

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Campus Monterrey

División de Electrónica, Computación, Información y
Comunicaciones

Programa de Graduados



**Estudio de los modos de propagación LP en
fibras ópticas elípticas de índice abrupto.**

TESIS

Presentada como requisito parcial para obtener el grado académico de

Maestro en Ciencias en Ingeniería Electrónica
especialidad en
Telecomunicaciones

por

Ing. Ivan Gómez Castellanos

Monterrey, N.L., Agosto de 2004

© Ivan Gómez Castellanos, 2004

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Campus Monterrey

División de Electrónica, Computación, Información y
Comunicaciones

Programa de Graduados

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la presente tesis de Ivan Gómez Castellanos sea aceptada como requisito parcial para obtener el grado académico de
Maestro en Ciencias en Ingeniería Electrónica, especialidad en:

Telecomunicaciones

Comité de tesis:

Dr. Ramón M. Rodríguez Dagnino

Asesor de la tesis

Dr. Gabriel Campuzano Treviño

Sinodal

Dr. Raúl Rodríguez Miranda

Sinodal

Dr. David Garza Salazar

Director del Programa de Graduados

Agosto de 2004

Estudio de los modos de propagación LP en fibras ópticas elípticas de índice abrupto.

por

Ing. Ivan Gómez Castellanos

Tesis

Presentada al Programa de Graduados en Electrónica, Computación, Información y

Comunicaciones

como requisito parcial para obtener el grado académico de

Maestro en Ciencias en Ingeniería Electrónica

especialidad en

Telecomunicaciones

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Campus Monterrey

Agosto de 2004

*A mis padres,
a mis hermanos
y a Dariela.*

Reconocimientos

Al Dr. Ramón Martín Rodríguez Dagnino por guiarme en el desarrollo de mi tesis.

A Hugo Tapia, Carlos Crispín, Omar Arenas, Jorge Lara, Milner Flores, Job Josué y Araceli Ruiz por la amistad que me han brindado desde que inicié la maestría.

A Noé, Saulo, Luis, Juan Manuel y Abraham, por su apoyo y por ser mis mejores amigos.

A mi familia y especialmente a mi madre por ser la maestra de toda mi vida.

A Dariela por hacer feliz cada uno de mis días y motivarme a alcanzar mis metas.

IVAN GÓMEZ CASTELLANOS

*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Agosto 2004*

Estudio de los modos de propagación LP en fibras ópticas elípticas de índice abrupto.

Ivan Gómez Castellanos, M.C.
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, 2004

Asesor de la tesis: Dr. Ramón M. Rodríguez Dagnino

En el presente trabajo se muestra un estudio de los modos de propagación LP en las fibras ópticas elípticas de índice abrupto. Se emplean las funciones Mathieu para encontrar las constantes de propagación de los diferentes modos LP a partir de la ecuación característica simplificada obtenida por la aproximación de guiado débil. También se utilizan las funciones Mathieu para graficar la distribución de la intensidad de la luz de algunos modos LP en la sección transversal de la fibra óptica elíptica y se comparan los resultados con los obtenidos para las fibras ópticas circulares.

Índice general

Reconocimientos	VI
Resumen	VII
Índice de figuras	x
Capítulo 1. Introducción	1
1.1. Objetivo	2
1.2. Justificación	3
1.3. Organización de la tesis	3
Capítulo 2. Modos LP en fibras ópticas circulares	5
2.1. Fibra óptica circular de índice abrupto	5
2.2. Propagación electromagnética en fibra óptica circular	6
2.2.1. Ecuación de onda en coordenadas circulares-cilíndricas	7
2.2.2. Ecuación característica	11
2.3. Aproximación por guiado débil	12
2.4. Modos de propagación LP	15
2.4.1. Modos $LP_{0,m}$	16
2.4.2. Modos $LP_{1,m}$	18
2.4.3. Modos $LP_{2,m}$	20
2.4.4. Modos $LP_{3,m}$	22
2.4.5. Modos $LP_{4,m}$	23
Capítulo 3. Fibras ópticas elípticas	26
3.1. Sistema de coordenadas elípticas-cilíndricas	26
3.2. Propagación electromagnética en fibra óptica elíptica	29
3.2.1. Ecuación de onda en coordenadas elípticas	30
3.2.2. Ecuación de Mathieu Angular	33
3.2.3. Ecuación de Mathieu Radial	35
3.3. Funciones Mathieu	37
3.3.1. Función Mathieu ce_m y se_m	38

3.3.2. Función Mathieu Ce_m y Se_m	46
3.3.3. Función Mathieu Fek_m y Gek_m	50
Capítulo 4. Modos LP en fibras ópticas elípticas	55
4.1. Ecuación característica	55
4.2. Aproximación por guiado débil	65
4.3. Modos de propagación LP pares	70
4.3.1. Modos ${}_eLP_{0,n}$	71
4.3.2. Modos ${}_eLP_{1,n}$	73
4.3.3. Modos ${}_eLP_{2,n}$	75
4.3.4. Modos ${}_eLP_{m,n}$, $m \geq 4$	77
4.4. Modos de propagación LP impares	79
4.4.1. Modos ${}_oLP_{1,n}$	80
4.4.2. Modos ${}_oLP_{2,n}$	82
4.4.3. Modos ${}_oLP_{3,n}$	84
4.4.4. Modos ${}_oLP_{m,n}$, $m \geq 4$	86
Capítulo 5. Conclusiones	88
5.1. Investigaciones futuras	89
Apéndice A. Campos transversales en fibras ópticas elípticas	90
Apéndice B. Fórmulas para $\alpha_{r,n}$, $\beta_{r,n}$, $\chi_{m,n}$ y $\nu_{m,n}$	94
Bibliografía	96
Vita	98

Índice de figuras

2.1. Fibra óptica circular de índice abrupto.	5
2.2. Representación de la fibra óptica circular de índice abrupto en coordenadas circulares-cilíndricas.	7
2.3. Distribución radial de la intensidad (normalizada a la misma potencia) de los modos $LP_{0,1}$, $LP_{0,2}$, $LP_{0,3}$ y $LP_{0,4}$ en una fibra óptica circular de índice abrupto.	16
2.4. Distribución de la intensidad de los modos $LP_{0,1}$, $LP_{0,2}$, $LP_{0,3}$ y $LP_{0,4}$ en una fibra óptica circular de índice abrupto.	17
2.5. Distribución radial de la intensidad (normalizada a la misma potencia) de los modos $LP_{1,1}$, $LP_{1,2}$, $LP_{1,3}$ y $LP_{1,4}$ en una fibra óptica circular de índice abrupto.	18
2.6. Distribución de la intensidad de los modos $LP_{1,1}$, $LP_{1,2}$, $LP_{1,3}$ y $LP_{1,4}$ en una fibra óptica circular de índice abrupto.	19
2.7. Distribución radial de la intensidad (normalizada a la misma potencia) de los modos $LP_{2,1}$, $LP_{2,2}$, $LP_{2,3}$ y $LP_{2,4}$ en una fibra óptica circular de índice abrupto.	20
2.8. Distribución de la intensidad de los modos $LP_{2,1}$, $LP_{2,2}$, $LP_{2,3}$ y $LP_{2,4}$ en una fibra óptica circular de índice abrupto.	21
2.9. Distribución radial de la intensidad (normalizada a la misma potencia) de los modos $LP_{3,1}$, $LP_{3,2}$, $LP_{3,3}$ y $LP_{3,4}$ en una fibra óptica circular de índice abrupto.	22
2.10. Distribución de la intensidad de los modos $LP_{3,1}$, $LP_{3,2}$, $LP_{3,3}$ y $LP_{3,4}$ en una fibra óptica circular de índice abrupto.	23
2.11. Distribución radial de la intensidad (normalizada a la misma potencia) de los modos $LP_{4,1}$, $LP_{4,2}$, $LP_{4,3}$ y $LP_{4,4}$ en una fibra óptica circular de índice abrupto.	24
2.12. Distribución de la intensidad de los modos $LP_{4,1}$, $LP_{4,2}$, $LP_{4,3}$ y $LP_{4,4}$ en una fibra óptica circular de índice abrupto.	25
3.1. Sistema de coordenadas elípticas-cilíndricas.	26
3.2. Fibra óptica elíptica de índice abrupto.	30

3.3.	Funciones Mathieu Angulares $ce_1(\eta, \gamma^2)$	44
3.4.	Funciones Mathieu Angulares $ce_m(\eta, 10)$	44
3.5.	Funciones Mathieu Angulares $se_1(\eta, \gamma^2)$	45
3.6.	Funciones Mathieu Angulares $se_m(\eta, 10)$	45
3.7.	Funciones Mathieu Radiales $Ce_0(\xi, \gamma^2)$	48
3.8.	Funciones Mathieu Radiales $Ce_m(\xi, 0.1)$ escaladas.	48
3.9.	Funciones Mathieu Radiales $Se_1(\xi, \gamma^2)$	49
3.10.	Funciones Mathieu Radiales $Se_m(\xi, 0.1)$ escaladas.	50
3.11.	Funciones Mathieu Radiales evanescentes $Fek_1(\xi, \gamma^2)$	52
3.12.	Funciones Mathieu Radiales evanescentes $Fek_m(\xi, 0.5)$	53
3.13.	Funciones Mathieu Radiales evanescentes $Gek_1(\xi, \gamma^2)$	54
3.14.	Funciones Mathieu Radiales evanescentes $Gek_m(\xi, 0.5)$	54
4.1.	Distribución de la intensidad de los modos $eLP_{0,1}$, $eLP_{0,2}$, $eLP_{0,3}$ y $eLP_{0,4}$ en una fibra óptica elíptica de índice abrupto, con $a = 25 \mu\text{m}$ y $b = 24.99 \mu\text{m}$	71
4.2.	Distribución de la intensidad de los modos $eLP_{0,3}$, $eLP_{0,4}$, $eLP_{0,5}$ y $eLP_{0,6}$ en una fibra óptica elíptica de índice abrupto, con $a/b = 2$	72
4.3.	Distribución de la intensidad de los modos $eLP_{1,1}$, $eLP_{1,2}$, $eLP_{1,3}$ y $eLP_{1,4}$ en una fibra óptica elíptica de índice abrupto, con $a = 25 \mu\text{m}$ y $b = 24.99 \mu\text{m}$	73
4.4.	Distribución de la intensidad de los modos $eLP_{1,3}$, $eLP_{1,4}$, $eLP_{1,5}$ y $eLP_{1,6}$ en una fibra óptica elíptica de índice abrupto, con $a/b = 1.8$	74
4.5.	Distribución de la intensidad de los modos $eLP_{2,1}$, $eLP_{2,2}$, $eLP_{2,3}$ y $eLP_{2,4}$ en una fibra óptica elíptica de índice abrupto, con $a = 25 \mu\text{m}$ y $b = 24.99 \mu\text{m}$	75
4.6.	Distribución de la intensidad de los modos $eLP_{2,5}$, $eLP_{2,6}$, $eLP_{2,7}$ y $eLP_{2,8}$ en una fibra óptica elíptica de índice abrupto, con $a/b = 1.5$	76
4.7.	Distribución de la intensidad de los modos $eLP_{5,n}$, para diferentes excentricidades.	77
4.8.	Distribución de la intensidad de los modos $eLP_{6,5}$, $eLP_{6,6}$, $eLP_{6,7}$ y $eLP_{6,8}$ en una fibra óptica elíptica de índice abrupto, con $a/b = 2.27$	78
4.9.	Distribución de la intensidad de los modos $oLP_{1,1}$, $oLP_{1,2}$, $oLP_{1,3}$ y $oLP_{1,4}$ en una fibra óptica elíptica de índice abrupto, con $a = 25 \mu\text{m}$ y $b = 24.99 \mu\text{m}$	80
4.10.	Distribución de la intensidad de los modos $oLP_{1,3}$, $oLP_{1,4}$, $oLP_{1,5}$ y $oLP_{1,6}$ en una fibra óptica elíptica de índice abrupto, con $a/b = 1.2$	81
4.11.	Distribución de la intensidad de los modos $oLP_{2,1}$, $oLP_{2,2}$, $oLP_{2,3}$ y $oLP_{2,4}$ en una fibra óptica elíptica de índice abrupto, con $a = 25 \mu\text{m}$ y $b = 24.99 \mu\text{m}$	82

4.12. Distribución de la intensidad de los modos ${}_oLP_{2,3}$, ${}_oLP_{2,4}$, ${}_oLP_{2,5}$ y ${}_oLP_{2,6}$ en una fibra óptica elíptica de índice abrupto, con $a/b = 1.7$	83
4.13. Distribución de la intensidad de los modos ${}_oLP_{3,1}$, ${}_oLP_{3,2}$, ${}_oLP_{3,3}$ y ${}_oLP_{3,4}$ en una fibra óptica elíptica de índice abrupto, con $a = 25 \mu\text{m}$ y $b = 24.99 \mu\text{m}$	84
4.14. Distribución de la intensidad de los modos ${}_oLP_{3,2}$, ${}_oLP_{3,3}$, ${}_oLP_{3,4}$ y ${}_oLP_{3,5}$ en una fibra óptica elíptica de índice abrupto, con $a/b = 2.2$	85
4.15. Distribución de la intensidad de los modos ${}_oLP_{4,n}$, para diferentes excentricidades.	86
4.16. Distribución de la intensidad de los modos ${}_oLP_{7,5}$, ${}_oLP_{7,6}$, ${}_oLP_{7,7}$ y ${}_oLP_{7,8}$ en una fibra óptica elíptica de índice abrupto, con $a/b = 2.27$	87

Capítulo 1

Introducción

Los nuevos servicios ofrecidos por las telecomunicaciones, así como el aumento de la población y su necesidad de comunicación, provocan que se requiera cada vez de un ancho de banda más grande, por lo cual es necesario emplear medios de transmisión que sean capaces de soportar la transmisión de grandes volúmenes de información.

La fibra óptica circular es un medio de transmisión que ofrece grandes ventajas para la transmisión de información, ya que se puede transmitir a un bitrate muy alto a través de enlaces de larga distancia, sin necesidad de tener demasiados repetidores, debido a que la atenuación es muy baja. Sin embargo, lo que limita a las comunicaciones ópticas es la dispersión. Existen varios tipos de dispersión, entre ellas están la dispersión modal, la dispersión cromática y la dispersión por modo de polarización.

Un modo de propagación es una configuración de campo permitida, para una determinada geometría de una guía de onda, que satisface las ecuaciones de Maxwell o las ecuaciones de onda derivadas y las condiciones frontera del problema. Cada modo de propagación tiene una constante de propagación que está determinada por la forma y tamaño de la guía de onda, por el tipo de material de la guía, así como por la longitud de onda empleada [1].

La dispersión modal es la que provoca mayor ensanchamiento a los pulsos ópticos, esto se debe a que cada modo tiene una constante de propagación diferente, por lo tanto la velocidad a la que viaja cada uno de los modos es diferente, de aquí que mientras mayor sea el número de modos que se propagan por la fibra, mayor será el ensanchamiento del pulso de luz. Esta dispersión es eliminada mediante el uso de fibras ópticas monomodo, en las cuales solamente se puede propagar un solo modo [1], [2], [3].

La dispersión cromática se debe a que el índice de refracción de los materiales dieléctricos varía en función de la longitud de onda de la luz. Las fuentes de luz no emiten una sola longitud de onda, sino que tienen un cierto ancho espectral, siendo

menor el de los diodos láser que el de los LEDs. Esta dependencia del índice de refracción con respecto a la longitud de onda, provoca que ciertas componentes frecuenciales del ancho espectral viajen más rápido que otras, produciéndose un ensanchamiento temporal del pulso óptico. Para reducir este efecto se pueden emplear fibras de dispersión desplazada, diseñar enlaces con dispersión administrada, o bien, mediante el uso de solitones ópticos temporales [3], [4], [5].

Una fibra óptica circular monomodo soporta dos modos separados que están polarizados en dos direcciones ortogonales. Bajo condiciones ideales, es decir, cuando la geometría circular de la fibra se mantiene perfecta a lo largo del enlace, los dos posibles modos no se acoplan entre ellos y las velocidades de propagación de ambos modos son iguales, de tal manera que la fibra se comporta realmente como una fibra monomodo [5]. Sin embargo, las fibras ópticas no son perfectas y existen pequeñas deformaciones en el núcleo que provocan que la fibra soporte dos modos de polarización con velocidades de fase y de grupo ligeramente diferentes [6], [7]. La magnitud y dirección de la asimetría de la fibra puede variar de manera aleatoria a lo largo de la dirección axial, esto causa un acoplamiento aleatorio entre los modos de polarización y el resultado es un ensanchamiento del pulso óptico.

La dispersión por modo de polarización (PMD) afecta a las redes ópticas de muy alta velocidad, así como a los sistemas que utilizan multiplexación densa por división de longitud de onda (DWDM). Si la dispersión PMD supera ciertos límites, el bit error rate aumenta rápidamente, limitando la longitud del enlace y la velocidad de transmisión. Para reducir esta dispersión se requiere del uso de fibras ópticas que puedan mantener la polarización de los dos modos ortogonales. Una fibra óptica que tiene esta característica es la fibra de núcleo elíptico, ya que desacopla las constantes de propagación de los modos ${}_{e}\text{HE}_{1,1}$ y ${}_{o}\text{HE}_{1,1}$. A esta propiedad se le conoce como birrefringencia modal, y es una ventaja que tienen las fibras ópticas elípticas sobre las fibras ópticas circulares [8], [9], [10], [11].

1.1. Objetivo

El objetivo de esta tesis es analizar los modos de propagación LP en las fibras ópticas elípticas de índice abrupto. Para ello es necesario obtener las soluciones (mediante una rutina de cómputo) de la ecuación característica simplificada obtenida por medio de la aproximación de guiado débil.

La solución de la ecuación característica simplificada proporciona las constantes

de propagación de los diferentes modos LP que se pueden propagar por la fibra y mediante el uso de las funciones Mathieu se mostrarán las gráficas de la distribución de la intensidad de la luz en la sección transversal de la fibra óptica elíptica, de tal manera que se puedan comparar con las distribuciones de intensidad en las fibras ópticas circulares de índice abrupto.

1.2. Justificación

Las fibras ópticas elípticas se pueden emplear para las telecomunicaciones ya que tienen la ventaja de preservar la polarización de la luz mientras viaja a lo largo de la fibra [6]–[11], a diferencia de lo que sucede con las fibras ópticas circulares, las cuales pierden la polarización de la luz ya que se produce un acoplamiento entre los modos ortogonales, lo que provoca que exista dispersión por modo de polarización.

Las fibras ópticas elípticas han sido poco exploradas en comparación con las fibras ópticas circulares. Muchos de los resultados han sido obtenidos mediante métodos numéricos. En esta tesis se muestran resultados mediante el uso de las funciones - Mathieu, las cuales son soluciones de la ecuación de onda en coordenadas elípticas.

Este tipo de fibra es una opción que podría mejorar el desempeño de las comunicaciones ópticas, ya que para una fibra óptica circular operando a altas velocidades de transmisión, la dispersión por modo de polarización disminuye el desempeño del enlace óptico, aunque la dispersión cromática haya sido controlada, ya sea mediante el uso de fibras de dispersión desplazada o por medio de solitones.

Por esta razón es importante estudiar los modos de propagación en las fibras ópticas elípticas de índice abrupto, para posteriormente continuar con todo el análisis que ya fue hecho para las fibras ópticas circulares.

1.3. Organización de la tesis

En el capítulo 2 se realiza el estudio de las fibras ópticas circulares de índice abrupto, comenzando con una descripción de las características importantes de la fibra circular, seguida del análisis electromagnético para obtener la ecuación característica y la ecuación característica simplificada mediante la aproximación por guiado débil. En este capítulo también se muestran las gráficas de la distribución de intensidad de algunos modos LP en forma radial y en la sección transversal de la fibra óptica.

El capítulo 3 es una introducción a las funciones Mathieu, aquí se obtiene la ecuación de onda en coordenadas elípticas-cilíndricas así como sus soluciones y finalmente se muestran algunas gráficas de las funciones Mathieu.

En el capítulo 4 se realiza un análisis detallado de la propagación electromagnética en las fibras ópticas elípticas de índice abrupto. Se obtiene la relación exacta de dispersión (ecuación característica), así como la relación aproximada para los modos ${}_e\text{HE}_{m,n}$ y ${}_o\text{HE}_{m,n}$. A partir de esta ecuación se obtienen las gráficas de la distribución de la intensidad de algunos modos LP en la sección transversal de una fibra óptica elíptica.

Finalmente las conclusiones se presentan en el capítulo 5, así como sugerencias para trabajos futuros en esta área de investigación.

Capítulo 2

Modos LP en fibras ópticas circulares

2.1. Fibra óptica circular de índice abrupto

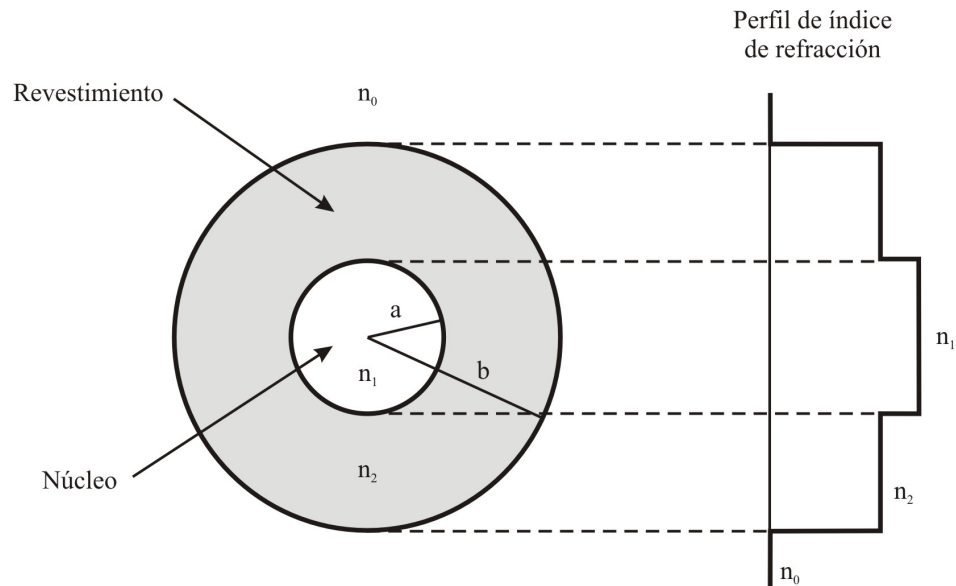


Figura 2.1: Fibra óptica circular de índice abrupto.

La fibra óptica circular está compuesta por un núcleo, que es un material dieléctrico con índice de refracción n_1 , rodeado por otro dieléctrico con índice de refracción n_2 , llamado revestimiento. El corte transversal, así como el perfil de índice de refracción de una fibra óptica, se muestra en la figura 2.1, donde:

n_0 es el índice de refracción del aire.

n_1 es el índice de refracción del núcleo.

n_2 es el índice de refracción del revestimiento.

a es el radio del núcleo.

b es el radio del revestimiento.

Las características físicas de este tipo de guías de onda dieléctricas permiten que sean ampliamente utilizadas para las telecomunicaciones, ya que proporcionan un gran ancho de banda, la atenuación y dispersión en determinadas longitudes de onda son muy bajas, lo cual hace posible la transmisión de información a distancias muy largas. La atenuación es de aproximadamente 0.2 dB/km alrededor de la longitud de onda de $1.55 \mu\text{m}$ y la dispersión en esta longitud de onda también es baja, aproximadamente 17 ps/nm/km [3], [4].

Entre otras características, las fibras ópticas empleadas para las telecomunicaciones, son de un tamaño muy pequeño, el diámetro típico del núcleo y del revestimiento para una fibra óptica monomodo es de 8 y $100 \mu\text{m}$ respectivamente y para una fibra óptica multimodo los diámetros son de 50 y $125 \mu\text{m}$ para el núcleo y revestimiento respectivamente [1]. Sin embargo, como se verá más adelante, el diámetro de la fibra no es el único factor que influye en el número de modos que se pueden propagar por la guía de onda, sino que también la longitud de onda y los índices de refracción del núcleo y del revestimiento pueden llegar a determinar si una fibra óptica es monomodo o multimodo.

El índice de refracción del núcleo es ligeramente mayor al del revestimiento, esta característica es importante porque permite hacer simplificaciones en el análisis de propagación tomando en cuenta que $n_1 \approx n_2$ y es de aquí de donde surgen los modos llamados LP (Linealmente Polarizados) [1], [2].

2.2. Propagación electromagnética en fibra óptica circular

Las características de propagación en las fibras ópticas juegan un papel muy importante en el diseño de un sistema de comunicaciones, ya que uno de los parámetros que limita las comunicaciones por fibras ópticas es la dispersión modal. Mientras más modos sean los que se propaguen, mayor será la dispersión causada, por lo tanto la distancia y la velocidad de transmisión se verán reducidas.

A continuación se muestran los resultados de un análisis de los modos de propagación en las fibras ópticas circulares de índice abrupto. Se comienza con la ecuación de onda en coordenadas circulares-cilíndricas para posteriormente mostrar las soluciones de esta ecuación en el núcleo y en el revestimiento de la fibra. A partir de estas

soluciones, se aplican las condiciones frontera en la interfase núcleo-revestimiento para obtener la ecuación característica y sus soluciones modales resultantes. También se considera el caso en donde $n_1 \approx n_2$, que permite hacer uso de la llamada aproximación de onda escalar (también conocida como la aproximación por guiado débil) para obtener una ecuación característica simplificada y sus resultantes modos LP.

2.2.1. Ecuación de onda en coordenadas circulares-cilíndricas

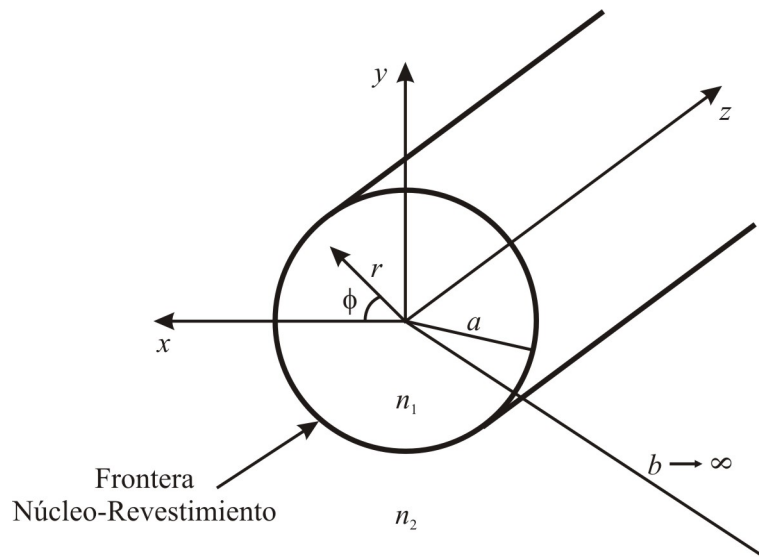


Figura 2.2: Representación de la fibra óptica circular de índice abrupto en coordenadas circulares-cilíndricas.

Para obtener la ecuación de onda en coordenadas circulares-cilíndricas de una fibra óptica de índice abrupto se hacen las siguientes consideraciones:

- Se asume que la propagación es en dirección z .
- No hay variación de la geometría de la guía de onda en la dirección z .
- β es la componente longitudinal del vector de propagación \vec{k} .
- La permitividad (ϵ) es constante.
- El radio del revestimiento de la fibra óptica (b) se extiende hasta ∞ , como se muestra en la figura 2.2, de tal manera que el campo decae exponencialmente y se aproxima a cero en la interfase revestimiento-aire.

Estas consideraciones están de acuerdo con las condiciones reales que están presentes en las fibras ópticas y permiten analizarlas como un problema de valor frontera. Para comenzar el análisis, los campos eléctrico y magnético se pueden escribir como

$$\vec{E} = \vec{E}_0(x, y)e^{-j\beta z}, \quad (2.1)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0(x, y)e^{-j\beta z}. \quad (2.2)$$

Sustituyendo estos campos en las ecuaciones de Maxwell y considerando que ε es una constante, entonces es posible mostrar que las ecuaciones de onda resultantes en coordenadas cartesianas son las siguientes [1]

$$\nabla_T^2 E_z + \kappa^2 E_z = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla_T^2 H_z + \kappa^2 H_z = 0, \quad (2.4)$$

donde

$$\nabla_T^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (2.5)$$

es el operador Laplaciano transversal y $\kappa^2 = k^2 - \beta^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - \beta^2$.

Las ecuaciones (2.3) y (2.4) se pueden transformar a coordenadas circulares para obtener los campos en una fibra óptica circular. Como se puede ver, estas ecuaciones no están acopladas en sus componentes longitudinales. El acoplamiento de los dos campos longitudinales ocurre cuando se satisfacen las condiciones frontera de un problema.

Para convertir las ecuaciones de onda de coordenadas cartesianas a coordenadas circulares-cilíndricas se puede emplear la geometría mostrada en la figura 2.2, de donde se puede ver que

$$x = r \cos \phi,$$

$$y = r \sin \phi,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\phi = \arctan(y/x).$$

A partir de estas ecuaciones se pueden obtener las componentes de campo E_r , E_ϕ , H_r y H_ϕ en términos de E_z y H_z . Así como también las ecuaciones de onda en coordenadas circulares-cilíndricas [1]

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + \kappa^2 E_z = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} + \kappa^2 H_z = 0. \quad (2.7)$$

Las ecuaciones (2.6) y (2.7) tienen la misma forma matemática, por lo tanto, las soluciones que se obtengan para una serán válidas para la otra. Para resolver estas ecuaciones se emplea el método de separación de variables, donde la solución queda en forma de un producto de dos funciones que solamente dependen de una variable, es decir

$$E_z(\phi, r) = A\Phi(\phi)F(r). \quad (2.8)$$

Dado que la fibra tiene simetría circular, entonces se puede proponer una solución para $\Phi(\phi)$ de la forma

$$\Phi(\phi) = e^{j\nu\phi}, \quad (2.9)$$

donde ν es un entero positivo o negativo. De esta forma se puede sustituir la ecuación (2.9) en (2.8) y luego en la ecuación (2.6) y así se obtiene

$$\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} + \left(\kappa^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) F(r) = 0. \quad (2.10)$$

La ecuación (2.10) es una forma de la ecuación diferencial de Bessel. Existen varias soluciones que satisfacen la ecuación de Bessel, por lo tanto se necesita elegir las soluciones de acuerdo con lo siguiente:

1. El campo debe ser finito en el núcleo de la fibra. La función elegida debe ser finita en $r = 0$.
2. El campo en el revestimiento de la fibra debe decaer exponencialmente mientras se aleja del centro de la fibra.

Por lo tanto, para $r < a$

$$E_{z1} = AJ_\nu(\kappa r)e^{j\nu\phi}, \quad (2.11)$$

$$H_{z1} = BJ_\nu(\kappa r)e^{j\nu\phi}, \quad (2.12)$$

y para $r > a$

$$E_{z2} = CH_\nu^{(1)}(j\gamma r)e^{j\nu\phi}, \quad (2.13)$$

$$H_{z2} = DH_\nu^{(1)}(j\gamma r)e^{j\nu\phi}, \quad (2.14)$$

donde

$$\kappa^2 = k_1^2 - \beta^2; \quad k_1^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_1, \quad (2.15)$$

$$\gamma^2 = \beta^2 - k_2^2; \quad k_2^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_2. \quad (2.16)$$

A , B , C y D son constantes desconocidas, los subíndices 1 y 2 están relacionados con el campo en el núcleo y en el revestimiento respectivamente. Los campos transversales E_r , E_ϕ , H_r y H_ϕ en el núcleo y en el revestimiento se pueden obtener a partir de E_z y H_z [1]. De esta manera se obtiene la configuración del campo total en la fibra óptica circular de índice abrupto.

2.2.2. Ecuación característica

La ecuación característica se obtiene al aplicar las condiciones frontera en la interfase núcleo-revestimiento, es decir, en $r = a$ se debe cumplir lo siguiente

$$\left. \begin{array}{l} E_{z1} = E_{z2} \\ E_{\phi1} = E_{\phi2} \\ H_{z1} = H_{z2} \\ H_{\phi1} = H_{\phi2} \end{array} \right\} r = a.$$

Cuando se aplican estas condiciones frontera se produce un sistema de cuatro ecuaciones simultáneas para las constantes A , B , C y D . Este sistema tiene una solución no trivial y se obtiene al resolver el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} J_\nu(\kappa a) & 0 & -H_\nu^{(1)}(j\gamma a) & 0 \\ \frac{\nu\beta}{a\kappa^2} J_\nu(\kappa a) & \frac{j\omega\mu_0}{\kappa} J'_\nu(\kappa a) & \frac{\nu\beta}{a\gamma^2} H_\nu^{(1)}(j\gamma a) & \frac{-\omega\mu_0}{\gamma} H_\nu^{(1)'}(j\gamma a) \\ 0 & J_\nu(\kappa a) & 0 & -H_\nu^{(1)}(j\gamma a) \\ \frac{-j\omega\varepsilon_1}{\kappa} J'_\nu(\kappa a) & \frac{\nu\beta}{a\kappa^2} J_\nu(\kappa a) & \frac{\omega\varepsilon_2}{\gamma} H_\nu^{(1)'}(j\gamma a) & \frac{\nu\beta}{a\gamma^2} H_\nu^{(1)}(j\gamma a) \end{vmatrix} = 0. \quad (2.17)$$

A partir de este determinante se obtiene la ecuación característica de la guía de onda, la cual define los modos que se pueden propagar en la fibra óptica, ya que determina los valores permitidos de β , κ y γ asociados con cada modo de propagación [1].

$$\left[\frac{\varepsilon_1 a \gamma^2}{\varepsilon_2 \kappa} \frac{J'_\nu(\kappa a)}{J_\nu(\kappa a)} + j\gamma a \frac{H_\nu^{(1)'}(j\gamma a)}{H_\nu^{(1)}(j\gamma a)} \right] \left[\frac{a \gamma^2}{\kappa} \frac{J'_\nu(\kappa a)}{J_\nu(\kappa a)} + j\gamma a \frac{H_\nu^{(1)'}(j\gamma a)}{H_\nu^{(1)}(j\gamma a)} \right] = \left[\nu \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \frac{\beta k_2}{\kappa^2} \right]^2. \quad (2.18)$$

En las fibras ópticas circulares de índice abrupto pueden existir los modos transversal eléctrico TE, transversal magnético TM y los modos híbridos HE y EH. Los modos

TE no tienen componentes de campo eléctrico en la dirección de propagación ($E_z = 0$), mientras que los modos TM no tienen componentes de campo magnético en la dirección de propagación ($H_z = 0$). Los modos híbridos HE y EH sí tienen ambas componentes de campo eléctrico y magnético en la dirección de propagación ($E_z \neq 0$ y $H_z \neq 0$).

El número de soluciones (modos de propagación) de la ecuación (2.18) es finito y depende de las características de la fibra óptica, así como de la longitud de onda de la luz. Cuando se obtienen las soluciones de la ecuación característica (2.18) se puede notar que el número de modos incrementa cuando [1]:

- El radio de la fibra aumenta.
- El índice de refracción del núcleo n_1 se incrementa.
- El índice de refracción del revestimiento n_2 disminuye.
- La longitud de onda de la luz λ_0 disminuye.

Se puede definir un parámetro que relacione los índices de refracción del núcleo y del revestimiento, el radio del núcleo y la longitud de onda de la luz, de tal manera que sea posible determinar el número de modos que se pueden propagar conociendo el valor del parámetro

$$V \equiv \frac{2\pi a}{\lambda_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}. \quad (2.19)$$

Empleando este parámetro V y la ecuación característica (2.18), se puede ver que para $V < 2.405$, sólo se puede propagar el modo fundamental $\text{HE}_{1,1}$ [1], [2]. A este tipo de fibra se le conoce como fibra óptica monomodo, aunque realmente el modo $\text{HE}_{1,1}$ está compuesto por dos modos independientes polarizados ortogonalmente.

2.3. Aproximación por guiado débil

Las características de propagación en las fibras ópticas tienen un papel muy importante en el diseño de los sistemas de comunicación por fibras ópticas. Por esta razón es muy importante analizar los modos de propagación.

Las fibras ópticas de índice abrupto empleadas para las telecomunicaciones tienen una diferencia muy pequeña entre los índices de refracción del núcleo y del revestimiento. Esta característica es muy útil en el análisis de propagación, ya que permite hacer

simplificaciones mediante el uso de la aproximación de guiado débil, considerando que $n_1 \approx n_2$. En esta aproximación se considera que los modos son casi transversales y que pueden tener un estado de polarización arbitrario, es decir, los modos se propagan a pequeños ángulos con respecto al eje z , de tal manera que se pueden crear modos cuyas componentes de campo transversales están polarizadas en una dirección. Dichas componentes de campo pueden ser E_y, H_x, E_z y H_z , o bien, tener una polarización ortogonal, donde las componentes de campo serán E_x, H_y, E_z y H_z . En la aproximación por guiado débil, a estos dos modos linealmente polarizados se les llama modos LP y tienen la misma constante de propagación [1], [2].

Cuando se resuelve la ecuación de onda y se aplican las condiciones frontera, se obtienen los modos HE y HE, los cuales tienen seis componentes de campo, y los modos TE y TM, que tienen sólo tres componentes de campo. Los modos LP surgen como una superposición lineal de los modos HE y EH y solamente tienen cuatro componentes de campo [1], [2], [12]. Estos modos son más simples en estructura, pero no son modos exactos de la fibra óptica de índice abrupto, ya que las constantes de propagación de los modos HE y EH son ligeramente diferentes en función de z , lo cual provoca que la superposición de estos modos cambie con respecto a la distancia de propagación. No obstante, los modos LP son útiles para visualizar los campos en la fibra óptica de una manera más sencilla. La correspondencia que hay entre los modos LP y los modos HE y EH es la siguiente [2]

$$\begin{aligned} \text{LP}_{0,m} &= \text{HE}_{1,m}, \\ \text{LP}_{1,m} &= \text{HE}_{2,m}, \quad \text{TM}_{0,m}, \\ \text{LP}_{l,m} &= \text{HE}_{l+1,m}, \quad \text{EH}_{l-1,m}; \quad l \geq 2. \end{aligned}$$

Para obtener los campos de los modos de propagación LP, así como las constantes de propagación relacionadas a cada modo, es necesario aplicar las condiciones frontera a las soluciones de la ecuación de onda y definir al índice de refracción del núcleo y del revestimiento de la fibra óptica como

$$\begin{aligned} n(r) &= n_1, & 0 < r < a, \\ &= n_2, & r > a. \end{aligned}$$

Esta es una buena aproximación, ya que las fibras ópticas empleadas para las telecomunicaciones son de guiado débil, es decir, la diferencia relativa del índice de

refracción $(n_1 - n_2)/n_1 \ll 1$, y en este caso la parte radial de la componente transversal del campo eléctrico satisface la ecuación (2.10) mostrada en la sección 2.2.1, la cual también puede escribirse como

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + \left\{ \left[k_0^2 n^2(r) - \beta^2 \right] r^2 - l^2 \right\} R = 0, \quad (2.20)$$

y el campo transversal completo está dado por

$$\Psi(r, \phi, z, t) = \psi(r, \phi) e^{j(\omega t - \beta z)} = R(r) e^{j(\omega t - \beta z)} \begin{Bmatrix} \cos(l\phi) \\ \sin(l\phi) \end{Bmatrix}, \quad (2.21)$$

donde Ψ puede representar el campo eléctrico o magnético, ya que las ecuaciones de onda (2.6) y (2.7) para dichos campos tienen la misma forma matemática. Las soluciones de la ecuación (2.20) para el núcleo y revestimiento son las siguientes [2]

$$\psi(r, \phi) = \begin{cases} \frac{A}{J_l(U)} J_l \left(\frac{Ur}{a} \right) \begin{bmatrix} \cos(l\phi) \\ \sin(l\phi) \end{bmatrix}; & r < a \\ \frac{A}{K_l(W)} K_l \left(\frac{Wr}{a} \right) \begin{bmatrix} \cos(l\phi) \\ \sin(l\phi) \end{bmatrix}; & r > a \end{cases}. \quad (2.22)$$

Aplicando las condiciones frontera en la interfase núcleo-revestimiento ($r = a$) se obtiene la ecuación característica, cuyas soluciones proporcionan los valores de las constantes de propagación de los modos LP permitidos en la fibra óptica de índice abrupto. La ecuación característica resultante es [2]

$$V\sqrt{1-b} \frac{J_{l-1}(V\sqrt{1-b})}{J_l(V\sqrt{1-b})} = -V\sqrt{b} \frac{K_{l-1}(V\sqrt{b})}{K_l(V\sqrt{b})}; \quad l \geq 1, \quad (2.23)$$

$$V\sqrt{1-b} \frac{J_1(V\sqrt{1-b})}{J_0(V\sqrt{1-b})} = V\sqrt{b} \frac{K_1(V\sqrt{b})}{K_0(V\sqrt{b})}; \quad l = 0, \quad (2.24)$$

donde

$$U = a\sqrt{k_0^2 n_1^2 - \beta^2}, \quad (2.25)$$

$$W = a\sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_2^2}, \quad (2.26)$$

$$V = \sqrt{U^2 + W^2} = k_0 a \sqrt{n_1^2 - n_2^2}, \quad (2.27)$$

$$b = \frac{W^2}{V^2} = \frac{\beta^2 - k_0^2 n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}. \quad (2.28)$$

Para cada valor de l , existirá un número finito de soluciones, las cuales estarán asociadas con una constante de propagación determinada β_m , donde la solución m -ésima corresponderá al modo de propagación $LP_{l,m}$. Cada uno de estos modos tiene una constante de propagación que está en el intervalo $k_0^2 n_2^2 < \beta^2 < k_0^2 n_1^2$, por lo tanto, U y W son reales para todos los modos guiados.

2.4. Modos de propagación LP

Los modos de propagación Linealmente Polarizados (LP) son configuraciones de campo que no son exactos para las fibras ópticas circulares de índice abrupto, ya que estos modos se obtienen realizando una aproximación de la ecuación característica (2.18) considerando que los índices de refracción del núcleo y del revestimiento son iguales ($n_1 = n_2$), de esta manera se obtiene la ecuación característica simplificada (2.23) y (2.24). A partir de estas ecuaciones se obtienen las constantes de propagación de los modos LP, que aunque no sean modos verdaderos, son más fáciles de obtener y ayudan a visualizar la estructura de los campos en una fibra óptica de índice abrupto de una manera más simple.

Las gráficas que se muestran a continuación fueron obtenidas a partir de las ecuaciones (2.22), (2.23) y (2.24), tomando solamente la dependencia azimutal de $\cos(l\phi)$ en la ecuación (2.22) que representa el campo transversal de los modos de propagación $LP_{l,m}$. Los parámetros de la fibra óptica circular que fueron utilizados en las ecuaciones anteriores son los siguientes:

Radio del núcleo de la fibra $a = 25 \mu\text{m}$.

Índice de refracción del núcleo $n_1 = 1.4595$.

Índice de refracción del revestimiento $n_2 = 1.4500$.

Longitud de onda de la luz $\lambda_0 = 1.55 \mu\text{m}$.

2.4.1. Modos $LP_{0,m}$

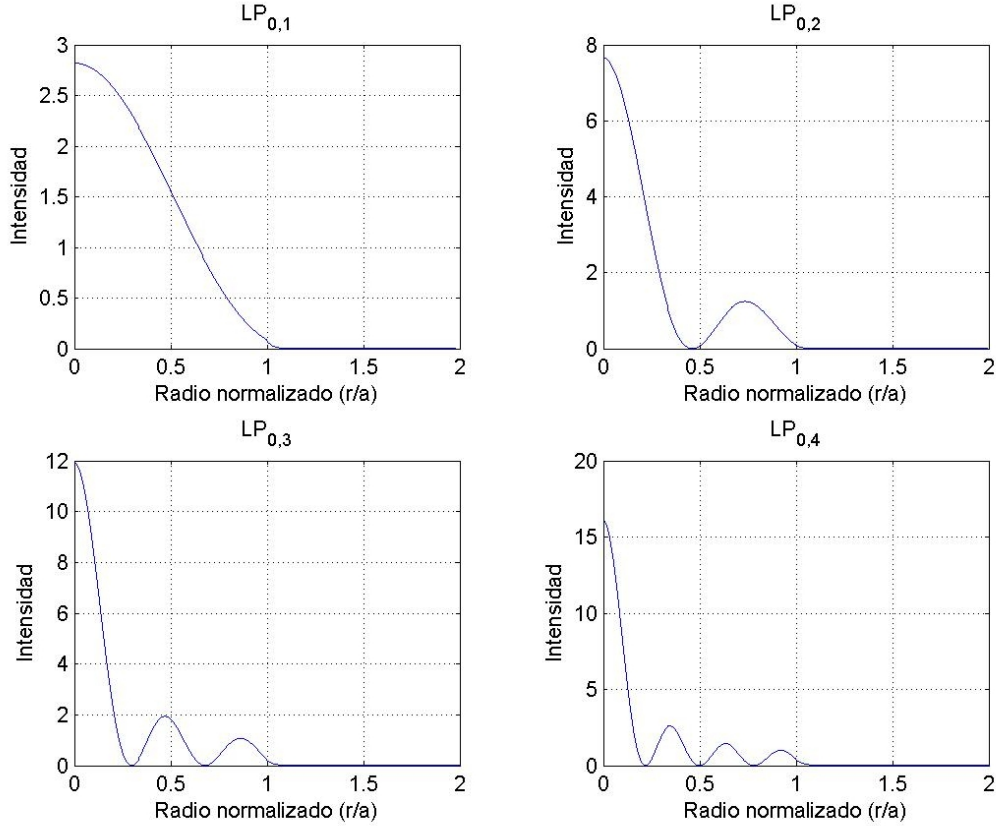


Figura 2.3: Distribución radial de la intensidad (normalizada a la misma potencia) de los modos $LP_{0,1}$, $LP_{0,2}$, $LP_{0,3}$ y $LP_{0,4}$ en una fibra óptica circular de índice abrupto.

Los modos de propagación $LP_{0,m}$ se obtienen empleando la ecuación característica (2.24). Para ello se puede graficar la parte derecha y la parte izquierda de dicha ecuación, de tal manera que las constantes de propagación β_m de cada modo $LP_{0,m}$ se puedan calcular a partir de los puntos de intersección de las dos gráficas. El número de puntos de intersección de las gráficas depende de los índices de refracción del núcleo y del revestimiento, del radio del núcleo de la fibra, así como de la longitud de onda de la luz empleada. Para una fibra óptica monomodo sólo se tiene un punto de intersección que es el que corresponde al modo $LP_{0,1}$.

Las distribuciones de la intensidad a lo largo del radio de la fibra de los modos $LP_{0,m}$ se muestran en la figura 2.3, en donde se puede ver que los modos de orden alto tienen mayor cantidad de luz distribuida en el revestimiento de la fibra, mientras que

la intensidad de la luz del modo $LP_{0,1}$ está distribuida casi completamente en el núcleo de la fibra óptica ($r/a \leq 1$).

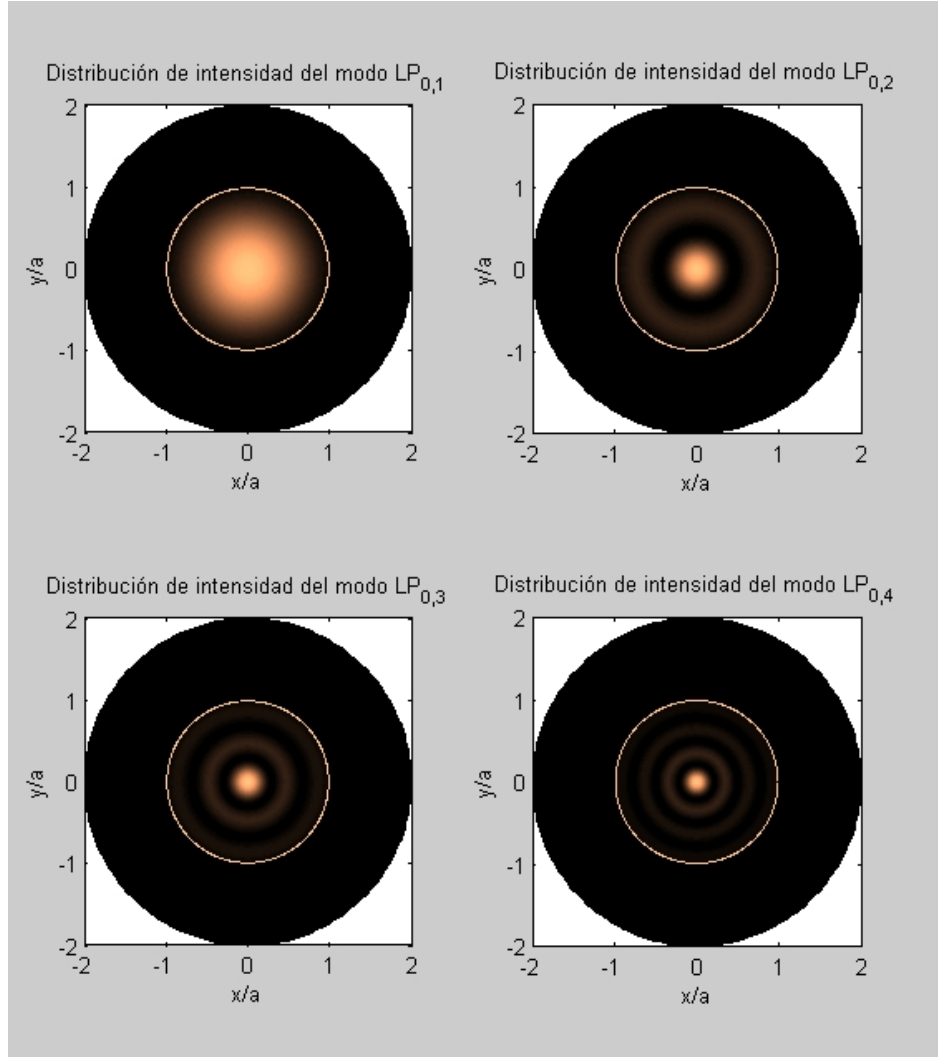


Figura 2.4: *Distribución de la intensidad de los modos $LP_{0,1}$, $LP_{0,2}$, $LP_{0,3}$ y $LP_{0,4}$ en una fibra óptica circular de índice abrupto.*

El modo fundamental $LP_{0,1}$ corresponde al modo $HE_{1,1}$, el cual es el único modo permitido en las fibras ópticas monomodo [1], [2]. Los modos $LP_{0,m}$ tienen dos estados independientes de polarización, es decir, el vector de campo eléctrico puede estar orientado hacia una dirección específica con su vector de campo magnético perpendicular a este. Teniendo esta polarización siempre existirá otra polarización independiente con los vectores de campo eléctrico y magnético ortogonales al primer par [1].

En la figura 2.4 se muestra la distribución de la intensidad de los modos $LP_{0,m}$ en la sección transversal de una fibra óptica circular de índice abrupto. En esta figura se puede ver que mientras se incrementa el orden de los modos de propagación, la distribución de la intensidad de la luz se expande más hacia el revestimiento de la fibra óptica. El círculo de radio unitario indica la interfase núcleo-revestimiento.

2.4.2. Modos $LP_{1,m}$

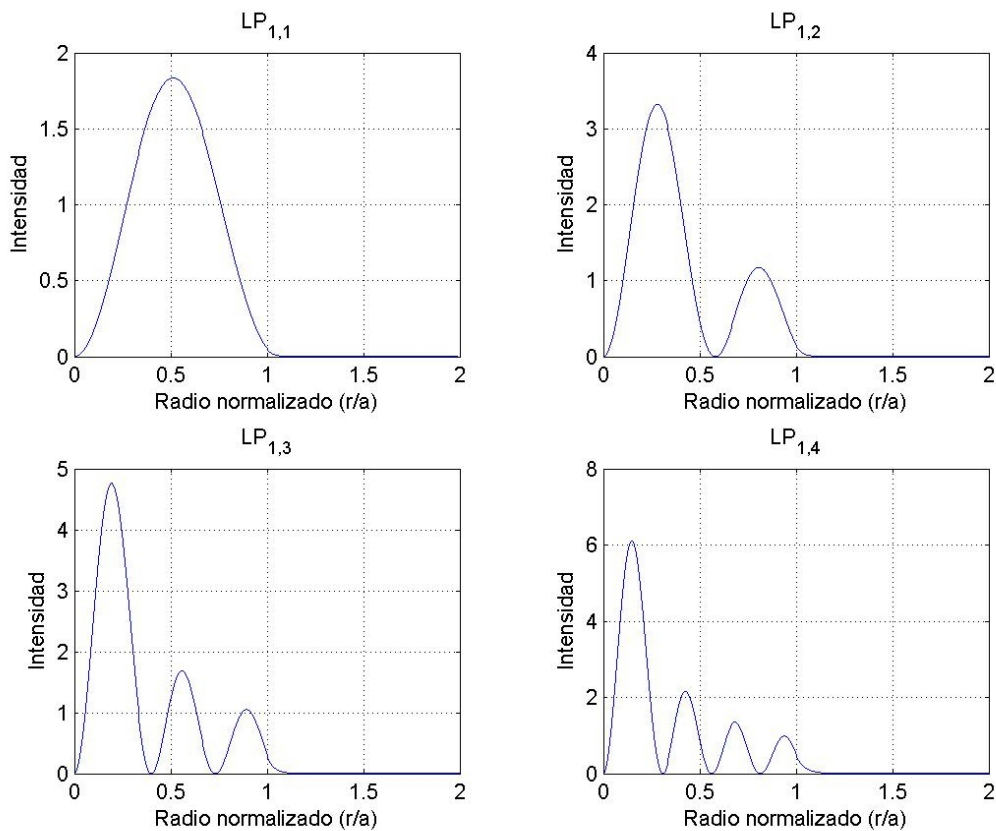


Figura 2.5: Distribución radial de la intensidad (normalizada a la misma potencia) de los modos $LP_{1,1}$, $LP_{1,2}$, $LP_{1,3}$ y $LP_{1,4}$ en una fibra óptica circular de índice abrupto.

Los modos de propagación $LP_{1,m}$ corresponden a la superposición de los modos $HE_{2,m}$ y $TM_{0,m}$ [2]. Estos modos se obtienen a partir de la ecuación característica (2.23) con $l = 1$. Los valores de las constantes de propagación β_m que satisfacen esta ecuación se utilizan en la ecuación (2.22) para poder mostrar las distribuciones de intensidad a

lo largo del radio de la fibra óptica, así como en su sección transversal, como se muestra en las figuras 2.5 y 2.6.

En este caso es posible tener cuatro patrones de distribución de los modos $LP_{1,m}$, ya que para cada estado independiente de polarización se puede tener una dependencia azimutal $\cos(l\phi)$ o $\sin(l\phi)$ de la ecuación (2.22). En la figura 2.6 solamente se muestra la distribución de los modos $LP_{1,m}$ con dependencia azimutal $\cos(l\phi)$.

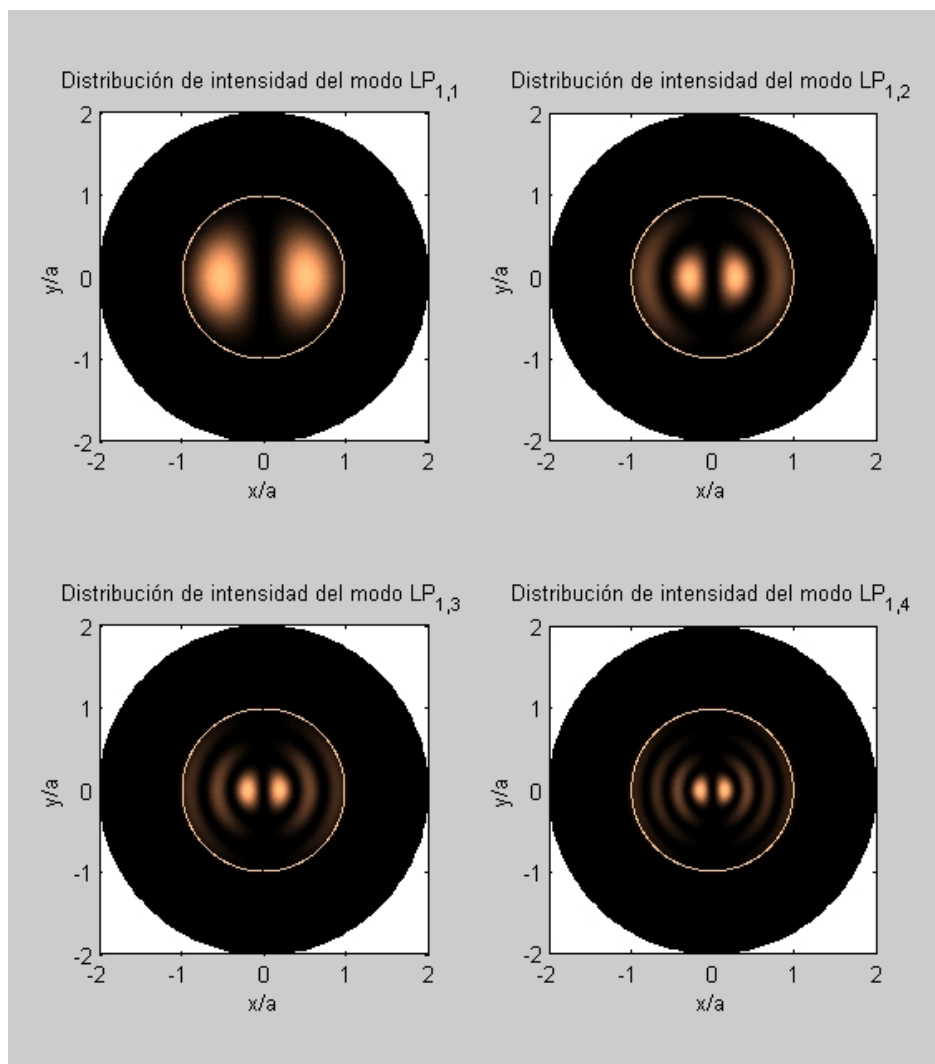


Figura 2.6: *Distribución de la intensidad de los modos $LP_{1,1}$, $LP_{1,2}$, $LP_{1,3}$ y $LP_{1,4}$ en una fibra óptica circular de índice abrupto.*

2.4.3. Modos $LP_{2,m}$

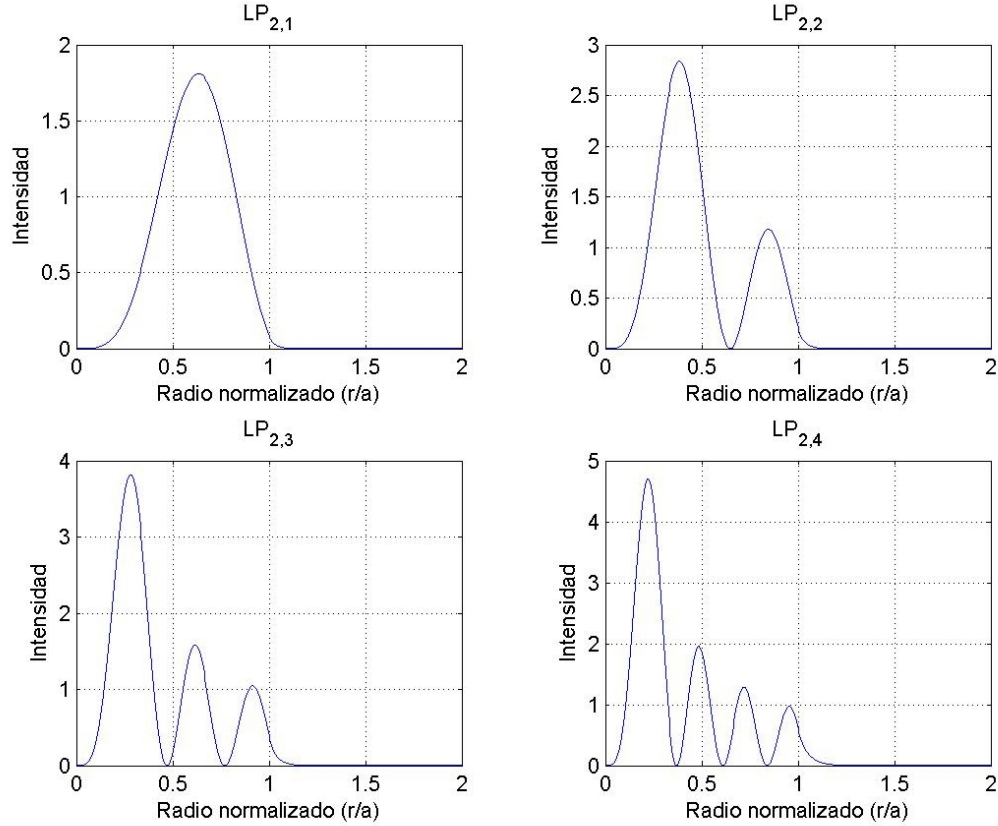


Figura 2.7: Distribución radial de la intensidad (normalizada a la misma potencia) de los modos $LP_{2,1}$, $LP_{2,2}$, $LP_{2,3}$ y $LP_{2,4}$ en una fibra óptica circular de índice abrupto.

La distribución de la intensidad de la luz de los modos $LP_{2,m}$ a lo largo del radio de la fibra óptica se muestra en la figura 2.7 y la distribución de la intensidad en la sección transversal se muestra en la figura 2.8. Para obtener estas gráficas se emplean las ecuaciones (2.22) y (2.23) tomando $l = 2$ en el orden de las funciones Bessel.

Los modos $LP_{2,m}$ corresponden a la superposición de los modos $HE_{3,m}$ y $EH_{1,m}$ [2], [12]. Estos modos, al igual que todos los modos $LP_{l,m}$ para $l \geq 1$, pueden tener cuatro patrones de distribución de los campos de cada modo, debido a que cada polarización independiente puede tener una dependencia azimutal ya sea $\cos(l\phi)$ o $\sin(l\phi)$. En las figuras 2.4, 2.6, 2.8, 2.10 y 2.12, sólo se toma la dependencia de $\cos(l\phi)$ para mostrar la distribución de intensidad de los modos $LP_{0,m}$, $LP_{1,m}$, $LP_{2,m}$, $LP_{3,m}$ y $LP_{4,m}$ respectivamente.

El número de ceros (puntos donde la intensidad de la luz es igual a cero) en la dirección ϕ es igual a $2l$ y el número de ceros en la dirección radial (excluyendo el punto $r = 0$) es igual a $m - 1$ [2]. Esto se puede observar gráficamente en las figuras 2.7 y 2.8 en donde el número de ceros en la dirección ϕ es igual a 4 y el número de ceros en la dirección radial es 0, 1, 2 y 3 para los modos $LP_{2,1}$, $LP_{2,2}$, $LP_{2,3}$ y $LP_{2,4}$ respectivamente.

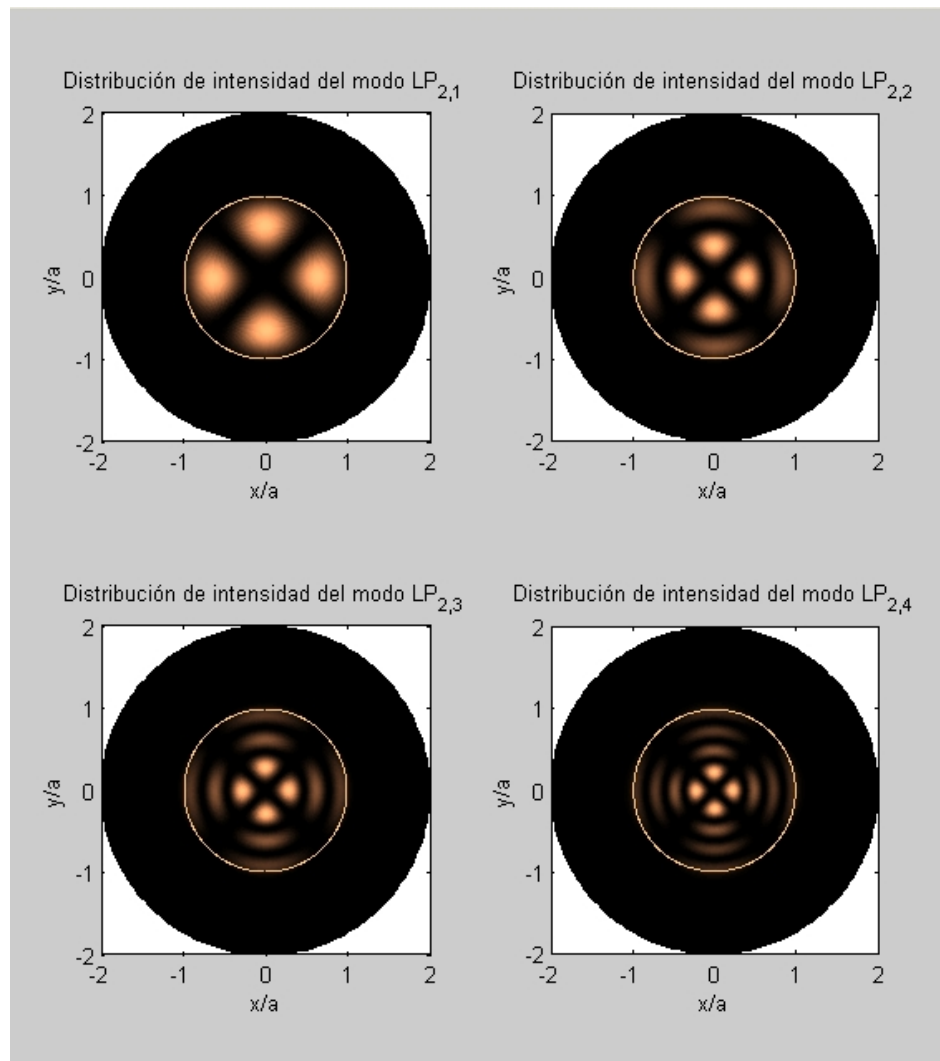


Figura 2.8: *Distribución de la intensidad de los modos $LP_{2,1}$, $LP_{2,2}$, $LP_{2,3}$ y $LP_{2,4}$ en una fibra óptica circular de índice abrupto.*

2.4.4. Modos $LP_{3,m}$

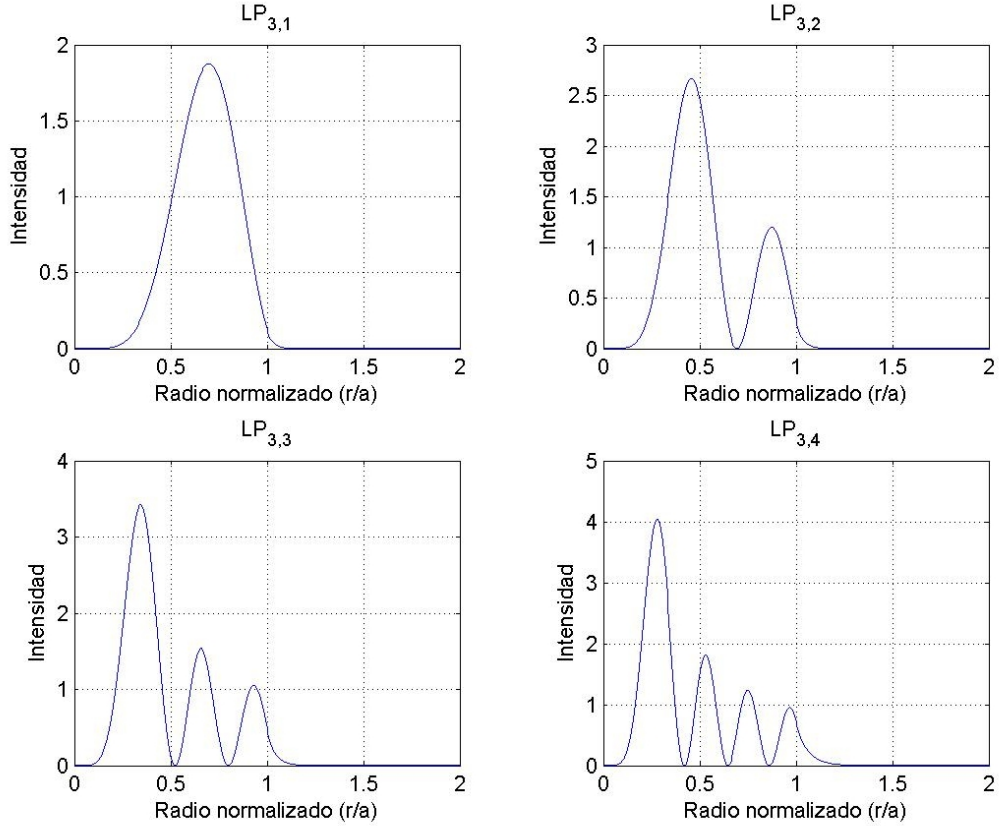


Figura 2.9: *Distribución radial de la intensidad (normalizada a la misma potencia) de los modos $LP_{3,1}$, $LP_{3,2}$, $LP_{3,3}$ y $LP_{3,4}$ en una fibra óptica circular de índice abrupto.*

Las constantes de propagación de los modos $LP_{3,m}$ son obtenidas haciendo $l = 3$ en la ecuación característica (2.23). Estas constantes de propagación se sustituyen en la ecuación (2.22) para poder graficar la distribución de intensidad de la luz radial y en la sección transversal de la fibra óptica circular de índice abrupto, como se muestra en la figura 2.9 y en la figura 2.10.

Los modos $LP_{3,m}$ corresponden a la superposición de los modos de propagación $HE_{4,m}$ y $EH_{2,m}$ [2], [12], los cuales son los modos verdaderos de las fibras ópticas de índice abrupto y se obtienen a partir de la ecuación característica (2.18).

El número de ceros en la dirección ϕ es igual a 6, como se puede ver en la figura 2.10 y el número de ceros en la dirección radial (sin incluir el punto $r = 0$) para los

modos $LP_{3,1}$, $LP_{3,2}$, $LP_{3,3}$ y $LP_{3,4}$ es de 0, 1, 2 y 3 respectivamente, como se puede observar en la figura 2.9.

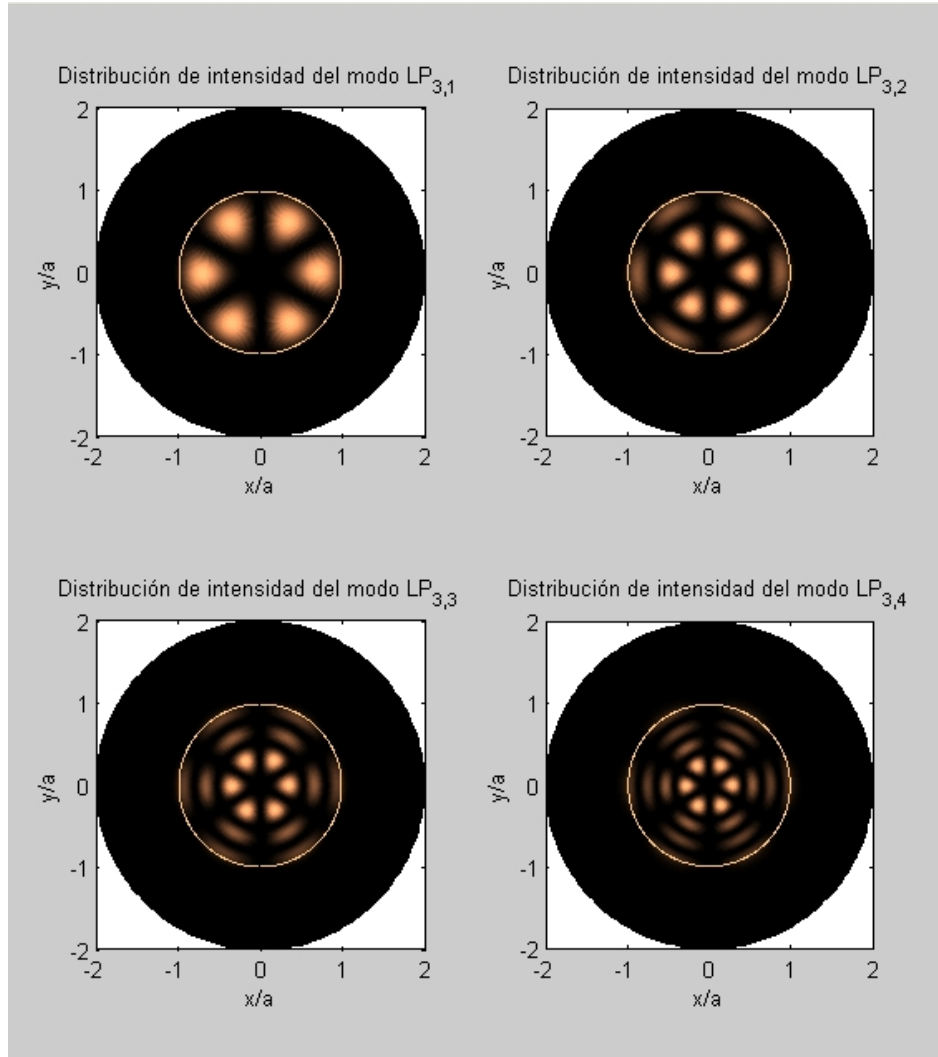


Figura 2.10: *Distribución de la intensidad de los modos $LP_{3,1}$, $LP_{3,2}$, $LP_{3,3}$ y $LP_{3,4}$ en una fibra óptica circular de índice abrupto.*

2.4.5. Modos $LP_{4,m}$

Los modos de propagación $LP_{4,m}$ se obtienen a partir de la solución de la ecuación característica simplificada (2.23) fijando el valor de $l = 4$. Los modos $LP_{4,m}$ corresponden a la superposición de los modos $HE_{5,m}$ y $EH_{3,m}$ [2], [12]. Las distribuciones de intensidad a lo largo del radio de la fibra, así como en la sección transversal, se

muestran en las figuras 2.11 y 2.12.

En estas figuras se puede ver que mientras mayor sea el orden de los modos de propagación $LP_{l,m}$, mayor será el número de ceros que se tengan en la dirección ϕ . También se puede observar que la distribución de la intensidad se expande hacia la frontera núcleo-revestimiento y una mayor parte de la intensidad se localiza en el revestimiento comparada con las distribuciones de intensidad de los modos de menor orden mostradas en las figuras 2.3 - 2.10.

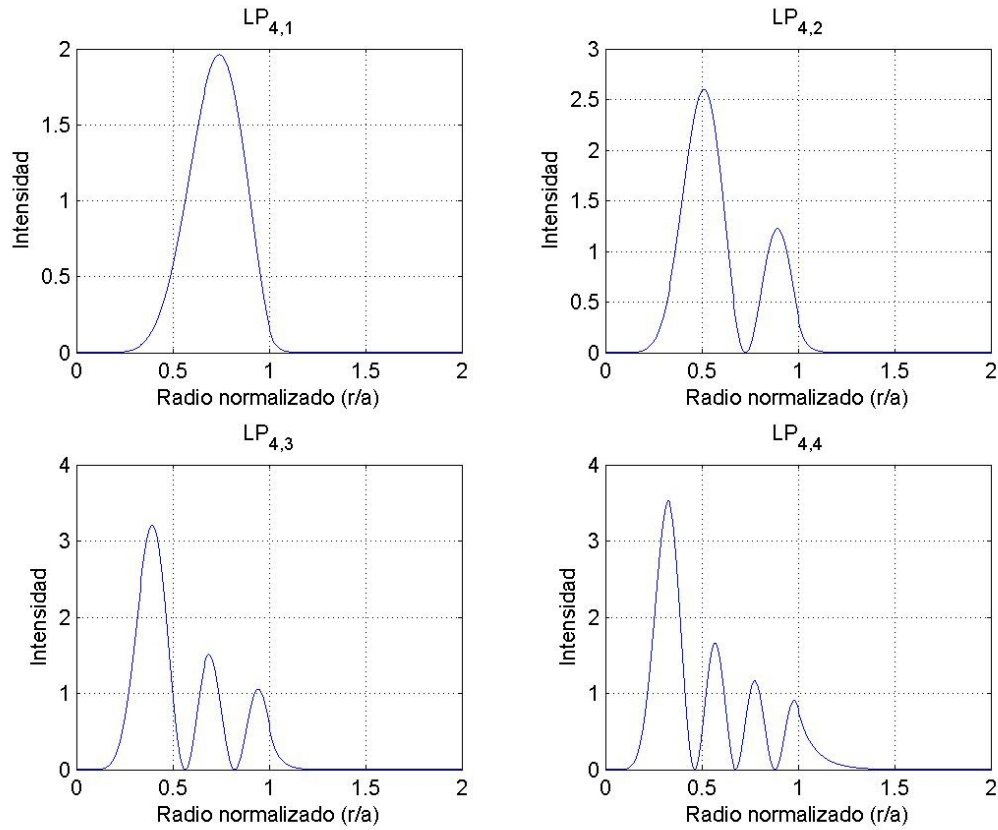


Figura 2.11: Distribución radial de la intensidad (normalizada a la misma potencia) de los modos $LP_{4,1}$, $LP_{4,2}$, $LP_{4,3}$ y $LP_{4,4}$ en una fibra óptica circular de índice abrupto.

El número de modos que se pueden propagar en una fibra óptica circular de índice abrupto puede ser calculado a partir de [2]

$$N \approx \frac{V^2}{2}, \quad (2.29)$$

donde V es un parámetro de las fibras ópticas circulares definido por la ecuación (2.19).

Para todas las gráficas que se muestran en esta sección, el parámetro V es de 16.8643, por lo tanto el número total de modos que se pueden propagar en esta fibra es de aproximadamente 142. En estas gráficas sólo se muestran los primeros modos, sin embargo no son los únicos que se pueden propagar, ya que para cada valor de l existirán muchas soluciones de la ecuación característica, obteniéndose de esta manera todos los modos $LP_{l,m}$ posibles.

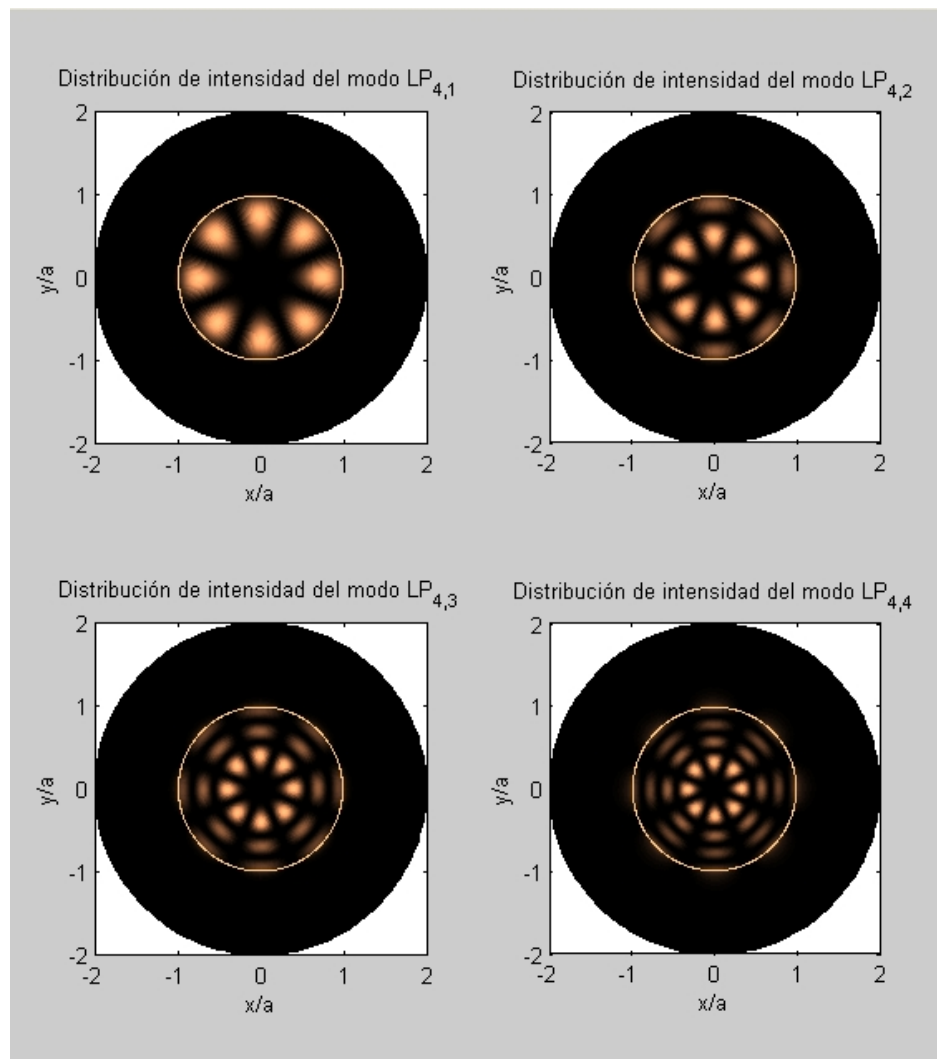


Figura 2.12: Distribución de la intensidad de los modos $LP_{4,1}$, $LP_{4,2}$, $LP_{4,3}$ y $LP_{4,4}$ en una fibra óptica circular de índice abrupto.

Capítulo 3

Fibras ópticas elípticas

3.1. Sistema de coordenadas elípticas-cilíndricas

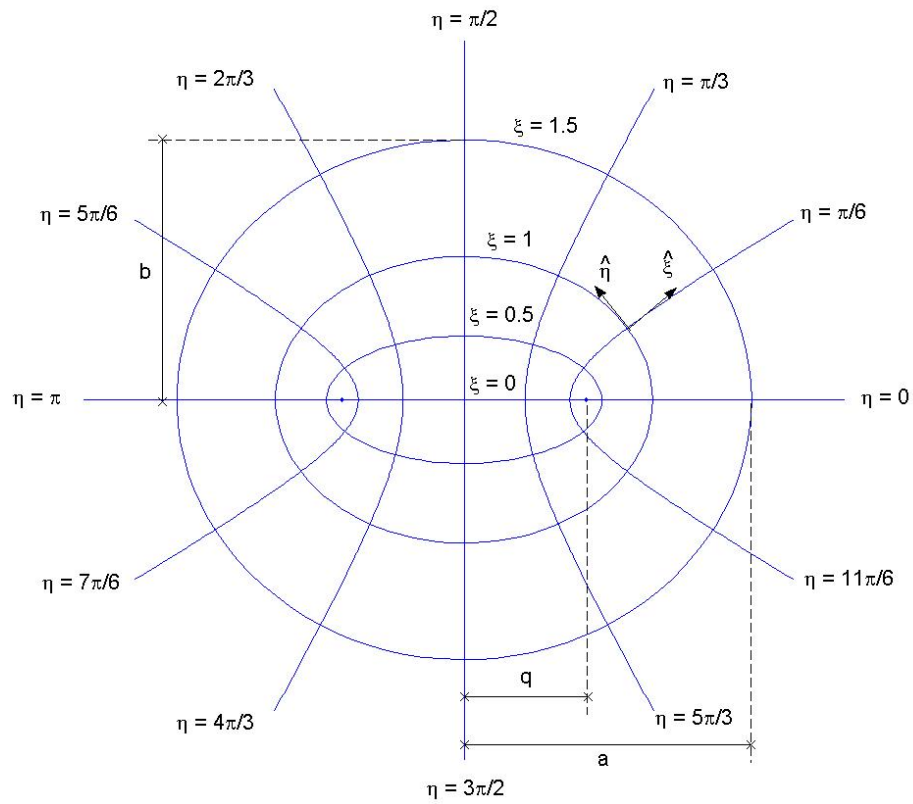


Figura 3.1: Sistema de coordenadas elípticas-cilíndricas.

El sistema de coordenadas elípticas-cilíndricas (ξ, η, z) mostrado en la figura 3.1 está definido por la siguiente transformación de coordenadas [8], [13], [14]

$$x = q \cosh \xi \cos \eta, \quad (3.1)$$

$$y = q \sinh \xi \sin \eta, \quad (3.2)$$

$$z = z, \quad (3.3)$$

donde x , y y z son las coordenadas rectangulares. La constante q puede ser cualquier número real positivo, la cual representa la distancia semifocal de la elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ formada en el plano (x, y) y está definida por

$$q = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad (3.4)$$

donde a es el eje semimayor y b el eje semimenor de la elipse. Estos semiejes pueden ser calculados para un determinado valor de la coordenada ξ como

$$a = q \cosh \xi_0, \quad (3.5)$$

$$b = q \sinh \xi_0. \quad (3.6)$$

La excentricidad de la elipse está definida por

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{q}{a} = \frac{1}{\cosh \xi_0}, \quad (3.7)$$

y sólo puede tomar valores en el intervalo $0 < e < 1$. Cuando $e \rightarrow 1$ la elipse tiende a una recta, y cuando $e \rightarrow 0$ la elipse se convierte en un círculo. Por lo tanto, las coordenadas circulares-cilíndricas son un caso especial de las coordenadas elípticas-cilíndricas.

En el sistema de coordenadas elípticas-cilíndricas, ξ funciona como la coordenada radial y puede tomar los valores $0 \leq \xi < \infty$, mientras que η es una coordenada angular que toma valores en el rango $0 \leq \eta < 2\pi$. La coordenada z es la misma que en las coordenadas cartesianas y cuyos valores están en el intervalo $-\infty < z < \infty$. La superficie $\xi = \xi_0$ forma un cilindro elíptico que tiene la forma

$$\left[\frac{x}{q \cosh \xi_0} \right]^2 + \left[\frac{y}{q \sinh \xi_0} \right]^2 = \cos^2 \eta + \sin^2 \eta = 1, \quad (3.8)$$

mientras que la superficie $\eta = \eta_0$ forma el cilindro hiperbólico

$$\left[\frac{x}{q \cos \eta_0} \right]^2 - \left[\frac{y}{q \sin \eta_0} \right]^2 = \cosh^2 \xi + \sinh^2 \xi = 1. \quad (3.9)$$

Las curvas formadas por estas coordenadas son elipses e hipérbolas homofocales en donde cada punto de intersección (ξ, η) corresponde a un punto en el plano (x, y) .

En el sistema de coordenadas mostrado en la figura 3.1 se puede observar que la hipérbola se aproxima a una línea recta cuando

$$\eta = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0; \quad x \geq q, \quad (3.10)$$

$$\eta = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 0; \quad y \geq 0, \quad (3.11)$$

$$\eta = \pi \quad \Rightarrow \quad y = 0; \quad x \leq -q, \quad (3.12)$$

$$\eta = \frac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 0; \quad y \leq 0, \quad (3.13)$$

también se puede observar que cuando $\xi = 0$, la elipse se aproxima a una recta que une los dos focos, es decir, $y = 0$ para $-q \leq x \leq q$. Por lo tanto, los puntos focales de las elipses $(\pm q, 0)$ en el plano (x, y) , se localizan en el plano elíptico $(\xi, \eta) = (0, 0)$ y en $(0, \pi)$.

El caso en el que la elipse se convierte en un círculo ocurre en el límite cuando q tiende a cero y cuando ξ tiende a infinito, es decir, cuando el eje semimayor es igual al eje semimenor, esto es

$$a = b$$

$$q \cosh \xi_0 = q \sinh \xi_0$$

$$\frac{e^{\xi_0} + e^{-\xi_0}}{2} = \frac{e^{\xi_0} - e^{-\xi_0}}{2}$$

$$e^{-\xi_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_0 \rightarrow \infty.$$

De esta manera se pueden utilizar las ecuaciones (3.1) y (3.2) para determinar la distancia r del origen hacia cualquier punto (ξ, η) en el plano (x, y) , donde $r^2 = x^2 + y^2 = q^2 \cosh^2 \xi \cos^2 \eta + q^2 \sinh^2 \xi \sin^2 \eta$. Cuando ξ es muy grande, entonces $\sinh \xi \rightarrow \cosh^2 \xi$, por lo tanto

$$r \sim q \cosh \xi = q \frac{e^\xi + e^{-\xi}}{2} \sim \frac{q e^\xi}{2}. \quad (3.14)$$

Utilizando las ecuaciones (3.1) y (3.2) se puede mostrar que la coordenada ϕ del sistema de coordenadas cilíndricas-circulares está relacionada con las coordenadas elípticas-cilíndricas por la ecuación

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{q \sinh \xi \sin \eta}{q \cosh \xi \cos \eta}\right). \quad (3.15)$$

3.2. Propagación electromagnética en fibra óptica elíptica

Las fibras ópticas elípticas de índice abrupto están formadas por dos materiales dieléctricos, el núcleo y el revestimiento, como se puede ver en la figura 3.2. El núcleo tiene una forma elíptica, mientras que el revestimiento que lo cubre puede tener una forma circular. El índice de refracción del núcleo es ligeramente mayor al índice de refracción del revestimiento ($n_1 > n_2$).

El análisis de propagación de las fibras ópticas de núcleo elíptico de índice abrupto se lleva a cabo mediante las siguientes consideraciones:

- Se asume que la propagación es en dirección z .
- No hay variación en la forma del núcleo a lo largo de la fibra.

- La permitividad (ε) es constante.
- La interfase núcleo-revestimiento se encuentra en $\xi = \xi_0$.
- El revestimiento de la fibra se extiende hasta infinito, de tal manera que el campo en la interfase revestimiento-aire sea cero.

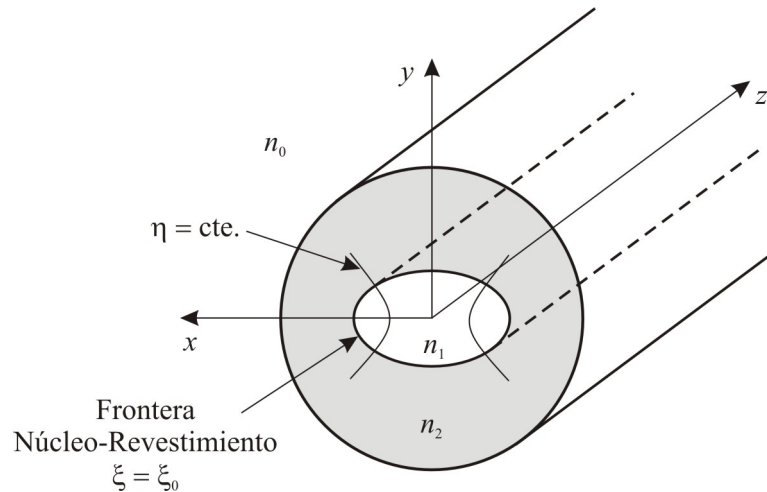


Figura 3.2: *Fibra óptica elíptica de índice abrupto.*

Para realizar el análisis de propagación es necesario transformar la ecuación de onda a coordenadas elípticas-cilíndricas, posteriormente se resuelve aplicando el método de separación de variables. De esta manera se obtienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias (ecuaciones de Mathieu). Las soluciones de estas ecuaciones diferenciales son las funciones Mathieu, a las cuales se les aplican las condiciones frontera en la interfase núcleo-revestimiento para obtener la ecuación característica que determina los modos que se pueden propagar en la fibra óptica elíptica.

3.2.1. Ecuación de onda en coordenadas elípticas

La ecuación de onda en coordenadas elípticas se obtiene haciendo el cambio de coordenadas cartesianas a curvilíneas

$$(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (u_1, u_2, u_3),$$

donde

$$x_1 = x(u_1, u_2, u_3) = q \cosh u_1 \cos u_2, \quad (3.16)$$

$$x_2 = y(u_1, u_2, u_3) = q \sinh u_1 \sin u_2, \quad (3.17)$$

$$x_3 = z(u_1, u_2, u_3) = u_3, \quad (3.18)$$

son las coordenadas cartesianas (x, y, z) , y

$$u_1 = \xi, \quad (3.19)$$

$$u_2 = \eta, \quad (3.20)$$

$$u_3 = z, \quad (3.21)$$

son las coordenadas elípticas-cilíndricas (ξ, η, z) .

Cuando se aplica el operador Laplaciano en coordenadas curvilíneas [13] a la ecuación de onda

$$\nabla^2 \vec{A} + \omega^2 \mu \varepsilon \vec{A} = 0, \quad (3.22)$$

se obtiene la ecuación de onda en coordenadas curvilíneas

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \vec{A}}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \vec{A}}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \vec{A}}{\partial u_3} \right) \right] + \omega^2 \mu \varepsilon \vec{A} = 0, \quad (3.23)$$

donde \vec{A} puede ser el campo eléctrico o el campo magnético, y

$$h_i^2 = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial x_j}{\partial u_i} \right)^2, \quad (3.24)$$

son los factores de escala [13], los cuales pueden ser calculados para las coordenadas elípticas-cilíndricas sustituyendo las ecuaciones (3.16)–(3.21) en la ecuación (3.24)

$$h_1 = q\sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta}, \quad (3.25)$$

$$h_2 = q\sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta}, \quad (3.26)$$

$$h_3 = 1. \quad (3.27)$$

Suponiendo que \vec{A} representa el campo eléctrico y que la dirección de propagación es en z , entonces el campo eléctrico se puede expresar como

$$\vec{E} = \vec{E}_0(\xi, \eta)e^{-\gamma z}. \quad (3.28)$$

Sustituyendo los factores de escala (3.25)–(3.27) y el campo eléctrico (3.28) en la ecuación (3.23), se obtiene la ecuación de onda en coordenadas elípticas-cilíndricas

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial \eta^2} + q^2(\gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon)(\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta)E_z = 0. \quad (3.29)$$

Si se considera una fibra óptica sin pérdidas, es decir

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\beta, \quad (3.30)$$

entonces la ecuación de onda en coordenadas elípticas-cilíndricas se puede expresar como

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + q^2(\omega^2 \mu \varepsilon - \beta^2)(\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta)\phi = 0, \quad (3.31)$$

donde ϕ representa ya sea la componente longitudinal del campo eléctrico (E_z) o del campo magnético (H_z), y

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1; & \xi < \xi_0, \\ \varepsilon_2; & \xi > \xi_0, \end{cases} \quad (3.32)$$

es la constante dieléctrica (permitividad) del núcleo y del revestimiento.

3.2.2. Ecuación de Mathieu Angular

La ecuación de onda en coordenadas elípticas-cilíndricas (3.31) se puede resolver empleando el método de separación de variables, de tal manera que la solución sea de la forma

$$\phi(\xi, \eta) = R(\xi)\Theta(\eta). \quad (3.33)$$

Sustituyendo esta solución en la ecuación (3.31)

$$\Theta \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} + R \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} + q^2(\omega^2 \mu \varepsilon - \beta^2)(\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta)R\Theta = 0,$$

dividiendo entre $R\Theta$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} + q^2(\omega^2 \mu \varepsilon - \beta^2)(\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta) = 0,$$

para simplificar se puede definir la función

$$Q(\xi, \eta) = q^2(\omega^2 \mu \varepsilon - \beta^2)(\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta), \quad (3.34)$$

de tal manera que

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} + Q = 0,$$

y reordenado términos se obtiene

$$\frac{1}{\Theta} \left[\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} + Q\Theta \right] = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2}. \quad (3.35)$$

La ecuación (3.35) aún depende de las variables ξ y η , sin embargo es posible separarla en dos ecuaciones diferenciales que solamente dependan de una variable. Esto se logra derivando la ecuación (3.35) con respecto a η

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{1}{\Theta} \left[\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} + Q\Theta \right] \right\} = 0, \quad (3.36)$$

donde la derivada de la ecuación (3.34) es

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \eta} &= q^2(\omega^2 \mu \varepsilon - \beta^2)(2 \sin \eta) \cos \eta \\ &= q^2(\omega^2 \mu \varepsilon - \beta^2) \sin(2\eta), \end{aligned} \quad (3.37)$$

sustituyendo esta derivada en la ecuación (3.36)

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} \right] + q^2(\omega^2 \mu \varepsilon - \beta^2) \sin(2\eta) = 0,$$

ahora integrando con respecto a η y multiplicando por Θ

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} + \left[c - \frac{q^2}{2}(\omega^2 \mu \varepsilon - \beta^2) \cos(2\eta) \right] \Theta = 0, \quad (3.38)$$

donde c es la constante de separación.

Haciendo

$$\gamma^2 = \frac{q^2}{4}(\omega^2 \mu \varepsilon - \beta^2), \quad (3.39)$$

la ecuación (3.38) se puede escribir como

$$\frac{d^2\Theta}{d\eta^2} + [c - 2\gamma^2 \cos(2\eta)] \Theta = 0. \quad (3.40)$$

La ecuación (3.40) es la ecuación de Mathieu Angular [8], [14], [15], [16]. Cuando $\gamma^2 = 0$, las soluciones de esta ecuación son

$$\Theta(\eta) = \begin{cases} \cos(m\eta) \\ \sin(m\eta) \end{cases}, \quad (3.41)$$

donde m es un número entero positivo.

Si $\gamma^2 \neq 0$, entonces las soluciones de la ecuación de Mathieu Angular son

$$\Theta(\eta) = \begin{cases} \text{ce}_m(\eta, \gamma^2) \\ \text{se}_m(\eta, \gamma^2) \end{cases}, \quad (3.42)$$

las cuales son conocidas como funciones Mathieu de orden m . Las letras “ce” y “se” son abreviaciones de “coseno elíptico” y “seno elíptico”. Estas funciones son periódicas con periodo π para las funciones de orden impar, y 2π para las de orden par. Además, las funciones $\text{ce}_m(\eta, \gamma^2)$ son funciones pares de η ($\text{ce}_m(\eta, \gamma^2) = \text{ce}_m(-\eta, \gamma^2)$), y las funciones $\text{se}_m(\eta, \gamma^2)$ son funciones impares de η ($\text{se}_m(\eta, \gamma^2) = -\text{se}_m(-\eta, \gamma^2)$).

Las soluciones de la ecuación de Mathieu Angular para el núcleo y el revestimiento de la fibra óptica elíptica tienen los argumentos $\gamma^2 = \gamma_1^2$ y $\gamma^2 = -\gamma_2^2$ respectivamente [8], [17], donde

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 &= \frac{q^2(k_1^2 - \beta^2)}{4}; & k_1^2 &= \omega^2 \mu \varepsilon_1, \\ -\gamma_2^2 &= \frac{q^2(k_2^2 - \beta^2)}{4}; & k_2^2 &= \omega^2 \mu \varepsilon_2. \end{aligned} \quad (3.43)$$

3.2.3. Ecuación de Mathieu Radial

La ecuación de Mathieu Radial, o ecuación de Mathieu Modificada, se obtiene a partir de la ecuación de onda en coordenadas elípticas-cilíndricas (3.31) al aplicar el

método de separación de variables. La solución de esta ecuación diferencial proporciona la función $R(\xi)$ que representa la forma de variación del campo a lo largo de la coordenada radial ξ en la fibra óptica de núcleo elíptico.

Para llegar a la ecuación de Mathieu Radial se puede partir de la ecuación (3.35), la cual se puede reescribir como

$$-\frac{1}{R} \left[\frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} + QR \right] = \frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2}, \quad (3.44)$$

derivando con respecto a ξ

$$-\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} + Q \right] = 0, \quad (3.45)$$

donde la derivada de la ecuación (3.34) es

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \xi} &= q^2(\omega^2 \mu \varepsilon - \beta^2)(2 \sinh \xi) \cosh \xi \\ &= q^2(\omega^2 \mu \varepsilon - \beta^2) \sinh(2\xi), \end{aligned} \quad (3.46)$$

sustituyendo la ecuación (3.46) en la ecuación (3.45)

$$-\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} \right] - q^2(\omega^2 \mu \varepsilon - \beta^2) \sinh(2\xi) = 0, \quad (3.47)$$

integrando con respecto a ξ y multiplicando por $-R$ se obtiene la ecuación de Mathieu Radial

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} - \left[c - \frac{q^2}{2}(\omega^2 \mu \varepsilon - \beta^2) \cosh(2\xi) \right] R = 0, \quad (3.48)$$

donde c es la constante de separación.

Sustituyendo la ecuación (3.39), la ecuación de Mathieu Radial se puede expresar como

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} - [c - 2\gamma^2 \cosh(2\xi)] R = 0. \quad (3.49)$$

Esta ecuación también se puede derivar a partir de la ecuación de Mathieu Angular (3.40) haciendo $\eta \rightarrow i\xi$. Las soluciones de la ecuación de Mathieu Radial (3.49) son las funciones de Mathieu modificadas [8], [17], [18]

$$R(\xi) = \begin{cases} \text{Ce}_m(\xi, \gamma_1^2) \\ \text{Se}_m(\xi, \gamma_1^2) \end{cases}, \quad (3.50)$$

para el núcleo de la fibra óptica elíptica, y

$$R(\xi) = \begin{cases} \text{Fek}_m(\xi, -\gamma_2^2) \\ \text{Gek}_m(\xi, -\gamma_2^2) \end{cases}, \quad (3.51)$$

para el revestimiento, donde γ_1^2 y γ_2^2 están definidas por las ecuaciones (3.43).

Se eligen estas funciones de manera similar a la forma de elegir las funciones Bessel en las fibras ópticas circulares, debido a que el campo dentro del núcleo de la fibra ($\xi < \xi_0$) debe ser finito, y las funciones Ce y Se son parecidas a las funciones Bessel J . En el revestimiento ($\xi > \xi_0$) se requiere que el campo disminuya conforme se aleja del núcleo, las funciones Fek y Gek son evanescentes y tienen un comportamiento semejante a las funciones Bessel K , las cuales son empleadas en el revestimiento de la fibra óptica circular de índice abrupto.

3.3. Funciones Mathieu

Las funciones Mathieu fueron investigadas primeramente por el matemático francés Emile Léonard Mathieu al resolver la ecuación de onda en una membrana de forma elíptica moviéndose a través de un fluido. Estas funciones también aparecen en las fibras ópticas cuyo núcleo tiene forma elíptica, como solución de la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} + [c - 2\gamma^2 \cos(2\eta)] \Theta = 0, \quad (3.52)$$

la cual es llamada ecuación de Mathieu ordinaria, o ecuación de Mathieu Angular, y es una de las dos ecuaciones que se obtienen al aplicar el método de separación de variables a la ecuación de onda en coordenadas elípticas (3.31).

La segunda ecuación que se obtiene como resultado del método de separación de variables de la ecuación de onda en coordenadas elípticas-cilíndricas es

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} - [c - 2\gamma^2 \cosh(2\xi)] R = 0, \quad (3.53)$$

y recibe el nombre de ecuación de Mathieu Modificada, o ecuación de Mathieu Radial.

Existen varias soluciones que satisfacen este par de ecuaciones diferenciales, a dichas soluciones se les llama funciones Mathieu. Para el caso de las fibras ópticas elípticas de índice abrupto, las funciones Mathieu que aparecen como solución son las funciones ce , se , Ce , Se , Fek y Gek [8], [15], [16].

3.3.1. Función Mathieu ce_m y se_m

Las funciones ce y se son periódicas, por lo tanto se pueden expandir en series de Fourier

$$ce_{2r}(\eta, \gamma^2) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}^{2r}(\gamma^2) \cos(2k\eta), \quad (3.54)$$

$$ce_{2r+1}(\eta, \gamma^2) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1}^{2r+1}(\gamma^2) \cos((2k+1)\eta), \quad (3.55)$$

$$se_{2r+1}(\eta, \gamma^2) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1}^{2r+1}(\gamma^2) \sin((2k+1)\eta), \quad (3.56)$$

$$se_{2r+2}(\eta, \gamma^2) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+2}^{2r+2}(\gamma^2) \sin((2k+2)\eta), \quad (3.57)$$

donde $r = 0, 1, 2, \dots$, y A y B son los coeficientes de expansión a determinar. Los superíndices de los coeficientes de expansión no son exponentes, simplemente indican si

el orden de la función es par o impar. Las funciones de orden par (ce_{2r}, se_{2r+2}) tienen periodo π , mientras que las funciones de orden impar (ce_{2r+1}, se_{2r+1}) tienen periodo 2π .

La función $ce_m(\eta, \gamma^2)$ es par con respecto a η , por lo tanto se le da el nombre de solución par de la ecuación de Mathieu, y $se_m(\eta, \gamma^2)$ representa la solución impar de la ecuación de Mathieu ya que es una función impar de η [16].

Para evaluar las funciones Mathieu es necesario calcular los coeficientes de expansión A y B , para lo cual se requieren los valores característicos a y b .

Las relaciones de recurrencia para los coeficientes de expansión se obtienen al sustituir las series (3.54)–(3.56) y sus derivadas en la ecuación de Mathieu Angular (3.52). Sin embargo estas relaciones de recurrencia solamente pueden determinar la relación de los coeficientes y no un valor único para cada coeficiente, por lo que es necesario introducir una normalización para poder determinar el valor de los coeficientes, esta normalización puede ser la siguiente [14], [16]

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} ce_m^2(\eta, \gamma^2) d\eta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} se_m^2(\eta, \gamma^2) d\eta = 1. \quad (3.58)$$

Sustituyendo la ecuación (3.54) en la ecuación (3.52)

$$-\sum_{k=1}^{\infty} 4k^2 A_{2k}^{2r}(\gamma^2) \cos(2k\eta) + [a - 2\gamma^2 \cos(2\eta)] \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}^{2r}(\gamma^2) \cos(2k\eta) = 0,$$

donde $c = a$ es el valor característico. Aplicando la identidad trigonométrica

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A + B) + \cos(A - B)],$$

se obtiene

$$\begin{aligned} -\sum_{k=1}^{\infty} 4k^2 A_{2k}^{2r}(\gamma^2) \cos(2k\eta) + a \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}^{2r}(\gamma^2) \cos(2k\eta) \\ - \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}^{2r}(\gamma^2) [\cos[(2k - 2)\eta] + \cos[(2k + 2)\eta]] = 0, \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=1}^{\infty} 4k^2 A_{2k}^{2r}(\gamma^2) \cos(2k\eta) + a \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}^{2r}(\gamma^2) \cos(2k\eta) - \gamma^2 \left[A_0^{2r}(\gamma^2) \cos(2\eta) \right. \\
& \quad \left. + A_2^{2r}(\gamma^2) + \sum_{k=2}^{\infty} A_{2k}^{2r}(\gamma^2) \cos[(2k-2)\eta] + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}^{2r}(\gamma^2) \cos[(2k+2)\eta] \right] = 0, \quad (3.60)
\end{aligned}$$

haciendo el cambio de de variable $2l = 2k - 2$ en la penúltima sumatoria, y $2l = 2k + 2$ en la última sumatoria

$$\begin{aligned}
& aA_0^{2r}(\gamma^2) + \sum_{k=1}^{\infty} (a - 4k^2) A_{2k}^{2r}(\gamma^2) \cos(2k\eta) - \gamma^2 \left[A_0^{2r}(\gamma^2) \cos(2\eta) \right. \\
& \quad \left. + A_2^{2r}(\gamma^2) + \sum_{l=1}^{\infty} \left(A_{2l+2}^{2r}(\gamma^2) + A_{2l-2}^{2r}(\gamma^2) \right) \cos(2l\eta) \right] = 0, \quad (3.61)
\end{aligned}$$

a partir de esta ecuación se obtienen la relación de recurrencia para la función $ce_{2r}(\eta, \gamma^2)$

$$aA_0^{2r} - \gamma^2 A_2^{2r} = 0,$$

$$(a - 4)A_2^{2r} - \gamma^2(2A_0^{2r} + A_4^{2r}) = 0, \quad (3.62)$$

$$[a - (2k)^2] A_{2k}^{2r} - \gamma^2 (A_{2k-2}^{2r} + A_{2k+2}^{2r}) = 0; \quad k \geq 2,$$

y su relación de normalización se obtiene sustituyendo la función ce (3.54) en la normalización (3.58)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} ce_{2r}^2(\eta, \gamma^2) d\eta &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}^{2r}(\gamma^2) \cos(2k\eta) \sum_{l=0}^{\infty} A_{2l}^{2r}(\gamma^2) \cos(2l\eta) d\eta = 1, \\
\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} ce_{2r}^2(\eta, \gamma^2) d\eta &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (A_0^{2r})^2 d\eta \\
& \quad + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} A_{2k}^{2r} A_{2l}^{2r} \int_0^{2\pi} \cos(2k\eta) \cos(2l\eta) d\eta = 1, \quad (3.63)
\end{aligned}$$

aplicando la propiedad de ortogonalidad de las funciones senoidales

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \delta_{m,n}\pi; \quad m, n \text{ enteros,} \quad (3.64)$$

donde

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1; & m = n, \\ 0; & m \neq n, \end{cases} \quad (3.65)$$

es la función delta de Kronecker. Entonces la relación de normalización para la función $ce_{2r}(\eta, \gamma^2)$ es

$$2 (A_0^{2r})^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{2k}^{2r})^2 = 1. \quad (3.66)$$

Haciendo un procedimiento similar se obtienen las relaciones de recursión y las relaciones de normalización para las funciones $ce_{2r+1}(\eta, \gamma^2)$, $se_{2r+1}(\eta, \gamma^2)$, $se_{2r+2}(\eta, \gamma^2)$ restantes [16].

Para $ce_{2r+1}(\eta, \gamma^2)$, la relación de recursión es

$$\begin{aligned} (a - 1 - \gamma^2)A_1^{2r+1} - \gamma^2 A_3^{2r+1} &= 0, \\ [a - (2k + 1)^2] A_{2k+1}^{2r+1} - \gamma^2 (A_{2k-1}^{2r+1} + A_{2k+3}^{2r+1}) &= 0; \quad k \geq 1, \end{aligned} \quad (3.67)$$

y su relación de normalización es

$$\sum_{k=0}^{\infty} (A_{2k+1}^{2r+1})^2 = 1. \quad (3.68)$$

Para $se_{2r+1}(\eta, \gamma^2)$, la relación de recursión es

$$(b - 1 + \gamma^2)B_1^{2r+1} - \gamma^2 B_3^{2r+1} = 0, \quad (3.69)$$

$$[b - (2k + 1)^2] B_{2k+1}^{2r+1} - \gamma^2 (B_{2k-1}^{2r+1} + B_{2k+3}^{2r+1}) = 0; \quad k \geq 1,$$

y su relación de normalización es

$$\sum_{k=0}^{\infty} (B_{2k+1}^{2r+1})^2 = 1. \quad (3.70)$$

Para $se_{2r+2}(\eta, \gamma^2)$, la relación de recursión es

$$(b - 4)B_2^{2r+2} - \gamma^2 B_4^{2r+2} = 0, \quad (3.71)$$

$$[b - (2k + 2)^2] B_{2k+2}^{2r+2} - \gamma^2 (B_{2k}^{2r+2} + B_{2k+4}^{2r+2}) = 0; \quad k \geq 1,$$

y su relación de normalización es

$$\sum_{k=0}^{\infty} (B_{2k+2}^{2r+2})^2 = 1. \quad (3.72)$$

Todas estas relaciones de recursión son un conjunto infinito de ecuaciones lineales algebraicas que se pueden expresar de forma matricial, por ejemplo, la ecuación (3.62) se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} a & -\gamma^2 & & & & & \\ -2\gamma^2 & a - 4 & -\gamma^2 & & & & \\ & -\gamma^2 & a - 16 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & -\gamma^2 & a - (2k)^2 & -\gamma^2 \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0^{2r} \\ A_2^{2r} \\ A_4^{2r} \\ \vdots \\ A_0^{2r} \\ \vdots \end{bmatrix} = 0, \quad (3.73)$$

y para que esta ecuación no tenga una solución trivial se requiere que su determinante sea igual a cero

$$\begin{vmatrix} a & -\gamma^2 & & & & & \\ -2\gamma^2 & a-4 & -\gamma^2 & & & & \\ & -\gamma^2 & a-16 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & -\gamma^2 & a-(2k)^2 & -\gamma^2 \\ & & & & & & \ddots \end{vmatrix} = 0, \quad (3.74)$$

a partir de esta ecuación característica (3.74), se puede determinar el valor característico a para la función Mathieu (3.54). Para un valor γ^2 específico, existe un número infinito de valores característicos, los cuales se pueden denotar como a_{2r} , donde el subíndice corresponde al orden de la función Mathieu.

El coeficiente de expansión $A_{2k}^{2r}(\gamma^2) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, por lo tanto el tamaño del determinante (3.74) se puede trunca hasta $k = N$ para obtener una solución aproximada de a . Haciendo esto, la serie infinita (3.54) que representa la ecuación Mathieu $ce_{2r}(\eta, \gamma^2)$, se convierte en una serie finita de $N + 1$ términos. Mientras más grande sea el valor de N , mayor será la exactitud obtenida. Para una exactitud dada, N aumenta conforme γ^2 y el orden de la función Mathieu se incrementan [16].

En las figuras 3.3 y 3.4 se muestran algunas gráficas de las funciones Mathieu $ce_m(\eta, \gamma^2)$ para diferentes valores de γ^2 , así como para diferentes órdenes de las funciones Mathieu. La nomenclatura de las funciones “ce” es la que emplea McLachlan [15], donde la “c” significa coseno y la “e” se refiere al significado elíptico, ya que esta función es una solución de la ecuación de Mathieu que proviene de un sistema de coordenadas elípticas. Por lo tanto a esta función se le conoce como “coseno elíptico”.

En la figura 3.3 se puede observar que cuando $\gamma^2 \rightarrow 0$, la función Mathieu se aproxima a una función coseno. Esto se debe a que cuando $\gamma^2 = 0$, la ecuación de Mathieu Angular (3.52) se convierte en una ecuación diferencial homogénea de segundo orden con coeficiente constante, por lo tanto sus soluciones serán funciones senoidales y cosenoidales.

Las funciones Mathieu $ce_m(\eta, \gamma^2)$, son funciones periódicas, cuyo periodo puede ser π o 2π , dependiendo del orden de la función. En la figura 3.4 se muestran las gráficas de las funciones Mathieu $ce_m(\eta, \gamma^2)$ de orden $m = 0, 1, 2, 3$ y $\gamma^2 = 10$. De esta figura se puede observar que si la función es de orden par ($m = 2r$), entonces su periodo es π , mientras que para las funciones de orden impar ($m = 2r + 1$), el periodo es 2π .

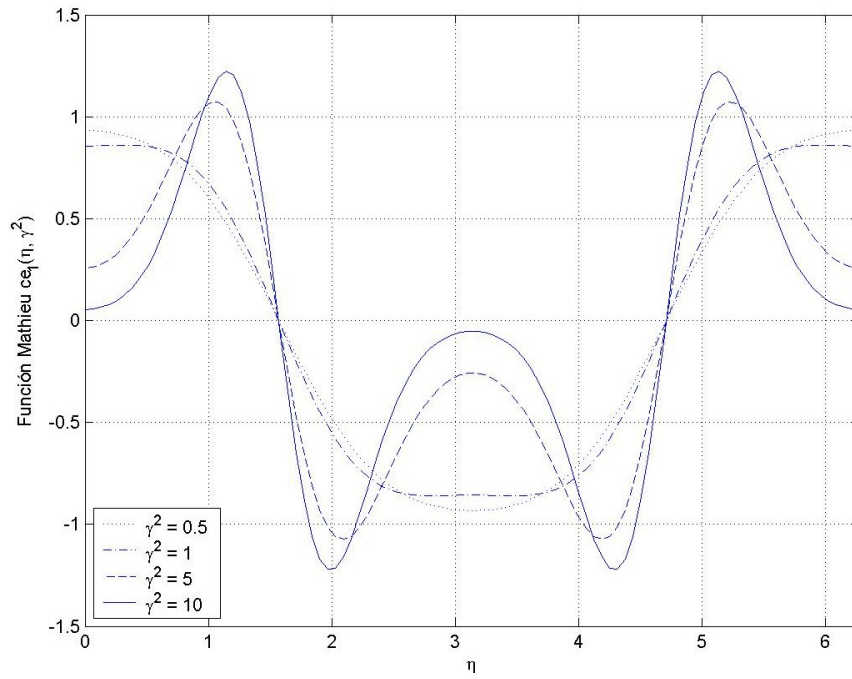


Figura 3.3: *Funciones Mathieu Angulares $ce_1(\eta, \gamma^2)$.*

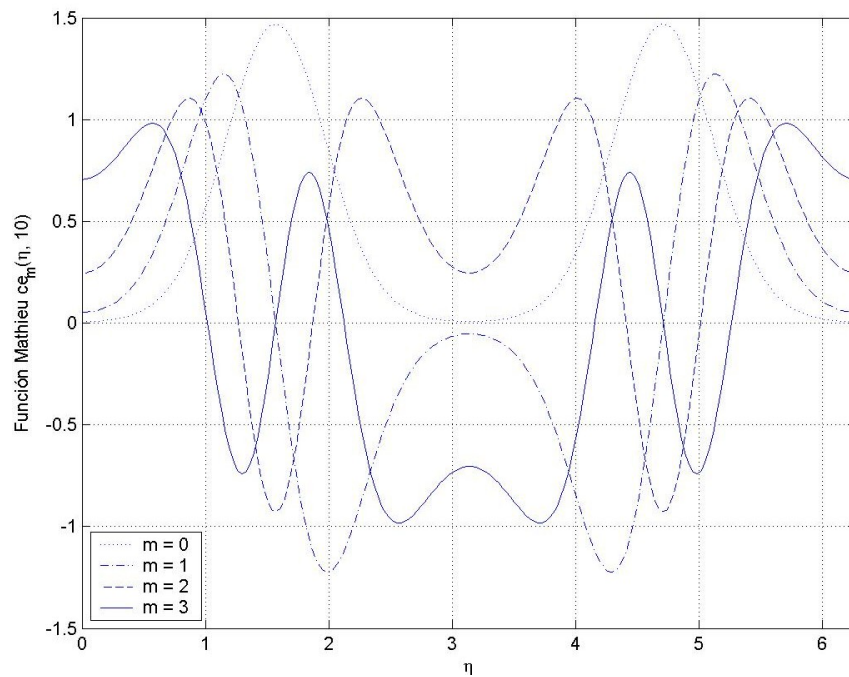


Figura 3.4: *Funciones Mathieu Angulares $ce_m(\eta, 10)$.*

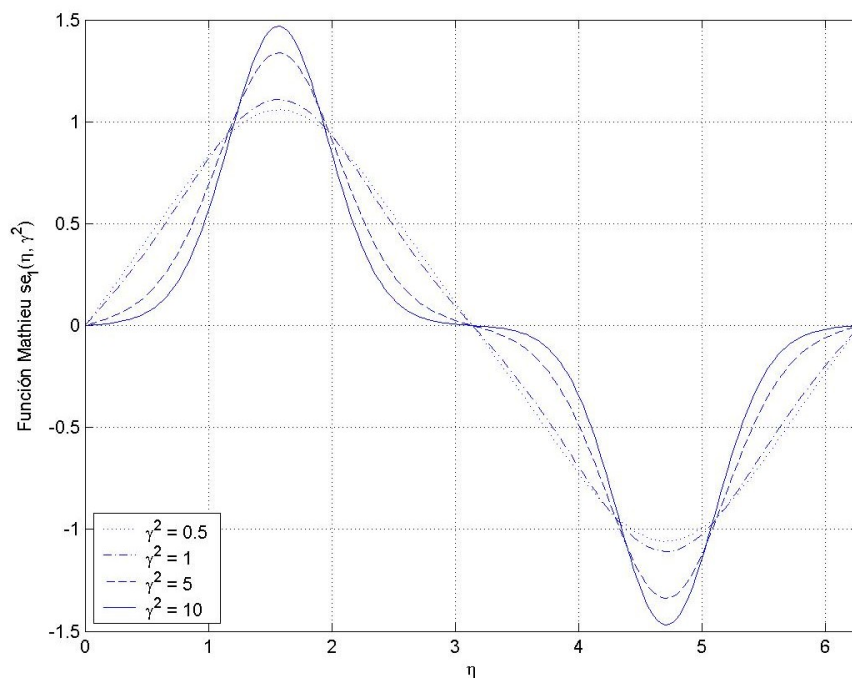


Figura 3.5: *Funciones Mathieu Angulares $se_1(\eta, \gamma^2)$.*

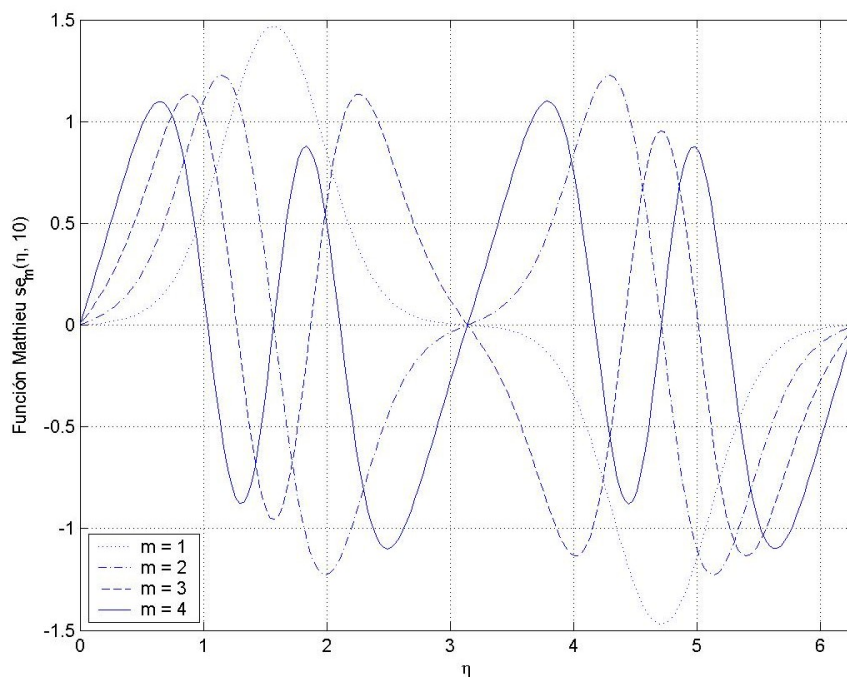


Figura 3.6: *Funciones Mathieu Angulares $se_m(\eta, 10)$.*

En las figuras 3.5 y 3.6 se muestran algunas gráficas de las funciones Mathieu $se_m(\eta, \gamma^2)$ para diferentes valores de γ^2 , así como para diferentes órdenes de las funciones Mathieu.

A esta función “se” se les conoce como “seno elíptico” debido a que dichas funciones provienen de la solución de una ecuación diferencial en coordenadas elípticas y que está representada por una expansión en series de Fourier de funciones senoidales, como se puede ver en las ecuaciones (3.54) y (3.55).

En la figura 3.5 se puede ver que la función $se_m(\eta, \gamma^2)$ tiene una forma parecida a las funciones senoidales cuando $\gamma^2 \rightarrow 0$. Estas funciones, al igual que las funciones $ce_m(\eta, \gamma^2)$, son periódicas con periodo π y 2π para las funciones de orden par e impar respectivamente, como se puede ver en la figura 3.6, en donde se muestran las gráficas de las funciones $se_m(\eta, \gamma^2)$ de orden $m = 1, 2, 3, 4$, para $\gamma^2 = 10$.

3.3.2. Función Mathieu Ce_m y Se_m

Las funciones $Ce_m(\xi, \gamma^2)$ y $Se_m(\xi, \gamma^2)$ son soluciones de la ecuación de Mathieu Radial (3.53), o también conocida como ecuación de Mathieu Modificada. Por esta razón a este tipo de funciones se les llama funciones Mathieu Radiales, o bien, funciones Mathieu Modificadas.

La ecuación de Mathieu Radial puede ser obtenida a partir de la ecuación de Mathieu Angular haciendo $\eta \rightarrow i\xi$. Por lo tanto, las funciones de Mathieu Radiales $Ce_m(\xi, \gamma^2)$ y $Se_m(\xi, \gamma^2)$ se pueden encontrar sustituyendo $i\xi$ por η en las funciones $ce_m(\eta, \gamma^2)$ y $se_m(\eta, \gamma^2)$. Estas funciones están definidas como [15], [16]

$$Ce_m(\xi, \gamma^2) = ce_m(i\xi, \gamma^2), \quad (3.75)$$

$$Se_m(\xi, \gamma^2) = -ise_m(i\xi, \gamma^2), \quad (3.76)$$

utilizando las ecuaciones (3.54)–(3.57) se obtiene

$$\text{Ce}_{2r}(\xi, \gamma^2) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}^{2r}(\gamma^2) \cosh(2k\xi), \quad (3.77)$$

$$\text{Ce}_{2r+1}(\xi, \gamma^2) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1}^{2r+1}(\gamma^2) \cosh[(2k+1)\xi], \quad (3.78)$$

$$\text{Se}_{2r+1}(\xi, \gamma^2) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1}^{2r+1}(\gamma^2) \sinh[(2k+1)\xi], \quad (3.79)$$

$$\text{Se}_{2r+2}(\xi, \gamma^2) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+2}^{2r+2}(\gamma^2) \sinh[(2k+2)\xi]. \quad (3.80)$$

Como se puede ver en estas ecuaciones, las funciones $\text{Ce}_m(\xi, \gamma^2)$ están relacionadas con series que involucran funciones cosenos hiperbólicos, mientras que las funciones $\text{Se}_m(\xi, \gamma^2)$ están expandidas en una serie de funciones senos hiperbólicos, y es por esto que los nombres de las funciones Mathieu Radiales son “Ce” y “Se”.

Los valores característicos $a(\gamma^2)$ y $b(\gamma^2)$, así como los coeficientes de expansión $A(\gamma^2)$ y $B(\gamma^2)$, son exactamente los mismos que para las funciones Mathieu Radiales $\text{ce}_m(\eta, \gamma^2)$ y $\text{se}_m(\eta, \gamma^2)$, debido a que las funciones Mathieu Radiales son las funciones Mathieu Angulares con un argumento imaginario.

Las funciones Mathieu Radiales (3.77)–(3.80) se pueden expandir en una serie de funciones Bessel o en una serie de productos de funciones Bessel, las cuales convergen más rápido que las series (3.77)–(3.80), por lo tanto, el tiempo requerido para calcular estas funciones es menor [14], [15].

En la figura 3.7 se muestran gráficas de la función Mathieu Radial $\text{Ce}_1(\xi, \gamma^2)$ para diferentes valores de γ^2 . En esta figura se puede ver un cierto parecido con las funciones Bessel J , las cuales gobiernan la distribución del campo a lo largo del radio del núcleo de una fibra óptica circular de índice abrupto. De hecho, como se verá más adelante, las funciones Mathieu $\text{Ce}_m(\xi, \gamma^2)$ y $\text{Se}_m(\xi, \gamma^2)$ están presentes dentro del núcleo de la fibra óptica elíptica y determinan la forma de como está distribuido el campo a lo largo de la coordenada radial ξ .

La figura 3.8 muestra las gráficas de diferentes órdenes de la función Mathieu $\text{Ce}_m(\xi, \gamma^2)$ para un valor de $\gamma^2 = 0.1$. Las funciones Mathieu están multiplicadas por un factor de escala A cuyo objetivo es ajustar la amplitud máxima de las funciones a 1.

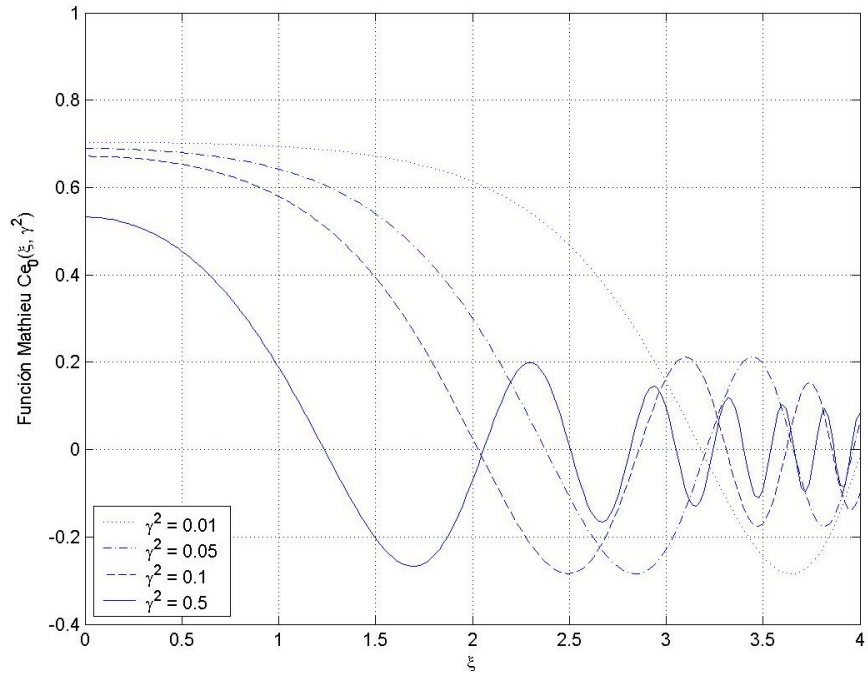


Figura 3.7: Funciones Mathieu Radiales $Ce_0(\xi, \gamma^2)$.

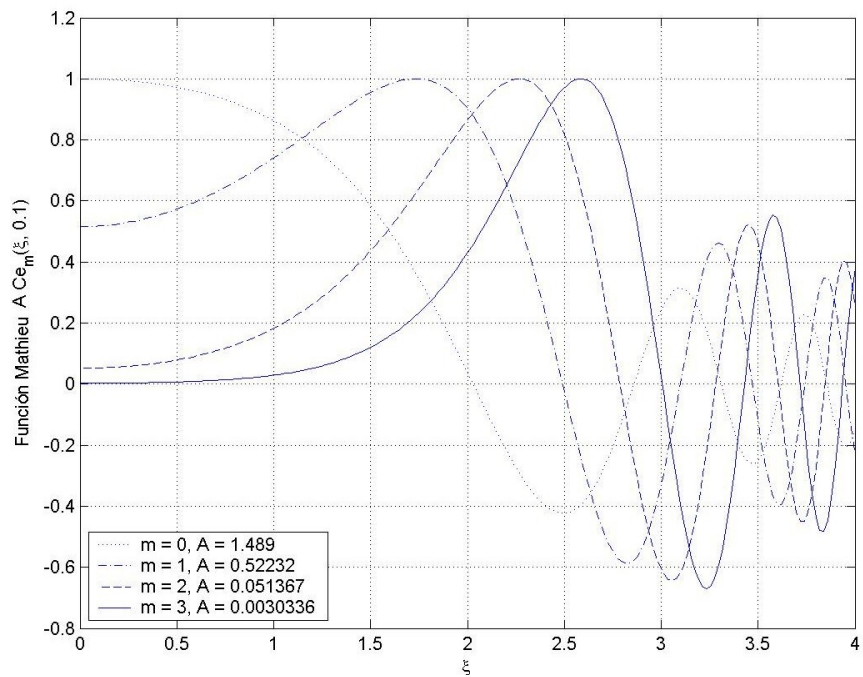


Figura 3.8: Funciones Mathieu Radiales $Ce_m(\xi, 0.1)$ escaladas.

Lo anterior es simplemente para poder visualizar las cuatro gráficas en la misma figura, ya que la amplitud máxima de la función $Ce_3(\xi, 0.1)$ es aproximadamente 500 veces mayor a la amplitud máxima de la función $Ce_0(\xi, 0.1)$. Para obtener las amplitudes reales de las funciones es necesario dividir cada una de esas gráficas entre el factor de escala A correspondiente.

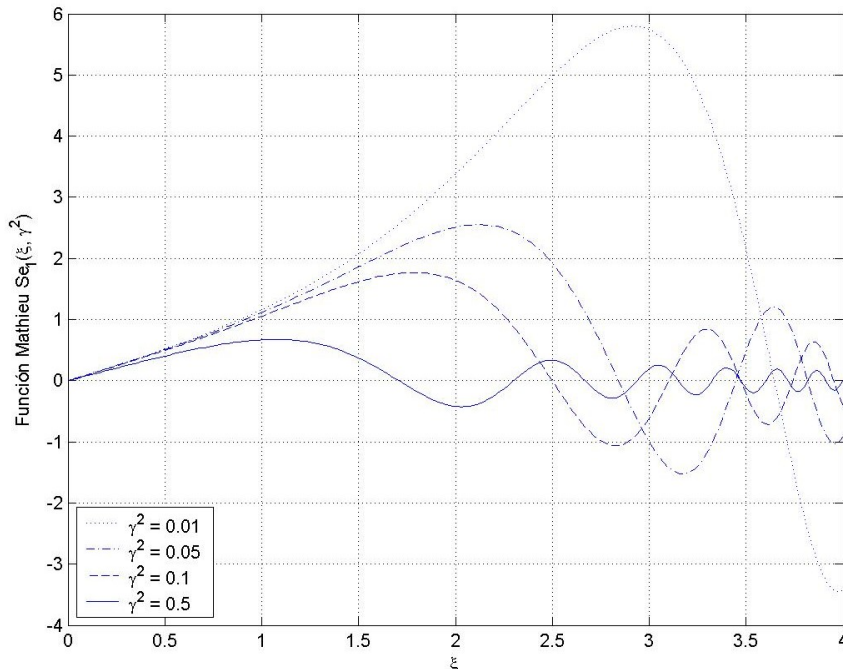


Figura 3.9: *Funciones Mathieu Radiales* $Se_1(\xi, \gamma^2)$.

En la figura 3.9, se muestran cuatro gráficas de las funciones $Se_m(\xi, \gamma^2)$, donde el orden es $m = 1$ y el parámetro $\gamma^2 = 0.01, 0.05, 0.1$ y 0.5 , para cada una de las cuatro gráficas. Se puede observar que la amplitud máxima de estas funciones depende del valor que tome el parámetro γ^2 , mientras menor sea este valor, mayor será la amplitud máxima de la función $Se_m(\xi, \gamma^2)$.

Las funciones $Se_m(\xi, \gamma^2)$, al igual que las funciones $Ce_m(\xi, \gamma^2)$, tienen un comportamiento similar al de las funciones J de Bessel. La amplitud de estas tres funciones tiende a cero cuando $\xi \rightarrow \infty$.

Las gráficas de las funciones $Se_m(\xi, \gamma^2)$ de diferentes órdenes, se muestran en la figura 3.10, en donde el valor del parámetro $\gamma^2 = 0.1$ para las cuatro funciones Mathieu Radiales. Las cuatro funciones están escaladas por un factor A (diferente para cada

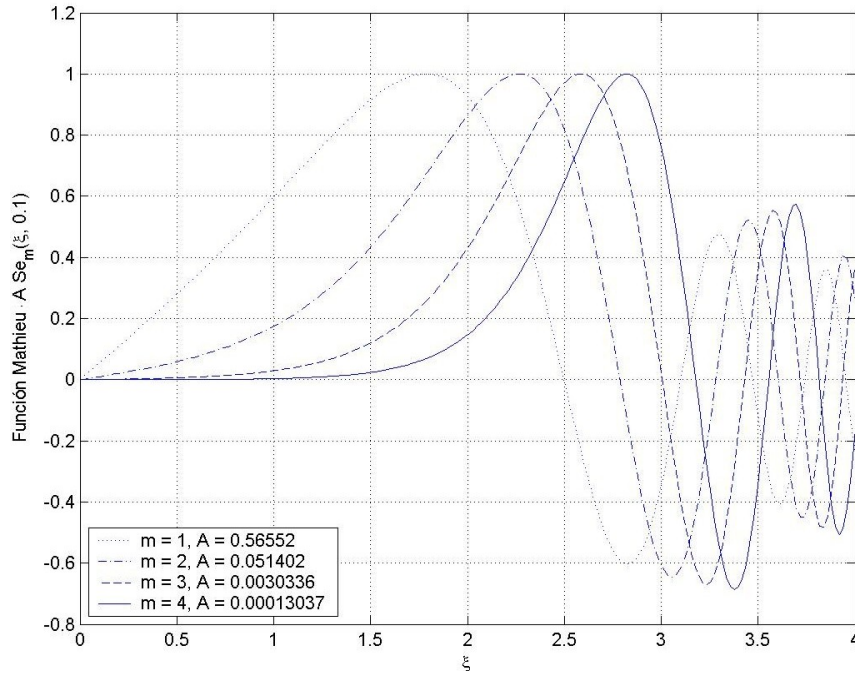


Figura 3.10: *Funciones Mathieu Radiales $Se_m(\xi, 0.1)$ escaladas.*

función), de tal manera que la amplitud máxima de todas las gráficas es la misma. Las amplitudes máximas de las funciones varían demasiado al incrementar el orden, por esto es útil emplear los factores de escala A para poder visualizar las cuatro funciones en la misma figura, ya que la amplitud máxima de la función Mathieu $Se_4(\xi, 0.1)$ es más de 4000 veces mayor que la amplitud máxima de la función $Se_1(\xi, 0.1)$.

3.3.3. Función Mathieu Fek_m y Gek_m

Las funciones $Fek_m(\xi, -\gamma^2)$ y $Gek_m(\xi, -\gamma^2)$ también son soluciones de la ecuación de Mathieu Radial (3.53) cuando $\gamma^2 < 0$. Estas dos funciones Mathieu son del tipo de funciones evanescentes y son las que representan el campo fuera del núcleo de la fibra óptica elíptica [8], [17], [18].

Este tipo de soluciones de la ecuación de Mathieu Radial, se pueden expresar por medio de una expansión en series de funciones Bessel K . Es por esto que a esas soluciones se les llama “Fek” y “Gek”, donde la “k” se refiere a las funciones K de Bessel, “e” a que es una función obtenida para un sistema de coordenadas elípticas y las letras “F” y “G” fueron escogidas de forma arbitraria.

Las funciones $\text{Fek}_m(\xi, -\gamma^2)$ y $\text{Gek}_m(\xi, -\gamma^2)$ se pueden expandir de varias formas, una de ellas es utilizando una serie que contenga simplemente una función K de Bessel, o bien, se pueden representar como una serie de productos de funciones Bessel [15]. Por lo tanto, las funciones $\text{Fek}_m(\xi, -\gamma^2)$ y $\text{Gek}_m(\xi, -\gamma^2)$ se pueden expresar como

$$\text{Fek}_{2r}(\xi, -\gamma^2) = C_{2r} \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}^{2r} I_k(v_1) K_k(v_2), \quad (3.81)$$

$$\text{Fek}_{2r+1}(\xi, -\gamma^2) = C_{2r+1} \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1}^{2r+1} [I_k(v_1) K_{k+1}(v_2) - I_{k+1}(v_1) K_k(v_2)], \quad (3.82)$$

$$\text{Gek}_{2r+1}(\xi, -\gamma^2) = D_{2r+1} \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1}^{2r+1} [I_k(v_1) K_{k+1}(v_2) + I_{k+1}(v_1) K_k(v_2)], \quad (3.83)$$

$$\text{Gek}_{2r+2}(\xi, -\gamma^2) = D_{2r+2} \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+2}^{2r+2} [I_k(v_1) K_{k+2}(v_2) - I_{k+2}(v_1) K_k(v_2)], \quad (3.84)$$

donde

$$C_{2r} \equiv \frac{(-1)^r}{\pi(A_0^{2r})^2} \text{ce}_{2r}(0, \gamma^2) \text{ce}_{2r}\left(\frac{\pi}{2}, \gamma^2\right), \quad (3.85)$$

$$C_{2r+1} \equiv \frac{(-1)^r}{\pi\gamma(B_1^{2r+1})^2} \text{se}'_{2r+1}(0, \gamma^2) \text{se}_{2r+1}\left(\frac{\pi}{2}, \gamma^2\right), \quad (3.86)$$

$$D_{2r+1} \equiv \frac{(-1)^{r+1}}{\pi\gamma(A_1^{2r+1})^2} \text{ce}_{2r+1}(0, \gamma^2) \text{ce}'_{2r+1}\left(\frac{\pi}{2}, \gamma^2\right), \quad (3.87)$$

$$D_{2r+2} \equiv \frac{(-1)^{r+1}}{\pi\gamma^2(B_2^{2r+2})^2} \text{se}'_{2r+2}(0, \gamma^2) \text{se}'_{2r+2}\left(\frac{\pi}{2}, \gamma^2\right), \quad (3.88)$$

y

$$v_1 \equiv \gamma e^{-\xi}, \quad (3.89)$$

$$v_2 \equiv \gamma e^{\xi}, \quad (3.90)$$

son abreviaciones empleadas para simplificar las ecuaciones (3.81)–(3.84).

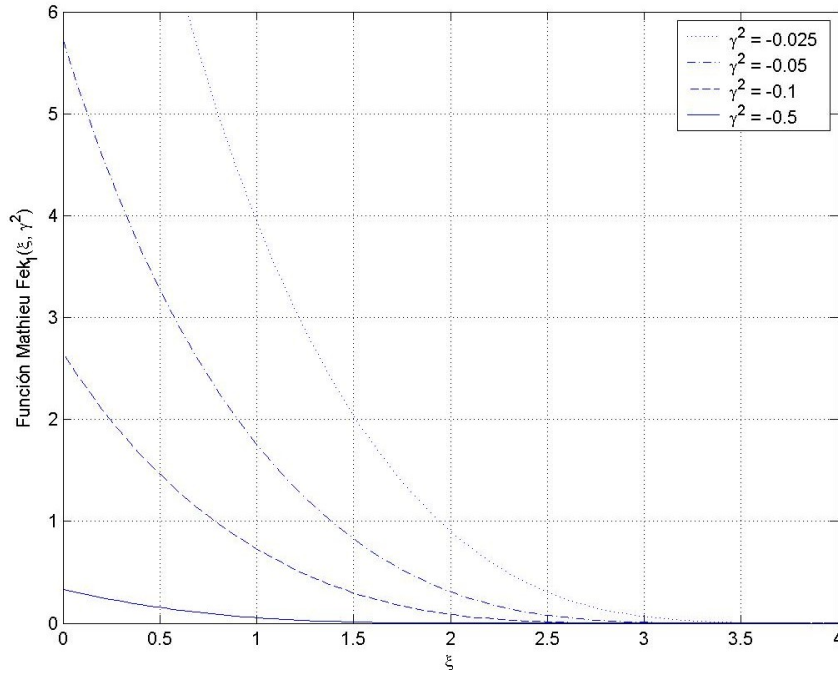


Figura 3.11: *Funciones Mathieu Radiales evanescentes* $Fek_1(\xi, \gamma^2)$.

En la figura 3.11 se muestran las gráficas de la función $Fek_m(\xi, -\gamma^2)$ de orden $m = 1$ y para diferentes valores de γ^2 . Esta función, al igual que la función $Gek_m(\xi, -\gamma^2)$, decaen de forma similar a las funciones K de Bessel, las cuales son empleadas en las fibras ópticas circulares para expresar el campo en el revestimiento. En esta figura se puede ver que las funciones cuya $|\gamma^2| \rightarrow 0$ tienen una amplitud más grande en $\xi = 0$ y además su decaimiento es más rápido.

Las gráficas de las funciones $Fek_m(\xi, -\gamma^2)$, para diferentes órdenes y un valor fijo de $\gamma^2 = -0.5$, se muestran en la figura 3.12. En ella se puede ver que mientras más grande sea el orden m de la función Mathieu Radial, mayor será su amplitud en $\xi = 0$ y su decaimiento será más rápido.

En las figuras 3.13 y 3.14 se muestran las gráficas de las funciones Mathieu Radiales $Gek_m(\xi, -\gamma^2)$ para diferentes valores de γ^2 y diferentes órdenes m , respectivamente. Se puede notar que su comportamiento es muy parecido al de las funciones $Fek_m(\xi, -\gamma^2)$. Estas dos funciones son las que modelan el campo en el revestimiento de la fibra óptica elíptica de índice abrupto para los modos pares e impares, debido a que la intensidad

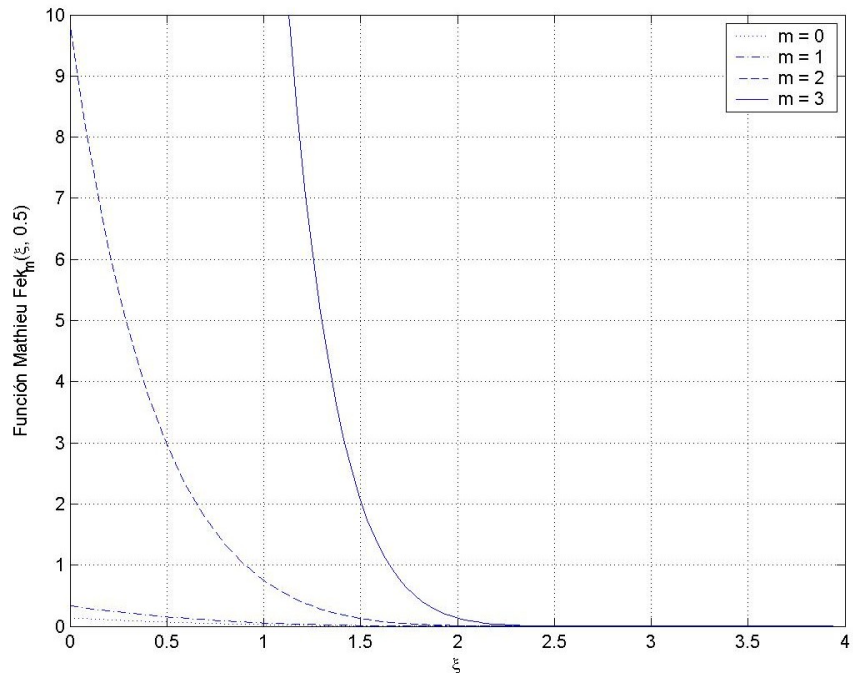


Figura 3.12: *Funciones Mathieu Radiales evanescentes* $Fek_m(\xi, 0.5)$.

de la luz decae rápidamente mientras se aleja de la interfase núcleo-revestimiento de la fibra óptica.

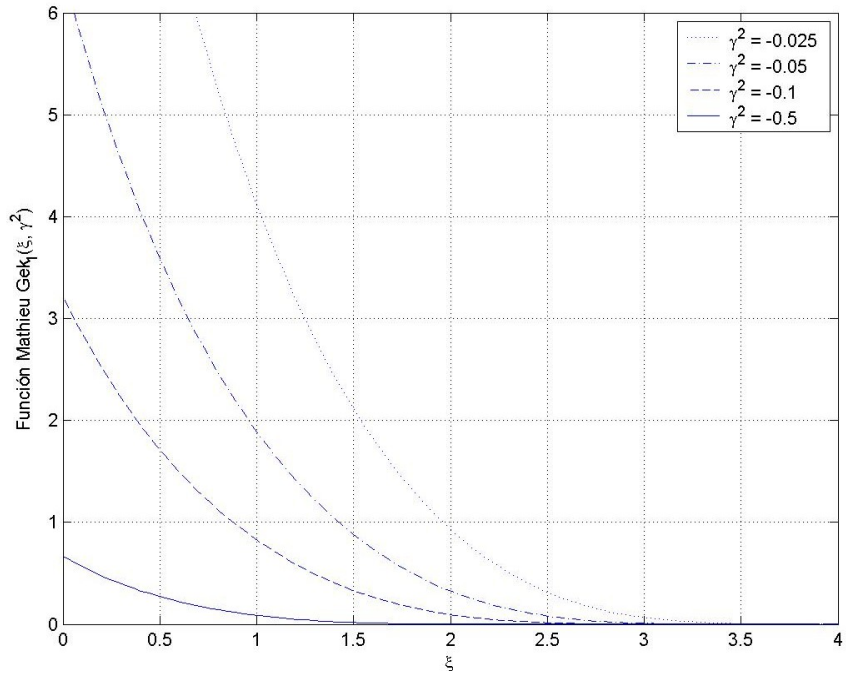


Figura 3.13: *Funciones Mathieu Radiales evanescentes $Gek_1(\xi, \gamma^2)$.*

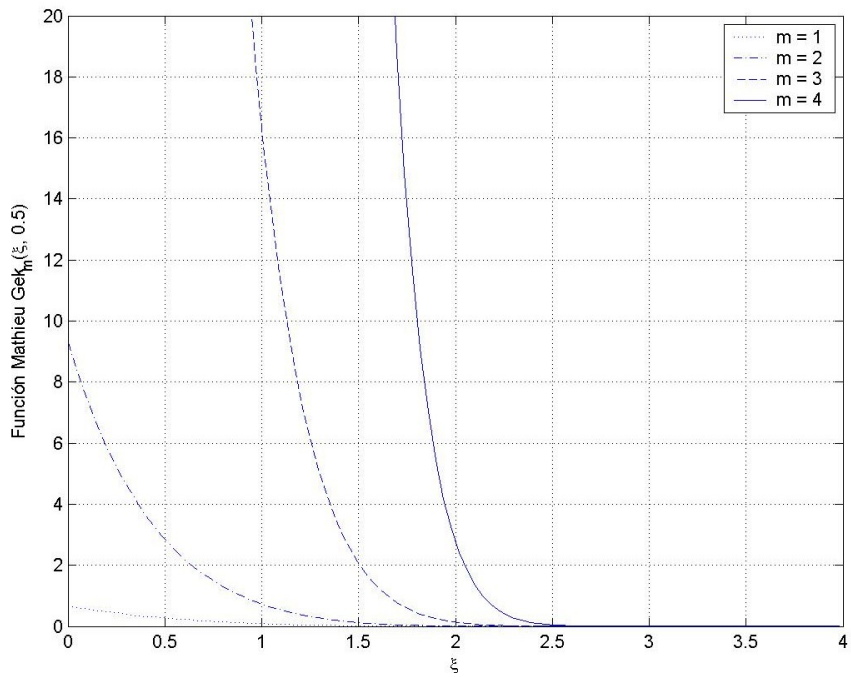


Figura 3.14: *Funciones Mathieu Radiales evanescentes $Gek_m(\xi, 0.5)$.*

Capítulo 4

Modos LP en fibras ópticas elípticas

4.1. Ecuación característica

Las soluciones de la ecuación de onda en coordenadas elípticas-cilíndricas (3.31) se obtienen sustituyendo las soluciones de las ecuaciones de Mathieu Angular y Radial (3.42), (3.50) y (3.51) en la solución (3.33) propuesta por el método de separación de variables. Por lo tanto, las soluciones pares e impares apropiadas para la ecuación de onda son:

Para el núcleo ($0 \leq \xi \leq \xi_0$)

$$\phi_1 = \begin{cases} \text{Ce}_m(\xi, \gamma_1^2) \text{ce}_m(\eta, \gamma_1^2) & \text{(solución par)} \\ \text{Se}_m(\xi, \gamma_1^2) \text{se}_m(\eta, \gamma_1^2) & \text{(solución impar)} \end{cases}, \quad (4.1)$$

y para el revestimiento ($\xi_0 \leq \xi < \infty$)

$$\phi_2 = \begin{cases} \text{Fek}_m(\xi, -\gamma_2^2) \text{ce}_m(\eta, -\gamma_2^2) & \text{(solución par)} \\ \text{Gek}_m(\xi, -\gamma_2^2) \text{se}_m(\eta, -\gamma_2^2) & \text{(solución impar)} \end{cases}, \quad (4.2)$$

donde,

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 &= \frac{q^2(k_1^2 - \beta^2)}{4}; & k_1^2 &= \omega^2 \mu \varepsilon_1, \\ -\gamma_2^2 &= \frac{q^2(k_2^2 - \beta^2)}{4}; & k_2^2 &= \omega^2 \mu \varepsilon_2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Las condiciones frontera requieren que las componentes tangenciales del campo eléctrico y magnético, E_z , E_η , H_z y H_η , sean continuas en la interfase núcleo-revestimiento ($\xi = \xi_0$). Para satisfacer esta condición es necesario que ambas componentes longitudinales del campo eléctrico y magnético estén presentes, es decir, $E_z \neq 0$ y $H_z \neq 0$ [8], [17], [18]. Por lo tanto, en las fibras ópticas elípticas de índice abrupto, solamente pueden existir los modos híbridos HE y EH, a diferencia de las fibras ópticas circulares, en donde además de estos dos tipos de modos, se pueden propagar los modos transversal eléctrico TE y transversal magnético TM.

Otra característica que tienen las fibras ópticas elípticas es que debido a su asimetría es posible que existan dos tipos de modos, los pares (${}_e\text{HE}_{m,n}$) y los impares (${}_o\text{HE}_{m,n}$).

Los campos longitudinales eléctrico y magnético, E_z y H_z , se pueden expresar como la suma de las componentes longitudinales de todos los modos que se pueden propagar en una fibra óptica elíptica. Por lo tanto, las expresiones generales de los campos longitudinales para una onda ${}_e\text{HE}_{m,n}$ son [17], [18]:

Para el núcleo ($0 \leq \xi \leq \xi_0$)

$${}_eH_{z1} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m C e_m(\xi, \gamma_1^2) c e_m(\eta, \gamma_1^2) e^{j\beta z}, \quad (4.4)$$

$${}_eE_{z1} = \sum_{m=1}^{\infty} B_m S e_m(\xi, \gamma_1^2) s e_m(\eta, \gamma_1^2) e^{j\beta z}, \quad (4.5)$$

y para el revestimiento ($\xi_0 \leq \xi < \infty$)

$${}_eH_{z2} = \sum_{r=0}^{\infty} L_r F e_k r(\xi, -\gamma_2^2) c e_r(\eta, -\gamma_2^2) e^{j\beta z}, \quad (4.6)$$

$${}_eE_{z2} = \sum_{r=1}^{\infty} P_r G e_k r(\xi, -\gamma_2^2) s e_r(\eta, -\gamma_2^2) e^{j\beta z}, \quad (4.7)$$

donde A_m , B_m , L_m y P_m son constantes arbitrarias. Todas las componentes transversales se pueden obtener a partir de las ecuaciones de Maxwell, las cuales quedan en función de las componentes longitudinales (ver Apéndice A).

Para obtener la ecuación característica es necesario aplicar las condiciones frontera, es decir, en la interfase núcleo-revestimiento ($\xi = \xi_0$) se debe cumplir

$${}_e H_{z1} = {}_e H_{z2} , \quad (4.8)$$

$${}_e H_{\eta 1} = {}_e H_{\eta 2} , \quad (4.9)$$

$${}_e E_{z1} = {}_e E_{z2} , \quad (4.10)$$

$${}_e E_{\eta 1} = {}_e E_{\eta 2} . \quad (4.11)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.4) y (4.6) en (4.8) y utilizando las expansiones

$$\begin{aligned} ce_r(\eta, -\gamma_2^2) &= \sum_{n=0}^{\infty} ' \alpha_{r,n} ce_n(\eta, \gamma_1^2), \\ se_r(\eta, -\gamma_2^2) &= \sum_{n=1}^{\infty} ' \beta_{r,n} se_n(\eta, \gamma_1^2), \\ \frac{d}{d\eta} ce_m(\eta, \gamma_1^2) &= \sum_{n=1}^{\infty} ' \chi_{m,n} se_n(\eta, \gamma_1^2), \\ \frac{d}{d\eta} se_m(\eta, \gamma_1^2) &= \sum_{n=0}^{\infty} ' \nu_{m,n} ce_n(\eta, \gamma_1^2), \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde el signo ' en las sumatorias significa que n solamente puede tomar valores pares si r o m es par, y valores impares si r o m es impar. Las constantes $\alpha_{r,n}$, $\beta_{r,n}$, $\chi_{m,n}$ y $\nu_{m,n}$ se muestran en el Apéndice B.

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} A_m Ce_m(\xi_0, \gamma_1^2) ce_m(\eta, \gamma_1^2) e^{j\beta z} &= \sum_{r=0}^{\infty} L_r Fek_r(\xi_0, -\gamma_2^2) ce_r(\eta, -\gamma_2^2) e^{j\beta z}, \\ \sum_{m=0}^{\infty} A_m Ce_m(\xi_0, \gamma_1^2) ce_m(\eta, \gamma_1^2) &= \sum_{r=0}^{\infty} L_r Fek_r(\xi_0, -\gamma_2^2) \sum_{n=0}^{\infty} ' \alpha_{r,n} ce_n(\eta, \gamma_1^2), \end{aligned}$$

multiplicando por $ce_s(\eta, \gamma_1^2)$ e integrando con respecto a η de 0 a 2π

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \text{Ce}_m(\xi_0, \gamma_1^2) \int_0^{2\pi} \text{ce}_m(\eta, \gamma_1^2) \text{ce}_s(\eta, \gamma_1^2) d\eta \\ = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} ' L_r \text{Fek}_r(\xi_0, -\gamma_2^2) \alpha_{r,n} \int_0^{2\pi} \text{ce}_n(\eta, \gamma_1^2) \text{ce}_s(\eta, \gamma_1^2) d\eta, \end{aligned}$$

ahora utilizando la propiedad de ortogonalidad de las funciones Mathieu [14], [15]

$$\int_0^{2\pi} \text{ce}_m(\eta, \gamma_1^2) \text{ce}_n(\eta, \gamma_1^2) = \int_0^{2\pi} \text{se}_m(\eta, \gamma_1^2) \text{se}_n(\eta, \gamma_1^2) = \delta_{m,n} \pi, \quad (4.13)$$

donde $\delta_{m,n}$ es la función delta de Kronecker definida por la ecuación (3.65).

Por lo tanto, cuando $m = n = s$

$$A_s \text{Ce}_s(\xi_0, \gamma_1^2) \pi = \sum_{r=0}^{\infty} ' L_r \text{Fek}_r(\xi_0, -\gamma_2^2) \alpha_{r,s} \pi,$$

haciendo el cambio $n = s$

$$A_n \text{Ce}_n(\xi_0, \gamma_1^2) = \sum_{r=0}^{\infty} ' L_r \text{Fek}_r(\xi_0, -\gamma_2^2) \alpha_{r,n}. \quad (4.14)$$

Realizando un desarrollo similar, sustituyendo las ecuaciones (4.5) y (4.7) en la condición (4.10) y empleando la expansión de $\text{se}_r(\eta, -\gamma_2^2)$ mostrada en (4.12), se obtiene

$$B_n \text{Se}_n(\xi_0, \gamma_1^2) = \sum_{r=1}^{\infty} ' P_r \text{Gek}_r(\xi_0, -\gamma_2^2) \beta_{r,n}. \quad (4.15)$$

Para las condiciones frontera (4.9) y (4.11) se requieren los campos tangenciales ${}_e E_\eta$ y ${}_e H_\eta$, los cuales se obtienen a partir de las ecuaciones de Maxwell (ver Apéndice A) y están definidos por

$$\begin{aligned}
{}^e H_{\eta_1} = & \frac{j\beta q^2}{4\gamma_1^2} \left[-\frac{\omega\varepsilon_1}{\beta h_1} \sum_{m=1}^{\infty} B_m \text{Se}'_m(\xi, \gamma_1^2) \text{se}_m(\eta, \gamma_1^2) \right. \\
& \left. - \frac{1}{h_1} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \text{Ce}_m(\xi, \gamma_1^2) \text{ce}'_m(\eta, \gamma_1^2) \right] e^{j\beta z}, \tag{4.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^e E_{\eta_1} = & \frac{j\beta q^2}{4\gamma_1^2} \left[-\frac{1}{h_1} \sum_{m=1}^{\infty} B_m \text{Se}_m(\xi, \gamma_1^2) \text{se}'_m(\eta, \gamma_1^2) \right. \\
& \left. + \frac{\omega\mu}{\beta h_1} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \text{Ce}'_m(\xi, \gamma_1^2) \text{ce}_m(\eta, \gamma_1^2) \right] e^{j\beta z}, \tag{4.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^e H_{\eta_2} = & -\frac{j\beta q^2}{4\gamma_2^2} \left[-\frac{\omega\varepsilon_2}{\beta h_1} \sum_{r=1}^{\infty} P_r \text{Gek}'_r(\xi, -\gamma_2^2) \text{se}_r(\eta, -\gamma_2^2) \right. \\
& \left. - \frac{1}{h_1} \sum_{r=0}^{\infty} L_r \text{Fek}_r(\xi, -\gamma_2^2) \text{ce}'_r(\eta, -\gamma_2^2) \right] e^{j\beta z}, \tag{4.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^e E_{\eta_2} = & -\frac{j\beta q^2}{4\gamma_2^2} \left[-\frac{1}{h_1} \sum_{r=1}^{\infty} P_r \text{Gek}_r(\xi, -\gamma_2^2) \text{se}'_r(\eta, -\gamma_2^2) \right. \\
& \left. + \frac{\omega\mu}{\beta h_1} \sum_{r=0}^{\infty} L_r \text{Fek}'_r(\xi, -\gamma_2^2) \text{ce}_r(\eta, -\gamma_2^2) \right] e^{j\beta z}, \tag{4.19}
\end{aligned}$$

donde el signo ' en las funciones Mathieu indica derivada con respecto a la variable η o ξ .

Igualando los campos magnéticos (4.16) y (4.18) en la interfase núcleo-revestimiento ($\xi = \xi_0$) y utilizando las expansiones mostradas en (4.12)

$$\begin{aligned}
& -\frac{\omega\varepsilon_1}{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} B_m \text{Se}'_m(\xi_0, \gamma_1^2) \text{se}_m(\eta, \gamma_1^2) - \sum_{m=0}^{\infty} A_m \text{Ce}_m(\xi_0, \gamma_1^2) \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{m,n} \text{se}_n(\eta, \gamma_1^2) \\
& = -\frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} \left[-\frac{\omega\varepsilon_2}{\beta} \sum_{r=1}^{\infty} P_r \text{Gek}'_r(\xi_0, -\gamma_2^2) \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{r,n} \text{se}_n(\eta, \gamma_1^2) \right. \\
& \quad \left. - \sum_{r=0}^{\infty} L_r \text{Fek}_r(\xi_0, -\gamma_2^2) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{r,n} \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{n,k} \text{se}_k(\eta, \gamma_1^2) \right],
\end{aligned}$$

multiplicando por $se_s(\eta, \gamma_1^2)$ e integrando de 0 a 2π con respecto a η

$$\begin{aligned}
& \frac{\omega\varepsilon_1}{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} B_m Se'_m(\xi_0, \gamma_1^2) \int_0^{2\pi} se_m(\eta, \gamma_1^2) se_s(\eta, \gamma_1^2) d\eta \\
& \quad + \sum_{m=0}^{\infty} A_m Ce_m(\xi_0, \gamma_1^2) \sum_{n=1}^{\infty} ' \chi_{m,n} \int_0^{2\pi} se_n(\eta, \gamma_1^2) se_s(\eta, \gamma_1^2) d\eta \\
& = -\frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} \left[\frac{\omega\varepsilon_2}{\beta} \sum_{r=1}^{\infty} P_r Gek'_r(\xi_0, -\gamma_2^2) \sum_{n=1}^{\infty} ' \beta_{r,n} \int_0^{2\pi} se_n(\eta, \gamma_1^2) se_s(\eta, \gamma_1^2) d\eta \right. \\
& \quad \left. + \sum_{r=0}^{\infty} L_r Fek_r(\xi_0, -\gamma_2^2) \sum_{n=0}^{\infty} ' \alpha_{r,n} \sum_{k=1}^{\infty} ' \chi_{n,k} \int_0^{2\pi} se_k(\eta, \gamma_1^2) se_s(\eta, \gamma_1^2) d\eta \right],
\end{aligned}$$

y por la propiedad de ortogonalidad de las funciones Mathieu (4.13) se obtiene

$$\begin{aligned}
& \frac{\omega\varepsilon_1}{\beta} B_s Se'_s(\xi_0, \gamma_1^2) + \sum_{m=1}^{\infty} ' A_m Ce_m(\xi_0, \gamma_1^2) \chi_{m,s} \\
& = -\frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} \left[\frac{\omega\varepsilon_2}{\beta} \sum_{r=1}^{\infty} ' P_r Gek'_r(\xi_0, -\gamma_2^2) \beta_{r,s} + \sum_{r=0}^{\infty} L_r Fek_r(\xi_0, -\gamma_2^2) \sum_{n=1}^{\infty} ' \alpha_{r,n} \chi_{n,s} \right],
\end{aligned}$$

cambiando el orden de las sumatorias en el último término y utilizando la ecuación (4.14)

$$\begin{aligned}
& \frac{\omega\varepsilon_1}{\beta} B_s Se'_s(\xi_0, \gamma_1^2) + \sum_{r=1}^{\infty} ' A_r Ce_r(\xi_0, \gamma_1^2) \chi_{r,s} \\
& = -\frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} \left[\frac{\omega\varepsilon_2}{\beta} \sum_{r=1}^{\infty} ' P_r Gek'_r(\xi_0, -\gamma_2^2) \beta_{r,s} + \sum_{r=1}^{\infty} ' A_r Ce_r(\xi_0, \gamma_1^2) \chi_{r,s} \right],
\end{aligned}$$

haciendo el cambio de índice de las sumatorias $n = s$ y factorizando, se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\omega\varepsilon_1}{\beta} B_n \text{Se}'_n(\xi_0, \gamma_1^2) + \left(1 + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2}\right) \sum_{r=1}^{\infty} ' A_r \text{Ce}_r(\xi_0, \gamma_1^2) \chi_{r,n} \\
= -\frac{\gamma_1^2 \omega\varepsilon_2}{\gamma_2^2 \beta} \sum_{r=1}^{\infty} ' P_r \text{Gek}'_r(\xi_0, -\gamma_2^2) \beta_{r,n}. \quad (4.20)
\end{aligned}$$

Realizando el mismo procedimiento para la condición $E_{\eta 1} = E_{\eta 2}$ en la frontera $\xi = \xi_0$, se obtiene la ecuación

$$\begin{aligned}
\frac{\omega\mu}{\beta} A_n \text{Ce}'_n(\xi_0, \gamma_1^2) - \left(1 + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2}\right) \sum_{r=0}^{\infty} ' B_r \text{Se}_r(\xi_0, \gamma_1^2) \nu_{r,n} \\
= -\frac{\gamma_1^2 \omega\mu}{\gamma_2^2 \beta} \sum_{r=0}^{\infty} ' L_r \text{Fek}'_r(\xi_0, -\gamma_2^2) \alpha_{r,n}. \quad (4.21)
\end{aligned}$$

La ecuación característica que determina la constante de propagación β de cada modo que se puede propagar en una fibra óptica elíptica de índice abrupto, se obtiene a partir de las condiciones frontera (4.14), (4.15), (4.20) y (4.21). Para reducir el tamaño de estas ecuaciones se pueden usar las siguientes abreviaciones

$$\begin{aligned}
a_n &= \text{Ce}_n(\xi_0, \gamma_1^2), & a'_n &= \frac{d}{d\xi_0} \text{Ce}_n(\xi_0, \gamma_1^2), \\
b_n &= \text{Se}_n(\xi_0, \gamma_1^2), & b'_n &= \frac{d}{d\xi_0} \text{Se}_n(\xi_0, \gamma_1^2), \\
l_r &= \text{Fek}_r(\xi_0, -\gamma_2^2), & l'_r &= \frac{d}{d\xi_0} \text{Fek}_r(\xi_0, -\gamma_2^2), \\
p_r &= \text{Gek}_r(\xi_0, -\gamma_2^2), & p'_r &= \frac{d}{d\xi_0} \text{Gek}_r(\xi_0, -\gamma_2^2).
\end{aligned} \quad (4.22)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.14) y (4.15) en (4.20) y empleando las abreviaciones mostradas en (4.22), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\omega\varepsilon_1}{\beta} \frac{b'_n}{b_n} \sum_{m=1}^{\infty} ' P_m p_m \beta_{m,n} + \left(1 + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2}\right) \sum_{r=1}^{\infty} ' \chi_{r,n} \sum_{m=0}^{\infty} ' L_m l_m \alpha_{m,r} \\ = -\frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} \frac{\omega\varepsilon_2}{\beta} \sum_{r=1}^{\infty} ' P_r p'_r \beta_{r,n}, \end{aligned}$$

factorizando y cambiando el orden de las sumatorias del segundo término

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} ' P_m \left[\frac{\omega\varepsilon_1}{\beta} \frac{b'_n}{b_n} p_m \beta_{m,n} + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} \frac{\omega\varepsilon_2}{\beta} p'_m \beta_{m,n} \right] \\ + \sum_{m=0}^{\infty} ' L_m \left(1 + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2}\right) l_m \sum_{r=1}^{\infty} ' \chi_{r,n} \alpha_{m,r} = 0, \quad (4.23) \end{aligned}$$

a partir de esta ecuación se puede definir

$${}^e g_{m,n} = \left(1 + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2}\right) l_m \sum_{r=1}^{\infty} ' \chi_{r,n} \alpha_{m,r}, \quad (4.24)$$

$${}^e h_{m,n} = \frac{\omega\varepsilon_1}{\beta} \frac{b'_n}{b_n} p_m \beta_{m,n} + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} \frac{\omega\varepsilon_2}{\beta} p'_m \beta_{m,n}, \quad (4.25)$$

por lo tanto la ecuación (4.23) se puede escribir como

$$\sum_{m=0}^{\infty} ' [L_m {}^e g_{m,n} + P_m {}^e h_{m,n}] = 0; \quad \left(\begin{array}{l} n = 0, 2, 4, \dots \\ \text{ó } n = 1, 3, 5, \dots \end{array} \right). \quad (4.26)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.14) y (4.15) en (4.21) y haciendo un procedimiento similar, se obtiene

$$\sum_{m=0}^{\infty} ' [L_m {}^e t_{m,n} + P_m {}^e s_{m,n}] = 0; \quad \left(\begin{array}{l} n = 0, 2, 4, \dots \\ \text{ó } n = 1, 3, 5, \dots \end{array} \right), \quad (4.27)$$

donde

$$e s_{m,n} = - \left(1 + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} \right) p_m \sum_{r=1}^{\infty} \nu_{r,n} \beta_{m,r}, \quad (4.28)$$

$$e t_{m,n} = \frac{\omega \mu}{\beta} \frac{a'_n}{a_n} l_m \alpha_{m,n} + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} \frac{\omega \mu}{\beta} l'_m \alpha_{m,n}. \quad (4.29)$$

Las ecuaciones (4.26) y (4.27) son un sistema infinito de ecuaciones algebraicas lineales homogéneas. Para obtener una solución no trivial es necesario que el determinante de estas ecuaciones sea igual a cero. Las raíces de este determinante infinito proporcionan los valores de los cuales se puede obtener la constante de propagación β para cada uno de los modos de propagación permitidos en las fibras ópticas elípticas de índice abrupto. Para el modo $m = 1$, el determinante infinito es

$$\begin{vmatrix} e g_{1,1} & e h_{1,1} & e g_{3,1} & e h_{3,1} & e g_{5,1} & e h_{5,1} & \cdots \\ e t_{1,1} & e s_{1,1} & e t_{3,1} & e s_{3,1} & e t_{5,1} & e s_{5,1} & \cdots \\ e g_{1,3} & e h_{1,3} & e g_{3,3} & e h_{3,3} & e g_{5,3} & e h_{5,3} & \cdots \\ e t_{1,3} & e s_{1,3} & e t_{3,3} & e s_{3,3} & e t_{5,3} & e s_{5,3} & \cdots \\ e g_{1,5} & e h_{1,5} & e g_{3,5} & e h_{3,5} & e g_{5,5} & e h_{5,5} & \cdots \\ e t_{1,5} & e s_{1,5} & e t_{3,5} & e s_{3,5} & e t_{5,5} & e s_{5,5} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0. \quad (4.30)$$

Las raíces de este determinante infinito solamente se pueden calcular numéricamente debido a la complejidad del mismo. Sin embargo, para el caso de las fibras ópticas utilizadas para las telecomunicaciones, donde la diferencia de los índices de refracción del núcleo y del revestimiento es muy pequeña, se pueden hacer simplificaciones importantes mediante la aproximación de guiado débil, obteniéndose así una ecuación característica mucho más sencilla que este determinante infinito [18].

Aplicando el método de aproximaciones sucesivas se puede mostrar que la raíz del modo m -ésimo está gobernada principalmente por el determinante

$$\begin{vmatrix} e g_{m,m} & e h_{m,m} \\ e t_{m,m} & e s_{m,m} \end{vmatrix} = 0, \quad (4.31)$$

siempre y cuando la sección transversal de la fibra óptica elíptica no esté demasiado aplanada ($\xi_0 > 0.5$) [17].

Para obtener la ecuación característica que determina los modos de propagación impares ${}_o\text{HE}_{m,n}$, se requiere hacer un análisis similar al hecho para los modos pares, pero expresando las componentes de campo longitudinales como:

Para el núcleo ($0 \leq \xi \leq \xi_0$)

$${}_oH_{z1} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \text{Se}_m(\xi, \gamma_1^2) \text{se}_m(\eta, \gamma_1^2) e^{j\beta z}, \quad (4.32)$$

$${}_oE_{z1} = \sum_{m=1}^{\infty} D_m \text{Ce}_m(\xi, \gamma_1^2) \text{ce}_m(\eta, \gamma_1^2) e^{j\beta z}, \quad (4.33)$$

y para el revestimiento ($\xi_0 \leq \xi < \infty$)

$${}_oH_{z2} = \sum_{r=0}^{\infty} G_r \text{Gek}_r(\xi, -\gamma_2^2) \text{se}_r(\eta, -\gamma_2^2) e^{j\beta z}, \quad (4.34)$$

$${}_oE_{z2} = \sum_{r=1}^{\infty} F_r \text{Lek}_r(\xi, -\gamma_2^2) \text{ce}_r(\eta, -\gamma_2^2) e^{j\beta z}. \quad (4.35)$$

De esta manera se puede mostrar que la ecuación característica que determina las constantes de propagación para cada uno de los modos impares ${}_o\text{HE}_{m,n}$, que se pueden propagar por una fibra óptica elíptica de índice abrupto está dada por [17], [18],

$$\begin{vmatrix}
o g_{1,1} & o h_{1,1} & o g_{3,1} & o h_{3,1} & o g_{5,1} & o h_{5,1} & \cdots \\
o t_{1,1} & o s_{1,1} & o t_{3,1} & o s_{3,1} & o t_{5,1} & o s_{5,1} & \cdots \\
o g_{1,3} & o h_{1,3} & o g_{3,3} & o h_{3,3} & o g_{5,3} & o h_{5,3} & \cdots \\
o t_{1,3} & o s_{1,3} & o t_{3,3} & o s_{3,3} & o t_{5,3} & o s_{5,3} & \cdots \\
o g_{1,5} & o h_{1,5} & o g_{3,5} & o h_{3,5} & o g_{5,5} & o h_{5,5} & \cdots \\
o t_{1,5} & o s_{1,5} & o t_{3,5} & o s_{3,5} & o t_{5,5} & o s_{5,5} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{vmatrix} = 0, \quad (4.36)$$

donde

$$o g_{m,n} = \left(1 + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2}\right) p_m \sum_{r=1}^{\infty} \nu_{r,n} \beta_{m,r}, \quad (4.37)$$

$$o h_{m,n} = \frac{\omega \varepsilon_1}{\beta} \frac{a'_n}{a_n} l_m \alpha_{m,n} + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} \frac{\omega \varepsilon_2}{\beta} l'_m \alpha_{m,n}, \quad (4.38)$$

$$o s_{m,n} = - \left(1 + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2}\right) l_m \sum_{r=1}^{\infty} \chi_{r,n} \alpha_{m,r}, \quad (4.39)$$

$$o t_{m,n} = \frac{\omega \mu}{\beta} \frac{b'_n}{b_n} p_m \beta_{m,n} + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} \frac{\omega \mu}{\beta} p'_m \beta_{m,n}. \quad (4.40)$$

4.2. Aproximación por guiado débil

Las fibras ópticas utilizadas para telecomunicaciones son de guiado débil, es decir, la diferencia entre los índices de refracción del núcleo y del revestimiento es muy pequeña ($n_1/n_2 - 1 \ll 1$). Esta característica es muy importante, ya que permite hacer simplificaciones en el análisis de propagación, de tal manera que se obtiene una ecuación característica mucho más sencilla que el determinante infinito (4.30) para los modos pares, o el determinante (4.36) para los impares.

Para comenzar con el análisis de la aproximación por guiado débil es conveniente definir los siguientes parámetros

$$U^2 = q^2 \cosh^2(\xi_0)(k_1^2 - \beta^2) = 4\gamma_1^2 \cosh^2(\xi_0), \quad (4.41)$$

$$W^2 = -q^2 \cosh^2(\xi_0)(k_2^2 - \beta^2) = 4\gamma_2^2 \cosh^2(\xi_0), \quad (4.42)$$

$$V^2 = U^2 + W^2 = q^2 \cosh^2(\xi_0)\omega^2\mu\varepsilon_1 \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right), \quad (4.43)$$

considerado que $n_1/n_2 - 1 \ll 1$, entonces

$$V^2 = q^2 \cosh^2(\xi_0)\omega^2\mu\varepsilon_1\delta, \quad (4.44)$$

donde δ es un número muy pequeño debido a que $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_2$, de esta manera se puede definir

$$\theta_p = \sqrt{\delta} \frac{U}{V} = \sqrt{\delta} \frac{\sqrt{k_1^2 - \beta^2}}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon_1\delta}} = \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{k_1^2}}, \quad (4.45)$$

donde θ_p es un parámetro insignificante, es decir, $\theta_p \ll 1$.

Este parámetro es el más importante en la aproximación por guiado débil, debido a que todas las funciones serán expandidas en términos de θ_p . Se puede comenzar expandiendo el parámetro $-\gamma_2^2$ como

$$\begin{aligned} -\gamma_2^2 &= q^2 \frac{\omega^2\mu\varepsilon_2 - \beta^2}{4} = q^2 \frac{\omega^2\mu\varepsilon_2 - \beta^2 + \omega^2\mu\varepsilon_1 - \omega^2\mu\varepsilon_1}{4} \\ &= q^2 \frac{\omega^2\mu\varepsilon_1 - \beta^2}{4} - \frac{q^2}{4} \omega^2\mu\varepsilon_1 \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) = \gamma_1^2 + O(\theta_p^2), \end{aligned} \quad (4.46)$$

de esta manera, las funciones Mathieu $\text{ce}_r(\eta, -\gamma_2^2)$ y $\text{se}_r(\eta, -\gamma_2^2)$ se pueden escribir como

$$\text{ce}_r(\eta, -\gamma_2^2) = \text{ce}_r(\eta, \gamma_1^2) + O(\theta_p^2), \quad (4.47)$$

$$\text{se}_r(\eta, -\gamma_2^2) = \text{se}_r(\eta, \gamma_1^2) + O(\theta_p^2), \quad (4.48)$$

y los coeficientes $\alpha_{r,n}$ y $\beta_{r,n}$ empleados en las expansiones (4.12) y que están definidas en el Apéndice B en las ecuaciones (B.8) y (B.9), se pueden escribir utilizando las ecuaciones (4.47) y (4.48), como

$$\alpha_{r,n} = \frac{\int_0^{2\pi} \text{ce}_r(\eta, \gamma_1^2) \text{ce}_n(\eta, \gamma_1^2) d\eta}{\int_0^{2\pi} \text{ce}_n^2(\eta, \gamma_1^2) d\eta} + O(\theta_p^2) = C_{r,n}^{(1)} \delta_{r,n} + O(\theta_p^2), \quad (4.49)$$

$$\beta_{r,n} = \frac{\int_0^{2\pi} \text{se}_r(\eta, \gamma_1^2) \text{se}_n(\eta, \gamma_1^2) d\eta}{\int_0^{2\pi} \text{se}_n^2(\eta, \gamma_1^2) d\eta} + O(\theta_p^2) = C_{r,n}^{(2)} \delta_{r,n} + O(\theta_p^2), \quad (4.50)$$

donde $\delta_{r,n}$ es la función delta de Kronecker (3.65) y $C_{r,n}^{(1),(2)}$ son constantes conocidas y dado que en esta tesis se utilizó la normalización (3.58), entonces $C_{r,n}^{(1),(2)} = 1$.

Por último, a partir de la ecuación (4.46) se puede ver que

$$1 + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} = O(\theta_p^2). \quad (4.51)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.46)–(4.51) en las ecuaciones (4.24), (4.25), (4.28) y (4.29)

$$\begin{aligned} e g_{m,n} &= O(\theta_p^2) \text{Fek}_m(\xi_0, -\gamma_2^2) \sum_{r=1}^{\infty} \chi_{r,n} (\delta_{m,r} + O(\theta_p^2)) \\ &= O(\theta_p^2), \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} e s_{m,n} &= O(\theta_p^2) \text{Gek}_m(\xi_0, -\gamma_2^2) \sum_{r=1}^{\infty} \nu_{r,n} (\delta_{m,r} + O(\theta_p^2)) \\ &= O(\theta_p^2), \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned}
{}_\epsilon h_{m,n} &= \frac{\omega^3 \mu \epsilon_1}{\beta \gamma_2^2} \text{Gek}_m(\xi_0, -\gamma_2^2) \left[\frac{\gamma_2^2}{\omega^2 \mu} \frac{\text{Se}'_n(\xi_0, \gamma_1^2)}{\text{Se}_n(\xi_0, \gamma_1^2)} + \frac{\gamma_1^2 \epsilon_2}{\omega^2 \mu \epsilon_1} \frac{\text{Gek}'_m(\xi_0, -\gamma_2^2)}{\text{Gek}_m(\xi_0, -\gamma_2^2)} \right] (\delta_{m,n} + O(\theta_p^2)) \\
&= \frac{\omega^3 \mu \epsilon_1}{\beta \gamma_2^2} \text{Gek}_m(\xi_0, -\gamma_2^2) \left[\frac{\gamma_2^2}{\omega^2 \mu} \frac{\text{Se}'_n(\xi_0, \gamma_1^2)}{\text{Se}_n(\xi_0, \gamma_1^2)} + O(\theta_p^2) \right] (\delta_{m,n} + O(\theta_p^2)) \\
&= \frac{\omega \epsilon_1}{\beta} \frac{\text{Se}'_n(\xi_0, \gamma_1^2)}{\text{Se}_n(\xi_0, \gamma_1^2)} \text{Gek}_m(\xi_0, -\gamma_2^2) \delta_{m,n} + O(\theta_p^2), \tag{4.54}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_\epsilon t_{m,n} &= \left[\frac{\omega \mu}{\beta} \frac{\text{Ce}'_n(\xi_0, \gamma_1^2)}{\text{Ce}_n(\xi_0, \gamma_1^2)} \text{Fek}_m(\xi_0, -\gamma_2^2) + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} \frac{\omega \mu}{\beta} \text{Fek}'_m(\xi_0, -\gamma_2^2) \right] (\delta_{m,n} + O(\theta_p^2)) \\
&= \left[\frac{\omega \mu}{\beta} \frac{\text{Ce}'_n(\xi_0, \gamma_1^2)}{\text{Ce}_n(\xi_0, \gamma_1^2)} \text{Fek}_m(\xi_0, -\gamma_2^2) + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} \frac{\omega \mu}{\beta} \text{Fek}'_m(\xi_0, -\gamma_2^2) \right] \delta_{m,n} + O(\theta_p^2). \tag{4.55}
\end{aligned}$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.52)–(4.55) en el determinante infinito (4.30), cuyas raíces proporcionan las constantes de propagación de los modos pares, se puede ver que debido a las funciones delta de Kronecker, los términos que no están en la diagonal $m = n$, son de orden θ_p^2 , por ejemplo para el modo $m = 1$

$$\begin{vmatrix}
O(\theta_p^2) & {}_\epsilon h_{1,1} & O(\theta_p^2) & O(\theta_p^2) & O(\theta_p^2) & O(\theta_p^2) & \cdots \\
{}_\epsilon t_{1,1} & O(\theta_p^2) & O(\theta_p^2) & O(\theta_p^2) & O(\theta_p^2) & O(\theta_p^2) & \cdots \\
O(\theta_p^2) & O(\theta_p^2) & O(\theta_p^2) & {}_\epsilon h_{3,3} & O(\theta_p^2) & O(\theta_p^2) & \cdots \\
O(\theta_p^2) & O(\theta_p^2) & {}_\epsilon t_{3,3} & O(\theta_p^2) & O(\theta_p^2) & O(\theta_p^2) & \cdots \\
O(\theta_p^2) & O(\theta_p^2) & O(\theta_p^2) & O(\theta_p^2) & O(\theta_p^2) & {}_\epsilon h_{5,5} & \cdots \\
O(\theta_p^2) & O(\theta_p^2) & O(\theta_p^2) & O(\theta_p^2) & {}_\epsilon t_{5,5} & O(\theta_p^2) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{vmatrix} = 0. \tag{4.56}$$

A partir de este determinante infinito, despreciando los términos de orden θ_p^2 , se puede obtener la ecuación característica simplificada que determina las constantes de propagación de los modos pares de orden m , para ello se requiere que

$$e t_{m,m} e h_{m,m} = 0 \quad (4.57)$$

por lo tanto

$$\frac{\omega\mu}{\beta} \frac{C e'_m(\xi_0, \gamma_1^2)}{C e_m(\xi_0, \gamma_1^2)} \text{Fek}_m(\xi_0, -\gamma_2^2) + \frac{\gamma_1^2 \omega\mu}{\gamma_2^2 \beta} \text{Fek}'_m(\xi_0, -\gamma_2^2) = 0,$$

dividiendo esta ecuación entre

$$\gamma_1^2 \frac{\omega\mu}{\beta} \text{Fek}_m(\xi_0, -\gamma_2^2)$$

se obtiene la ecuación característica simplificada

$$\frac{1}{\gamma_1^2} \frac{C e'_m(\xi_0, \gamma_1^2)}{C e_m(\xi_0, \gamma_1^2)} + \frac{1}{\gamma_2^2} \frac{\text{Fek}'_m(\xi_0, -\gamma_2^2)}{\text{Fek}_m(\xi_0, -\gamma_2^2)} = 0, \quad (4.58)$$

haciendo el mismo desarrollo, para los modos impares se obtiene

$$\frac{1}{\gamma_1^2} \frac{S e'_m(\xi_0, \gamma_1^2)}{S e_m(\xi_0, \gamma_1^2)} + \frac{1}{\gamma_2^2} \frac{\text{Gek}'_m(\xi_0, -\gamma_2^2)}{\text{Gek}_m(\xi_0, -\gamma_2^2)} = 0. \quad (4.59)$$

Las raíces de las ecuaciones (4.58) y (4.59) proporcionan los valores de las constantes de propagación β de los modos LP pares e impares. Estas constantes de propagación se sustituyen en las componentes transversales de los campos eléctrico y magnético para obtener la configuración total de cada uno de los modos de propagación LP en las fibras ópticas elípticas de índice abrupto.

De estas ecuaciones se puede ver que si se considera que $\gamma_1^2 = -\gamma_2^2$, dado que $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_2$, se puede obtener las ecuaciones características mostradas en [19] para los modos LP pares e impares.

Las constantes de propagación también se pueden determinar por medio de métodos numéricos como el forward-marching fast Fourier transform empleado en [20] para obtener la descripción completa del campo total que se propaga a lo largo de una guía de onda dieléctrica, cuyo núcleo puede tener una forma arbitraria, siempre y cuando se preserve la condición de guiado débil.

4.3. Modos de propagación LP pares

Los modos de propagación LP pares se obtienen al resolver la ecuación característica simplificada (4.58), obtenida por la aproximación de guiado débil. Las raíces de esta ecuación característica proporcionan las constantes de propagación de cada uno de los modos que se pueden propagar por la fibra óptica elíptica de índice abrupto.

Las constantes de propagación obtenidas se sustituyen en las ecuaciones (4.4) y (4.5), las cuales representan las componentes de campo longitudinales ${}_eH_z$ y ${}_eE_z$ en el núcleo de la fibra óptica elíptica, y en las ecuaciones (4.6) y (4.7), que representan el campo en el revestimiento de la fibra.

De esta manera es posible visualizar los campos magnéticos y eléctricos (o sus magnitudes) de los diferentes modos de propagación en la sección transversal de la fibra óptica elíptica a una determinada distancia z . En todas las figuras siguientes se consideró el caso en donde $z = 0$ para asegurar tener la intensidad máxima de luz en todas las gráficas, esto es porque la dependencia de los campos longitudinales con la distancia de propagación z es de forma exponencial compleja, es decir, la parte real varía de forma $\cos(\beta z)$, como se puede ver en las ecuaciones (4.4)–(4.7) y en (4.32)–(4.35), lo cual indica que a ciertas distancias, cuando

$$\beta z = \frac{(2k + 1)\pi}{2}; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.60)$$

el campo es igual a cero.

Las gráficas que se muestran a continuación fueron obtenidas a partir de las ecuaciones (4.4), (4.6) y (4.58), para una fibra óptica elíptica de índice abrupto con las siguientes características:

Eje semimayor del núcleo de la fibra $a = 25 \mu\text{m}$.

Eje semimenor del núcleo de la fibra $11 \leq b \leq 24.99 \mu\text{m}$.

Excentricidad $0.028 \leq e \leq 0.898$.

Índice de refracción del núcleo $n_1 = 1.4595$.

Índice de refracción del revestimiento $n_2 = 1.4500$.

Longitud de onda de la luz $\lambda_0 = 1.55 \mu\text{m}$ y $\lambda_0 = 0.1 \mu\text{m}$.

4.3.1. Modos ${}_eLP_{0,n}$

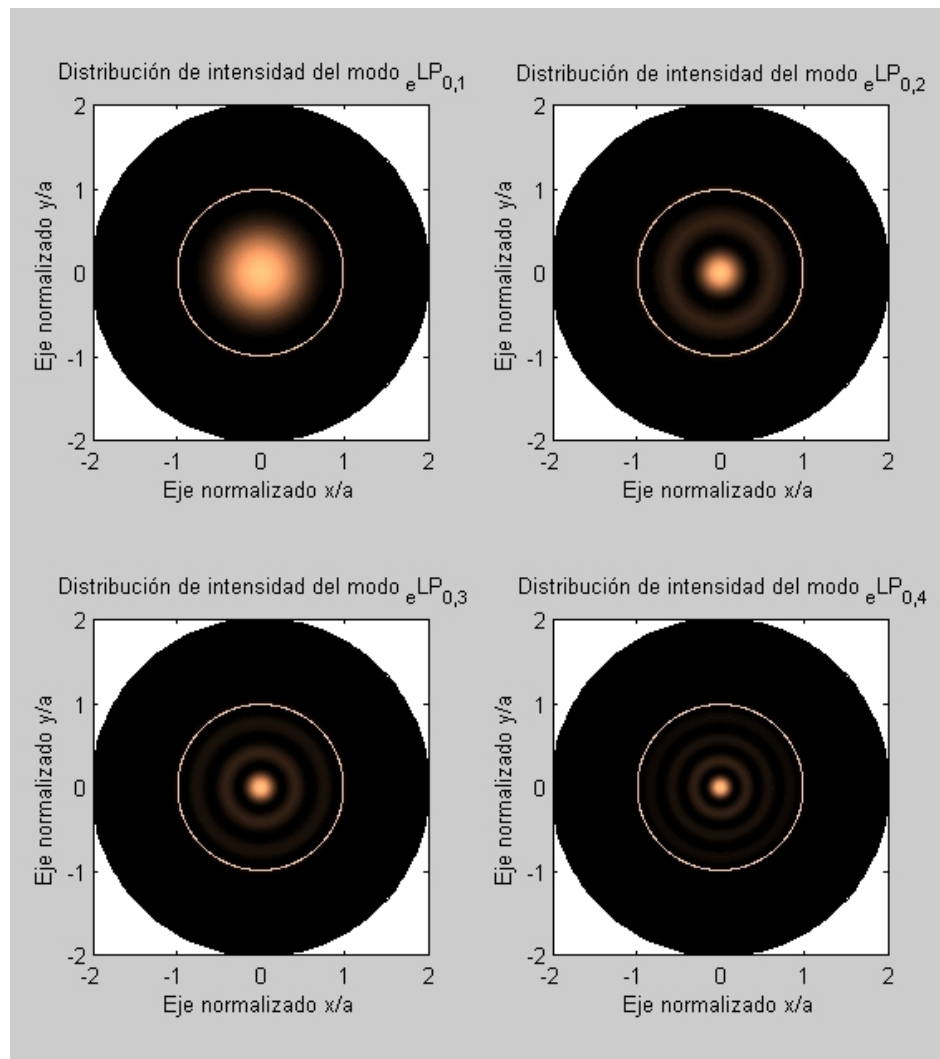


Figura 4.1: Distribución de la intensidad de los modos ${}_eLP_{0,1}$, ${}_eLP_{0,2}$, ${}_eLP_{0,3}$ y ${}_eLP_{0,4}$ en una fibra óptica elíptica de índice abrupto, con $a = 25 \mu\text{m}$ y $b = 24.99 \mu\text{m}$.

El modo ${}_eLP_{0,n}$ es el modo fundamental en las fibras ópticas elípticas. Sin embargo se debe tener presente que estos modos LP no son reales, ya que se obtienen con base en una aproximación en donde se considera que el índice de refracción del núcleo es igual al índice de refracción del revestimiento.

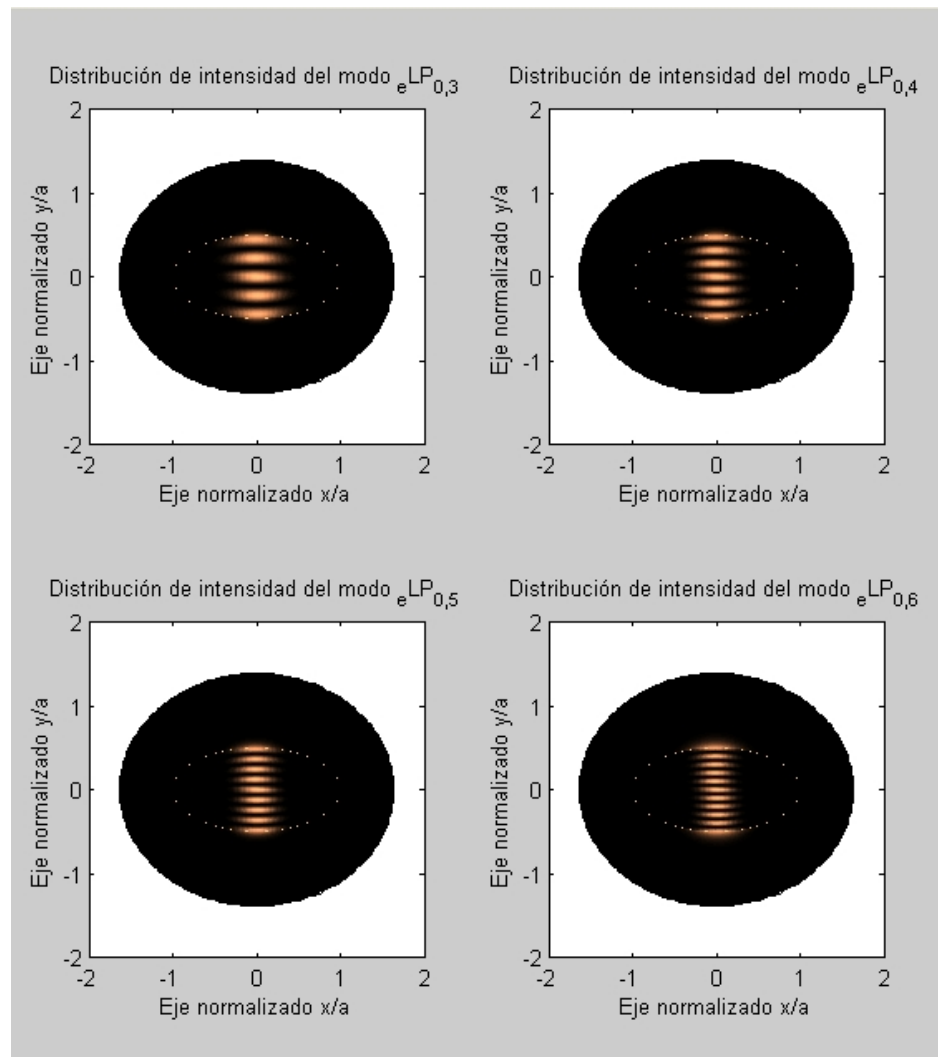


Figura 4.2: *Distribución de la intensidad de los modos ${}_eLP_{0,3}$, ${}_eLP_{0,4}$, ${}_eLP_{0,5}$ y ${}_eLP_{0,6}$ en una fibra óptica elíptica de índice abrupto, con $a/b = 2$.*

En la figura 4.1 se muestra la distribución de la intensidad de la luz de algunos modos ${}_eLP_{0,n}$. Estas distribuciones fueron obtenidas con las mismas características de la fibra óptica circular de la figura 2.4 cuando la elipse se aproxima a un círculo de radio a . Si se comparan las dos figuras se puede ver que las gráficas son muy parecidas.

Para obtener la figura 4.2 se utilizó una longitud de onda $\lambda_0 = 0.1 \mu\text{m}$, y el tamaño del eje semimenor fue igual a la mitad del eje semimayor ($b = 12.5 \mu\text{m}$). Se realizó el cambio de longitud de onda para poder obtener modos de orden superior, ya que cuando se reduce el tamaño de un eje, el número de modos que se pueden propagar también se reduce, así como sucede en las fibras ópticas circulares al reducir el tamaño del radio.

4.3.2. Modos ${}_eLP_{1,n}$

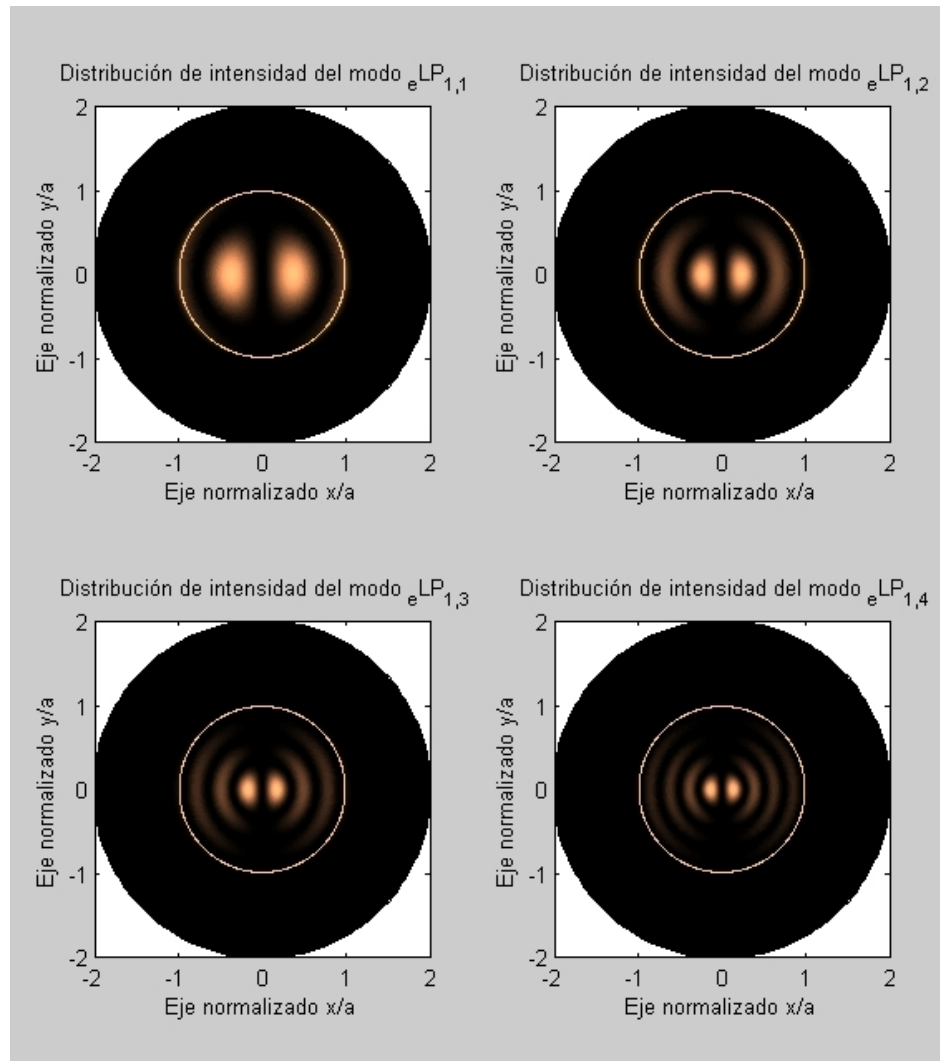


Figura 4.3: Distribución de la intensidad de los modos ${}_eLP_{1,1}$, ${}_eLP_{1,2}$, ${}_eLP_{1,3}$ y ${}_eLP_{1,4}$ en una fibra óptica elíptica de índice abrupto, con $a = 25 \mu\text{m}$ y $b = 24.99 \mu\text{m}$.

Los modos de propagación ${}_eLP_{1,n}$ mostrados en la figura 4.3 se obtuvieron cuando la excentricidad de la elipse es muy pequeña ($e = 0.028$), la cual se puede obtener sustituyendo los valores de los ejes semimayor y semimenor en la ecuación (3.7).

Esta figura se puede comparar con las gráficas obtenidas para los modos $LP_{1,m}$ de las fibras circulares, mostradas en la figura 2.6. Se puede ver que son muy parecidas, sin embargo no son iguales debido a que la elipse no es un círculo exacto, además, las ecuaciones características para obtener las constantes de propagación en la fibra óptica circular y en la elíptica no son las mismas.

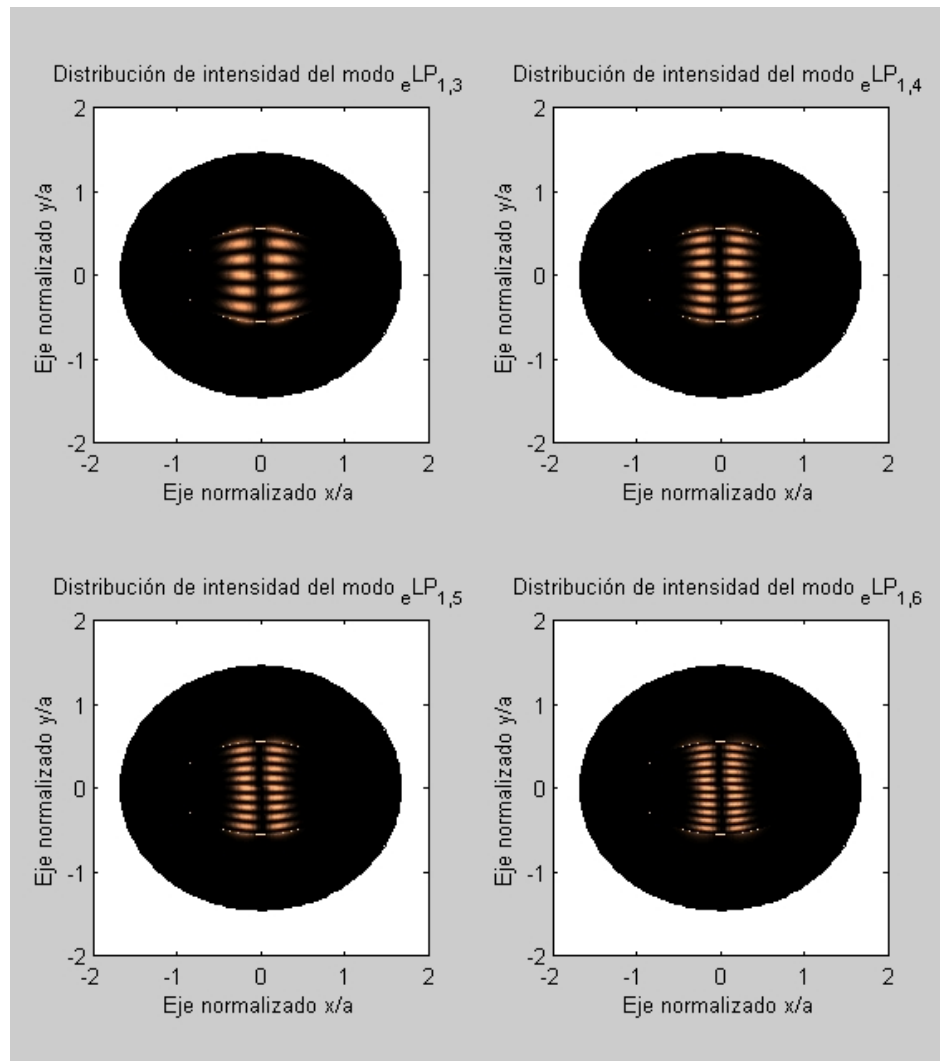


Figura 4.4: Distribución de la intensidad de los modos ${}_eLP_{1,3}$, ${}_eLP_{1,4}$, ${}_eLP_{1,5}$ y ${}_eLP_{1,6}$ en una fibra óptica elíptica de índice abrupto, con $a/b = 1.8$.

En la figura 4.4 se muestran las distribuciones de intensidad de los modos ${}_{e}LP_{1,3}$, ${}_{e}LP_{1,4}$, ${}_{e}LP_{1,5}$ y ${}_{e}LP_{1,6}$, donde la relación entre el eje semimayor y el eje semimenor es de 1.8, por lo tanto, la excentricidad es de $e = 0.8315$. Para obtener esta figura se utilizó una longitud de onda $\lambda_0 = 0.1 \mu\text{m}$ para poder visualizar los modos de orden alto, de lo contrario, solamente se podría obtener los modos de orden bajo, debido a que el tamaño del eje semimenor provoca que se propaguen un número menor de modos.

4.3.3. Modos ${}_{e}LP_{2,n}$

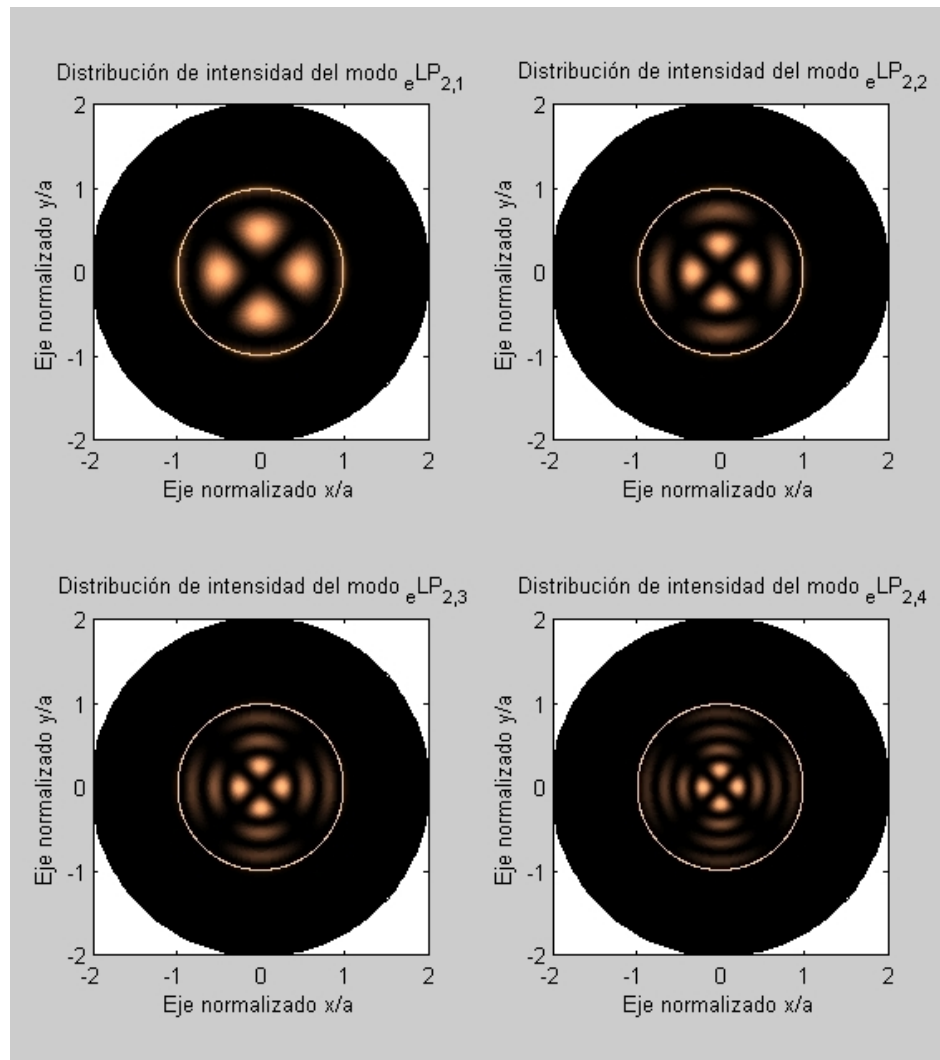


Figura 4.5: *Distribución de la intensidad de los modos ${}_{e}LP_{2,1}$, ${}_{e}LP_{2,2}$, ${}_{e}LP_{2,3}$ y ${}_{e}LP_{2,4}$ en una fibra óptica elíptica de índice abrupto, con $a = 25 \mu\text{m}$ y $b = 24.99 \mu\text{m}$.*

En la figura 4.5 se muestran los modos de propagación ${}_{e}LP_{2,n}$, para $n = 1, 2, 3, 4$.

Por su similitud a una fibra óptica circular, sus modos de propagación se pueden comparar con los mostrados en la figura 2.8. De donde se puede ver que la ecuación característica (4.58) produce resultados muy cercanos a los obtenidos con la ecuación característica empleada para obtener los modos de propagación en las fibras ópticas circulares.

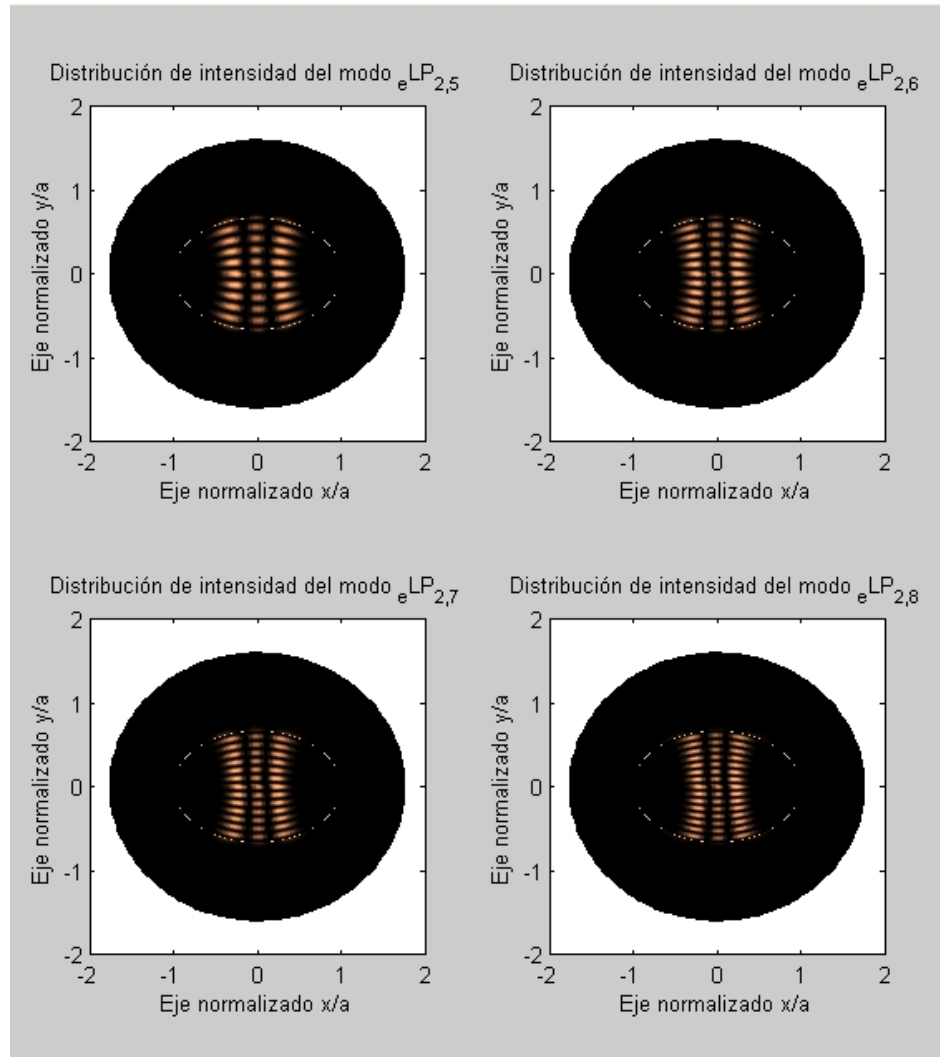


Figura 4.6: *Distribución de la intensidad de los modos ${}^eLP_{2,5}$, ${}^eLP_{2,6}$, ${}^eLP_{2,7}$ y ${}^eLP_{2,8}$ en una fibra óptica elíptica de índice abrupto, con $a/b = 1.5$.*

Si se aumenta la diferencia entre el eje semimayor y el eje semimejor de la elipse se obtienen los modos de propagación mostrados en la figura 4.6, en donde la relación entre los ejes de la elipse es $a/b = 1.5$. Para obtener estos modos de propagación se

utilizó una longitud de onda $\lambda_0 = 0.1 \mu\text{m}$, de tal manera que se pueden propagar modos de altos órdenes por la misma fibra óptica elíptica, sin necesidad de cambiar los valores de los índices de refracción o hacer más grande los ejes de la fibra.

4.3.4. Modos ${}_eLP_{m,n}$, $m \geq 4$

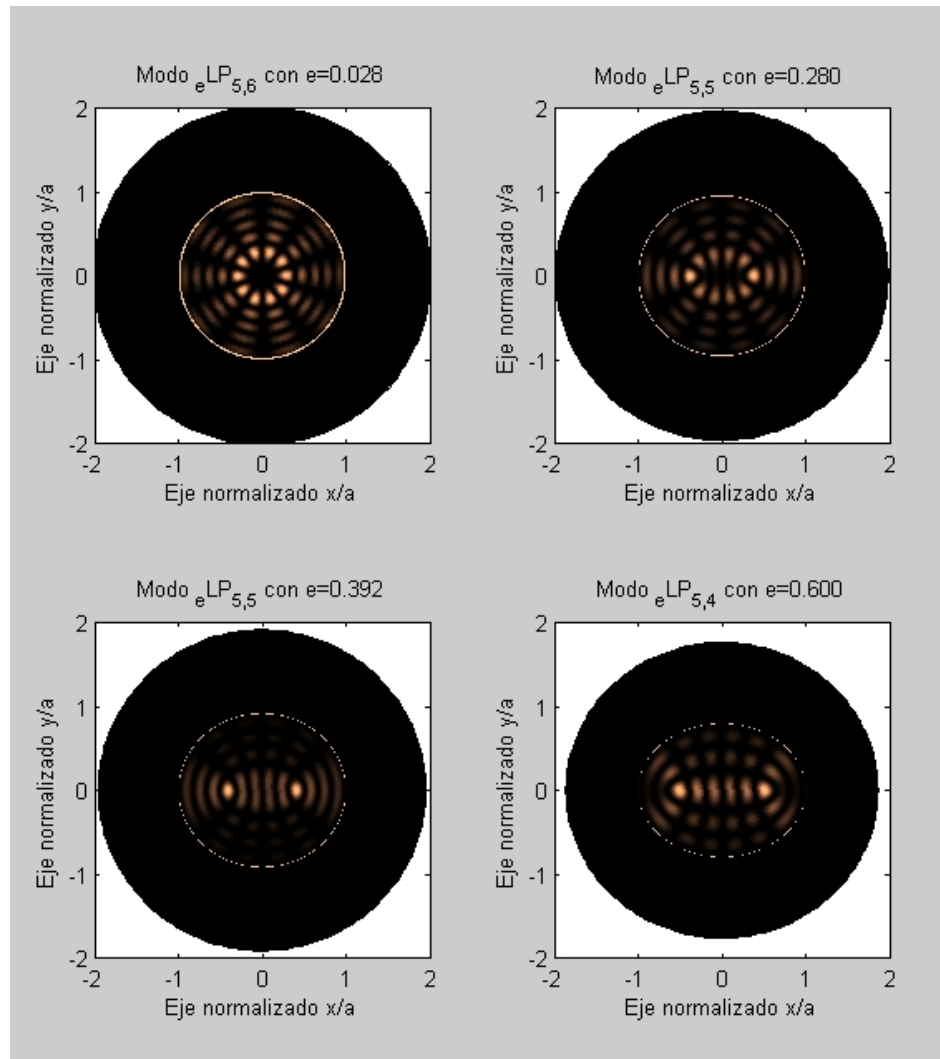


Figura 4.7: Distribución de la intensidad de los modos ${}_eLP_{5,n}$, para diferentes excentricidades.

La figura 4.7 muestra lo que sucede con la distribución de la intensidad de la luz cuando cambia la excentricidad de la elipse. La primer gráfica muestra la distribución

del modo ${}^eLP_{5,6}$ en una fibra óptica casi circular ($e = 0.028$), en la siguiente gráfica es como si la fibra se aplastara un poco, en realidad lo que sucede es que el eje semimenor se va reduciendo poco a poco en las gráficas restantes, mientras se deja constante el eje semimayor ($a = 25 \mu\text{m}$), es decir, la excentricidad aumenta en cada gráfica.

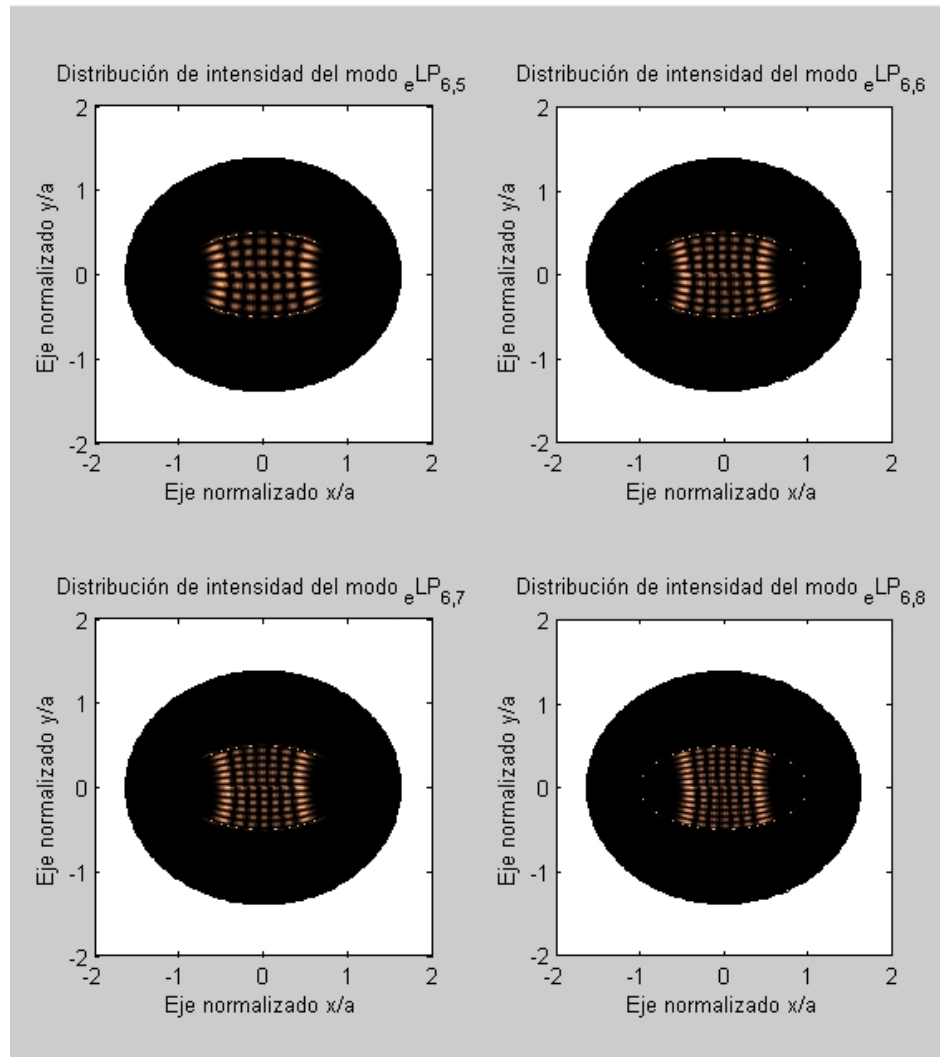


Figura 4.8: *Distribución de la intensidad de los modos ${}^eLP_{6,5}$, ${}^eLP_{6,6}$, ${}^eLP_{6,7}$ y ${}^eLP_{6,8}$ en una fibra óptica elíptica de índice abrupto, con $a/b = 2.27$.*

Otro aspecto que se debe notar en esta figura es que conforme se reduce el eje semimenor b , el número de modos también decrece, por esta razón en la primer gráfica se muestra el modo ${}^eLP_{5,6}$, mientras que en la última gráfica se observa el modo de propagación ${}^eLP_{5,4}$ en donde se dejaron constantes los índices de refracción y la longi-

tud de onda, lo único que cambia es el tamaño del eje semimenor.

En la figura 4.8 se muestran los modos de propagación de orden alto ${}_e\text{LP}_{6,n}$, para $n = 5, 6, 7, 8$. En esta figura se puede observar que mientras mayor sea el orden del modo de propagación, entonces la intensidad de la luz tenderá a distribuirse más hacia la interfase núcleo-revestimiento, a diferencia de los modos de orden bajo, en donde la mayor cantidad de luz se concentra en el centro del núcleo de la fibra óptica.

4.4. Modos de propagación LP impares

Las raíces de la ecuación característica simplificada (4.59), obtenida mediante la aproximación por guiado débil, proporciona los valores de las constantes de propagación de cada uno de los modos impares que pueden existir en la fibra óptica elíptica de índice abrupto.

Para poder visualizar la distribución del campo en la sección transversal de la fibra óptica elíptica se requiere sustituir las constantes de propagación obtenidas de la ecuación característica (4.59) en las ecuaciones (4.33) y (4.32), las cuales representan las componentes longitudinales del campo eléctrico y magnético en el núcleo de la fibra, así como en las componentes longitudinales en el revestimiento (4.35) y (4.34), de tal manera que se tengan los campos longitudinales completos ${}_oE_z$ y ${}_oH_z$ en toda la fibra óptica elíptica.

Las gráficas que se muestran a continuación se obtuvieron para una fibra óptica elíptica con las mismas características con las que se obtuvieron las distribuciones de los modos pares:

Eje semimayor del núcleo de la fibra $a = 25 \mu\text{m}$.

Eje semimenor del núcleo de la fibra $11 \leq b \leq 24.99 \mu\text{m}$.

Excentricidad $0.028 \leq e \leq 0.898$.

Índice de refracción del núcleo $n_1 = 1.4595$.

Índice de refracción del revestimiento $n_2 = 1.4500$.

Longitud de onda de la luz $\lambda_0 = 1.55 \mu\text{m}$ y $\lambda_0 = 0.1 \mu\text{m}$.

4.4.1. Modos ${}_oLP_{1,n}$

En la figura 4.9 se muestran las distribuciones de la intensidad de los modos ${}_oLP_{1,n}$ para una fibra elíptica cuya excentricidad es muy pequeña ($e = 0.028$), por lo tanto esta fibra se aproxima a una fibra óptica circular.

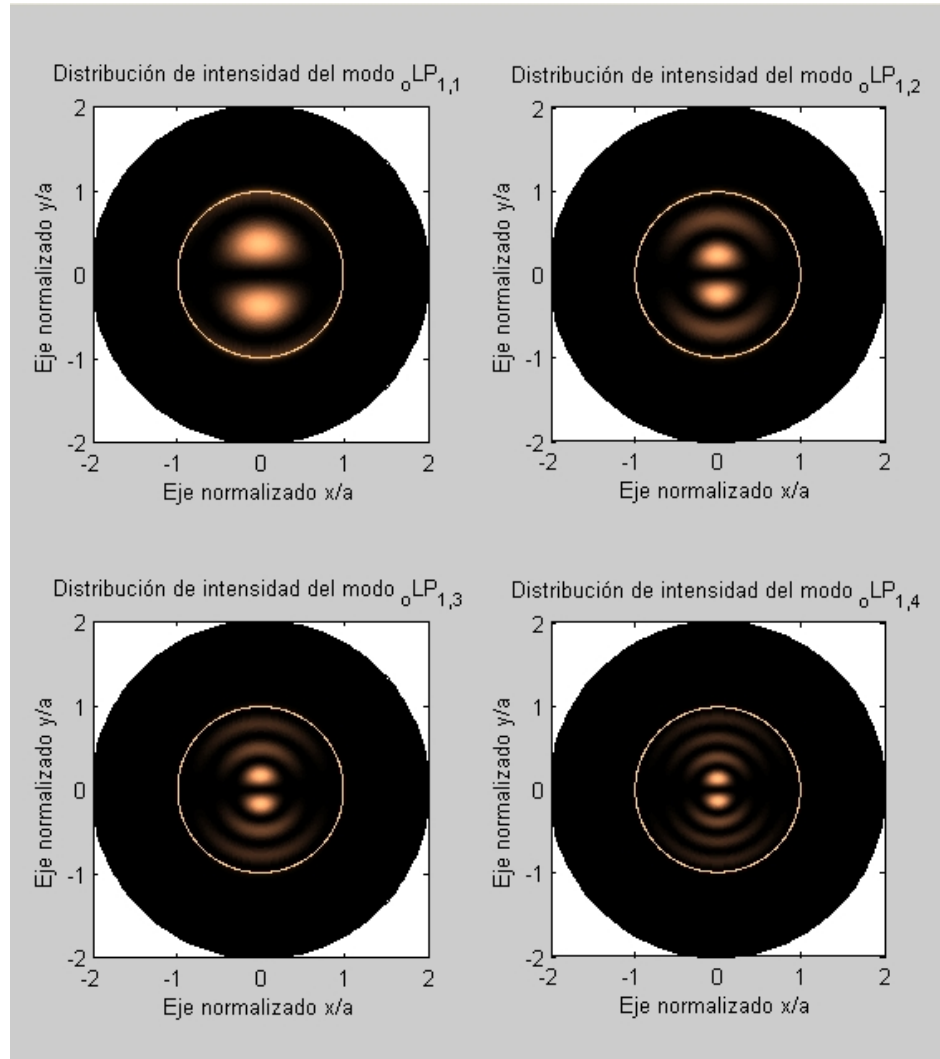


Figura 4.9: Distribución de la intensidad de los modos ${}_oLP_{1,1}$, ${}_oLP_{1,2}$, ${}_oLP_{1,3}$ y ${}_oLP_{1,4}$ en una fibra óptica elíptica de índice abrupto, con $a = 25 \mu\text{m}$ y $b = 24.99 \mu\text{m}$.

Estas gráficas se pueden comparar con las gráficas de la figura 2.6 y se puede observar que son muy similares, la diferencia es que estas gráficas están rotadas 90° con respecto a las gráficas de los modos LP en las fibras circulares, esto se debe a que la dependencia azimutal es de forma seno elíptico, la cual es una función impar a dife-

rencia de la función coseno empleada en las fibras ópticas circulares que es una función par. Por lo tanto, los modos impares están defasados 90° de los modos pares.

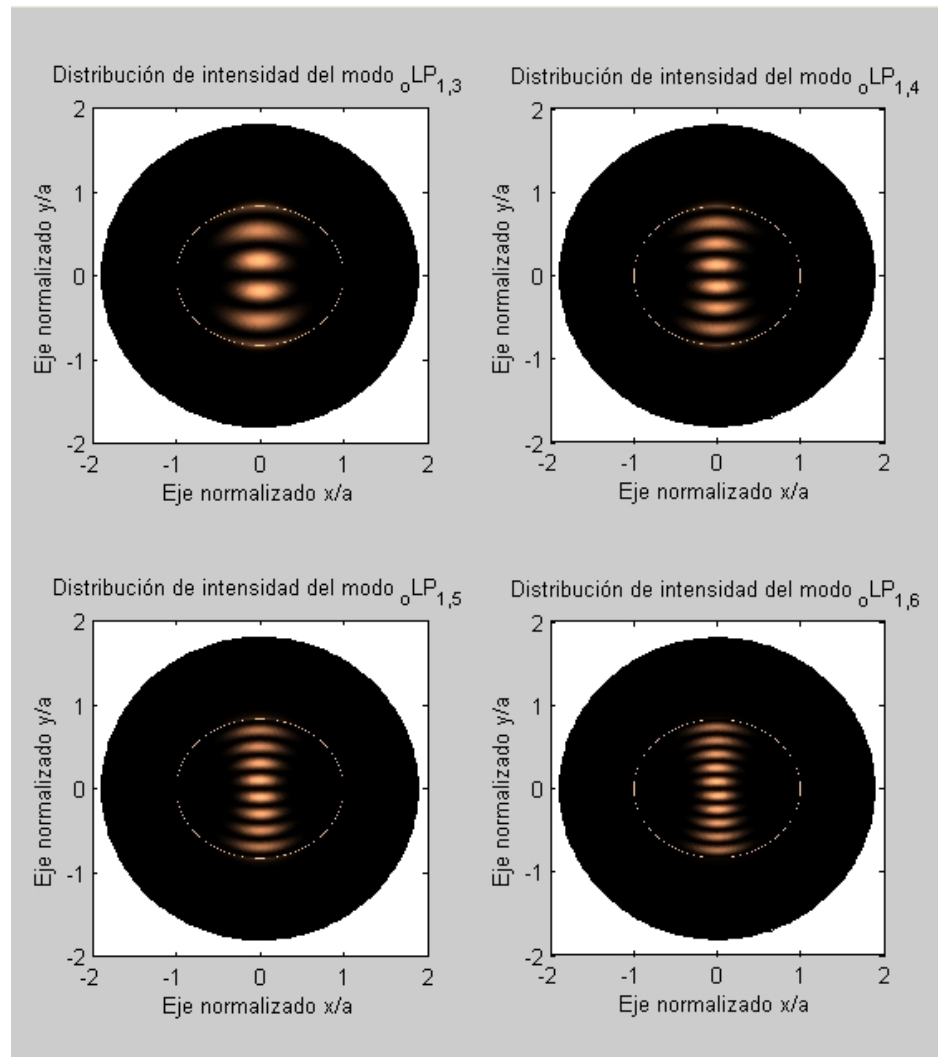


Figura 4.10: Distribución de la intensidad de los modos ${}_oLP_{1,3}$, ${}_oLP_{1,4}$, ${}_oLP_{1,5}$ y ${}_oLP_{1,6}$ en una fibra óptica elíptica de índice abrupto, con $a/b = 1.2$.

Estos mismos modos ${}_oLP_{1,n}$ se muestran en la figura 4.10 pero para una fibra elíptica en donde la relación entre sus ejes semimayor y semimenor es $a/b = 1.2$. La distribución de estos modos se parece a la de los modos ${}_eLP_{0,n}$ y esto se debe a la dependencia azimutal que tienen los modos con las funciones Mathieu se y ce para los modos impares y pares respectivamente.

4.4.2. Modos ${}_oLP_{2,n}$

Los modos ${}_oLP_{2,n}$ mostrados en la figura 4.11 se pueden comparar con las distribuciones de los modos LP mostrados en la figura 2.8 para las fibras ópticas circulares.

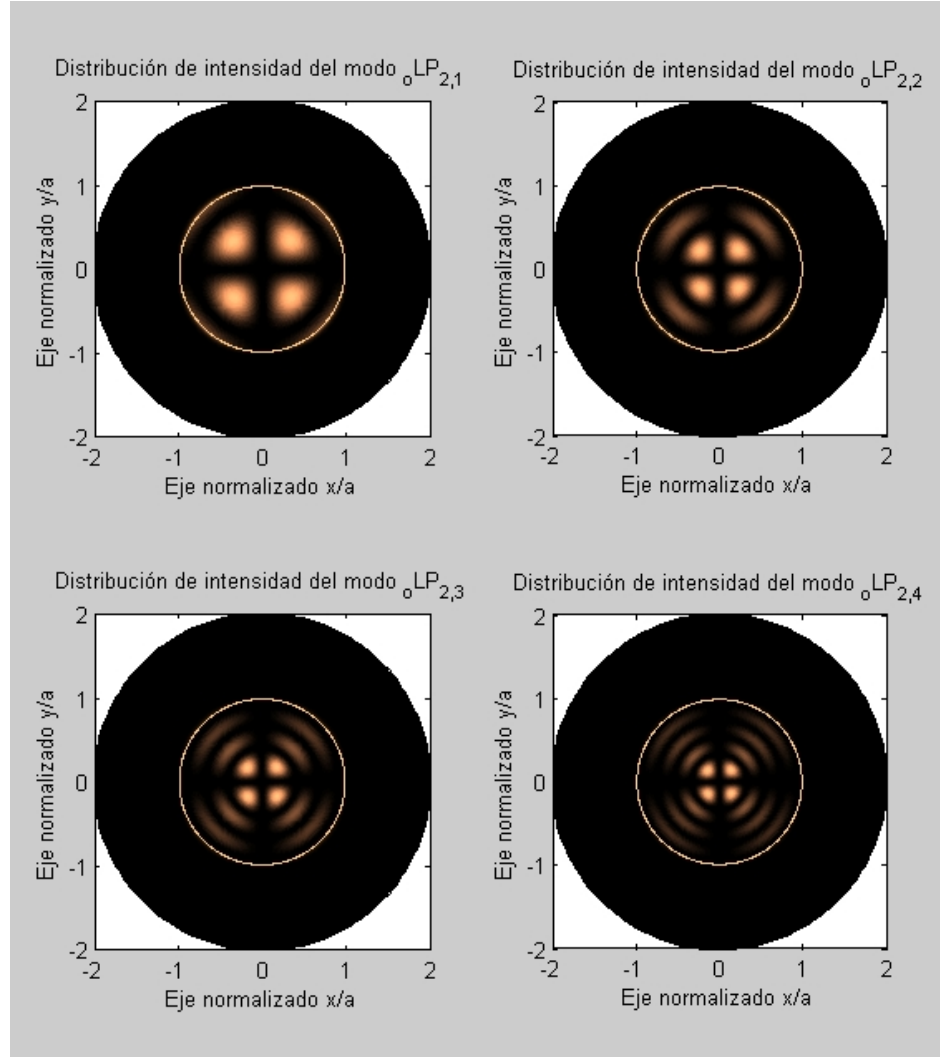


Figura 4.11: Distribución de la intensidad de los modos ${}_oLP_{2,1}$, ${}_oLP_{2,2}$, ${}_oLP_{2,3}$ y ${}_oLP_{2,4}$ en una fibra óptica elíptica de índice abrupto, con $a = 25 \mu\text{m}$ y $b = 24.99 \mu\text{m}$.

En la figura 4.12 se muestran las distribuciones de la intensidad de los modos impares ${}_oLP_{2,n}$ que se propagan en una fibra óptica elíptica excentricidad es de $e = 0.8087$, la cual se obtiene al sustituir los valores de los ejes semimenor y semimayor en la ecuación (3.7).

Para poder graficar estos modos fue necesario cambiar la longitud de onda a $\lambda_0 = 0.1 \mu\text{m.}$, ya que al disminuir el tamaño del eje semimenor, el número de modos que se pueden propagar se reduce, por lo tanto es necesario disminuir la longitud de onda para poder obtener los modos ${}_oLP_{2,3}$, ${}_oLP_{2,4}$, ${}_oLP_{2,5}$ y ${}_oLP_{2,6}$, mostrados en la figura 4.12.

En esta figura se puede ver que mientras mayor sea el orden de los modos de propagación, entonces la distribución de la intensidad se expande hacia el revestimiento de la fibra óptica elíptica.

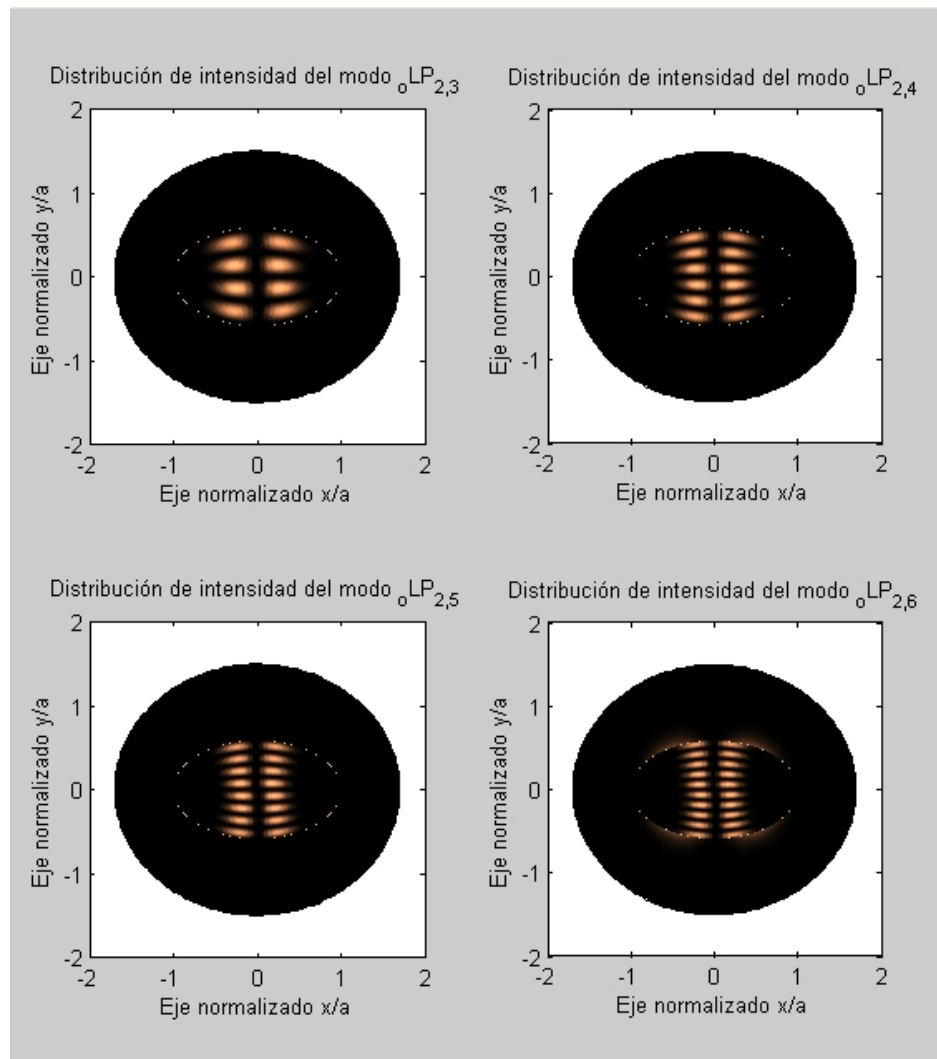


Figura 4.12: Distribución de la intensidad de los modos ${}_oLP_{2,3}$, ${}_oLP_{2,4}$, ${}_oLP_{2,5}$ y ${}_oLP_{2,6}$ en una fibra óptica elíptica de índice abrupto, con $a/b = 1.7$.

4.4.3. Modos ${}_oLP_{3,n}$

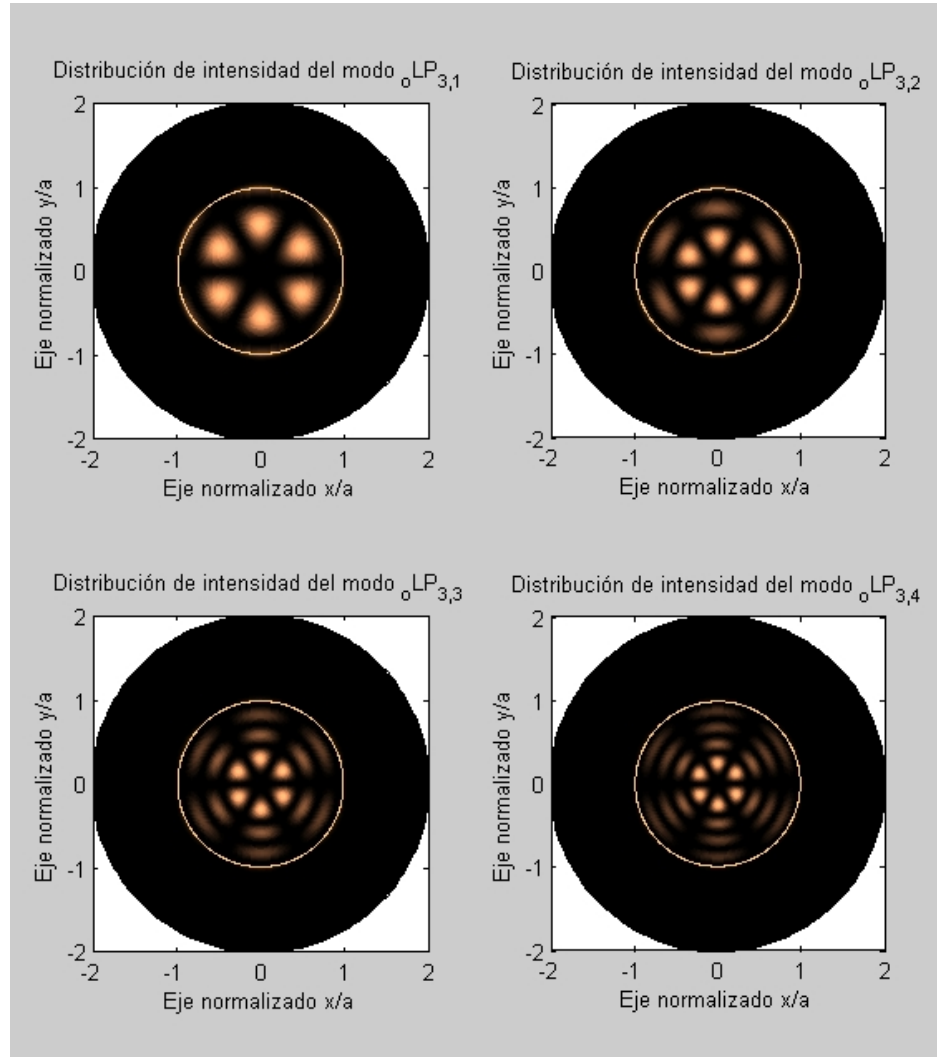


Figura 4.13: Distribución de la intensidad de los modos ${}_oLP_{3,1}$, ${}_oLP_{3,2}$, ${}_oLP_{3,3}$ y ${}_oLP_{3,4}$ en una fibra óptica elíptica de índice abrupto, con $a = 25 \mu\text{m}$ y $b = 24.99 \mu\text{m}$.

La figura 4.13 muestra la distribución de la intensidad de los modos impares LP en una fibra óptica elíptica, cuya excentricidad es $e = 0.028$, por lo cual, su sección transversal es casi de forma circular.

Si estas gráficas se rotaran 90° en sentido de las manecillas del reloj, se podría ver que estas distribuciones de intensidad son muy parecidas a las distribuciones de intensidad de los modos LP en las fibras ópticas circulares mostradas en la figura 2.10.

Los modos ${}_oLP_{3,n}$ de orden alto se muestran en la figura 4.14 para una fibra óptica con excentricidad $e = 0.890$. La longitud de onda de la luz empleada para obtener los modos ${}_oLP_{3,2}$, ${}_oLP_{3,3}$, ${}_oLP_{3,4}$ y ${}_oLP_{3,5}$, es $\lambda_0 = 0.1 \mu\text{m}$.

Se puede observar que la intensidad de estos modos en el centro del núcleo de la fibra y cerca del revestimiento, es aproximadamente la misma.

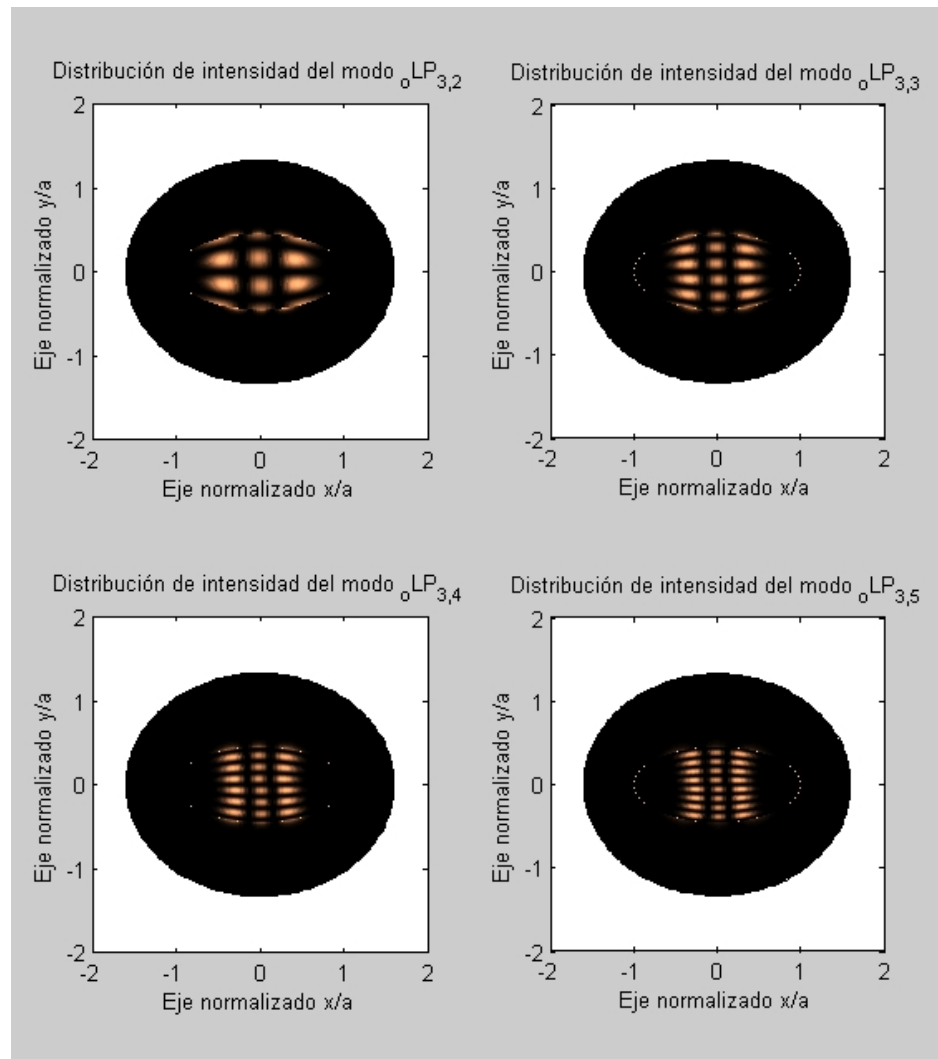


Figura 4.14: Distribución de la intensidad de los modos ${}_oLP_{3,2}$, ${}_oLP_{3,3}$, ${}_oLP_{3,4}$ y ${}_oLP_{3,5}$ en una fibra óptica elíptica de índice abrupto, con $a/b = 2.2$.

4.4.4. Modos ${}_oLP_{m,n}$, $m \geq 4$

En la figura 4.15 se muestra lo que ocurre con la distribución de la intensidad de los modos impares cuando el eje semimenor disminuye.

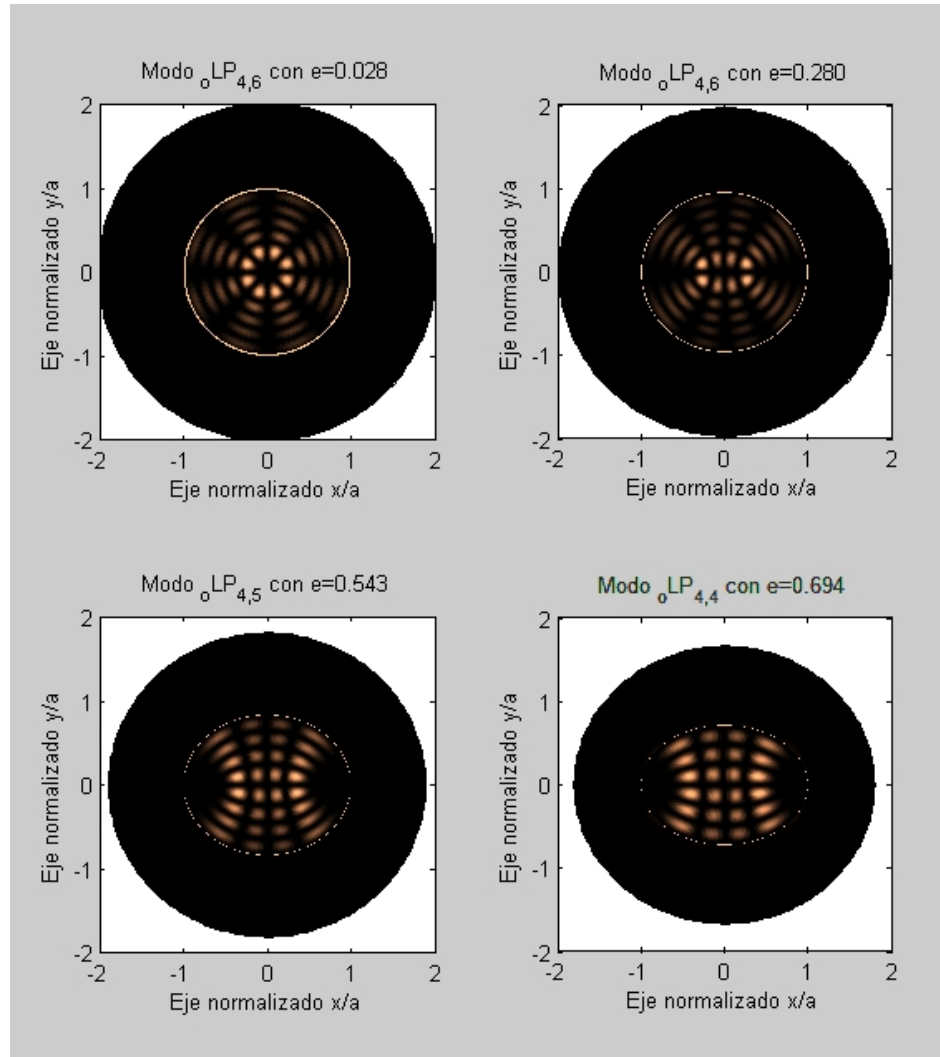


Figura 4.15: Distribución de la intensidad de los modos ${}_oLP_{4,n}$, para diferentes excentricidades.

Como se puede observar, la distribución del campo en la fibra óptica se cambia conforme la excentricidad de la elipse aumenta. Estas graficas se obtuvieron dejando fijo el eje semimayor $a = 25 \mu\text{m}$, mientras que el tamaño del eje semimenor disminuye de tal manera que se obtienen las excentricidades mostradas en la figura.

Finalmente, en la figura 4.16 se muestran los modos de propagación ${}_{o}LP_{7,5}$, ${}_{o}LP_{7,6}$, ${}_{o}LP_{7,7}$ y ${}_{o}LP_{7,8}$, en una fibra óptica elíptica con excentricidad $e = 0.898$, que corresponde a un eje semimenor $b = 11 \mu\text{m}$ y al eje semimayor $a = 25 \mu\text{m}$.

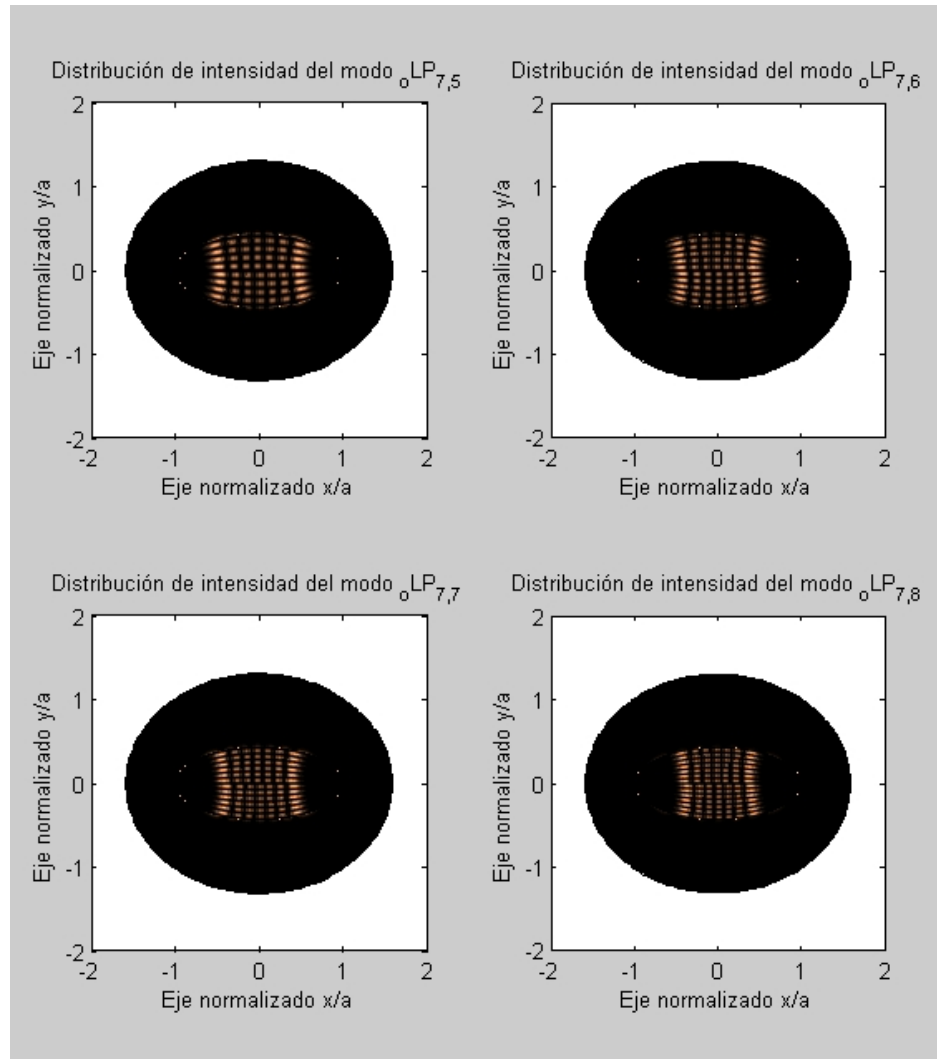


Figura 4.16: Distribución de la intensidad de los modos ${}_{o}LP_{7,5}$, ${}_{o}LP_{7,6}$, ${}_{o}LP_{7,7}$ y ${}_{o}LP_{7,8}$ en una fibra óptica elíptica de índice abrupto, con $a/b = 2.27$.

Capítulo 5

Conclusiones

Existe una amplia variedad de fibras ópticas que son capaces de mantener la polarización de la luz mientras se propaga a través de ellas. Estos tipos de fibras se pueden clasificar como fibras de alta birrefringencia y fibras de baja birrefringencia [9]. La birrefringencia se define como la diferencia entre las constantes de propagación normalizadas ${}_o\bar{\beta} - {}_e\bar{\beta} = \Delta\bar{\beta}$, donde la constante de propagación normalizada es $\bar{\beta} = \beta/k_0$.

Las fibras ópticas de núcleo elíptico son fibras de alta birrefringencia, por lo tanto estas fibras pueden mantener la polarización de la luz desacoplando las constantes de propagación de los modos pares e impares. Esto provoca que el modo que está orientado a lo largo del eje mayor de la elipse (${}_o\text{HE}$) viaje más lento que el modo que está paralelo al eje menor (${}_e\text{HE}$), debido a esto se les puede llamar modo lento y modo rápido.

Los modos de propagación LP no son modos exactos, ya que para obtenerlos se considera que la diferencia entre los índices de refracción del núcleo y del revestimiento es muy pequeña ($n_1/n_2 - 1 \ll 1$). Dicho de otra manera, los modos LP son modos de propagación casi TEM (Transversal Electromagnético), lo cual no es válido porque en las fibras ópticas elípticas se requiere que ambas componentes de campo eléctrico y magnético longitudinales estén presentes ($E_z \neq 0$ y $H_z \neq 0$). Sin embargo, los modos LP son una buena aproximación que sirven para poder visualizar la distribución de los campos en la sección transversal de las fibras ópticas.

Los resultados obtenidos en el capítulo 4 mediante el uso de las funciones Mathieu, indican que los modos LP para las fibras ópticas circulares son un caso particular de los modos LP para las fibras ópticas elípticas cuando el eje semimayor es aproximadamente igual al eje semimenor ($a \approx b$). Esto se debe a que las funciones Mathieu tienen un cierto parecido con las funciones Bessel empleadas para obtener los modos de propagación en las fibras ópticas circulares. Las funciones ce y se son expansiones en series de funciones cosenoidales y senoidales, las funciones Ce y Se son parecidas a las funciones Bessel J y las funciones Fek y Gek tienen un comportamiento similar al de las funciones Bessel K .

De las gráficas que muestran las distribuciones de la intensidad de la luz en las fibras ópticas elípticas se puede ver que el número de modos de propagación disminuye cuando:

- La excentricidad de la elipse aumenta.
- El índice de refracción del núcleo n_1 disminuye.
- El índice de refracción del revestimiento n_2 aumenta.
- La longitud de onda de la luz λ_0 aumenta.

Las fibras ópticas elípticas pueden tener aplicación en los sistemas de comunicación por fibras ópticas, ya que reducen la dispersión por modo de polarización debido a que pueden mantener la polarización de los modos de propagación. Por esta característica también se pueden emplear como sensores de fibra, polarizadores, acopladores, filtros, aisladores, entre otras aplicaciones.

5.1. Investigaciones futuras

En esta tesis se presentan los modos de propagación que se obtienen mediante la aproximación de guiado débil. Un trabajo que se podría realizar en esta línea de investigación es la obtención de resultados más exactos mediante la solución de los determinantes infinitos (4.30) y (4.36) para los modos pares e impares respectivamente. Se pueden tomar algunos términos de este determinante y utilizar las funciones Mathieu para poder obtener las constantes de propagación de cada uno de los modos que se pueden propagar en la fibra óptica elíptica.

Si se realiza un análisis similar al hecho en esta tesis, se podrían obtener los modos de propagación en guías de onda cuyo núcleo tenga un perfil geométrico diferente al de una elipse o un círculo.

Apéndice A

Campos transversales en fibras ópticas elípticas

Las componentes de campo transversales en las fibras ópticas elípticas se obtienen a partir de las ecuaciones de Maxwell [1], [22]

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}, \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E}, \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Para ello se aplica el rotacional en coordenadas elípticas-cilíndricas [13] al campo eléctrico en la ley de Faraday (A.1)

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{1}{h_1^2} \begin{vmatrix} h_1\hat{a}_\xi & h_1\hat{a}_\eta & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ h_1E_\xi & h_1E_\eta & E_z \end{vmatrix} = -j\omega\mu [H_\xi\hat{a}_\xi + H_\eta\hat{a}_\eta + H_z\hat{a}_z], \quad (\text{A.5})$$

donde

$$h_1 = q\sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta}. \quad (\text{A.6})$$

Resolviendo el determinante e igualando componentes se obtiene

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial E_z}{\partial \eta} - \frac{\partial E_\eta}{\partial z} = -j\omega\mu H_\xi, \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial E_\xi}{\partial z} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial E_z}{\partial \xi} = -j\omega\mu H_\eta, \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial E_\eta}{\partial \xi} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial E_\xi}{\partial \eta} = -j\omega\mu H_z, \quad (\text{A.9})$$

se asume propagación en dirección z , por lo tanto el campo eléctrico y el campo magnético se pueden escribir como

$$\vec{E} = \vec{E}_0(\xi, \eta)e^{-\gamma z} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = -\gamma \vec{E}, \quad (\text{A.10})$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0(\xi, \eta)e^{-\gamma z} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} = -\gamma \vec{H}, \quad (\text{A.11})$$

donde $\gamma = \alpha + j\beta$. α es la constante de atenuación y β es la constante de propagación.

Sustituyendo estas ecuaciones en (A.7) y (A.8), se obtienen las ecuaciones

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial E_z}{\partial \eta} + \gamma E_\eta = -j\omega\mu H_\xi, \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \gamma E_\xi = j\omega\mu H_\eta, \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial E_\eta}{\partial \xi} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial E_\xi}{\partial \eta} = -j\omega\mu H_z. \quad (\text{A.14})$$

Ahora de la ley de Ampère (A.2)

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{h_1^2} \begin{vmatrix} h_1 \hat{a}_\xi & h_1 \hat{a}_\eta & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ h_1 H_\xi & h_1 H_\eta & H_z \end{vmatrix} = j\omega\varepsilon [E_\xi \hat{a}_\xi + E_\eta \hat{a}_\eta + E_z \hat{a}_z], \quad (\text{A.15})$$

se obtienen las ecuaciones

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial H_z}{\partial \eta} + \gamma H_\eta = j\omega\varepsilon E_\xi, \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial H_z}{\partial \xi} + \gamma H_\xi = -j\omega\varepsilon E_\eta, \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial H_\eta}{\partial \xi} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial H_\xi}{\partial \eta} = j\omega\varepsilon E_z, \quad (\text{A.18})$$

si se despeja H_ξ de (A.17) y se sustituye en la ecuación (A.12) se obtiene

$$E_\eta = \left(\frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega\mu\varepsilon} \right) \left(-\frac{1}{h_1} \frac{\partial E_z}{\partial \eta} + \frac{j\omega\mu}{\gamma h_1} \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right), \quad (\text{A.19})$$

de esta misma manera, combinando las ecuaciones (A.12), (A.13), (A.14), (A.16), (A.17) y (A.18), se obtienen las siguientes ecuaciones

$$E_\xi = \left(\frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega\mu\varepsilon} \right) \left(-\frac{1}{h_1} \frac{\partial E_z}{\partial \xi} - \frac{j\omega\mu}{\gamma h_1} \frac{\partial H_z}{\partial \eta} \right), \quad (\text{A.20})$$

$$H_\eta = \left(\frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega\mu\varepsilon} \right) \left(-\frac{j\omega\varepsilon}{\gamma h_1} \frac{\partial E_z}{\partial \xi} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial H_z}{\partial \eta} \right), \quad (\text{A.21})$$

$$H_\xi = \left(\frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega\mu\varepsilon} \right) \left(\frac{j\omega\varepsilon}{\gamma h_1} \frac{\partial E_z}{\partial \eta} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right), \quad (\text{A.22})$$

las cuales son las componentes transversales y solamente están en términos de las componentes longitudinales E_z y H_z definidas por [17], [18]

Para el núcleo ($0 \leq \xi \leq \xi_0$)

$${}_e H_{z1} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m C e_m(\xi, \gamma_1^2) c e_m(\eta, \gamma_1^2) e^{j\beta z}, \quad (\text{A.23})$$

$${}_e E_{z1} = \sum_{m=1}^{\infty} B_m S e_m(\xi, \gamma_1^2) s e_m(\eta, \gamma_1^2) e^{j\beta z}, \quad (\text{A.24})$$

y para el revestimiento ($\xi_0 \leq \xi < \infty$)

$${}^e H_{z2} = \sum_{r=0}^{\infty} L_r \text{Fek}_r(\xi, -\gamma_2^2) \text{ce}_r(\eta, -\gamma_2^2) e^{j\beta z}, \quad (\text{A.25})$$

$${}^e E_{z2} = \sum_{r=1}^{\infty} P_r \text{Gek}_r(\xi, -\gamma_2^2) \text{se}_r(\eta, -\gamma_2^2) e^{j\beta z}, \quad (\text{A.26})$$

sustituyendo estas componentes longitudinales en las ecuaciones (A.19) y (A.21), y considerando una fibra óptica sin pérdidas ($\alpha = 0$), se obtienen las ecuaciones

$$H_{\eta 1} = \frac{j\beta q^2}{4\gamma_1^2} \left[-\frac{\omega\varepsilon_1}{\beta h_1} \sum_{m=1}^{\infty} B_m \text{Se}'_m(\xi, \gamma_1^2) \text{se}_m(\eta, \gamma_1^2) - \frac{1}{h_1} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \text{Ce}_m(\xi, \gamma_1^2) \text{ce}'_m(\eta, \gamma_1^2) \right] e^{j\beta z}, \quad (\text{A.27})$$

$$E_{\eta 1} = \frac{j\beta q^2}{4\gamma_1^2} \left[-\frac{1}{h_1} \sum_{m=1}^{\infty} B_m \text{Se}_m(\xi, \gamma_1^2) \text{se}'_m(\eta, \gamma_1^2) + \frac{\omega\mu}{\beta h_1} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \text{Ce}'_m(\xi, \gamma_1^2) \text{ce}_m(\eta, \gamma_1^2) \right] e^{j\beta z}, \quad (\text{A.28})$$

$$H_{\eta 2} = -\frac{j\beta q^2}{4\gamma_2^2} \left[-\frac{\omega\varepsilon_2}{\beta h_1} \sum_{r=1}^{\infty} P_r \text{Gek}'_r(\xi, -\gamma_2^2) \text{se}_r(\eta, -\gamma_2^2) - \frac{1}{h_1} \sum_{r=0}^{\infty} L_r \text{Fek}_r(\xi, -\gamma_2^2) \text{ce}'_r(\eta, -\gamma_2^2) \right] e^{j\beta z}, \quad (\text{A.29})$$

$$E_{\eta 2} = -\frac{j\beta q^2}{4\gamma_2^2} \left[-\frac{1}{h_1} \sum_{r=1}^{\infty} P_r \text{Gek}_r(\xi, -\gamma_2^2) \text{se}'_r(\eta, -\gamma_2^2) + \frac{\omega\mu}{\beta h_1} \sum_{r=0}^{\infty} L_r \text{Fek}'_r(\xi, -\gamma_2^2) \text{ce}_r(\eta, -\gamma_2^2) \right] e^{j\beta z}, \quad (\text{A.30})$$

Apéndice B

Fórmulas para $\alpha_{r,n}$, $\beta_{r,n}$, $\chi_{m,n}$ y $\nu_{m,n}$

Los coeficientes $\alpha_{r,n}$, $\beta_{r,n}$, $\chi_{m,n}$ y $\nu_{m,n}$ se obtienen a partir de las expansiones

$$ce_r(\eta, -\gamma_2^2) = \sum_{n=0}^{\infty} ' \alpha_{r,n} ce_n(\eta, \gamma_1^2), \quad (\text{B.1})$$

$$se_r(\eta, -\gamma_2^2) = \sum_{n=1}^{\infty} ' \beta_{r,n} se_n(\eta, \gamma_1^2), \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{d}{d\eta} ce_m(\eta, \gamma_1^2) = \sum_{n=1}^{\infty} ' \chi_{m,n} se_n(\eta, \gamma_1^2), \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{d}{d\eta} se_m(\eta, \gamma_1^2) = \sum_{n=0}^{\infty} ' \nu_{m,n} ce_n(\eta, \gamma_1^2). \quad (\text{B.4})$$

Para obtener $\alpha_{r,n}$, la ecuación (B.1) se multiplica por $ce_s(\eta, \gamma_1^2)$ y se integra de 0 a 2π con respecto a η

$$\int_0^{2\pi} ce_r(\eta, -\gamma_2^2) ce_s(\eta, \gamma_1^2) d\eta = \sum_{n=0}^{\infty} ' \alpha_{r,n} \int_0^{2\pi} ce_n(\eta, \gamma_1^2) ce_s(\eta, \gamma_1^2) d\eta, \quad (\text{B.5})$$

aplicando la propiedad de ortogonalidad de las funciones Mathieu

$$\int_0^{2\pi} ce_m(\eta, \gamma_1^2) ce_n(\eta, \gamma_1^2) d\eta = \int_0^{2\pi} se_m(\eta, \gamma_1^2) se_n(\eta, \gamma_1^2) d\eta = \delta_{m,n} \pi, \quad (\text{B.6})$$

donde

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1; & m = n, \\ 0; & m \neq n, \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

es la función delta de Kronecker.

Entonces la ecuación (B.5) cuando $n = s$ es

$$\int_0^{2\pi} ce_r(\eta, -\gamma_2^2) ce_s(\eta, \gamma_1^2) d\eta = \alpha_{r,s} \int_0^{2\pi} ce_s^2(\eta, \gamma_1^2) d\eta,$$

cambiando s por n

$$\alpha_{r,n} = \frac{\int_0^{2\pi} ce_r(\eta, -\gamma_2^2) ce_n(\eta, \gamma_1^2) d\eta}{\int_0^{2\pi} ce_n^2(\eta, \gamma_1^2) d\eta} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} ce_r(\eta, -\gamma_2^2) ce_n(\eta, \gamma_1^2) d\eta, \quad (\text{B.8})$$

haciendo el mismo procedimiento para las expansiones (B.2), (B.3) y (B.4) se obtienen las ecuaciones para $\beta_{r,n}$, $\chi_{m,n}$ y $\nu_{m,n}$

$$\beta_{r,n} = \frac{\int_0^{2\pi} se_r(\eta, -\gamma_2^2) se_n(\eta, \gamma_1^2) d\eta}{\int_0^{2\pi} se_n^2(\eta, \gamma_1^2) d\eta} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} se_r(\eta, -\gamma_2^2) se_n(\eta, \gamma_1^2) d\eta, \quad (\text{B.9})$$

$$\chi_{m,n} = \frac{\int_0^{2\pi} ce'_m(\eta, \gamma_1^2) se_n(\eta, \gamma_1^2) d\eta}{\int_0^{2\pi} se_n^2(\eta, \gamma_1^2) d\eta} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} ce'_m(\eta, \gamma_1^2) se_n(\eta, \gamma_1^2) d\eta, \quad (\text{B.10})$$

$$\nu_{m,n} = \frac{\int_0^{2\pi} se'_m(\eta, \gamma_1^2) ce_n(\eta, \gamma_1^2) d\eta}{\int_0^{2\pi} ce_n^2(\eta, \gamma_1^2) d\eta} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} se'_m(\eta, \gamma_1^2) ce_n(\eta, \gamma_1^2) d\eta. \quad (\text{B.11})$$

Bibliografía

- [1] A. H. Cherin, *An Introduction to Optical Fiber*. McGraw Hill, 1983.
- [2] A. Ghatak and K. Thyagarajan, *Introduction to Fiber Optics*. Cambridge University Press, 1998.
- [3] G. P. Agrawal, *Fiber-Optic Communication Systems*. John Wiley and Sons Inc., 1992.
- [4] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*. San Diego: Academic Press, 3rd Ed., 2001.
- [5] A. Hasegawa and M. Matsumoto, *Optical Solitons in Fibers*. Springer, 3rd Ed., 2003.
- [6] I. P. Kaminow, “Polarization in Optical Fibers,” *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. QE-17, No. 1, pp. 15–22, January 1981.
- [7] S. C. Rashleigh, “Origins and Control of Polarization Effects in Single-Mode Fibers,” *Journal of Lightwave Technology*, Vol. LT-1, No. 2, pp. 312–331, June 1983.
- [8] R. B. Dyott, *Elliptical Fiber Waveguides*. Artech House, Inc., 1995.
- [9] J. Noda, K. Okamoto and Y. Sasaki, “Polarization-Maintaining Fibers and Their Applications,” *Journal of Lightwave Technology*, Vol. LT-4, No. 8, pp. 1071–1089, August 1986.
- [10] N. Shibata, M. Tateda, S. Seikai, and N. Uchida, “Birefringence and polarization-mode dispersion caused by thermal stress in singlemode fibers with various core ellipticities,” *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. QE-19, No. 8, pp. 1223–1227, August 1983.
- [11] S. C. Rashleigh and M. J. Marrone, “Polarization holding in elliptical-core birefringent fibers,” *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. QE-18, No. 10, pp. 1515–1523, October 1982.

- [12] A. W. Snyder, “Asymptotic Expressions for Eigenfunctions and Eigenvalues of a Dielectric or Optical Waveguide,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MIT-17, No. 12, pp. 1130–1138, December 1969.
- [13] M. R. Spiegel and L. Abellanas, *Fórmulas y tablas de matemática aplicada*. McGraw Hill, 1988.
- [14] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. Washington, DC: National Bureau of Standards, 1964. Reprinted by Dover Publications, New York, 1968.
- [15] N. W. McLachlan, *Theory and Application of Mathieu Functions*. Oxford: Clarendon Press, 1995.
- [16] S. Zhang and J. Jin, *Computation of Special Functions*. Wiley Interscience, 1996.
- [17] C. Yeh, “Elliptical Dielectric Waveguides,” *Journal of Applied Physics*, Vol. 33, No. 11, pp. 3235–3243, November 1962.
- [18] C. Yeh, “Modes in weakly elliptical optical fibre,” *Optical and Quantum Electronics*, Vol. 8, pp. 43–47, 1976.
- [19] X. Hu, R.B. South and M.J. Rutter, “Analysis of linearly polarised modes in elliptical-core fibre,” *Optoelectronics, IEE Proceedings*, Vol. 114, No. 6, pp. 356–362, December 1994.
- [20] C. Yeh, “On weakly guiding single-mode optical waveguides,” *Journal of Lightwave Technology*, Vol. LT-3, No. 1, pp. 199–205, February 1985.
- [21] J. K. Shaw, “Weakly Guiding Analysis of Elliptical Core Step Index Waveguides Based on the Characteristic Numbers of Mathieu’s equation,” *Journal of Lightwave Technology*, Vol. 13, No. 12, pp. 2359–2371, December 1995.
- [22] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, 3rd Ed., 1999.