

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS  
SUPERIORES DE MONTERREY

CAMPUS MONTERREY

DIVISION DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA  
PROGRAMA DE GRADUADOS EN INGENIERIA



TECNOLÓGICO  
DE MONTERREY.

ANÁLISIS DE TIMBRE Y ROBUSTEZ DEL  
CONTROLADOR DE DIFERENCIAS

TESIS

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA  
OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS

ESPECIALIDAD EN INGENIERIA DE CONTROL

POR

ERENDIDA ALVARADO CALVA

MONTERREY, NUEVO LEÓN    DICIEMBRE DEL 2004

**INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY**

**CAMPUS MONTERREY  
DIVISIÓN DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA  
PROGRAMA DE GRADUADOS EN INGENIERÍA**



**TECNOLÓGICO  
DE MONTERREY.**

**ANÁLISIS DE TIMBRE Y ROBUSTEZ DEL CONTROLADOR DE DIFERENCIAS**

**TESIS**

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARACIAL PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE:**

**MAESTRO EN CIENCIAS EN AUTOMATIZACIÓN  
ESPECIALIDAD EN INGENIERÍA DE CONTROL**

**POR:**

**ERENDIDA ALVARADO CALVA**

**MONTERREY, N.L.**

**DICIEMBRE DE 2004**

# Dedicatoria

A mi Dios, el gran creador, por permitirme continuar en la lucha por la superación personal y profesional, por mantenerme con fe y por la maravillosa familia que me ha dado.

A Luz María Alvarado Calva, por todo su esfuerzo, paciencia y amor hacia mí. Porque con su existencia nunca he estado sola.

A mis amados hermanos Soledad, Ana María y Rosalio, por el inmenso amor y total confianza que me han brindado, por ser mi inspiración y ejemplo a seguir. Por su perseverancia en mi superación sin permitirme sucumbir y por su apoyo económico.

A mi hermano Ciro por su contribución y por brindarme su casa durante parte de mis estudios.

A mis hermanos Nira Astrid Grés Alvarado, Dira Daira Grés Alvarado y Rosalio Alvarado Mendoza, por ser mi gran esperanza y mayor manifestación de Dios.

A mis padres Juana Calva Cervantes y Epifanio Alvarado Ramírez, por darme la vida, y sobretodo por darme a mis hermanos. A mi madre por su ejemplo y amor, porque siempre está conmigo.

A mis amigos Heriberto Espinosa, Seberiano Grés, Irma Tovar y Dalila Mendoza, por su amistad y por cuidar de lo más importante y valioso que poseo.

Erendida Alvarado Calva.

A Todos mis compañeros y amigos de la maestría: Eduardo Lara, Miguel Ángel Román,

# Agradecimientos

Al Dr, Jorge Limón Robles, por todas sus enseñanzas e invaluable conocimientos compartidos, por la disposición mostrada para mi aprendizaje y por su amistad brindada desde el principio de mis estudios en la maestría.

Al Dr. Ricardo Ramírez y el Dr. José de Jesús Rodríguez, por las aportaciones y consejos para un eficiente desarrollo de este documento.

A todos los profesores del departamento de Mecatrónica y automatización por ser excelentes catedráticos y por todo lo aportado a mi preparación profesional.

Al Dr. Federico Viramontes por su disposición y ayuda en los tramites académicos durante la maestría.

A Todos mis compañeros y amigos de la maestría: Eduardo Lara, Miguel Ángel Román, Raúl Ceceña, Miriam Gonzáles, Luis Razo, Luis Poirerth, Adriana Martínez, Miguel Ángel Flores, Braulio Cruz, Sheyla Aguilar, Saúl Montes de Oca, Carlos Palma, Gilberto Castellón, Eduardo Juárez y Aline Drivet. Por todo su apoyo, amistad, conocimientos y tiempo compartido.

A mis amigas Jenny Medina, Lorena Antonio y Olimpia Moreno, por los momentos maravillosos que pasamos juntas, por su honestidad y consejos.

A todos los que de alguna manera contribuyeron a desarrollo de esta investigación y a mi estancia en Monterrey.

# **Análisis de Timbre y Robustez del Controlador de Diferencias Modificado**

Por  
Erendida Alvarado Calva

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey  
Campus Monterrey

Asesor de tesis: Jorge Limón Robles Ph. D.

## **Resumen**

Actualmente la forma de manipular los procesos en la practica requiere del diseño de nuevos y mejores controladores que permitan obtener los resultados deseados y que demanden de una implementación fácil y económica.

El control digital de procesos se lleva a cabo, en la mayoría de los casos, con controladores Proporcional Integral y Derivativo (PID) [10].

Existen controladores digitales no convencionales que pueden competir con los controladores PID e incluso mejorar su comportamiento, tales como los controladores con estructura RST, controladores en espacio de estado, entre otros, sin embargo, no han tenido éxito en la industria principalmente porque requieren ser diseñados por gente especializada en el área, además de que se diseñan para un proceso en específico, algunos de ellos no son tan robustos como los controladores PID, y porque no cuentan con parámetros de ajuste [1].

En contraparte los controladores PID tienen una estructura sencilla que puede ser aplicada a muchos procesos ajustando sus tres parámetros. Esta versatilidad es la que los ha mantenido vigentes sin embargo, la sintonización es realizada en muchos casos por usuarios no expertos, mediante prueba y error con resultados apenas satisfactorios [7]. Esto sugiere la búsqueda de nuevas estructuras de control que cuenten con características semejantes de sencillez y robustez pero con mejor desempeño. Pascual Barba Avila [2] propuso un controlador sencillo de diseñar con un solo parámetro de ajuste, que bajo ciertas condiciones supera al PID, sin embargo puede presentar un fenómeno conocido como timbre [8]. Este fenómeno se presenta cuando un controlador para cancelar los ceros de la planta, incluyen polos cercanos al polo de timbre  $z = -1$ . El resultado es una oscilación excesiva de la manipulación del actuador [1].

Esta tesis presenta una investigación que consta de un análisis de la aplicación del método de Kalman al controlador de diferencia con un sólo parámetro, para reducir el fenómeno de timbre, finalizando con un análisis de la robustez del mismo controlador.

Con el propósito de analizar el desempeño del controlador de diferencias con un solo parámetro en procesos de diferentes características, se desarrollará un análisis vía simulación de los fenómenos que se presentan en el comportamiento del controlador de diferencias en cuanto al desempeño ante perturbaciones y ante cambios en referencia, analizando también el timbre en la manipulación y la robustez del controlador.

# Índice

<b>Índice de figuras</b>	<b>iii</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>v</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Antecedentes	1
1.2 Definición del problema	3
1.2.1 Problema de Timbre	5
1.3 Objetivos	11
1.3.1 Alcances	11
1.4 Hipótesis	11
1.5 Contenido	12
<b>2 Marco Teórico</b>	<b>13</b>
2.1 Diseño del controlador de diferencias	13
2.1.1 Especificando el incremento $\Delta y_{k+1}$ deseado	15
2.1.2 Análisis del efecto del parámetro $\lambda$	18
2.2 Fenómeno de Timbre	21
2.2.1 Análisis del efecto de timbre	21
2.3 Soluciones anteriores para eliminar el efecto de timbre	27
2.3.1 Método de Kalman	28
2.3.2 Controladores RST por reubicación de polos	30
2.4 Control Robusto	35
2.4.1 Estabilidad Absoluta	36
2.4.2 Estabilidad relativa	38
2.4.3 Función de Sensibilidad	41
2.4.4 Función de sensibilidad complementaria	43
2.4.5 Propiedades de la función de sensibilidad	44
2.5 Teorema de Nyquist (Teorema de muestreo)	47
<b>3 Controlador de Diferencias Modificado</b>	<b>49</b>
3.1 Lazo de control del controlador de diferencias modificado	49
3.2 Análisis del controlador de diferencias modificado	50
3.2.1 Análisis del controlador ante cambios en referencia	50
3.2.2 Fenómeno de timbre en el controlador de diferencia ante cambios en referencia	52
3.2.3 Fenómeno de timbre en el controlador de diferencias ante perturbaciones a la entrada del proceso	53
3.2.4 Fenómeno de timbre en el controlador de diferencias ante perturbaciones a la salida del proceso	54
3.3 Comportamiento en seguimiento y ante perturbaciones que entran en tiempos de muestreo	57
3.4 Comportamiento ante perturbaciones que entran entre tiempos de muestreo	62

<b>4 Análisis de robustez y timbre en el controlador de diferencias modificado</b>	<b>73</b>
4.1 Obtención de la función de sensibilidad	73
4.1.1 Demostración experimental de la independencia de la función de sensibilidad de los ceros de la planta	75
4.2 Evaluación de la función de sensibilidad	83
4.3 Análisis de la función de sensibilidad	86
4.3.1 Análisis de rechazo a Perturbaciones.	88
4.3.2 Evaluación de la robustez	89
4.3.3 Análisis de procesos con diferentes constantes de tiempo	90
<b>5 Conclusiones y Recomendaciones</b>	<b>96</b>
5.1 Conclusiones	96
5.2 Trabajos Futuros	97
<b>Apéndice A Efecto del tiempo muerto en el controlador de diferencias</b>	<b>98</b>
A.1 El controlador de diferencias en un proceso de primer orden con tiempo muerto menor que el tiempo de muestreo ( $\theta < T$ )	98
A.2 Efecto de un tiempo muerto mayor que T	99
A.3 Ejemplo de diseño para un tiempo muerto mayor que el tiempo de muestreo	101
A.4 Diseño del controlador de diferencias para $d > 0$ , caso general.	103
<b>Apéndice B Otras formas de definir <math>\Delta y_{k+1}</math> para un proceso con <math>d = 0</math></b>	<b>108</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>110</b>

# Índice de figuras

1.1 Lazo de control retroalimentado. . . . .	6
1.2 Comportamiento del controlador de diferencias clásico con $\theta \ll T/2$ . . . . .	8
1.3 Comportamiento del controlador de diferencias clásico con $\theta \cong T/2$ . . . . .	9
1.4 Comportamiento del controlador de diferencias clásico con $\theta > T/2$ . . . . .	10
2.5 Estructura del Controlador de Diferencias Clásico. . . . .	16
2.6 Planta con $\theta = 0$ , respuesta ante diferentes valores de $\lambda$ . . . . .	19
2.7 Definición gráfica del error $e_k = r_k - y_k$ . . . . .	20
2.8 Comportamiento del controlador de diferencias clásico con $\theta < T/2$ . . . . .	24
2.9 Comportamiento del controlador de diferencias clásico con $\theta \cong T/2$ . . . . .	25
2.10 Comportamiento del controlador de diferencias clásico con $\theta > T/2$ . . . . .	27
2.11 Lazo de control retroalimentado. . . . .	28
2.12 Estructura del controlador RST por reubicación de polos. . . . .	32
2.13 Diagrama de Nyquist de un sistema estable. . . . .	37
2.14 Diagrama de Nyquist de un sistema inestable. . . . .	38
2.15 Margen de fase y ganancia en el diagrama de Bode de un sistema estable. . . . .	40
2.16 Margen de fase y ganancia en el diagrama de Bode de un sistema inestable. . . . .	41
2.17 Lazo de control retroalimentado, con perturbación a la salida del proceso. . . . .	42
2.18 Diagrama de Bode del pico máximo de la función de sensibilidad. . . . .	45
2.19 Señal discretizada y recuperada de un muestreo en iguales intervalos de tiempo. . . . .	47
3.20 Estructura del Controlador de Diferencias Modificado, con perturbación a la entrada del proceso. . . . .	49
3.21 Estructura equivalente del Controlador de Diferencias Modificado, con perturbación a la salida del proceso. . . . .	50
3.22 Estructura del Controlador de Diferencias Modificado, con perturbación a la salida del proceso. . . . .	55
3.23 Respuesta del controlador de diferencias con un polo en $z = -0.417$ . Caso I. . . . .	57
3.24 Respuesta del controlador de diferencias con un polo en $z = -0.9753$ . Caso II. . . . .	59
3.25 Respuesta del controlador de diferencias con un polo en $z = -3.9015$ . Caso III. . . . .	60



3.26 Manipulación ante la entrada de una perturbación en tiempos exactos de muestreo, planta con $f = 0.5$ .....	63
3.27 Manipulación ante la entrada de una perturbación en $0.3T$ , planta con $f = 0.5$ .....	64
3.28 Manipulación ante la entrada de una perturbación en $0.5T$ , planta con $f = 0.5$ .....	65
3.29 Timbre de la manipulación ante la entrada de una perturbación en $0.8T$ , planta con $f = 0.5$ .....	66
3.30 No se presenta timbre en la manipulación ante la entrada de una perturbación en tiempos exactos de muestreo, planta con $f = 0.5$ .....	67
3.31 Timbre de la manipulación ante la entrada de una perturbación en $0.3T$ , planta con $f = 0.5$ .....	68
3.32 Timbre de la manipulación ante la entrada de una perturbación en $0.5T$ , planta con $f = 0.5$ .....	69
3.33 Timbre de la manipulación ante la entrada de una perturbación en $0.8T$ , planta con $f = 0.5$ .....	70
4.34 Estructura del controlador de diferencias modificado .....	73
4.35 Respuesta ante una $\lambda = 1$ , con una $k = 2.0$ en la planta. Ejemplo A. ....	76
4.36 Respuesta ante una $\lambda = 1$ , con una $k = 2.69$ en la planta. Ejemplo A. ....	77
4.37 Respuesta ante una $\lambda = 0.4$ , con una $k = 2$ en la planta. Ejemplo A. ....	78
4.38 Respuesta ante una $\lambda = 0.4$ , con una $k = 3.39$ en la planta. Ejemplo A. ....	79
4.39 Respuesta ante una $\lambda = 1$ , con una $k = 2.0$ en la planta. Ejemplo B. ....	80
4.40 Respuesta ante una $\lambda = 1$ , con una $k = 2.69$ en la planta. Ejemplo B. ....	81
4.41 Respuesta ante una $\lambda = 0.4$ , con una $k = 2$ en la planta. Ejemplo B. ....	82
4.42 Respuesta ante una $\lambda = 0.4$ , con una $k = 3.39$ en la planta. Ejemplo B. ....	83
4.43 Diagrama de magnitud de la respuesta a la frecuencia. ....	84
4.44 Diagrama del lugar geométrico de las raíces del un sistema. ....	85
4.45 Función de sensibilidad, variando el parámetro $\lambda$ de sistema del caso I. ....	88
4.46 Respuesta del controlador de diferencias con un polo en $z = -0.4076$ . Caso IV. ....	91
4.47 Función de sensibilidad, variando el parámetro $\lambda$ del controlador del caso IV. ....	92
4.48 Respuesta del controlador de diferencias con un polo en $z = -0.4231$ . Caso V. ....	93
4.49 Función de sensibilidad, variando el parámetro $\lambda$ de sistema del caso V. ....	94

# Índice de tablas

2.1 Timbre característico de sistemas representativos, reproducida de [14] .....	22
3.2 Razón de decaimiento del timbre generado ante la entrada de una perturbación en diferentes fracciones de tiempo T .....	71
4.3 Valor de $y$ para $ S(j\omega) =0$ dB, mostrando el punto de cambio de atenuación a amplificación. ....	89
4.4 Valor de $S_{max}(j\omega)$ , diferentes $\lambda$ , Caso I, II y III. ....	95
4.5 Valor de $S_{max}(j\omega)$ , diferentes $\lambda$ , Caso IV. ....	95
4.6 Valor de $S_{max}(j\omega)$ , para diferentes valores de $\lambda$ CasoV. ....	95
4.7 Robustez del controlador en seguimiento, para los 5 diferentes casos, variando el parámetro $\lambda$ .....	95

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Antecedentes

El empleo de controladores automáticos en los procesos ha permitido un desarrollo importante en la industria.

En la actualidad el controlador más utilizado es el PID, sin embargo, para su sintonización, es necesario modificar tres parámetros, y el desempeño óptimo cuando se usa la estructura convencional, se logra sólo ante cambios en referencia o ante perturbaciones, pero no ambos a la vez [1].

Lo que los ha ubicado como una opción dominante en el mercado, es el hecho de contar con una estructura sencilla con tres parámetros de ajuste que le permiten poder aplicarse a muchos procesos y obtener un desempeño más o menos aceptable mediante el ajuste de los tres parámetros. Son razonablemente fáciles de ajustar, sin embargo, requieren de un usuario conocedor. Otro aspecto importante es que cuando existen tiempos muertos importantes en el proceso, el desempeño se deteriora.

Existen otras alternativas de control que no han logrado prosperar porque su desempeño depende de un experto y porque no tienen parámetros de ajuste que permitan modificar las condiciones de operación en caso de que el proceso cambie. Barba Avila [2] propuso un controlador que bajo ciertas circunstancias es relativamente sencillo de diseñar y cuenta con un sólo parámetro de ajuste. El controlador propuesto presenta un buen comportamiento en forma simultánea, ante cambios en referencia y ante la entrada de perturbaciones, sin embargo

cuando los ceros del proceso están fuera del círculo unitario el método no se puede aplicar porque daría lugar a un controlador inestable [6].

Cuando los ceros están dentro del círculo unitario pero cerca de  $z = -1$  el controlador de diferencias puede presentar un efecto de timbre considerable. Los problemas de timbre bajo las condiciones expuestas anteriormente no son exclusivas de este controlador sino de todo controlador que pretenda cancelar los ceros de la planta (ver controlador de un paso y controlador de Dahlin) [1]. Este controlador fué posteriormente aplicado a proceso real por Teodoro de Jesus Delgado Herrera en 2002 [4] mediante un microcontrolador obteniendo las mismas observaciones respecto al efecto de timbre.

En investigaciones anteriores no se ha desarrollado, si no hasta este documento, un análisis formal del desempeño del controlador de diferencias ante la entrada de una perturbación (regulación). Además de que no se ha llegado a una conclusión del fenómeno que esta ocurriendo cuando dicha perturbación entra entre tiempos de muestreo. Tal análisis se presenta en este escrito.

En la presente tesis se analiza el método usado por pascual Barba [2] para eliminar el fenómeno de timbre. Dicho método consiste en aplicar una forma de especificar el comportamiento deseado, basado en los ceros de la planta que elimina los problemas de timbre. Esta técnica de especificar el comportamiento deseado basado en los ceros de la planta, fue primero usado por Kalman [11] y es actualmente usada por Astrom [1] y Landau [8] para diseño de controladores con estructura RST. Adicionalmente en tesis anteriores no se ha hecho un análisis formal de la robustez de el controlador de diferencias. En esta investigación se valorará la robustez del controlador de diferencias [5].

En la siguiente sección se presenta la definición del problema que motiva el desarrollo de esta tesis, también se presentan las principales características de dicho problema.

## 1.2 Definición del problema

El problema central de esta investigación es el fenómeno de timbre (oscilaciones violentas en la manipulación) en el controlador de diferencias, objeto del análisis realizado en este documento el cual se presenta en esta sección.

El fenómeno de timbre se presenta en todos los controladores de cancelación y es el motivo de estudio de éste trabajo. Mediante el análisis de las características que producen el fenómeno de timbre se propondrá el panorama necesario para el mejor desempeño posible del controlador de diferencias.

A continuación se presenta la situación en la que surge este problema, revisando las soluciones anteriormente propuestas a la problemática, finalizando con la definición del problema en términos de ingeniería de control.

### **Situación en la que surge el problema**

La mayoría de los controladores actuales se aplican en forma discreta debido a la alta capacidad de procesamiento de información de las computadoras. Sin embargo los resultados obtenidos pueden variar dependiendo del controlador que se emplee, que no siempre es el mejor para la naturaleza del proceso.

En el diseño de controladores digitales se busca localizar los polos de lazo cerrado de tal manera que el comportamiento sea el deseado.

Cuando estos polos se ubican dentro del círculo unitario, lo más cercano al centro del mismo, la respuesta será rápida y sin oscilaciones. Cuando los polos se encuentran fuera del círculo unitario, la respuesta es inestable. Por lo cual se busca evitar esta circunstancia. Sin embargo en el caso en el que los polos se encuentran dentro del círculo unitario, pero cerca de  $z = -1$  el controlador será estable pero presentará el fenómeno de timbre, mostrándose como oscilaciones violentas en la manipulación que decrecen lentamente. Estas oscilaciones provocan además variaciones en la salida del proceso, que no observables en tiempos de muestreo (oscilaciones ocultas).

En la búsqueda de un controlador no convencional que proporcione buenos resultados y

permita al usuario modificar los parámetros de sintonización con facilidad para un modelo diferente de la planta, Barba [2] propone el controlador de diferencias, con la propiedad de contar con un sólo parámetro de sintonización que permita un ajuste más rápido y más fácil.

El diseño del controlador de diferencias es muy sencillo y bajo ciertas circunstancias su desempeño es bastante bueno, superando al PID. Sin embargo en ocasiones presenta un problema fundamental, como cancela los ceros de la planta, si éstos están fuera del círculo unitario, el controlador resulta inestable, y si están dentro del círculo unitario pero cerca de  $z = -1$  presenta timbre.

Una forma de evitar o atenuar el timbre y los ceros inestables es modificando el tiempo de muestreo de tal manera que el tiempo muerto fraccionario sea menor que  $0.5T$ , ( $T$  es el tiempo de muestreo) preferiblemente entre  $0.4T$  y  $0.3T$  o menor [4]. Sin embargo esto puede conducir a tiempos de muestreo que no son los más adecuados. Además no siempre es factible modificar arbitrariamente el tiempo de muestreo.

La función de transferencia del diseño del controlador de diferencias se obtiene a partir de la función de transferencia estimada de la planta. Las formas más comunes para obtener la función de transferencia del proceso es discretizar la función de transferencia continua de la planta mediante la transformada  $z$  considerando un retenedor de orden cero u obtener la función de transferencia mediante identificación discreta, por ejemplo el algoritmo de mínimos cuadrados. Obtener la función de transferencia por medio de identificación discreta es lo más recomendable pues proporciona una estimación más precisa del modelo de la planta, sin embargo, cuando la función de transferencia discreta se obtiene mediante identificación, es muy difícil que el tiempo de muestreo sea escogido de manera que el tiempo muerto sea múltiplo del primero, por lo que de manera casi inevitable se tendrá timbre en el controlador de diferencias. Ésto se podría resolver si se pudiera eliminar el problema de timbre asociado a este controlador.

#### **Soluciones anteriores**

Anteriormente ya se ha atacado el problema de timbre en los controladores de cancelación. En un principio Kalman analiza este problema y descubre que éste es causado por que este

## 1.2 Definición del problema

tipo de controladores cancela los ceros de la planta con polos en el controlador. Si los ceros están cerca de  $z = -1$  los polos del controlador también lo estarán y se producirá el efecto de timbre.

Basandose en el esquema de Kalman, Barba propone que la función de transferencia deseada  $G_d(z)$  sea igual a los ceros de la planta con ganancia unitaria  $\frac{B(z)}{B(1)}$ . Multiplica la ecuación del controlador de diferencias obtenida por el cociente  $\frac{B(z)}{B(1)}$ , en donde  $B(z)$  es el polinomio de los ceros de la planta para hacer que el comportamiento de la salida se base en el comportamiento de los ceros de la planta divididos entre su ganancia unitaria. Esto le permite evitar incluir los ceros de la planta como polos del controlador eliminando el problema de timbre y obteniendo un tiempo de asentamiento finito. Desgraciadamente el controlador de Kalman sólo trabaja bien ante cambios en referencia, ante perturbaciones es tan lento como el proceso en lazo abierto.

Sin embargo el uso del método de Kalman aplicado al controlador de diferencias no ha eliminado el fenómeno de timbre por completo. Barba encontró una aparente contradicción; con este método se eliminó el efecto timbre en el análisis por simulación, pero en el análisis matemático seguía presente. En esta tesis buscamos clarificar esta aparente contradicción. Además se analizará el controlador de diferencias con el propósito de determinar la robustez del controlador e identificar, bajo que tipo de procesos se recomienda utilizar el controlador de diferencias.

### 1.2.1 Problema de Timbre

Considere un proceso como se muestra en la figura 1.1.

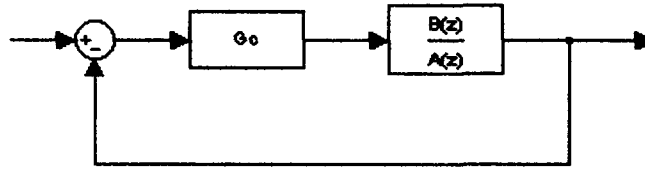


Figura. 1.1: Lazo de control retroalimentado.

donde :

$G_c$  : Función de transferencia del controlador a diseñar.

$\frac{B(z)}{A(z)} = HGp(z^{-1})$  : Función de transferencia de la planta.

$B(z)$  : Polinomio de ceros de la planta.

$A(z)$  : Polinomio de polos de la planta.

Expresemos los polinomios  $B(z)$  y  $A(z)$  de la siguiente forma.

$$A(z) = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_{na}z^{-na} \quad (1.1)$$

$$= 1 + z^{-1}(a_1 + a_2z^{-1} + a_3z^{-2} + \dots + a_{na}z^{-na+1}) \quad (1.2)$$

$$B(z) = b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_{nb}z^{-nb} \quad (1.3)$$

$$= z^{-1}(b_1 + b_2z^{-1} + b_3z^{-2} + \dots + a_{nb}z^{-nb+1}) \quad (1.4)$$



## 1.2 Definición del problema

Sea

$$A(z) = a_1 + a_2z^{-1} + a_3z^{-2} + \dots + a_{na}z^{-na+1} \quad (5)$$

$$B(z) = b_1 + b_2z^{-1} + b_3z^{-2} + \dots + a_{nb}z^{-nb+1} \quad (6)$$

entonces

$$A(z) = 1 + z^{-1}A(z) \quad (7)$$

$$B(z) = z^{-1}B(z) \quad (8)$$

Diseñado un controlador de diferencias como el descrito por Pascual Barba [2], la ecuación general del controlador de diferencia se representa de la forma de la ecuación (1.9)

$$u_{k-1} = \frac{\lambda e_k + y_{k-1}A'(q^{-1})}{B'(q^{-1})} \quad (1.9)$$

donde :

$e_k$  : es el error, la diferencia entre la referencia y la variable del proceso.

$\lambda$  : es un parámetro de ajuste y debe ser  $0 > \lambda \leq 1$ , el cual representa una cierta proporción del error actual.

De la ecuación (1.9) se observa que el polinomio  $B'(q^{-1})$  es el denominador en la ecuación del controlador, originalmente este polinomio definía los ceros de la planta, y ahora forma los polos del controlador.

El diseño del controlador cancela los ceros de la planta, por lo que se debe tener cuidado de que los ceros de la planta se encuentren dentro del círculo unitario, de lo contrario el controlador será inestable, además los ceros deben estar también lo más alejado posible de  $z = -1$ , para que de esta forma se evite la presencia de timbre.

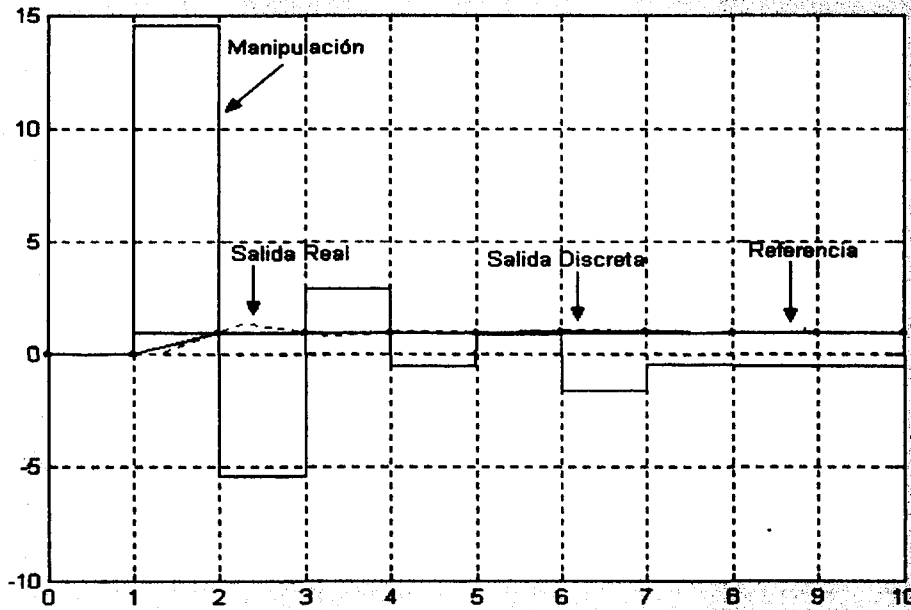


Figura. 1.2: Comportamiento del controlador de diferencias clásico con  $\theta \ll T/2$ .

Considerese un proceso de primer orden con tiempo muerto  $\theta \ll \frac{T}{2}$ . Se diseña un controlador de diferencias y se le aplica un cambio en referencia en tiempo 1 y una perturbación en tiempo 5. Se observará una respuesta como la que se muestra en la figura 1.2. Si se diseña un controlador de diferencias mediante la ecuación (1.9), se observa que la manipulación presenta un pequeño timbre, pero las oscilaciones desaparecen con rapidez.

## 1.2 Definición del problema

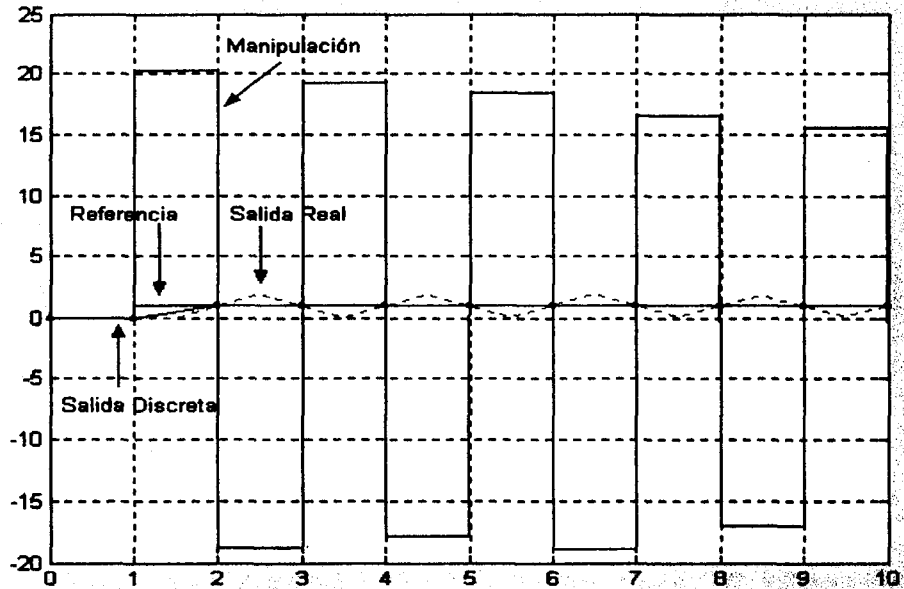


Figura. 1.3: Comportamiento del controlador de diferencias clásico con  $\theta \approx T/2$ .

En un proceso con tiempo muerto  $\theta \approx \frac{T}{2}$  con el controlador de diferencias, se obtiene una respuesta como la que se presenta en la figura 1.3. Se puede observar que la manipulación muestra el fenómeno de timbre, manifestándose como oscilaciones excesivas, que se atenúan muy lentamente. El problema real, además del desgaste del actuador es que como se observa de la grafica la salida real aparenta estar estable cuando sólo se observa su valor en tiempos de muestreo, pero entre tiempos de muestreo se mantiene oscilando. Este fenómeno se conoce como oscilaciones ocultas. Se observa claramente que en este caso el tiempo de establecimiento real de la respuesta es mucho mayor que el aparente en tiempos de muestreo (el de diseño).

En un proceso con tiempo muerto  $\theta > \frac{T}{2}$ , se observará la respuesta mostrada en la figura 1.4. Obsérvese que la manipulación presenta timbre y se va hacia el infinito, además la respuesta también es oscilatoria y así se mantiene .

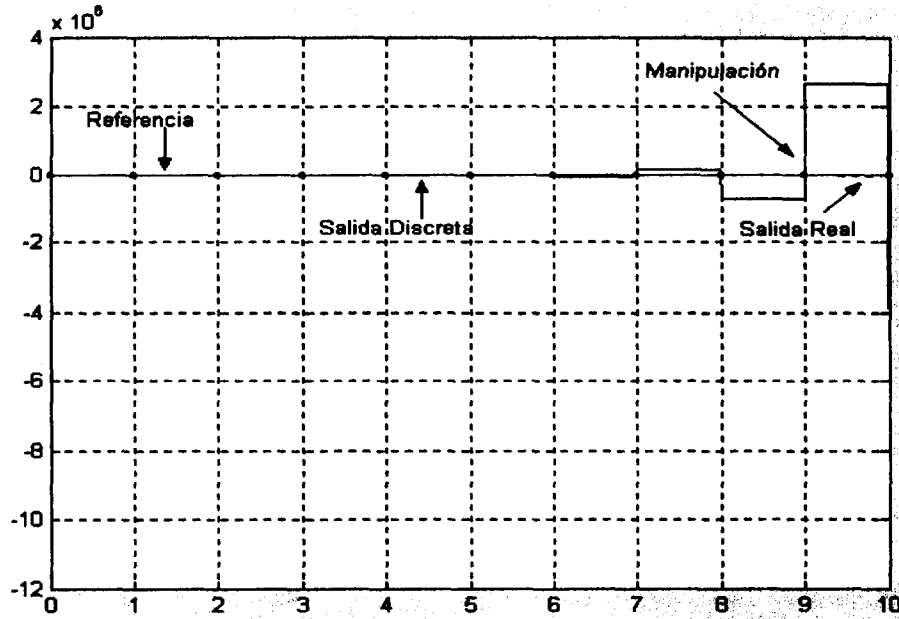


Figura. 1.4: Comportamiento del controlador de diferencias clásico con  $\theta > T/2$ .

Con el propósito mejorar los resultados anteriores se plantean los siguiente objetivos a alcanzar en esta tesis.

## 1.3 Objetivos

Los objetivos generales son:

- Hacer el análisis del comportamiento del controlador de diferencias obtenido después de aplicarle el método de reducción de timbre de Barba y determinar por que en simulación parece eliminar el efecto de timbre mientras matemáticamente sigue presente.
- Evaluar la robustez del controlador de diferencias.
- Evaluar el desempeño del controlador de diferencias y determinar ante que procesos conviene usarlo.

### 1.3.1 Alcances

- Análisis matemático del fenómeno de timbre y robustez del controlador de diferencias para procesos con tiempo muerto menor al tiempo de muestreo.
- Análisis vía simulación del fenómeno de timbre y de la robustez del controlador de diferencias en procesos de primer orden con tiempo muerto menor a; tiempo de muestreo entre 2 ( $\theta < \frac{T}{2}$ ).

## 1.4 Hipótesis

- El controlador de diferencias tiene un buen desempeño de sintonización ante cambios en referencia y ante perturbaciones, en forma simultanea.
- La aplicación del método de Kalman al controlador de diferencias permite eliminar el efecto de timbre al menos ante cambios en referencia.
- Ante perturbaciones, nuestra hipótesis es que la aparente contradicción encontrada por Barba (timbre presente analíticamente, pero no aparente en simulación) se debe a que aplicó las perturbaciones sólo en tiempos de muestreo y no entre estos.
- Para analizar la robustez del controlador se usa entre otras herramientas el análisis de la función de sensibilidad. Por tanto nuestra hipótesis en lo que respecta a la robustez es que. El Análisis de la función de sensibilidad nos permitirá determinar las características generales de robustez y desempeño del controlador de diferencias ante procesos de diferentes naturalezas.
- Finalmente, mediante el análisis del comportamiento en regulación del controlador de diferencias se podrán definir las características de los procesos para los cuales es recomendable el uso del controlador de diferencias.

## 1.5 Contenido

En la presente sección se aborda todo lo concerniente a la definición del problema, el fenómeno de timbre que se manifiesta en el controlador de diferencias. Así también se introduce a los temas que se tratarán en la presente investigación.

En el capítulo 2 se expone el marco teórico, que introduce a los conceptos teóricos en los que se basa la presente tesis, entre ellos el diseño del controlador de diferencias clásico, sus características y comportamiento de desempeño. Las propuestas anteriores mediante las cuales se ha dado solución al problema de timbre, como son el método de Kalman, Controladores RST por reubicación de polos. Los conceptos de robustez desde el punto de vista de variaciones paramétricas y de la presencia de ruido y perturbaciones de entrada, el análisis de robustez mediante la función de sensibilidad. El fenómeno de timbre y sus características.

En el capítulo 3 se realiza el desarrollo matemático del controlador de diferencias modificado mediante la aplicación del método de Kalman.

En el capítulo 4 se presenta el análisis de robustez y timbre en el controlador de diferencias modificado vía simulación, análisis tanto en seguimiento como en regulación.

En el capítulo 5 se presentan las conclusiones obtenidas mediante el desarrollo de la presente investigación, además de los trabajos que pueden realizarse posteriormente con el propósito de ampliar y mejorar el controlador de diferencias modificado.

Finalmente, se presentan los apéndices referentes al efecto del tiempo muerto en el controlador de diferencias y a algunas formas de definir el incremento  $\Delta y_{k+1}$  para un proceso con  $d = 0$ .

# Capítulo 2

## Marco Teórico

El controlador de diferencias es un controlador no convencional con un sólo parámetro de ajuste presentado por primera vez en 1995 por Barba [2], su diseño se basa en la función de transferencia del proceso a controlar, como se menciona en el apartado siguiente.

El controlador de diferencias es un controlador de cancelación, los ceros de la planta deben de cumplir con las condiciones de estabilidad para las funciones de transferencia discretas, una de estas condiciones es que los ceros de la planta se encuentren dentro del círculo unitario. Se debe considerar también que los ceros de la planta sean negativos y se encuentren lo más alejados posible del valor de  $z = -1$  para que el controlador no presente oscilaciones excesivas no deseadas en la manipulación, estas manipulaciones son conocidas como fenómeno de timbre.

### 2.1 Diseño del controlador de diferencias

La función de transferencia pulso de un proceso con tiempo muerto  $\theta$  menor que el tiempo de muestreo  $T$  se puede expresar en la forma de la siguiente ecuación .

$$HG_p(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{nb} z^{-nb}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{na} z^{-na}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (2.10)$$

Se definen las diferencias

$$\Delta y_k = y_k - y_{k-1} \quad (2.11)$$

$$\Delta u_k = u_k - u_{k-1} \quad (2.12)$$

o equivalente

$$\Delta Y(z) = Y(z) (1 - z^{-1}) \quad (2.13)$$

$$\Delta U(z) = U(z) (1 - z^{-1}) \quad (2.14)$$

por tanto

$$\frac{\Delta Y(z)}{\Delta U(z)} = \frac{(1 - z^{-1}) Y(z)}{(1 - z^{-1}) U(z)} \quad (2.15)$$

De la ecuación (2.10) definimos.

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{na} z^{-na} \quad (2.16)$$

$$= 1 + z^{-1}(a_1 + a_2 z^{-1} + a_3 z^{-2} + \dots + a_{na} z^{-na+1}) \quad (2.17)$$

$$B(z) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{nb} z^{-nb} \quad (2.18)$$

$$= z^{-1}(b_1 + b_2 z^{-1} + b_3 z^{-2} + \dots + a_{nb} z^{-nb+1}) \quad (2.19)$$

Ahora definamos:

$$A'(z) = a_1 + a_2 z^{-1} + a_3 z^{-2} + \dots + a_{na} z^{-na+1} \quad (2.20)$$

$$B'(z) = b_1 + b_2 z^{-1} + b_3 z^{-2} + \dots + a_{nb} z^{-nb+1} \quad (2.21)$$

Entonces tenemos

$$A(z) = 1 + z^{-1} A'(z) \quad (2.22)$$

$$B(z) = z^{-1} B'(z) \quad (2.23)$$

De lo anterior



## 2.1 Diseño del controlador de diferencias

$$\frac{\Delta Y(z)}{\Delta U(z)} = \frac{z^{-1}B(z)}{1 + z^{-1}A(z)} \quad (2.24)$$

Despejando tenemos que

$$\Delta Y(z) + \Delta Y(z)z^{-1}A(z) = \Delta U(z)z^{-1}B(z) \quad (2.25)$$

Desplazamos un instante hacia adelante (multiplicamos por  $z$ )

$$\Delta Y(z)z + \Delta Y(z)A(z) = \Delta U(z)B(z) \quad (2.26)$$

Despejando  $\Delta U(z)$ , obtenemos

$$\Delta U(z) = \frac{\Delta Y(z)z + \Delta Y(z)A(z)}{B(z)} \quad (2.27)$$

Definiendo  $q^{-1}$  como el operador de atraso y antitransformando nos quedará

$$\Delta U_k = \frac{1}{B(z)} [\Delta Y_{k+1} + \Delta Y_k A(z)] \quad (2.28)$$

si especificamos el incremento  $\Delta y_{k+1}$  deseado, esta ecuación nos permite obtener la manipulación necesaria para lograrlo.

### 2.1.1 Especificando el incremento $\Delta y_{k+1}$ deseado

Para proponer el incremento  $\Delta y_{k+1}$  deseado, Barba [2] sugiere que éste sea igual a una proporción  $\lambda$  del error actual.

$$\Delta y_{k+1} = \lambda e_k \quad 0 < \lambda \leq 1 \quad (2.29)$$

Bajo estas circunstancias la ecuación de el controlador de diferencias quedaría

$$\Delta U_k = \frac{1}{B(q^{-1})} [\lambda e_k + \Delta y_k A(q^{-1})] \quad (2.30)$$

Que es la ecuación del controlador de diferencias.

Si lo transformamos por  $z$  nos quedará.

$$\Delta U_k = \frac{1}{B(z)} [\lambda E(z) + \Delta Y(z)A(z)] \quad (2.31)$$

$$U_k(1 - z^{-1}) = \frac{1}{B(z)} [\lambda E(z) + Y(z)(1 - z^{-1})A(z)] \quad (2.32)$$

Lo cual puede representarse mediante el siguiente diagrama de bloques.

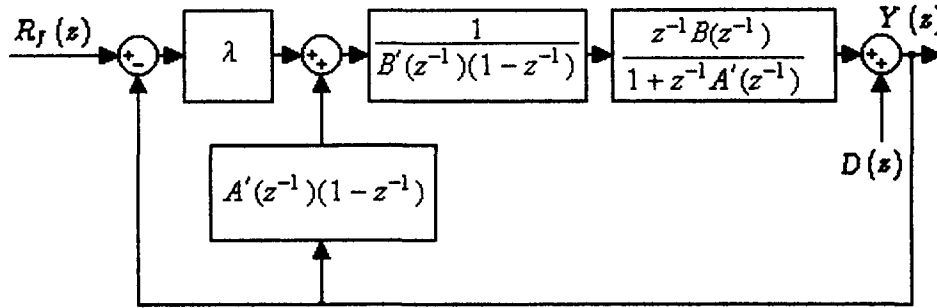


Figura. 2.5: Estructura del Controlador de Diferencias Clásico.

De la figura 2.5, obtenemos la función de transferencia de la manipulación ante perturbaciones.

Calculamos  $\frac{U(z^{-1})}{D(z^{-1})}$ .

Se tiene una trayectoria directa y dos lazos.

$$P_1 = -\frac{\lambda}{B'(z^{-1})(1-z^{-1})} + \frac{A'(z^{-1})(1-z^{-1})}{B'(z^{-1})(1-z^{-1})} \quad (2.33)$$

$$= -\frac{\lambda}{B'(z^{-1})(1-z^{-1})} + \frac{A'(z^{-1})}{B'(z^{-1})} \quad (2.34)$$

$$L_1 = -\frac{\lambda z^{-1}}{(1-z^{-1})[1+z^{-1}A'(z^{-1})]} \quad (2.35)$$

$$L_2 = \frac{z^{-1}A'(z^{-1})}{1+z^{-1}A'(z^{-1})} \quad (2.36)$$

2.1 Diseño del controlador de diferencias

$\Delta$  y  $\Delta_1$  son

$$\Delta = 1 - L_1 - L_2 \quad (2.37)$$

$$\Delta_1 = 1$$

Utilizando la regla de Mason sustituimos los valores de  $P_1$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $\Delta$ , y  $\Delta_1$

$$\frac{U(z^{-1})}{D(z^{-1})} = \frac{\frac{\lambda}{B'(z^{-1})(1-z^{-1})} + \frac{A'(z^{-1})}{B'(z^{-1})}}{1 + \frac{\lambda z^{-1}}{(1-z^{-1})[1+z^{-1}A'(z^{-1})]} - \frac{z^{-1}A'(z^{-1})}{1+z^{-1}A'(z^{-1})}} \quad (2.38)$$

Multiplicando por  $(1-z^{-1})[1+z^{-1}A'(z^{-1})]$ .

$$\frac{U(z^{-1})}{D(z^{-1})} = \frac{-\frac{\lambda[1+z^{-1}A'(z^{-1})]}{B'(z^{-1})} + \frac{A'(z^{-1})(1-z^{-1})[1+z^{-1}A'(z^{-1})]}{B'(z^{-1})}}{(1-z^{-1})[1+z^{-1}A'(z^{-1})] + \lambda z^{-1} - z^{-1}A'(z^{-1})(1-z^{-1})} \quad (2.39)$$

Por manipulación algebraica

$$\frac{U(z^{-1})}{D(z^{-1})} = \frac{-\frac{\lambda[1+z^{-1}A'(z^{-1})]}{B'(z^{-1})} + \frac{A'(z^{-1})(1-z^{-1})}{[1+z^{-1}A'(z^{-1})]}}{1+z^{-1}A'(z^{-1}) - z^{-1} - z^{-2}A'(z^{-1}) + \lambda z^{-1} - z^{-1}A'(z^{-1}) + z^{-2}A'(z^{-1})} \quad (2.40)$$

$$= \frac{-\lambda[1+z^{-1}A'(z^{-1})] + A'(z^{-1})(1-z^{-1})}{[1+z^{-1}A'(z^{-1})]} \quad (2.41)$$

$$= \frac{B'(z^{-1})[1-z^{-1}(1-\lambda)]}{[1+z^{-1}A'(z^{-1})] [-\lambda + A'(z^{-1})(1-z^{-1})]} \quad (2.42)$$

Observe que en este caso el polinomio de los ceros de la planta forman los polos de la función de transferencia  $\frac{U(z^{-1})}{D(z^{-1})}$  y por tanto la manipulación está en función del polinomio  $B(z^{-1})$ .

**Analicemos esto:**

- Observe que las raíces de  $B(z)$  aparecen como polos del controlador y por lo tanto deben estar dentro del círculo unitario para evitar inestabilidad. En el caso de un primer orden esto se logra con  $\theta < \frac{T}{2}$  (como lo demostraremos en el apéndice). En caso contrario el controlador tendrá polos inestables.
- Ahora bien aún si las raíces de  $B(z)$  son estables (están dentro del círculo unitario), si se localizan cerca del polo  $z = -1$  el sistema tendrá efecto de timbre. En el caso de un primer orden ésto lo podemos evitar si  $\theta$  es significativamente más pequeño que  $\frac{T}{2}$ , ejemplo  $\theta < \frac{T}{4}$ , (ver apéndice), en caso contrario la manipulación presentará timbre.

### 2.1.2 Análisis del efecto del parámetro $\lambda$

Sea un proceso descrito por la siguiente ecuación.

$$G_p(s) = \frac{2}{20s + 1} e^{-0s} \quad (2.43)$$

Se asumirá un tiempo de muestreo  $T = 1$  seg.

Para poder visualizar el efecto de parámetro  $\lambda$  se le asignan diferentes valores, la salida del sistema ante estas condiciones se muestra en la figura 2.6.

De la figura 2.6 puede observarse que para un valor de  $\lambda = 1$ , la respuesta es más rápida que en cualquier otro caso, la respuesta alcanza la referencia en un solo tiempo de muestreo. También se puede ver que cuanto menor sea el valor de  $\lambda$  la respuesta será más lenta.

Si se considera  $d = 0$  (un proceso con tiempo muerto menor que el tiempo de muestreo) el termino  $\Delta y_{k+1}$  de la ecuación (2.28) representa el cambio deseado en la respuesta en el sistema para el siguiente tiempo de muestreo.

## 2.1 Diseño del controlador de diferencias

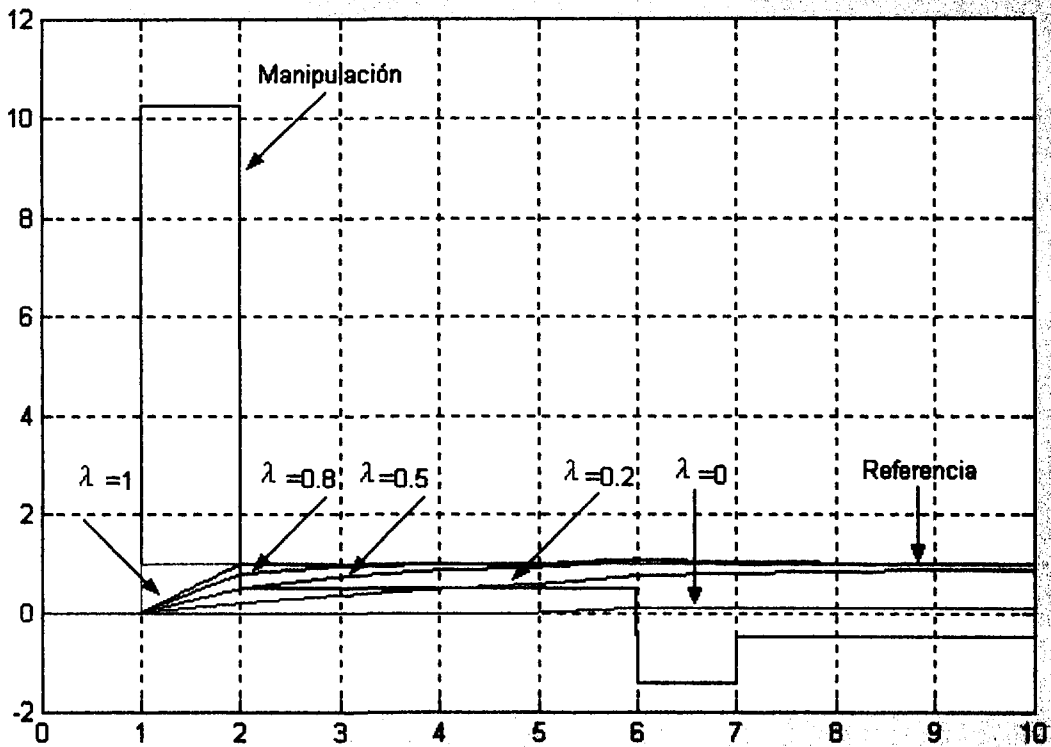


Figura. 2.6: Planta con  $\theta = 0$ , respuesta ante diferentes valores de  $\lambda$ .

Si consideramos que en el instante de muestreo actual tenemos una señal de error  $e_k$  que se expresa como se muestra en la figura 2.7.

Definamos

$$\Delta y_{k+1} = y_{k+1} - y_k \quad (2.44)$$

Si igualamos  $\Delta y_{k+1}$ , que es el incremento en la respuesta al siguiente instante de muestreo, con el error actual  $e_k$  para lograr el cambio deseado de eliminar el error en un muestreo entonces obtenemos:

$$y_{k+1} - y_k = r_k - y_k \quad (2.45)$$

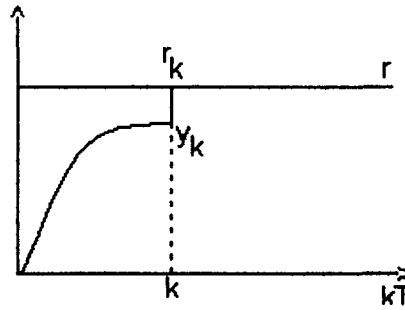


Figura. 2.7: Definición gráfica del error  $e_k = r_k - y_k$

$$y_{k+1} = r_k \tag{2.46}$$

De la ecuación (2.46) observase que al hacer el cambio deseado en la respuesta  $\Delta y_{k+1}$  igual al error actual, se garantiza que la respuesta para el siguiente tiempo de muestreo será igual a la referencia y por lo tanto el error será cero, sin embargo ésta no es la única forma de definir  $\Delta y_{k+1}$  (ver apéndice B).

## 2.2 Fenómeno de Timbre

El fenómeno de timbre consiste en la presencia de oscilaciones excesivas en la manipulación del actuador final, esto puede existir virtualmente en algoritmos diseñados para cualquier técnica que pretenda cancelar los ceros, no es exclusivo de el controlador de diferencias.

El punto  $z = -1$  es el nodo de timbre, y el polo en  $z = -1$  es conocido como el polo de timbre.

El efecto de timbre puede predecirse si se conocen los polos y ceros del controlador. La figura 2.1 muestra el comportamiento de varios controladores a los cuales se les ha excitado con una señal de error del tipo pulso unitario  $E(z) = 1$ .

Se observa de la tabla 2.1, que los polos negativos, sobre todo los de valor absoluto mayor, tienden a producir un efecto de timbre más agudo. El controlador que tiene un polo en  $z = -1$  muestra la mayor amplitud en el timbre (primer caso de la tabla), en comparación con el segundo caso de un polo en  $z = -0.5$  en donde se nota que la amplitud de timbre disminuye.

Agregar un polo positivo ayuda a mejorar la situación esto se presenta en el tercer caso de la tabla 2.1. En el último ejemplo se ve que la presencia de un cero positivo agrava el timbre.

En la siguiente sección se mostrara el análisis de timbre en diferentes casos, con el objeto de presentar las características de las cuales depende y la forma en que afecta.

### 2.2.1 Análisis del efecto de timbre

Con el propósito de mostrar el comportamiento del controlador de diferencias mejorado, en esta sección se presentan varios ejemplos de su desempeño ante diferentes casos.

#### Sistema bajo estudio

Considere un sistema de primer orden como el siguiente

$$G_p(s) = \frac{2}{20s + 1} e^{-\theta s} \quad (2.47)$$

Se asumirá un tiempo de muestreo  $T = 1$  seg. Sabemos que la ubicación de los ceros de la planta dependerá de la relación entre  $\theta$  y  $T$ , en particular del valor del tiempo muerto

	$G_c(z) = \frac{M(z)}{E(z)}$	$M_n$ Respuesta al Impulso unitario	Gráfica de tiempo
1	$\frac{1}{1+z^{-1}}$	$M_0 = 1$ $M_1 = -1$ $M_2 = 1$ $M_3 = -1$ $M_4 = 1$	
2	$\frac{1}{1+0.5z^{-1}}$	$M_0 = 1$ $M_1 = -0.5$ $M_2 = 0.25$ $M_3 = -0.125$	
3	$\frac{1}{(1+0.5z^{-1})(1-0.2z^{-1})}$	$M_0 = 1$ $M_1 = -0.3$ $M_2 = 0.19$ $M_3 = -0.087$ $M_4 = 0.045$	
4	$\frac{1 - \frac{0.5}{z}}{(1+0.5z^{-1})(1-0.2z^{-1})}$	$M_0 = 1$ $M_1 = -0.8$ $M_2 = 0.36$ $M_3 = -0.18$ $M_4 = 0.092$	

Tabla 2.1: Timbre característico de sistemas representativos, reproducida de [14]



## 2.2 Fenómeno de Timbre

fraccionario  $f = \theta - dT$  el cual entre más grande sea ( $> 0.5$ ) produce un timbre de mayor magnitud (Pascual Barba [2]).

Si el tiempo muerto  $\theta$  no es múltiplo del tiempo de muestreo, se define que

$$\theta = dT + f \quad (2.48)$$

donde

$\theta$ : Tiempo muerto del proceso

$T$ : Tiempo de muestreo

$d$ : Parte entera de  $\frac{\theta}{T}$

$f$ : Parte fraccionaria de  $\frac{\theta}{T}$

### Ejemplo 1

El tiempo muerto del sistema es  $\theta < \frac{T}{2}$ ,  $\theta = 0.3$  es decir  $d = \left\lfloor \frac{\theta}{T} \right\rfloor = 0$ .

Con función de transferencia discreta

$$HG_p(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\Delta Y(z)}{\Delta U(z)} = \frac{0.06879z^{-1} + 0.02875z^{-2}}{1 - 0.9512z^{-1}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (2.49)$$

La función  $HG_p(z)$  tiene un cero en  $z = -0.4179$ , podemos observar que el polo está alejado del polo de inestabilidad  $z = -1$ .

La ecuación del controlador de diferencias

$$\Delta U(z) = \frac{1}{B(z)} [\lambda E(z) + \Delta Y(z)A(z)]_{\Delta U(z)=U(z)(1-z^{-1})} \quad (2.50)$$

En la gráfica 2.8 se observa que la salida presenta oscilaciones ocultas, lo que significa un problema, porque en tiempos de muestreo no se notan, en tal caso parecerá que la salida se está comportando de forma deseada, cuando en realidad el controlador esta actuando de forma violenta, se puede ver en las oscilaciones de la manipulación.

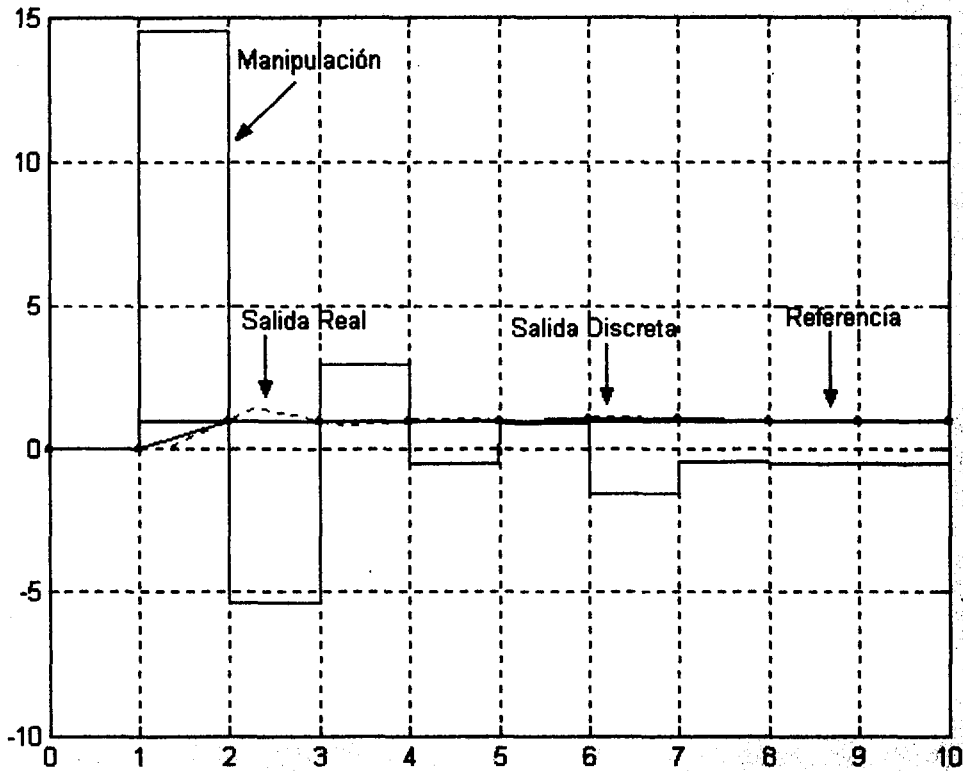


Figura. 2.8: Comportamiento del controlador de diferencias clásico con  $\theta < T/2$ .

### Ejemplo 2

Considere un sistema de primer orden con tiempo muerto  $\theta = 0.5 = \frac{T}{2}$ .

Función de transferencia discreta

$$HG_p(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\Delta Y(z)}{\Delta U(z)} = \frac{0.04938z^{-1} + 0.048165z^{-2}}{1 - 0.9512z^{-1}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (2.51)$$

El polo de la función de transferencia, ecuación (2.51), es  $z = -0.9753$ , muy cerca del polo de inestabilidad  $z = -1$ .

En la figura 2.9 se puede observar que la manipulación es oscilante, aunque tiende a estabilizarse después de un tiempo muy grande. En este caso al controlador se le está exigiendo

## 2.2 Fenómeno de Timbre

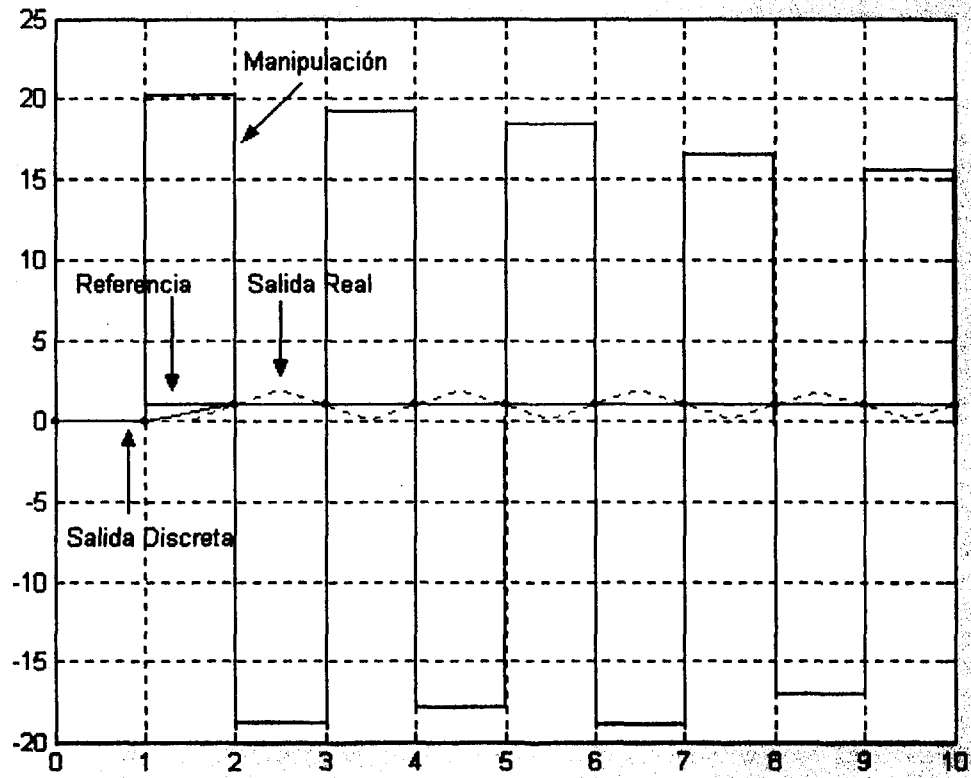


Figura. 2.9: Comportamiento del controlador de diferencias clásico con  $\theta \approx T/2$ .

demasiado y esta forzando la manipulación.

**Ejemplo 3**

Sistema de primer orden con tiempo muerto  $\theta > \frac{T}{2}$ ,  $\theta = 0.8$ , en el controlador de diferencias con un sólo parámetro los sistemas con un tiempo muerto mayor que  $\frac{T}{2}$  son inestables como se analizá en la tesis de Barba Avila [2].

La función de transferencia discreta del proceso es

$$HG_p(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0.0199z^{-1} + 0.07764z^{-2}}{1 - 0.9512z^{-1}} \quad (2.52)$$

La función de transferencia discreta del lazo de control presenta un cero, el cual se convierte en un polo en  $z = -3.9015$ , dicho polo sebrepara el polo de inestabilidad  $z = -1$  asi que el controlador debe lidiar con un sistema muy complicado de controlar debido a que la planta en si sola posee un polo inestable.

En la figura 2.10 se puede observar que la manipulación es oscilante, aunque tiende a estabilizarse depues de un tiempo muy grande, en muchos actuadores no es físicamente posible hacer este tipo de manipulaciones. En este caso el controlador se esta forzando y esta forzando la manipulación.

### 2.3 Soluciones anteriores para eliminar el efecto de timbre

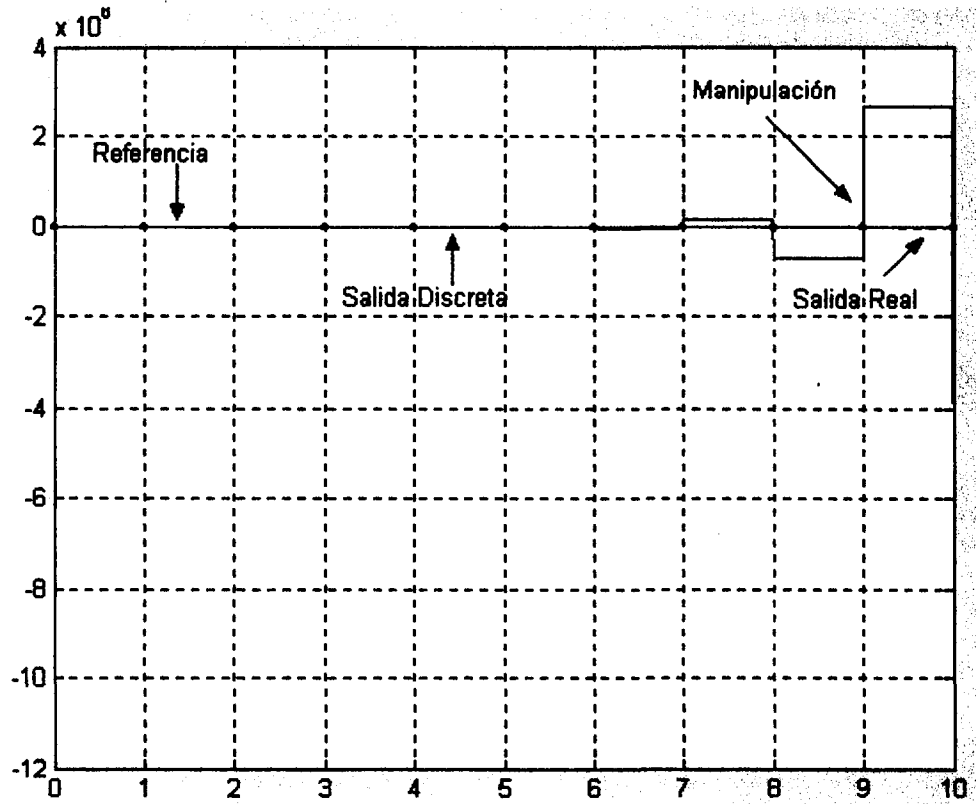


Figura. 2.10: Comportamiento del controlador de diferencias clásico con  $\theta > T/2$ .

De los dos ejemplos anteriores podemos deducir que nuestro problema es el polinomio  $B(z)$ . este polinomio se localiza en el denominador del controlador, por lo que se tiene una respuesta no deseable. En el capítulo siguiente se presentará una propuesta para eliminarlo.

### 2.3 Soluciones anteriores para eliminar el efecto de timbre

Anteriormente ya se ha atacado el problema de timbre con la intención de eliminarlo, o por lo menos reducirlo mediante el uso de diferentes técnicas, a continuación se verán algunas de las más usadas, como son diseño de controladores RST por reubicación de polos y el método

de Kalman que se utilizó en la tesis de Pascual Barba [2] para reducción del fenómeno de timbre.

### 2.3.1 Método de Kalman

El método aplicado al controlador de diferencias es el método propuesto por Kalman, por lo que se revisará el método para conocer los principios en los que se basa funcionamiento del controlador de diferencias.

El método propuesto por Kalman para diseñar un controlador de cancelación sin efecto de timbre consiste en lo siguiente.

De la figura 2.11, especifiquemos la función de transferencia de lazo cerrado deseada y despejemos el controlador que necesitamos para lograrlo.

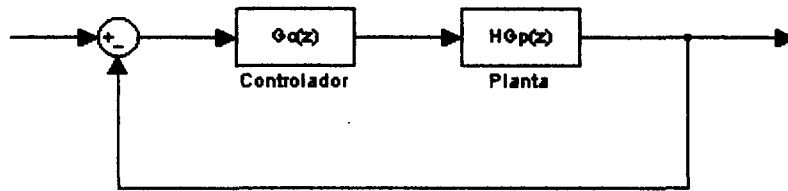


Figura. 2.11: Lazo de control retroalimentado.

Sea la función de transferencia de lazo cerrado

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_c H G_p}{1 + G_c H G_p} = G_d \quad (2.53)$$

En donde  $G_c$ : Función de transferencia del controlador

$H G_p$ : Función de transferencia de la planta.

De la ecuación (2.53) despejamos para obtener la ecuación del controlador deseado.

2.3 Soluciones anteriores para eliminar el efecto de timbre

$$\begin{aligned}
 G_c H G_p &= G_d (1 + G_c H G_p) \\
 G_c H G_p &= G_d + G_d G_c H G_p \\
 G_c H G_p &= G_d + G_d G_c H G_p \\
 G_c H G_p - G_d G_c H G_p &= G_d \\
 G_c H G_p (1 - G_d) &= G_d
 \end{aligned}$$

$$G_c = \frac{1}{H G_p} \cdot \frac{G_d}{1 - G_d} \quad (2.54)$$

La ecuación (2.54) se le conoce como la ecuación general de los controladores de cancelación.

Equivalente a la ecuación (2.54), es la ecuación

$$G_c = \frac{A(z)}{B(z)} \cdot \frac{G_d}{1 - G_d} \quad (2.55)$$

donde:

$G_d$  : Debe tener ganancia unitaria.

Los ceros de la planta  $B(q^{-1})$  aparecen como polos en el controlador y pueden producir dos tipos de fenómenos:

- Inestabilidad en el controlador: La manipulación y la respuesta oscilan en forma creciente.
- Timbre: La manipulación y la respuesta oscilan pero en forma decreciente y eventualmente se atenúa.

Para lograrlo hacemos que la respuesta tenga un tiempo de establecimiento finito, con la ecuación

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = P(z) \Rightarrow y_k = p_0 r_k + p_1 r_{k-1} + p_2 r_{k-2} \quad (2.56)$$

y que la manipulación también tenga tiempo de establecimiento finito de la siguiente manera

$$\frac{U(z)}{R(z)} = Q(z) \Rightarrow u_k = q_0 r_0 + q_1 r_1 + q_2 r_2 \quad (2.57)$$

Ahora especificamos  $\frac{Y(z)}{R(z)} = P(z) = G_d$ ,  $G_d$  se debe especificar de tal modo que  $\frac{U(z)}{R(z)}$  sea un polinomio sin polos haciendo.

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\frac{B(q)}{B(1)}}{\frac{A(q)}{B(1)}} \quad (2.58)$$

Kalman propone

$$P(z) = \frac{B(z)}{B(1)} = G_d \quad (2.59)$$

Entonces si  $G_d = \frac{B(z)}{B(1)}$

$$G_c = \frac{A(z)}{B(z)} \cdot \frac{\frac{B(z)}{B(1)}}{1 - \frac{B(z)}{B(1)}} = \frac{A(z)}{B(1) - B(z)} \quad (2.60)$$

Los coeficientes del algoritmo de control están directamente relacionados a los coeficientes de la función de transferencia pulso del proceso. Si el proceso tiene un término de tiempo muerto  $z^{-N}$  se mantiene la ecuación anterior, los procesos con tiempo muerto no presentan problemas derivados por el algoritmo de control.

Observe que ahora  $B(z)$  ya no afecta directamente como polos del controlador, ahora están atenuados por un filtro de primerr orden.

### 2.3.2 Controladores RST por reubicación de polos

Del grupo de los controladores con estructura RST el de Reubicación de polos es el más representativo y quizá el más utilizado, el cual se muestra en la figura 2.12 y se describe en seguida.

Como se puede observar en el método de Kalman, el problema es el hecho de cancelar los ceros de la planta. Este método de diseño no cancela los ceros de la planta y por lo tanto no presenta los problemas y restricciones de que los ceros de la planta sean estables (dentro del



círculo unitario) y lejos de polo de timbre ( $z = -1$ ). En caso de no cumplir estas condiciones, el controlador podría resultar inestable o con un “timbre” excesivo. El no cancelar estos ceros causa que los objetivos de seguimiento y regulación no se logren con la misma exactitud que los controladores que si cancelan, sin embargo, lo hacen con similitud bastante buena.

Este controlador usa la estructura RST y opcionalmente, (si los objetivos ante seguimiento y regulación son distintos) un generador de trayectoria  $FG$ , también conocido como modelo de referencia. Su función es definir el valor en el cual se desea la referencia en cada tiempo de muestreo para que el comportamiento global sea el deseado.

El controlador RST por reubicación de polos, tiene la estructura presentada en la figura 2.12, también se muestra la función de transferencia real y la función de transferencia deseada.

A partir de la estructura de la figura 2.12 se proponen los polinomios  $R(z^{-1})$ ,  $S(z^{-1})$ ,  $T(z^{-1})$ ,  $F(z^{-1})$  y  $G(z^{-1})$  para obtener una respuesta deseada tanto ante perturbaciones como para cambios en referencia.

Simbología:

$P^r(z^{-1})$ : Polos deseados ante perturbaciones.

$C^r(z^{-1})$ : Ceros deseados ante perturbaciones.

$P^s(z^{-1})$ : Polos deseados ante cambios de referencia.

$C^s(z^{-1})$ : Ceros deseados ante cambios de referencia.

$\frac{F(z^{-1})}{G(z^{-1})}$ : función de transferencia deseada ante cambios en referencia.

$y^d$ :  $y$  deseada.

#### Desempeño del controlador de reubicación de polos ante perturbaciones (Regulación)

Ante perturbaciones, la respuesta deseada del controlador esta determinada por unos polos deseados [12], de tal manera que:

$$\frac{z^{-N-1}B(z^{-1})}{S(z^{-1})A(z^{-1}) + z^{-N-1}B(z^{-1})R(z^{-1})} = \frac{z^{-N-1}B(z^{-1})}{P_d(z^{-1})} \quad (2.61)$$

Se observa que en la respuesta se conservan los ceros de la planta, dado que no hay cancelación de estos; de esta manera se obtiene:

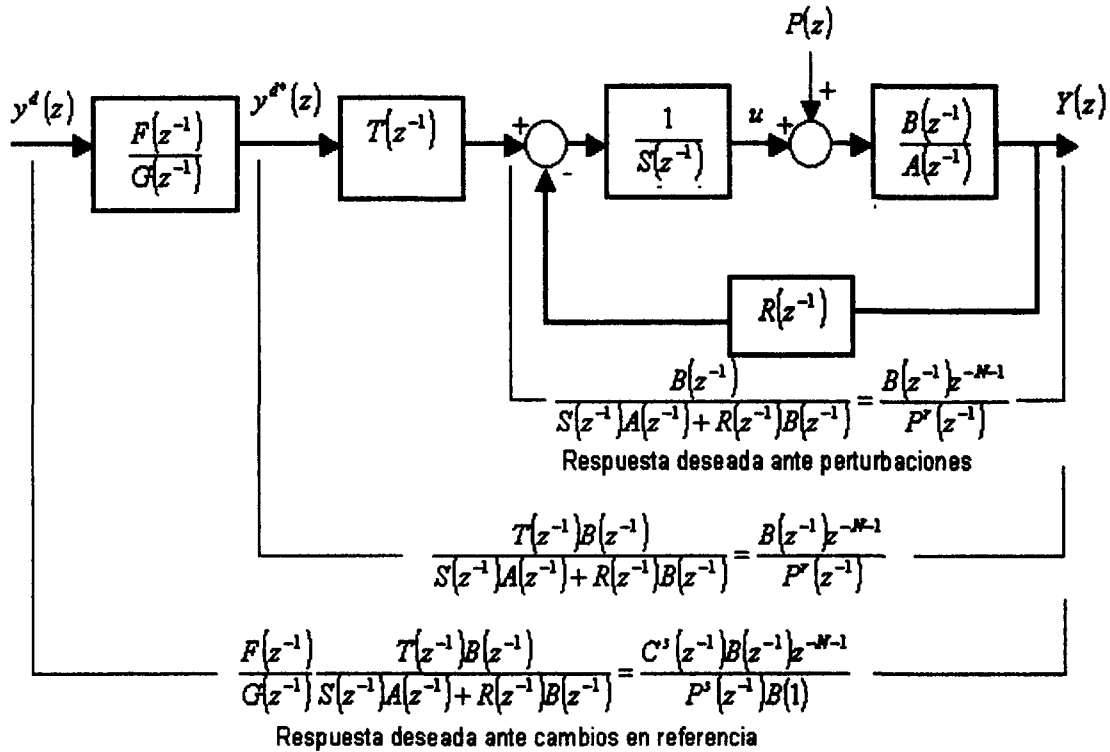


Figura. 2.12: Estructura del controlador RST por reubicación de polos.

$$S(z^{-1})A(z^{-1}) + z^{-N-1}B(z^{-1})R(z^{-1}) = P_d(z^{-1}) \quad (2.62)$$

Para calcular los polos deseados  $P(z^{-1})$  se transforma al dominio  $z$  una función de transferencia deseada ante regulación  $G_{dy}(s)$ . Se incluye un retenedor de orden cero dentro de la estructura para conservar la respuesta al escalón. De esta manera se obtiene que:

$$\frac{C(z^{-1})}{P(z^{-1})} = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{G_{dy}(s)}{s} \right\} \quad (2.63)$$

donde es importante mencionar que solamente se toman los polos de la función dado que son los que en mayor grado determinan la respuesta.

### 2.3 Soluciones anteriores para eliminar el efecto de timbre

Para evitar el error de estado estable, es necesario que dentro del lazo de control se incluya un elemento integrador, el cual se incluye dentro del polinomio  $S(z^{-1})$  por lo que se define:

$$S(z^{-1}) = (1 - z^{-1}) S'(z^{-1}) \quad (2.64)$$

de tal manera que la ecuación quedará:

$$S'(z^{-1}) (1 - z^{-1}) A(z^{-1}) + z^{-N-1} B'(z^{-1}) R(z^{-1}) = P_d(z^{-d}) \quad (2.65)$$

Por lo tanto, en la ecuación general de diseño RST

$$S'(z^{-1}) A'(z^{-1}) + B(z^{-1}) R(z^{-1}) = P_d(z^{-1}) \quad (2.66)$$

se realizan los siguientes cambios:

$$A'(z^{-1}) = A(z^{-1}) (1 - z^{-1}) \quad (2.67)$$

$$B(z^{-1}) = B'(z^{-1}) z^{-1-N} \quad (2.68)$$

Al momento de implementar se actualiza el polinomio  $S(z^{-1})$ ; esto es;

$$S(z^{-1}) = (1 - z^{-1}) S'(z^{-1}) \quad (2.69)$$

Es importante señalar que no existe cancelación total de la dinámica de la planta, sino que los ceros de la planta se conservan dentro de dicha respuesta.

#### **Desempeño del controlador de reubicación de polos ante cambios en referencia (Seguimiento)**

Idealmente cuando se tiene un cambio de referencia, es deseable que la salida  $y(t)$  siga una trayectoria deseada  $y_d(t)$  de donde se determina una función de transferencia deseada:

$$\frac{Y_d(z)}{y^d(z)} = G_{dy}(z) \quad (2.70)$$

Si se analiza la estructura del controlador de cancelación de polos se observa que la respuesta dentro del lazo, esto es, sin tomar en cuenta los polinomios  $T(z^{-1})$ ,  $F(z^{-1})$  y  $G(z^{-1})$  se obtiene:

$$\frac{z^{-N-1}B(z^{-1})}{P(z^{-1})} \quad (2.71)$$

Si se quiere obtener una respuesta diferente ante cambios en referencia se precisa cancelar los polos del lazo. Esto se logra haciendo que el polinomio  $T(z^{-1})$  cancele dichos polos, por lo que:

$$T(z^{-1}) = P(z^{-1}) \quad (2.72)$$

Podría pensarse de alguna manera cancelar el polinomio  $B(z^{-1})$ , sin embargo, si éste es el resultado de discretizar una planta la cual contiene ceros inestables o muy cerca del polo de timbre, puede producir problemas ante un cambio de referencia. Es por eso que conviene conservar dichos ceros dentro de la respuesta del sistema de control.

Hecha la cancelación, la respuesta desde el polinomio  $T(z^{-1})$  hasta la salida del proceso es  $B(z^{-1})z^{-N-1}$ . Por lo que si se quiere obtener un tipo de respuesta específico ante cambios en referencia, se tienen que calcular los polinomios  $F(z^{-1})$  y  $G(z^{-1})$  a partir de una función de transferencia deseada ante cambios en referencia

$$G_{dy}(z) = \frac{C^r(z^{-1})}{P^r(z^{-1})} \quad (2.73)$$

y tomando en cuenta el retenedor de orden cero.

Es importante mencionar que dicha transformación se multiplica por  $z$  dado que el lazo interno ya retrasa, en un tiempo de muestreo más  $N$ , la respuesta del sistema, de tal manera que ya no es necesario efectuar otro retraso dentro del polinomio  $F(z^{-1})$  y  $G(z^{-1})$ .

#### Observaciones

- $S(z^{-1})$  y  $R(z^{-1})$  se escogen de tal manera que

$$S(z^{-1})A(z^{-1}) + R(z^{-1})B(z^{-1}) = P^r(z^{-1}) \quad (2.74)$$

Es decir que los polos de lazo cerrado coincidan con los polos  $P^r$  deseados ante regulación (observe que los ceros de la planta no se cancelan). Además,  $S(z^{-1})$  debe incluir un integrador (un término  $1 - z^{-1} = 1 - q^{-1}$ ).

- $T(z^{-1})$  se escoje como  $T(z^{-1}) = P^r(z^{-1})/B(1)$  para cancelar los polos de regulación y garantizar que la función de transferencia  $y/y^d$  tenga ganancia unitaria. De esta manera

## 2.4 Control Robusto

la respuesta  $y$  alcanzará el valor deseado  $y^{d*}$  en exactamente  $Nb+1$  tiempos de muestreo después.

- $F(z^{-1})$  y  $G(z^{-1})$  se escogen para generar la trayectoria deseada ante cambios en referencia de acuerdo a los polos y ceros deseados en seguimiento  $C^s(z^{-1})$  y  $P^s(z^{-1})$ . Dado que los ceros de la planta permanecen en la función de transferencia  $y/y^d$ , la respuesta no será exactamente igual a la especificada por  $C^s(z^{-1})$  y  $P^s(z^{-1})$ .

### Características del controlador de Reubicación de Polos

Las características principales del controlador de reubicación de polos son las siguientes:

- Tiene un comportamiento específico ante perturbaciones y ante cambios en referencia.
- Como no cancela los ceros de la planta, no presenta efecto de timbre, por lo que no hay restricción en cuanto a los ceros de la planta.
- Su diseño es complejo y requiere herramienta computacional.
- Conserva los ceros de la planta, por lo que dicha dinámica se tiene que considerar dentro de las funciones de transferencia deseadas.

## 2.4 Control Robusto

Uno de los principales problemas en el diseño de controladores para procesos, consiste en mantener al proceso bajo control a pesar de que existan discrepancias entre el modelo de la planta utilizado para el diseño del controlador, y el modelo real del proceso. Los cambios en la dinámica del proceso, el ruido en la medición, así como las no linealidades propias del sistema a controlar, son las principales causas de que existan incertidumbres o variaciones paramétricas en los sistemas de control. Ante este tipo de situaciones surge la definición de control robusto como aquel que a pesar de las variaciones paramétricas que puedan presentarse en un proceso, garantice la estabilidad en lazo cerrado del sistema, y con un cierto nivel de desempeño en seguimiento y regulación.

En control robusto, al modelo que se usa para el diseño del controlador se le conoce como nominal, donde el diseño resultante busca la estabilidad y performance para este modelo, y ante las posibles variaciones paramétricas. El objetivo entonces de un controlador robusto será mantener la estabilidad en lazo cerrado de un proceso para todo un grupo de modelos, originados por los cambios en la dinámica del sistema.

### 2.4.1 Estabilidad Absoluta

La definición de un controlador robusto nos dice que el controlador debe buscar garantizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado ante posibles variaciones paramétricas, una forma de determinar la estabilidad absoluta de un sistema de control en lazo cerrado es mediante el criterio de estabilidad de Nyquist, el cual se explica a continuación.

**Criterio de estabilidad de Nyquist** El criterio de estabilidad de Nyquist sirve para poder determinar la estabilidad absoluta de un sistema de control en lazo cerrado, mediante el análisis en lazo abierto. Si una función de transferencia en lazo abierto  $G(s)H(s)$  tiene  $k$  polos en el semiplano derecho del plano  $s$ , para que el sistema sea estable en el lugar geométrico  $G(j\omega)H(j\omega)$ , conforme  $\omega$  varía de  $-\infty$  a  $+\infty$  debe encerrar  $k$  veces el punto crítico  $-1 + j0$  en sentido contrario a las manecillas del reloj.

El criterio se expresa como

$$Z = N + P \quad (2.75)$$

donde:

$Z$  = Ceros de  $1 + G(s)H(s)$  en el semiplano derecho del plano  $s$ .

$N$  = Encierros en el sentido de las manecillas del reloj del punto  $-1 + j0$ .

$P$  = Polos de  $G(s)H(s)$  en el semiplano del plano  $s$ .

En el análisis de estabilidad mediante el criterio de Nyquist, se pueden presentar generalmente los siguientes casos:

- El punto crítico  $-1 + j0$  no está encerrado; en este caso el sistema es completamente estable si no existen polos en la función de transferencia en la parte derecha del plano  $s$ , de lo contrario el sistema es inestable.
- El punto crítico  $-1 + j0$  queda encerrado una o varias veces en sentido contrario de las manecillas del reloj. En este caso el sistema es estable si la cantidad de encierros en sentido contrario de las manecillas del reloj es igual al número de polos de  $G(s)H(s)$  en el semiplano derecho del plano  $s$ , de lo contrario el sistema es inestable.
- El punto crítico  $-1 + j0$  queda encerrado una o varias veces en el sentido de las manecillas del reloj, en este caso el sistema es inestable.

Una forma simplificada de analizar de estabilidad de Nyquist consiste en seguir la frecuen-

## 2.4 Control Robusto

cia del sistema en dirección donde se incrementa la frecuencia ( $\omega > 0$ ), si en el cruce por el eje real el punto crítico ( $-1 + j0$ ) se encuentra encerrado y esta a la derecha de la respuesta, entonces el sistema es inestable, en cambio si el punto crítico está encerrado y está a la izquierda de la respuesta, entonces será estable en el lazo cerrado

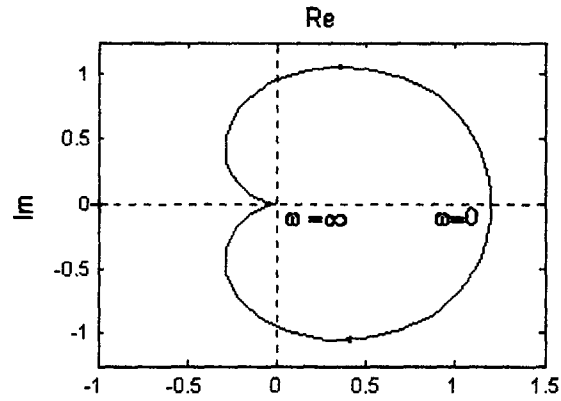


Figura. 2.13: Diagrama de Nyquist de un sistema estable.

En todos los casos cuando el punto crítico no se encuentre encerrado y la planta no tenga polos en la parte derecha del plano imaginario el sistema será estable, la figura 2.13 muestra el diagrama de Nyquist de un sistema estable.

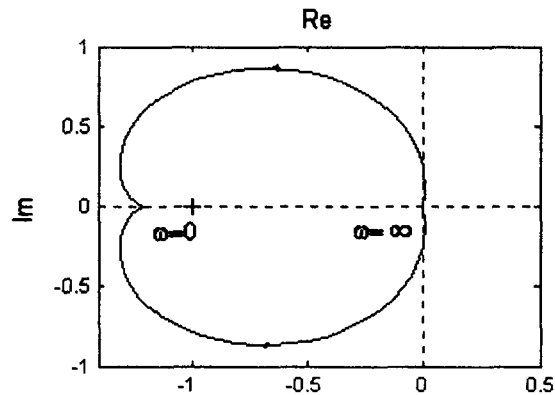


Figura. 2.14: Diagrama de Nyquist de un sistema inestable.

La figura 2.14 el diagrama de Nyquist de un sistema inestable, analizado bajo el criterio de estabilidad de Nyquist.

### 2.4.2 Estabilidad relativa

La estabilidad relativa de un sistema es la que nos indica el grado de estabilidad de un sistema, es decir que tan cerca o lejos se encuentra el sistema de su estabilidad absoluta, para esto se utilizan diferentes criterios de evaluación, un ejemplo es el análisis del efecto que tiene en la estabilidad la variación de la ganancia de un proceso, observando su diagrama polar. Existen otros criterios de gran importancia para evaluar la estabilidad relativa de los sistemas de control como lo son el margen de ganancia y fase que se explica a continuación.

**Margen de Ganancia** Es el inverso de la magnitud  $|G(j\omega)|$  en la frecuencia en la cual el ángulo de fase del sistema es  $-180^\circ$ . En un sistema de fase mínima el margen de fase es la razón (normalmente expresada en decibelios) por la que la ganancia del lazo se permite que



cambie antes de que se alcance la condición de inestabilidad.

Dicho de forma simple, el margen de ganancia (en decibelios) es el número de decibelios que se debe incrementar la ganancia en lazo abierto para que alcance  $0 \text{ dB}$  a la frecuencia a la que el desfase en lazo abierto es  $-180^\circ$ . Si se debe incrementar la ganancia hasta que alcance  $0 \text{ dB}$ , entonces el margen de ganancia es, por su puesto, negativo. Si la fase no alcanza  $-180^\circ$  a ninguna frecuencia, entonces no hay límite impuesto en el cambio en la ganancia para que el sistema permanezca estable, y el margen de ganancia es infinito.

La inestabilidad producida por un incremento en la ganancia es una situación común; por lo tanto, la razón requerida para alcanzar la inestabilidad, es normalmente mayor que 1 y el margen de ganancia expresado en decibelios es normalmente positivo. No obstante, hay algunos modelos de sistemas que requieren de una reducción en la ganancia para alcanzar la inestabilidad, y el caso general permite la posibilidad de que un aumento o una disminución conduzca a la inestabilidad. Por lo tanto, puede existir tanto hacia arriba un margen de ganancia como hacia abajo un margen de ganancia o ambos.

$$MF_{dB} = -20 \log |G(j\omega)| \quad (2.76)$$

Un margen de ganancia menor a la unidad es positivo y el sistema es estable; un margen de ganancia mayor que la unidad es negativo y el sistema es inestable.

**Margen de Fase** Es el ángulo de diferencia que existe entre  $-180^\circ$  y la fase de la función de transferencia del proceso, cuando la magnitud es unitaria.

En otras palabras en un sistema que inicialmente inestable, el margen de fase es una medida de retraso de fase adicional que está permitido antes de alcanzar  $-180^\circ$  a la frecuencia donde  $M(\omega) = 1$  (ó  $20 \log M = 0 \text{ dB}$ )

El margen de fase nos dice cuánto atraso de fase puede tolerar el sistema antes de la inestabilidad, por lo tanto un margen de fase positivo nos indica que el sistema es estable y un margen de fase negativo que el sistema es inestable.

La figura 2.15 muestra un esquema del diagrama de Bode de un sistema estable analizado

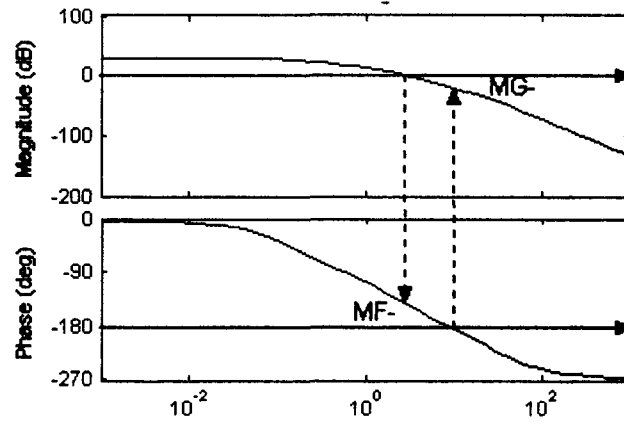


Figura. 2.15: Margen de fase y ganancia en el diagrama de Bode de un sistema estable.

bajo el criterio de márgenes de fase y ganancia.

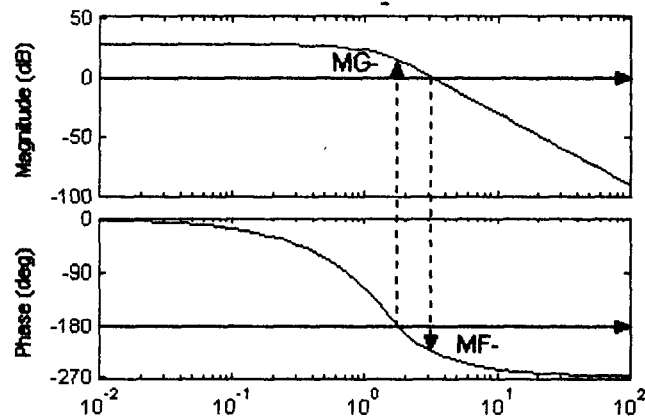


Figura. 2.16: Margen de fase y ganancia en el diagrama de Bode de un sistema inestable.

La figura 2.16 muestra el diagrama de Bode para un sistema inestable analizado bajo el criterio de margen de fase y de ganancia.

Los valores adecuados de margen de fase o ganancia permiten un grado de robustez ante variaciones paramétricas, ya que ambos delimitan el comportamiento en lazo cerrado del sistema. Ogata [7] menciona que para obtener un desempeño satisfactorio el margen de fase debe estar entre  $30^\circ$  y  $60^\circ$ , y el margen de ganancia debe ser mayor a  $6dB$ .

### 2.4.3 Función de Sensibilidad

Al diseñar un sistema de control, nuestro diseño se basa en el modelo de una planta específica. Tal modelo no es de ninguna manera preciso, sino sólo una aproximación de la dinámica real de la planta. La diferencia entre la dinámica de la planta y la dinámica de un modelo se denomina error de modelado. Los errores de modelado por alguna de las razones siguientes.

- Características no lineales de la planta no consideradas.
- Características de alta frecuencia de la planta no consideradas (por ejemplo, los sistemas mecánicos tienen un fenómeno dinámico de alta frecuencia, incluyendo las resonancias, el efecto de una masa de resorte no considerada).
- La precisión de los parámetros no es suficientemente buena.
- Las características de la planta cambian con el tiempo.

En los casos en que el sistema a controlar es sometido a situaciones desfavorables como perturbaciones, ruido en la medición, y no linealidades, la función de sensibilidad nos da una estimación bastante precisa para evaluar el comportamiento global, mediante el uso de la función de sensibilidad es posible cuantificar la robustez.

La definición de función de sensibilidad parte de la “sensibilidad” que presenta un sistema de control ante perturbaciones.

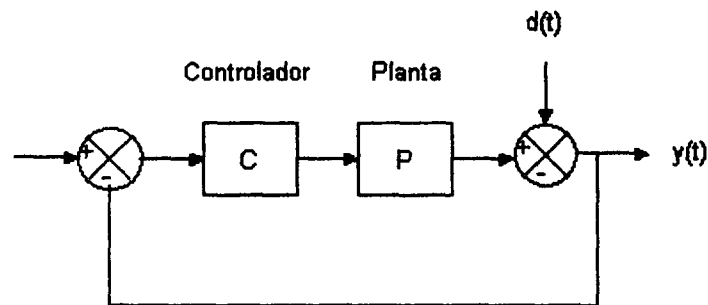


Figura. 2.17: Lazo de control retroalimentado, con perturbación a la salida del proceso.

Desde el origen de la teoría de control robusto muchos de los criterios de optimización y robustez buscan minimizar el valor pico de la función de sensibilidad, especialmente en sistemas que experimentan cambios en su dinámica de operación.

Para un sistema de control retroalimentado como el que se muestra en la figura 2.17 la función de sensibilidad se define como

$$S = \frac{y(t)}{d(t)} = \frac{1}{1 + PC} \quad (2.77)$$

La ecuación (2.77), que es la función de transferencia que se obtiene entre la salida y una perturbación de entrada, por lo tanto es deseable que el valor de  $S$  sea cero para el rango de frecuencias en las cuales se presenten las perturbaciones.

Si analizamos la función de sensibilidad en un diagrama de Nyquist tenemos que es el

recíproco de la distancia que existe entre la curva PC de Nyquist y el punto crítico  $(-1 + j0)$ , por tanto un valor pequeño (cercano a 0) de  $1/S_{máx}$  indica que el sistema está cerca de punto inestabilidad; por tanto el valor máximo de sensibilidad  $S_{máx}$  nos da una medición más exacta de estabilidad absoluta del sistema, que el margen de fase y ganancia juntos.

En un diagrama de Nyquist se puede representar que la distancia de la curva al punto crítico  $(-1 + j0)$ , es  $1 + PC$  que es el inverso de la función de sensibilidad, por tanto si definimos

$$S_{máx}(j\omega) = \underset{\omega}{máx} |S(j\omega)| \quad (2.78)$$

entonces el punto más cercano a la curva de Nyquist a partir del punto crítico es

$$\Delta M = \frac{1}{S_{máx}(j\omega)} \quad (2.79)$$

donde  $\Delta M$  es conocido como el margen de modulo, en el análisis de sistemas de control es muy importante tener una cuantificación de este margen debido a que proporciona un límite para las características de elementos no lineales y variantes en el tiempo tolerados en lazo cerrado de un sistema de control.

#### 2.4.4 Función de sensibilidad complementaria

Del lazo de control de la figura 2.17, la función de transferencia obtenida entre la salida y la referencia es

$$\Gamma = \frac{y(t)}{r(t)} = \frac{PC}{1 + PC} \quad (2.80)$$

donde la función  $\Gamma$  es conocida como la función de sensibilidad complementaria, la cual como su nombre lo dice es el complemento de la función de sensibilidad, en el diseño de sistemas de control esta función nos da una cuantificación de la respuesta en seguimiento a obtener en lazo cerrado.

Si la comparamos con la función de sensibilidad  $S$  la cual nos da el comportamiento ante regulación, sabremos entonces que para sistemas de control como el de la figura 2.17 siempre existe un sacrificio entre el seguimiento y al regulación deseados, se puede demostrar que

$$\S(j\omega) + \Gamma(j\omega) = 1 \quad (2.81)$$

entonces, si se conoce la función de sensibilidad puede obtenerse directamente la función de sensibilidad complementaria como

$$\Gamma(j\omega) = 1 - \S(j\omega) \quad (2.82)$$

El análisis de ambas funciones de sensibilidad nos permite conocer todo el comportamiento que puede presentar un sistema de control en lazo cerrado, y son de suma importancia en el análisis de robustez.

### 2.4.5 Propiedades de la función de sensibilidad

La función de sensibilidad tiene cuatro propiedades principales, las cuales permiten conocer toda la información que ésta nos proporciona en el análisis de sistemas de control:

#### *Propiedad 1.*

El valor de la función de sensibilidad a cierta frecuencia brinda el factor de atenuación o amplificación de una perturbación, cuando

$$\S(j\omega) < 1 \text{ (0dB) la perturbación es atenuada} \quad (2.83)$$

$$\S(j\omega) > 1 \text{ (0dB) la perturbación es amplificada} \quad (2.84)$$

#### *Propiedad 2.*

Se considera que un controlador es robusto ante variaciones paramétricas, si el pico máximo de la función de sensibilidad  $\S_{m\acute{a}x}$  se mantiene menor a 6dB para todo el rango de frecuencias es decir

$$\S_{m\acute{a}x}(j\omega) < 6dB \text{ para } 0 < \omega < \infty \quad (2.85)$$

#### *Propiedad 3.*

El ancho de banda de atenuación en la función de sensibilidad, el cual ocurre cuando

$$\zeta(j\omega) < 0dB \quad (2.86)$$

Determina la velocidad de respuesta del controlador en regulación.

*Propiedad 4.*

El inverso del pico máximo de la función de sensibilidad conocido como el margen de modulo, nos da estimaciones conservadoras del margen de fase y de ganancia, analizando el diagrama de Nyquist tenemos que

$$MG \geq \frac{1}{1 - \frac{1}{S_{m\acute{a}x}}} \quad (2.87)$$

$$MF \geq 2 \arcsin \frac{S_{m\acute{a}x}}{2} \quad (2.88)$$

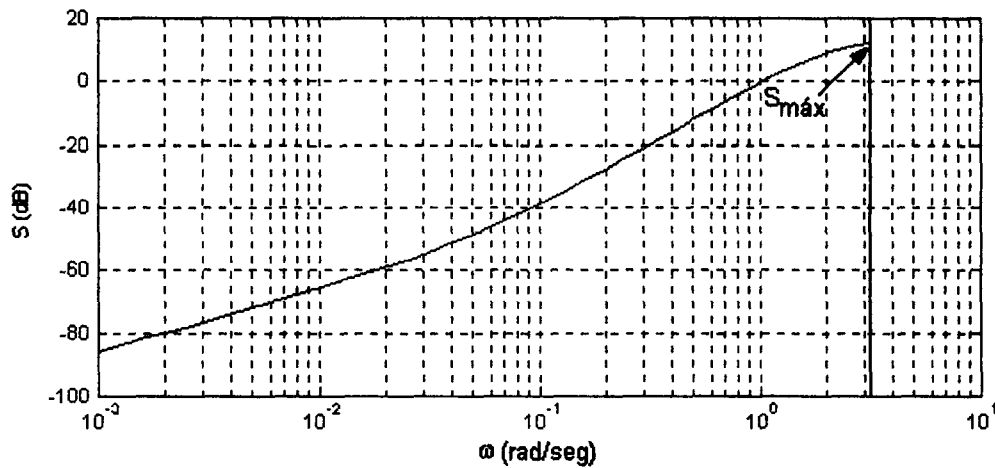


Figura. 2.18: Diagrama de Bode del pico máximo de la función de sensibilidad.

En la figura 2.18 se muestra un diagrama de Bode donde se observa cómo detectar el pico de la función de sensibilidad en un lazo de control dado.

Como se ha mencionado anteriormente la función de sensibilidad es un cuantificador de la robustez de un sistema de control en lazo cerrado, ya que si su valor máximo se mantiene por debajo de un límite que típicamente son 8 dB, se puede considerar que el controlador tiene un mínimo grado de robustez ante variaciones paramétricas (Landau I. [12]), esto se puede validar analizando la función de sensibilidad en un diagrama de Nyquist donde 8 dB quiere decir que la respuesta del sistema se encuentra aproximadamente a 0.4 en magnitud del punto crítico  $(-1 + j0)$ .

Cuando la función de sensibilidad de un proceso se encuentra lejos en magnitud del punto crítico  $(-1 + j0)$ , el sistema podrá soportar variaciones paramétricas en el modelo, siempre y cuando estas no sean lo suficientemente grandes para llevar a la respuesta del sistema a inestabilidad, por lo tanto entre más lejos se encuentre el inverso del pico máximo de la función de sensibilidad original del proceso del punto crítico, mayor será la magnitud de las variaciones paramétricas admisibles y el sistema de control será más robusto.

Se definen tres tipos de controladores con base en los siguientes criterios de robustez:

*Robustez mínima (controlador rápido)*

$$S_{m\acute{a}x}(j\omega) = 8dB \quad (2.89)$$

Este criterio de robustez nos dice analizando el margen de ganancia, que en teoría el controlador puede soportar un incremento de variación en ganancia hasta 66.66% sin que el proceso se vuelva inestable.

*Robustez media (controlador balanceado)*

$$S_{m\acute{a}x}(j\omega) = 6dB \quad (2.90)$$

En este criterio el controlador puede soportar un incremento en ganancia de hasta un 100% sin que este se vuelva inestable,

*Robustez alta (controlador robusto)*

$$S_{m\acute{a}x}(j\omega) = 3dB \quad (2.91)$$



## 2.5 Teorema de Nyquist (Teorema de muestreo)

En este criterio el controlador puede soportar un incremento en ganancia de hasta un 233.33% sin que se vuelva inestable.

## 2.5 Teorema de Nyquist (Teorema de muestreo)

Desarrollado por H. Nyquist, "una señal analógica puede ser reconstruída, sin error, de muestras tomadas en iguales intervalos de tiempo. La razón de muestreo debe ser igual, o mayor, al doble del ancho de banda de la señal analógica". Esta reconstrucción es teórica porque en la práctica, el error de cuantificación y la longitud finita de los registros impiden esta reconstrucción exacta.



Figura. 2.19: Señal discretizada y recuperada de un muestreo en iguales intervalos de tiempo.

El proceso de recuperación de una señal muestreada en iguales intervalos de tiempo se ejemplifica en la figura 2.19.

La teoría del muestreo define que para una señal de ancho de banda limitado, la frecuencia de muestreo,  $f_m$ , debe ser mayor que dos veces su ancho de banda ( $B$ ) medida en *Hertz* (Hz).

$$f_m \geq 2B$$

Normalmente se suele filtrar la señal de entrada para eliminar las frecuencias que no pueden ser detectadas mediante el proceso del muestreo, debido a la limitación de los aparatos. Además es conveniente que la frecuencia de muestreo sea muy superior al doble de la frecuencia máxima de la señal puesto que ningún filtro pasa bajos puede eliminar completamente las frecuencias superiores a la frecuencia de corte. En la práctica se suele usar una frecuencia de

muestreo de entre 5 a 10 veces la frecuencia de corte del filtro pasa bajos.

La frecuencia  $2 * B$  es llamada la razón de muestreo de Nyquist. La mitad de su valor, es llamada la frecuencia de Nyquist.

El teorema de muestreo fue desarrollado en 1928 por Nyquist y probado matemáticamente por Claude Shannon en 1949.

Cuando una señal tiene componentes de frecuencia que exceden el límite de la frecuencia de Nyquist, se presenta el fenómeno de aliasing, el fenómeno de Aliasing consiste en que una señal se traslapa en otras frecuencias del espectro de las frecuencias. Para evitar este fenómeno las señales deben ser filtradas adecuadamente.

# Capítulo 3

## Controlador de Diferencias Modificado

En esta sección se muestra la aplicación del método de Kalman al controlador de diferencias para la reducción del fenómeno de timbre en la manipulación, producida por el controlador.

Kalman en su controlador propone que el comportamiento deseado en el sistema controlado sea  $\frac{B'(z^{-1})}{B(1)}$ . Donde  $B(z^{-1})$  es el polinomio de los ceros de la planta,  $B(1)$  es su ganancia.

Usando el mismo esquema Barba propone multiplicar la referencia  $r$  por  $\frac{B'(z^{-1})}{B(1)}$ .

### 3.1 Lazo de control del controlador de diferencias modificado

De la aplicación del método propuesto por Barba, al controlador de diferencias se obtiene el esquema presentado en la figura 3.20, el cual representa el lazo de control del controlador de diferencias modificado. En el capítulo siguiente (análisis de timbre y robustez del controlador de diferencias modificado), el proceso de análisis se basará en este esquema.

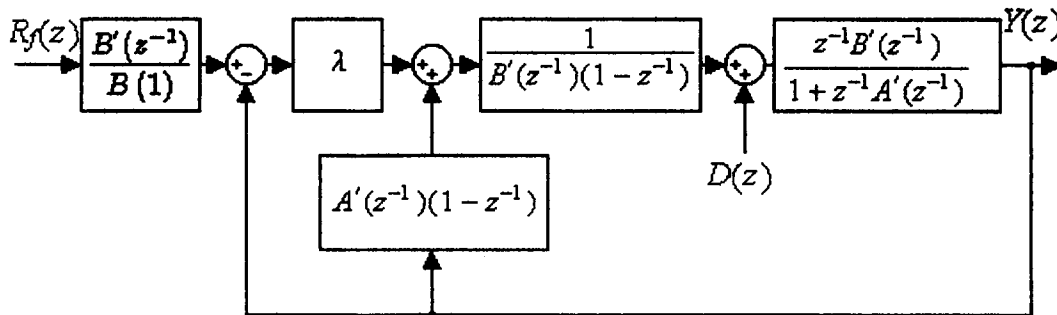


Figura. 3.20: Estructura del Controlador de Diferencias Modificado, con perturbación a la entrada del proceso.

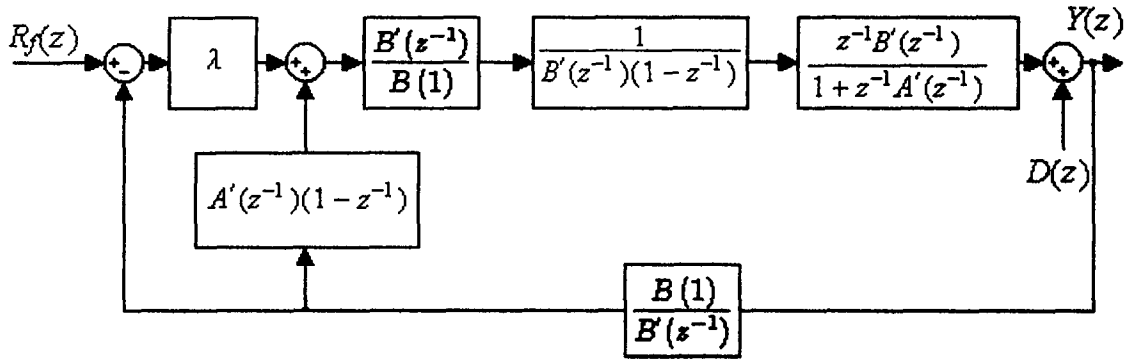


Figura. 3.21: Estructura equivalente del Controlador de Diferencias Modificado, con perturbación a la salida del proceso.

### 3.2 Análisis del controlador de diferencias modificado

A continuación se presenta el análisis matemático de la respuesta del controlador de diferencias ante cambios en referencia

#### 3.2.1 Análisis del controlador ante cambios en referencia

Basamos el análisis en la figura 3.20. La función de transferencia ante cambios en referencia se obtiene de la siguiente manera.

Se tiene una trayectoria directa y 2 lazos.

$$P_1 = \frac{\lambda z^{-1} B'(z^{-1})}{B(1)(1-z^{-1})[1+z^{-1}A'(z^{-1})]} \quad (3.92)$$

$$L_1 = -P_1 \frac{B(1)}{B'(z^{-1})} \quad (3.93)$$

$$L_2 = \frac{P_1}{\lambda} \frac{B(1)}{B'(z^{-1})} A'(z^{-1})(1-z^{-1}) \quad (3.94)$$

$\Delta$  y  $\Delta_1$  son

3.2 Análisis del controlador de diferencias modificado

$$\Delta = 1 - L_1 - L_2 \quad (3.95)$$

$$\Delta_1 = 1 \quad (3.96)$$

Utilizando la regla de Mason sustituimos los valores de  $P_1$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $\Delta$ , y  $\Delta_1$

$$\frac{Y(z^{-1})}{R_f(z^{-1})} = \frac{P_1}{1 + P_1 \frac{B(1)}{B'(z^{-1})} - \frac{P_1 B(1)}{\lambda B'(z^{-1})} A'(z^{-1})(1 - z^{-1})} \quad (3.97)$$

dividiendo por  $P_1$

$$\frac{Y(z^{-1})}{R_f(z^{-1})} = \frac{1}{\frac{1}{P_1} + \frac{B(1)}{B'(z^{-1})} - \frac{B(1)}{\lambda B'(z^{-1})} A'(z^{-1})(1 - z^{-1})} \quad (3.98)$$

Sustituyendo el valor de  $P_1$  por  $\frac{\lambda z^{-1} B'(z^{-1})}{B(1)(1 - z^{-1})[1 + z^{-1} A'(z^{-1})]}$

$$\frac{Y(z^{-1})}{R_f(z^{-1})} = \frac{1}{\frac{B(1)(1 - z^{-1})[1 + z^{-1} A'(z^{-1})]}{\lambda z^{-1} B'(z^{-1})} + \frac{B(1)}{B'(z^{-1})}} \quad (3.99)$$

Multiplicando por  $\lambda z^{-1} B'(z^{-1})$  y dividiendo por  $B(1)$

$$\frac{Y(z^{-1})}{R_f(z^{-1})} = \frac{\frac{\lambda z^{-1} B'(z^{-1})}{B(1)}}{(1 - z^{-1})[1 + z^{-1} A'(z^{-1})] + \lambda z^{-1} - z^{-1} A'(z^{-1})(1 - z^{-1})} \quad (3.100)$$

$$= \frac{\lambda z^{-1} \frac{B'(z^{-1})}{B(1)}}{1 + z^{-1} A'(z^{-1}) - z^{-1} - z^{-2} A'(z^{-1}) + \lambda z^{-1} - z^{-1} A'(z^{-1}) + z^{-2} A'(z^{-1})} \quad (3.101)$$

$$= \frac{\lambda z^{-1} \frac{B'(z^{-1})}{B(1)}}{1 - z^{-1}(1 - \lambda)} \quad (3.102)$$

Por reducción algebraica tenemos que

$$\frac{Y(z^{-1})}{R_f(z^{-1})} = z^{-1} \frac{B'(z^{-1})}{B(1)} \cdot \frac{\lambda}{1 - (1 - \lambda)z^{-1}} \quad (3.103)$$

La ecuación (3.103) demuestra que el comportamiento del controlador de diferencias ante cambios en referencia será el comportamiento de los ceros de la planta atenuados por un filtro de primer orden ajustable mediante el parámetro  $\lambda$ .

### 3.2.2 Fenómeno de timbre en el controlador de diferencia ante cambios en referencia

Revisemos ahora si tienen timbre ante cambios en referencia.

Analicemos el comportamiento de la manipulación ante un cambio en referencia, es decir, obtengamos  $\frac{U(z^{-1})}{R_f(z^{-1})}$ .

Se tiene una trayectoria directa y dos lazos.

$$P_1 = \frac{\lambda}{B(1)(1 - z^{-1})} \quad (3.104)$$

$$L_1 = -\frac{\lambda z^{-1}}{(1 - z^{-1})[1 + z^{-1}A'(z^{-1})]} \quad (3.105)$$

$$L_2 = \frac{z^{-1}A'(z^{-1})}{1 + z^{-1}A'(z^{-1})} \quad (3.106)$$

$\Delta$  y  $\Delta_1$  son

$$\Delta = 1 - L_1 - L_2 \quad (3.107)$$

$$\Delta_1 = 1 \quad (3.108)$$

Utilizando la regla de Mason sustituimos los valores de  $P_1$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $\Delta$ , y  $\Delta_1$

$$\frac{U(z^{-1})}{R_f(z^{-1})} = \frac{\frac{\lambda}{B(1)(1 - z^{-1})}}{1 + \frac{\lambda z^{-1}}{(1 - z^{-1})[1 + z^{-1}A'(z^{-1})]} - \frac{z^{-1}A'(z^{-1})}{1 + z^{-1}A'(z^{-1})}} \quad (3.109)$$

Multiplicando el numerador y el denominador por  $(1 - z^{-1})[1 + z^{-1}A'(z^{-1})]$ .

### 3.2 Análisis del controlador de diferencias modificado

$$\frac{U(z^{-1})}{R_f(z^{-1})} = \frac{\frac{\lambda [1 + z^{-1}A'(z^{-1})]}{B(1)}}{(1 - z^{-1}) [1 + z^{-1}A'(z^{-1})] + \lambda z^{-1} - z^{-1}A'(z^{-1})(1 - z^{-1})} \quad (3.110)$$

Por manipulación algebraica

$$\frac{U(z^{-1})}{R_f(z^{-1})} = \frac{\frac{\lambda [1 + z^{-1}A'(z^{-1})]}{B(1)}}{1 + z^{-1}A'(z^{-1}) - z^{-1} - z^{-2}A'(z^{-1}) + \lambda z^{-1} - z^{-1}A'(z^{-1}) + z^{-2}A'(z^{-1})} \quad (3.111)$$

Finalmente tenemos que

$$\frac{U(z^{-1})}{R_f(z^{-1})} = \frac{\lambda [1 + z^{-1}A'(z^{-1})]}{B(1) [1 - z^{-1}(1 - \lambda)]} = \frac{\lambda A(z^{-1})}{B(1) [1 - z^{-1}(1 - \lambda)]} \quad (3.112)$$

Observe que en el denominador de esta función de transferencia no está incluido el polinomio de los ceros de la planta  $B(z^{-1})$  que son los causantes del fenómeno de timbre. Por tanto el esquema propuesto si elimina el timbre ante cambios en referencia.

#### 3.2.3 Fenómeno de timbre en el controlador de diferencias ante perturbaciones a la entrada del proceso

Obtengamos la función de transferencia  $\frac{U(z^{-1})}{D(z^{-1})}$  para perturbaciones a la entrada del proceso.

Se tiene una trayectoria directa y dos lazos.

$$P_1 = \frac{\lambda z^{-1}}{(1 - z^{-1}) [1 + z^{-1}A'(z^{-1})]} + \frac{z^{-1}A'(z^{-1})}{[1 + z^{-1}A'(z^{-1})]} \quad (3.113)$$

$$L_1 = -\frac{\lambda z^{-1}}{(1 - z^{-1}) [1 + z^{-1}A'(z^{-1})]} \quad (3.114)$$

$$L_2 = \frac{z^{-1}A'(z^{-1})}{1 + z^{-1}A'(z^{-1})} \quad (3.115)$$

$\Delta$  y  $\Delta_1$  son

$$\Delta = 1 - L_1 - L_2 \quad (3.116)$$

$$\Delta_1 = 1 \quad (3.117)$$

Utilizando la regla de Mason sustituimos los valores de  $P_1$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $\Delta$ , y  $\Delta_1$

$$\frac{U(z^{-1})}{D(z^{-1})} = \frac{\frac{\lambda z^{-1}}{(1-z^{-1})[1+z^{-1}A'(z^{-1})]} + \frac{z^{-1}A'(z^{-1})}{[1+z^{-1}A'(z^{-1})]}}{1 + \frac{\lambda z^{-1}}{(1-z^{-1})[1+z^{-1}A'(z^{-1})]} - \frac{z^{-1}A'(z^{-1})}{1+z^{-1}A'(z^{-1})}} \quad (3.118)$$

Multiplicando por  $(1-z^{-1})[1+z^{-1}A'(z^{-1})]$ .

$$\frac{U(z^{-1})}{D(z^{-1})} = \frac{\lambda z^{-1} + z^{-1}(1-z^{-1})A'(z^{-1})}{(1-z^{-1})[1+z^{-1}A'(z^{-1})] + \lambda z^{-1} - z^{-1}A'(z^{-1})(1-z^{-1})} \quad (3.119)$$

$$\frac{U(z^{-1})}{D(z^{-1})} = \frac{\lambda z^{-1} + z^{-1}(1-z^{-1})A'(z^{-1})}{1 + z^{-1}A'(z^{-1}) - z^{-1} - z^{-2}A'(z^{-1}) + \lambda z^{-1} - z^{-1}A'(z^{-1}) + z^{-2}A'(z^{-1})} \quad (3.120)$$

$$\frac{U(z^{-1})}{D(z^{-1})} = \frac{\lambda z^{-1} + z^{-1}(1-z^{-1})A'(z^{-1})}{[1 - z^{-1}(1-\lambda)]} \quad (3.121)$$

Al igual que en el caso anterior, los ceros de la planta no aparecen en el denominador y por tanto no existe el fenómeno de timbre.

### 3.2.4 Fenómeno de timbre en el controlador de diferencias ante perturbaciones a la salida del proceso

En este caso, se analiza el fenómeno de timbre ante perturbaciones que presentan a la salida del proceso, como en el caso anterior (timbre ante perturbaciones a la entrada del proceso), el término  $B(z^{-1})/B(1)$  no se introduce dentro de los lazos de control; por tanto la función de transferencia  $\frac{U(z^{-1})}{D(z^{-1})}$  no se ve afectada y es igual a la calculada para el controlador de diferencias clásico. Ahora analicemos el lazo de control de la figura 3.22.

Se tiene una trayectoria directa y dos lazos.



3.2 Análisis del controlador de diferencias modificado

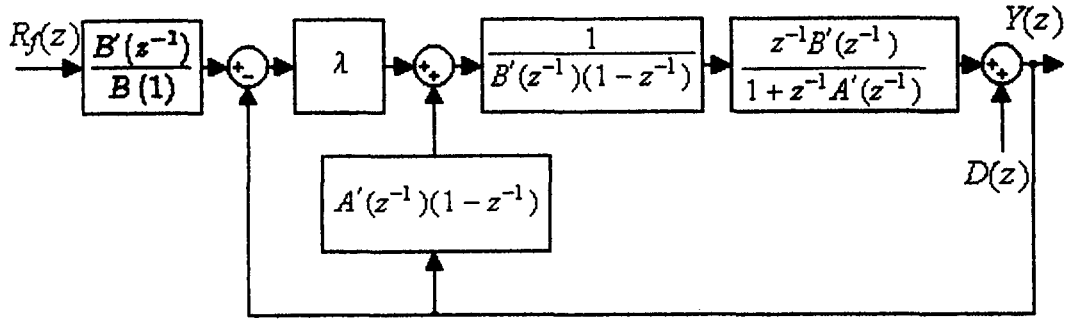


Figura. 3.22: Estructura del Controlador de Diferencias Modificado, con perturbación a la salida del proceso.

$$P_1 = -\frac{\lambda}{B'(z^{-1})(1-z^{-1})} + \frac{A'(z^{-1})(1-z^{-1})}{B'(z^{-1})(1-z^{-1})} \quad (3.122)$$

$$= -\frac{\lambda}{B'(z^{-1})(1-z^{-1})} + \frac{A'(z^{-1})}{B'(z^{-1})} \quad (3.123)$$

$$L_1 = -\frac{\lambda z^{-1}}{(1-z^{-1})[1+z^{-1}A'(z^{-1})]} \quad (3.124)$$

$$L_2 = \frac{z^{-1}A'(z^{-1})}{1+z^{-1}A'(z^{-1})} \quad (3.125)$$

$\Delta$  y  $\Delta_1$  son

$$\Delta = 1 - L_1 - L_2 \quad (3.126)$$

$$\Delta_1 = 1$$

Utilizando la regla de Mason sustituimos los valores de  $P_1$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $\Delta$ , y  $\Delta_1$

$$\frac{U(z^{-1})}{D(z^{-1})} = \frac{-\frac{\lambda}{B'(z^{-1})(1-z^{-1})} + \frac{A'(z^{-1})}{B'(z^{-1})}}{1 + \frac{\lambda z^{-1}}{(1-z^{-1})[1+z^{-1}A'(z^{-1})]} - \frac{z^{-1}A'(z^{-1})}{1+z^{-1}A'(z^{-1})}} \quad (3.127)$$

Multiplicando por  $(1-z^{-1})[1+z^{-1}A'(z^{-1})]$ .

$$\frac{U(z^{-1})}{D(z^{-1})} = \frac{-\frac{\lambda[1+z^{-1}A'(z^{-1})]}{B'(z^{-1})} + \frac{A'(z^{-1})(1-z^{-1})[1+z^{-1}A'(z^{-1})]}{B'(z^{-1})}}{(1-z^{-1})[1+z^{-1}A'(z^{-1})] + \lambda z^{-1} - z^{-1}A'(z^{-1})(1-z^{-1})} \quad (3.128)$$

Por manipulación algebraica

$$\frac{U(z^{-1})}{D(z^{-1})} = \frac{-\frac{\lambda[1+z^{-1}A'(z^{-1})]}{B'(z^{-1})} + \frac{A'(z^{-1})(1-z^{-1})[1+z^{-1}A'(z^{-1})]}{B'(z^{-1})}}{1+z^{-1}A'(z^{-1}) - z^{-1} - z^{-2}A'(z^{-1}) + \lambda z^{-1} - z^{-1}A'(z^{-1}) + z^{-2}A'(z^{-1})} \quad (3.129)$$

$$= \frac{-\lambda[1+z^{-1}A'(z^{-1})] + A'(z^{-1})(1-z^{-1})[1+z^{-1}A'(z^{-1})]}{B'(z^{-1})[1-z^{-1}(1-\lambda)]} \quad (3.130)$$

$$= \frac{[1+z^{-1}A'(z^{-1})][-\lambda + A'(z^{-1})(1-z^{-1})]}{B'(z^{-1})[1-z^{-1}(1-\lambda)]} \quad (3.131)$$

Observe que en este caso el polinomio de los ceros de la planta permanece como polos de la función de transferencia  $\frac{U(z^{-1})}{D(z^{-1})}$  y por tanto el fenómeno de timbre estará presente en el caso de que los ceros estén cerca de  $z = -1$ .

Observe la diferencia entre este resultado y el anterior. Cuando las perturbaciones se presentan a la entrada del proceso (es decir, la dinámica de la perturbación es igual a la de la manipulación) el timbre se elimina.

Sin embargo, cuando la perturbación entra a la salida, el timbre permanece.

La razón es porque cuando la perturbación se presenta a la entrada, es multiplicada por  $B(z^{-1})$  (los ceros de la planta) y cancela el polinomio  $B(z^{-1})$  que aparece en el denominador de  $\frac{U(z^{-1})}{D(z^{-1})}$ .

Si bien esto es cierto en simulación en la práctica puede haber problemas porque el  $B(z^{-1})$  real que se enfrenta a la perturbación puede ser distinto del identificado. Si esto pasa, la cancelación no ocurrirá completamente y parte del timbre se conservará. Esto ocurre también cuando la perturbación entra entre tiempos de muestreo ya que en ese caso la dinámica que enfrenta la perturbación será distinta a la de la manipulación.

Esto será mostrado en forma experimental en las secciones siguientes.

### 3.3 Comportamiento en seguimiento y ante perturbaciones que entran en tiempos de muestreo

**Caso I**

Tiempo muerto  $\theta < \frac{T}{2}$ ,  $\theta = 0.3$  es decir  $d = \left\lfloor \frac{\theta}{T} \right\rfloor = 0$ .

La función de transferencia discreta de la planta es

$$HG_p(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0.06879z^{-1} + 0.02875z^{-2}}{1 - 0.9512z^{-1}} \quad (3.132)$$

La planta tiene un cero, el cual se convierte en un polo en el controlador ubicado en  $z = -0.417$ , el polo está alejado del polo de inestabilidad  $z = -1$ .

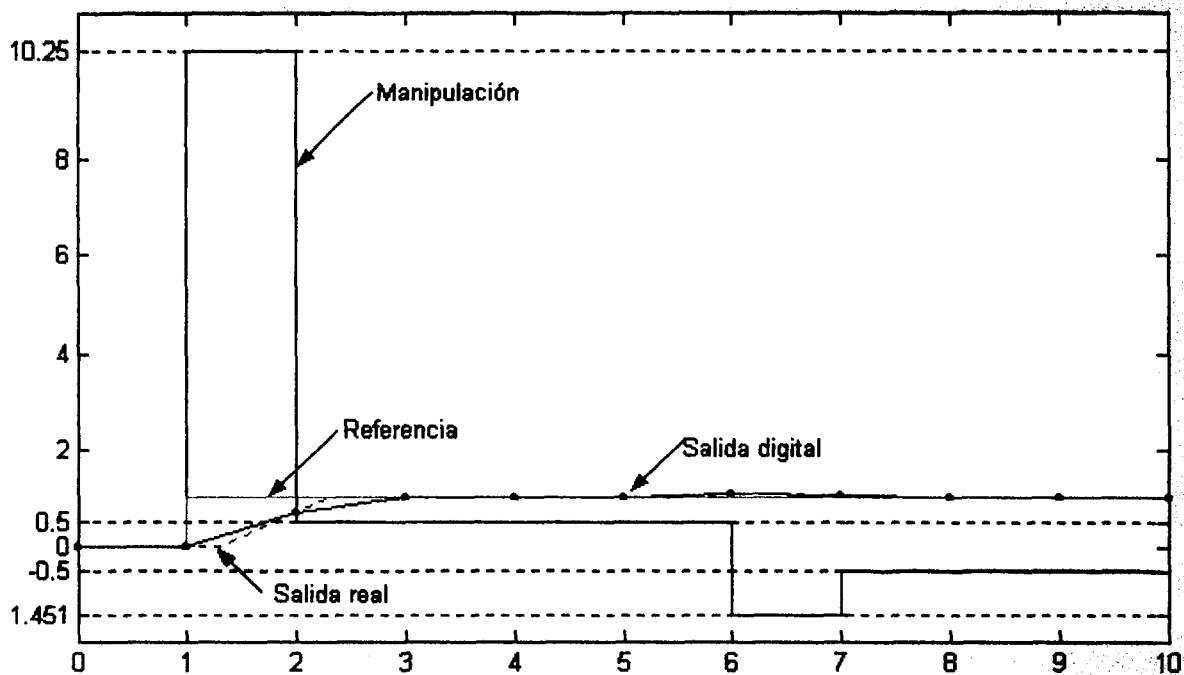


Figura. 3.23: Respuesta del controlador de diferencias con un polo en  $z = -0.417$ . Caso I.

En la figura 3.23 se puede observar que no existen oscilaciones ocultas en la manipulación, debido a la ubicación del polo en  $z = -0.417$ , ante perturbaciones las manipulación no oscila, una vez alcanzada la referencia se mantiene sin presentar error de estado estable.

3.3 Comportamiento en seguimiento y ante perturbaciones que entran en tiempos de muestreo

**Caso II**

Tiempo muerto  $\theta = 0.5 = \frac{T}{2}$ , notese que ahora el tiempo muerto es igual a  $\frac{T}{2}$ .

La función de transferencia discreta del proceso es

$$HG_p(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0.04938z^{-1} + 0.04816z^{-2}}{1 - 0.9512z^{-1}} \quad (3.133)$$

La planta tiene un cero, el cual se convierte en un polo en el controlador ubicado en  $z = -0.9753$ , el polo se encuentra cercano al polo de inestabilidad  $z = -1$ .

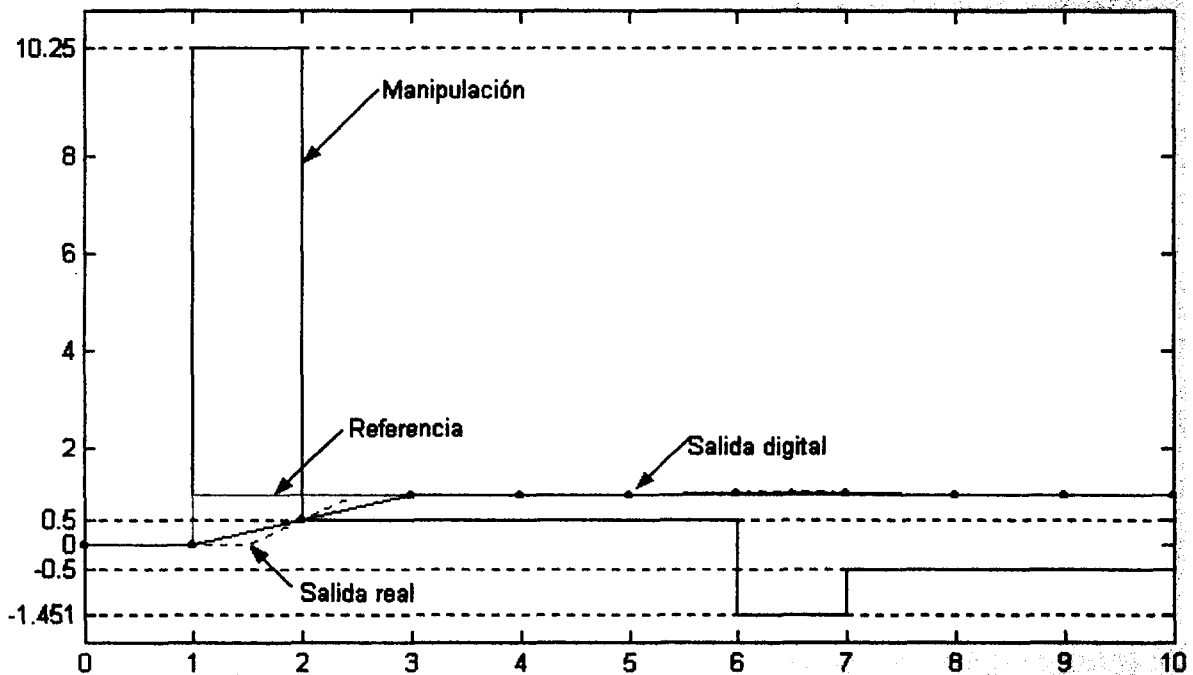


Figura. 3.24: Respuesta del controlador de diferencias con un polo en  $z = -0.9753$ . Caso II.

La figura 3.24 muestra la respuesta de un sistema con un polo en  $z = -0.9753$ , la manipulación presenta oscilaciones producidas por el polo, que está ubicado cerca del polo de timbre  $z = -1$ . La salida del sistema no presenta oscilaciones ocultas.

**Caso III**

Tiempo muerto  $\theta > \frac{T}{2}$ ,  $\theta = 0.8$ .

En el controlador de diferencias modificado, los sistemas con un tiempo muerto mayor que  $\frac{T}{2}$  son inestables como se describe en la tesis de Barba Avila [2].

La función de transferencia discreta del proceso es

$$HG_p(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0.0199z^{-1} + 0.07764z^{-2}}{1 - 0.9512z^{-1}} \quad (3.134)$$

La planta tiene un cero en  $z = -3.9015$ , el cual se convierte en un polo en el controlador, dicho polo queda fuera del círculo unitario, sebrepassa el polo de inestabilidad  $z = -1$ , el polo de controlador produce inestabilidad.

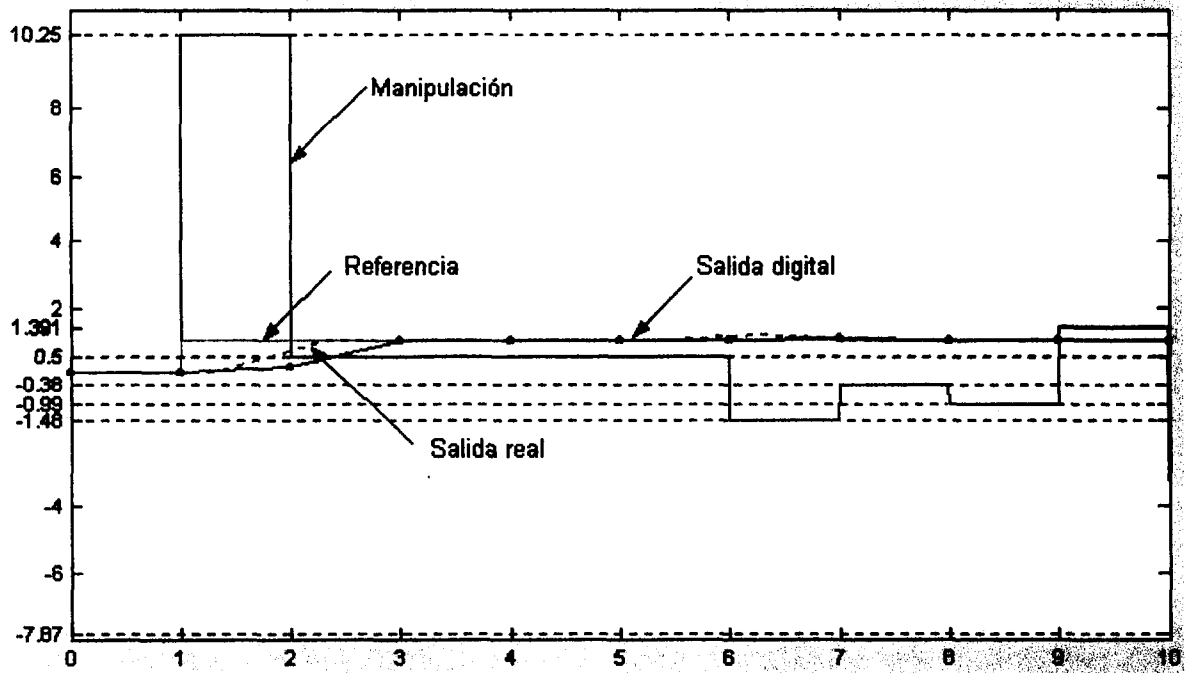


Figura. 3.25: Respuesta del controlador de diferencias con un polo en  $z = -3.9015$ . Caso III.

### 3.3 Comportamiento en seguimiento y ante perturbaciones que entran en tiempos de muestreo

La figura 3.25 muestra la salida cuando el controlador tiene un polo ubicado en  $z = -3.9015$ , la manipulación presenta oscilaciones excesivas crecientes (inestables), a pesar de que la respuesta es estable.

### 3.4 Comportamiento ante perturbaciones que entran entre tiempos de muestreo

En los sistemas analizados hasta el momento, se ha trabajado con perturbaciones que entran en tiempos de muestreo, de las cuales se ha observado que el controlador no presenta timbre cuando  $f$  es menor que  $\frac{1}{2}T$ , bajo estas circunstancias el fenómeno de timbre se elimina por completo.

En seguida revisaremos ejemplos de procesos en los que las perturbaciones entran entre tiempos de muestreo, en  $0.3T$ ,  $0.5T$  y en  $0.8T$  con el fin de mostrar el fenómeno de timbre que se produce ante diferentes fracciones de tiempos de muestreo.

#### Caso VI

Considere un sistema de primer orden como el del caso I, la función de transferencia de la planta es la siguiente

$$G_p(s) = \frac{2}{20s + 1} e^{-0.3s} \quad (3.135)$$

Con tiempo de muestreo  $T = 1$  seg.

Se implementa el controlador de diferencias modificado, con una  $\lambda = 0.4$  como se mostró en el ejemplo del Caso I, con el parámetro  $\lambda = 0.4$  el controlador presenta una robustez mínima (buscar mayor robustez haría al proceso muy lento).

Tiempo muerto  $\theta < \frac{T}{2}$ ,  $\theta = 0.3$  es decir  $d = \left\lfloor \frac{\theta}{T} \right\rfloor = 0$ .

La función de transferencia discreta de la planta es

$$HG_p(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0.06879z^{-1} + 0.02875z^{-2}}{1 - 0.9512z^{-1}} \quad (3.136)$$

La planta tiene un cero, el cual se convierte en un polo en el controlador ubicado en  $z = -0.417$ , el polo está alejado del polo de inestabilidad  $z = -1$ .

La figura 3.26 muestra la manipulación, en la cual el controlador anula el fenómeno de timbre ante la entrada de una perturbación en tiempos exactos de muestreo, notese la ausencia de timbre.



### 3.4 Comportamiento ante perturbaciones que entran entre tiempos de muestreo

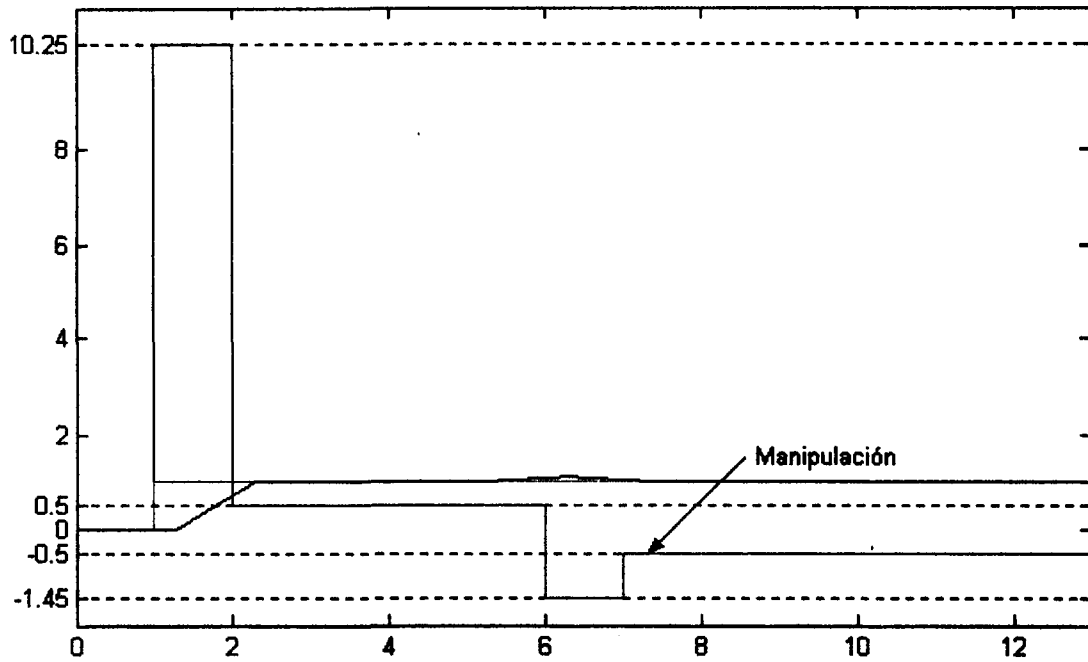


Figura. 3.26: Manipulación ante la entrada de una perturbación en tiempos exactos de muestreo, planta con  $f = 0.5$ .

La figura 3.27 muestra la manipulación del sistema cuando se presenta una perturbación entre tiempos de muestreo menores a  $0.5T$ . La manipulación muestra oscilaciones para lograr el establecimiento del sistema, sin embargo el fenómeno de timbre no llega a manifestarse.

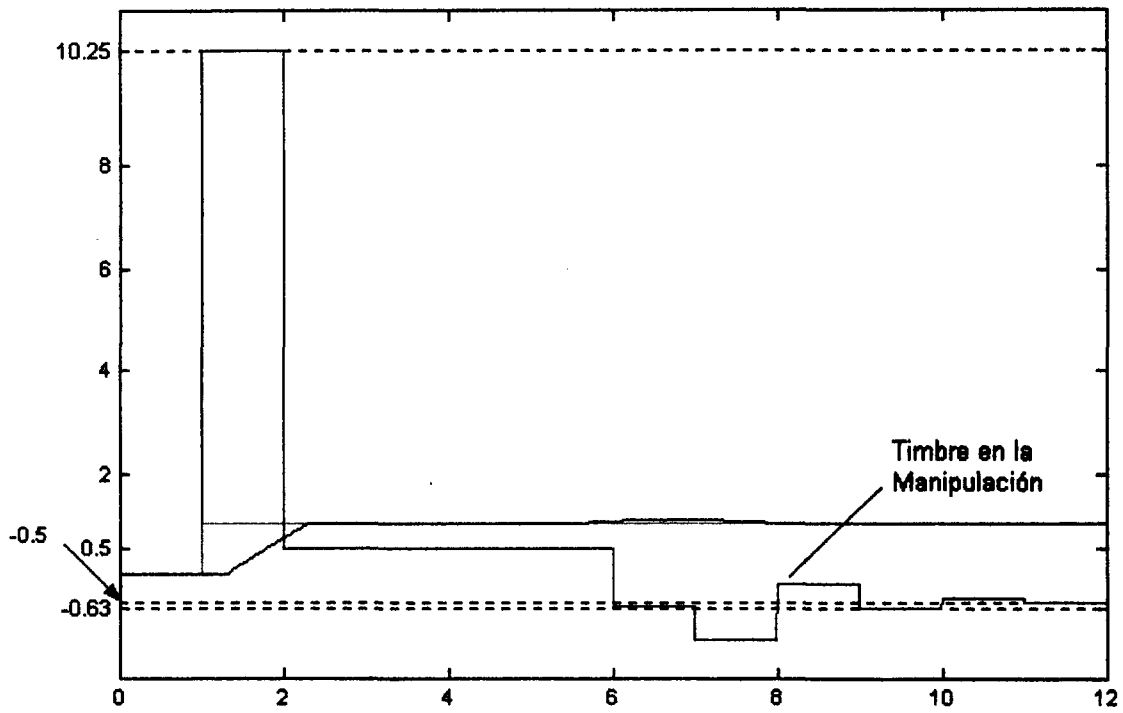


Figura. 3.27: Manipulación ante la entrada de una perturbación en  $0.3T$ , planta con  $f = 0.5$ .

En la figura 3.28 se muestra la manipulación del sistema cuando se presenta una perturbación entre tiempos de muestreo, en  $0.5T$ , el fenómeno de timbre se hace notorio, sin embargo, a pesar de ésto desaparece de inmediato.

### 3.4 Comportamiento ante perturbaciones que entran entre tiempos de muestreo

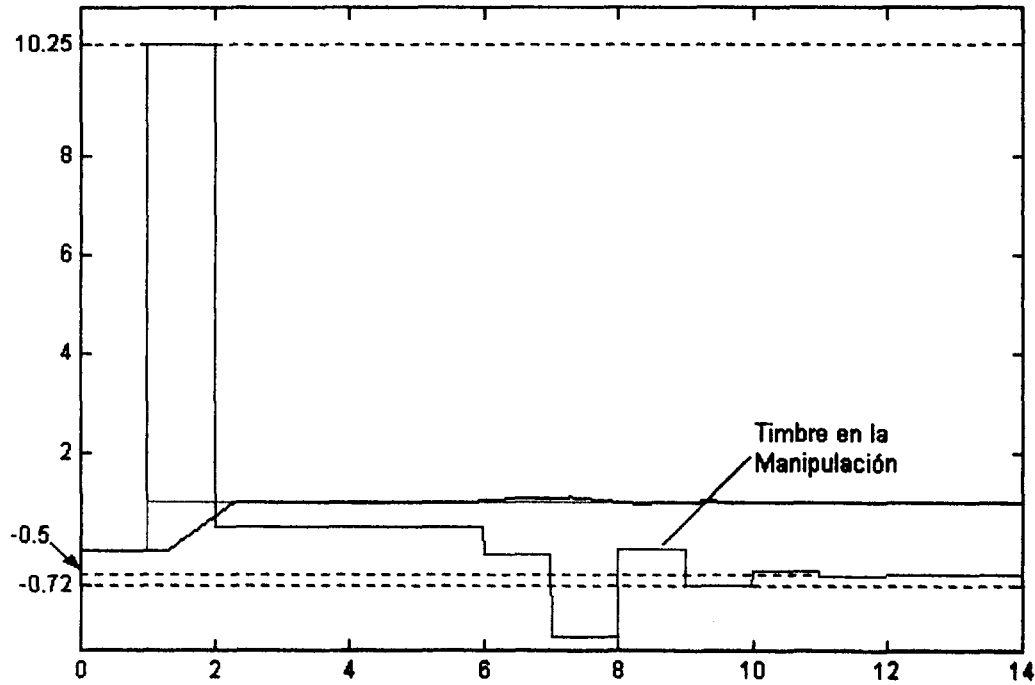


Figura. 3.28: Manipulación ante la entrada de una perturbación en  $0.5T$ , planta con  $f = 0.5$ .

La figura 3.29 muestra la presencia de oscilaciones en la manipulación del sistema cuando se presenta una perturbación entre tiempos de muestreo  $0.8T$ , el timbre es muy poco significativo, permitiendo que la manipulación se estabilice en un tiempo muy corto. Obsérvese que el timbre crece a medida que la perturbación entra en tiempos mayores a  $0.5T$ .

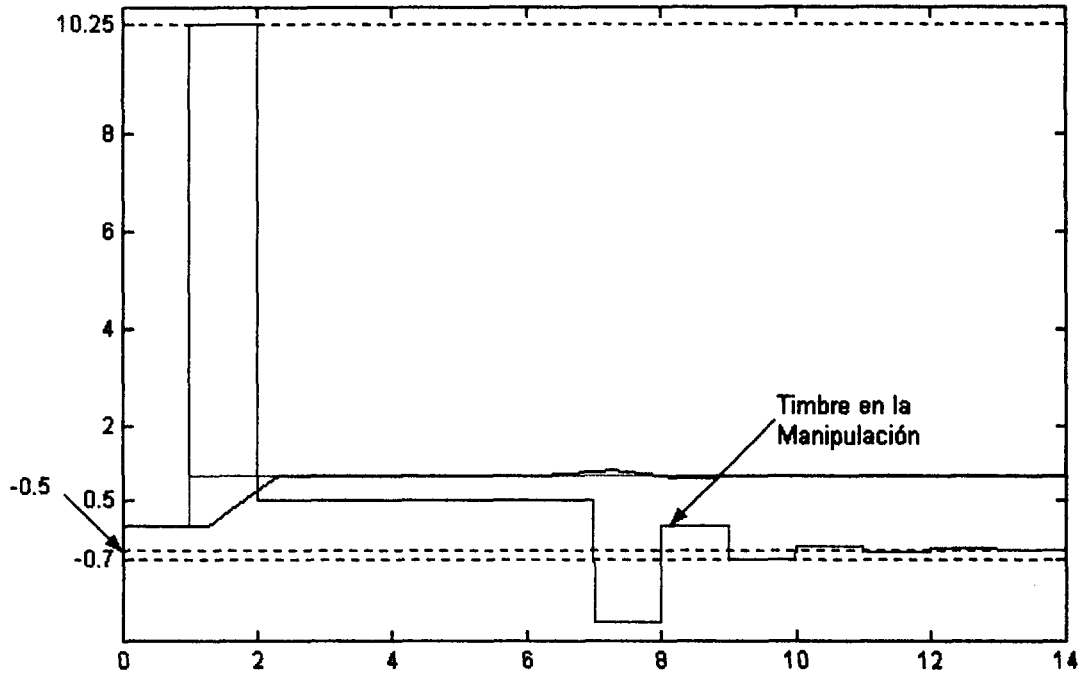


Figura. 3.29: Timbre de la manipulación ante la entrada de una perturbación en  $0.8T$ , planta con  $f = 0.5$ .

### Caso VII

Considere un sistema de primer orden como el del caso III, la función de transferencia de la planta es la siguiente

$$G_p(s) = \frac{2}{20s + 1} e^{-0.5s} \quad (3.137)$$

Tiempo muerto  $\theta = 0.5 = \frac{T}{2}$ , notese que ahora el tiempo muerto es igual a  $\frac{T}{2}$ .

Se implementa el controlador de diferencias modificado, con una  $\lambda = 0.4$ .

Con tiempo de muestreo  $T = 1$  seg.

La función de transferencia discreta del proceso es

3.4 Comportamiento ante perturbaciones que entran entre tiempos de muestreo

$$HG_p(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0.04938z^{-1} + 0.04816z^{-2}}{1 - 0.9512z^{-1}} \quad (3.138)$$

La planta tiene un cero, el cual se convierte en un polo en el controlador ubicado en  $z = -0.9753$ , el polo se encuentra cercano al polo de inestabilidad  $z = -1$ .

Ahora analicemos las manipulaciones obtenidas ante la entrada de perturbaciones en diferentes tiempos, en tiempos exactos de muestreo, en  $0.3T$ , en  $0.5T$  y en  $0.8T$ , planta con  $f = 0$ .

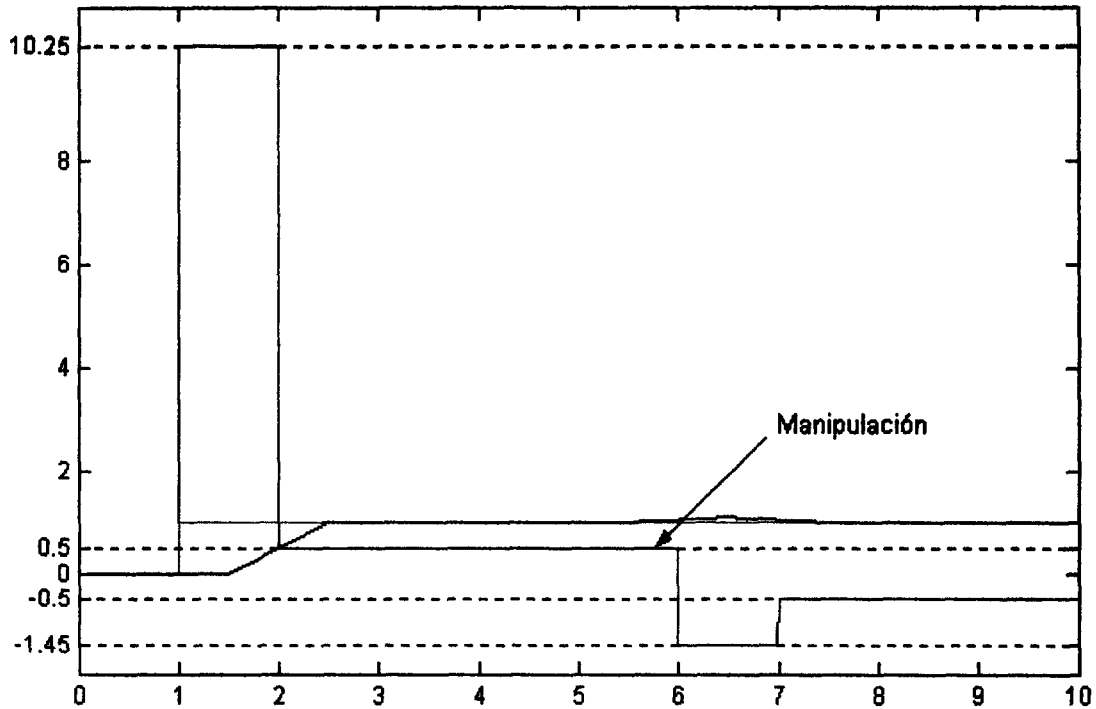


Figura. 3.30: No se presenta timbre en la manipulación ante la entrada de una perturbación en tiempos exactos de muestreo, planta con  $f = 0.5$ .

La figura 3.30, se muestra la entrada de una perturbación en tiempos exactos de muestreo, notese que la manipulación ejercida por el controlador para estabilizar el sistema no presenta timbre, comportandose como un controlador de un paso.

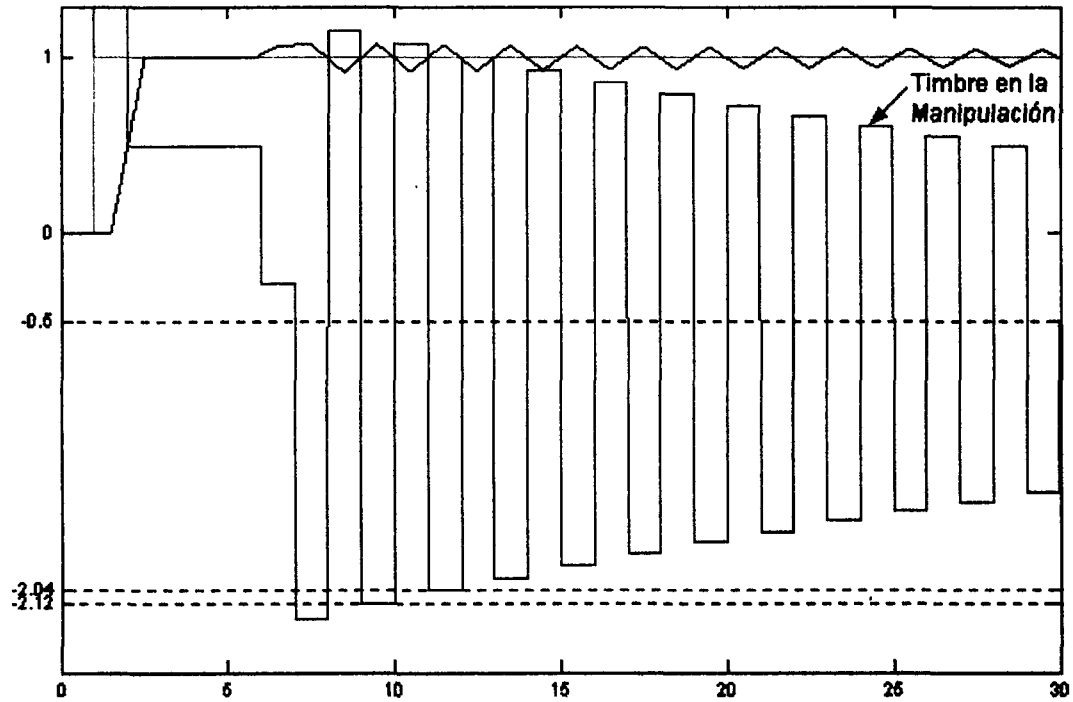


Figura. 3.31: Timbre de la manipulación ante la entrada de una perturbación en  $0.3T$ , planta con  $f = 0.5$ .

En la figura 3.31, se representa la manipulación ante la entrada de una perturbación en  $0.3T$ , la planta tiene un  $f = 0.5$ , la presencia de timbre es evidente y se muestra que la razón de decaimiento es de 0.9506, una razón de decaimiento de esta magnitud es muy pobre, y esto se presenta debido a que  $f = 0.5$ .

### 3.4 Comportamiento ante perturbaciones que entran entre tiempos de muestreo

El problema de timbre se agrava a medida que  $f$  se incrementa, otro factor que propicia la presencia de timbre consiste en que la perturbación de entrada se presente en una fracción muy grande de  $T$ , este mismo hecho se muestra en las gráficas de la figuras 3.32 y 3.33, en todas estas gráficas se muestra que la manipulación no logra estabilizarse, la salida tampoco se estabiliza y el tiempo de establecimiento del sistema es muy grande.

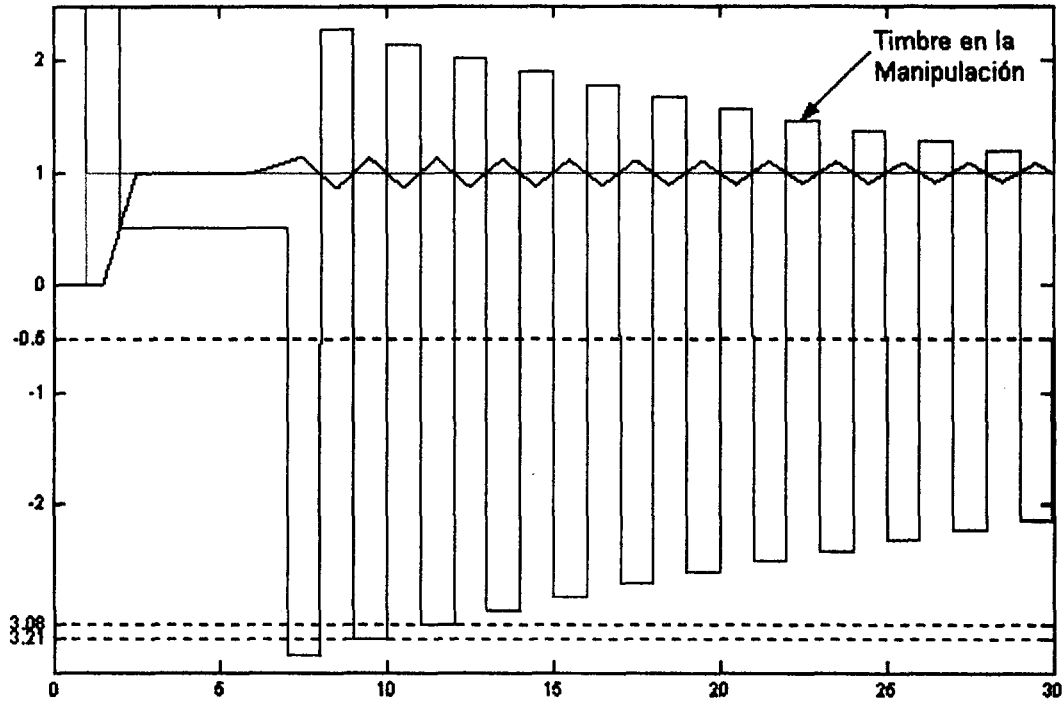


Figura. 3.32: Timbre de la manipulación ante la entrada de una perturbación en  $0.5T$ , planta con  $f = 0.5$ .

En la figura 3.33 se muestra que el fenómeno de timbre decae muy lentamente, esto es debido a que como se menciono anteriormente por las características de la planta, de contar con un  $f = 0.5$ , el controlador muestra mayor deficiencia para eliminar el efecto de timbre, este efecto predomina cuando la perturbación entra en tiempos mayores a  $0.8T$ .

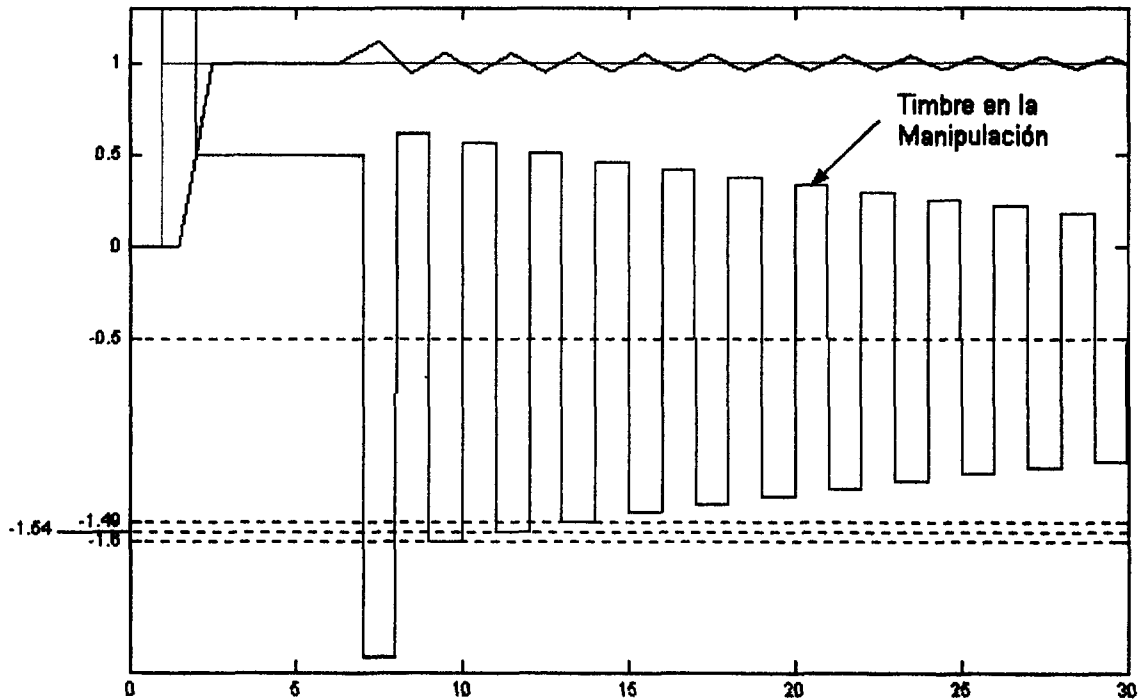


Figura. 3.33: Timbre de la manipulación ante la entrada de una perturbación en  $0.8T$ , planta con  $f = 0.5$ .

Para perturbaciones que entran entre tiempos de muestreo mayores a  $\frac{T}{2}$  la razón de atenuación de timbre es muy grande, por lo que el timbre desaparece muy lentamente, lo que implica un sistema muy lento para alcanzar el estado estable, este problema se puede atenuar utilizando tiempos de muestreo muy pequeños. Sin embargo si se trabaja con tiempos de muestreo muy pequeños se expone a que el proceso no cumpla con la característica de tener



3.4 Comportamiento ante perturbaciones que entran entre tiempos de muestreo

	Perturbación en $T$	Perturbación en $0.3T$	Perturbación en $0.5T$	Perturbación en $0.8T$
Caso VI	No existe	No existe	No existe	No existe
Caso VII	No existe	0.9506	0.9520	0.9554

Tabla 3.2: Razón de decaimiento del timbre generado ante la entrada de una perturbación en diferentes fracciones de tiempo  $T$

un  $f < 0.5$ , de preferencia  $f < 0.3$ .

**Resumen del análisis de timbre del comportamiento del controlador en regulación**

Ahora haremos una breve revisión de los resultados obtenidos en el análisis de timbre del controlador de diferencias modificado, en los diferentes casos analizados anteriormente.

La tabla 3.2 muestra la razón de decaimiento del timbre que se manifiesta ante la presencia de una perturbación en diferentes tiempos de muestreo. En los casos en que la perturbación entra en tiempos exactos de muestreo el controlador elimina el timbre por completo en un tiempo muy corto.

En el Caso VI, la planta tiene un  $f = 0.3$ , para diferentes tiempos de entrada de la perturbación el comportamiento de la manipulación actúa de forma semejante y muy eficiente, a pesar de que muestra oscilaciones, estas no llegan a convertirse en timbre y en el peor de los casos las oscilaciones de la manipulación desaparecen en  $6T$  (6 tiempos de muestreo), la salida logra la estabilidad en un tiempo de muestreo. La presencia de timbre es tan insignificante que prácticamente podemos hablar de una ausencia de timbre.

En el Caso VII, la planta tiene un  $f = 0.5$ , las oscilaciones en la manipulación son muy violentas, la razón de decaimiento que se encuentra es cercana a 1, lo que propicia que la magnitud de la manipulación se reduce muy lentamente. La salida es oscilatoria y la manipulación no logra estabilizarse en un tiempo finito de muestreo.

Entre menor sea la fracción de tiempo en que se presente la perturbación, la razón de decaimiento tendrá un efecto de eliminar el timbre en un tiempo mayor, puesto que la razón de decaimiento es muy cercano a 1.

El fenómeno de timbre no desaparece con el uso del controlador de diferencias, sólo cuando

la perturbación entra en instantes discretos de tiempo.

El timbre se incrementa a medida que la perturbación entra en un tiempo fraccionario mayor que  $\frac{1}{2}T$  y es mucho mayor con la perturbación entrando en un tiempo  $\gg \frac{1}{2}T$ .

# Capítulo 4

## Análisis de robustez y timbre en el controlador de diferencias modificado

En este capítulo se desarrolla el análisis del fenómeno de timbre y robustez del controlador de diferencias. Se evaluará la robustez del controlador ante diferentes plantas a partir del método de la función de sensibilidad. En particular, se analizará el efecto en la robustez del sistema al variar el tiempo muerto de tal manera que el fenómeno de timbre se haga más notorio.

### 4.1 Obtención de la función de sensibilidad

Del lazo de control de la figura 4.34 se obtiene la función de sensibilidad del controlador de diferencias.

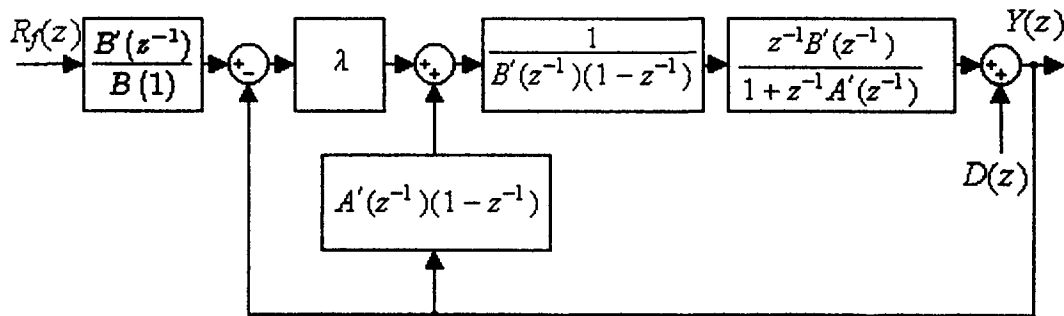


Figura. 4.34: Estructura del controlador de diferencias modificado.

Por medio de la regla de Mason se obtiene la función de transferencia entre la perturbación

$D(z)$  y la salida  $Y(z)$ . Analizando el sistema encontramos una sola trayectoria directa

$$P_1 = 1 \quad (4.139)$$

y 2 lazos:

$$\begin{aligned} L_1 &= A'(z^{-1}) (1 - z^{-1}) \frac{1}{B'(z^{-1}) (1 - z^{-1})} \frac{z^{-1} B'(z^{-1})}{1 + z^{-1} A'(z^{-1})} \\ &= \frac{z^{-1} A'(z^{-1})}{1 + z^{-1} A'(z^{-1})} \end{aligned} \quad (4.140)$$

$$= \frac{A(z^{-1}) - 1}{A(z^{-1})} \quad (4.141)$$

$$\begin{aligned} L_2 &= -\lambda \frac{1}{B'(z^{-1}) (1 - z^{-1})} \frac{z^{-1} B'(z^{-1})}{1 + z^{-1} A'(z^{-1})} \\ &= -\frac{\lambda z^{-1}}{1 + z^{-1} A'(z^{-1}) (1 - z^{-1})} \\ &= -\frac{\lambda z^{-1}}{A(z^{-1}) (1 - z^{-1})} \end{aligned} \quad (4.142)$$

El determinante será entonces

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2) \quad (4.143)$$

El cofactor correspondiente a la trayectoria  $P_1$  será

$$\Delta_1 = \Delta|_{L_1=L_2=0} = 1 \quad (4.144)$$

Sustituyendo los resultados anteriores en la formula de Mason

#### 4.1 Obtención de la función de sensibilidad

$$\begin{aligned}
 \S(z^{-1}) &= \frac{y(z^{-1})}{d(z^{-1})} \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{A(z^{-1}) - 1}{A(z^{-1})} + \frac{\lambda z^{-1}}{A(z^{-1})(1 - z^{-1})}} \\
 &= \frac{A(z^{-1})}{A(z^{-1}) - A(z^{-1}) + 1 + \frac{\lambda z^{-1}}{(1 - z^{-1})}} \\
 &= \frac{A(z^{-1})}{1 + \frac{\lambda z^{-1}}{1 - z^{-1}}} \tag{4.145}
 \end{aligned}$$

De lo anterior, la función de sensibilidad resulta como se muestra en la ecuación (4.146).

$$\S(z^{-1}) = \frac{A(z^{-1})(1 - z^{-1})}{1 + (\lambda - 1)z^{-1}} \tag{4.146}$$

Una primera observación importante es que la función de sensibilidad sólo depende de los polos de la planta (polinomio  $A(z^{-1})$ ) y del factor de ajuste  $\lambda$ , y es independiente del polinomio de los ceros de la planta  $B(z^{-1})$ . Esto a primera vista podría parecer ilógico ya que sabemos que los ceros de la planta son los causantes del fenómeno de timbre.

##### 4.1.1 Demostración experimental de la independencia de la función de sensibilidad de los ceros de la planta

A continuación se muestra un caso práctico, para poder hacer un análisis del fenómeno que se presenta en la función de sensibilidad dado el hecho de que se define sólo en función de los polos de la planta (se han cancelado los ceros). Además de que se muestra experimentalmente el concepto de la robustez del sistema ante variaciones paramétricas.

##### Caso práctico

En los siguiente ejemplos prácticos mostraremos que independientemente de los ceros de la planta (y del timbre inherente) la robustez del sistema es la misma. Se considera un tiempo de muestreo  $T = 1$  segundo.

##### Ejemplo A

Considere un sistema de primer orden como el siguiente

$$G_p(s) = \frac{2}{20s + 1} e^{-0.3s} \quad (4.147)$$

Cero de la planta en  $z = -0.4179$

Polo ubicado en  $z = 0.9512$ .

Se implementa el controlador de diferencias modificado, usamos un valor de  $\lambda = 1$  para observar la respuesta del sistema.

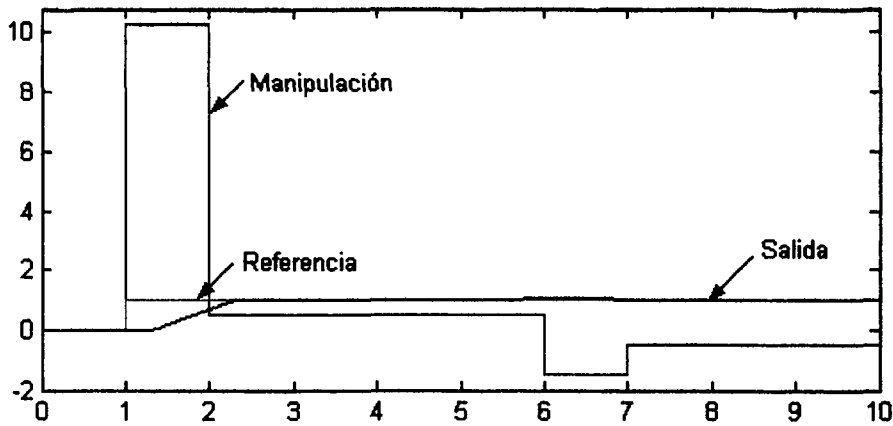


Figura. 4.35: Respuesta ante una  $\lambda = 1$ , con una  $k = 2.0$  en la planta. Ejemplo A.

El comportamiento de la planta de la ecuación (4.147) se muestra en la figura 4.35. Puede observarse que en el tiempo  $T = 5$  entra una perturbación, se presenta en un tiempo exacto de muestreo, note que la presencia de dicha perturbación no afecta significativamente la respuesta del sistema.

#### 4.1 Obtención de la función de sensibilidad

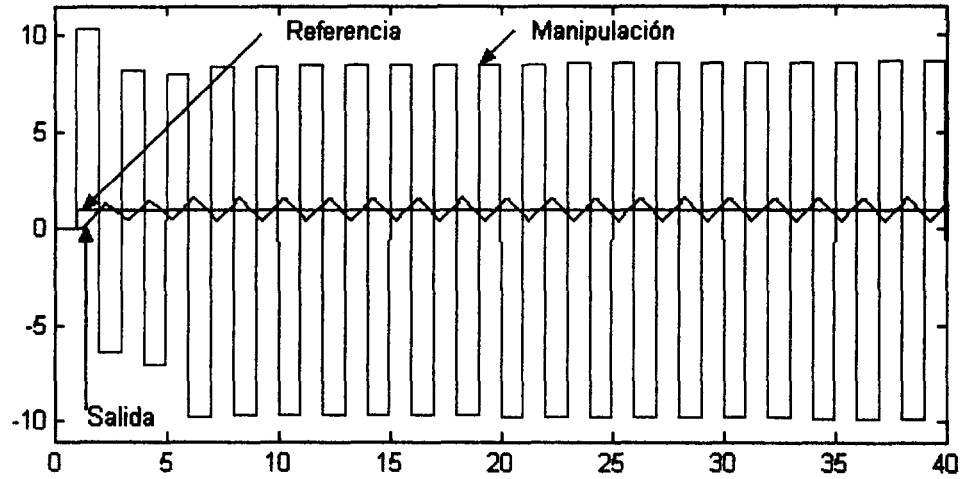


Figura. 4.36: Respuesta ante una  $\lambda = 1$ , con una  $k = 2.69$  en la planta. Ejemplo A.

Para verificar la tolerancia del sistema ante variaciones paramétricas procedemos a modificar arbitrariamente el valor de la constante  $k$  del proceso. Identificamos de la gráfica 4.36, que el sistema tolera una variación paramétrica de un 34.5% antes de que el sistema alcance la inestabilidad. La variación de la constante  $k$  se incrementó de un valor de 2 a 2.69.

Para buscar una mayor tolerancia a variaciones paramétricas modificamos el valor de  $\lambda$ , para obtener una respuesta diferente, ahora se implementa el controlador de diferencias modificado, con un valor de  $\lambda = 0.4$ , este valor se utiliza con el propósito de que el controlador presente una mayor robustez. Retomando el problema inicial para un valor de  $\lambda = 0.4$  en el controlador de diferencias, se obtiene la figura 4.37, en donde se puede observar que la respuesta es más suave y por lo tanto más lenta.

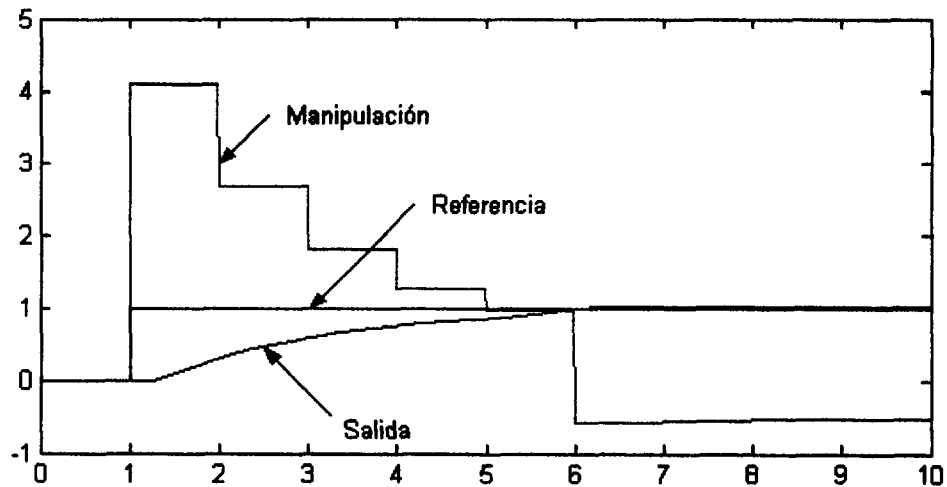


Figura. 4.37: Respuesta ante una  $\lambda = 0.4$ , con una  $k = 2$  en la planta. Ejemplo A.

Haciendo una prueba de la robustez de controlador cuando  $\lambda = 0.4$ , variamos la ganancia del proceso, para verificar el incremento en la ganancia que puede ser tolerado.



#### 4.1 Obtención de la función de sensibilidad

Analizando la prueba de simulación de la gráfica 4.38, se verifica que el controlador soporta un incremento en la ganancia  $k$  del proceso de un valor de  $k = 2.0$  a  $k = 3.39$  sin que el proceso se vuelva inestable, este valor corresponde a un incremento de un 69.5 % en la ganancia del proceso.

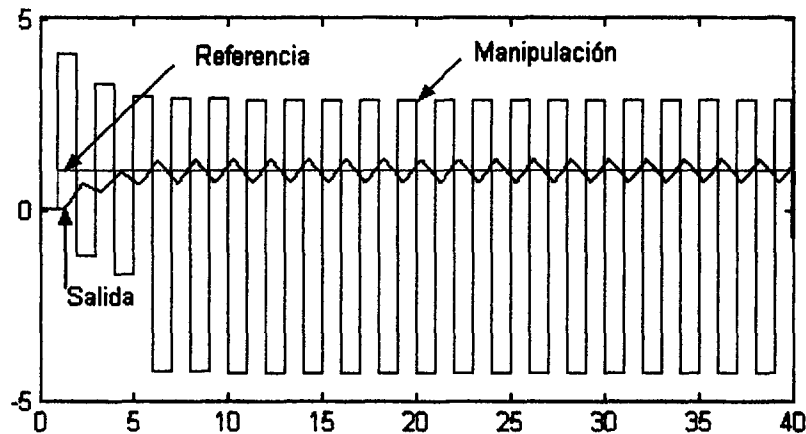


Figura. 4.38: Respuesta ante una  $\lambda = 0.4$ , con una  $k = 3.39$  en la planta. Ejemplo A.

La figura 4.38 muestra la salida del sistema bajo una variación paramétrica de  $k = 3.39$ , la salida es oscilatoria sin llegar a la inestabilidad.

Analizando las figuras 4.35 y 4.38, de acuerdo al incremento en la constante  $k$  que puede tolerar el controlador, podemos decir que el controlador muestra una mayor robustez ante variaciones paramétricas cuando el valor de  $\lambda$  es menor, en este caso con  $\lambda = 0.4$ .

Ahora bien de las figuras 4.35 y 4.37, visualizamos que la respuesta en esta última es más lenta, presentando un menor sobretiro con respecto a la primera. Con este análisis podemos afirmar que el valor que se le asigne a  $\lambda$  corresponderá a la necesidad que se quiera cubrir de acuerdo a las características del sistema, sacrificando la rapidez de la respuesta por la tolerancia a variaciones paramétricas en el modelo de la planta.

### Ejemplo B

Ahora observese la figura 4.39, en donde se muestra la respuesta de un sistema con una función de transferencias como la de la ecuación (4.148).

$$G_p(s) = \frac{2}{20s + 1} e^{-0.5s} \quad (4.148)$$

Tiempo muerto de esta planta es de 0.5

Cero localizados en  $z = -0.9753$

Polo ubicado en  $z = 0.9512$ .

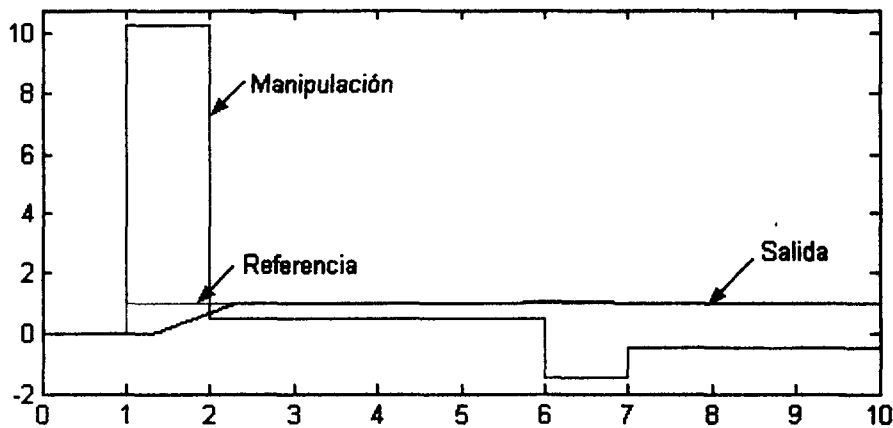


Figura. 4.39: Respuesta ante una  $\lambda = 1$ , con una  $k = 2.0$  en la planta. Ejemplo B.

La figura 4.39 muestra la respuesta del sistema con un valor de  $\lambda = 1$  en el controlador de diferencias. Observe que la salida del sistema se estabiliza en un instante de muestreo, también en esta figura se muestra la entrada de un perturbación en  $T = 6$ , la cual no afecta la salida (se elimina de inmediato).

#### 4.1 Obtención de la función de sensibilidad

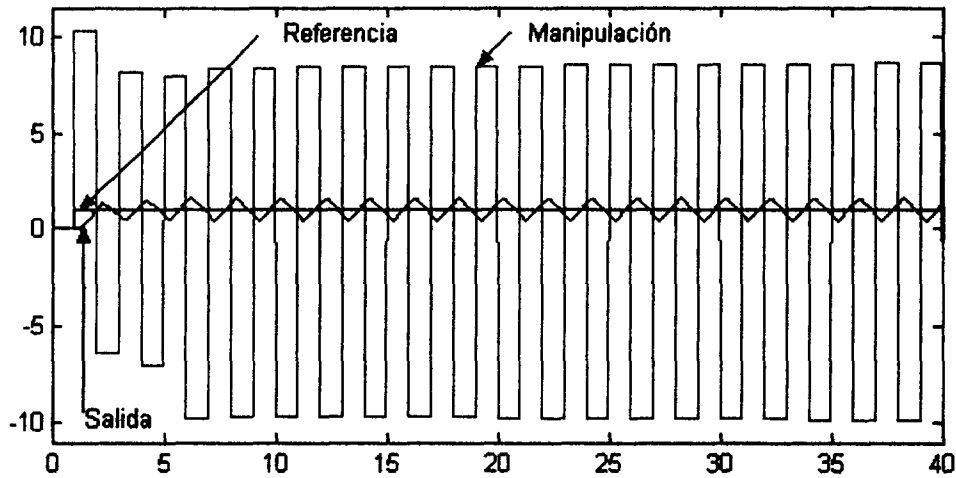


Figura. 4.40: Respuesta ante una  $\lambda = 1$ , con una  $k = 2.69$  en la planta. Ejemplo B.

La figura 4.40 muestra la tolerancia del sistema a variaciones paramétricas antes de que el sistema alcance la inestabilidad, el controlador soporta una variación de  $k = 2$  a  $k = 2.69$ , note que el controlador tolera el mismo porcentaje de variación paramétrica que se admite en la planta definida por la ecuación (4.147), a pesar de que los ceros son diferentes, la respuesta es exactamente igual que la de la figura 4.36 dado que los polos en ambos sistemas son los mismos, recordemos que la función de sensibilidad esta definida por los polos del proceso y modificada mediante el parámetro  $\lambda$ . La variación de la constante  $k$  es igual a la hecha en el ejemplo A.

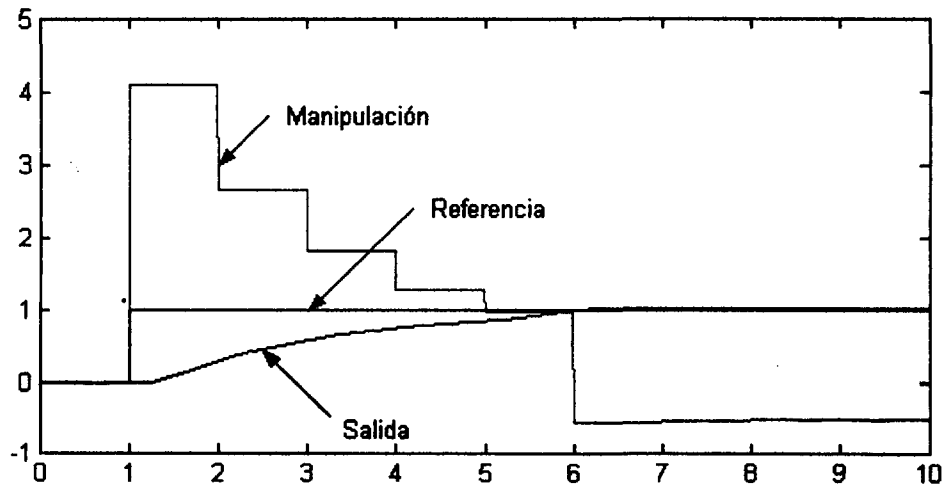


Figura. 4.41: Respuesta ante una  $\lambda = 0.4$ , con una  $k = 2$  en la planta. Ejemplo B.

En la gráfica 4.41 se observa la respuesta del sistema con un valor de  $\lambda = 0.4$  en el controlador de diferencias. Si comparamos esta gráfica con la que se presenta en la figura 4.37, nos podemos percatar que ambas tienen la misma respuesta, en ambos casos  $\lambda = 0.4$  y los polos son iguales, tales parámetros son los que definen a la función de sensibilidad, ecuación (4.146).

## 4.2 Evaluación de la función de sensibilidad

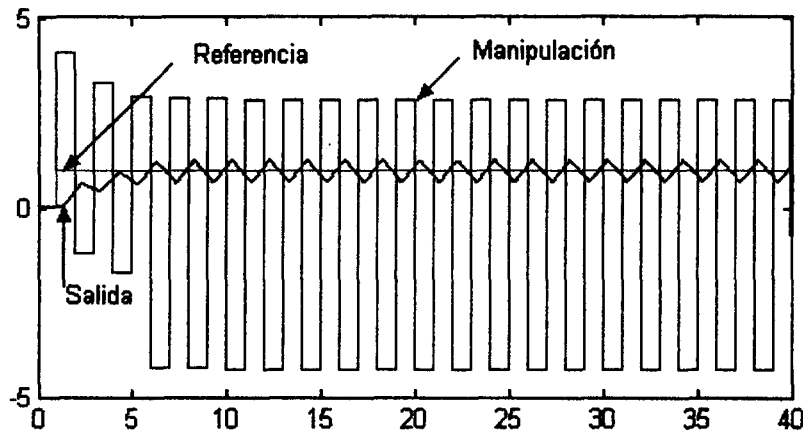


Figura. 4.42: Respuesta ante una  $\lambda = 0.4$ , con una  $k = 3.39$  en la planta. Ejemplo B.

La figura 4.42 muestra la tolerancia del sistema a variaciones paramétricas con un valor de  $\lambda = 0.4$  en el controlado sin que el sistema se haga inestable, la variación que tolera es de  $k = 2$  a  $k = 3.39$ , notese que tolera exactamente el mismo porcentaje de variación paramétrica soportada en el sistema definido por la ecuación (4.147), comparando esta gráfica con la figura 4.38, observamos que ambas admiten el mismo incremento en la ganancia  $k$  antes de alcanzar la inestabilidad, con diferencia en la magnitud de las oscilaciones en la manipulación, siendo éstas menores para tiempos muertos mayores (van de  $-4.2764$  a  $2.8668$ ), sin embargo esto no significa ninguna diferencia en el sentido de robustez en variaciones paramétricas.

Con lo anterior hemos demostrado intuitivamente el resultado obtenido en la ecuación (4.146), la cual define la función de sensibilidad del controlador de diferencias. En la siguiente sección se demostrará este mismo hecho mediante el análisis de la respuesta en la frecuencia de la ecuación (4.146).

## 4.2 Evaluación de la función de sensibilidad

Una vez obtenida la función de sensibilidad del lazo de control, ecuación (4.146), se obtiene

su respuesta a la frecuencia (diagrama de Bode) sustituyendo

$$z = e^{j\omega T} \quad (4.149)$$

En la gráfica de magnitud del diagrama de Bode se obtendrá una gráfica como la que se muestra en la figura 4.43.

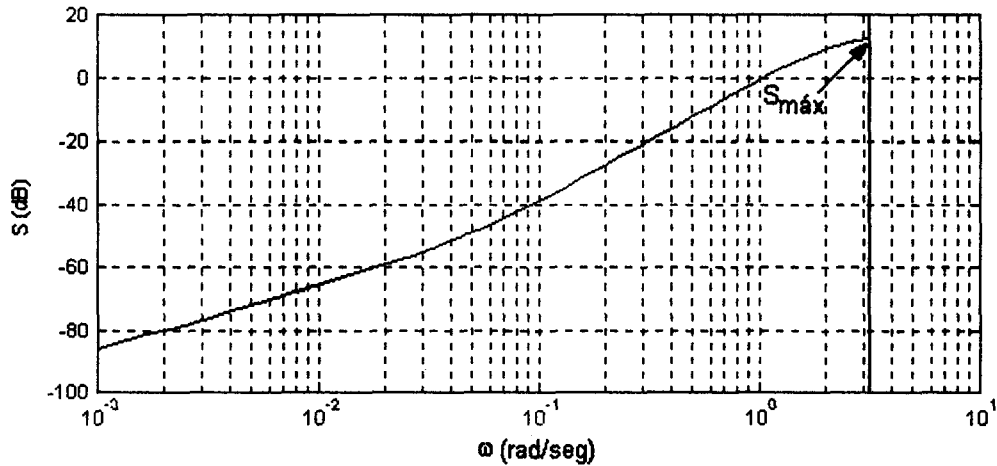


Figura. 4.43: Diagrama de magnitud de la respuesta a la frecuencia.

El valor del pico máximo de la función de sensibilidad

$$S_{máx}(j\omega) = \max_{\omega} |S(j\omega)| \quad (4.150)$$

es una medida del grado de robustez del sistema. Landau [12] considera que el valor del pico máximo de la función de sensibilidad debe ser menor a 8 dB para tener un grado mínimo aceptable de robustez.

#### 4.2 Evaluación de la función de sensibilidad

##### Sistema bajo estudio

Considere un sistema de primer orden como el siguiente

$$G_p(s) = \frac{2}{20s + 1} e^{-\theta s} \quad (4.151)$$

Se asumirá un tiempo de muestreo  $T = 1$  seg. Sabemos que la ubicación de los ceros de la planta dependerá de la relación entre  $\theta$  y  $T$ , en particular del valor del tiempo muerto fraccionario  $f = \theta - dTs$ . Mientras más grande sea  $f$  comparado con el tiempo de muestreo  $T$ , mayor será el fenómeno de timbre. Pascual Barba [2] demuestra que cuando  $f \ll T/2$  los ceros de la planta (polos en el controlador) quedarán cerca del origen (ej. polo  $z = -0.2$ ). A medida que  $f$  se aproxima a  $T/2$ , el cero (polo del controlador) se acerca al polo de timbre  $z = -1$  con el efecto correspondiente (oscilaciones excesivas) en la manipulación del sistema y cuando excede suficientemente este valor, el cero estará fuera del círculo unitario causando un polo inestable en el controlador.

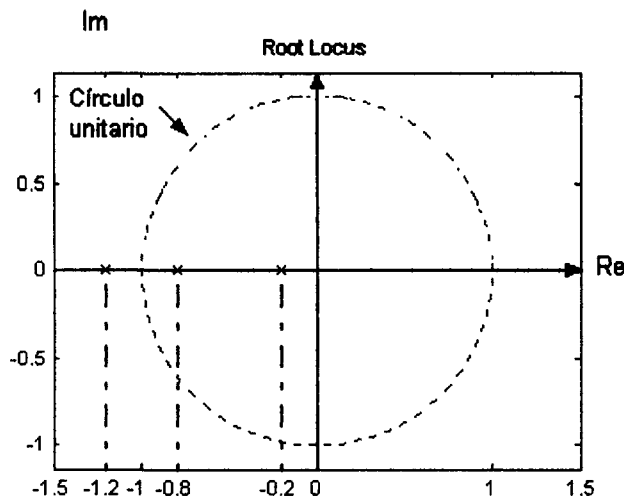


Figura. 4.44: Diagrama del lugar geométrico de las raíces de un sistema.

La figura 4.44 muestra la ubicación de los polos en el círculo unitario. El polo más cercano al origen está en  $z = -0.2$ , este polo es estable y la respuesta será también estable. El polo

ubicado en  $z = -0.8$  se encuentra cerca del polo de timbre  $z = -1$ , la respuesta del sistema generará timbre en la manipulación. El polo fuera del círculo unitario en  $z = -1.2$ , este polo producirá inestabilidad en el sistema.

En el siguiente apartado analizaremos la robustez del controlador de diferencias para valores de  $f$  pequeños, cercanos a  $T/2$  y mayores a  $T/2$  variando el factor  $\lambda$ .

### 4.3 Análisis de la función de sensibilidad

Analicemos la respuesta en la frecuencia de la función de sensibilidad para los tres casos de estudio vistos en la última sección del capítulo 2.

La función de transferencia que define los tres casos de estudio, son definidos por las siguientes ecuaciones.

Caso I

$$G_p(s) = \frac{2}{20s + 1} e^{-0.3s} \quad (4.152)$$

Con función discreta

$$HG_p(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0.06879z^{-1} + 0.02875z^{-2}}{1 - 0.9512z^{-1}} \quad (4.153)$$

$$\text{Cero de la planta en } z = -0.4179$$

$$\text{Polo ubicado en } z = 0.9512.$$

Caso II

$$G_p(s) = \frac{2}{20s + 1} e^{-0.5s} \quad (4.154)$$

Con función discreta

$$HG_p(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0.04938z^{-1} + 0.04816z^{-2}}{1 - 0.9512z^{-1}} \quad (4.155)$$



#### 4.3 Análisis de la función de sensibilidad

Cero localizados en  $z = -0.9753$

Polo ubicado en  $z = 0.9512$ .

Caso III

$$G_p(s) = \frac{2}{20s + 1} e^{-0.5s} \quad (4.156)$$

Con función discreta

$$HG_p(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0.0199z^{-1} + 0.07764z^{-2}}{1 - 0.9512z^{-1}} \quad (4.157)$$

Cero de la planta en  $z = -3.9015$

Polo ubicado en  $z = 0.9512$ .

Los procesos definidos por las ecuaciones (4.152), (4.154) y (4.156) tienen diferentes ceros y el mismo polo. Por el diseño del controlador de diferencias los ceros de la planta convierten en polos del controlador. Como se demostró anteriormente en la ecuación (4.146), la función de sensibilidad depende únicamente de los polos de la planta. Debido a que los tres ejemplos poseen los mismos polos, la función de sensibilidad es la misma y se muestra en la figura 4.45.

En esta gráfica se muestra la respuesta a la frecuencia de la función de sensibilidad resultante para diferentes valores de  $\lambda$ . De esta gráfica podemos determinar la robustez del sistema ante variaciones paramétricas, ruido y cambio en perturbaciones.

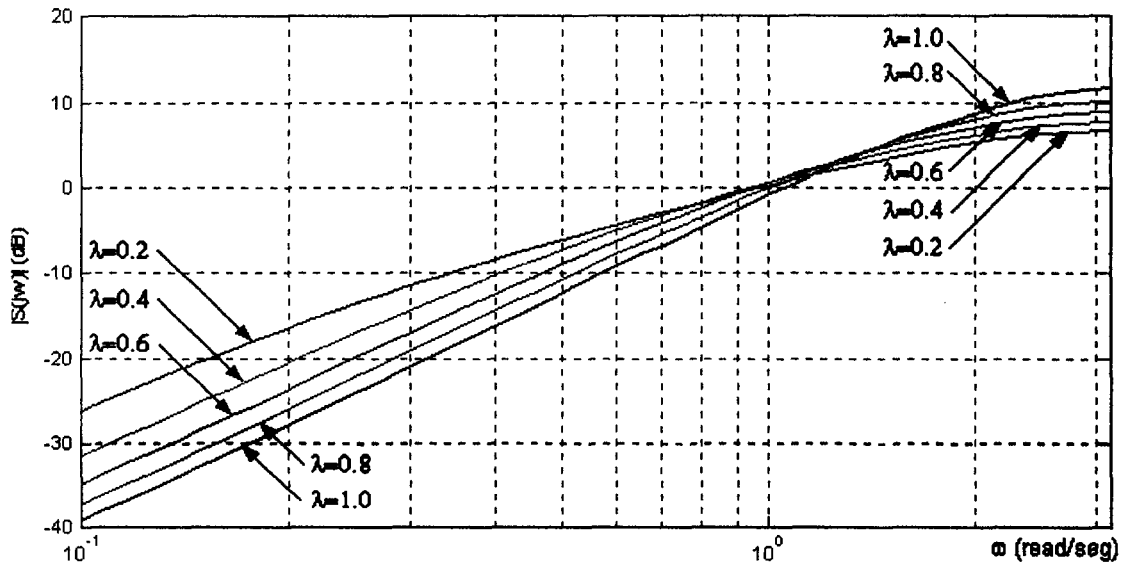


Figura. 4.45: Función de sensibilidad, variando el parámetro  $\lambda$  de sistema del caso I.

### 4.3.1 Análisis de rechazo a Perturbaciones

Analizando el diagrama de Bode de la función de sensibilidad (figura 4.45) se muestra la ganancia para diferentes valores de  $\lambda$ , la intersección con el eje horizontal en  $0$  dB indica el cambio de atenuación y amplificación que ejerce el controlador sobre las perturbaciones.

Observece que para un valor de  $\lambda = 1$  el sistema tiene una mayor atenuación en frecuencias bajas (lo que permite reducir el efecto de las perturbaciones). Sin embargo en frecuencia altas no sólo no las atenua, sino que las amplifica con el factor de amplificación mayor comparado con valores de  $\lambda$  menores.

Este fenómeno se puede observar en la figura 2.6, el cual muestra la respuesta del sistema ante diferentes valores de  $\lambda$ .

Puesto que la robustez ante variaciones paramétricas está dada por el valor máximo de la función de sensibilidad. De la gráfica se observa que para  $\lambda = 1$  tendremos la menor robustez.

#### 4.3 Análisis de la función de sensibilidad

$\lambda$	$\omega$ , para $ S(j\omega)  = 0 \text{ dB}$
1	1.06
0.8	1.01
0.6	0.964
0.4	0.946
0.2	0.98

Tabla 4.3: Valor de  $\omega$  para  $|S(j\omega)| = 0 \text{ dB}$ , mostrando el punto de cambio de atenuación a amplificación.

Mientras mayor sea  $\lambda$  el controlador será más robusto.

Sin embargo, si el modelo es impreciso o hay variaciones paramétricas o perturbaciones de altas frecuencias es recomendable utilizar  $\lambda$  pequeños, sin sacrificar demasiado la velocidad de respuesta, la cual es mayor para valores grandes de  $\lambda$  o cercanos a 1.

El tiempo de muestreo de la señal es  $T = 1$ , así que la frecuencia de Nyquist es  $\pi$ , las perturbaciones con frecuencias superiores a  $\pi$  producen aliasing, por lo tanto ya no las consideramos, puesto que ya no tenemos conocimiento exacto del comportamiento de perturbaciones con frecuencias superiores a  $\pi$ .

Para definir bajo qué parámetro de  $\lambda$  el controlador trabajará mejor ante perturbaciones dependerá del rango de frecuencias en que se encuentren las perturbaciones que afectan el sistema.

En la tabla 4.3 se muestra el valor de límite de las frecuencias en las cuales se muestra el cambio de atenuación a amplificación, este cambio se presenta cuando el valor de  $|S(j\omega)| = 0 \text{ dB}$ . Aquí se puede observar que a mayor  $\lambda$  es mayor el rango de frecuencias en las cuales se rechazan las perturbaciones. A menores  $\lambda$ , menor el rango de frecuencias.

#### 4.3.2 Evaluación de la robustez

Para evaluar la robustez analizamos la misma figura 4.45, en el diagrama de Bode de la función de sensibilidad. Recuerde que el pico máximo de la función de sensibilidad, ecuación (4.146), es una medida de la robustez del sistema ante variaciones paramétricas. Mientras más alto sea, menor robustez y viceversa. De la gráfica vemos que a medida que disminuye el valor de  $\lambda$ , la robustez del controlador se incrementa. Con un valor  $\lambda = 1$ , la respuesta del controlador es la

más rápida pero la menos robusta.

Variando el parámetro  $\lambda$ , por observación se distingue el siguiente comportamiento en la robustez del controlador.

Para un valor de  $\lambda = 1$ , tenemos que  $\zeta_{m\acute{a}x}(j\omega) = m\acute{a}x_{\omega} |\zeta(j\omega)| = 11.8$  dB. Landau recomienda que  $\zeta_{m\acute{a}x}(j\omega) \leq 8$  dB para lograr una robustez mínima aceptable. En este caso, ésto se logra con  $\lambda < 0.446$ .

Este valor permitirá por ejemplo un incremento en la ganancia hasta de un 66.66%.

Si se deseara aumentar más la robustez, se debe reducir el valor de  $\lambda$ . Sin embargo ésto implicará afectar el desempeño del controlador (recuerde que  $\lambda$  es la proporción del error que se corrige en el tiempo de muestreo).

La tabla 4.4 proporciona los valores de  $\zeta_{m\acute{a}x}(j\omega)$  ante la variación del parámetro  $\lambda$ , tales valores de  $\zeta_{m\acute{a}x}(j\omega)$  se obtienen de la figura 4.45. De la tabla se puede observar que para un valor de  $\lambda = 0.4$  el valor de  $\zeta_{m\acute{a}x}(j\omega)$  es de 7.74 dB, esto justifica una robustez mínima aceptable para el controlador, motivo por el cual se utilizó  $\lambda = 0.4$  en los ejemplos A y B.

Finalmente podemos decir que la selección del valor del parámetro  $\lambda$  se determinará con respecto al grado de robustez que se requiera y con respecto al rango de frecuencias de las perturbaciones de entrada, considerando la velocidad de respuesta requerida.

### 4.3.3 Análisis de procesos con diferentes constantes de tiempo

Ahora analizaremos el fenómeno de timbre y robustez para modelos diferentes, asumiendo  $\theta = 0.3$  y  $\tau$  diferente para cada uno de los casos, con el propósito de mostrar que la ubicación de los ceros de la planta dependerá de la relación entre  $\theta$  y  $T$ , en particular del valor del tiempo muerto fraccionario  $f = \theta - dTs$ .

#### Observaciones

De los casos anteriores, (casos I, II y III) podemos observar que la función de sensibilidad es la misma para las tres plantas diferentes, todas estas plantas con los mismos polos y diferentes ceros. El controlador de cada planta posee diferentes polos, pero como ya se demostró en la ecuación (4.146) la sensibilidad del controlador depende solamente de los polos de la planta.

### 4.3 Análisis de la función de sensibilidad

#### Caso IV

Sistema con constante de tiempo  $\tau = 10$

La función de transferencia discreta de la planta es

$$HG_p(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0.1352z^{-1} + 0.05511z^{-2}}{1 - 0.9048z^{-1}} \quad (4.158)$$

La planta tiene un cero en  $z = -0.4076$ , este cero es un polo en el controlador.

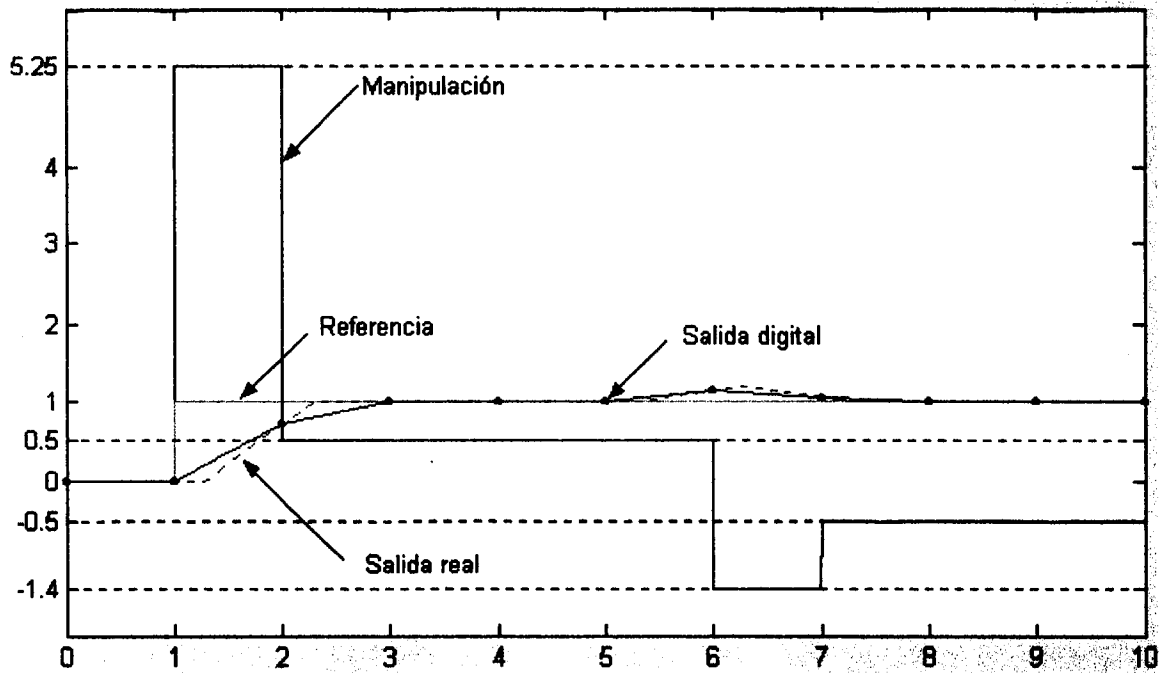


Figura. 4.46: Respuesta del controlador de diferencias con un polo en  $z = -0.4076$ . Caso IV.

La figura 4.46 muestra la salida cuando el controlador tiene un polo ubicado en  $z = -0.4076$ , la manipulación presenta un buen comportamiento, debido a que el polo del controlador es estable.

La figura 4.47 muestra el comportamiento de la robustez del controlador variando el parámetro

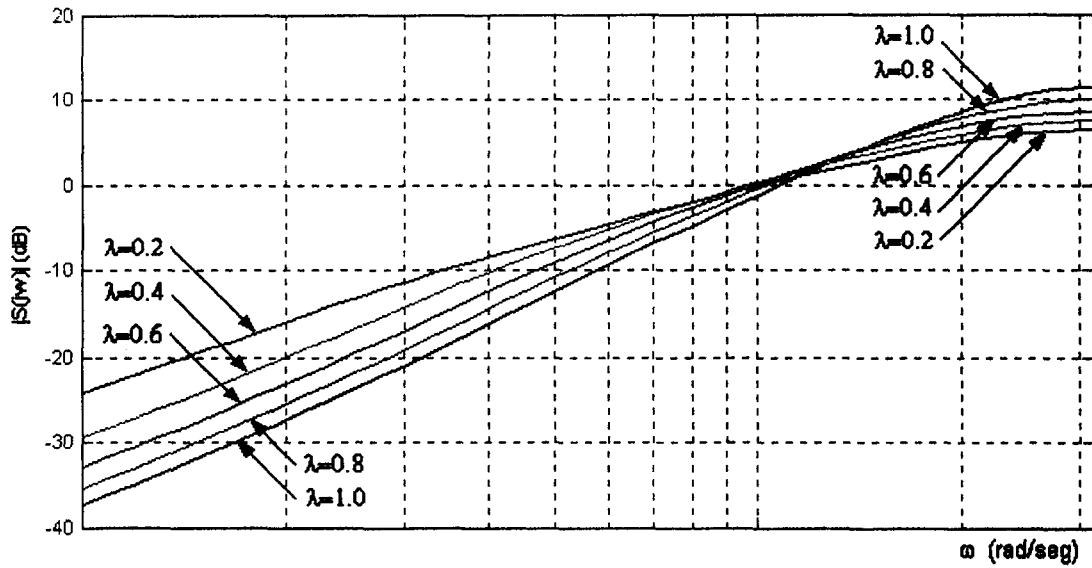


Figura. 4.47: Función de sensibilidad, variando el parámetro  $\lambda$  de controlador del caso IV.

$\lambda$ .

La tabla 4.5 proporciona los valores de  $S_{m\acute{a}x}(j\omega)$ , ante la variaci3n del parámetro  $\lambda$ , tales valores se obtuvieron de la figura 4.47.

**Caso V**

Constante de tiempo  $\tau = 40$ .

La función de transferencia discreta es

$$HG_p(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0.0347z^{-1} + 0.01468z^{-2}}{1 - 0.9753z^{-1}} \quad (4.159)$$

La función de transferencia discreta del lazo de control presenta un cero, el cual se convierte en un polo en  $z = -0.4231$ , dicho polo se encuentra en el semiplano izquierdo y esta alejado del polo de timbre.

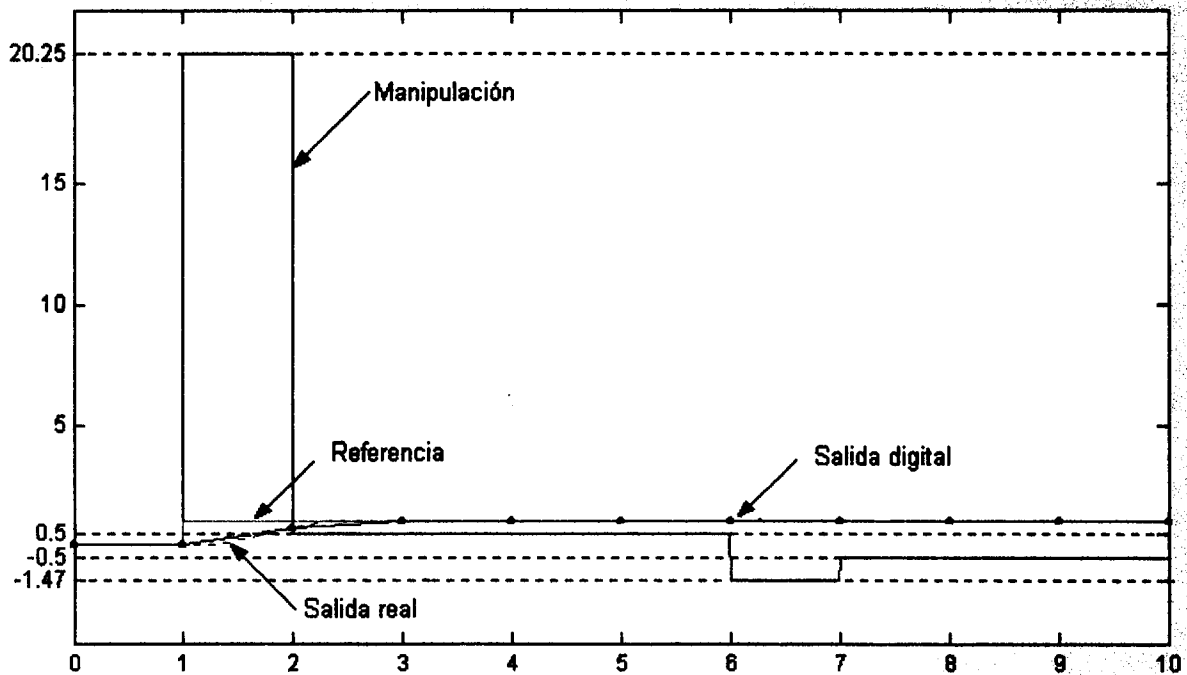


Figura. 4.48: Respuesta del controlador de diferencias con un polo en  $z = -0.4231$ . Caso V.

La figura 4.48 muestra la salida cuando el controlador tiene un polo ubicado en  $z = -0.4231$ , la manipulación presenta un buen comportamiento, debido a que el polo del contro-

lador es estable.

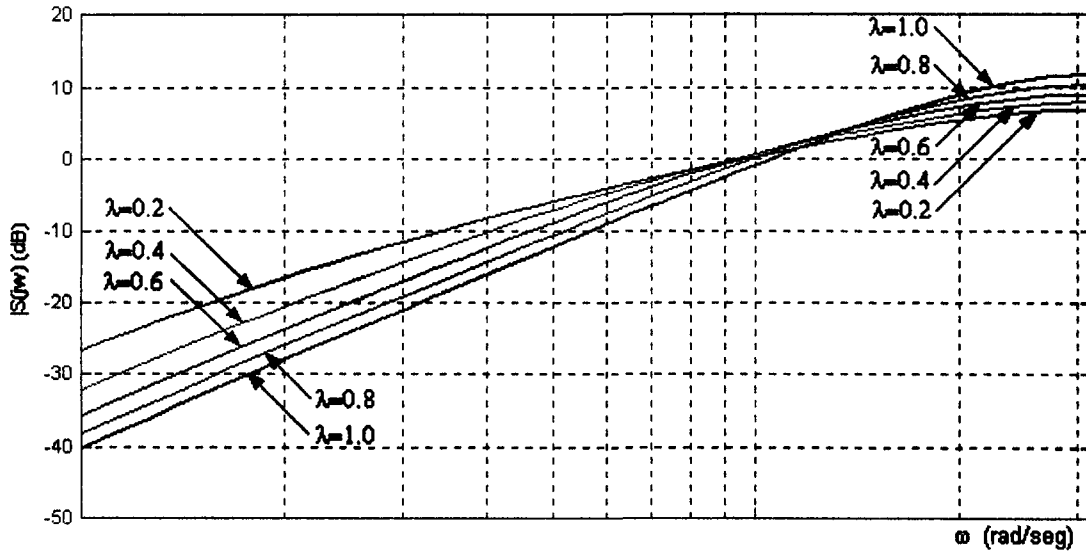


Figura. 4.49: Función de sensibilidad, variando el parámetro  $\lambda$  de sistema del caso V.

La figura 4.49 muestra el comportamiento de la robustez del controlador variando el parámetro de ajuste  $\lambda$ .

La tabla 4.6 proporciona los valores de  $\zeta_{m\acute{a}x}(j\omega)$ , ante la variación del parámetro  $\lambda$ , tales valores se obtuvieron de la figura 4.49.

#### Resumen del análisis de robustez en seguimiento de los casos vistos

Ahora haremos una breve revisión de los resultados obtenidos en el análisis de robustez del controlador de diferencias modificado.

La tabla 4.7 muestra la tabla comparativa del valor de  $\zeta_{m\acute{a}x}(j\omega)$  de las pruebas de robustez de controlador de los casos I, II, III, IV, y V ante la variación del parámetro  $\lambda = 1$ .

De ésta tabla observamos que el factor determinante en la robustez del controlador de diferencias (y de su velocidad de respuesta) es el parámetro  $\lambda$ .



4.3 Análisis de la función de sensibilidad

$\lambda$	$\zeta_{m\acute{a}x}(j\omega)$
1	11.8
0.8	10.2
0.6	8.90
0.4	7.74
0.2	6.72

Tabla 4.4: Valor de  $S_{m\acute{a}x}(j\omega)$ , diferentes  $\lambda$ , Caso I, II y III.

$\lambda$	$\zeta_{m\acute{a}x}(j\omega)$
1	11.6
0.8	10.0
0.6	8.70
0.4	7.54
0.2	6.51

Tabla 4.5: Valor de  $S_{m\acute{a}x}(j\omega)$ , diferentes  $\lambda$ , Caso IV.

$\lambda$	$\zeta_{m\acute{a}x}(j\omega)$
1	11.9
0.8	10.3
0.6	9.01
0.4	7.85
0.2	6.83

Tabla 4.6: Valor de  $S_{m\acute{a}x}(j\omega)$ , para diferentes valores de  $\lambda$ . Caso V.

Caso	$\zeta_{m\acute{a}x}(j\omega)$ con $\lambda = 1$	$\zeta_{m\acute{a}x}(j\omega)$ con $\lambda = 0.8$	$\zeta_{m\acute{a}x}(j\omega)$ con $\lambda = 0.6$	$\zeta_{m\acute{a}x}(j\omega)$ con $\lambda = 0.4$	$\zeta_{m\acute{a}x}(j\omega)$ con $\lambda = 0.2$
Caso I, II, III	11.8	10.2	8.9	7.74	6.72
Caso IV	11.6	10.0	8.7	7.54	6.51
Caso V	11.9	10.3	9.01	7.85	6.83

Tabla 4.7: Robustez del controlador en seguimiento, para los 5 diferentes casos, variando el parámetro  $\lambda$ .

# Capítulo 5

## Conclusiones y Recomendaciones

En esta sección se presentan las conclusiones y observaciones de los resultados obtenidos durante el desarrollo de la tesis, se consideran todos los aspectos tratados durante todo el escrito, posteriormente se presentan los trabajos futuros que se recomiendan en base a los resultados encontrados, para aportar mejoras al controlador.

### 5.1 Conclusiones

La observación de los resultados obtenidos en la presente investigación se pueden resumir en las siguientes conclusiones, sobre el método para eliminar el efecto de timbre producido por los ceros de la planta, también se habla sobre la robustez del controlador y finalizando con las características del controlador obtenido.

#### **Método para eliminar el efecto de timbre producido por los ceros de la planta**

- El método propuesto elimina el efecto de timbre cuando la perturbación entra exactamente en tiempos de muestreo, sin embargo cuando la perturbación entra entre tiempos de muestreo el fenómeno de timbre permanece.
  - Con perturbaciones que entran en tiempos de  $0.3T$  o menores el fenómeno de timbre es eliminado por completo, en tiempos cercanos a  $0.5T$  se presenta el timbre pero llega a desaparecer, sin embargo cuando las perturbaciones se presentan en tiempos mucho mayores a  $0.5T$  el timbre es creciente y llega a producir una manipulación inestable.
  - Cuando el efecto de timbre es eliminado desaparecen las oscilaciones ocultas.
  - Ante cambios en referencia como éstos entran siempre en tiempos de muestreo siempre se elimina el timbre.
  - Se logra la estabilidad del controlador ante cambios en referencia o ante perturbaciones, ambos a la vez [1].

#### **Sobre la robustez**

## 5.2 Trabajos Futuros

- Contrario a lo que se pudiera pensar la función de sensibilidad y por tanto la robustez del sistema no depende de los ceros de la planta sino sólo de los polos.
  - Esto fué demostrado matemáticamente y verificado experimentalmente vía simulación.
  - La robustez se puede incrementar disminuyendo el valor del parámetro  $\lambda$  sin embargo el costo de hacerlo es retardar significativamente la respuesta del sistema.

### **Sobre el controlador de diferencias**

- El buen desempeño del controlador requiere de modelos muy precisos y que no sean cambiantes con el tiempo, cuando en estos procesos  $f$  es muy pequeña y el proceso está bien identificado, entonces el controlador tiene un muy buen comportamiento.
- El controlador es muy fácil de implementar y cuando la parte fraccionario de  $\theta$  es muy pequeña el método resulta muy eficiente.
  - Con  $f < 0.3T$  el controlador trabaja muy bien, siendo sencillo y eficiente.
  - Con  $f = 0.5T$  el uso del controlador no es muy recomendable.
  - Con  $f > 0.5T$  se produce inestabilidad en la salida como en todo controlador de cancelación.
- El uso del controlador de diferencias es muy útil, para los caso en que la parte fraccionaria del tiempo muerto entre el tiempo de muestreo es tan pequeña que permita tiempos de muestreo pequeños, tales que se conserve la relación  $f < 0.3T$ .

## 5.2 Trabajos Futuros

La recomendaciones para investigaciones futuras a partir de la presente tesis son las siguientes:

- Buscar nuevas formas de eliminar el fenómeno de timbre.
- Probar un modelo predictivo del controlador de diferencias. Mediante la aplicación del predictor de Smith es posible obtener un modelo que mejore el desempeño del controlador de diferencias en regulación.

# Apéndice A

## Efecto del tiempo muerto en el controlador de diferencias

El valor del parámetro  $f = \frac{\theta}{T}$  del proceso a controlar, repercute en las características de la manipulación del controlador, a continuación se presenta los efectos que producen diferentes valores de tiempo muerto en el desempeño del controlador de diferencias.

### A.1 El controlador de diferencias en un proceso de primer orden con tiempo muerto menor que el tiempo de muestreo ( $\theta < T$ )

Considerese un proceso que se puede modelar como un sistema de primer orden que tiene tiempo muerto menor que el tiempo de muestreo ( $d = 0$ ).

Si la función de transferencia del proceso esta dada por:

$$HG_p(z^{-1}) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1}} \quad (\text{A.1})$$

Entonces, de las ecuaciones (2.20) y (2.21)

$$\begin{aligned} B'(q^{-1}) &= (b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2}) q = (b_1 + b_2 q^{-1}) \\ A'(q^{-1}) &= ((1 + a_1 q^{-1}) - 1) q = a_1 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Utilizando la equivalencia de la dos ecuaciones anteriores en la ecuación (2.30) obtenemos

$$\Delta u_k = \frac{\lambda e_k + \Delta y_k a_1}{b_1 + b_2 z^{-1}} \quad (\text{A.3})$$

$$b_1 \Delta u_k + b_2 \Delta u_{k-1} = \lambda e_k + \Delta y_k a_1 \quad (\text{A.4})$$

## A.2 Efecto de un tiempo muerto mayor que T

$$\Delta u_k = \frac{\lambda e_k + \Delta y_k a_1 - b_2 \Delta u_{k-1}}{b_1} \quad (\text{A.5})$$

$$u_k = u_{k-1} + \frac{\lambda e_k + a_1 (y_k - y_{k-1}) - b_2 (u_{k-1} - u_{k-2})}{b_1} \quad (\text{A.6})$$

La ecuación (A.6) es la ecuación de diseño del controlador de diferencias para controlar un proceso que puede ser modelado por medio de una función de transferencia discreta equivalente a un primer orden con tiempo muerto menor que el tiempo de muestreo. Anteriormente ya se demostró matemáticamente y vía simulación que bajo estas condiciones al controlador de diferencias tiene un muy buen desempeño.

## A.2 Efecto de un tiempo muerto mayor que T

Como se ha mencionado, el diseño del controlador de diferencias se obtiene de los parámetros de la planta y se expresa con la ecuación (2.32).

$$\Delta u_k = \frac{\Delta y_{k+1+d} + \Delta y_{k+d} A' (q^{-1})}{B' (q^{-1})} \quad (\text{A.7})$$

Ordenando los términos de la ecuación anterior para despejar el valor de  $\Delta u_k$

$$\Delta u_k B' (q^{-1}) = \Delta y_{k+1+d} + \Delta y_{k+d} A' (q^{-1}) \quad (\text{A.8})$$

En esta ecuación observamos que la manipulación actual depende del valor que tome la respuesta en un tiempo futuro, no solamente para el siguiente instante de muestreo, sino que la dependencia del valor de la manipulación actual con los valores de la respuesta va hasta los  $d + 1$  tiempos de muestreo.

En este caso se observa que directamente no se le puede asignar un valor a  $\Delta y_{k+1+d}$  como en el caso anterior con  $d = 0$ .

Este inconveniente se puede solucionar haciendo una predicción de los valores que tendrá la respuesta después de algunos tiempos de muestreo en función del modelo que se tenga de la planta y de los valores presentes y pasados de los valores de la respuesta y de la manipulación.

Para un modelo de orden

Si  $d > 0$  la ecuación (2.15) queda de la forma

$$\Delta u_k = \frac{\Delta y_k [1 + q^{-1} A' (q^{-1})]}{q^{-d} q^{-1} B' (q^{-1})} \quad (\text{A.9})$$

despejando el valor de  $\Delta y_k$

$$\Delta y_k = -q^{-1} A' (q^{-1}) \Delta y_k + \Delta u_k q^{-d-1} B' (q^{-1}) \quad (\text{A.10})$$

$$\Delta y_k = -A' (q^{-1}) \Delta y_{k-1} + \Delta u_{k-d-1} B' (q^{-1}) \quad (\text{A.11})$$

Esta ecuación después de  $d$  tiempos de muestreo tiene la forma

$$\Delta y_{k+d} = -A' (q^{-1}) \Delta y_{k+d-1} + \Delta u_{k-1} B' (q^{-1}) \quad (\text{A.12})$$

Se se observa la ecuación (A.12) notará que  $\Delta y_{k+d}$  está en función de  $\Delta y_{k+d-1}$  y de  $\Delta u_{k-1}$ .

Entonces, se predice un valor de  $\Delta y_{k+d-1}$  para  $d - 1$  tiempos de adelanto basados en la ecuación (A.11) se obtiene

$$\Delta y_{k+d-1} = -A' (q^{-1}) \Delta y_{k+d-2} + \Delta u_{k-2} B' (q^{-1}) \quad (\text{A.13})$$

Sustituyendo la ecuación (A.13) en la ecuación (A.12)

$$\Delta y_{k+d} = -A' (q^{-1}) [-A' (q^{-1}) \Delta y_{k+d-2} + \Delta u_{k-2} B' (q^{-1})] + \Delta u_{k-1} B' (q^{-1}) \quad (\text{A.14})$$

Ahora, el valor de  $\Delta y_{k+d}$  que es nuestra incognita de la ecuación (A.8) está en función de  $\Delta u_{k+d-2}$ ,  $\Delta u_{k-1}$  y  $\Delta u_{k-2}$ .

Si continuamos prediciendo los valores para el valor de  $\Delta u_{k+d-n}$  hasta  $n = d$ , finalmente obtendríamos expresado  $\Delta y_{k+d}$  en terminos de  $\Delta y_k$ ,  $\Delta u_{k-1}$ ,  $\Delta u_{k-2}$ ,  $\dots$ ,  $\Delta u_{k-n}$ .

### A.3 Ejemplo de diseño para un tiempo muerto mayor que el tiempo de muestreo

Para apreciar más claramente el efecto del tiempo muerto mayor que el tiempo de muestreo en el diseño del controlador de diferencias a continuación se considera un proceso de primer orden con  $d = 1$  y cuya función de transferencia discreta es la que se presenta a continuación

$$G_p(z^{-1}) = \frac{z^{-1}(b_1z^{-1} + b_2z^{-2})}{1 + a_1z^{-1}} \quad (\text{A.15})$$

Para el diseño del controlador de diferencias se toma como referencia la ecuación (A.8)

$$\Delta u_k B'(q^{-1}) = \Delta y_{k+1+d} + \Delta y_{k+d} A'(q^{-1}) \quad (\text{A.16})$$

de la ecuación (A.15) se obtienen los polinomios  $B'(q^{-1})$  y  $A'(q^{-1})$  donde

$$B'(q^{-1}) = b_1 + b_2q^{-1} \quad (\text{A.17})$$

$$A'(q^{-1}) = a_1 \quad (\text{A.18})$$

al sustituir estos polinomios en la ecuación de diseño se obtiene

$$\Delta u_k (b_1 + b_2q^{-1}) = \Delta y_{k+2} + \Delta y_{k+1} a_1 \quad (\text{A.19})$$

En la ecuación (A.19) se observa que el valor de  $\Delta y$  que es posible predecir, es para el cual se tenga toda la información en el instante de muestreo, siendo éste  $\Delta y_{k+2}$ .

De la misma manera en que se definió  $\Delta y_{k+1}$  para el caso de  $d = 0$  como

$$\Delta y_{k+1} = \lambda e_k \quad (\text{A.20})$$

al considerar el caso estudiado en esta sección, se puede definir  $\Delta y_{k+2}$  como

$$\Delta y_{k+2} = \lambda e_{k+1} \quad (\text{A.21})$$

o bien, se puede escribir como

$$\Delta y_{k+2} = \lambda (e_k - \Delta y_{k+1}) \quad (\text{A.22})$$

La ecuación (A.21) expresa que el error futuro  $e_{k+1}$  es igual al error actual  $e_k$  menos el incremento en la respuesta al siguiente instante de muestreo. Al sustituir la ecuación (A.21) en (A.19) se obtiene:

$$\Delta u_k (b_1 + b_2 q^{-1}) = \lambda (e_k + \Delta y_{k+1}) + \Delta y_{k+1} a_1 \quad (\text{A.23})$$

$$\Delta u_k (b_1 + b_2 q^{-1}) = \lambda e_k + \Delta y_{k+1} (a_1 - \lambda) \quad (\text{A.24})$$

Ahora, es necesario predecir  $\Delta y_{k+1}$ . Para esto se considera como base la ecuación (A.12) para el valor de  $d = 1$ .

$$\Delta y_{k+1} = -A' (q^{-1}) \Delta y_k + \Delta u_{k-1} B' (q^{-1}) \quad (\text{A.25})$$

$$\Delta y_{k+1} = -a_1 \Delta y_k + \Delta u_{k-1} (b_1 + b_1 q^{-1}) \quad (\text{A.26})$$

$$\Delta y_{k+1} = -a_1 \Delta y_k + b_1 \Delta u_{k-1} + b_1 \Delta u_{k-2} \quad (\text{A.27})$$

A continuación se sustituye la ecuación (A.24) en (A.27)

$$\Delta u_k (b_1 + b_1 q^{-1}) = \lambda e_k + [-a_1 \Delta y_k + b_1 \Delta u_{k-1} + b_2 \Delta u_{k-2}] (a_1 + \lambda) \quad (\text{A.28})$$

$$b_1 \Delta u_k = \lambda e_k - a_1 \Delta y_k (a_1 - \lambda) + b_1 \Delta u_{k-1} (a_1 - \lambda) \quad (\text{A.29})$$

$$+ b_2 \Delta u_{k-2} (a_1 - \lambda) - b_2 \Delta u_{k-1} \quad (\text{A.30})$$



A.4 Diseño del controlador de diferencias para  $d > 0$ , caso general

$$b_1 (u_k - u_{k-1}) = \lambda e_k - (y_k - y_{k-1}) (a_1^2 - \lambda a_1) \quad (\text{A.31})$$

$$+ (u_{k-1} - u_{k-2}) (a_1 b_1 - \lambda b_1) \quad (\text{A.32})$$

$$+ (u_{k-2} - u_{k-3}) (a_1 b_2 - \lambda b_2) \\ - b_2 (u_{k-1} - u_{k-2}) \quad (\text{A.33})$$

de aqui obtenemos el valor de la manipulación

$$u_k = \frac{1}{b_1} \left[ \lambda e_k - (y_k - y_{k-1}) (a_1^2 - \lambda a_1) + (u_{k-1} - u_{k-2}) (a_1 b_1 - \lambda b_1) \right. \\ \left. + (u_{k-2} - u_{k-3}) (a_1 b_2 - \lambda b_2) - b_2 (u_{k-1} - u_{k-2}) + b_1 u_{k-1} \right] \quad (\text{A.34})$$

Donde

$$e_k = (ref - y_k) \quad (\text{A.35})$$

### A.4 Diseño del controlador de diferencias para $d > 0$ , caso general

Como se puede observar en la sección anterior el diseño del controlador de diferencias se complica cuando la función de transferencia del proceso tiene un valor de  $d = 1$ .

En esta sección se analizará un caso general para  $d > 0$  con la finalidad de mostrar el diseño del controlador bajo estas circunstancias.

Para el presente desarrollo se toma como base la ecuación (2.32)

$$\Delta u_k = \frac{\Delta y_{k+1+d} + \Delta y_{k+d} A'(q^{-1})}{B'(q^{-1})} \quad (\text{A.36})$$

Para fines de demostración considerese una función de transferencia discreta del proceso de tipo.

$$HG_p(z^{-1}) = z^{-d} \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (\text{A.37})$$

Que representa el equivalente discreto de una función de transferencia continua de un sistema de segundo orden con tiempo muerto mayor que el tiempo de muestreo y con parte fraccionaria. De la ecuación (A.37) obtenemos los polinomios  $A'(q^{-1})$  y  $B'(q^{-1})$  necesario para el diseño del controlador. Recuerde que el operador de atraso ( $q^{-1}$ ) se utiliza para representar en ecuaciones de diferencias el operador ( $z^{-1}$ ).

$$B'(q^{-1}) = b_1 + b_2q_1^{-1} + b_3q^{-2} + \dots + b_nq^{-nb-1} = (q \times B(q^{-1})) \quad (\text{A.38})$$

$$B'(q^{-1}) = b_1 + b_2q_1^{-1} + b_3q^{-2} \quad (\text{A.39})$$

$$A'(q^{-1}) = a_1 + a_2q^{-1} + \dots + a_naq^{-na-1} = (A'(q^{-1}) - 1) \times q \quad (\text{A.40})$$

$$A'(q^{-1}) = a_1 + a_2q^{-1} \quad (\text{A.41})$$

Sustituyendo  $A'(q^{-1})$  y  $B'(q^{-1})$  en la ecuación de diseño del controlador de diferencias obtenemos

$$\Delta u_k = \frac{\Delta y_{k+1+d} + \Delta y_{k+d}(a_1 + a_2q^{-1})}{(b_1 + b_2q_1^{-1} + b_3q^{-2})} \quad (\text{A.42})$$

Pasando el polinomio  $B'(q^{-1})$  al primer miembro de la ecuación

$$\Delta u_k (b_1 + b_2q_1^{-1} + b_3q^{-2}) = \Delta y_{k+1+d} + \Delta y_{k+d}(a_1 + a_2q^{-1}) \quad (\text{A.43})$$

Desarrollando el producto del primer miembro de la ecuación tenemos

$$b_1\Delta u_k + b_2\Delta u_{k-1} + b_3\Delta u_{k-2} = \Delta y_{k+1+d} + \Delta y_{k+d}(a_1 + a_2q^{-1}) \quad (\text{A.44})$$

despejando para  $\Delta u_k$

$$\Delta u_k = \frac{\Delta y_{k+1+d} + \Delta y_{k+d}(a_1 + a_2q^{-1}) - b_2\Delta u_{k-1} - b_3\Delta u_{k-2}}{b_1} \quad (\text{A.45})$$

A.4 Diseño del controlador de diferencias para  $d > 0$ , caso general

$$u_k - u_{k-1} = \frac{\Delta y_{k+1+d} + \Delta y_{k+d} (a_1 + a_2 q^{-1}) - b_2 \Delta u_{k-1} - b_3 \Delta u_{k-2}}{b_1} \quad (\text{A.46})$$

$$u_k = u_{k-1} + \frac{\Delta y_{k+1+d} + \Delta y_{k+d} (a_1 + a_2 q^{-1}) - b_2 \Delta u_{k-1} - b_3 \Delta u_{k-2}}{b_1} \quad (\text{A.47})$$

En este caso, nuestra incognita  $\Delta y_{k+1+d}$  se define en forma similar que en el caso de  $d = 1$ , considerado en la ecuación (A.21), de la siguiente forma.

$$\Delta y_{k+1+d} = \lambda e_{k+d} = \lambda (e_k - \hat{\Delta y}_{k+d}) \quad (\text{A.48})$$

Donde  $\hat{\Delta y}_{k+d}$  es la suma de los incrementos que sufrirá la respuesta hasta los  $k + d$  instantes de muestreo. Expresa el incremento que sufrirá la respuesta en el instante de muestreo  $k + 1 + d$  definido por el error actual menos la suma de los incrementos que sufrirá la respuesta hasta los  $k + d$  instantes de muestreo todo multiplicado por  $\lambda$ .

$$\hat{\Delta y}_{k+d} = \Delta y_{k+1} + \Delta y_{k+2} + \dots + \Delta y_{k+d} \quad (\text{A.49})$$

La ecuación (A.48) expresa que el incremento que sufrirá la respuesta en el instante de muestreo  $k + 1 + d$  está definido por el error actual menos la suma de los incrementos que sufrirá la respuesta hasta los  $k + d$  instantes de muestreo todo multiplicado por  $\lambda$ .

Sustituyendo  $\Delta y_{k+1+d}$  de la ecuación (A.48) en la ecuación (A.49) obtenemos.

$$u_k = u_{k-1} + \frac{\lambda (e_k - \hat{\Delta y}_{k+d}) + \Delta y_{k+d} (a_1 + a_2 q^{-1}) - b_2 \Delta u_{k-1} - b_3 \Delta u_{k-2}}{b_1} \quad (\text{A.50})$$

$$u_k = u_{k-1} + \frac{\lambda (e_k - \hat{\Delta y}_{k+d}) + a_1 \Delta y_{k+d} + a_2 \Delta y_{k+d-1} - b_2 \Delta u_{k-1} - b_3 \Delta u_{k-2}}{b_1} \quad (\text{A.51})$$

$$u_k = u_{k-1} + \frac{\lambda (e_k - \hat{\Delta y}_{k+d}) + a_1 \Delta y_{k+d} + a_2 \Delta y_{k+d-1}}{b_1} \quad (\text{A.52})$$

$$\frac{b_2 (u_{k-1} - u_{k-2}) + b_3 (u_{k-2} - u_{k-3})}{b_1} \quad (\text{A.53})$$

Observece que en este caso nuestra incognita es  $\Delta y_{k+d}$  y se puede obtener por medio de la ecuación (A.11) adelantando esta ecuación desde 1 hasta  $d$  instantes de muestreo como se explico en la sección A.2 en donde se abordo el efecto de tiempo muerto mayor que  $T$ . Una vez teniendo el valor  $\Delta y_{k+d}$  se puede calcular  $\Delta \hat{y}_{k+d}$  solo sumando los resultados obtenidos para los 1, 2, hasta  $d$  instantes de muestreo.

A continuación se explica como obtener los valores de  $\Delta y_{k+d}$  y  $\Delta \hat{y}_{k+d}$  a partir de la ecuación (A.11).

$$\Delta y_k = -A' (q^{-1}) \Delta y_{k-1} + \Delta u_{k-d-1} B' (q^{-1}) \quad (\text{A.54})$$

Adelantando un instante de muestreo se tiene:

$$\Delta y_{k+1} = -A' (q^{-1}) \Delta y_k + \Delta u_{k-d} B' (q^{-1}) \quad (\text{A.55})$$

El valor  $\Delta y_{k+1}$  se puede obtener ya que los polinomios  $A' (q^{-1})$  y  $B' (q^{-1})$  son conocidos y

$$\Delta y_{k+1} = y_k - y_{k-1} \quad (\text{A.56})$$

Adelantando un instante de muestreo más

$$\Delta y_{k+2} = -A' (q^{-1}) \Delta y_{k+1} + \Delta u_{k-d} B' (q^{-1}) \quad (\text{A.57})$$

El valor  $\Delta y_{k+2}$  se puede obtener ya que los polinomios  $A' (q^{-1})$  y  $B' (q^{-1})$  son conocidos y  $\Delta y_{k+1}$  se calculó previamente.

Siguiendo este procedimiento, se puede obtener el valor de  $\Delta y_{k+d}$  que dependerá del valor de los polinomios  $A' (q^{-1})$  y  $B' (q^{-1})$  y del valor de  $\Delta y_{k+d-1}$  calculado previamente.

En forma general utilizando una variable auxiliar  $i$ .

Para  $i = 1$  hasta  $d$

$$\Delta y_{k+i} = -A' (q^{-1}) \Delta y_{k+i-1} + \Delta u_{k-d+i-1} B' (q^{-1}) \quad (\text{A.58})$$

NOTA: Cuando  $d = 0$  esta ecuación no debe calcularse en el algoritmo.

A.4 Diseño del controlador de diferencias para  $d > 0$ , caso general

Sustituyendo los polinomios  $A'(q^{-1})$  y  $B'(q^{-1})$

$$\Delta y_{k+i} = - (a_1 + a_2 q^{-1}) \Delta y_{k+i-1} + \Delta u_{k-d+i-1} (b_1 + b_2 q^{-1} + b_3 q^{-2}) \quad (\text{A.59})$$

$$\Delta y_{k+i} = -a_1 \Delta y_{k+i-1} - a_2 \Delta y_{k+i-2} + b_1 \Delta u_{k-d+i-1} + b_2 \Delta u_{k-d+i-2} \quad (\text{A.60})$$

$$+ b_3 \Delta u_{k-d+i-3} \quad (\text{A.61})$$

Entonces, para  $i = 1$  hasta  $d$

$$\Delta y_{k+i} = -a_1 \Delta y_{k+i-1} - a_2 \Delta y_{k+i-2} + b_1 (u_{k-d+i-1} - u_{k-d+i-2}) \quad (\text{A.62})$$

$$+ b_2 (u_{k-d+i-2} - u_{k-d+i-3}) + b_3 (u_{k-d+i-3} - u_{k-d+i-4})$$

Note que los valores de las  $\Delta y_k$  se siguen expresando como incremento debido a que el valor se obtiene del cálculo previo de esta misma ecuación. Como la ecuación (A.62) se pueden calcular los valores para  $\Delta y_{k+d}$  y  $\hat{\Delta y}_{k+d}$  en un algoritmo computacional y con estos la manipulación para el controlador de diferencias con base en la ecuación (A.52).

## Apéndice B

# Otras formas de definir $\Delta y_{k+1}$ para un proceso con $d = 0$

A continuación se definen y explican alguna formas de definir el valor de  $\Delta y_{k+1}$ .

Como se explico anteriormente,  $\Delta y_{k+1}$  representa el cambio deseado en la salida y se relacionó con el error en el instante de tiempo  $k$  algunas formas de definir  $\Delta y_{k+1}$  para  $d = 0$  son:

- Corrección rápida, elimina todo el error en un paso, esto es  $\Delta y_{k+1} = e_k$  como se explico anteriormente.
- Corrección suave, parecida a la respuesta de un sistema de primer orden, haciendo  $\Delta y_{k+1} = \lambda e_k$ .

En el primer caso, la corrección se hará tomando en cuenta todo el error en un solo instante de muestreo. Esto produciría manipulaciones muy grandes que precticamente son irrealizables en la realidad, dado que los controladores y/o los elementos finales de control tienden a saturarse.

Para el segundo caso, si el parámetro  $\lambda$  toma un valor entre 0 y 1 hace que en cada paso (instante de muestreo) se considere sólo una parte del error y de esta forma lograr que la respuesta del controlador sea menos violenta.

El parámetro de ajuste  $\lambda$  es el único parámetro de ajuste que se considera bajo estas condiciones.

Si sustituimos  $\Delta y_{k+1} = \lambda e_k$  en la ecuación (2.44) y  $d = 0$  entonces se tiene

$$\Delta u_k = \frac{\lambda e_k + \Delta y_k A'(z^{-1})}{B'(z^{-1})} \quad (\text{B.1})$$

Debido a que  $\Delta y_{k+1}$  es el cambio en la respuesta se puede obtener las siguientes ecuación de recurrencia.

$$\Delta y_{k+1} = \lambda e_k = \lambda (r_k - y_k) \quad (\text{B.2})$$

$$y_{k+1} - y_k = \lambda e_k = \lambda (r_k - y_k) \quad (\text{B.3})$$

$$y_{k+1} = \lambda e_k + y_k \quad (\text{B.4})$$

De esta manera, cuando se presente algún error, sea por algún cambio de la referencia o por el efecto de una perturbación; el controlador de diferencias reducirá el error en una proporción de  $1 - \lambda$  veces por cada tiempo de muestreo hasta que el error decaiga exponencialmente a cero.

# Bibliografía

- [1] Karl j. Astrom and Bjorn Wittenmark. *Computer-Controlled Systems*. Lecture Notes in Computer Science 1153. Prentice Hall, United States of America , 1990. First International Conference. Aep 1995.
- [2] Pascual Barba Avila. *Diseño y desarrollo de un controlador no convencional Robusto con un solo parámetro de sintonización*. Tesis ITESM.
- [3] Luis Rosas Cobos. *Metodología para la automatización del diseño de controladores RST robusto*. Tesis. 2002.
- [4] Teodoro de Jesus Delgado Herrera. *Implementación en microcontrolador de un controlador de diferencias con un parámetro de ajuste*. 2002.
- [5] Franklin G. F. J.D., Powel and A. Emami Naeni *Control Dynamic Systems* Addison Wesley 1998.
- [6] Ogata K. *Sistemas de control el tiempo Discreto*. Preentice Hall, 1996.
- [7] Ogata K. *Sistemas de control moderno*. Preentice Hall, 1996.
- [8] Ioan Dore Landau, *System identification and Control design*. Prentice Hall, 1990.
- [9] Luis Manuel Lopez Manrique. *Desarrollo de ante alimentación adaptable en un controlador PID digital*. ITESM, 1995.
- [10] Dr. Jorge Limón Robles. *Apuntes del curso de control digital avanzado*. 2003.
- [11] C. A. Smith and A.B. Corripio. *Digital Computer process Control*, John Wileg and Sons. 1985.
- [12] Landau, I. *System identification and control design using PIM+ Software*. Center National de la Recherche Identifique, Laboratorie de' Autotique de Grenoble (IWPG/CWRS).
- [13] Landau I.D.R. Lozano and M. M'Saad. *Adaptative Control*. Ferst edition, Springer Verby. Landau 1998.
- [14] Dahlin, E. B., *Designing and Tuning Digital Controller: Instruments and control systems* vol. 4, No. 6 (June 1968).



