o sin la propuesta de Diseño Integral, y estén en un curso de Física III. A continuación se describe la muestra seleccionada de acuerdo con el instrumento utilizado.

La muestra seleccionada para la implementación del instrumento de preguntas abiertas (mencionado en la parte de Enfoque y diseño metodológico de este capítulo), y que cumple con las características del párrafo anterior, fue de 104 alumnos, 52 alumnos que tomaron el curso de M3DI y 52 alumnos que llevaron el curso de M3T. Posteriormente, de esta muestra se seleccionaron a 6 alumnos, 3 del grupo de M3DI y 3 del grupo M3T, para realizar entrevistas y profundizar en las respuestas encontradas a partir de este instrumento.

Para realizar la investigación cualitativa, la cual está relacionada con el segundo objetivo particular de este estudio, se seleccionaron 5 libros de texto de Física III que son los que actualmente aparecen como libros de texto o libros de referencia en los cursos de Electricidad y Magnetismo. Los libros que se consultaron son: Hallik, Resnick y Walker, 2001; Giancoli, 2002; Griffiths, 1999; Serway y Beichner, 2008; y Tipler, 2000.

Además, se realizaron observaciones en un curso de Física III y un curso de M3DI, con la finalidad de registrar cómo se introduce este concepto de flujo

eléctrico. No se consideró necesario ir a un curso de Matemáticas III para ingeniería sin el Diseño Integral debido a que en ese curso no se ve ese tema. Cada clase cuenta con aproximadamente 40 alumnos.

Instrumentos

En esta investigación se utilizaron cuatro instrumentos: examen de preguntas abiertas, entrevista, análisis de contenido y observación participante. En esta sección se presenta la descripción de los mismos.

Examen de preguntas abiertas. Considerando que no se cuenta con un instrumento para recolectar datos que permitan estudiar y analizar las actividades cognitivas relacionadas con los procesos de tratamiento y conversión que se dan en los estudiantes alrededor del aprendizaje con significado del concepto de flujo, se elaboró un instrumento para la realización de esta investigación. En el diseño del instrumento se utilizaron como referencia tres aspectos: el tema de la Ley de Gauss, siendo éste uno de los temas donde aparece el concepto de flujo en los cursos de Electricidad y Magnetismo, y en el cuál se ha detectado una problemática en el aprendizaje del mismo (Alomá y Martins, 2008; Furió y Guisasola 1999; Maloney et al., 2001; Martínez-Torregrosa, López-Gay y Gras-Mart, 2002); las consideraciones infinitesimales que deben de estar presentes en la proceso de construcción del concepto de flujo (Pulido, 1998; Pulido, 2010); y un ejemplo que este en los libros de texto de la Física escolar donde se aplica este concepto (con su solución), muy frecuentemente usado en los cursos de Física III para estudiar el tema de la Ley de Gauss (Serway y Beichner, 2008).

En la Tabla 4 se muestran las preguntas del instrumento de preguntas abiertas; la descripción de cada una de ellas, el objetivo a analizar, las actividades cognitivas relacionadas (Duval, 1999) y el registro de representación semiótica relacionado (Duval, 1993).

Tabla 4

Descripción de cada uno de los problemas e incisos del examen de preguntas abiertas y opción múltiple

Descripción del problema	Objetivo a analizar	Actividades cognitivas relacionadas	Registro de representación relacionado
<p>P1. Se enuncia la Ley de Gauss y escribe su expresión matemática.</p> <p>Ley de Gauss</p> $\Phi_e = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$ <p>1) Significado de Φ_E y relación con la superficie gaussiana 2) Significado de \oint y relación con la superficie gaussiana. 3) Significado de $d\mathbf{A}$ y relación con la superficie gaussiana. 4) Significado de \mathbf{E} 5) Significado de $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ y relación con el flujo 6) Significado de $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ y relación con el flujo 7) Significado de $\frac{q_{in}}{\epsilon_0}$ y relación con la superficie gaussiana.</p>	<p>Uso del lenguaje simbólico al natural (y viceversa). En el lenguaje natural se analizó si en la respuesta dada se reflejaba un proceso de lectura o un significado asociado.</p>	<p>Conversión</p>	<p>Lenguaje simbólico Lenguaje natural</p>
<p>P2. Se muestra un problema con su solución donde se aplica la Ley de Gauss (Serway). Ver Apéndice</p> <p>8) Se hace referencia al vector del campo eléctrico y dentro de un proceso de tratamiento se pregunta si es igual a su magnitud. 9) Se hace referencia al vector del diferencial de superficie y dentro de un proceso de tratamiento se pregunta si es igual a su magnitud. 10) Se hace referencia al símbolo del producto punto y dentro de un proceso de tratamiento se pregunta su significado 11) Significado del producto de las magnitudes del campo eléctrico y el diferencial de superficie 14) Significado del cálculo del diferencial de superficie 13) Se hace referencia al símbolo de la integral (cerrada y abierta) dentro de un proceso de tratamiento y se pregunta si</p>	<p>Uso del lenguaje simbólico al natural (y viceversa). En el lenguaje natural se analizó si en la respuesta dada se reflejaba un proceso de lectura o un significado asociado. Para el proceso de tratamiento se analizó los significados asociados que se daban a un tratamiento ya dado o si solo se realizaba un procedimiento de</p>	<p>Tratamiento Conversión</p>	

Descripción del problema	Objetivo a analizar	Actividades cognitivas relacionadas	Registro de representación relacionado
representan lo mismo. 14) Interpretación del cálculo realizado con la expresión de La ley de Gauss para este ejemplo.	lectura.		

Para el primer set (de la 1 a la 7) de las preguntas que conforman el instrumento, el enfoque fue analizar el proceso de conversión (del lenguaje simbólico (matemático) al lenguaje natural y viceversa) que realizan los estudiantes al explicar el significado de los elementos que conforman la expresión matemática del concepto de flujo. Para el segundo set de preguntas (de la 8 a la 14) que conforman el instrumento, el enfoque fue analizar el proceso de conversión (del lenguaje simbólico (matemático) al lenguaje natural y viceversa) que realizan los estudiantes al explicar el significado que toman los elementos que conforman la expresión matemática del concepto de flujo cuando se realiza un tratamiento de la expresión. El formato de este instrumento se presenta en el Apéndice B.

Con este instrumento se realizó una prueba piloto a 46 alumnos (23 del grupo M3DI y 23 del grupo M3T). A partir de los resultados que se encontraron se establecieron las categorías correspondientes de los significados asociados que tienen los estudiantes de los elementos que forman parte de la expresión de flujo eléctrico para posteriormente cuantificarlos. Además, con los resultados de la prueba piloto se generó una rúbrica para poder tener una escala de *Likert* que se pudiera aplicar posteriormente a los resultados de la implementación definitiva (esta parte será comentada en el Apéndice C).

Entrevista semi-estructurada. La entrevista semi-estructurada permite obtener una riqueza informativa en contexto, determinada exclusivamente por el entrevistado, sus ideas y posturas (Hernández, Fernández y Baptista, 2006) sobre las concepciones que el estudiante tiene del tema abordado. En este tipo de entrevista, es muy importante entender “el mundo en la perspectiva del entrevistado y así

desmenuzar los significados de su experiencia” (Álvarez-Gayou 2007, p.109). De mismo modo, favorece la adquisición de información más íntima y menos superficial; difícil de obtener cuando no hay un entrevistador de frente, o en un contexto grupal de interacción.

La guía de preguntas de la entrevista debe de ser cuidada, pues a partir de las respuestas que se den a las preguntas realizadas se realizará la categorización. Si se tiene una pregunta demasiado ambigua las respuestas pueden ser muy variadas dependiendo de la interpretación que de cada quien a la pregunta, de tal forma, que no converjan a ningún patrón o no se pueda evidenciar lo que deseamos analizar.

La guía propuesta para este estudio se basó en los resultados obtenidos del examen de preguntas abiertas, enfocándose más en aquellas preguntas que reflejaron o no algún aprendizaje con significado del concepto de flujo de un campo eléctrico. También, se enfocó a la parte de las preguntas propuestas que estaban diseñadas para identificar las formas de razonamiento que los estudiantes utilizan en el concepto de flujo de un campo eléctrico, en particular en las consideraciones infinitesimales que toman en cuenta.

Las preguntas del protocolo que conformaron las entrevistas realizadas para este estudio están en el Apéndice D. Se pidieron respuestas cualitativas para detectar más de fondo el significado que tiene para ellos el concepto de flujo eléctrico, campo eléctrico, diferencial de área, diferencial de flujo, y de qué forma consideran que les puede beneficiar en su aprendizaje del concepto de flujo de un campo eléctrico el uso de contextos y con qué tipo de analogías.

Análisis de contenido de cómo es presentado el concepto de flujo eléctrico en los libros de texto de la Física escolar. Se realizó un análisis de contenido de los libros de texto de la Física escolar para indagar y presentar cómo se introduce el concepto de flujo eléctrico. Para ello se utilizaron las técnicas de análisis de contenido propuestas por Ruiz (1996) que son las siguientes:

- a) Determinar el objeto o tema de análisis, que en esta investigación fue indagar como se introduce el concepto de flujo eléctrico en los libros de texto de la Física escolar.
- b) Determinar las categorías de análisis de las que dependen la clasificación y la selección de la información buscada.
- c) Seleccionar la muestra del material a ser analizado. En esta investigación los libros de texto de la Física escolar seleccionados fueron los que se proponen como libro de texto o de referencia en los cursos de Física III.

No se hace referencia a realizar un análisis de contenido de cómo es presentado el concepto de flujo eléctrico en los libros de CALITECA, porque en ellos no es expuesto el tema de flujo de un campo vectorial como unidad de estudio.

Observación participante. La observación participante permite introducirse a una cultura y observar los comportamientos e interacciones de los personajes que pueden ayudar a la realización de la investigación. Además, facilita describir la realidad, las percepciones, las vivencias de las personas implicadas y el significado de sus acciones, por lo se considera apropiada para la realización de la investigación.

Para este estudio, el instrumento observación participante fue aplicado en los cursos señalados en la sección de Población y muestra. Se solicitó la aprobación de

los profesores titulares del curso para acudir a las sesiones donde se introduce el concepto de flujo de un campo eléctrico.

Se utilizó una rejilla de observación (Apéndice E) para que se cubrieran las observaciones necesarias. El objetivo de aplicar este instrumento fue analizar la forma en cómo se introduce y se desarrolla el concepto de flujo de un campo para aportar evidencia de los contextos que se utilizan en cada clase, de cómo se construye o se define el concepto de flujo y de las consideraciones infinitesimales que se exponen cuando se presenta.

Además, en esta rejilla se tomó un registro en torno a lo que sucede en la clase, cómo se efectúa, cuál es el papel del maestro, cuál es el rol del alumno, cuál es el rol de la tecnología, así como, las conductas, comportamientos y cuestionamientos que realizan los estudiantes. También se describió la distribución física de la sesión conformada por infraestructura, alumnos y maestros. De acuerdo con Spradley (1980) este tipo de observación mantiene un equilibrio entre estar dentro y estar fuera. Por lo que se asumió el rol que tiene el estudiante frente a esa exposición, sin tener interacción con los alumnos o con el profesor titular.

Participantes y descripción de las implementaciones de los instrumentos

En la sección anterior se presentaron los cuatro instrumentos que se utilizan en este estudio. A continuación se describen los participantes y las implementaciones de dos de los instrumentos: examen de preguntas abiertas y entrevista semi-estructurada. Los instrumentos de análisis de contenido y observación participante fueron descritos en la sección anterior.

Participantes y descripción de las implementaciones del examen de preguntas abiertas. En el Apéndice A se muestra el instrumento que se aplicó a estudiantes de las carreras de ingeniería del Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey. El total de participantes fue de 136 estudiantes que estaban inscritos en un curso de Física III. De ellos 32 estudiantes no habían llevado la materia de Matemáticas III para Ingeniería o la estaban tomando de manera simultánea. Por lo que finalmente, el tamaño de la muestra fue de 104 estudiantes (Vogt, 2007), siendo 52 alumnos que llevaron Matemáticas III para Ingeniería con el Diseño Integral y 52 alumno que llevaron Matemáticas III para Ingeniería sin el Diseño Integral.

El examen de preguntas abiertas se implementó en cuatro cursos de Física III. Se buscó la autorización para aplicar el instrumento con el titular del curso, cada grupo está conformado aproximadamente por 40 alumnos. La duración de la aplicación del instrumento fue de 20 minutos. Antes de efectuar la aplicación se les comentó a los participantes que es para fines de una investigación educativa y que los resultados serían confidenciales. Se les solicitó que dieran su mejor esfuerzo, siendo lo más consistentes y explícitos en sus respuestas proporcionadas.

Participantes y descripción de las implementaciones de la entrevista semi-estructurada. En el Apéndice D se muestra el guión de la entrevista que se efectuó con estudiantes que cursaron Matemáticas III para ingeniería (con DI y sin DI) y que estuvieran cursando la materia de la Física III (Electricidad y Magnetismo), como se mencionó en la sección Población y muestra de este capítulo, son los estudiantes que se adecuan con las características del objetivo de la tesis.

Este instrumento fue aplicado posterior a la implementación del primer instrumento descrito. Las razones para este hecho son porque el instrumento de la entrevista está enfocado a profundizar en las respuestas obtenidas en el examen de preguntas abiertas. También el propósito de las entrevistas fue tratar de adentrarnos en la perspectiva de la otra persona (Merriam, 1998), en este caso, profundizar en torno a la enseñanza y aprendizaje del concepto de flujo de un campo eléctrico.

La muestra fue de 6 alumnos (Merriam, 1998), y fue seleccionada a partir de la muestra de alumnos que presentaron el examen de preguntas abiertas, por lo que las características generales de esta muestra serán las mismas del instrumento de la sección anterior. Se consideraron que fueran 3 estudiantes del grupo de M3DI y 3 estudiantes del grupo M3T. Además, se buscó que los estudiantes seleccionados proporcionaran respuestas muy diferenciadas en el instrumento de la sección anterior, con la finalidad de enriquecer el estudio (Creswell, 2007).

Se buscó el consentimiento de los entrevistados (ver Apéndice F). En primera estancia, se les invitó a través de un correo electrónico a participar en la entrevista. La entrevista duró alrededor de 25 minutos y se realizó en una sala de juntas del Departamento de Matemáticas del Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey. El medio de registro fue por grabación de audio. Las indicaciones que se les dieron a los alumnos fue que es una entrevista sobre el tema de la Ley de Gauss, en particular el tema de flujo eléctrico, para fines de un proyecto de investigación.

Procedimientos

En esta sección se presenta el procedimiento que se siguió para recolectar los datos y para analizarlos, en la dirección de dar respuesta a las preguntas de investigación. Como se expuso en las secciones anteriores son cuatro los instrumentos a implementar: aplicación de un examen de preguntas abiertas; entrevista semi-estructurada; análisis de contenido de los libros de texto de la Física escolar; observación participante en un curso de Física III y en un curso de M3DI. A continuación se presenta el procedimiento que se implementó en este estudio.

Procedimiento de estudio para el instrumento del examen de preguntas abiertas.

- 1) Diseñar preguntas abiertas que den lugar al proceso de conversión semiótico (del lenguaje simbólico al lenguaje natural) en la expresión de la Ley de Gauss.
- 2) Buscar un ejemplo recurrido de las clases de los cursos de Física III que este dentro del contenido del libro de texto de referencia del curso y en él se exprese un proceso de tratamiento de la expresión de flujo eléctrico.
- 3) Tomar de referencia el ejemplo del inciso 2) y diseñar preguntas abiertas que den lugar al proceso de conversión semiótico (del lenguaje simbólico al lenguaje natural) en la expresión de la Ley de Gauss, donde se realice el tratamiento semiótico de la misma.
- 4) Previsión de los condicionantes para la aplicación del test, tales como duración de la sesión y lugar.
- 5) Realizar una prueba piloto del instrumento con alumnos del curso de Física III, que hayan llevado Matemáticas I para ingeniería con DI y sin DI.

- 6) Analizar los procedimientos y los razonamientos más frecuentes que tienen los estudiantes en cada una de estas preguntas utilizando el proceso de codificación establecido por Hernández, Fernández y Baptista, (2006).
- 7) Modificar en caso de ser necesario, algunas cuestiones derivadas de la aplicación del instrumento de la prueba piloto.
- 8) Generar una rúbrica a partir de los resultados de la prueba piloto con la que se pueda tener una escala de *Likert* para los datos recolectados de la implementación final.
- 9) Implementar el instrumento con las modificaciones pertinentes alumnos del curso de Física III, que hayan llevado Matemáticas I para ingeniería con DI y sin DI.
- 10) Analizar la confiabilidad y validez del instrumento.
- 11) Establecer, a partir del análisis de los datos obtenidos, los resultados y conclusiones de la investigación.

Procedimiento de estudio para el instrumento de la entrevista semi-estructurada.

- 1) Considerar los resultados del instrumento del examen de preguntas abiertas para realizar modificaciones al diseño del guión de la entrevista.
- 2) Seleccionar 6 estudiantes (Merriam, 1998) de la muestra que conforman los alumnos, que presentaron el examen de preguntas abiertas, del curso de Física III, que hayan llevado Matemáticas I para ingeniería con DI y sin DI.
- 3) Obtener el consentimiento de los participantes.
- 4) Registrar cuidadosamente los datos a través de notas y grabaciones de audio.

- 5) Analizar las respuestas más frecuentes que tienen los estudiantes en cada uno de estas preguntas utilizando el proceso de codificación establecido por Merriam (1998).
- 6) Establecer, a partir del análisis de los datos obtenidos, los resultados y conclusiones de la investigación.

Procedimiento de estudio para el instrumento del análisis de contenido de los libros de texto de la Física escolar

- 1) Buscar las referencias que se utilizan como libro de texto o de consulta en el curso de Física III (Electricidad y Magnetismo) que se imparte en el Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey.
- 2) Establecer unidades de análisis, específicamente unidades de contexto. En este caso se tomarán fragmentos de párrafos que aparecen en los textos que están asociados al concepto de flujo eléctrico.
- 3) Determinar las categorías de análisis de las que dependen la clasificación y la selección de la información buscada.
- 4) Analizar las categorías encontradas.

Procedimiento de estudio para el instrumento de observación participante.

- 1) Solicitar el permiso y autorización del titular del grupo para observar las clases del curso de Electricidad y Magnetismo donde se aborda el concepto de flujo de un campo eléctrico.
- 2) Solicitar el permiso y autorización del titular del grupo para observar las clases del curso de M3DI donde se aborda el concepto de flujo de un campo vectorial.

- 3) Describir el contexto de trabajo, tomando en consideración los objetivos de la investigación.
- 4) Describir detalladamente lo que ocurre en las clases donde se explica La ley de Gauss, que es la parte donde tiene lugar el concepto de flujo eléctrico.
- 5) Tomar notas de lo que ocurre al interior del aula en la exposición del tema de flujo eléctrico.
- 6) Registrar y organizar cuidadosamente las observaciones realizadas a través de notas de campo.

Estrategias de análisis de datos

En esta sección se detallan las estrategias de análisis de datos. Las estrategias de análisis de datos han sido ser separadas en: estrategia de análisis para examen de preguntas abiertas; estrategia de análisis de la entrevista semi-estructurada; estrategias de análisis de contenido de los libros de texto de la Física escolar; estrategias de análisis de la observación participante.

Estrategias de análisis para el examen de preguntas abiertas. Para analizar las respuestas de los estudiantes en el examen de preguntas abiertas se utilizó el proceso de codificación (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). Hernández et al. (2006, p. 329) mencionan “el procedimiento consiste en encontrar y darles nombre a los patrones (respuestas similares o comunes), listar estos patrones y después asignar un valor numérico o un símbolo a cada patrón”. Así, un patrón constituirá una categoría de respuesta.

Con los datos recolectados con el instrumento de preguntas abiertas se busca identificar si hay diferencias significativas que se presentan como muestras de aprendizajes con significado logrados en los estudiantes (primer objetivo particular de este estudio), en cuanto al aprendizaje del concepto de flujo del campo eléctrico se refiere, al llevar esta propuesta didáctica integral. En este sentido, para cada pregunta se codifica el proceso de conversión (del lenguaje simbólico al lenguaje natural), esto es, se codificaron las respuestas más comunes que los estudiantes daban en una tabla de frecuencias. Posteriormente, para estas respuestas se codificaron las interpretaciones, las explicaciones y los razonamientos más frecuentes.

Después de estos procedimientos se realizaron las categorías correspondientes (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). Posteriormente se realizó una tabla de contingencia considerando las categorías establecidas y las frecuencias observadas para cada categoría (Hernández, Fernández, y Baptista, 2006). Para cada tabla se realizó una prueba de χ^2 o Fisher (dependiendo del comportamiento de las respuestas) para establecer si el estadístico de prueba indica si hay indicios de que la respuesta dada es independiente del grupo al que se pertenece (M3DI o M3T) o hay diferencias significativas que indican lo contrario (Pérez, 2002).

Con la finalidad de poder establecer promedios para cada examen se diseñó la rúbrica que se muestra a continuación (ver Tabla 5), siendo el valor de uno el más bajo y el tres el más alto, en relación a las actividades cognitivas expuestas y a los significados asociados encontrados a la expresión de flujo en las respuestas dadas por los estudiantes. Al aplicar la rúbrica, se generó una escala de *Likert* correspondiente a

cada examen y se obtuvo promedio final de los puntos obtenidos de todos los reactivos, siendo este puntaje la calificación obtenida en cada examen.

Tabla 5

Rúbrica para los significados asociados en la expresión de flujo de un campo eléctrico

		Reactivo		Escalamiento		
Número y descripción	Problema y pregunta del examen de preguntas abiertas		1	2	3	
1. Significado de Flujo Eléctrico Φ_E	P1. 1)	Significado de Flujo Eléctrico Φ_E y relación con la superficie gaussiana	Se escribe el significado del símbolo Φ_E como flujo eléctrico. Se da evidencia de un proceso de lectura.	Se escribe el significado del símbolo Φ_E como flujo eléctrico. Se da un significado asociado a este símbolo en términos de las líneas del campo. Se refleja un proceso semiótico de conversión (lenguaje simbólico al lenguaje natural)	Se escribe el significado del símbolo Φ_E como flujo eléctrico. Se da un significado asociado a este símbolo en términos del flujo eléctrico o como una medida del campo eléctrico y la superficie que atraviesa.	
2. Significado de E	P1. 3)	Significado de E	Se escribe el significado del símbolo E como líneas del Campo Eléctrico. Se da evidencia de un proceso de lectura.	Se escribe el significado del símbolo E como Campo Eléctrico. Se da un significado asociado a este símbolo en términos del campo. No se reconoce que es una cantidad vectorial. Se refleja un proceso semiótico de conversión (lenguaje simbólico al	Se escribe el significado del símbolo E como Campo Eléctrico. Se da un significado asociado a este símbolo en términos del campo. Se reconoce que es una cantidad vectorial. Se refleja un proceso semiótico de conversión (lenguaje simbólico al lenguaje natural)	

Reactivo		Escalamiento		
Número y descripción	Problema y pregunta del examen de preguntas abiertas	1	2	3
3. Significado de dA	P1. 4) Significado de dA y relación con la superficie gaussiana	Se escribe el significado del símbolo dA como Diferencial de área. Se da evidencia de un proceso de lectura.	Se escribe el significado del símbolo dA como diferencial de área. Se da un significado asociado a este símbolo en términos de una pequeña cantidad, una cantidad infinitesimal, una cantidad infinitamente pequeña. No se reconoce que es una cantidad vectorial. Se refleja un proceso semiótico de conversión (lenguaje simbólico al lenguaje natural)	Se escribe el significado del símbolo dA como diferencial de área. Se da un significado asociado a este símbolo en términos de una pequeña cantidad, una cantidad infinitesimal, una cantidad infinitamente pequeña. Se reconoce que es una cantidad vectorial. Se refleja un proceso semiótico de conversión (lenguaje simbólico al lenguaje natural)
4. Significado de $E \cdot dA$	P1. 5) Significado de $E \cdot dA$ y relación con el flujo	Se escribe el significado del símbolo $E \cdot dA$ como el Campo Eléctrico “por” el Diferencial de área. Se da evidencia de un proceso de lectura.	Se escribe el significado del símbolo $E \cdot dA$ como el Campo Eléctrico “producto punto” el Diferencial de área. Se da evidencia de un proceso de lectura.	Se escribe el significado del símbolo $E \cdot dA$ como el Campo Eléctrico “producto punto” el Diferencial de área. Se da un significado asociado a esta expresión en términos de una pequeña cantidad de flujo, un diferencial de

Reactivo		Escalamiento		
Número y descripción	Problema y pregunta del examen de preguntas abiertas	1	2	3
				flujo, una cantidad infinitamente pequeña de flujo. Se refleja un proceso semiótico de conversión (lenguaje simbólico al lenguaje natural)
5. Significado de $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$	P1. 2) P1. 6)	Significado de $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ y relación con el flujo	Se escribe el significado del símbolo $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ como la integral del Campo Eléctrico “por” el Diferencial de área. Se da evidencia de un proceso de lectura.	Se escribe el significado del símbolo $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ como el Campo Eléctrico “producto punto” el Diferencial de área. Se da un significado asociado a esta expresión en términos de que se señala que se va a resolver una integral. Se refleja un proceso semiótico de conversión (lenguaje simbólico al lenguaje natural)
6. Significado de \mathbf{E} y de $d\mathbf{A}$ dentro de un proceso semiótico de tratamiento	P2. 8)	Se hace referencia al vector del campo eléctrico y dentro de un proceso de tratamiento se pregunta si es	No aporta ninguna argumentación.	Aporta argumentación. No reconoce (proceso semiótico de conversión, lenguaje simbólico al
				Aporta argumentación. Se reconoce dentro de un proceso de tratamiento que el Campo Eléctrico en la

Reactivo		Escalamiento		
Número y descripción	Problema y pregunta del examen de preguntas abiertas	1	2	3
	igual a su magnitud.		lenguaje natural) que el campo eléctrico es una cantidad vectorial. No reconoce el proceso semiótico de tratamiento presentado. No explica el proceso semiótico de tratamiento para el campo eléctrico.	ecuación del flujo es vectorial. Explica (proceso semiótico de conversión, lenguaje simbólico al lenguaje natural) que el campo eléctrico es una cantidad vectorial. Reconoce el proceso de tratamiento presentado. Explica el proceso semiótico de tratamiento presentado para el campo eléctrico
P2. 9)	Se hace referencia al vector del diferencial de superficie y dentro de un proceso de tratamiento se pregunta si es igual a su magnitud.	No aporta ninguna argumentación.	Aporta argumentación. No explica (proceso semiótico de conversión, lenguaje simbólico al lenguaje natural) que el Diferencial de área es una cantidad vectorial. No reconoce el proceso semiótico de tratamiento presentado. No explica el proceso semiótico de	Aporta argumentación. Se reconoce dentro de un proceso de tratamiento que el Campo Eléctrico en la ecuación del flujo es vectorial. Explica (proceso semiótico de conversión, lenguaje simbólico al lenguaje natural) que el campo eléctrico es una cantidad vectorial. Reconoce el

Reactivo			Escalamiento		
Número y descripción	Problema y pregunta del examen de preguntas abiertas		1	2	3
				tratamiento presentado para el Diferencial de área.	proceso de tratamiento presentado. Explica el proceso semiótico de tratamiento presentado para el campo eléctrico
7. Significado del símbolo "." dentro de un proceso semiótico de tratamiento	P2. 10)	Se hace referencia al símbolo del producto punto y dentro de un proceso de tratamiento se pregunta su significado	No aporta ninguna argumentación.	Aporta argumentación. No explica (proceso semiótico de conversión, lenguaje simbólico al lenguaje natural) que hay un producto punto. No reconoce el proceso semiótico de tratamiento presentado. Explica que el punto representa un "por" de multiplicar.	Aporta argumentación. Explica (proceso semiótico de conversión, lenguaje simbólico al lenguaje natural) que hay un producto punto. Reconoce el proceso semiótico de tratamiento presentado. Explica que el punto representa un producto punto y para el ejercicio presentado el ángulo entre las dos cantidades vectoriales es de cero grados.
8. Significados de los procedimientos realizados en el proceso de tratamiento presentado.	P2. 12) 14)	12) Significado del cálculo del diferencial de superficie 14) Interpretación del cálculo realizado con la expresión de flujo eléctrico para este	No aporta ninguna argumentación.	Aporta argumentación. No reconoce y no puede explicar con una argumentación adecuada el proceso de tratamiento involucrado. 12) Señala que	Aporta argumentación. Reconoce y puede explicar con una argumentación adecuada el proceso de tratamiento involucrado. 12) Señala que

Reactivo		Escalamiento		
Número y descripción	Problema y pregunta del examen de preguntas abiertas	1	2	3
	ejemplo.		el área calculada esta sobre todo el cilindro	el área calculada esta sobre el cuerpo del cilindro y
			14) Señala que la solución final del ejercicio da como resultado una cantidad vectorial del campo eléctrico.	explica porque en las tapas es cero. 14) Señala que la solución final del ejercicio da como resultado la magnitud del campo eléctrico.

Con los promedios obtenidos para cada examen, y clasificados para cada grupo, se realizaron pruebas de normalidad, con la intención de realizar la prueba de *t* de *Student* para efectuar una comparación de medias entre los grupos. Como se verá en siguiente capítulo, las distribuciones de los promedios obtenidos no tuvieron una distribución normal, por lo que se optó por una prueba no paramétrica, la prueba U de Mann-Whitney, para realizar una comparación entre medianas de los dos grupos.

Confiabilidad del instrumento. La confiabilidad es el grado de consistencia interna que tiene el instrumento. La consistencia interna se refiere al grado en que los ítems o reactivos que forman parte de una escala se correlacionan entre ellos, esto es, la magnitud en que miden el mismo constructo. Si los puntos que componen una escala teóricamente miden el mismo constructo deben mostrar una alta correlación, es decir, la escala debe mostrar un alto grado de homogeneidad. Para medir la confiabilidad del examen de preguntas abiertas, una vez que se escalaron sus respuestas a través de la rúbrica de la Tabla 5, se utilizó el cálculo del coeficiente de alfa de *Cronbach*, como estimador de la consistencia interna de los ítems (el cálculo de este coeficiente se muestra en el siguiente capítulo). Cuanto más cercano esté el valor del alfa de *Cronbach* a 1, mayor es la consistencia interna de los ítems que componen el instrumento de medida. Al interpretarse como un coeficiente de correlación, no existe un acuerdo generalizado sobre cuál debe ser el valor a partir del cual pueda considerarse una escala como fiable. George y Mallery (1995) indican que si el alfa de *Cronbach* es mayor que 0.9, el instrumento de medición es excelente; en el intervalo 0.9 - 0.8, el instrumento es bueno; entre 0.8 - 0.7, el instrumento es

aceptable; en el intervalo 0.7 - 0.6, el instrumento es débil; entre 0.6 - 0.5, el instrumento es pobre; y si es menor que 0.5, no es aceptable.

Validación de jueces. Se le invito a participar a un profesor- investigador, y que fuera experto en el tema de Electricidad y Magnetismo, a analizar las respuestas obtenidas de 20 exámenes del instrumento de preguntas abierta (de los 104 implementados) con la rúbrica de la Tabla 5. Se realizó una comparación entre los resultados obtenidos por el experto y los que se tenían realizados por la autora de este estudio. En esa comparación se midió el índice de correlación para cada reactivo. El índice de correlación oscila entre valores -1 y 1. Si el índice de correlación es igual a 1 indica una correlación alta positiva perfecta, el índice indica una dependencia total entre las dos variables denominada relación directa: cuando una de ellas aumenta, la otra también lo hace en proporción constante. Si el índice de correlación es entre 0 y 1, existe una correlación positiva. Si el índice de correlación es igual a cero, no existe relación lineal. Pero esto no necesariamente implica que las variables son independientes: pueden existir todavía relaciones no lineales entre las dos variables. Si el índice de correlación está entre -1 y 0 existe una correlación negativa. Si el índice de correlación es igual a -1, existe una correlación negativa perfecta. El índice indica una dependencia total entre las dos variables llamada relación inversa: cuando una de ellas aumenta, la otra disminuye en proporción constante.

Validez de contenido. Hernández et al. (2006, p.278) menciona “la validez de contenido se refiere al grado en que un instrumento refleja un dominio específico de contenido de lo que se mide”. Para obtener la validación de contenido del instrumento de preguntas abiertas se sometió a juicio de tres expertos, uno del área de

Matemáticas y dos del área de Física. Se les explicó por separado que el instrumento estaba dirigido a buscar evidencias de aprendizaje con significado en las respuestas que dieran los estudiantes a través de procesos de conversión semiótica (del lenguaje natural al lenguaje simbólico), esto es, que a través de sus respuestas se pudiera obtener los significados asociados que los estudiantes tienen de cada uno de los símbolos de la expresión de flujo eléctrico.

Se les comunicó que su participación consistía en juzgar la “bondad” de los reactivos del instrumento, en términos de la relevancia o congruencia de los reactivos con el universo de contenido, la claridad en la redacción, la tendenciosidad o sesgo en la formulación de reactivos. A cada juez se le entregó un instrumento de validación para los reactivos del instrumento (ver Apéndice H) en el cual se recogió la información de cada experto.

Finalmente, se analizaron los instrumentos de validación entregados por cada experto y se tomaron las siguientes decisiones: los reactivos con un 100 por ciento de coincidencia favorable entre los jueces (los reactivos son congruentes, están escritos claramente y no son tendenciosos) quedaron incluido en el instrumento; los reactivos donde hubo un 100 por ciento de coincidencia desfavorable entre los jueces, quedan excluidos del instrumento; y los reactivos donde sólo hay coincidencia parcial entre los jueces fueron revisados y reformulados.

Estrategias de análisis para la entrevista semi-estructurada. Para analizar los resultados obtenidos de la entrevista semi-estructurada se utilizó la aplicación Excel de Microsoft® y un procesador de texto. En ella se colocaron las transcripciones de la entrevista para identificar los datos significativos que

complementan la información obtenida con el test de preguntas abiertas. Esto es, el análisis de este instrumento se realizó para profundizar en las respuestas obtenidas de la aplicación del instrumento de preguntas abiertas (Merriam, 1998).

Estrategias de análisis de contenido de los libros de texto de la Física escolar. Para analizar los resultados obtenidos del análisis descriptivo de los libros de texto de la Física escolar se utilizó el proceso de análisis de contenido establecido por Ruiz (1996). Ruiz (1996) propone que una vez determinado el tema de análisis (en este caso, es cómo aparece el concepto de flujo eléctrico), se determinen las reglas de codificación. La codificación es un proceso por el que los datos brutos se transforman sistemáticamente en unidades que permiten una descripción precisa de las características de su contenido (Bardín, 1996).

Los datos obtenidos de este análisis de contenido están encaminados a cubrir uno de los objetivos de investigación que es identificar las diferencias teóricas de los acercamientos a la enseñanza del concepto de flujo de un campo eléctrico. Debido a esto, se buscó codificar cómo es presentado el concepto de flujo de un campo eléctrico en su forma cualitativa y en su forma matemática. Posterior a la codificación, se realizaron las categorías correspondientes (Ruiz, 1996).

La categorización según Bardín (1996, p. 90), “es una operación de clasificación de elementos constitutivos de un conjunto por diferenciación, tras la agrupación por analogía”. Para el análisis de categorías se analizó la presencia o ausencia de los elementos del fragmento del texto el que se muestra en relación con el concepto de flujo de un campo eléctrico. Esta ausencia o presencia estará bajo el

marco del uso de analogías adecuadas y el marco de la Teoría de la Transposición Didáctica en el capítulo 2.

Estrategias de análisis para la observación participante en el curso de Física III y en el M3DI. Para analizar los resultados obtenidos de la observación participante se utilizó el proceso establecido por Hernández, Fernández y Baptista (2006). Los autores mencionan que se deben “seleccionar las unidades de análisis (de acuerdo con los objetivos de investigación)” (p. 589). En esta investigación se eligieron dos cursos que van de acuerdo con los objetivos de investigación. En ellos se observó en general: el ambiente físico, el ambiente social y humano, las actividades (individuales y colectivas), los hechos relevantes (Hernández, Fernández y Baptista, 2006) y se llevó a través de una rejilla de control (Apéndice E). Posteriormente, el análisis de la observación se centró en cómo se introdujo el concepto de flujo de un campo eléctrico en cada curso respectivamente. Finalmente, se estableció como unidades de análisis: forma de abordar el tema de la introducción del concepto de flujo de un campo eléctrico; participación de los alumnos; contexto de la actividad, diseño de la actividad, los apoyos que se utilizaron, el lenguaje simbólico y natural empleado para la construcción del concepto e interacción de los estudiantes con el tema.

Estrategia para la validez de los resultados obtenidos. El proceso de triangulación es una estrategia para mejorar la validez de los resultados de la investigación. Triangular significa dar un apoyo a un resultado, mostrando que un determinado resultado (obtenido por ejemplo en una entrevista) coincide con otro resultado obtenido en observaciones, o en otra entrevista con otra persona. Para dar

validez al análisis de los datos obtenidos de esta investigación se utiliza la estrategia de triangulación de información desde la cual se identifican las coincidencias y las diferencias presentes en cada uno de los instrumentos de recolección de información utilizados.

En este capítulo se expuso la metodología que usó en esta investigación. En primera instancia se mencionaron las razones para utilizar una metodología mixta. En segunda se describió: el contexto sociodemográfico, la población y muestra, los instrumentos, los participantes, los procedimientos y las estrategias para analizar los datos. Además, se precisaron las características de cada instrumento para recolectar la información. En tercera, se presentó el análisis y la discusión de resultados derivados de la implementación piloto del examen de preguntas abiertas. En el siguiente capítulo se expone el análisis y la discusión de resultados de los resultados obtenidos.

Capítulo 4. Análisis y discusión de resultados

En esta sección se presenta el análisis y discusión de los resultados obtenidos en el estudio. Está dividida en seis apartados. En el primer, segundo y tercer apartado se muestra el análisis y la interpretación de los resultados obtenidos a través del examen de preguntas abiertas y de los resultados de las entrevistas realizadas. Con estos apartados se cubre el primer objetivo particular de esta tesis. En el cuarto, quinto y sexto apartado se presenta el análisis y la interpretación de los resultados obtenidos del análisis de contenido de libros de texto de la Física escolar y de los resultados de las observaciones realizadas al grupo de GM3DI y de Física III. Con estos apartados se cubre el segundo objetivo particular de esta tesis.

Análisis de las respuestas obtenidas del examen de preguntas abiertas.

El análisis de los datos obtenidos de las implementaciones del examen de preguntas abiertas, intenta cubrir el primer objetivo particular de esta investigación. Esto es, identificar si hay diferencias significativas que se presentan como muestras de aprendizajes con significado logrados en los estudiantes, en cuanto al aprendizaje del concepto de flujo del campo eléctrico se refiere, al llevar la propuesta didáctica integral. Como se mencionó en la sección de metodología, este análisis se realiza siguiendo el procedimiento de codificación establecido por Hernández Sampieri et al. (2006).

A continuación se presenta el análisis de las respuestas obtenidas para cada uno de los reactivos del examen de preguntas abiertas. También se realiza una comparación con los resultados obtenidos en estudios previos.

Descripción y análisis de los porcentajes de patrones de respuestas encontradas del examen de preguntas abiertas. La aplicación del instrumento de preguntas abiertas se llevó a cabo durante un periodo de tres semanas. Los participantes fueron 104 en total, 52 alumnos que hubieran llevado el curso de Matemáticas para ingeniería con el DI (GM3DI), y 52 alumnos que no (GM3T); y que estaban cursando Electricidad y Magnetismo (alumnos inscritos en carreras de ingeniería de tercer a quinto semestre).

En el primer set (de la 1 a la 7) del examen de preguntas abiertas, se cuestionó el significado de los símbolos involucrados en la Ley de Gauss $\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$ (ver Apéndice B). Las respuestas de esta pregunta, se agrupan en primera instancia revisando el proceso semiótico de conversión (lenguaje simbólico al lenguaje natural) que se da para cada uno de los elementos que conforman la expresión matemática de la Ley de Gauss. La categorización se realizó de acuerdo a los patrones de respuesta encontrados (ver Apéndice G) para cada pregunta (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). A continuación se presenta un análisis de las respuestas encontradas para este examen.

Para cada pregunta se realiza una prueba de hipótesis para las tablas de contingencia generadas con el objetivo de probar si las diferencias entre las respuestas obtenidas para cada uno de los dos grupos son estadísticamente

significativas. Las hipótesis estadísticas que se utilizan para este análisis son las siguientes:

H_0 : Las respuestas obtenidas en cada reactivo son independientes del grupo al que pertenece el estudiante.

H_1 : Las respuestas obtenidas en cada reactivo dependen del grupo al que pertenece el estudiante.

En cada tabla de contingencia se usó un nivel de significancia de 5%. El nivel de significancia se interpreta como la probabilidad de error de la prueba para señalar que sí hay diferencia significativa cuando no la hay. Se utiliza el estadístico χ^2 con 2 grados de libertad (número de renglones – 1) (número de columnas – 1).

La Tabla 6 muestra las categorías encontradas para la respuesta del significado del símbolo de flujo eléctrico Φ que son las siguientes: a) es el flujo eléctrico (31.73%); b) es el número de líneas del campo eléctrico que pasan por la superficie gaussiana (11.64%); c) es la cantidad de campo eléctrico que atraviesa una superficie gaussiana (56.73%). En la primera categoría se puede observar que sólo se le está dando lectura al símbolo de flujo eléctrico Φ ; en la segunda se puede notar que hay un significado asociado a este símbolo (proceso semiótico de conversión), en particular, se le está dando un significado cuya fuente u origen está en el libro de texto de física escolar (Serway y Beichner, 2008); y en la tercera también se presenta un significado asociado a este símbolo (proceso semiótico de conversión), este significado también está dado en los libros de textos de la física escolar, pero a

diferencia del anterior no hace referencia a las líneas de campo, si no se expresa como un flujo.

La Tabla 6 compara las respuestas en los dos grupos considerados. Se realizó la prueba estadística de independencia para esta tabla de contingencia. El estadístico que se ha utilizado en esta prueba de hipótesis es χ^2 . Para este caso su valor es de 6.652; siendo su valor crítico de $\chi_{2,05}^2 = 5.992$. Por lo cual χ^2 muestral es mayor al teórico ($\chi_{calc}^2 > Valor\ crítico$) entonces se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa, esto es, con un nivel de significancia de 5%, se concluye que la respuesta dada en este reactivo por los estudiantes depende del grupo al que pertenece y las diferencias observadas entre los dos grupos no se deben al azar.

Tabla 6

Categorías de las respuestas encontradas del significado de flujo eléctrico

Categorías encontradas del significado de flujo eléctrico Φ_E	GM3DI	GM3T	Total de respuestas del significado de flujo eléctrico Φ_E
Flujo eléctrico (Lectura)	12 (11.54%)	21 (20.19%)	33 (31.73%)
Es el número de líneas del campo eléctrico que pasan por la superficie gaussiana (Proceso de conversión semiótico)	4 (3.85%)	8 (7.69%)	12 (11.54%)
Es la cantidad de campo eléctrico que atraviesa una superficie gaussiana (Proceso de conversión semiótico)	36 (34.62%)	23 (22.12%)	59 (56.73%)

La Tabla 7 muestra las categorías encontradas para la respuesta del significado del símbolo del campo eléctrico E que son las siguientes: a) representa las líneas del campo eléctrico (9.62%); b) es el campo eléctrico que atraviesa la superficie gaussiana y no se reconoce que es vectorial (42.31%); c) Es el Campo eléctrico que atraviesa la superficie gaussiana y se reconoce que es vectorial (48.08%). En la primera categoría se puede observar que sólo se le está dando lectura al símbolo E , no se hace alusión o reconocimiento de que es vectorial y utiliza la definición del libro de texto; en la segunda si se describe en términos del campo pero no se reconoce que es vectorial (proceso semiótico de conversión); en la tercera se puede notar que hay un significado asociado a este símbolo (proceso semiótico de conversión) debido a que se describe como un campo y también se reconoce que es vectorial. El estadístico que se ha utilizado en esta prueba de hipótesis es χ^2 . Para este caso su valor es de 9.992; siendo su valor crítico de $\chi^2_{2,05} = 5.992$. Por lo cual χ^2 muestral es mayor al teórico ($\chi^2_{calc} > Valor\ crítico$) entonces se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa, esto es, con un nivel de significancia de 5%, se concluye que la respuesta dada en este reactivo por los estudiantes depende del grupo al que pertenece y las diferencias observadas entre los dos grupos no se deben al azar.

Tabla 7

Categorías de las respuestas encontradas del significado de campo eléctrico E

Categorías encontradas del significado encontradas del significado de E	GM3DI	GM3T	Total de respuestas del significado campo eléctrico E
Representa las líneas del campo eléctrico (Significado asociado al libro de texto)	3 (2.88%)	7 (6.73%)	10 (9.62%)
Es el Campo eléctrico que atraviesa la superficie gaussiana y no se reconoce que es vectorial (Proceso de conversión semiótico)	16 (15.38%)	28 (26.92%)	44 (45.65%)
Es el Campo eléctrico que atraviesa la superficie gaussiana y se reconoce que es vectorial (Proceso de conversión semiótico)	33(31.73%)	17 (16.35%)	50 (48.08 %)

La Tabla 8 muestra las categorías encontradas para la respuesta del significado del símbolo del diferencial de área $d\mathbf{A}$ que son las siguientes: a) diferencial de área (9.62%); b) es el Campo eléctrico que atraviesa la superficie gaussiana y no se reconoce que es vectorial (46.15%); c) es un pedacito infinitesimal de la superficie gaussiana y se reconoce que es vectorial (44.23%). En la primera categoría se puede observar que sólo se le está dando lectura al símbolo diferencial de área $d\mathbf{A}$, incluso no se hace alusión o reconocimiento de que es vectorial; en la segunda si se reconoce que es un diferencial de área y que es infinitamente pequeño, pero no se hace alusión a que es una cantidad vectorial; en la tercera se puede notar que hay un significado asociado a este símbolo (proceso semiótico de conversión) y hay un reconocimiento de que es vectorial. El estadístico que se ha utilizado en esta prueba de hipótesis es χ^2 , para este caso su valor es de 9.863; siendo su valor crítico de $X_{2,05}^2 = 5.992$. Por lo cual $X^2_{muestral}$ es mayor al teórico ($X^2_{calc} > Valor\ crítico$) entonces se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa, esto es, también para esta pregunta concluimos que la respuesta dada en este reactivo por los estudiantes depende del grupo al que pertenece.

Tabla 8

Categorías de las respuestas encontradas del significado de: diferencial de área dA

Categorías encontradas del significado del diferencial de área dA	GM3DI	GM3T	Total de respuestas del significado del diferencial de área dA
Diferencial de área (Lectura)	1 (0.96%)	9 (8.65%)	10 (9.62 %)
Es un pedacito infinitesimal de la superficie gaussiana, en el cual se asume el campo constante (Proceso de conversión semiótico) y se reconoce que es vectorial	22 (21.15%)	26 (25%)	48 (46.15 %)
Es un pedacito infinitesimal de la superficie gaussiana y no se reconoce que es vectorial (Lectura)	29 (27.88 %)	17 (16.35%)	46 (44.23%)

La Tabla 9 muestra las categorías encontradas para la respuesta del significado del símbolo $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ que son las siguientes: a) es el campo eléctrico “por” el diferencial de área (9.62%); b) es el campo eléctrico “producto punto” el diferencial de área (41.35%); c) diferencial de flujo (49.04%). En la primera categoría se puede observar que sólo se le está dando lectura al símbolo $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$, no se hace alusión o reconocimiento de son dos cantidades vectoriales y que el producto punto entre ellas es el diferencial de flujo esta, es decir, esta expresión se interpreta como el campo eléctrico “por” diferencial de área (multiplicación entre campo eléctrico y diferencial de área). En la segunda se puede notar que hay un significado asociado a esta expresión (proceso semiótico de conversión) donde hay un reconocimiento del producto punto entre dos cantidades vectoriales y a su vez, lo que está dentro de la integral es un diferencial de flujo. El estadístico de prueba χ^2 , calculado es de 26.789; siendo su valor crítico de $\chi^2_{2,05} = 5.992$. Por lo cual χ^2 estimado es mayor al teórico ($\chi^2_{calc} > Valor\ crítico$) entonces se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa, esto es, la respuesta dada en este reactivo por los estudiantes depende de a cuál de los dos grupos pertenecen.

Tabla 9

Categorías de las respuestas encontradas del significado del símbolo $E \cdot dA$

Categorías encontradas del significado encontradas del significado de $E \cdot dA$	GM3DI	GM3T	Total de respuestas del significado del diferencial de área $E \cdot dA$
Es campo eléctrico “por” diferencia de área(Lectura)	5 (4.81%)	5 (4.81%)	10 (9.62 %)
Es campo eléctrico “producto punto” diferencia de área (Proceso de conversión semiótico)	9 (8.65%)	34 (32.69%)	43 (41.35 %)
Es diferencial de flujo (Proceso de conversión semiótico)	38 (36.54 %)	13 (12.50%)	51 (49.04 %)

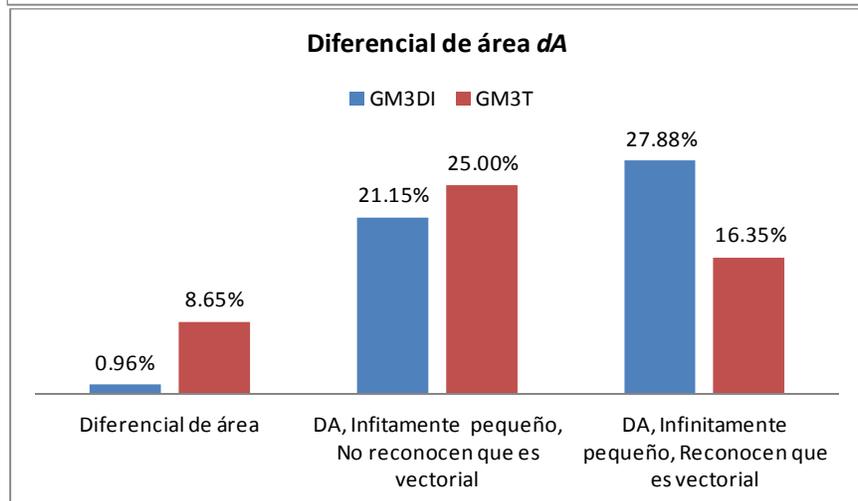
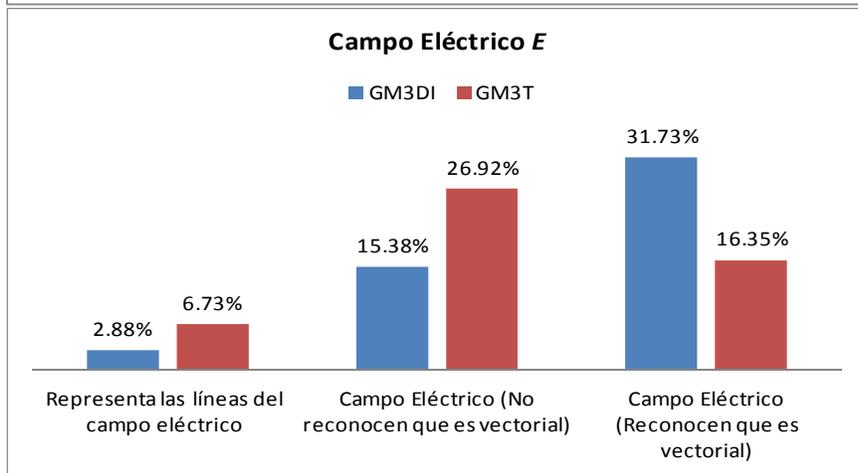
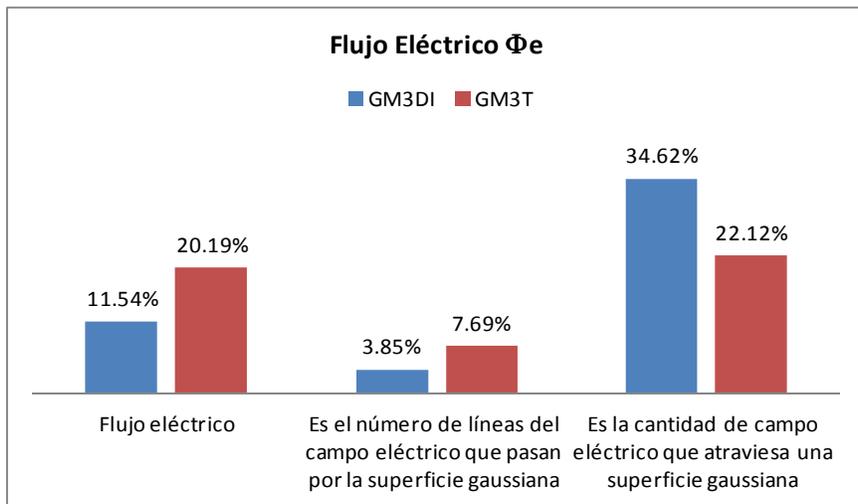
La Tabla 10 muestra tres categorizaciones para la respuesta del significado de los símbolos de la integral cerrada del producto punto entre el campo eléctrico y el diferencial de área. $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ que son las siguientes: a) integral del campo eléctrico “por” el diferencial de área (51.92%); b) “integral” del campo eléctrico producto punto el diferencial de área (13.46%), c) suma de todos los diferenciales de flujo eléctrico que pasa a través de toda la superficie (34.62%); En la primera categoría se puede observar que sólo se le está dando lectura al símbolo $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$, no se hace alusión o reconocimiento de son dos cantidades vectoriales y que el producto punto entre ellas es el diferencial de flujo esta, es decir, esta expresión se interpreta como la integral del campo eléctrico “por” diferencial de área (multiplicación entre campo eléctrico y diferencial de área). En la segunda, se puede notar que hay un significado asociado a esta expresión (proceso semiótico de conversión) donde hay un reconocimiento del producto punto entre dos cantidades vectoriales y a su vez, lo que está la integral se interpreta como una antiderivada a realizar. En la tercera, se puede notar que hay un significado asociado a esta expresión (proceso semiótico de conversión) donde hay un reconocimiento del producto punto entre dos cantidades vectoriales y a su vez, lo que está la integral se interpreta como una suma de diferenciales de flujo. En esta ocasión el estadístico de prueba χ^2 tuvo un valor calculado de 21.137; siendo su valor crítico de $\chi^2_{2,05} = 5.992$. Por lo cual χ^2 estimado mayor al crítico ($\chi^2_{calc} > Valor\ crítico$) entonces se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa, esto es, hay una tendencia por parte de los estudiantes a contestar diferente dependiendo del grupo al que pertenecen.

Tabla 10

Categorías de las respuestas encontradas del significado del símbolo $\oiint E \cdot dA$

Categorías encontradas del significado encontradas del significado de $\oiint E \cdot dA$	GM3DI	GM3T	Total de respuestas del significado del diferencial de área $\oiint E \cdot dA$
Es la integral del campo eléctrico “por” diferencia de área(Lectura)	6 (5.77%)	8 (7.69%)	14 (13.46 %)
Es la integral del campo eléctrico “producto punto” diferencial de área (Proceso de conversión semiótico)	17 (16.35%)	37 (35.58%)	54 (51.92 %)
Es la suma de diferenciales de flujo (Proceso de conversión semiótico)	29 (27.88 %)	7 (6.73%)	36 (34.62 %)

A continuación, en la Figura 2, se muestra una comparación gráfica de los resultados obtenidos a partir de este examen de preguntas abiertas para las categorías encontradas.



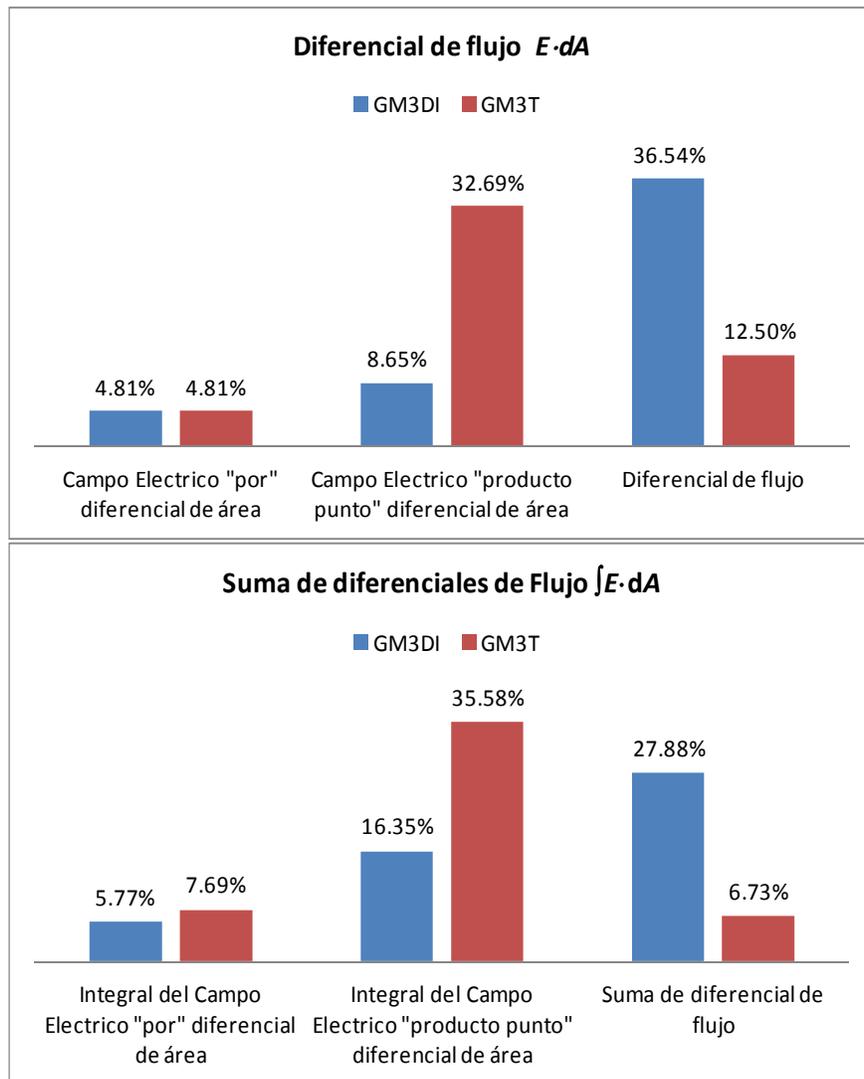


Figura 2. Comparación gráfica de las respuestas encontradas para cada reactivo entre el GM3DI y GM3T.

Para la primera respuesta de derecha a izquierda para todos los gráficos los alumnos muestran evidencia de que lo que están realizando es un proceso de lectura del símbolo indicado. Para la respuesta de en medio, los estudiantes realizan un proceso de conversión y asocian un significado al símbolo cuestionado, este significado asociado está ligado, en algunos casos (como se verá más adelante), a definiciones expuestas en el libro de texto de la Física escolar. Para la tercera respuesta hay evidencia de un proceso semiótico de conversión, aunado a que se describen las características de cada símbolo involucrado en la expresión del flujo.

Como se puede apreciar en la Figura 2, para la respuesta 3 de todas las gráficas, el porcentaje de respuestas encontradas del GM3DI es mayor con respecto al GM3T, y el porcentaje de respuesta 1 de la mayor parte de los gráficos (donde sólo hay evidencia de un proceso de lectura) es menor el porcentaje de respuestas encontradas del GM3DI es mayor con respecto al GM3T. Para todos los resultados obtenidos el estadístico χ^2 muestral fue superior al valor teórico con un nivel de significancia de 0.05, por lo se concluye que el tipo de respuesta es dependiente del grupo. A continuación, se analizan el promedio de las calificaciones de las respuestas de las preguntas del instrumento aplicado.

Basándose en la rúbrica presentada en el capítulo anterior (ver Tabla 5) se generó una escala de *Likert* para los reactivos de 1 al 8 mencionados en la rúbrica, como se muestran en la Tabla 11. Como se mencionó en el capítulo anterior, las asignaciones de la escala fueron: 1 para cuando se da evidencia de un proceso muy bajo de asociación de significado (o nulo); 2 para cuando se da evidencia de un proceso medio de asociación de significado; 3 para cuando se da evidencia de un

proceso completo de asociación de significado. Así entre mayor sea el puntaje obtenido hay mayor evidencia de aprendizaje con significados, esto es, hay evidencia de que se da un proceso de conversión semiótica del lenguaje simbólico al lenguaje natural alrededor del concepto de flujo de un campo y hay evidencias de explicaciones a los procesos semiótico de tratamiento presentados. Por otro lado, los puntajes más bajos revelan menor evidencia de aprendizaje con significados, esto es, hay poca evidencia de que se da un proceso de conversión semiótica del lenguaje simbólico al lenguaje natural alrededor del concepto de flujo de un campo y poca evidencia de explicaciones a los procesos semióticos de tratamiento presentados. En la Tabla 11 se muestran estos valores.

Tabla 11.
Reactivos codificados en la escala de Likert de acuerdo con la rúbrica propuesta.

Alumno	Grupo	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	Total	
1	GM3DI	1	2	3	2	3	2	3	3	3	21
2	GM3DI	1	3	3	3	3	3	3	3	3	24
3	GM3DI	1	3	3	3	3	3	3	3	3	24
4	GM3DI	1	3	3	3	3	2	3	3	2	22
5	GM3DI	1	3	3	3	3	3	3	3	3	24
6	GM3DI	1	3	3	3	2	3	3	2	3	22
7	GM3DI	1	3	3	3	3	3	3	3	3	24
8	GM3DI	1	3	3	3	2	3	3	3	3	23
9	GM3DI	1	3	3	3	3	3	3	3	3	24
10	GM3DI	1	1	2	2	3	3	2	3	3	19
11	GM3DI	1	1	2	2	3	2	1	1	2	14
12	GM3DI	1	3	2	2	3	3	1	1	2	17
13	GM3DI	1	1	1	2	3	2	1	1	1	12
14	GM3DI	1	3	3	3	2	3	3	3	3	23
15	GM3DI	1	3	3	3	3	2	2	3	2	21
16	GM3DI	1	3	1	2	1	1	1	1	1	11
17	GM3DI	1	3	1	2	1	1	1	1	1	11
18	GM3DI	1	1	2	3	3	1	1	2	2	15
19	GM3DI	1	3	2	2	3	2	1	2	2	17
20	GM3DI	1	3	3	3	3	3	3	3	1	22
21	GM3DI	1	1	2	2	3	3	2	3	2	18
22	GM3DI	1	3	2	2	2	2	2	3	2	18
23	GM3DI	1	3	3	3	1	2	3	3	3	21
24	GM3DI	1	1	2	2	1	1	1	1	2	11
25	GM3DI	1	3	3	3	2	2	3	3	3	22
26	GM3DI	1	3	2	3	3	3	3	2	3	22

Alumno	Grupo	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	Total	
27	GM3DI	1	3	3	2	3	1	2	3	2	19
28	GM3DI	1	3	3	2	3	3	2	3	2	21
29	GM3DI	1	3	2	2	3	2	2	1	1	16
30	GM3DI	1	1	2	2	2	3	3	3	2	18
31	GM3DI	1	3	3	3	3	3	3	3	2	23
32	GM3DI	1	2	2	3	3	3	3	3	3	22
33	GM3DI	1	2	3	3	3	2	3	3	3	22
34	GM3DI	1	3	3	3	3	2	3	3	2	22
35	GM3DI	1	3	3	3	3	3	3	3	1	22
36	GM3DI	1	1	2	2	2	2	2	2	3	16
37	GM3DI	1	3	2	2	1	2	1	1	2	14
38	GM3DI	1	1	2	2	3	3	1	1	1	14
39	GM3DI	1	3	3	3	3	2	3	3	2	22
40	GM3DI	1	3	3	3	3	3	3	3	3	24
41	GM3DI	1	2	3	3	3	3	3	3	3	23
42	GM3DI	1	3	3	3	3	3	3	3	3	24
43	GM3DI	1	3	3	2	3	2	3	3	3	22
44	GM3DI	1	3	2	2	3	1	2	1	3	17
45	GM3DI	1	3	3	3	3	3	3	1	3	22
46	GM3DI	1	1	3	3	3	3	3	2	3	21
47	GM3DI	1	3	3	3	3	3	3	3	2	23
48	GM3DI	1	1	3	3	3	2	3	3	2	20
49	GM3DI	1	3	3	3	3	3	3	3	2	23
50	GM3DI	1	3	3	2	3	3	2	2	3	21
51	GM3DI	1	3	3	2	2	3	2	2	3	20
52	GM3DI	1	1	3	1	2	3	2	1	1	14
53	GM3T	2	3	3	3	3	2	3	3	1	21
54	GM3T	2	3	3	3	2	2	3	3	3	22
55	GM3T	2	1	2	1	2	3	2	2	1	14
56	GM3T	2	2	2	1	2	2	2	1	2	14

Alumno	Grupo	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	Total
57	GM3T	2	3	3	2	2	2	3	2	19
58	GM3T	2	3	3	3	3	2	3	3	23
59	GM3T	2	2	1	1	2	2	1	2	12
60	GM3T	2	1	1	1	2	2	1	2	12
61	GM3T	2	3	2	2	2	2	2	2	17
62	GM3T	2	2	2	2	2	2	3	3	17
63	GM3T	2	2	3	2	2	2	2	1	16
64	GM3T	2	1	2	2	2	2	2	1	14
65	GM3T	2	3	3	3	2	2	3	3	22
66	GM3T	2	2	2	3	2	2	2	3	18
67	GM3T	2	3	3	3	2	2	3	3	22
68	GM3T	2	3	3	3	2	2	1	3	18
69	GM3T	2	3	3	3	2	2	2	1	18
70	GM3T	2	3	2	3	2	2	1	2	16
71	GM3T	2	3	2	2	2	2	2	3	19
72	GM3T	2	1	2	2	3	2	1	2	14
73	GM3T	2	1	2	2	2	2	1	2	13
74	GM3T	2	3	1	1	1	1	2	2	12
75	GM3T	2	3	3	3	3	2	3	3	23
76	GM3T	2	3	3	2	2	3	2	3	21
77	GM3T	2	3	2	2	2	2	2	3	18
78	GM3T	2	3	3	2	2	2	3	3	20
79	GM3T	2	3	3	3	2	2	3	3	22
80	GM3T	2	3	3	3	2	2	3	3	22
81	GM3T	2	1	3	3	2	1	2	3	18
82	GM3T	2	1	2	2	2	1	2	3	15
83	GM3T	2	1	2	2	3	2	2	2	16
84	GM3T	2	3	2	2	2	3	2	3	18
85	GM3T	2	1	2	2	1	1	1	1	10
86	GM3T	2	1	2	2	1	2	2	1	12

Alumno	Grupo	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	Total	
87	GM3T	2	3	2	2	2	2	2	2	17	
88	GM3T	2	3	2	2	2	2	2	2	17	
89	GM3T	2	1	2	2	2	1	2	2	13	
90	GM3T	2	1	2	2	2	2	2	2	14	
91	GM3T	2	3	2	2	3	2	2	2	17	
92	GM3T	2	1	3	3	3	3	3	2	3	21
93	GM3T	2	1	2	2	2	2	2	3	1	15
94	GM3T	2	3	2	2	2	2	2	2	2	17
95	GM3T	2	1	2	2	3	2	2	2	2	16
96	GM3T	2	1	2	2	1	1	2	2	1	12
97	GM3T	2	1	2	2	1	1	2	2	2	13
98	GM3T	2	2	2	3	3	2	2	2	2	18
99	GM3T	2	1	2	3	3	3	2	2	2	18
100	GM3T	2	1	1	1	3	2	2	1	1	12
101	GM3T	2	2	1	1	2	2	2	2	2	14
102	GM3T	2	2	1	1	2	3	2	1	2	14
103	GM3T	2	1	1	1	3	1	2	1	1	11
104	GM3T	2	1	3	3	3	3	3	3	3	22

En la columna final de la Tabla 11 se registró la suma total obtenida de todos los reactivos condensados (reactivos del 1 al 8) para cada examen. Esta columna se designó como la calificación obtenida para cada examen. Para cada grupo se realizó su estadística descriptiva correspondiente (ver Tabla 12).

Tabla 12
Medidas descriptivas de las calificaciones del GM3DI y el GM3T

Medida	GM3DI	GM3T
Media	19.75	16.71
Error estándar	0.537	0.494
Mediana	21	17
Moda	22	18
Desviación estándar	3.874	3.566
Varianza	15.014	12.719
Kurtosis	-0.255	-0.997
Skewness	-0.923	0.124
Rango	13	13
Mínimo	11	10
Máximo	24	23
Suma	1027	869
Muestra	52	52

Para cada grupo (GM3DI y GM3T) se exploró si estas calificaciones tenían una distribución normal. Las calificaciones de cada uno de los grupos GM3DI y el GM3T obtuvieron un valor $p < 0.05$ para dos diferentes pruebas de normalidad (ver Tabla 13).

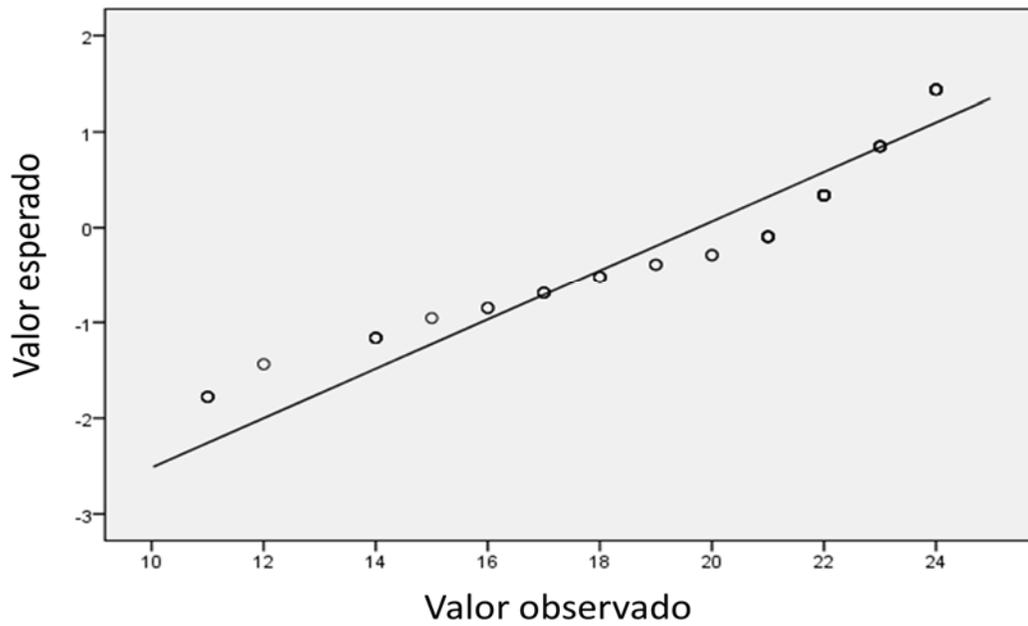
Tabla 13

Prueba de normalidad para las calificaciones de los Grupos M3DI y GM3T.

Grupo	Kolmogorov- Smirnov ^a			Shapiro- Wilk		
	Estadístico	Tamaño de la muestra	Significancia	Estadístico	Tamaño de la muestra	Significancia
GM3DI	0.223	52	.000	.869	52	.000
GM3T	.123	52	.049	.951	52	.033

Además, como se puede observar en la Figura 3 los gráficos Q-Q (gráficos de cuantiles utilizados para probar normalidad) muestran un patrón que no se ajusta a la línea recta. Por el resultado de las pruebas Kolmogorov-Smirnov y Shapiro-Wilk y por los gráficos Q-Q se concluyó que las calificaciones de ambos grupos no se ajustan a una distribución normal. También, en el histograma correspondiente a cada grupo se puede apreciar que los datos obtenidos (las calificaciones) no tienen una distribución normal (ver Figura 4).

Gráfica Normal Q-Q del GM3DI



Gráfica Normal Q-Q del GM3T

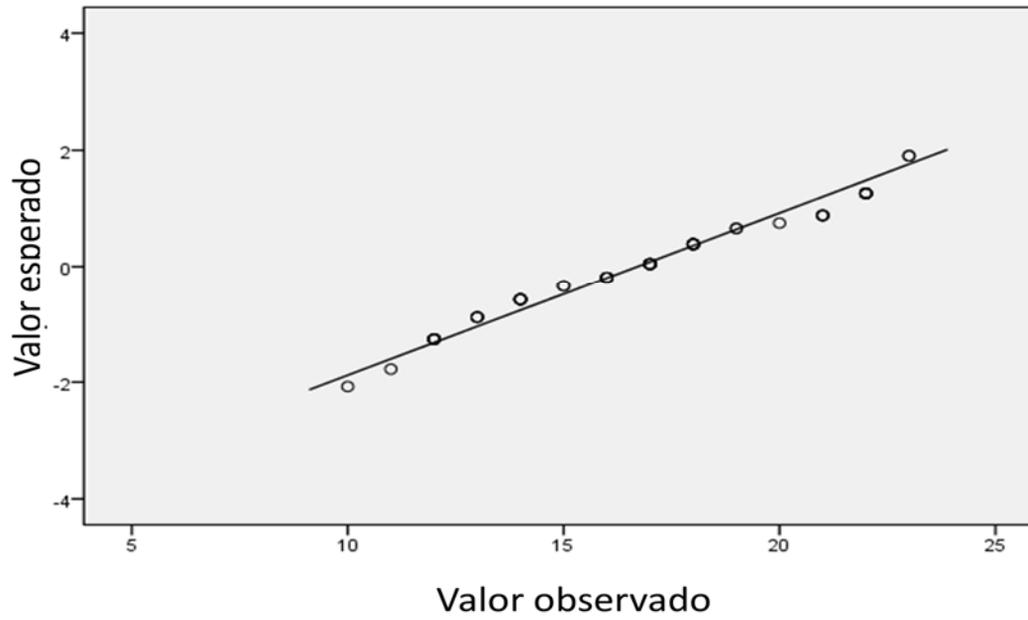


Figura 3. Gráficos Q-Q para las calificaciones de los grupos M3DI y M3T.

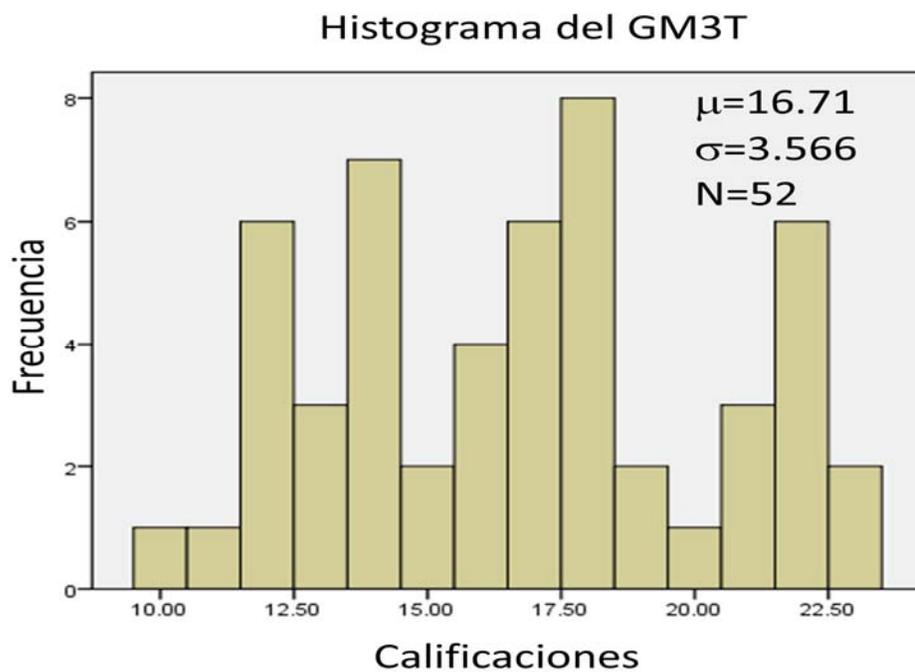
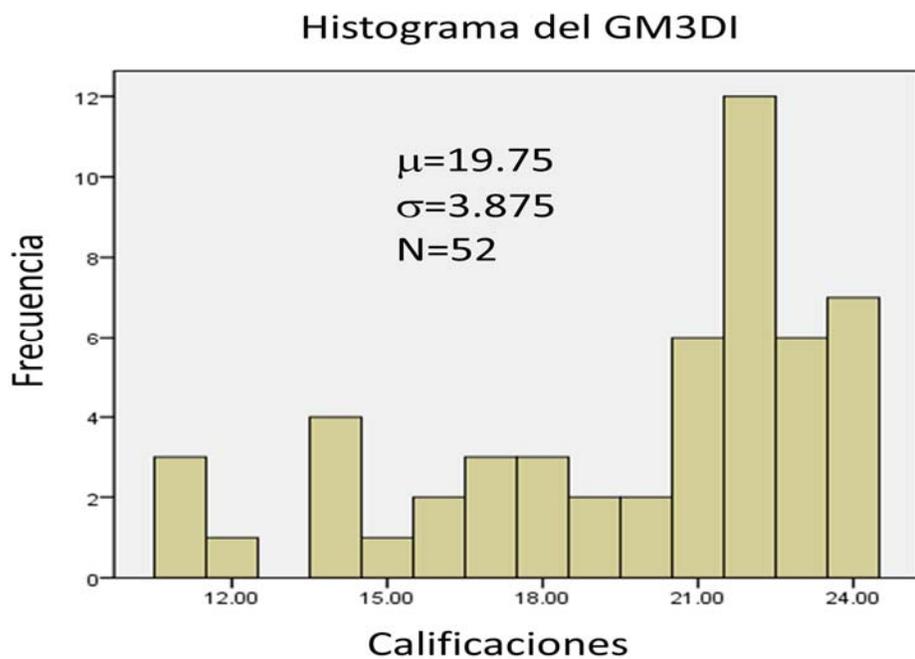


Figura 4. Histogramas de las calificaciones de los grupos M3DI y M3T.

Como los datos obtenidos (las calificaciones) no siguen una distribución normal no se puede emplear una prueba paramétrica (como la t de *Student*). Para comparar si las calificaciones obtenidas son diferentes en ambos grupos se utilizó una prueba no paramétrica. La prueba no paramétrica utilizada fue la Mann-Whitney U. En esta prueba; la distribución de la frecuencia no tiene como requisito ser normal (como es el caso de estos datos). Esta prueba es el equivalente no paramétrico de la prueba t de *Student* para la comparación de medias de dos muestras independientes.

En este caso tenemos muestras independientes, en contraposición al concepto de muestras pareadas, donde el individuo 1 de una muestra forma una pareja con el individuo 1 de la otra muestra (o bien, se trata del mismo individuo en dos momentos en el tiempo) (Devore, 1998). En esta prueba la hipótesis, más que comparar medias directamente, plantea la comparación de éstas a través de la comparación de rangos y se utiliza para determinar que la diferencia no se debe al azar, sino que efectivamente tenemos dos grupos que se comportan de manera diferente ante estos reactivos.

Las hipótesis para esta prueba son las siguientes:

H_0 : Ambos promedios poblacionales son iguales.

H_a : El promedio de calificaciones del GM3DI es significativamente diferente que el promedio de calificaciones del grupo GM3T.

Si $p \leq 0.05$ se rechaza H_0 .

Los resultados de la prueba de Mann-Whitney U para los datos obtenidos se puede observar en la Tabla 15 y se aprecia que el valor de significancia $p < 0.05$ (de hecho $p < 0.001$), por lo que se rechaza la hipótesis nula. Por lo cual, se tiene evidencia de que la mediana de las calificaciones obtenidas por el GM3DI es mayor y

difiere significativamente de la mediana de las calificaciones obtenidas por el grupo GM3T (ver Tabla 14, Tabla 15 y Figura 5). Esta diferencia puede apreciarse en el diagrama de caja de la Figura 5. Con esta prueba se cubre el primer objetivo particular de la investigación, se rechaza la hipótesis nula expuesta en el capítulo 1, y se acepta la hipótesis alternativa.

Tabla 14

Prueba no paramétrica Mann-Whitney U para comparar las calificaciones entre los grupos M3DI y M3T (Rangos)

Grupo	Rangos		
	N	Media de rangos	Suma de rangos
GM3DI	52	64.22	3339.50
GM3T	52	40.78	2120.50
Total	104		

Tabla 15

Prueba no paramétrica Mann-Whitney U para comparar las calificaciones entre los grupos M3DI y M3T

	Prueba de estadísticos
Mann- Whitney U	742.500
Wilcoxon W	2120.500
Z	-3.983
Significancia	0.000

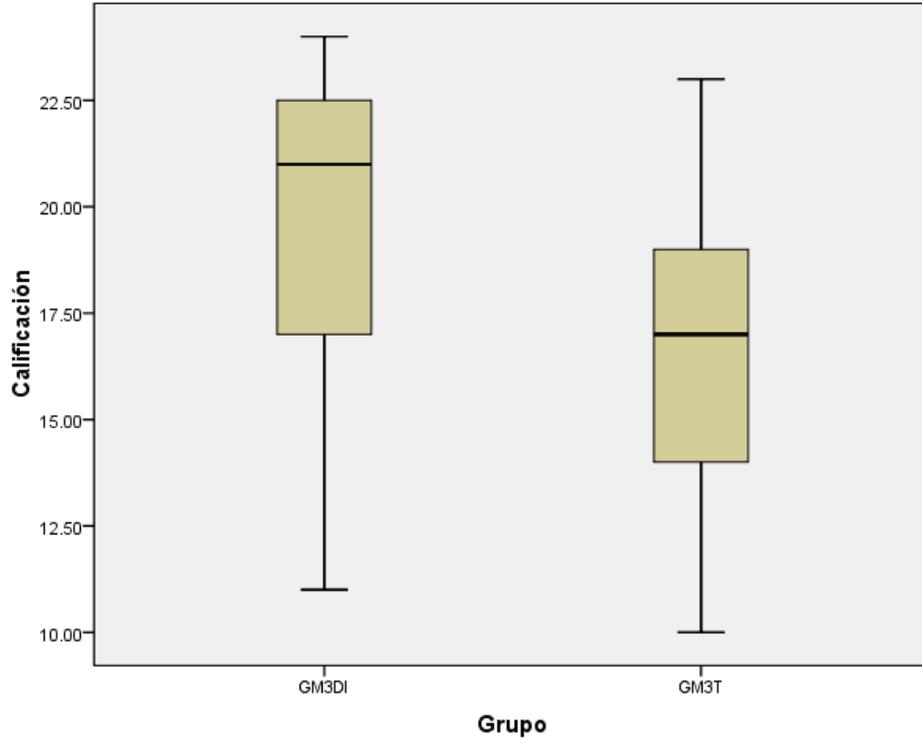


Figura 5. Diagrama de caja de las calificaciones obtenidas por los grupos M3DI y M3T.

Validación de jueces para el instrumento de preguntas abiertas. Para validar la escala asignada a cada reactivo se solicitó la colaboración de un profesor-investigador con conocimientos del curso de Electricidad y Magnetismo. Se le preguntó al profesor investigador si quería participar como un validador externo. Una vez obtenido su consentimiento se seleccionaron 20 exámenes de los 104 que se tenían y se le entregaron junto con la rúbrica y un archivo de Excel donde pudiera generar una tabla (ver Apéndice I). El experto generó el escalamiento a los exámenes dados de acuerdo a la rúbrica dada y a su objetividad. A partir de ese ejercicio se obtuvieron los datos que para ser contrastados con los obtenidos por la autora de esta investigación (ver Apéndice I)

En la Tabla 16 se expone el índice de correlación calculado para cada reactivo. El índice de correlación puede oscilar entre valores -1 y 1. Si el índice de correlación es igual a 1 indica una correlación alta positiva perfecta, el índice indica una dependencia total entre las dos variables denominada relación directa: cuando una de ellas aumenta, la otra también lo hace en proporción constante. Si el índice de correlación es entre 0 y 1, existe una correlación positiva. Si el índice de correlación es igual a cero, no existe relación lineal. Pero esto no necesariamente implica que las variables son independientes: pueden existir todavía relaciones no lineales entre las dos variables. Si el índice de correlación está entre -1 y 0 existe una correlación negativa. Si el índice de correlación es igual a -1, existe una correlación negativa perfecta. El índice indica una dependencia total entre las dos variables llamada relación inversa: cuando una de ellas aumenta, la otra disminuye en proporción constante.

El índice de correlación obtenido para cada reactivo en este estudio es positivo y oscila entre valores 0.70 y 0.96, por lo cual se puede considerar que en su conjunto la escala de *Likert* aplicada esta validada por un juez externo.

Tabla 16
Índice de correlación entre cada reactivo

Reactivo	Total de reactivos distintos	Correlación	Tipo
1	1	0.964	Positiva
2	2	0.863	Positiva
3	3	0.701	Positiva
4	1	0.891	Positiva
5	1	0.904	Positiva
6	2	0.935	Positiva
7	1	0.955	Positiva
8	2	0.860	Positiva

Confiabilidad del instrumento. Para medir la confiabilidad del instrumento se utilizó el cálculo del coeficiente de alfa de *Cronbach*, como estimador de la consistencia interna de los reactivos. Para este coeficiente, cuanto más cercano esté el valor del alfa de *Cronbach* a 1, mayor es la consistencia interna de los ítems que componen el instrumento de medida. Al interpretarse como un coeficiente de correlación, no existe un acuerdo generalizado sobre cuál debe ser el valor a partir del cual pueda considerarse una escala como fiable. En este caso se sigue a George y Mallery (1995) quienes indican que si el alfa de *Cronbach* es mayor que 0.9, el instrumento de medición es excelente; en el intervalo 0.9 - 0.8, el instrumento es bueno; entre 0.8 - 0.7, el instrumento es aceptable; en el intervalo 0.7 - 0.6, el instrumento es débil; entre 0.6 - 0.5, el instrumento es pobre; y si es menor que 0.5, no es aceptable.

La Tabla 17 muestra el índice calculado de alfa de *Cronbach* para todo el instrumento. En ella podemos apreciar que el conjunto de reactivos en su totalidad muestra un nivel bueno (alfa de *Cronbach*= 0.83713).

Tabla 17
Alfa de Cronbach calculado para todo el instrumento

Instrumento	Reactivos	Total de preguntas	Alfa de Cronbach	Nivel
Aprendizaje con significado alrededor del concepto de flujo de un campo eléctrico	1-8	14	0.837	Bueno

Validez de contenido. Para obtener la validación de contenido del instrumento de preguntas abiertas se sometió a juicio de tres expertos, uno del área de Matemáticas y dos del área de Física. Se analizaron los instrumentos de validación entregados por cada experto y se tomaron las siguientes decisiones: los reactivos con un 100 por ciento de coincidencia favorable entre los jueces (los reactivos son congruentes, están escritos claramente y no son tendenciosos) quedaron incluido en el instrumento; los reactivos donde hubo un 100 por ciento de coincidencia desfavorable entre los jueces, quedan excluidos del instrumento; y los reactivos donde sólo hay coincidencia parcial entre los jueces fueron revisados y reformulados. Para el instrumento de preguntas abiertas que se muestra en el Apéndice B, se cumple con el 100% de coincidencia favorable entre los jueces.

Análisis y discusión de resultados de la implementación de las entrevistas.

En esta sección se presenta el análisis y discusión de resultados de las entrevistas realizadas. La aplicación de entrevistas se llevó a cabo durante un periodo de tres semanas. Los participantes fueron 6 en total (3 alumnos del grupo GM3DI y 3 del grupo GM3T); y que estaban cursando Electricidad y Magnetismo (alumnos inscritos en carreras de ingeniería de tercer a quinto semestre).

En las entrevistas se indagó si el alumno hace distinción entre el concepto de flujo eléctrico y campo eléctrico (ver Apéndice D). En primera instancia se expone lo que mencionaron los alumnos del flujo eléctrico. Se encontró que los alumnos del GM3T hacen referencia a las líneas del campo eléctrico para poder dar una definición del flujo eléctrico.

Con base en las respuestas que dieron los participantes del GM3T se encontraron tres razonamientos a seguir: argumentación del significado de campo a través de las líneas de campo; argumentación del significado de campo a través de la ecuación de flujo de un campo eléctrico; argumentación del significado de campo a través del concepto de campo vectorial. A continuación se muestra un fragmento de cómo el P1GM3T (participante 1 del GM3T) trata de explicar con palabras el significado de campo:

E: ¿Qué es el flujo eléctrico?

P1GM3T: El flujo se presenta cuando se tiene un campo eléctrico y atraviesa un área, es decir, las líneas del campo eléctrico que atraviesan esa área representan el flujo eléctrico.

En relación a la misma pregunta citada en el fragmento anterior, el P2GM3T (participante 2 del GM3T) menciona: “no sé cómo explicarlo, lo único que recuerdo es a través de esta ecuación se puede calcular el flujo eléctrico” y escribe la siguiente ecuación: $\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$. De esta parte de la entrevista se puede apreciar que el P1GM3T asocia el significado de flujo referente al que viene en un libro de texto de la Física escolar y P2GM3T recurre a definición de flujo a través de la expresión que lo representa sin poder decir más alrededor de ese concepto. Por último, el P3GM3DI (participante 3 del GM3DI) menciona: “es una medida del campo eléctrico que a traviesa un área”.

Cuando se cuestiona a los participantes del GM3T qué significado tienen los elementos de esta ecuación: $\Phi_e = \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$, algunos estudiantes únicamente dan lectura a cada símbolo sin hacer ningún énfasis en que es un producto punto o el

porqué se tiene un diferencial en esa ecuación. Es posible apreciar esta idea en el siguiente dialogo:

E: (después de que se da la respuesta de la pregunta dos), si dA es un diferencial de área, ¿por qué aparece en esta ecuación?

P1GM3T: porque así se define la ecuación para después poder encontrar el área que se pida en el problema.

Estos extractos se presentan como evidencia que los alumnos tienen dificultad para expresar el concepto de flujo eléctrico, esto es, establecer un proceso de conversión semiótico (del lenguaje natural al lenguaje simbólico). Se percibe que recurren a un proceso de memorización para poder dar respuesta a los cuestionamientos realizados. Y en el caso de que puedan explicarlo recurren al concepto de campo vectorial.

En la pregunta 3 de la entrevista se indagó el significado de la expresión $\Phi_e = \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ (ver Apéndice C). Se encontraron dos razonamientos. El primer razonamiento fue que de la muestra del GM3T, el participante menciona el nombre de cada uno de los símbolos, pero lo que está dentro de la integral lo ve como una multiplicación, esto se puede observar en el siguiente extracto de la entrevista:

E: En esta ecuación $\Phi_e = \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$, ¿cómo interpretamos cada símbolo y qué significa la ecuación?

P2GM3T: Es el campo eléctrico “por” el diferencial de área.

E: ¿El punto que está en medio de los dos símbolos indica una multiplicación?

P2GM3T: Si, y cuando el campo es constante puede salir de la integral.

E: ¿Y toda la expresión que está dentro de la integral que significa?

P2GM3T: Establece que el flujo es un cambio de campo eléctrico dentro de un área delimitada

E: ¿A qué te refieres que es un cambio?

P2GM3T: Es decir, lo que está dentro de la integral es el equivalente de flujo. Así se lee esa expresión.

E: ¿Y el punto que aparece?

P2GM3T: Solo indica una multiplicación. Por ejemplo, Si E es constante puede salir de la integral y siguiendo un orden de operaciones, primero se integra el diferencial de área y luego se multiplica por el campo, se puede visualizar así (lo que aparece abajo fue anotado por el estudiante en una hoja):

$$\oiint \Phi_E = \oiint E \cdot dA = E \cdot \oint dA = E (\oint dA)$$

El segundo razonamiento fue que de la muestra del GM3DI, el participante (P1GM3DI) menciona el nombre de cada uno de los símbolos, pero lo que está dentro de la integral lo ve como un diferencial de flujo, que a su vez relaciona como el producto punto entre dos vectores, el de campo eléctrico y del diferencial de área, esto se puede observar en el siguiente extracto de la entrevista:

E: En esta ecuación $\Phi_e = \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$, ¿cómo interpretamos cada símbolo y qué significa la ecuación?

P1GM3DI: Lo que está dentro de la integral es una pequeña porción de flujo, y ya con la integral son todos los flujos sumados.

E: ¿El punto que está en medio de los dos símbolos que indica?

P1GM3DI: Indica el producto punto entre dos vectores, en este caso, entre el campo eléctrico y el diferencial de área. Porque puede haber casos el ángulo entre los dos vectores te da cero o 90° .

E: ¿Qué relación tiene el diferencial de área con el flujo?

P1GM3DI: Te ayuda a medir el flujo infinitesimal por un pedacito, y al sumar todos los dA , se obtiene el flujo total a través de toda la superficie.

Cuando se aborda la cuarta pregunta de la entrevista (ver Apéndice C), y se cuestiona qué pasa con el campo eléctrico cuando el flujo eléctrico es cero se encontraron dos razonamientos. En el primer razonamiento encontrado se observa que el participante (del grupo P1GM3T) no analiza que hay producto punto entre dos vectores para calcular el flujo y lo vemos en la siguiente parte de la entrevista:

E: ¿Por qué dices que el campo en la superficie gaussiana es cero (ver Apéndice C)?

P1GM3T: Si partimos de la ley de Gauss se ve claramente. Si el flujo eléctrico es cero se cumple esta ecuación $0 = \oint E \cdot dA \Rightarrow E \oint da \Rightarrow E = 0$, por lo tanto el campo en la superficie gaussiana es cero.

Para este razonamiento se puede apreciar cómo el P1GM3T únicamente se enfoca a la parte algorítmica para propiciar que un resultado de cero, dejando de lado, que el campo eléctrico y el diferencial de área son vectores y que hay un producto punto entre ellos dos, forzando la solución a la que desea llegar a partir de la Ley de Gauss. Esto es, trata de establecer un proceso tratamiento semiótico que de pie a la solución, pero no puede establecer un proceso de conversión del lenguaje simbólico al lenguaje natural que de evidencia de que maneja significados.

El segundo razonamiento fue que el flujo eléctrico se define como $\Phi_e = \iint E \cdot dA$ si los dos vectores son perpendiculares, E y dA , el flujo eléctrico puede ser cero sin que el campo lo sea (P1GM3DI).

Interpretación de los resultados del examen de preguntas abiertas y de las entrevistas.

El análisis expuesto de los instrumentos del examen de preguntas abiertas y de la entrevista semi-estructurada en concordancia con el marco teórico, proporciona los siguientes resultados. Para motivos de la discusión de los de los datos obtenidos se utilizó la triangulación como medio para señalar la convergencia, y la presencia de inconsistencias.

De acuerdo a la comparación realizada entre el análisis de los resultados del instrumento de preguntas abiertas, y los datos obtenidos de las entrevistas realizadas de la sección anterior, se encontraron las siguientes convergencias:

- Los alumnos de GM3DI muestran un porcentaje y un promedio mayor en las calificaciones obtenidas que los alumnos de GM3T, en cuanto a las respuestas con significado dadas para los elementos que componen la expresión de flujo eléctrico.
- Los alumnos del GM3T muestran un promedio menor de evidencia de la carencia o ausencia de significados del concepto de flujo de un campo. Un porcentaje de alumnos de GM3T superior al GM3DI (ver Figura 2) tienen dificultades para explicar lo que sucede en una secuencia de tratamiento dada, esto es, muestran deficiencias en la conversión semiótica (al pasar de un lenguaje simbólico a un lenguaje natural). En ocasiones sólo leen la expresión sin asociar significado o el significado que dan para el flujo eléctrico y campo eléctrico está en términos de las líneas del campo (ver Apéndice G). En esta dirección, los significados asociados para la integral o el diferencial de área están en términos de un procedimiento de antiderivada, esto es, al diferencial de área se le asocia un significado de un elemento necesario para poder recuperar una función o solucionarlo (ver extracto de la entrevista en la sección anterior); y a la integral solamente se le nombra así como integral, no como una suma de diferenciales.
- Un porcentaje mayor de los alumnos del GM3DI con respecto del GM3T aportan evidencia del manejo de significados de los elementos que conforman la expresión de flujo de un campo eléctrico. Por ejemplo, pueden distinguir el producto punto que hay en la expresión de flujo, y que dentro de la integral de

flujo se tienen dos cantidades vectoriales, en este caso el campo eléctrico y el diferencial de área. Además, logran expresar que lo que está dentro de la integral es la suma de diferenciales de flujo denotando así que hay un pensamiento infinitesimal asociado en su argumentación. También, hacen distinción entre flujo eléctrico y campo eléctrico como dos cantidades distintas. Esto es, este porcentaje de alumnos, puede operar un tratamiento semiótico para poder llegar a un resultado y dar evidencia del manejo de la conversión semiótica (al pasar de un lenguaje simbólico a un lenguaje natural) a través de argumentaciones coherentes.

- Como se mencionó en el capítulo dos, los cursos de Cálculo tradicionales denotan su incapacidad de soportar un estilo de matematizar muy utilizado en la Física, que es el estilo diferencial. Esto se puede apreciar en la falta de significados asociados de los elementos que componen la expresión de flujo en a las respuestas dadas por los estudiantes ante el instrumento de preguntas abiertas y en la entrevista, específicamente en el reconocimiento de que lo que hay dentro de la integral ($\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$) es un diferencial de flujo ($d\Phi$). Ante la carencia de significados asociados únicamente puede realizar un proceso de lectura de la expresión de flujo eléctrico, pueden incluso llegar a resolver un ejercicio típico del tema de la Ley de Gauss pero no pueden explicarlo.

Análisis y discusión de los resultados de la exploración de contenido de los libros de texto de la Física escolar

En esta sección se muestra los resultados obtenidos del análisis de contenido de los libros de texto de la Física escolar. Los libros seleccionados fueron: Hallik, Resnick y Walker, 2001; Giancoli, 2002; Griffiths, 1999; Serway y Beichner, 2008; y Tipler, 2000, que actualmente aparecen como libros de texto o libros de referencia en los cursos de Electricidad y Magnetismo. Para cada uno de ellos se analizó ¿cómo se introduce el concepto de flujo? este tema está ubicado como subtema del capítulo de la Ley de Gauss.

Descripción y análisis de patrones de respuestas encontradas del análisis de contenido de los libros de texto de la Física escolar (definición cualitativa, uso de analogías, definición formal). En la Tabla 18 se puede apreciar que en los libros de texto de la Física escolar (Giancoli, 2002; Griffiths, 1999; Serway y Beichner, 2008; Tipler, 2000) al empezar a introducir el concepto de flujo de un campo se menciona las líneas del campo eléctrico, líneas que penetran una superficie. Feynman (1987) menciona que algunos autores “se apasionan por líneas del campo” para definir lo que es un campo, ya que consideran que el campo eléctrico o el campo magnético son conceptos muy abstractos y una manera de hacerlo tangible es a través de las líneas del campo. Sin embargo, Feynman (1987) considera que utilizar las líneas de campo para conceptualizar el campo, “es una forma burda ” de describirlo (p.1-5).

Tabla 18

Concepto de flujo de un campo en los libros de texto de la Física escolar.

Autor	Definición cualitativa	Uso de analogías	Definición formal	Definición matemática
Hallik, Resnick y Walker (2001)	“La palabra flujo proviene de una palabra latina que significa fluir... el flujo es el producto de un área y el campo presente en esa área” (p.615)	Se da un campo de velocidades v , “la combinación de todos los vectores que o forman es el campo y el flujo es proporcional al flujo del campo de velocidad que pasa por un área”	“El flujo eléctrico Φ que pasa por una superficie es proporcional al número de líneas de campo eléctrico que pasan por esa superficie” (p. 616)	<p>Campo de velocidades uniforme \vec{v} a través de un pequeño cuadro de área A donde Φ representa el gasto volumétrico en el que el aire circula por el cuadro.</p> $\Phi = (v \cos \theta) A$ <p>En su forma vectorial</p> $\Phi = \vec{v} \cdot \vec{A}$ <p>Definición provisional para el flujo de campo eléctrico sobre la superficie de Gauss es</p> $\Phi_E = \sum \vec{E} \cdot \Delta \vec{A}$ <p>La definición exacta es</p> $\Phi = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dA}$
Giancoli (2002)	“El flujo que pasa a través de un área es proporcional a las líneas de campo que pasan a través de esa área”(Giancoli, 2002)	“El concepto de flujo se aplica también al flujo de fluidos. El campo eléctrico \mathbf{E} en cada punto corresponde a la velocidad del flujo del fluido \mathbf{v} , de tal manera que las líneas del campo eléctrico corresponden a las líneas de flujo del fluido” (p.578)	“El flujo que pasa a través de una superficie es proporcional a la cantidad de líneas de campo que atraviesan la superficie”(p. 586)	<p>Campo eléctrico uniforme tanto en magnitud como en dirección y a traviesa una superficie plana</p> $\Phi_E = EA$ <p>Si la superficie no es perpendicular al campo</p> $\Phi_E = EA_{\perp} = EA \cos \theta = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}$ <p>N es la cantidad de líneas de campo que pasan a través de una unidad de área que es perpendicular al campo</p> $N \propto EA_{\perp} = \Phi_E$ <p>Campo eléctrico variable y superficie no es plana</p> $\Phi_E \approx \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \cdot \Delta \mathbf{A}_i$ <p>En el límite conforme $\Delta A_i \rightarrow 0$, la suma se transforma en una integral de superficie y la relación se vuelve matemáticamente exacta</p> $\Phi_E = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ <p>Si la superficie es cerrada</p>

Autor	Definición cualitativa	Uso de analogías	Definición formal	Definición matemática
				$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$
Griffiths (1999)	“El flujo es una medida del número de líneas del campo penetrando un área”(Griffiths, 1999, p.67)		“El flujo es proporcional al número de líneas que pasan a través de un área infinitesimal $d\mathbf{a}$ ” (p.67)	$\Phi_E = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$
Serway y Beichner (2008)	“El flujo eléctrico es proporcional al número de líneas del campo eléctrico que penetran alguna superficie” (Serway y Beichner, 2008, p.744)		“El producto de la magnitud del campo eléctrico E y el área de la superficie A perpendicular al campo recibe el nombre de flujo eléctrico Φ_E ” (p.744).	<p>Campo eléctrico uniforme tanto en magnitud como en dirección y a traviesa una superficie plana</p> $\Phi_E = EA$ <p>Si la superficie no es perpendicular al campo</p> $\Phi_E = EA \cos\theta$ <p>Campo eléctrico variable sobre una superficie considerada</p> $\Delta\Phi_E = E_i \Delta A_i \cos\theta = \mathbf{E}_i \cdot \Delta\mathbf{A}_i$ <p>La definición general de flujo eléctrico es</p> $\Phi_E = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum \mathbf{E}_i \cdot \Delta\mathbf{A}_i = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ <p>Si la superficie es cerrada</p> $\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint E_n dA$
Tipler (2000)	“La magnitud matemática relacionada con el número de líneas de fuerza que atraviesa una superficie es el flujo eléctrico”(Tipler, 2000, p. 764)		“El producto de la intensidad del campo eléctrico por el área de una superficie perpendicular al campo se denomina flujo del campo a través de la superficie”(p.765)	<p>Campo eléctrico uniforme tanto en magnitud como en dirección y atraviesa una superficie plana</p> $\Phi = EA$ <p>El flujo eléctrico es proporcional al número de líneas de fuerza que a traviesan una superficie</p> $\Phi \propto N$ <p>Si la superficie no es perpendicular al campo</p> $\Phi = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}A = EA \cos\theta = E_n A$ <p>Donde $E_n = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ es la componente del vector del campo eléctrico perpendicular, o normal, a la</p>

Autor	Definición cualitativa	Uso de analogías	Definición formal	Definición matemática
				<p>superficie. Campo eléctrico variable y superficie no es plana</p> $\Delta\Phi_i = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i A_i$ <p>La definición general del flujo eléctrico entonces es</p> $\Phi_E = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i \Delta A_i$ $= \int \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$ <p>Si la superficie es cerrada</p> $\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \oint E_n dA$

Hallik, Resnick y Walker (2001) introducen el concepto de flujo haciendo referencia etimológica de la palabra flujo. Los autores plantean un ejemplo de cuatro superficies hipotéticas inmersas en un campo de velocidades debido a una corriente de aire. Con ese ejemplo, se llega al concepto de flujo como se muestra en la Tabla 18, en el apartado de uso de analogías. Acto seguido, se define el flujo eléctrico sustituyendo el campo de velocidades por el campo eléctrico y ahora tomando pequeños cuadros de la superficie a los que nombran $\overrightarrow{\Delta A}$. Aunque se hace referencia al origen de la palabra fluir y a una analogía, en este caso con el campo de velocidades, no se realiza ninguna aclaración que en el caso del flujo eléctrico no fluye nada.

Giancoli (2002), en la parte final del tema del flujo eléctrico marcado entre paréntesis presenta la analogía de flujo eléctrico y flujo de un fluido. Señala que el campo eléctrico es análogo al campo de velocidades de un fluido. Además, menciona que:

“El flujo Φ que circula a través de una superficie (para el caso de un fluido) es la rapidez de flujo por volumen y está determinado por $\Phi_E = \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$ Aún cuando esta comparación entre flujo eléctrico y flujo de un fluido es interesante, y quizás ofrece cierto entendimiento, no hay que confundirse, el flujo eléctrico no es el flujo de cualquier sustancia” (p. 578).

Como se puede apreciar en este extracto Giancoli (2002) presenta la analogía después de haber introducido el concepto de flujo con las líneas de campo. Utiliza la palabra “circula” para referirse que atraviesa. Y al finalizar al decir “no es el flujo de cualquier sustancia”, queda poco preciso si, eso quiere decir, que el flujo eléctrico es el flujo de alguna sustancia.

En la Tabla 18 se puede observar que solo 2 autores de 5, recurren a la analogía, sin embargo, ninguno de ellos aclara que para el caso del flujo eléctrico no fluye nada. Además, se puede apreciar que todos los autores recurren, en algún momento al término de las líneas de campo para poder definir el concepto de flujo.

Descripción y análisis de patrones de respuestas encontradas del análisis de contenido de los libros de texto de la Física escolar (definición matemática).

Hallik, Resnick y Walker (2001) introducen la primera ecuación del concepto de flujo como la componente del campo de velocidades \mathbf{v} que sea normal al área que atraviesa por el área. Continúa generalizando la expresión (ver Tabla 18, primer renglón) con el producto punto entre los dos vectores (campo de velocidades y área). Además, comenta que “el término de flujo... significa el producto de un área y el campo presente en esa área” (p. 615).

Giancoli, (2002); Serway y Beichner, (2008); y Tipler, (2000); utilizan una secuencia similar, introducen la primera ecuación del concepto de flujo como el producto de la magnitud del campo y la magnitud del área que atraviesa. Continúan con la secuencia de la ecuación para el caso donde el campo eléctrico y área no van en la misma dirección. Después llegan a la ecuación del producto punto entre los dos vectores. Posteriormente los cuatro autores mencionados presentan el concepto de flujo eléctrico enfatizando en las consideraciones mostradas en la Tabla 18. Griffiths (1999), de los autores aquí expuestos, es el único que aborda de forma directa la integral, sin realizar el paso intermedio de la sumatoria que presentan los demás autores. Tipler es el único que presenta a $\Delta\Phi$ como “el flujo que hay en cada

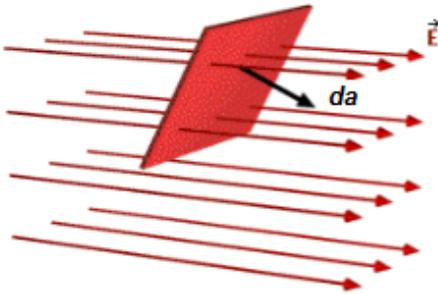
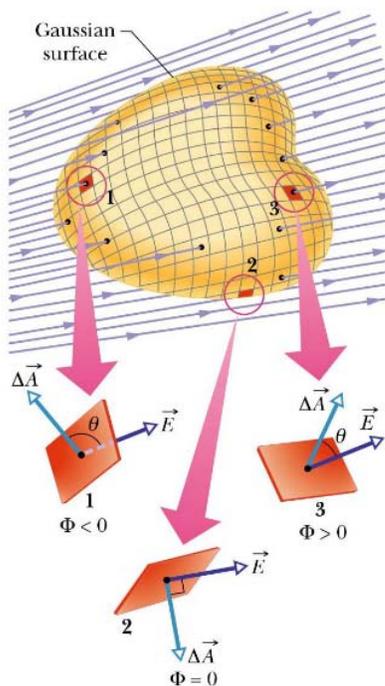
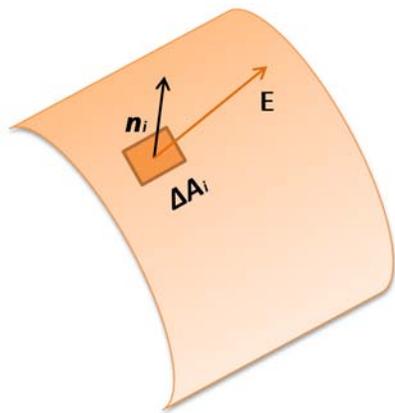
elemento” (2000, p. 765), donde cada elemento está representado por un área pequeña (ver Tabla 18, figura de apoyo, quinto renglón).

El análisis y la interpretación expuesta en este apartado, en concordancia con el marco teórico, proporciona los hallazgos significativos encontrados en los resultados de la exploración de los libros de texto de la Física escolar. En el marco teórico presentado en el capítulo 2 se hace referencia al uso de analogías para construir un concepto. En este caso de la revisión de los libros de texto de la Física escolar resulta evidente, que menos de la mitad de los libros de texto de la Física escolar (ver Tabla 18) recurren a una analogía para introducir el concepto de flujo. Además, los autores que si utilizan las analogías, cuando recurren a ellas, en este caso, con campos que si involucran un movimiento de fluido (campo de velocidades) no se especifica claramente que en el caso de flujo eléctrico, no fluye nada. También, al recurrir a la representación de líneas del campo que entran o salen, sugieren en el contexto del lenguaje, que algo se mueve.

Tabla 19

Concepto de flujo de un campo (definición matemática), en los libros de texto de la Física escolar

Autor	Figura de apoyo	Consideraciones
Hallik, Resnick y Walker (2001)		<p>Dividir la superficie en pequeños cuadros de área ΔA, lo suficientemente pequeño para despreciar cualquier curvatura. El campo eléctrico se puede tomar como constante sobre cualquier cuadro dado. Se expresa el flujo como la sumatoria de</p>
		$\Phi_E = \sum \vec{E} \cdot \vec{\Delta A}$
		<p>Se menciona que los cuadros señalados en la figura se deben de hacer más y más pequeños aproximándose a un límite diferencial dA y así se pueda convertir la suma en una integral</p>
		$\Phi = \oint \vec{E} \cdot \vec{dA}$
Giancoli (2002)		<p>Se divide la superficie en n elementos pequeños de superficie, cuyas área son $\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_n$. Cada elemento es lo suficientemente pequeño para que se pueda considerar una superficie plana y el campo sea considerado uniforme, y entonces se puede aproximar como</p>
		$\Phi_E \approx \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \cdot \Delta A_i$
		<p>En el límite conforme $\Delta A_i \rightarrow 0$, la suma se transforma en una integral de superficie y la relación se vuelve matemáticamente exacta</p>
		$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot \vec{dA}$

Autor	Figura de apoyo	Consideraciones
Griffiths (1999)		<p>El flujo de un campo a través de la superficie es</p> $\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$ <p>$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$ es proporcional al número de líneas a través de un área infinitesimal $d\mathbf{a}$.</p>
Serway y Beichner (2008)		<p>Se considera una superficie general dividida en un gran número de elementos pequeños, cada uno con un área ΔA. La variación en el campo eléctrico sobre un elemento puede ignorarse si el elemento es suficientemente pequeño...</p> <p>Al sumar todas las contribuciones de todos los elementos se obtiene el flujo total a través de la superficie. Si cada elemento del área tiende a cero, entonces el número de elementos tiende a infinito y la suma se sustituye por una integral:</p> $\Phi_E = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum \mathbf{E}_i \cdot \Delta \mathbf{A}_i$ $= \int_{\text{superficie}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$
Tipler (2000)		<p>Dividir la superficie en un gran número de elementos muy pequeños. Si cada elemento es lo suficientemente pequeño se puede considerar como plano y puede despreciarse la variación del campo eléctrico en todo elemento.</p> <p>El flujo total a través de la superficie es la suma de $\Delta\phi_i$ extendida a todos los elementos.</p> <p>En el límite en que el número de elemento se aproxima a infinito y el área de cada elemento tiende a cero, esta suma resulta ser una integral</p>

Autor	Figura de apoyo	Consideraciones
		$\Phi_E = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i \Delta A_i$ $= \int \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i dA$

Por otra parte, tanto en la Tabla 18 (en la parte de definición matemática), como en la Tabla 19, se puede observar que la forma o secuencia de introducir la ecuación de flujo eléctrico muestra una contradicción epistemológica cuando se asume que ΔA es igual a dA como se menciona en Pulido (1998), esto es, cuando se pasa de la sumatoria a la integral. Al llamarle integral, se puede perder el significado de lo que se veía construyendo, es decir, al ver a la integral como un objeto matemático que te permite “integrar” una función y se pierde la noción de que lo que se está haciendo es una suma de diferenciales de flujo para capturar el flujo total. Las consideraciones que se describen para un elemento pequeño llamado ΔA , son las mismas consideraciones o características de un diferencial de área (dA), si se toma un diferencial de área, esa región se considera infinitamente pequeña, plana y el campo a través de ella es constante. El estilo diferencial como se menciona en Pulido (2010) no se explica en los cursos tradicionales de Cálculo Diferencial, solo se aborda la manera de operar con él.

La secuencia que se sigue para introducir el concepto de flujo es utilizada en cuatro de los cinco libros consultados a excepción del de Griffiths (1999). La ecuación de flujo como se mencionó en el marco teórico tiene sus orígenes históricos en la hidrodinámica. Las líneas del campo fueron el primer acercamiento a la descripción cualitativa del campo eléctrico, pero este concepto evolucionó (Maxwell, 1879).

Análisis y discusión de los resultados obtenidos de la observación participante y la exploración de las situaciones problema.

En esta sección se muestra los resultados obtenidos del análisis e interpretación de la observación participante realizada en los cursos de Física III (Electricidad y Magnetismo) y el curso de Matemáticas III para ingeniería con Diseño Integral. Además, se presenta la exploración de las situaciones problema relacionadas con el concepto de flujo de un campo que se llevan a cabo en el curso de M3DI.

Descripción y análisis de los resultados obtenidos de la observación participante en el curso de Física III y en el curso de M3DI. En la Tabla 20 se presentan los resultados generales obtenidos de las observaciones realizadas a los cursos de Física III (Electricidad y Magnetismo) y M3DI. La rejilla de observación utilizada para cada curso está en el apéndice E.

Tabla 20
Resultados de la observación participante

Aspecto Observado	Resultados	
	Curso de Física III (E&M)	Curso de M3DI
Forma de abordar el tema de la introducción del concepto de flujo de un campo	<p>El profesor introduce el concepto de flujo eléctrico a partir de su definición matemática. Cuando va ampliando la definición, comenta, sin proyectarlo en las filminas ni escribirlo en el pizarrón, que lo que representa la integral es la suma de todos los flujos (ver apéndice D). Y finalmente menciona que el flujo eléctrico es la proyección del campo eléctrico en la dirección del área que atraviesa.</p>	<p>El profesor introduce el concepto de flujo eléctrico a partir de la situación problema que se presenta en el Apéndice A. Cuando va ampliando la definición, comenta, escribiéndolo en el pizarrón, que lo que está dentro de la integral es un diferencial de flujo, y ya con la integral es la suma de todos los flujos (ver apéndice D). La secuencia de la situación problema permite ir construyendo la ecuación del flujo en un orden similar al presentado en los libros de texto de la Física escolar, pero una diferencia importante es que se utiliza el concepto del diferencial.</p>
Participación de los alumnos	<p>Alumnos Los alumnos participaron activamente durante la exposición. Unos proponen ideas y otros toman notas. Se muestra el trabajo colaborativo y participativo.</p>	<p>Alumnos Los alumnos participaron activamente durante la exposición. Unos proponen ideas para la situación problema abordado, otros cuestionan sobre el tema expuesto y otros toman notas. Se muestra el trabajo colaborativo y participativo.</p>
Contexto de la actividad	<p>El contexto está relacionado a situaciones propias de la Electricidad y Magnetismo. Comportamiento de cargas, comportamiento del campo eléctrico y comportamiento del flujo eléctrico</p>	<p>El contexto está relacionado con el flujo de un fluido (ver apéndice A).</p>
Diseño de la actividad.	<p>Las instrucciones de la actividad están claras para la mayoría, los alumnos que mostraron dificultad para identificar la solución que se pedía fueron asesorados por su equipo o por el maestro. Durante la implementación se observó que el diseño de la</p>	<p>Las instrucciones de la actividad están claras para la mayoría, los alumnos que mostraron dificultad para identificar la solución fueron despejando sus dudas cuando fueron construyendo la solución en la sesión plenaria junto con el profesor.</p>

Aspecto Observado	Resultados	
	Curso de Física III (E&M)	Curso de M3DI
	<p>actividad promueve la reflexión y el análisis del tema abordado. Sin embargo, se necesita haber leído previamente sobre el tema para poder comprender que es el flujo eléctrico.</p> <p>El material presentado se aboca más a la solución de problemas y al comportamiento del flujo eléctrico, en cuanto a que si es positivo, negativo o cero.</p> <p>Para algunos equipos el tiempo de duración de la actividad no fue suficiente.</p>	<p>Durante la implementación se observó que el diseño de la actividad promueve la reflexión y el análisis del tema abordado.</p> <p>El material presentado se aboca introducir a alumno a un contexto familiar, para ir construyendo la solución de las preguntas propuestas. Además, de que permite ir analizando poco a poco cada uno de los elementos involucrados en la ecuación del flujo.</p>
Percepción de la comprensión del tema	<p>Las respuestas de los estudiantes denotan algunos aún hay dudas del tema abordado con esta actividad y otros pueden responder los problemas planteados en la clase.</p>	<p>Los estudiantes mostraron que la actividad les pareció retadora para empezar a encaminar sus conocimientos sobre el tema</p>

En la secuencia didáctica que se usó en el curso de Física III (Electricidad y Magnetismo) se pueden percibir algunos “huecos” o saltos en las explicaciones alrededor de la construcción de la expresión del concepto de flujo de un campo. El orden que se sigue es similar al de los libros de texto de la Física escolar (ver Tabla 18 y Tabla 19). Durante el desarrollo de exposición del tema, sin mostrarlo en la filmina o de forma escrita se menciona que “el flujo eléctrico es una medida de la proyección del campo eléctrico en la dirección del área que atraviesa”. Además se expone la ecuación como se muestra en la Tabla 19, primero como una sumatoria y posteriormente como integral. Se realizan varios ejemplos donde se calcula el flujo, se hace hincapié en el signo, y en cómo están interactuando las cargas.

La situación problema (ver Apéndice A) que se utiliza en el curso de M3DI está centrada en realizar la construcción de la ecuación de flujo de un campo con la intención de facilitar el aprendizaje de este tema en los estudiantes. La idea fundamental es relacionar al estudiante con un contexto familiar como el flujo de un fluido y generar la participación de los estudiantes en la construcción de su conocimiento del concepto de flujo de un campo. La secuencia utilizada en la situación problema es similar a la de los libros de texto de la Física escolar con la diferencia fundamental del manejo adecuado de los diferenciales.

En las explicaciones que se dan en clase (Apéndice J) conforme se va construyendo la expresión de flujo de un campo, se hace referencia a las consideraciones que hay al tener una región infinitesimal, como las siguientes:

- Se toma un diferencial de área que es una región infinitamente pequeña.

- Al ser infinitamente pequeña se puede considerar esa área como una región plana
- Al ser infinitamente pequeña el campo se puede considerar constante o el mismo en toda esa región.
- El producto punto entre el campo eléctrico y el diferencial de área que está dentro de la integral es un diferencial de flujo capturado en la región infinitamente pequeña.
- La integral es una suma de todos los diferenciales de flujo de la superficie que se está analizando.

Se hace hincapié en que la componente del campo que aporta al flujo es la que está en dirección del vector de área o en la dirección en la que se desea calcular el flujo. De esta forma, surge la expresión del producto punto entre el vector del campo y el vector de área. Además, una vez generalizada la expresión del flujo de un campo, se menciona que se aplica en Física III (Electricidad y Magnetismo), donde el campo, ahora es eléctrico y el flujo que se calcula es el flujo eléctrico pero a diferencia del contexto del flujo de un fluido, éste no fluye nada.

Estas observaciones realizadas muestran evidencia de que la forma en cómo se introduce el concepto de flujo de un campo en los cursos de Física III es a través de la presentación de la definición matemática de este concepto, no hay una construcción de significados alrededor de la misma. A diferencia del curso M3DI donde se va construyendo la expresión del flujo y a cada elemento que la conforma se le dota de significado aunado a que se explican las características que tiene cada

elemento. Además, en el curso de M3DI se utiliza el contexto del agua como un medio para poder construir la expresión del flujo.

Interpretación de los resultados del análisis de contenido de los libros de texto de la Física escolar y de las observaciones realizadas.

El análisis expuesto del análisis de contenido de los libros de texto de la Física escolar y la observación participante realizada al GM3DI y al grupo de Física III, en concordancia con el marco teórico, proporciona los siguientes resultados. Para motivos de la discusión de los de los datos obtenidos se utilizó la triangulación como medio para señalar la convergencia, y la presencia de inconsistencias.

De acuerdo a la comparación realizada entre el análisis de contenido de los libros de texto de la Física escolar y la observación participante realizada al GM3DI y al grupo de Física III de la sección anterior, se encontraron las siguientes convergencias:

- En los libros de texto de la Física escolar y en el curso de Física III, no se utiliza un contexto familiar al estudiante para introducir el concepto de flujo eléctrico. Para describir el campo eléctrico de forma cualitativa se utiliza el concepto de líneas del campo. Como se mencionó en el capítulo 2, diversas investigaciones (Alomá y Martins, 2008; Furió y Guisasola, 1997; Furió y Guisasola, 1999) han reportado que el apoyarse en las líneas del campo para conceptualizar al campo eléctrico, se puede transferir una idea de movimiento, generando posibles concepciones erróneas y conflictos.

- En el curso de M3DI si se utiliza un contexto familiar para introducir el concepto de flujo. Se toma de base una situación problema dentro del contexto de flujo de un campo de velocidades (ideas de la hidrodinámica) y se va construyendo la expresión de flujo. Finalmente, se menciona que esa expresión se puede trasladar al cálculo de flujo de eléctrico, y se puntualiza cuáles son las propiedades que se toman de esta expresión para su aplicación en otros contextos. Puntualizando las diferencias del concepto de flujo en la hidrodinámica y del concepto de flujo de un campo eléctrico. Históricamente, Maxwell traslado las ideas de la hidrodinámica para la construcción del concepto de flujo eléctrico.
- En los libros de texto de la Física escolar se puede observar una transposición didáctica, en cuanto a la matemática empleada para la construcción de la expresión del flujo eléctrico. Se pasa de forma directa del símbolo de Σ al símbolo de la \int , sin embargo, para ésta última es llamada *la integral*, deja de ser la *suma* de las aportaciones de flujo. También, se pasa de forma directa del ΔA al dA , sin ninguna explicación adicional. Como se mencionó en el capítulo dos, los diferenciales en el CALITECA no se les asocia significado alguno, como se puede apreciar en los libros de Física tampoco, debido a que los libros de la Física escolar están apoyados en la matemática empleada en el CALITECA (Pulido, 1998). En este sentido, se puede generar la idea de que lo que se va recuperar a través de la expresión de la integral es una antiderivada.

- En el curso de Física III cuando se introduce el concepto de flujo eléctrico se menciona más no se escribe en la pizarra o en la proyección de filminas el diferencial de flujo.
- En el M3DI, se da una explicación amplia del significado asociado al $d\mathbf{A}$ y de cómo surge el diferencial de flujo. De esta forma, dentro de las explicaciones que se dan para la construcción del concepto de flujo de un campo se expone que lo que se captura es una suma de diferenciales de flujo con la siguiente expresión: $\Phi_e = \int d\Phi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$.

En este capítulo, se muestra el análisis y la discusión de los resultados de los instrumentos implementados. En el análisis de resultados del examen de preguntas abiertas se muestra la validación y confiabilidad del instrumento empleado. En la interpretación de resultados del examen de preguntas abiertas y de las entrevistas realizadas (fase cuantitativa) se da respuesta al primer objetivo de investigación, aportando evidencias de que si hay diferencias significativas en el aprendizaje con significado entre el GM3DI y el GM3T. Siendo superior el promedio del GM3DI con respecto al GM3T.

En la interpretación de resultados del análisis de contenido de los libros de Física escolar y las observaciones realizadas a los grupos de Física III y M3DI (fase cualitativa) se da respuesta al segundo objetivo de investigación. Los hallazgos derivados de este análisis son: a) tanto los libros de texto de la Física escolar como los cursos de Física III no ofrecen un contexto *adecuado* que facilite la construcción y la comprensión del concepto de flujo de un campo eléctrico (desde la perspectiva

histórica en la que fue construido este concepto); b) hay una transposición didáctica evidente en los libros de texto de la Física escolar, en cuanto a la construcción de la expresión del flujo de un campo eléctrico; c) los dos aspectos señalados anteriormente pueden generar concepciones erróneas o falta de asociación de significados en la matematización de la expresión de flujo de un campo eléctrico. En el siguiente capítulo se expone las conclusiones finales del estudio realizado.

Capítulo 5. Conclusiones

Las conclusiones finales de este estudio están divididas en cuatro secciones. En la primera sección se presentan los hallazgos de la investigación realizada. En la segunda sección, se exponen los comentarios finales sobre las limitaciones de este estudio presentadas en el primer capítulo de esta tesis. En la tercera sección se plantean las recomendaciones para futuros estudios. Finalmente, en la cuarta sección se especifica el aporte al campo científico del área de la investigación en la educación.

Hallazgos de la investigación realizada

El objetivo general de esta investigación, como se mencionó en el capítulo 1, es evidenciar que los estudiantes que cursaron la materia de Matemáticas III para ingeniería con el Diseño Integral (M3DI) logran aprendizajes con significado del concepto de flujo de un campo eléctrico, en contraste con los que no lo cursaron. En esta sección también se presentaron dos objetivos específicos: 1) Identificar si hay diferencias significativas que se presentan como muestras de aprendizajes con significado logrados en los estudiantes, en cuanto al aprendizaje del concepto de flujo del campo eléctrico se refiere, al llevar esta propuesta didáctica integral; 2) Descubrir los elementos teóricos que explican las razones del porqué la enseñanza del concepto de flujo del campo eléctrico basada solamente en los libros de texto de Física (que se apoyan en la matemática tradicional) no contribuye al logro de aprendizajes con

significados. En esta sección se presentan los hallazgos de la tesis relacionados con los dos objetivos particulares de esta investigación.

El primer objetivo particular de la tesis se cubre con los resultados obtenidos de la implementación de los instrumentos del examen de preguntas abiertas y de las entrevistas realizadas mostrados en el capítulo 4. Para cada símbolo que conforma la expresión de flujo de un campo eléctrico se analizaron los significados asociados de las respuestas dadas por los estudiantes, diferenciando si había evidencia de aprendizaje con significado en el proceso de conversión semiótico empleado para pasar del lenguaje simbólico al lenguaje natural o viceversa. Después se realizó una tabla de frecuencias de los significados asociados a cada símbolo que conforma la expresión de flujo, para realizar una comparación entre el GM3DI y el GM3T. Además se realizó una comparación entre el promedio de calificaciones obtenido por el GM3DI y el GM3T. También se analizaron las entrevistas realizadas a los estudiantes con la intención de profundizar en las respuestas analizadas a partir del instrumento de preguntas abiertas. Este análisis correspondió a la fase cuantitativa de la investigación. A continuación se presentan los hallazgos de esta fase expuestos en el capítulo anterior.

Para cada uno de los elementos que conforma la expresión de flujo de un campo eléctrico, se encontraron tres tipos de respuestas como evidencia del significado asociado que tienen los estudiantes al realizar un proceso de conversión semiótica del lenguaje simbólico al lenguaje natural. En el primer tipo de respuesta se realiza un procedimiento de lectura de la expresión cuestionada. En el segundo tipo de respuesta se da un significado asociado o referente al que se presenta en los libros

de texto de la Física escolar, sin embargo, en este tipo de respuesta se da una argumentación incompleta. En el tercer tipo de respuesta se aporta evidencia de un aprendizaje con significado, esto es, una argumentación lógica y coherente de lo que representa el símbolo cuestionado en la expresión del flujo de un campo eléctrico.

Al efectuar la comparación entre las evidencias de aprendizaje con significado entre el GM3DI y el GM3T, se observó que el promedio de las calificaciones de los alumnos del GM3DI es mayor que el promedio de las calificaciones del GM3T.

El segundo objetivo particular de la tesis, mencionado en el primer párrafo de esta sección, se cubre con los resultados obtenidos del análisis de contenido de los libros de texto y de las observaciones realizadas al grupo de Física III y al GM3DI mostrados en el capítulo cuatro. Se seleccionaron 5 libros de texto de la Física escolar para analizar cómo se introduce el concepto de flujo de un campo eléctrico, y también se realizó la observación en los cursos de Física III y M3DI para observar cómo se presenta la explicación de este concepto.

Derivado de este análisis se encontró que tanto los cursos de Física III como los libros de texto de la Física escolar no manejan contextos *adecuados* para introducir el concepto, debido a que se apoyan en la definición cualitativa del campo eléctrico que son las líneas del campo. Esta definición, de acuerdo con algunos reportes de investigación (Alomá y Martins, 2008; Furió y Guisasola, 1997; Furió y Guisasola, 1999), puede ocasionar preconcepciones alrededor de este concepto. Por otra parte, el M3DI, ofrece contextos más cercanos al estudiante para introducir el concepto de flujo de campo, como el fluir del agua, y posteriormente al trasladarlo a otros contextos. El curso del M3DI está enfocado a la construcción del concepto, en este

caso, del concepto de flujo de un campo. Por lo que en las explicaciones realizadas en clase se toman en cuenta las consideraciones pertinentes de la matemática involucrada y una vez construida la expresión de flujo de un campo se traslada a otros contextos, en el caso del flujo eléctrico se menciona que no fluye nada.

También se observó que en los libros de texto de la Física escolar se realiza una transposición didáctica, producto de que la base matemática de éstos está en el CALITECA. Además, de que en los cursos de Física III no se da una explicación detallada del significado asociado al diferencial, o lo que es un diferencial de flujo. En contraste el curso de M3DI ofrece una explicación de las consideraciones infinitesimales que deben de estar presentes para la construcción y manejo de cada uno de los elementos que conforman la expresión de flujo de un campo eléctrico.

Comentarios finales sobre las limitaciones de este estudio

En el capítulo 1 de esta tesis doctoral se presentó las limitaciones de esta investigación. En seguida se exponen los comentarios finales sobre estas limitaciones considerando la información expuesta anteriormente. Debido a que la propuesta de Diseño Integral de la cual forma parte el curso de Matemáticas III para Ingeniería, sólo se ha implementado en el Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey, la principal limitación de este estudio es de orden espacial. Sobre esta limitación es posible mencionar dos puntos.

El primer punto es que las conclusiones del estudio realizado son relativas al grupo de estudiantes pertenecientes a esta universidad. Sin embargo, el paradigma de la enseñanza tradicional del Cálculo y su influencia en la Física puede ubicarse en un

ámbito educativo mucho más amplio que el del Campus Monterrey, por lo que puede considerarse que los resultados obtenidos de corte teórico seguirían siendo válidos en esos ambientes. Por otra parte, esta investigación ofrece el diseño de un instrumento que puede servir de base para estudios futuros y contrarrestar esa limitación. Como se señaló anteriormente, esta tesis ofrece un examen de preguntas abiertas, que puede ser implementado en varias instituciones educativas para evaluar el aprendizaje con significado del concepto de flujo de un campo eléctrico visto desde una perspectiva diferente a lo que se ha reportado en otras investigaciones en relación a la enseñanza y aprendizaje de este concepto (expuestas en los antecedentes de esta tesis).

El segundo punto a considerar, es que otra limitación del estudio realizado está relacionada con el diseño del instrumento del examen de preguntas abiertas. Como se mencionó en el capítulo tres, el diseño de este instrumento analizó los procesos de conversión semióticos que se dan al transitar de un registro de representación a otro, en este caso, del lenguaje natural al lenguaje simbólico o viceversa, para identificar los aprendizajes con significados alrededor del concepto de flujo de un campo eléctrico, Este aspecto es por el enfoque de este estudio, tiene la limitante de que no permite conocer a detalle todo el proceso de razonamiento incorrecto seguido por los estudiantes al cometer un error específico. Esta limitación puede ser contrarrestada en estudios futuros, generando a partir de este instrumento un examen de opción múltiple, que permita realizar investigaciones que ofrezcan resultados que tiene la principal ventaja de ser más generalizables a una población grande de estudiantes.

Recomendaciones para futuros estudios

Los resultados de esta tesis pueden servir de fundamento para futuros estudios en dos diferentes líneas. La primera línea, es de estudios que busquen analizar las posibles diferencias en el aprendizaje con significado del concepto del flujo de un campo eléctrico en estudiantes con diferentes características. La segunda línea, es de estudios que busquen analizar las posibles diferencias en el aprendizaje con significado del concepto de circulación que es otra de las nociones fundamentales de la propuesta de Diseño Integral para el curso de Matemáticas III para Ingeniería. A continuación se detallan las recomendaciones para futuros estudios en estas dos líneas.

Para la primera línea de investigación, en la que se ubican los estudios que busquen analizar las posibles diferencias en el aprendizaje con significado del concepto del flujo de un campo eléctrico de estudiantes con diferentes características, se pueden establecer dos recomendaciones. La primera recomendación para los investigadores que realicen estos estudios es que utilicen el examen de preguntas abiertas que se muestra en el Apéndice B de esta tesis doctoral como base para generar un instrumento más robusto y establecer una investigación de corte metodológico cuantitativo. La segunda recomendación para estos investigadores es sobre las tres diferentes variables que pueden considerar en sus estudios. La primera variable que se puede considerar es el género de los estudiantes. La segunda variable que se puede considerar es si los estudiantes llevaron toda la propuesta integral, esto es, los tres cursos básicos de Matemáticas para Ingeniería (Cálculo diferencial,

Cálculo integral y Cálculo de varias variables). La tercera posible variable es el estilo de aprendizaje de los estudiantes.

Para la segunda línea de investigación, que es analizar las posibles diferencias en el aprendizaje con significado del concepto de circulación que es otra de las nociones fundamentales de la propuesta de Diseño Integral para el curso de Matemáticas III para Ingeniería, se establecen dos recomendaciones. La primera recomendación es que en este tipo de estudio se consideren: los instrumentos utilizados en esta tesis doctoral (los cuatro instrumentos), realizando las modificaciones pertinentes al examen de preguntas abiertas enfocándolo al tema de circulación; y los resultados obtenidos en esta tesis. Se recomienda que los estudios futuros analicen las diferencias que se encuentran las evidencias de aprendizaje con significado alrededor del concepto de circulación en estudiantes que llevaron Matemáticas III para Ingeniería con el Diseño Integral en contraste con los que no . Se recomienda este estudio en pro de evaluar las dos nociones fundamentales de la propuesta de Diseño Integral del curso de Matemáticas III para Ingeniería.

Aporte al campo científico del área de la investigación en la educación

Para terminar este documento se presenta de manera sintética los tres aportes más importantes de esta tesis doctoral al campo científico del área de la investigación en la educación.

El primer aporte de esta tesis doctoral es la originalidad del enfoque de la problemática de la enseñanza y el aprendizaje del concepto de flujo de un campo. En este estudio, se buscó hacer explícito, desde un punto de vista teórico, las

implicaciones que para el aprendizaje del concepto de flujo del campo eléctrico tiene el hecho de ser un objeto de enseñanza de la Física que lleva la carga de utilizar una matemática tradicional, fuertemente cuestionada como propicia para soportar la tarea que se le propone. Como se mencionó anteriormente, en los reportes de las investigaciones realizadas en el enfoque de análisis alrededor de este concepto, ha estado centrado desde tres perspectivas: cognitiva, didáctica y epistemológica en el área de la Física. En contraste, en este estudio se aborda desde una perspectiva conjunta de la Física y las Matemáticas, enfocándose en los significados asociados en la matemática usada alrededor de este concepto.

El segundo aporte de esta tesis es el análisis de las evidencias de aprendizaje con significado que tienen los estudiantes que llevaron una propuesta didáctica alterna a la tradicional, el Diseño Integral, en el curso de Matemáticas III para ingeniería, que apunta a contribuir a la mejora de una parte significativa del sistema de enseñanza científica del país.

El tercer aporte de esta tesis doctoral es identificar las consideraciones teóricas que deben de estar presentes en la construcción del concepto de flujo de un campo eléctrico desde la perspectiva histórica que dio origen a la construcción del mismo.

Finalmente, es muy importante enfatizar, en esta sección en donde se establecen los aportes de esta tesis doctoral, que el aprendizaje y la enseñanza del concepto de flujo de un campo eléctrico es un tema fundamental para la comprensión del tema de la Ley de Gauss que forma parte de los cursos de Física III. En esa dirección, la propuesta de diseño integral del cual forma parte el curso de Matemáticas III para

Ingeniería considera que la comprensión de este concepto no quede reducida a la definición del mismo, sino que la matemática involucrada alrededor de este concepto tenga un aprendizaje con significado. Esto es, un significado asociado que facilite el aprendizaje de cómo operan estos elementos dentro de un contexto físico. Se considera que este hecho ayuda a percibir de manera más adecuada el aporte científico de esta tesis doctoral.

Referencias

- Acevedo, J. A. (2004). El papel de las analogías en la creatividad de los científicos: la teoría del campo electromagnético de Maxwell como caso paradigmático de la historia de las ciencias [Versión electrónica]. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 1(3), 188-205.
- Alanís, J. A. (1996). *La predicción: un hilo conductor para el rediseño de un del discurso escolar del cálculo*. Disertación Doctoral. Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV. México.
- Alanís, J.A. y Salinas, N.P. (2010). Cálculo de una variable: acercamientos newtoniano y leibniziano integrados didácticamente. Recuperado el 16 de julio de 2011, de:
http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/index.php?vol=2&index_web=8&index_mgzne
- Albe, V., Venturini, P. y Lascours, J. (2001). Electromagnetic concepts in Mathematical representation of Physics [Versión electrónica]. *Journal of Science Education and Technology*, 10(2), 197-203.
- Alomá, E. y Martins, I. (2008). Propuesta didáctica en física: El concepto de flujo eléctrico [Versión electrónica]. *Educere*, 12(42), 539-550.
- Álvarez-Gayou, J. (2007). *Como hacer investigación cualitativa*. Distrito Federal, México: Paidós Mexicana.
- Alvarez, T. (2010). La visualización de conceptos matemáticos y el aprendizaje del electromagnetismo [Versión electrónica]. *Latin American Journal of Physics Education*, 4(1), 143-148.
- Arcos, I. (2004). Rigor o entendimiento, un viejo dilema en la enseñanza de las matemáticas: El caso del cálculo infinitesimal [Versión electrónica]. *Tiempo de Educar*, 5(10), 77-110.
- Artigue, M. (2003). Reaction. Learning and teaching analysis: What can we learn from the past in order to think about the future? En D. Coray, F. Furinghetti, H. Gispert, B. R. Hodgson & G. Schubring (Eds.), *One hundred years of l'enseignement mathématique: moments of mathematics education in the twentieth century*. Monograph No. 39 (pp. 211–223). Genova, Italia: L'Enseignement Mathématique.

- Artigue, M. y Viennot, L. (1987). Some aspects of students' conceptions and difficulties about differentials [Versión electrónica]. *European Journal of Physics*, 11(5), 262-267.
- Bachelard, G. (1979). *La formación del espíritu científico*. Buenos Aires, Argentina: Siglo XXI.
- Bango, E. y Eylon, B. (1997). From problem solving to a knowledge structure: An example from the domain of electromagnetism [Versión electrónica]. *American Journal of Physics*, 65(8), 726-736.
- Bardín, L. (1996). *Análisis de contenido*. D. F., México: Akal.
- Becerra-Labra, C., Gras-Martí, A. y Martínez-Torregrosa, J. (2007). La física con una estructurada problematizada: Efectos sobre el aprendizaje conceptual, en las actitudes e intereses de los estudiantes universitarios [Versión electrónica]. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 29(1), 95-103.
- Berkson, W. (1981). *Las teorías de los campos de fuerza desde Faraday hasta Einstein*. Madrid, España: Alianza.
- Brown, D. y Clement, J. (1989). Overcoming misconceptions via analogical reasoning: abstract transfer versus explanatory model construction [Versión electrónica]. *Instructional Science*, 18(1), 237-261.
- Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17(1), 1-9.
- Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Mathematics education: A vision of its evolution [Versión electrónica]. *Educational Studies in Mathematics*, 53(3), 255-270.
- Cantoral R., Farfán R., Cordero F., Alanís J., Rodríguez, R. y Garza, A. (2006). *Desarrollo del pensamiento matemático*. D.F., México: Trillas.
- Cantoral R., Covián O., Farfán R., Lezama J., Romo A. (2008). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano*. D. F., México: Díaz de Santos S.A.
- Catalán, L., Caballero, C. y Moreira, M. (2010). Niveles de conceptualización en el campo conceptual de la Inducción electromagnética. Un estudio de caso [Versión electrónica]. *Latin American Journal of Physics*, 4(1), 126-142.

- Chabay, R. y Sherwood, B. (2006). Restructuring the introductory electricity and magnetism course [Versión electrónica]. *American Journal of Physics*, 74(4), 329-336.
- Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires, Argentina: Aiqué.
- Creswell, J.W. (2007). *Qualitative inquiry and research design: choosing among five approaches*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Cui, L., Rebello, S. y Bennett, A. G. (2005). College Students' transfer from calculus to physics [Versión electrónica]. *Physics education research conference*, 80(1), 37-40.
- D'Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución [Versión electrónica]. *Uno*, 35(1), 90-106.
- De las Fuentes, M., Arcos, J. y Navarro, C. (2010). Impacto en las competencias matemáticas de los estudiantes de ecuaciones diferenciales a partir de una estrategia didáctica que incorpora la calculadora [Versión electrónica]. *Formación Universitaria*, 3(3), 33-44.
- Devore, J. L. (1998). *Probabilidad para ingeniería y ciencias*. D.F., México: International Thomson Editores.
- Dunn, J. W. y Barbanel, J. (2000). One model for an integrated math/physics course focusing on electricity and magnetism and related calculus topics [Versión electrónica]. *American Journal of Physics*, 68(8), 749-757.
- Dupin, U. y Joshua, S. (1990). Una analogía térmica para la enseñanza de la corriente continua en electricidad: descripción y evaluación [Versión electrónica]. *Enseñanza de las Ciencias*, 8(1), 119-126.
- Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.
- Duval, R. (2000). *Basic issues for research in mathematics education*. En: T. Nakahara and M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the*

- International Group for the Psychology of Mathematics Education I, (pp. 55–69), Hiroshima University, Hiroshima, Japan.
- Duval, R. (2006a). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics [Versión electrónica]. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 106-131.
- Duval, R. (2006b). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación [Versión electrónica]. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168.
- Ferreira, A. y González, E.M. (2000). Reflexiones sobre la enseñanza de la física universitaria [Versión electrónica]. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(2), 189- 199.
- Feynman, R. (1987). *Física, Volumen II: Electromagnetismo y materia*. California, Estados Unidos: Adison- Wesley Iberoamericana.
- Flores, S. y González, M.D. (2006). Problemas de aprendizaje de la integral de línea en el contexto de la teoría electromagnética [Versión Electrónica]. *CulCyT*, 3(14), 45-54.
- Franklin, B. (1751). *Experiments and observations on electricity: made at Philadelphia in America*. London, England: Printed and sold by E. Cave.
- Furió, C. y Guisasola, J. (1997). Historia y epistemología de las ciencias [Versión Electrónica]. *Enseñanza de las Ciencias*, 15(2), 259-271.
- Furió, C. y Guisasola, J. (1998). Dificultades de aprendizaje de los conceptos de carga y de campo eléctrico en los estudiantes de bachillerato y de universidad [Versión Electrónica]. *Enseñanza de las Ciencias*, 16(1), 131-146.
- Furió, C. y Guisasola, J. (1999) Concepciones alternativas y dificultades de aprendizaje en electrostática. Selección de cuestiones elaboradas para su detección y tratamiento [Versión electrónica]. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(3), 441-452.
- Furió, C. y Guisasola, J. (2001). La enseñanza del concepto de campo eléctrico basada en un modelo de aprendizaje como investigación orientada [Versión electrónica]. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(2), 319-334.
- Furió, C. Guisasola, J. y Zubimendi, J. (1998). Problemas históricos y dificultades de aprendizaje en la interpretación newtoniana de fenómenos electrostáticos considerados elementales [Versión electrónica]. *Investigações em Ensino de Ciências*, 3(3), 168-188.

- George, D. y Mallery, P. (1995). *SPSS/PC+ step by step: A simple guide and reference*. California, Estados Unidos: Wadsworth Publishing Company.
- Gentner, D. y Stevens, A. L. (1983). *Mental models*. New Jersey, Estados Unidos: Lawrence Erlbaum Associates.
- Giancoli, D. (2002). *Volumen II. Física para universitarios*. D.F., México: Prentice Hall.
- Gil, D. (1993). Contribución de la historia y filosofía de las ciencias al desarrollo de un modelo de enseñanza/aprendizaje como investigación [Versión electrónica]. *Enseñanza de las Ciencias*, 11(2), 197-212.
- Gil, D. y Vilches, A. (1999). Problemas de la educación científica en la enseñanza secundaria y en la universidad: Contra las evidencias [Versión electrónica]. *Revista Española de Física*, 13(5), 10-15.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática [Versión electrónica]. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22 (2/3), 237-284.
- Godoy, L.A. (2002). Sobre la estructura de las analogías en la ciencia [Versión electrónica]. *Interciencia*, 27(8), 422-429.
- Goldberg, F. y Bendall, S. (1995). Making the invisible visible: a teaching/learning environment that builds on a new view of the physics learner [Versión electrónica]. *American Journal of Physics*, 63(11), 978-991.
- Grattan-Guinness, I. (1984). *Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos, 1630-1910. Una Introducción Histórica*. Madrid, España: Alianza Editorial.
- Grattan-Guinness, I. (1991). ¿Qué es y qué debería ser el Cálculo? [Versión electrónica]. *Mathesis*, 7(3), 363-387.
- Greca, I. y Moreira, M. (1998). Modelos mentales y aprendizaje de física en electricidad y magnetismo [Versión electrónica]. *Enseñanza de las Ciencias*, 16(2), 289-303.
- Griffiths, D. (1999). *Introduction to Electrodynamics*. New Jersey, United States of America: Prentice Hall.
- Guisasola, J., Almudí, J.M. y Zubimendi, J.L. (2003). Dificultades de aprendizaje de los estudiantes universitarios en la teoría del campo magnético y elección de los objetivos de enseñanza [Versión electrónica]. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(1), 79-94.

- Guisasola, J., Almudí, J.M. y Zuza, K. (2010). Dificultades de aprendizaje de los estudiantes universitarios en el aprendizaje de la inducción electromagnética [Versión electrónica]. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 32(1), 1401-1-1401-9.
- Guisasola, J., Gras-Mart, A. y Martínez-Torregrosa, J. (2004). ¿Puede ayudar la investigación en la enseñanza de la Física a mejorar su docencia en la universidad? [Versión electrónica]. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 26(3), 197-202.
- Guisasola, J., Salinas, J., Almudí, J.M. y Velazco, S. (2003). Análisis del proceso de aplicación de las Leyes de Gauss y Ampere por estudiantes universitarios de España y Argentina [Versión electrónica]. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 25(2), 195-206.
- Guisasola, J., Zubimendi, J.L., Almudí, J.M. y Ceberio, M. (2007). Propuesta de enseñanza en cursos introductorios de Física en la universidad, basada en la investigación didáctica: siete años de experiencia y resultados [Versión electrónica]. *Enseñanza de las Ciencias*, 25(1), 91-106.
- Hallik, D., Resnick, R. y Walker, J. (2001). *Volumen 2. Fundamentos de Física*. Distrito Federal, México: CECSA.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, L. (2006). *Metodología de la Investigación*. Distrito Federal, México: McGraw Hill Interamericana.
- Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education [Versión electrónica]. *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 235-261.
- Johnson, R. B. y Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed methods research: A research paradigm whose time has come [Versión electrónica]. *Educational Researcher*, 33(7), 14-26.
- Ladera, C. (1994). *Maxwell, Einstein*. Caracas, Venezuela: Ediciones CENAMEC.
- Larson, R. E. (2005). *Cálculo Diferencial e Integral*. D.F., México: McGraw- Hill.
- Leithold, L. (1992). *El Cálculo con Geometría Analítica*. D.F., México: Harla.
- Llancaqueo, A., Caballero, M.C. y Moreira, A. (2003). El aprendizaje del concepto de campo en Física: Una Investigación Exploratoria a Luz de la Teoría de Vergnaud [Versión electrónica]. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 25(4), 399-417.

- Maloney, D. P., O'Kuma, T. L., Hieggelke, C. J. y Van Heuvelen, A. V. (2001). Surveying students' conceptual knowledge of electricity and magnetism [Versión electrónica]. *Physics Education Research, American Journal of Physics Supplement*, 69(7), 12-23.
- Martín, J. y Solves, J. (2001). Diseño y evaluación de una propuesta para la enseñanza del concepto de campo en Física [Versión electrónica]. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(3), 393-403.
- Martínez, A., (2008). Aprendizaje de competencias matemáticas [Versión electrónica]. *Revista Avances en Supervisión Educativa*, 8(5), 29-53.
- Martínez-Torregrosa, J., López-Gay, R. y Gras-Mart, M. A. (2002). La diferencial no es un incremento infinitesimal. Evolución del concepto de diferencial y su clarificación en la enseñanza la Física [Versión electrónica]. *Enseñanza de las Ciencias*, 20(2), 271-283.
- Maxwell, J.C. (1879). *Treatise in Electriciry and Magnetism. Vol. 1*. Londres, Inglaterra: Publishes to de University of Oxford.
- Mc Dermott, L.C, Rosenquist, M.L y Van Zee, E.H. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics [Versión electrónica]. *American Journal of Physics*, 55(6), 503-513.
- Mendoza, A. (2001). Una prueba para identificar preconcepciones electromagnéticas y sus implicaciones en la enseñanza de la fisica/A test for identifying electromagnetics preconceptions and their implications in Physics teaching [Versión electrónica]. *Journal of Science Education*, 2(1), 13-19.
- Merriam, S.B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education*. San Francisco, CA: Jossey Bass.
- Monk, M. (1994). Mathematics in physics education: a case of more haste less speed [Versión electrónica]. *Physics Education*, 29(4), 209-211.
- Muñoz-Chapuli, R. (1995). Escribir para aprender: ensayo de una alternativa para la enseñanza universitaria de las ciencias [Versión electrónica]. *Enseñanza de las Ciencias*, 13(3), 273-278.
- Oliva, J. M. (2004). El pensamiento analógico desde la investigación educativa y desde la perspectiva del profesor de ciencias [Versión electrónica]. *Enseñanza de las Ciencias*, 3(3), 363-384.

- Pérez, C. (2002). *Estadística descriptiva: Variables cualitativas y tablas de contingencia. Estadística aplicada a través de Excel*. Madrid, España: Prentice Hall.
- PISA (2003). Pruebas de Matemáticas y Solución de Problemas, Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid, España. Recuperado el 06 de noviembre de 2012, de: http://www.educacion.gob.es/dctm/ievaluacion/internacional/pisa2003liberados.pdf?documentId=0901e72b801106c6http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/index.php?vol=2&index_web=8&index_mgzne
- Pulido, R. (1998). *Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso escolar: la transposición didáctica del diferencial en la física y la matemática escolar*. Disertación Doctoral. Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV. México.
- Pulido, R. (2004). *Calculus textbooks in the American continent: A guarantee for not understanding physics*. Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Ontario Institute for Studies in Education, Toronto, Ontario, Canada.
- Pulido, R. (2007). De la regla de tres a la ecuación de continuidad (o la innovación en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo. En Cantoral, R., Covian, O., Farfán, R., Lezama, J. y Romo A. (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte latinoamericano* (pp. 113-132). D.F., México: Clame.
- Pulido, R. (2010). *La enseñanza de los diferenciales en las escuelas de ingeniería desde un enfoque socioepistemológico*. *Relime*, 13(4), 85-97.
- Purcell, E. J. (2007). *Cálculo*. D. F., México: Pearson Prentice-Hall.
- Redish, E. (1994). Implications of cognitive studies for teaching physics [Versión electrónica]. *American Journal of Physics*, 62(9), 796-803.
- Ruiz, J. I. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Bilbao, España: Universidad de Deusto.
- Sabella, M. y Redish, E. (2007). Knowledge organization and activation in physics problem solving [Versión electrónica]. *American Journal of Physics*, 75(11), 1017-1028.
- Salinas, N. P. (2010). *Un estudio socioepistemológico sobre el método de Euler como generador de procedimientos y nociones del cálculo en el contexto del estudio*

del cambio. Disertación Doctoral. Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV. México.

- Salinas, N. P. y Alanís, J.A. (2009).Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo en una Institución Educativa [Versión electrónica]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12(3), 355-382.
- Salinas, P., Alanís, J.A. y Pulido, R. (2011). Cálculo de una variable. Reconstrucción para el aprendizaje y la enseñanza. [Versión electrónica]. *Didac*, 56-57(1), 62-69.
- Salinas, N. P., Alanís, J. A., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J. C., y Garza, J. L. (2002). *Elementos del cálculo: reconstrucción conceptual para el aprendizaje y la enseñanza*. D.F., México: Trillas.
- Salinas, N. P., Alanís, J. A., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J. C., y Garza, J. L. (2003). *Elementos del cálculo: reconstrucción conceptual para el aprendizaje y la enseñanza*. D.F., México: Trillas.
- Salinas, P., Alanís, J. A., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J. C., y Garza, J. L. (2011). *Cálculo Aplicado: Competencias matemáticas a través de contextos. Tomo I*. D.F., México: CENGAGE Learning.
- Salinas, P., Alanís, J. A., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J. C., y Garza, J. L. (2012). *Cálculo Aplicado: Competencias matemáticas a través de contextos. Tomo II*. D.F., México: CENGAGE Learning.
- Salinas, P., Alanís, J. A., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J. C., y Garza, J. L. (2013). *Cálculo Aplicado: Competencias matemáticas a través de contextos. Tomo III*. D.F., México: CENGAGE Learning.
- Sandoval, M. y Mora, C. (2009). Modelos erróneos sobre la comprensión del campo eléctrico en estudiantes universitarios [Versión electrónica]. *Latin American Journal Physics Education* 3(3), 647-655.
- Satre, P., Boubée, C., Rey, G. y Delorenzi, O. (2008). La comprensión: proceso lingüístico y matemático [Versión Electrónica]. *Revista Iberoamericana de Educación*, 46(8), 1-9.
- Scott, P., Asoko, H. y Leach, D. (2007). Student conceptions and conceptual learning in science [Versión electrónica]. En S. K. Abell y N. G. Lederman (Eds.) *Handbook of Research on Science Education* (pp. 31-56). Mahwah, NJ, Estados Unidos: Lawrence Erlbaum Associates.

- Serway, R. y Beichner, R. (2008). *Tomo II. Física para Ciencias e Ingeniería*. D.F., México: McGraw-Hill.
- Singh, C. (2006). Student understanding of symmetry and Gauss's law of electricity [Versión electrónica]. *American Journal of Physics*, 74(10), 923-936.
- Spradley, J. (1980). *Participant Observation*. Belmont, CA: Wadsworth Cengage Learning.
- Sternberg, R.J. (1986). *Intelligence applied*. San Diego, CA: Harcourt.
- Stewart, J. (2006). *Cálculo diferencial e integral*. D.F., México: Thomson Corporation.
- Tipler, P. (2008). *Tomo II. Física*. Barcelona, España: Reverté.
- Thomas, G. B. y Finney, R. L. (1987). *Cálculo con Geometría Analítica*. D.F., México: Addison Wesley Iberoamericana.
- Tobías, S. (2000). From innovation to change: forging a physics education reform agenda for the 21 st century [Versión electrónica], *American Journal of Physics*, 68(2), 103-104.
- Vogt, W. P. (2007). *Quantitative research methods for professionals*. Boston, MA, Estados Unidos: Pearson / Allyn and Bacon.
- Zill, D. G. (2005). *Precálculo con preliminares del cálculo*. D.F., México: McGraw-Hill Education.

Apéndices

Apéndice A: Secuencia didáctica empleada en el M3DI

Situación Problema 14

Unidad 3: Análisis de Campos Vectoriales

Tema 1: Flujo

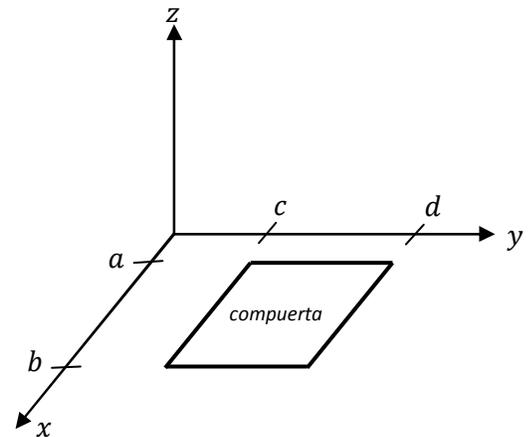
Introducción

Con la siguiente Situación Problema retomamos la idea de flujo. Dos de las situaciones que se proponen ya las hemos discutido antes, el volverlas a considerar aquí tiene la intención de presentar un tratamiento global y continuo del tema. Hay una situación más que es nueva, no por ello complicada: un fluido cuyo movimiento no es perpendicular a la compuerta por la que pasa. Se desea construir una fórmula para el flujo que contemple estos casos y a la situación más general que será presentada en la sección de consideraciones alrededor de esta Situación Problema.

SITUACIÓN-PROBLEMA 14

A) Considera la compuerta señalada en la figura siguiente, la cual consiste de los puntos en el plano xy que satisfacen las desigualdades: $a \leq x \leq b$ y $c \leq y \leq d$, e imagina que en cada punto de ella, el agua la atraviesa perpendicularmente con **rapidez constante** v mts/seg y en dirección positiva del eje z .

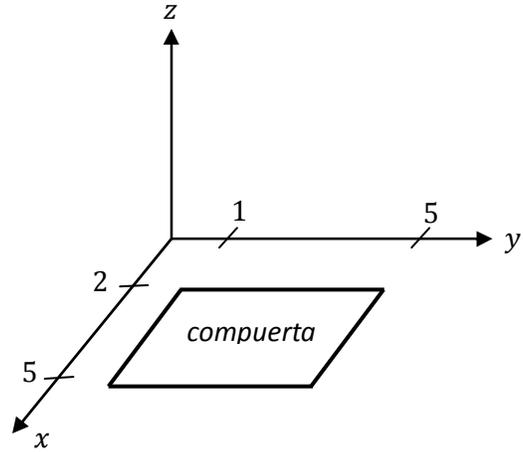
1. Dibuja el vector velocidad correspondiente al movimiento del agua en cada una de las esquinas de la compuerta.
2. Si colocáramos el vector velocidad en todos los puntos de la compuerta, ¿Qué figura se formaría?
3. Calcula el flujo de agua a través de la compuerta en dirección positiva del eje z .
4. ¿Qué relación tiene este flujo con la figura del punto 2?



B) Ahora consideremos la compuerta descrita por las siguientes expresiones: $2 \leq x \leq 5$, $1 \leq y \leq 5$ y $z = 0$ y de nueva cuenta supongamos que el agua fluye a través de cada

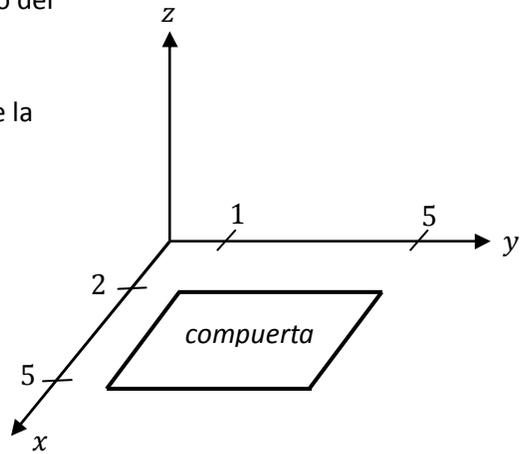
punto de la compuerta pero ahora con una velocidad de acuerdo a la fórmula $\vec{v}(x, y, z) = y\vec{k}$.

1. Dibuja la figura que se formaría si colocáramos los vectores de velocidad correspondientes a todos los puntos de la compuerta.
2. Calcula el volumen de la figura del inciso anterior.
3. ¿Qué relación tiene el volumen de esta figura con el flujo de agua a través de la compuerta en dirección del eje z positivo?.



C) Consideremos la compuerta anterior y que la velocidad del agua está dada por $\vec{v} = 0\vec{i} + \vec{j} + \sqrt{3}\vec{k}$.

1. Dibuja el vector velocidad correspondiente al movimiento del agua en cada una de las esquinas de la compuerta.
2. Si colocáramos el vector velocidad en todos los puntos de la compuerta, ¿Qué figura se formaría?
3. Calcula el volumen de la figura del punto anterior.
4. ¿Qué relación tiene el volumen de esta figura con el flujo de agua a través de la compuerta en dirección del eje z positivo?



Nombre: _____ Matricula: _____
 ¿Cursaste Matemáticas III para ingeniería? sí no estoy cursando..... Nombre del profesor (Mate III): _____

1. La Ley de Gauss establece “que el flujo eléctrico neto a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga neta encerrada por la superficie, dividida por ϵ_0 ”.

Ley de Gauss $\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$

En la siguiente tabla, expresa con palabras el significado de los símbolos involucrados en la Ley de Gauss.

Símbolo Φ_E
Significado
Relación que tiene con la superficie gaussiana

Símbolo \oint
Significado
Relación que tiene con la superficie gaussiana
Símbolo \mathbf{E}
Significado
Relación que tiene con la superficie gaussiana
Símbolo $d\mathbf{A}$
Significado
Relación que tiene con la superficie gaussiana

Símbolo $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$
Significado
Relación que tiene con el flujo
Símbolo $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$
Significado
Relación que tiene con el flujo
Símbolo q_{in}
Significado
Relación que tiene con la superficie gaussiana

2. Se quiere calcular el campo eléctrico en el punto P, que se encuentra a una distancia r de una línea de carga positiva y de longitud infinita cuya carga por unidad de longitud λ sea constante (ver figura 5). Para calcular el campo eléctrico se considera una superficie cilíndrica gaussiana de longitud l y la Ley de Gauss, que se escribe como

$$\phi_e = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

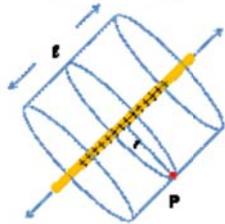


Figura 5

El campo eléctrico \mathbf{E} en el punto P, se puede calcular a través del procedimiento siguiente:

$$\phi_e = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E \oint dA = EA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} ;$$

$$E(2\pi r l) = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} ;$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = 2k_e \frac{\lambda}{r}$$

- a) En esta parte del procedimiento los símbolos que están señalados, ¿representa lo mismo? Argumenta tu respuesta.

$$\phi_e = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E \oint dA$$

- b) En esta parte del procedimiento los símbolos que están señalados, ¿representa lo mismo? Argumenta tu respuesta.

$$\phi_e = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E \oint dA$$

- c) En esta parte del procedimiento ¿qué paso con el punto que estaba dentro de la integral, porque ya no está posteriormente? Argumenta tu respuesta.

$$\phi_e = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E \oint dA$$

- d) En esta parte del procedimiento ¿qué representa la expresión EA ? considerando la superficie gaussiana de la figura 5. Argumenta tu respuesta.

- e) En esta parte del procedimiento, ¿es correcto escribir el símbolo de la integral como se muestra en el procedimiento original, en el procedimiento modificado o en ambos? Argumenta tu respuesta.

Procedimiento original

$$\phi_e = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E \oint dA = EA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

Procedimiento modificado

$$\phi_e = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E \int dA = EA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

- f) En esta parte del procedimiento, ¿qué parte de la superficie gaussiana del cilindro se está considerando para que esa sea la solución? Argumenta tu respuesta.

- g) En esta parte del procedimiento, ¿qué se obtiene finalmente como resultado? Selecciona la respuesta correcta. Argumenta tu respuesta.

La magnitud del campo eléctrico

El campo eléctrico

Las dos opciones anteriores

Apéndice C: Resultados de la prueba piloto.

Análisis y discusión de resultados de la implementación del examen de preguntas de la prueba piloto. En este apéndice se presenta el análisis y discusión de resultados de la implementación del examen de preguntas abiertas de la prueba piloto. La aplicación del instrumento de preguntas abiertas (prueba piloto) se llevó a cabo durante un periodo de tres semanas. Los participantes fueron 46 en total, 23 alumnos que hubieran llevado el curso de Matemáticas para ingeniería con el DI (GM3DI), y 23 alumnos que no (GM3T); y que estaban cursando Electricidad y Magnetismo (alumnos inscritos en carreras de ingeniería de tercer a quinto semestre).

Descripción y análisis de los porcentajes de patrones de respuestas encontradas del examen de preguntas abiertas y opción múltiple. En el primer set (de la 1 a la 7) del examen de preguntas abiertas, se cuestiona el significado de los símbolos involucrados en la Ley de Gauss $\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$ (ver Apéndice B). Las respuestas de esta pregunta, se agrupan en primera instancia revisando el proceso semiótico de conversión (lenguaje simbólico al lenguaje natural) que se da para cada uno de los elementos que conforman la expresión matemática de la Ley de Gauss. La categorización se realizó de acuerdo a los patrones de respuesta encontrados para cada pregunta (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). A continuación se presenta un análisis de las respuestas encontradas para este examen. Para cada pregunta se realiza una prueba de hipótesis para tablas de contingencia con el objetivo de probar si las diferencias entre las respuestas obtenidas para cada uno de los dos grupos son

estadísticamente significativas. La hipótesis que se utilizan para este análisis son las siguientes:

H_0 : Las respuestas obtenidas en cada reactivo son independientes del grupo al que pertenece el estudiante.

H_1 : Las respuestas obtenidas en cada reactivo son dependen del grupo al que pertenece el estudiante.

En cada tabla de contingencia se usó un nivel de significancia de 5%. El nivel de significancia se interpreta como la probabilidad de error de la prueba para señalar que sí hay diferencia significativa cuando no la hay. Se utiliza el estadístico χ^2 , con 2 grados de libertad (número de renglones – 1) (número de columnas – 1).

La Tabla 21 muestra las categorías encontradas para la respuesta del significado del símbolo de flujo eléctrico Φ que son las siguientes: a) es el flujo eléctrico (19.57%); b) Es el número de líneas del campo eléctrico que pasan por la superficie gaussiana (17.39%); c) es el flujo del campo eléctrico que atraviesa una superficie gaussiana (63.04%). En la primera categoría se puede observar que sólo se le está dando lectura al símbolo de flujo eléctrico Φ ; en la segunda se puede notar que hay un significado asociado a este símbolo (proceso semiótico de conversión), en particular, se le está dando un significado cuya fuente u origen está en el libro de texto de física escolar (Serway y Beichner, 2008); y en la tercera también se presenta un significado asociado a este símbolo (proceso semiótico de conversión), este significado también está dado en los libros de textos de la física escolar, pero a

diferencia del anterior no hace referencia a las líneas de campo, si no se expresa como un flujo.

En la Tabla 21 compara las respuestas en los dos grupos considerados. Se realizó la prueba estadística de independencia para esta tabla de contingencia. El estadístico que se ha utilizado en esta prueba de hipótesis es χ^2 . Para este caso su valor es de 6.300; siendo su valor crítico de $\chi^2_{2,05} = 5.992$. Por lo cual χ^2 muestral es mayor al teórico ($\chi^2_{calc} > Valor\ crítico$) entonces se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa, esto es, con un nivel de significancia de 5%, se concluye que la respuesta dada en este reactivo por los estudiantes depende del grupo al que pertenece y las diferencias observadas entre los dos grupos no se deben al azar.

Tabla 21

Resultados de la prueba piloto: Categorías de las respuestas encontradas del significado de flujo eléctrico

Categorías encontradas del significado de flujo eléctrico Φ_E	GM3DI	GM3T	Total de respuestas del significado de flujo eléctrico Φ_E
Flujo eléctrico (Lectura)	4 (8.70%)	5 (10.87%)	9 (19.57%)
Es el número de líneas del campo eléctrico que pasan por la superficie gaussiana (Proceso de conversión semiótico)	1 (2.17%)	7 (15.22%)	8 (17.39%)
Es la cantidad de campo eléctrico que atraviesa una superficie gaussiana (Proceso de conversión semiótico)	18 (39.13%)	11 (23.91%)	29 (63.04%)

La Tabla 22 muestra las categorías encontradas para la respuesta del significado del símbolo del campo eléctrico E que son las siguientes: a) representa las líneas del campo eléctrico (10.87%); b) es el Campo eléctrico que atraviesa la superficie gaussiana y no se reconoce que es vectorial (43.48%); c) es el campo eléctrico que atraviesa la superficie gaussiana y se reconoce que es vectorial (45.65%). En la primera categoría se puede observar que sólo se le está dando lectura al símbolo E , no se hace alusión o reconocimiento de que es vectorial y utiliza la definición del libro de texto; en la segunda si se describe en términos del campo pero no se reconoce que es vectorial (proceso semiótico de conversión); en la tercera se puede notar que hay un significado asociado a este símbolo (proceso semiótico de conversión) debido a que se describe como un campo y también se reconoce que es vectorial. El estadístico que se ha utilizado en esta prueba de hipótesis es χ^2 . Para este caso su valor es de 7.457; siendo su valor crítico de $\chi^2_{2,05} = 5.992$. Por lo cual χ^2 muestral es mayor al teórico ($\chi^2_{calc} > Valor\ crítico$) entonces se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa, esto es, con un nivel de significancia de 5%, se concluye que la respuesta dada en este reactivo por los estudiantes depende del grupo al que pertenece y las diferencias observadas entre los dos grupos no se deben al azar.

Tabla 22

Resultados de la prueba piloto: Categorías de las respuestas encontradas del significado de campo eléctrico E

Categorías encontradas del significado de campo eléctrico E	GM3DI	GM3T	Total de respuestas del significado del campo eléctrico E
Representa las líneas del campo eléctrico (Lectura)	1 (2.17%)	4 (8.70%)	5 (10.87%)
Es el Campo eléctrico que atraviesa la superficie gaussiana y no se reconoce que es vectorial (Lectura)	7 (15.22%)	13 (28.26%)	20 (43.48%)
Es el Campo eléctrico que atraviesa la superficie gaussiana y se reconoce que es vectorial (Proceso de conversión semiótico)	15 (32.61%)	6 (13.04%)	21 (45.65%)

La Tabla 23 muestra las categorías encontradas para la respuesta del significado del símbolo del diferencial de área dA que son las siguientes: a) diferencial de área (19.57%); b) es un pedacito infinitesimal de la superficie gaussiana, y no se reconoce que es vectorial (39.13%); c) es un pedacito infinitesimal de la superficie gaussiana y se reconoce que es vectorial (41.30%). En la primera categoría se puede observar que sólo se le está dando lectura al símbolo diferencial de área dA , incluso no se hace alusión o reconocimiento de que es vectorial; en la segunda si se reconoce que es un diferencial de área y que es infinitamente pequeño, pero no se hace alusión a que consideraciones que es una cantidad vectorial; en la tercera se puede notar que hay un significado asociado a este símbolo (proceso semiótico de conversión) y hay un reconocimiento de que es vectorial. El estadístico que se ha utilizado en esta prueba de hipótesis es χ^2 , para este caso su valor es de 16.339; siendo su valor crítico de $X^2_{2,05} = 5.992$. Por lo cual X^2 muestral es mayor al teórico ($X^2_{calc} > Valor\ crítico$) entonces se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa, esto es, también para esta pregunta concluimos que la respuesta dada en este reactivo por los estudiantes depende del grupo al que pertenece.

Tabla 23

Resultados de la prueba piloto: Categorías de las respuestas encontradas del significado de: diferencial de área dA

Categorías encontradas del significado del diferencial de área dA	GM3DI	GM3T	Total de respuestas del significado del diferencial de área dA
Diferencial de área (Lectura)	1 (2.17%)	8 (17.39%)	9 (19.57%)
Es un pedacito infinitesimal de la superficie gaussiana, y no se reconoce que es vectorial (Proceso de conversión semiótico)	6 (13.04%)	12 (26.09%)	18 (39.13%)
Es un pedacito infinitesimal de la superficie gaussiana y se reconoce que es vectorial (Proceso de conversión semiótico)	16 (34.78%)	3 (6.52%)	19 (41.30%)

La Tabla 24 muestra las categorías encontradas para la respuesta del significado del símbolo $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ que son las siguientes: a) es el campo eléctrico “por” el diferencial de área (19.57%); b) es el campo eléctrico “producto punto” el diferencial de área (21.74%); c) diferencial de flujo (58.70%). En la primera categoría se puede observar que sólo se le está dando lectura al símbolo $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$, no se hace alusión o reconocimiento de son dos cantidades vectoriales y que el producto punto entre ellas es el diferencial de flujo esta, es decir, esta expresión se interpreta como el campo eléctrico “por” diferencial de área (multiplicación entre campo eléctrico y diferencial de área). En la segunda se puede notar que hay un significado asociado a esta expresión (proceso semiótico de conversión) donde hay un reconocimiento del producto punto entre dos cantidades vectoriales y a su vez, lo que está dentro de la integral es un diferencial de flujo. El estadístico de prueba χ^2 , calculado es de 8.84; siendo su valor crítico de $\chi_{2,05}^2 = 5.992$. Por lo cual χ^2 estimado es mayor al teórico ($\chi_{calc}^2 > Valor\ crítico$) entonces se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa, esto es, la respuesta dada en este reactivo por los estudiantes depende de a cuál de los dos grupos pertenecen.

Tabla 24

Resultados de la prueba piloto: Categorías de las respuestas encontradas del significado del símbolo $E \cdot dA$

Categorías encontradas del significado encontradas del significado de $E \cdot dA$	GM3DI	GM3T	Total de respuestas del significado del diferencial de área $E \cdot dA$
Es campo eléctrico “por” diferencia de área(Lectura)	1 (2.17%)	8 (17.39%)	9 (19.57%)
Es campo eléctrico “producto punto” diferencia de área(Lectura)	4 (8.70%)	6 (13.04%)	10 (21.74%)
Es diferencial de flujo (Proceso de conversión semiótico)	18 (39.13%)	9 (19.57%)	27 (58.70%)

La Tabla 25 muestra tres categorizaciones para la respuesta del significado de los símbolos de la integral cerrada del producto punto entre el campo eléctrico y el diferencial de área. $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ que son las siguientes: a) integral del campo eléctrico “por” el diferencial de área (19.57%); b) “integral” del campo eléctrico producto punto el diferencial de área (45.65%), c) suma de todos los diferenciales de flujo eléctrico que pasa a través de toda la superficie (34.78%); En la primera categoría se puede observar que sólo se le está dando lectura al símbolo $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$, no se hace alusión o reconocimiento de son dos cantidades vectoriales y que el producto punto entre ellas es el diferencial de flujo esta, es decir, esta expresión se interpreta como la integral del campo eléctrico “por” diferencial de área (multiplicación entre campo eléctrico y diferencial de área). En la segunda, se puede notar que hay un significado asociado a esta expresión (proceso semiótico de conversión) donde hay un reconocimiento del producto punto entre dos cantidades vectoriales y a su vez, lo que está la integral se interpreta como una antiderivada a realizar. En la tercera, se puede notar que hay un significado asociado a esta expresión (proceso semiótico de conversión) donde hay un reconocimiento del producto punto entre dos cantidades vectoriales y a su vez, lo que está la integral se interpreta como una suma de diferenciales de flujo. En esta ocasión el estadístico de prueba χ^2 tuvo un valor calculado de 12.123; siendo su valor crítico de $\chi^2_{2,05} = 5.992$. Por lo cual χ^2 estimado mayor al crítico ($\chi^2_{calc} > Valor\ crítico$) entonces se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa, esto es, hay una tendencia por parte de los estudiantes a contestar diferente dependiendo del grupo al que pertenecen.

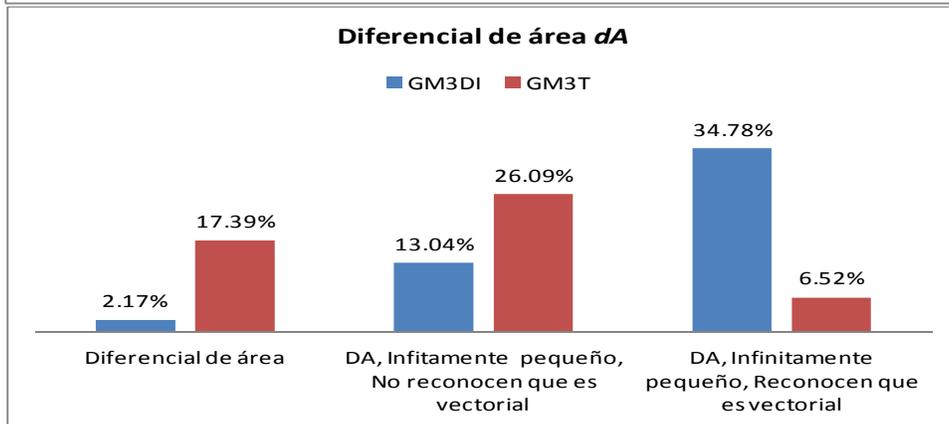
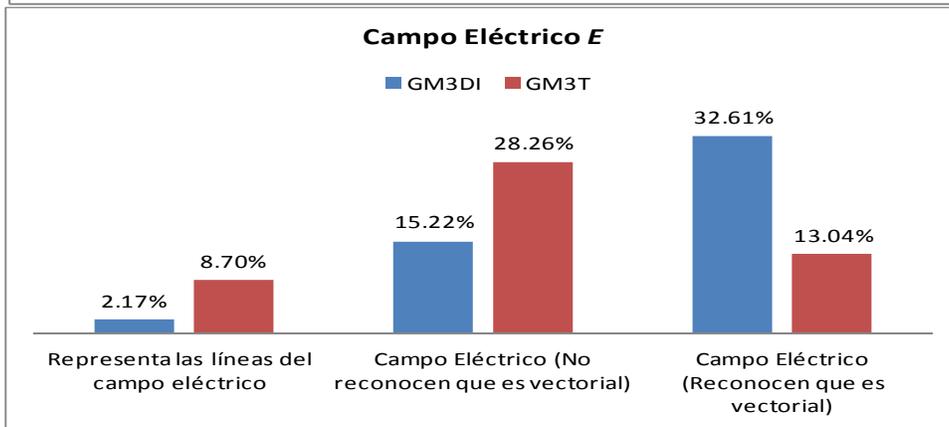
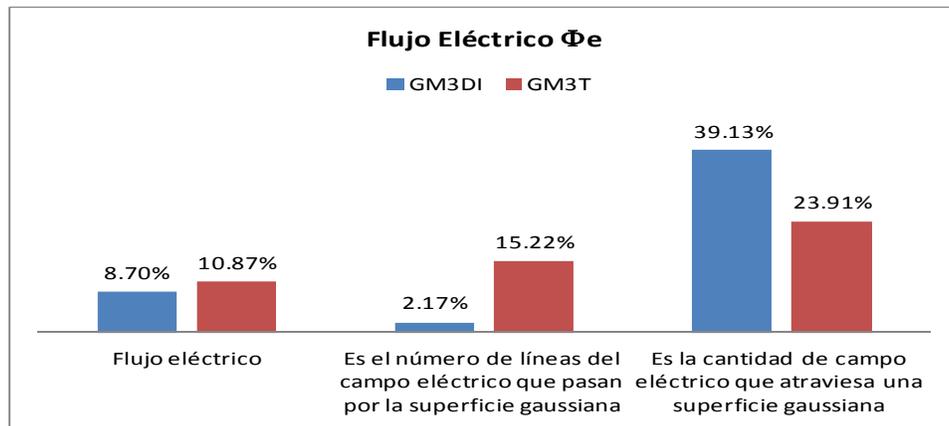
Tabla 25

Resultados de la prueba piloto: Categorías de las respuestas encontradas del significado del símbolo $\oint E \cdot dA$

Categorías encontradas del significado encontradas del significado de $\oint E \cdot dA$	GM3DI	GM3T	Total de respuestas del significado del diferencial de área $\oint E \cdot dA$
Es la integral del campo eléctrico “por” diferencia de área(Lectura)	1 (2.17%)	8 (17.39%)	9 (19.57%)
Es la integral del campo eléctrico “producto punto” diferencia de área(Lectura)	9 (19.57%)	12 (26.09%)	21 (45.65%)
Es la suma de diferenciales de flujo (Proceso de conversión semiótico)	13 (28.26%)	3 (6.52%)	27 (34.78%)

Basándose en las categorías formadas de las respuestas encontradas se condensó el instrumento en 8 reactivos con sus respectivas respuestas. Estos reactivos y sus respuestas fueron codificados con una rúbrica con la intención de generar una escala de Likert para cada reactivo. Las asignaciones de la escala fueron: 1 para cuando se da evidencia de un proceso muy bajo de asociación de significado (o nulo); 2 para cuando se da evidencia de un proceso medio de asociación de significado o el significado es referente al que se da al libro de texto; 3 para cuando se da evidencia de un proceso completo de asociación de significado. Así entre mayor sea el puntaje obtenido hay mayor evidencia de aprendizaje con significados, esto es, hay evidencia de que se da un proceso de conversión semiótica del lenguaje simbólico al lenguaje natural alrededor del concepto de flujo de un campo y hay evidencias de explicaciones a los procesos semióticos de tratamiento presentados. Por otro lado, los puntajes más bajos revelan menor evidencia de aprendizaje con significados, esto es, hay poca evidencia de que se da un proceso de conversión semiótica del lenguaje simbólico al lenguaje natural alrededor del concepto de flujo de un campo y poca evidencia de explicaciones a los procesos semióticos de tratamiento presentados. En la Tabla 5 se presenta esta rúbrica que fue aplicada a las respuestas obtenidas de los estudiantes de la implementación definitiva.

A continuación se muestra una comparación gráfica de los resultados obtenidos a partir de este examen de preguntas abiertas para las categorías encontradas.



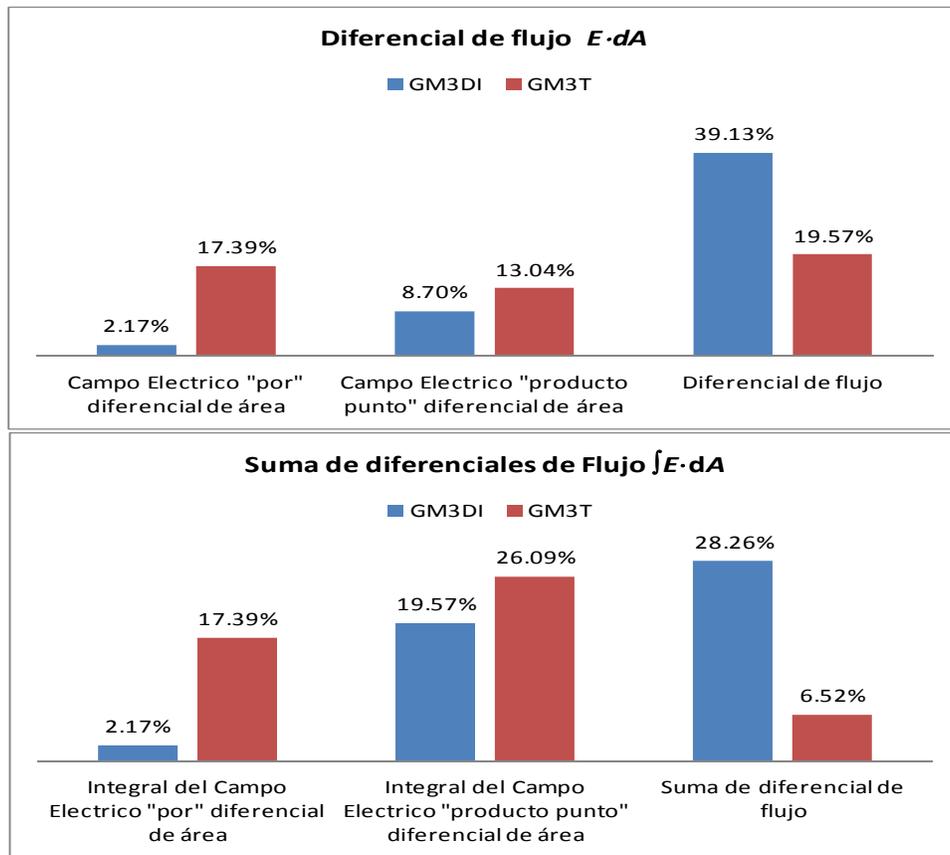


Figura 6. Resultados de la prueba piloto: Comparación gráfica de las respuestas encontradas para cada reactivo entre el GM3DI y GMT.

Para todos los resultados obtenidos el estadístico χ^2 muestral fue superior al valor teórico con un nivel de significancia de 0.05, por lo se puede mencionar que las respuestas encontradas en relación a estos significados si dependen del grupo donde está el estudiante.

Para la primera respuesta de derecha a izquierda para todos los gráficos los alumnos muestran evidencia de que lo que están realizando es un proceso de lectura del símbolo indicado. Para la respuesta de en medio, los estudiantes realizan un proceso de conversión y asocian un significado al símbolo cuestionado, este significado asociado está ligado, en algunos casos (como lo veremos en el capítulo siguiente), a definiciones expuestas en el libro de texto de la física escolar. Para la tercera respuesta hay evidencia de un proceso semiótico de conversión, aunado a que se describen las características de cada símbolo involucrado en la expresión del flujo. Como se puede apreciar en la Figura 6, para la respuesta 3 de todas las gráficas, el porcentaje de respuestas encontradas del GM3DI es mayor con respecto al GM3T, y el porcentaje de respuestas encontradas para la pregunta 1 de todos los gráficos (donde sólo hay evidencia de un proceso de lectura) es menor el porcentaje de respuestas encontradas del GM3DI es mayor con respecto al GM3T.

De la Figura 6, también se puede observar que de las categorías encontradas de las respuestas dadas se utilizaron algunos rubros para realizar una rúbrica (Tabla 5) que permitiera el escalamiento de estas respuestas como se verá en el capítulo siguiente.

Apéndice D: Guión de Entrevista

Fecha: _____ Hora: _____

Lugar (ciudad y sitio específico): _____

Entrevistador (a): _____

Entrevistado (a) (nombre, edad, género)

Introducción al objetivo de la entrevista

Descripción general de la investigación (propósito, participantes elegidos, motivo por el cual fueron seleccionados, utilización de los datos).

Preguntas

1. ¿Qué es el flujo eléctrico?
2. ¿Que son las líneas del campo eléctrico?
3. En esta ecuación $\varphi_E = \int \vec{E} \cdot \vec{da}$, ¿cómo interpretamos cada símbolo y qué significa la ecuación? (Es decir, que expresa la ecuación que significa el símbolo que acompaña a E y a da, que es un diferencial).
4. Si el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es cero, ¿eso significa que el campo eléctrico en cada punto de la superficie es cero? ¿Por qué?
5. ¿Cómo calculas el campo eléctrico para una alambre infinito con densidad de carga constante?
6. ¿Qué características tiene el campo que calculaste para la pregunta 5?
7. La ecuación que utilizaste en la pregunta 5, ¿es una integral de línea o de superficie? ¿Por qué? ¿Qué condiciones se deben de cumplir al hacer uso del diferencial?
8. ¿Qué contextos o qué tipo de analogías crees que pudiera facilitar el aprendizaje de este concepto?

Apéndice E: Rejilla de observación

PROYECTO DE INVESTIGACION
Introducción al concepto de flujo de un campo
Rejilla de Observación

Fecha:	
Hora de inicio:	Hora de terminación:
Observador:	
Situación a observar: Introducción al concepto de flujo de un campo	
Objetivos:	
Conceptos clave: flujo, campo, producto punto, uso de constructos matemáticos utilizados para el concepto desarrollado	
Tipo de observación: Observación Moderada.	
Contextualización:	

Observaciones:

Clase

Profesor

Alumnos

Ubicación física

Apéndice F: Hoja de consentimiento

Titulo del proyecto: La enseñanza y aprendizaje de flujo de un campo en el nivel superior.

Investigador: Cynthia C . Castro Ling

Después de haberme solicitado participar en el estudio de investigación y haber recibido la información acerca de los propósitos de la misma, así como los beneficios y riesgos que implica tomar parte en este estudio y haber tenido la oportunidad de plantear preguntas y comentarios al respecto. Estoy de acuerdo en participar en el estudio, de ser entrevistado con los propósitos planteados considerando que la información obtenida será tratada con estricta confidencialidad y exclusivamente con fines académicos.

Nombre y firma del participante

Fecha

Apéndice G: Ejemplos del análisis de respuestas del examen de preguntas abiertas

1) Respuestas dadas para el primer reactivo, pregunta 1

Símbolo φ_e
Significado Flujo Eléctrico
Relación que tiene con la superficie gaussiana

En este tipo de respuesta se observa un procedimiento de lectura del símbolo Φ

Símbolo Φ_E
Significado Flujo eléctrico
Relación que tiene con la superficie gaussiana Es el número de líneas de campo que atraviesan la superficie gaussiana.

En este tipo de respuesta se observa un significado asociado al símbolo Φ en términos de las líneas del campo

Símbolo Φ_E
Significado Flujo de campo eléctrico.
Relación que tiene con la superficie gaussiana Es la cantidad de campo eléctrico que pasa a través de una superficie gaussiana.

En este tipo de respuesta se observa un significado asociado al símbolo Φ en términos de la "cantidad" de campo

2) Respuestas dadas para el primer reactivo, pregunta 5

Símbolo $E \cdot dA$
Significado campo eléctrico por diferencial de área
Relación que tiene con el flujo

En este tipo de respuesta se observa un procedimiento de lectura de la expresión $E \cdot dA$

Símbolo $E \cdot dA$
Significado Producto punto entre \vec{E} y $d\vec{a}$
Relación que tiene con el flujo Te da la relación entre \vec{E} y el área de la superficie a través de la cual están "fluyendo". Y el flujo es la cantidad de líneas

En este tipo de respuesta se observa un significado asociado al símbolo Φ en términos de las líneas del campo

Símbolo $E \cdot dA$
Significado Es la proyección de E en dA multiplicada por la magnitud de dA , es el flujo en un pedazo diferencial de área
Relación que tiene con el flujo La suma de estos diferenciales de flujo da el flujo neto sobre la superficie.

En este tipo de respuesta se observa un significado asociado al símbolo $E \cdot dA$ que es un $d\Phi$ (diferencial de flujo)

Apéndice H: Planilla de validación

Estimado Validador:

Me es grato dirigirme a Usted, a fin de solicitar su inapreciable colaboración como experto para validar el cuestionario anexo, el cual será aplicado a:

Alumnos que cursan Física III y aprobaron la Materia de Matemáticas III para Ingeniería

Ha sido seleccionado, por cuanto considero que sus observaciones y subsecuentes aportes serán de utilidad.

El presente instrumento tiene como finalidad recoger información directa para la investigación que se realiza en los actuales momentos, titulado:

La enseñanza y el aprendizaje del concepto de flujo del campo eléctrico en el nivel superior

esto con el objeto de presentarla como requisito para obtener el título de:

Doctor en Innovación Educativa

Para efectuar la validación del instrumento, Usted deberá leer cuidadosamente cada enunciado y sus correspondientes alternativas de respuesta, en donde se pueden seleccionar una, varias o ninguna alternativa de acuerdo al criterio personal y profesional del actor que responda al instrumento. Por otra parte se le agradece cualquier sugerencia relativa a redacción, contenido, pertinencia y congruencia u otro aspecto que se considere relevante para mejorar el mismo.

Gracias por su aporte

INSTRUCCIONES:

Coloque en cada casilla la letra correspondiente al aspecto cualitativo que le parece que cumple cada reactivo, según los criterios que a continuación se detallan.

E= Excelente / B= Bueno / M= Mejorar / X= Eliminar / C= Cambiar

Las categorías a evaluar son: Claridad, congruencia y sesgo. En la casilla de observaciones puede sugerir el cambio correspondiente.

Reactivo	Claridad	Congruencia	Sesgo	Observación
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				

Evaluado por:

Nombre y Apellido: _____

Firma: _____

Apéndice I: Comparación de reactivos codificados en la escala de Likert de acuerdo con la rúbrica.

Tabla 26

Comparación de reactivos codificados en la escala de Likert de acuerdo con la rúbrica.

Examen	Reactivos															
	Reactivos de la Tabla 11								Reactivos por el validador experto							
	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R1E	R2E	R3E	R4E	R5E	R6E	R7E	R8E
1	1	1	2	3	2	1	1	1	1	2	2	3	2	1	1	1
2	1	2	2	1	1	1	1	2	1	2	2	1	1	1	1	2
3	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	2	1	2	2
4	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	2	2	1	2	1
5	1	2	3	3	3	2	2	2	1	2	2	3	3	2	2	2
6	1	1	1	3	2	2	1	1	1	2	2	3	2	2	1	2
7	2	3	2	3	2	3	3	3	2	3	2	3	2	3	3	3
8	2	1	1	2	2	1	2	1	2	1	1	2	2	1	2	1
9	2	2	2	2	2	3	3	1	2	2	2	2	3	3	3	1
10	2	1	1	2	2	1	2	1	2	1	1	2	2	1	2	1
11	2	2	2	2	2	3	3	1	2	2	2	2	2	2	3	2
12	2	1	1	2	2	2	2	2	3	2	2	3	2	2	2	2
13	2	1	1	2	3	2	1	2	2	2	2	2	3	1	1	2
14	3	3	3	2	3	3	2	3	3	3	3	2	3	3	2	3
15	3	2	2	3	3	1	1	2	3	2	2	3	3	1	1	2
16	3	3	3	1	2	3	3	3	3	3	2	1	2	3	3	3
17	3	3	3	3	2	3	3	3	3	3	2	3	2	3	2	3
18	3	2	2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2
19	3	3	3	3	2	3	3	3	3	3	3	3	2	3	3	3
20	3	2	2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2

Apéndice J: Resultados de la rejilla de observación

PROYECTO DE INVESTIGACION
Introducción al concepto de flujo en el curso de Electricidad y
Magnetismo
Rejilla de Observación

Fecha: 16 de Enero de 2012	
Grupo de Electricidad y Magnetismo	
Hora de inicio: 9: 05 AM	Hora de terminación: 10:00 AM
Observador: Cynthia C. Castro Ling	
Situación a observar: Clase de Electricidad y Magnetismo	
Objetivos: Formas de inducir al estudiante al concepto de flujo eléctrico	
Conceptos clave: Flujo, campo vectorial, producto punto, uso de constructos matemáticos utilizados para el concepto desarrollado.	
Tipo de observación: Moderada	
Contextualización: La clase se imparte en aulas 2 Salón ACE. Este salón cuenta con varias mesas de trabajo y puede acomodarse en equipos de 8 alumnos. Hay cuatro proyectores y una computadora. El profesor puede usar 7 pintarrones. El grupo está formado por 50 alumnos tercer y cuarto semestre de diversas ingenierías del Tecnológico de Monterrey Campus Monterrey. El profesor titular del curso es del Depto. de Física.	

Observaciones:

Clase

El tema de clase de hoy fue introducción al concepto de flujo eléctrico. El profesor inició la clase preguntando si leyeron el capítulo relacionado con el tema. La exposición fue apoyada con filminas y daba explicaciones en torno a éstas. Algunas de las filminas mostraban preguntas con 4 posibles respuestas. El profesor sometía a votación y los alumnos en un formato interactivo vía *wireless* emitían su respuesta. Si la mayoría no se ponía de acuerdo con la respuesta, el profesor los invitaba a volver a pensar sus respuestas. Se realizaba nuevamente la pregunta y con las ideas que exponían los alumnos se iba construyendo las respuestas al concepto o explicación al que el profesor deseaba llegar.

Profesor

De una manera cordial el profesor invitó a los alumnos a participar en los razonamientos que se daban para generar una respuesta relacionada con lo preguntaba alrededor del flujo eléctrico.

Alumnos

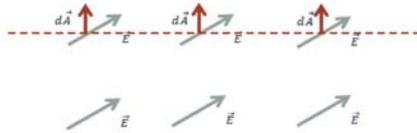
Los alumnos se sientan en mesa redonda lo cual los hace estar cercanos. Son mesas de 8 personas. Discuten sus ideas en un dialogo abierto tanto con el profesor como con sus compañeros de clase. Son estudiantes de tercer o cuarto semestre de diversas carreras de ingeniería. Algunos comentan las situaciones de su realidad donde creen haber reconocido los conceptos en clase.

Anotaciones de campo:

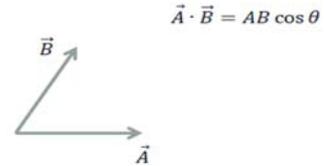
Durante el desarrollo de la clase se ve plasmado lo siguiente:

Para construir el concepto inicio con el análisis del comportamiento del campo eléctrico para una carga puntual y su interacción con otras cargas haciendo énfasis en el campo eléctrico como un vector. Definió que es un vector de área y cual es la dirección que éste asume por convención, el contexto utilizado en todo momento para estos dos conceptos fue el de Electricidad y Magnetismo. Presento las figuras que se muestran a continuación en unas filmas

Flujo Eléctrico



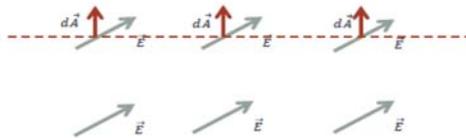
Producto punto



Menciono que el flujo es la proyección del campo eléctrico en la dirección en la cual se desea calcular el flujo a través de una superficie, lo cual a su vez, se puede poner matemáticamente como el producto punto entre el vector del campo y el vector del área.

Acto seguido, paso a la integral, como se muestra en los libros de texto.

Flujo Eléctrico $\Phi_e = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E \cos \theta dA$



Observaciones:

Finalmente se resuelven algunos ejercicios relacionados con la Ley de Gauss y con el flujo, si es positivo, negativo o cero, como se muestra a continuación:

Ordena el flujo a través de las superficies para los casos 1, 2 y 3 de abajo (la carga es la misma)

1 	2 	3
-------	-------	-------

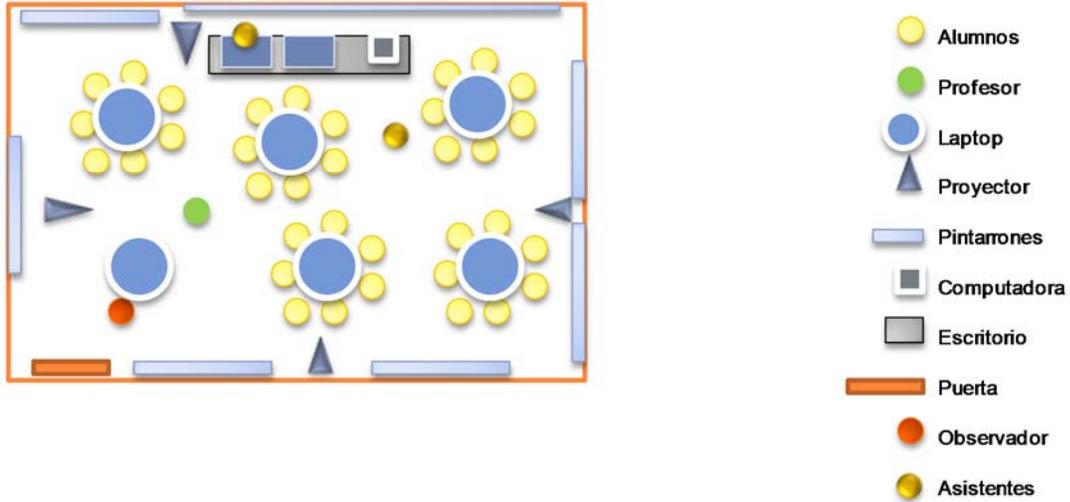
A. $1 > 2 > 3$
B. $1 = 2 = 3$
C. $1 < 2 < 3$
D. $1 = 2 < 3$

En el caso uno la carga está dentro de la superficie gaussiana. En el caso dos hay una carga adicional afuera de la superficie. ¿Cómo es el campo en los puntos de la superficie en el caso 1 comparado con los puntos en la superficie en el caso 2?

1 	2
-------	-------

A) El campo es el mismo
B) El campo es diferente
C) El campo es cero en el caso 2
D) No hay campo en ningún caso

Ubicación física.



PROYECTO DE INVESTIGACION
Introducción al concepto de flujo en el curso de Electricidad y
Magnetismo
Rejilla de Observación

Fecha: 16 de Abril de 2012	
Grupo de Matemáticas III para ingeniería	
Hora de inicio: 10:35 am	Hora de terminación: 12:00 PM
Observador: Cynthia C. Castro Ling	
Situación a observar: Desarrollo de la Situación Problema 14	
Objetivos: A través de una situación problema construir el concepto de flujo de un campo	
Conceptos clave: Flujo, campo vectorial, producto punto, uso de constructos matemáticos utilizados para el concepto desarrollado.	
Tipo de observación: Observación Moderada.	
Contextualización: La clase se imparte en aulas 2 Salón ACE. Este salón esta acondicionado para poder trabajar en equipo. Hay un proyector y computadora. Se puede escribir en un pintarron que tiene el salón. El grupo esta formado por 33 alumnos de tercer-cuarto semestre de nivel superior del Tecnológico de Monterrey Campus Monterrey. El profesor titular del curso es del Depto. de Matemáticas.	

Observaciones:

Clase

El tema de clase de hoy fue construir el concepto de flujo. El profesor inició la clase con una exposición. La exposición fue apoyada con filminas y daba explicaciones en torno a las filminas que iba proyectando. Las filminas iban dando el contenido de la Situación Problema 14 (ver Apéndice A). El contexto de la SP14 involucra una compuerta que esta ubicada en el salón de clases en el plano xy, a través de la compuerta se hace pasar agua. El fluido que penetra la compuerta está relacionado con un campo de velocidades. Inicialmente, el campo es constante, y la compuerta que a traviesa el fluido es plana. Para ello se pide a los alumnos ir contestando de forma individual, como serían los vectores del campo de velocidades en cada esquina de la compuerta. Posteriormente, se pide calcular el flujo a través de la compuerta, el campo de velocidades y el flujo van en la misma dirección. En la parte siguiente de la SP14, se pide calcular el flujo, cuando el campo de velocidades es variable, nuevamente, el campo de velocidades y el flujo van en la misma dirección. En la tercera parte de la SP14, se pide calcular el flujo, cuando el campo de velocidades es variable, en esta ocasión, el campo de velocidades y el flujo NO van en la misma dirección. Durante el proceso que los alumnos van elaborando sus respuestas hay interacción con el profesor y se va realizando la solución general en el pintarrón. Finalmente, el profesor agrupa los tres casos y va comentando las consideraciones del campo y de la compuerta para cada caso, y cierra con un ejemplo, donde el campo es variable y la superficie NO es plana. En ese momento se realiza una explicación detallada de las consideraciones para realizar el calculo del flujo usando el recurso infinitesimal, y se empieza con la construcción general de la ecuación para calcular el flujo. También se va dando un proceso con algunos de los estudiantes donde reflexionan que dentro de la ecuación en general debe de haber un producto punto. El tema cierra con la construcción de la fórmula y se dan ejemplos en otros contextos.

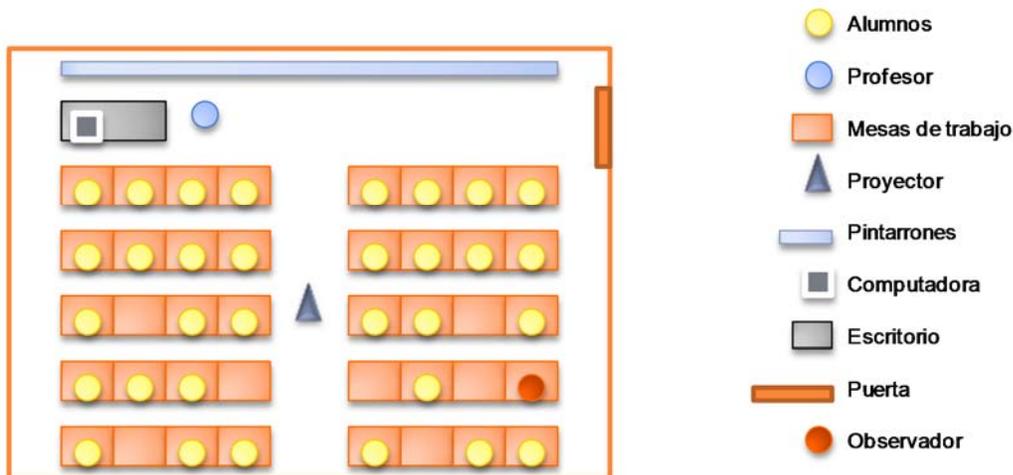
Profesor

El Profesor da una clase donde alumnos y profesor interactuar constantemente. El profesor pregunta en torno a la solución que los alumnos están escribiendo.

Alumnos

Los alumnos se sientan en filas horizontales de 2 o tres o personas, lo que permite que puedan estar interactuando constantemente. Discuten sus ideas en un dialogo abierto tanto con el profesor como con sus compañeros de clase. Son estudiantes tercer o cuarto semestre de todas las carreras de nivel superior.

Ubicación física.



Observaciones:

Anotaciones de campo:

Durante el desarrollo de la clase se va plasmando lo siguiente:

Cuando se realiza la primera parte, se tiene un campo de velocidades constante, una compuerta plana y se pide el flujo en la misma dirección en la que va el campo de velocidades. La mayoría de los alumnos puede dibujar el vector del campo de velocidades correspondiente a cada esquina de la compuerta. También pueden calcular el flujo, y asocian que también ese flujo calculado es el volumen de la caja. En la segunda parte, los alumnos pueden observar que al ser variable el campo de velocidades será diferente el tamaño del vector, lo cual ahora hace que la figura formada por los vectores y la compuerta ya no es una caja regular, también al realizar el dibujo da lugar a observar que el campo y el flujo que se desea calcular siguen la misma dirección. En la tercera parte, donde el campo es variable, pero ya no va en la misma dirección en la que se desea calcular el flujo, uno o dos alumnos participan en la construcción de cómo debe ser plasmada la ecuación que puede calcular el flujo y logran deducir que a lo que van a llegar es un producto punto entre el campo y el diferencial de superficie. Esto último, permite llegar a la forma general de calcular el flujo, donde la superficie no es plana, y el campo es variable.