INSTITUTO TECNOLOGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY
CAMPUS MONTERREY
DIVISION DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
PROGRAMA DE GRADUADOS EN INGENIERIA

ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO INELASTICO A FLEXION DE VIGAS POR EFECTOS DEL AGRIETAMIENTO Y SUS IMPLICACIONES EN LA REDISTRIBUCION DE MOMENTOS

TESIS

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

ESPECIALIDAD EN INGENIERIA CIVIL
(INGENIERIA ESTRUCTURAL)

POR
RAYMUNDO ANTONIO CORDERO CUEVAS

ENERO DE 2001

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY

CAMPUS MONTERREY

DIVISIÓN DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA
PROGRAMA DE GRADUADOS EN INGENIERÍA

ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO INELÁSTICO A FLEXIÓN DE VIGAS POR EFECTOS DEL AGRIETAMIENTO Y SUS IMPLICACIONES EN LA REDISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS

TESIS

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

ESPECIALIDAD EN INGENIERÍA CIVIL
(INGENIERÍA ESTRUCTURAL)

POR:

RAYMUNDO ANTONIO CORDERO CUEVAS

ENERO, 2001

Dedicatoria

A Leticia por su incondicional amor, apoyo

y comprensión siempre.

A Angel, a Dinorah, a Adrián, quienes

contribuyeron a este esfuerzo sin saberlo.

A Don Efraín y a Doña Victoria por su

excelente ejemplo.

Agradecimientos

A Dios Nuestro Señor por la vida

y por la salud.

Al Dr. Francisco Yeomans por sus enseñanzas, apoyo

y paciencia, un gran compañero.

A Felipe y Lorena, a Enrique y Yolanda, compañeros y amigos

incomparabes.

A todos mis compañeros y amigos del Departamento de

Ingeniería Civil por su apoyo y gran camaradería.

Resumen

El Reglamento de las Construcciones de Concreto Reforzado (Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-95) and Commentary (ACI 318R-95)), en su artículo 8.4 permite tomar en cuenta la redistribución de momentos para reducir o aumentar los momentos negativos calculados por teoría elástica en los apoyos de elementos continuos sujetos a flexión para cualquier distribución de carga. Este reglamento permite hasta un máximo de 20% de reducción o aumento en los momentos en función de la cuantía de acero a compresión presente en la sección crítica correspondiente. La cuantía de acero a compresión en una sección de concreto reforzado está directamente relacionado con la capacidad de la sección de resistir momentos por flexión más allá del límite de proporcionalidad, en la zona plástica comprendida entre el momento de fluencia del acero y el momento último en el punto de falla de la sección por aplastamiento del concreto. Lo anterior implica la formación de articulaciones plásticas en las secciones críticas que permiten la redistribución de momentos en un miembro determinado.

La intención del presente trabajo es la de hacer una revisión de los resultados de las pruebas que llevaron al ajuste permitido por el reglamento bajo la hipótesis de que el porcentaje propuesto es conservador, es decir que la capacidad de una sección en la zona plástica permitirá una mayor redistribución de momentos que la permitida y por ende una mayor reducción o aumento de los momentos en las secciones críticas. La investigación comprende la evaluación del porcentaje de reducción/aumento de momento a través de simulación computacional que incluye el uso de modelos teóricos y experimentales de comportamiento mecánico ampliamente aceptados en la comunidad de investigación en concreto, así como modelos de análisis basados en la teoría elástica para la evaluación de fuerzas internas en miembros de concreto, según la práctica convencional. Esto incluye el análisis de primero y segundo orden para miembros continuos de concreto reforzado. La investigación se limita a miembros de sección rectangular.

Contenido

Capítulo 4

PLAN DE PRUEBAS Y RESULTADOS

Capítulo 5

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

CAPITULO 1

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

El Reglamento de las Construcciones de Concreto Reforzado[39] (Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-95) and Commentary (ACI 318R-95)), en su artículo 8.4 permite tomar en cuenta la redistribución de momentos para reducir o aumentar los momentos negativos calculados por teoría elástica en los apoyos de elementos continuos de concreto reforzado sujetos a flexión para cualquier distribución de carga. Este reglamento permite hasta un máximo de 20% de reducción o aumento en los momentos en función de la cuantía de acero a compresión presente en la sección crítica correspondiente. Según se describe en el reglamento, la cuantía de acero a compresión en una sección de concreto reforzado está directamente relacionada con la capacidad de la sección de resistir momentos flectores más allá del límite de proporcionalidad. Esto supone la aportación de rigidez adicional desarrollada en la zona plástica comprendida entre el momento de fluencia del acero y el momento último, en el punto de falla de la sección por aplastamiento del concreto. Lo anterior implica la capacidad para la formación de articulaciones plásticas en las secciones críticas que permiten la redistribución de momentos en un miembro determinado.

El artículo 8.4 del reglamento ACI 318-95 señala:

8.4 Redistribución de momentos negativos en elementos continuos no presforzados sujetos a flexión

8.4.1 Excepto cuando se empleen valores aproximados para los momentos, los momentos negativos calculados por medio de la teoría elástica en los apoyos de elementos continuos sujetos a flexión para cualquier distribución supuesta de carga, se pueden aumentar o disminuir en no más de:

$$20\left(1-\frac{\rho-\rho'}{\rho_b}\right)$$

dado en porcentaje.

8.4.2 Los momentos negativos modificados se deben usar para calcular los momentos en las secciones dentro de los claros.

8.4.3 La redistribución de los momentos negativos se debe hacer sólo cuando la sección en la cuál se reduce el momento se diseñe de tal manera que ρ o (ρ - ρ') no sea mayor que $0.5\rho_b$, donde:

$$\rho_b = \frac{0.85\beta_1 f'_C}{f_Y} \frac{6100}{f_Y + 6100}$$

y en sus correspondientes comentarios en el ACI 318R-95, se discuten en breve los fundamentos para las indicaciones del reglamento, de donde podemos extraer lo siguiente:

La redistribución de momentos depende de una adecuada ductilidad en las zonas de articulación plástica. Estas zonas de articulación plástica se desarrollan en los puntos de momento máximo y provocan un cambio de posición en el diagrama de momentos elásticos. El resultado habitual es una reducción en los valores de los momentos negativos en la zona de articulación plástica, y un incremento en los valores de los momentos positivos con respecto a aquéllos calculados por el análisis elástico.

Las articulaciones plásticas permiten utilizar la capacidad total de más secciones transversales de un elemento sujeto a flexión en condición de cargas últimas.

Utilizando valores conservadores de deformaciones últimas en el concreto y longitudes de articulaciones plásticas, obtenidas de pruebas exhaustivas, se analizaron elementos sujetos a flexión con una pequeña capacidad de rotación para estudiar la redistribución de momentos variándolos de 10 a 20%, dependiendo del porcentaje del acero de refuerzo. Se encontró que lso resultados son conservadores.

Para apoyar estos comentarios el reglamento presenta la siguiente gráfica:

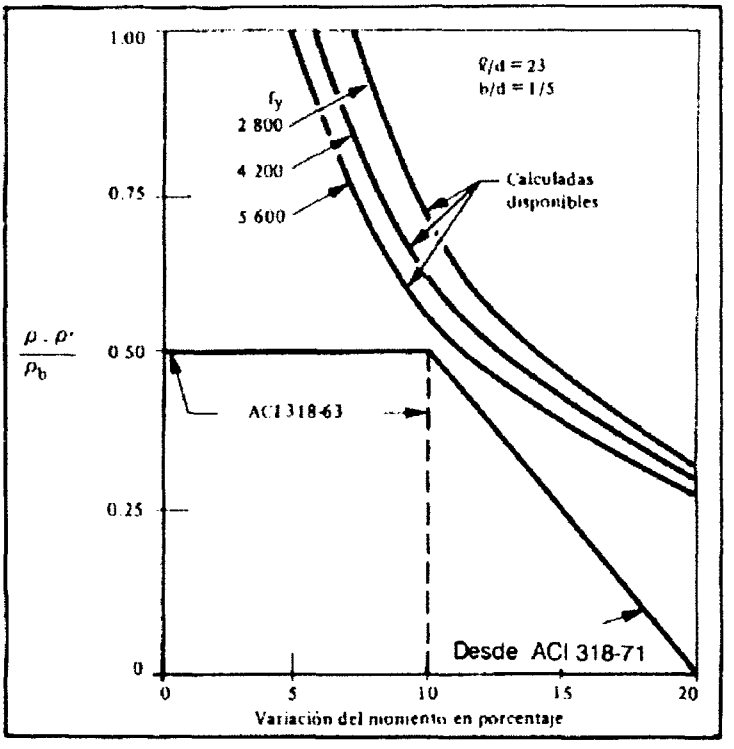


Figura. R8.4 del Reglamento ACI318-95.

En esta gráfica se presentan condiciones muy específicas, estableciendo las relaciones L/d = 23 y b/d = 1/5 para el elemento de prueba, y muestra una clara ausencia de factores que indiquen la influencia de la capacidad a compresión del concreto (f'_c). Así pues, la presente investigación intenta explorar un poco más allá acerca de la información presentada en el reglamento ACI318-95 para la redistribución de momentos, así como la información obtenida de la investigación bibliográfica para reproducir y evaluar los factores que inciden en la redistribución de momentos, como los efectos del agrietamiento y la generación de articulaciones plásticas, empleando modelos de la mecánica clásica y métodos numéricos en una herramienta de simulación computacional, como más adelante se detalla.

1.1. Objetivos de la línea de investigación

La presente investigación se ubica dentro de tres de las líneas de investigación en las que actualmente se trabaja dentro del claustro de la maestría en Ingeniería Estructural, estas son, la *evaluación y caracterización de materiales,* que se enfoca en el estudio del comportamiento de los materiales constitutivos de los elementos estructurales de uso común así como de nuevos

materiales que han sido aplicados recientemente para la conformación de elementos estructurales; por otro lado, la línea sobre el *estudio de elementos y sistemas estructurales*, en la cuál se basa la mayor parte del trabajo realizado por el claustro de la maestría en Ingeniería Estructural; y finalmente la línea de investigación sobre *mecánica computacional*, la cuál por muchos años ha sido un área de desarrollo en esta especialidad en el claustro y en el departamento de Ingeniería Civil en su conjunto.

1.2. Objetivo de la investigación

La intención del presente trabajo es la de hacer una revisión de los resultados de las pruebas que llevaron al ajuste permitido por el reglamento bajo la hipótesis de que el porcentaje propuesto es conservador, es decir que la capacidad de una sección en la zona plástica permitirá una mayor redistribución de momentos que la permitida por el reglamento y por ende una mayor reducción o aumento de los momentos en las secciones críticas. La investigación comprende la evaluación del porcentaje de reducción/aumento de momento a través de simulación computacional que incluye el uso de modelos teóricos de comportamiento mecánico bajo el enfoque clásico ampliamente aceptados en la comunidad de investigación y diseño en concreto, así como modelos de análisis basados en la teoría elástica para la evaluación de fuerzas internas en miembros de concreto, según la práctica convencional. Esto incluye el análisis de primero y segundo orden para miembros de concreto reforzado de un solo claro. Debido a la relevancia que implican los factores mecánicos como la variación de la cuantía de acero en tensión y compresión, la relación *b/d* (ancho/peralte), la ductilidad y otros factores, la investigación se limita a miembros de sección rectangular para mantener la geometría de la sección dentro de la forma más empleada y también por consideraciones meramente prácticas. Es claro que los resultados obtenidos de este trabajo no podrán considerarse para casos que no empleen una sección transversal rectangular, pero los resultados reflejan consideraciones relevantes para la forma seccional más usada en la práctica.

Para enmarcar las intenciones y el alcance de la investigación podemos enumerar los siguientes objetivos particulares:

1. Lograr describir con un buen grado de representatividad y fidelidad, el comportamiento de la curva momento-curvatura, M-ϕ , de una sección rectangular de concreto reforzado con acero a tensión/compresión, obtenidos por simulación computacional.
2. Evaluar el índice de ductilidad, U_i (donde $U_i = \phi_u / \phi_y$) obtenido de la gráfica M-ϕ , y compararlo con los valores esperados obtenidos por otros procedimientos como validación a la curva M-ϕ .

3. Lograr describir, a partir de la gráfica M-ϕ , el comportamiento de la rigidez flectora EI en función del momento actuante sobre la sección, calculada como la pendiente instantánea de la curva M-ϕ , a partir de la relación $EI_i = \Delta M_i / \Delta\phi_i$. Evaluar estos resultados respecto de los valores sugeridos por el modelo de Branson para el cálculo de la inercia efectiva I_e y por ende de la rigidez efectiva de la sección, EI_e .
4. Llevar a cabo un análisis a partir del cálculo de los coeficientes rotacionales y de las fuerzas de empotramiento por trababajo virtual a partir de la discretización de las secciones a lo largo de la viga, considerando la variación de EI en la zona proporcional en antes del agrietamiento (M_{cr}), en la zona proporcional entre el agrietamiento y el punto de fluencia del acero a tensión (M_y), asi como en la zona plástica de las secciones próximas a la sección crítica, origen de las articulaciones plásticas.
5. A partir del análisis del punto anterior, evaluar el grado de redistribución de momentos negativos en vigas de un solo claro, con extremos empotrado-empotrado y empotrado-articulado, considerando la variabilidad de la relación *b/d* , la cuantía del acero tanto de tensión como de compresión, y los distintos grados de resistencia del acero y del concreto de uso común.
6. Finalmente, evaluar el comportamiento de la *longitud de la articulación plástica* así como de la *capacidad rotacional de la articulación plástica*, ambas desarrolladas a partir del comportamiento plástico de una serie de secciones en la vecindad de una sección crítica.

Capítulo 2

ESTADO DEL ARTE

El estudio de la redistribución de momentos ha sido por muchos años un tema sobre el cuál se han tomado distintos enfoques y alcances. Desde un punto de vista práctico, el problema no es simple. En las siguientes secciones se enmarca el problema mostrando el desarrollo del tema desde hace varias décadas, cuando investigadores como Mattock, Cohn y varios más iniciaron esfuerzos importantes encaminados a revelar los aspectos más útiles de la redistribución de momentos desde el punto de vista del diseño. Desde luego el tema da pie a la revisión de diferentes aspectos relacionados como las consideraciones de rigidez de una sección de concreto, la curva momento-curvatura, etc. Enseguida se revisan tales aspectos, presentados cronológicamente como los hallazgos más relevantes de la revisión de literatura llevada a cabo como parte de la presente investigación.

2.1. La rigidez a flexión de una sección de concreto armado

La tarea de reproducir el comportamiento de la rigidez de una sección de concreto armado en las distintas fases de deformación, es decir, la fase de sección no-agrietada, la fase de sección agrietada y la fase de fluencia de la sección o bien, llamada zona plástica, como se ha mencionado antes, implica desde luego el planteamiento de un modelo y un esquema para el cálculo de los estados críticos de la sección en función del momento actuante, es decir, el estado de deformación en el concreto, en el acero, el estado de esfuerzos correspondiente en ambos y la curvatura asociada a la acción. Como sabemos, esta historia de deformación de la sección se puede rastrear a partir de la curva M-ϕ. Es claro, que este comportamiento sirve de base para monitorear la pérdida de rigidez de una sección en función del momento actuando sobre ésta si consideramos que para un módulo de elasticidad constante del material E, que implica la interacción de ambos materiales, acero y concreto, podemos suponer que el producto EI corresponde a la llamada *rigidez tangente* obtenida de la relación

$$\phi = \frac{M}{EI}$$

o bien como rigidez tangente

$$EI\big|_T = \frac{dM}{d\phi} = \frac{\Delta M_i}{\Delta \phi_i}$$

donde ϕ es la curvatura producida por un momento actuante M para una sección con rigidez flectora EI. Desde luego esta relación básica corresponde a una condición ideal en la que se mantiene la proporcionalidad en el rango de las deformaciones permisibles, para un material homogéneo e isotrópico o por lo menos ortotrópico. Sin embargo, para el caso de una viga compuesta, como una viga de concreto armado, la relación EI ya no es tan evidente. Para ello se requiere pues de un esquema que dentro del marco de la compatibilidad de deformaciones y del equilibrio de fuerzas internas, provea el mecanismo que permita fijar las condiciones necesarias para un estado de esfuerzo-deformación para los puntos críticos a lo largo de la historia de deformación de la sección, es decir el punto (ϕ_{cr}, M_{cr}) que demarca el fin de la fase de sección no-agrietada y el inicio de la fase de agrietamiento, así como el punto (ϕ_y, M_y), que indica el inicio de la fase de fluencia ó la zona plástica, y finalmente el punto (ϕ_u, M_u) que representa el límite máximo de deformación permisible en el concreto y su correspondiente estado de esfuerzo-deformación, así como el momento resistente último. Adicionalmente, se requiere un mecanismo que permita evaluar estados intermedios entre estos puntos críticos que nos permita dar seguimiento al comportamiento de la relación M-ϕ a lo largo del rango de deformación permisible.

Existen varios esquemas sobre los cuales fundamentar nuestros cálculos, dentro de los cuales destacan varios métodos bien conocidos. Tenemos el método de Branson[1,2], empleado para el cálculo de la inercia efectiva en una sección del concreto, originalmente calculada y primordialmente usada para el cálculo de deflexiones, y que corresponde a una fórmula cerrada que permite obtener la rigidez efectiva de una sección de concreto armado para vigas bajo cargas de servicio. Ésta es una fórmula empírica que describe adecuadamente numerosas pruebas[3] y que ha sido adoptado por el Comité 435 del ACI. Conociendo las características de la sección es posible calcular la rigidez efectiva de una sección para un momento actuante dado, permitiendo el cálculo de la curvatura para tal momento. Debe hacerse notar que la fórmula de Branson para la rigidez efectiva no está orientada a niveles de carga por encima de las cargas de servicio donde se dan grandes deformaciones en el concreto y deformaciones plásticas en el acero.

Existe un método para la relación momento-curvatura sobre un rango más completo usando las propiedades intrínsecas del material que ha sido propuesto recientemente por Bazant y Oh[4]. En este método se considera la curva de esfuerzo-deformación no-lineal completa del concreto, incluyendo la región de suavización por deformación a tensión. El esfuerzo computacional necesario en este método es considerablemente mayor, a pesar de que este enfoque tiene la ventaja de ser aplicable a varias otras situaciones donde la microfractura progresiva toma un papel importante.

Resheidat[5] ha propuesto una curva momento-curvatura bilineal para estimar las deflexiones por cargas de servicio en losas de concreto armado. En este esquema la rigidez tangente de la sección después del agrietamiento se supone igual a la rigidez de toda la sección agrietada. De nuevo el esquema no aplica para niveles altos de carga.

Un esquema más reciente es el método sugerido por Alwis[6] quien propone una *relación momento-curvatura trilineal* que concuerda con la fórmula de Branson a niveles de carga de servicio, y con el esquema de Bazant y Oh a niveles de momento de fluencia, considera el comportamiento en las regiones de no-agrietamiento, de agrietamiento y de fluencia, las cuales se describen como segmentos lineales en donde solo tres variables, el módulo de elasticidad y las fuerzas de tensión y compresión, se usan para definir las propiedades del concreto. Los cálculos necesarios para obtener un punto de la curva para un momento dado son en esencia similares a los empleados al usar la fórmula de Branson, pero es una forma matemáticamente más simple desde el punto de vista de deflexiones y de aplicaciones computacionales. Alwis señala que la mayor ventaja de su propuesta es su simplicidad al aplicarse al análisis de deflexiones usando métodos numéricos. La figura 2.1 (Alwis, Fig. 1) presenta la forma trilineal de la relación momento-curvatura propuesta por Alwis y en la figura 2.2 (Alwis, Fig. 4a) se muestra la gráfica comparativa entre los esquemas de Alwis (trilineal), de Branson y de Bazant y Oh.

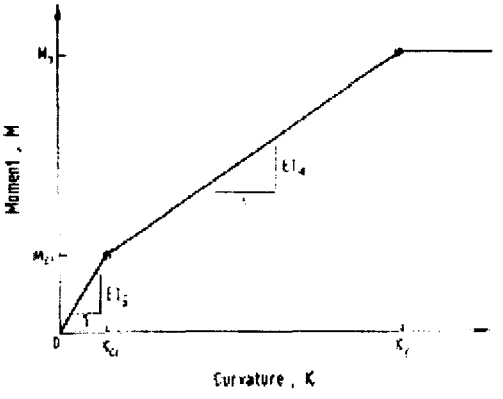


Figura 2.1 Curva *momento-curvatura* (*M-κ*) trilineal

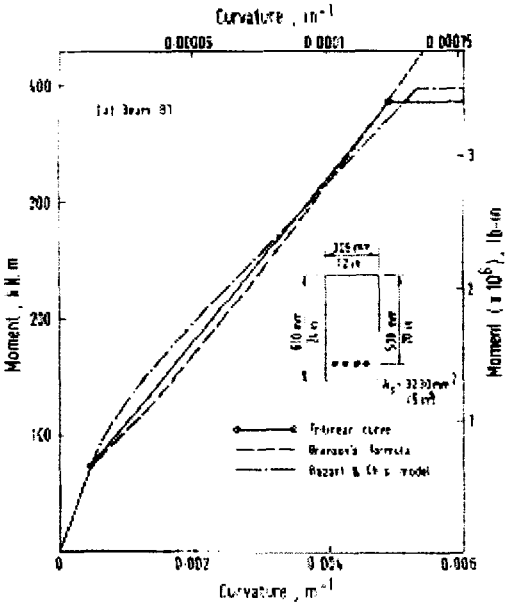


Figura 2.2 Comparación de curvas *momento-curvatura*

Según Alwis los modelos de momento-curvatura existentes que han demostrado describir adecuadamente el comportamiento del concreto son complicados desde el punto de vista de los métodos numéricos de análisis y a menudo se usan en esquemas tan populares como el método del elemento finito. En el contexto de la evaluación de la rigidez de una sección de concreto armado, basada en la fórmula de Branson para la inercia efectiva, habría que tomar en cuenta aspectos que afectan la forma convencional en que ha sido usada la propuesta de Branson. Varias investigaciones recientes han mostrado la falta de aplicabilidad de la fórmula de Branson a varias situaciones, algunas especiales y otras un tanto más típicas. En un estudio reciente de Al-*Zaid et al*[7] se sugiere que la inercia efectiva de una sección de concreto armado es sensible al efecto del tipo de carga y al nivel de carga al que se sujeta una viga de concreto, de modo que se presenta evidencia de que al examinar un grupo de vigas sujetas a carga puntual al centro, así como otro grupo de vigas sujetas a cargas puntuales a los tercios, e incluso un grupo sujeto a carga puntual al centro y carga uniformemente distribuida simultáneamente, en donde se detectan cambios importantes en los valores de la inercia efectiva. Desde luego en este estudio se evalúa el caso de la viga con carga uniformemente distribuida, como lo sugiere el estudio que llevó a Branson a la conocida fórmula.

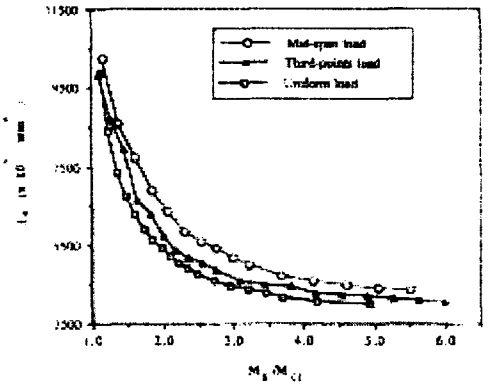


Figura 2.3 Variación del momento efectivo de inercia experimental con el nivel y tipo de carga

La figura 2.3 (AlZaid, fig. 3) muestra los resultados obtenidos del estudio de Al-Zaid *et al.* Para aliviar esta falta de consideración sobre el tipo y nivel de carga Al-Zaid *et al* han propuesto modificaciones que no alteran la forma básica de la fórmula de Branson,

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^m I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^m\right] I_{cr}$$

De manera que se propone el modificar el exponente 3 (m = 3) de la fórmula convencional para considerar este efecto, obteniendo valores experimentales de m_1 = 2.8 para carga uniformemente distribuida, de m_2 = 2.3 para carga concentrada a los tercios y m_3 = 1.8 para carga concentrada al centro.

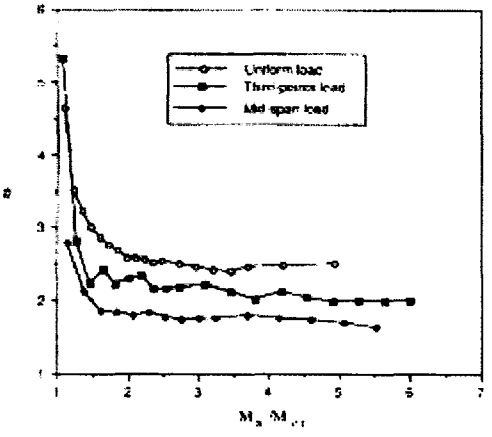


Figura 2.4 Variación de *m* en términos del cociente M_a / M_{cr}

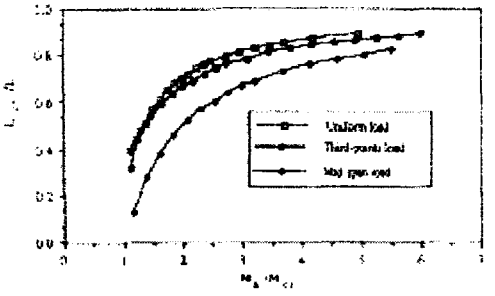


Figura 2.5 Variación teórica del cociente de longitud de agrietamiento con el nivel y tipo de carga

En la figura 2.4 se muestra la variación de m con el cociente M_a / M_{cr} . Estos valores propuestos son evaluados exitosamente en el estudio y son considerados como valores que mejoran sustancialmente el cálculo de la inercia efectiva para los casos correspondientes. Adicionalmente, en este mismo estudio se pone atención al papel que juega la *longitud de agrietamiento* L_{cr} sobre el valor de I_e . La longitud de agrietamiento se define como el segmento de viga sobre el cuál el momento actuante excede al momento de agrietamiento de la sección.

La figura 2.5 (Al-Zaid, fig. 5) muestra la gráfica del cociente L_{cr} / L versus el cociente M_a / M_{cr} para los tres tipos de carga considerados en el estudio. La gráfica revela que para el mismo cociente M_a / M_{cr} la longitud de agrietamiento L_{cr} para la viga sujeta a carga concentrada al centro es menor que aquella para la carga distribuida o para la carga concentrada a los tercios, conduciendo por tanto a un mayor momento de inercia efectivo I_e . Esto sugiere el desarrollo de un modelo más general en el que se tome en cuenta tanto la severidad de la propagación de las grietas así como su extensión a lo largo de la viga.

De manera que Al-Zaid *et al* proponen el siguiente modelo:

$$I_e = \left(\frac{L_{cr}}{L}\right)^{m'} I_{cr} + \left[1 - \left(\frac{L_{cr}}{L}\right)^{m'}\right] I_g$$

el cuál satisface los valores límite de $I_e = I_g$ cuando L_{cr} = 0.0, y de que I_e se aproxima a I_{cr} cuando L_{cr} alcanza la longitud total L de la viga. Según el estudio el valor de m' puede determinarse aproximadamente como

$$m' = \frac{M_{cr}}{M_a}$$

con un buen grado de precisión.

En resumen, el estudio arroja los siguientes resultados:

1. Tanto el tipo como el nivel de carga afectan la estimación de la inercia efectiva de vigas agrietadas de concreto armado.
2. Al mismo nivel de momento, la inercia para vigas con carga al centro se encontró mayor a aquellas con carga distribuida en alrededor de 20%.
3. Bajo todos los tipos de carga, el exponente m disminuye al aumentar el cociente M_a / M_{cr}, particularmente para momentos menores de 1.5 M_{cr}. Ver figura 2.4 (Al-Zaid, fig. 4).

4. Los valores sugeridos para el exponente m son $m_1 = 2.8$, $m_2 = 2.3$ y $m_3 = 1.8$.

5. El nuevo modelo propuesto con $m' = M_{cr} / M_a$ puede usarse para estimar I_e para vigas de concreto armado convencional bajo diferentes tipos de carga, con buena precisión.

Posteriormente, Al-Zaid y AL-Shaikh[8] publicaron un nuevo estudio relacionado con su trabajo anterior en el que se hace evidente el efecto de la cuantía de acero de la sección sobre el estimado de la inercia efectiva, siendo evaluado sobre vigas de concreto con carga al centro. En este estudio se marca una notable diferencia con la inercia obtenida de la fórmula de Branson, especialmente para secciones con valores altos en la cuantía de acero. Como resultado de este estudio, se propone la modificación al exponente m de la fórmula de Branson basada en

$$m = 3 - 0.8\rho$$

Y para el modelo basado en la longitud de agrietamiento (L_{cr} / L) se sugiere un valor de m' basado en

$$m' = 0.8\rho \frac{M_{cr}}{M_a}$$

Como conclusiones de este estudio sugieren que:

1. Los valores de la inercia efectiva usando $m = 3$ en la fórmula de Branson demuestran ser afectados por la cuantía en el acero. Para el mismo nivel de momento, se observó que la inercia efectiva para vigas con baja cuantía era aproximadamente el 55% de aquella para vigas con alta cuantía.

2. La modificación simple en el exponente m, para considerar el efecto de la cuantía resulta con un buen nivel de precisión.

3. Se propuso un nuevo modelo para estimar I_e basado en la longitud de agrietamiento, en el cuál la modificación al exponente m' también resulto dar buena precisión.

4. El uso del momento de inercia de la sección no-agrietada transformada I_t en la fórmula de Branson, en lugar de la inercia de la sección gruesa I_g para secciones con alta cuantía no mejoró significativamente la estimación de I_e . De modo que no incorpora eficientemente el efecto de la cuantía en la estimación.

La figura 2.6 (Al-Zaid, fig. 3) muestra la variación de I_e / I_g con respecto a M_a / M_{cr} para vigas con diferentes cuantías.

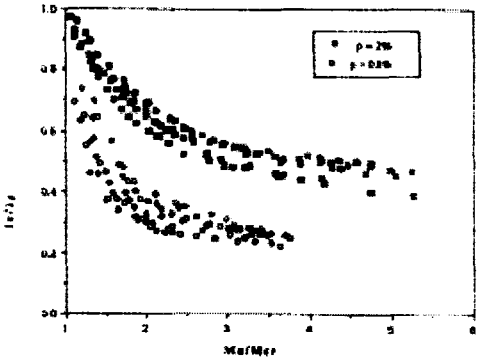


Figura 2.6 Variación de I_e / I_g con M_a / M_{cr} para vigas con diferentes cuantías

Otro estudio relacionado con la determinación de la inercia efectiva de una sección de concreto armado se refiere al realizado por Fikry y Thomas[9], en el cuál se toman en consideración los efectos de la llamada *rigidización del concreto a tensión*, y se propone una forma de calcular I_e sin necesidad de llevar a cabo cálculos tan detallados para la inercia de agrietamiento I_{cr} . El estudio considera que cuando los esfuerzos de tensión en el concreto exceden el módulo de ruptura, el concreto se agrieta. Estas grietas por tensión forman un espacio finito como se muestra en la figura 2.7 (Fikry, fig. 1).

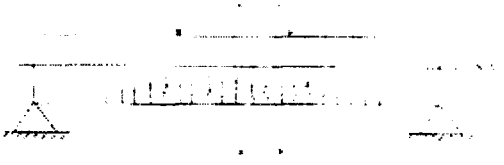


Figura 2.7 Una viga simplemente apoyada típica agrietada por flexión

Dado a que la grieta crea un vacío en el concreto a través del cuál los esfuerzos no pueden ser transmitidos, la resistencia a la tensión de una sección totalmente agrietada deben ser

tomados por el acero de refuerzo. Sin embargo, entre las grietas o en secciones donde la grieta no penetra muy dentro del elemento, el concreto aún será capaz de tomar alguna tensión. Este fenómeno, es decir la capacidad del concreto de tomar tensión adicional se le llama *rigidización del concreto a tensión*. A pesar de que la rigidización del concreto a tensión se ignora conservadoramente en el diseño a flexión, ésta es representada físicamente en el cálculo de la inercia efectiva I_e propuesta por varios reglamentos para el cálculo de deflexiones. Al expresar el efecto del concreto no-agrietado en la cara a tensión del concreto, el cálculo de la inercia efectiva supone un valor mayor que la inercia de una sección completamente agrietada y menor que una sección no-agrietada. Con ésta inercia supuesta a todo lo largo de la viga se pueden calcular las deflexiones . Existen varias expresiones empíricas para el cálculo de I_e de las cuales la más usada es la de Branson. A pesar de que la ecuación de Branson ha sido adoptada por varios reglamentos de diseño, Fikry y Thomas consideran que existen varios aspectos acerca de su naturaleza y la precisión de sus resultados que deben ser revisados. Entre ellos

1. La ecuación fue propuesta como una expresión empírica basada en los resultados obtenidos a partir de vigas probadas bajo cargas distribuidas uniformemente. Debido a esto y a que la ecuación no toma en cuenta otros tipos de carga, puede demostrarse que para otros tipos de carga que no sean carga distribuida uniformemente la ecuación da resultados que son inconsistentes y con errores tan grandes como el 100%.
2. La evaluación de la inercia de la sección agrietada transformada I_t puede ser compleja y tardado al calcularse, especialmente en el caso de secciones con patines.
3. La ecuación no puede ser fácilmente representada gráficamente como curvas solución. Estas curvas propuestas por varios investigadores no son solo complejas sino que no muestran la variación del fenómeno en cuestión y por tanto ofrecen poco como ayudas de diseño.
4. En general, la precisión de los resultados obtenidos de la ecuación no justifica el esfuerzo requerido.

Dadas estas desventajas muchos académicos y diseñadores opinan que se requiere una alternativa a la ecuación de Branson. En 1981 en un esfuerzo por eliminar la necesidad de calcular I_{cr} , Grossman propuso simplificaciones a la ecuación de Branson, pero ya que no se tomaron en cuenta resultados experimentales, el estudio suponía que la inercia efectiva dada por Branson era exacta. Adicionalmente este estudio no consideró los diferentes tipos de carga y heredó los aspectos en contra que se atribuyen a la ecuación de Branson, por tanto no se podía aceptar como una alternativa al enfoque de Branson. Fikry y Thomas consideran que los resultados obtenidos por Al-Zaid *et al* prueban aportar solo una ligera mejora a la precisión de la ecuación de Branson y que aún se requiere la evaluación detallada del I_{cr} , por tanto la expresión

propuesta no facilita los cálculos requeridos. Así que desde el punto de vista de Fikry y Thomas aún existe la necesidad de una alternativa para la fórmula de Branson, de modo que proponen una alternativa que minimiza o elimina los aspectos en contra del enfoque de Branson. En su propuesta Fikry y Thomas presentan una aproximación a I_{cr} para secciones rectangulares con acero a tensión (refuerzo simple) con una expresión muy conveniente para efectos prácticos:

$$I_{cre} = (\alpha + \beta n \rho)\left(\frac{bd^3}{12}\right)$$

donde α y β son coeficientes que dependen del valor de $n\rho$ en porcentaje ($n = Es/Ec$, y $\rho = As/bd$), que implican valores obtenidos a partir de varios segmentos lineales. También presentan una aproximación de I_{cr} para secciones diferentes a rectángulos con refuerzo simple usando el método de ancho equivalente. Este estudio propone el uso de un área de acero ficticio para tomar en cuenta el efecto de la rigidización del concreto a tensión.

En un estudio más reciente llevado a cabo por Gilbert[10] , se cuestiona el porqué algunas veces se calculan mal las deflexiones tanto las inmediatas como las dependientes del tiempo. En el estudio se menciona que la deflexión y la extensión del agrietamiento en miembros de concreto armado sujetos a flexión dependen principalmente de las propiedades no-lineales e inelásticas del concreto y son difíciles de predecir con precisión. Gilbert comenta que en los reglamentos de diseño en concreto como el ACI 318 existen dos enfoques básicos: el primero es el control de deflexiones a partir del cálculo de la deflexión; el segundo es el control de deflexiones a partir de satisfacer un requerimiento mínimo para el peralte o bien un máximo cociente L/h. Con respecto a la evaluación de las deflexiones, Gilbert comenta que la ecuación de Branson provee un estimado razonable de la rigidez del concreto en miembros a flexión con cuantías típicamente mayores a $\rho = As/bd = 0.006$ y cuando M_a es significativamente mayor a M_{cr} . En estos casos, I_e no es mucho mayor que I_{cr} y la rigidización a tensión no es significativa. En el caso de vigas o losas con baja cuantía donde $\rho < 0.006$ sin embargo, M_a puede no ser mayor que M_{cr} o puede ser incluso menor que M_{cr} . En tales casos, el valor de I_e es cercano a, o tal vez igual a I_g. Para estos miembros el valor de I_e calculado por Branson es muy sensible a cambios en el momento de agrietamiento, y por tanto, a las variaciones en el módulo de ruptura f_r . Si el estimado del momento de agrietamiento es muy alto, el valor de I_e calculado puede sobrestimar considerablemente la rigidez. El valor de f_r especificado por el ACI 318 ($2\sqrt{f'c}$ en kg/cm^2) a menudo sobrestima la resistencia a tensión flectora del concreto, y por ejemplo en el reglamento Australiano se usa un valor más conservador de $1.7143\sqrt{f'c}$. En la mayoría de las estructuras, el encogimiento causará la generación de tensión en el concreto a tensión no-agrietado, y el momento para causar el agrietamiento puede ser sustancialmente menor que el

valor de M_{cr} usado en la fórmula de Branson. En algunos casos el agrietamiento ocurrirá incluso antes de que el miembro sea cargado externamente. La tensión inducida por el encogimiento y la tensión causada por los cambios de temperatura pueden reducir el momento de agrietamiento significativamente. Para contar con el efecto de rigidización del concreto a tensión bajo cargas a largo plazo o cargas cíclicas se ha propuesto la siguiente modificación a la ecuación de Branson:

$$I_e = \beta\left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3 I_g + \left[1-\beta\left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3\right] I_{cr} \leq I_g$$

donde se propone usar β = 1.0 para la deflexión inmediata, lo que probó que Branson es satisfactoria en este estudio, y un valor de β = 0.4 para cargas a largo plazo o carga cíclica. Este último valor se usa en combinación con la expresión

$$\lambda = \frac{\xi}{1+50\rho'}$$

propuesta por el reglamento ACI 318 para el cálculo de deflexiones a largo plazo.

Las observaciones resultantes de estas investigaciones nos ubican con más precisión en el terreno de la estimación de una inercia efectiva que pretenda apegarse a los valores reales, así como la importancia y limitaciones de la propuesta de Branson a la vez que nos hace claro que la determinación de una fórmula "completa" es difícil de lograr dada la variedad de factores que intervienen en el problema. La discusión en los párrafos anteriores es de gran importancia por la forma y las consideraciones con las que se trata el tema de la inercia efectiva o mejor dicho, de la rigidez efectiva de una sección dada de concreto armado, y sirve como referencia para mejoras futuras a las propuestas y a modelos resultantes de este trabajo.

Regresando un poco atrás, cuando se discutió acerca del modelo trilineal propuesto por Alwis como base para determinar la historia de carga-deformación de una sección de concreto armado, debe considerarse la aportación que hace Mukai[11] cuando propone una forma para la representación de los datos constitutivos del concreto a efecto de calcular la capacidad de momento, principalmente para su uso en programas computacionales. En particular, la implementación de Mukai ha sido a través de Programación Orientada a Objetos (OOP) en la cuál aprovecha la capacidad de "esconder " (encapsular) los detalles de la forma de las curvas de esfuerzo-deformación de los materiales. Su propuesta es una forma eficiente de mantener datos de esfuerzo-deformación usando cinco valores numéricos. Estos cinco valores permiten calcular la capacidad de momento último M_n y la curvatura a la falla de una sección rectangular o una sección linealmente variable, sin perder precisión. No solo implica ahorro en espacio de

almacenamiento al reemplazar toda una serie de puntos de esfuerzo-deformación con cinco números, sino que el modelo obvia la necesidad de dividir la sección en franjas o fibras para calcular M_n . En base a lo anterior, las integrales necesarias se llevan a cabo con anterioridad, al determinar tres de los parámetros constitutivos. Los parámetros constitutivos no solo dan una forma eficiente de representar la información constitutiva sino que han probado ser útiles en otros cálculos. Los cinco parámetros constitutivos son:

- ε_{cu} , deformación última de compresión del concreto, in situ,
- f_{cmax} , fuerza de compresión, in situ, y
- π_0, π_1 y π_2 , donde

$$\pi_n = \frac{\int_0^{\varepsilon_{cu}} \varepsilon^n f(\varepsilon) d\varepsilon}{f_{c\max} \varepsilon_{cu}^{n-1}}$$

donde

ε = deformación axial, y

$f(\varepsilon)$ = esfuerzo axial.

De modo que los parámetros constitutivos π_0, π_1 y π_2 serían:

$$\pi_0 = \frac{\int_0^{\varepsilon_{cu}} f(\varepsilon) d\varepsilon}{f_{c\max} \varepsilon_{cu}}$$

$$\pi_1 = \frac{\int_0^{\varepsilon_{cu}} \varepsilon \ f(\varepsilon) d\varepsilon}{f_{c\max} \varepsilon_{cu}^2}$$

$$\pi_2 = \frac{\int_0^{\varepsilon_{cu}} \varepsilon^2 f(\varepsilon) d\varepsilon}{f_{c\max} \varepsilon_{cu}^3}$$

Los valores π_n pueden ser considerados como los *n*-ésimos momentos adimensionales a partir de datos de esfuerzo-deformación. Después de considerar que: 1) el plano de la sección permanece plano; y 2) la deformación en la fibra extrema del concreto a la falla es ε_{cu} , podemos revisar a manera de ilustración la simplificación en los cálculos, las expresiones para una sección rectangular con armado simple [figura 2.8 (Mukai fig. 1)].

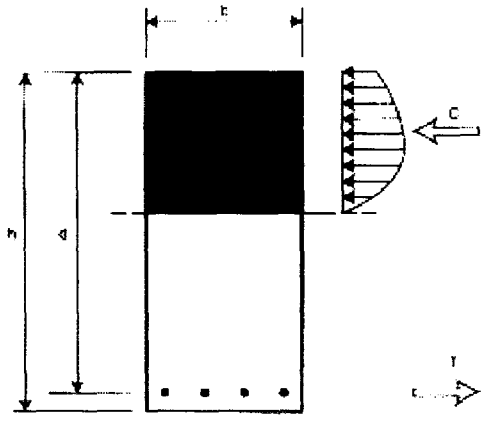


Figura 2.8 Sección rectangular de concreto típica

Después de una serie de manipulaciones algebraicas tenemos que la fuerza de compresión del concreto sobre la sección está dada por:

$$C = \pi_0 bcf_{c\max}$$

donde

c = profundidad del eje neutro, y
b = ancho de la sección transversal.

El momento de la fuerza de compresión C con respecto al eje neutro M_o está dado por:

$$M_o = \pi_1 b^2 cf_{c\max}$$

La distancia vertical del eje neutro al centroide del bloque de compresión C es:

$$\bar{y}_o = \frac{\pi_1}{\pi_0} c$$

Y el brazo de palanca entre las fuerzas de compresión y tensión z es:

$$z = d - c + \bar{y}_o = \left[d - \left(1 - \frac{\pi_1}{\pi_0} \right) c \right]$$

De manera que la capacidad de momento de la sección M_n está dada por:

$$M_n = T \cdot z = C \cdot z = T\left[d - \left(1 - \frac{\pi_1}{\pi_0}\right)c\right]$$

Adicionalmente, para una sección rectangular, el acero en falla balanceada esta dado por:

$$A_{sb} = \pi_0 \frac{f_{c\max}}{f_y} \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_y} bd$$

y la curvatura de una sección rectangular a la falla es:

$$\phi_u = \frac{\varepsilon_{cu} \pi_0 f_{c\max}}{\rho \cdot f_y} \cdot \frac{1}{d}$$

con $\rho = A_s/bd$.

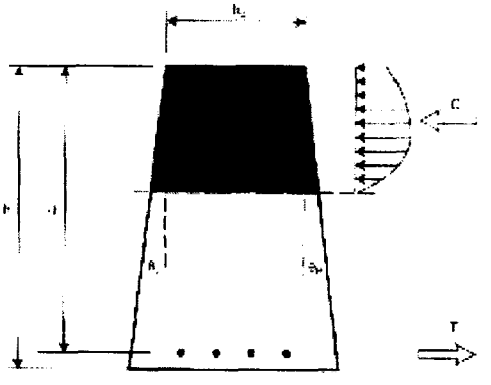


Figura 2.9 Sección trapezoidal de concreto con variación lineal en el ancho

De manera similar Mukai presenta evaluaciones para secciones con variación lineal (trapezoidales) y triangulares [figura 2.9 (Mukai, fig.2)], en los que intervienen los cinco parámetros constitutivos. Además, el artículo relaciona los parámetros del bloque equivalente de esfuerzos modificado propuesto por Ibrahim y MacGregor[12] con los parámetros π_n , obteniendo

$$\alpha_1 = \frac{\pi_0}{2\left(1 - \frac{\pi_1}{\pi_0}\right)}$$

$$\beta_1 = 2\left(1 - \frac{\pi_1}{\pi_0}\right)$$

También presenta las relaciones entre los parámetros constitutivos π_n con los parámetros constitutivos del bloque equivalente usado por el ACI:

$$\pi_0 = 0.85\beta_1$$

$$\frac{\pi_1}{\pi_0} = 1 - \frac{\beta_1}{2}$$

La discusión sobre la propuesta de Mukai se presenta aquí, pues aunque no se usará tal y como se muestra, la forma de manejar las propiedades constitutivas sobre la sección en el presente trabajo está basada en la integración del bloque de esfuerzos a compresión del concreto. De modo que constituye un referente muy adecuado. Vale la pena mencionar que la propuesta de Mukai, como lo indica al final de su artículo, es aplicable solo para cálculos en el estado de falla, no es útil para cálculos en la fase de servicio o para evaluar el comportamiento en cualquier otro estado de la sección. Incluso no es válido para secciones que no tengan variación lineal en su geometría (es decir que no sean trapezoidales). El hecho de que la propuesta de Mukai no puede usarse para evaluar el comportamiento de la sección en otro estado que no sea el de falla, refuerza la necesidad de considerar algún otro método que permita determinar, con apego apropiado a la realidad, la historia de carga-deformación sobre una sección de concreto armado, particularmente el comportamiento de la gráfica *M-ϕ*.

En el mismo contexto, la necesidad de conocer la relación *M-ϕ* para todo el rango de deformaciones hasta la falla nos lleva a considerar el conocido método de fibras, en el cuál se divide el bloque de compresión del concreto en fibras (franjas) al modo de placas horizontales cada una de las cuales esta sujeta a una deformación determinada y por ende a un esfuerzo determinado según la curva esfuerzo-deformación del concreto, al mismo tiempo que las capas de acero se consideran como fibras de acero sujetas a la curva esfuerzo-deformación para este material. González y Robles[13] llaman al método de fibras *Procedimiento General* y el concepto se ilustra en la figura 2.10 (González/Robles, fig. 5.17).

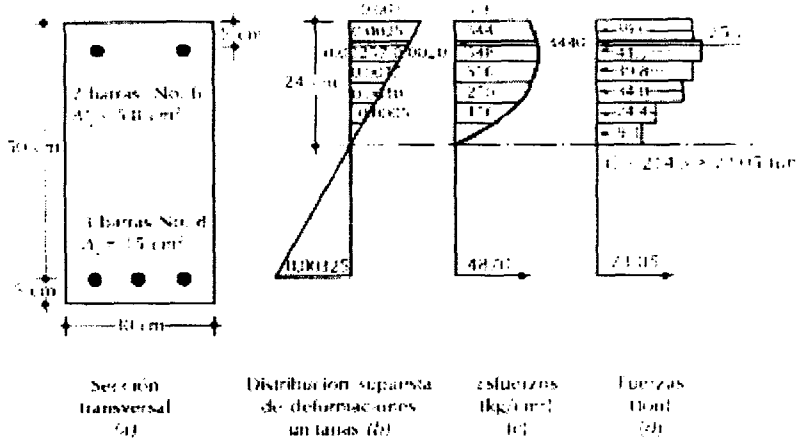


Figura 2.10 Esquema básico del *procedimiento general* o *método de fibras*

Este método permite desde luego establecer valores para los puntos críticos de la curva M-ϕ, y además permite calcular el estado de esfuerzo-deformación de la sección en un punto intermedio, lo cuál cumple nuestros requerimientos, sin embargo sabemos que no se trata de una fórmula de forma cerrada sino más bien un esquema de aproximación sucesiva para dar solución a una ecuación de equilibrio en función de un parámetro, típicamente la distancia **c**, que corresponde a la profundidad del eje neutro a partir del extremo superior de la sección, distancia relacionada con el estado de esfuerzo-deformación que produce el equilibrio de fuerzas internas horizontales sobre el concreto y el acero. A partir de este estado de equilibrio, podemos calcular el momento resistente interno.

El tratamiento que se dará en éste trabajo al comportamiento de una sección de concreto incluye el esquema del método de fibras pero considera la integración directa de la relación de esfuerzo-deformación para calcular el bloque de compresión de concreto, de modo que aunque parecido al enfoque de Mukai, contrasta con él por ser más general, pues es posible establecer un estado cualquiera de esfuerzo-deformación de la sección en el rango de las deformaciones disponibles.

Más adelante, en el apartado de desarrollo analítico de este trabajo se presentan los detalles del enfoque y modelo usados para determinar la rigidez flectora de la sección concreto, parte fundamental de este estudio.

2.2. La redistribución de momentos en vigas

La redistribución de momentos ha sido un concepto que reconoce la capacidad plástica de un segmento de viga de concreto armado sujeto a flexión. El estudio del diseño al límite ha sido registrado desde 1940 por A. L. L. Baker, quien desde 1956 ha publicado trabajos relacionados con éste enfoque. A decir verdad, muchos han sido los estudios y las propuestas han sido variadas. El ACI creó un comité en conjunto con la ASCE para el estudio del diseño al límite, el Comité 428 que presentó en 1968 un *informe de progreso*[14] sobre el diseño limite y se revisaron algunos métodos para ser incluidos en el reglamento de diseño y construcción. Sin embargo, en lugar de proponer una serie de cláusulas acerca del diseño límite como un solo método, propusieron una serie de métodos considerados válidos que toman en cuenta consideraciones del análisis como la distribución de momentos, y del diseño, tomando en cuenta los estudios hechos por Baker, Cohn, Sawyer y Furlong.

Lo anterior nos da una buena idea del problema que representa el estudio del diseño límite si se desean obtener resultados de aplicación general. Uno de los mecanismos que está relacionado íntimamente con el diseño límite es el concepto de redistribución de momentos, que implica la capacidad de una sección o segmento de viga de trabajar plásticamente, y que supone conceptos como *ductilidad*, *rotación plástica*, *articulación plástica*, *longitud de articulación plástica*, y comportamiento de la curva *momento-curvatura* en la región plástica de las secciones.

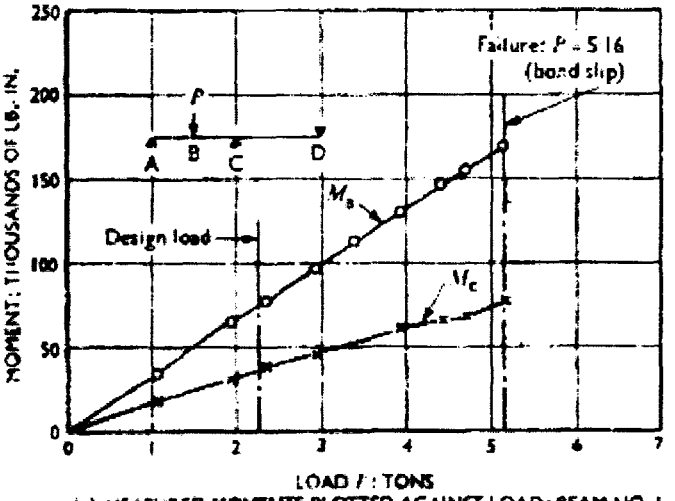
En los siguientes párrafos se presentan discusiones derivadas de la revisión de literatura referente a la redistribución de momentos para establecer un marco de referencia para el tema, discusión que nos permite fijar una posición y darle un justo valor al presente trabajo, el cuál sin muchas pretensiones, intenta aportar un poco más de conocimiento sobre el fenómeno de la redistribución de momentos haciendo uso de herramientas numéricas y de simulación computacional, partiendo de un esquema basado en la mecánica clásica.

La referencia básica inicial para nuestra revisión es el reglamento del ACI-318-95, en su artículo 8.4 y más específicamente los comentarios R8.4 del mismo, donde se hace referencia a dos artículos, uno por A. H. Mattock y otro por M. Z. Cohn.

En su artículo, Mattock[15] discute un estudio sobre la redistribución arbitraria de momentos de diseño en vigas continuas de concreto reforzado. Se describen pruebas de dos series de vigas continuas de concreto reforzado. La Serie 1, una serie piloto de cuatro pequeñas vigas continuas de dos claros diseñadas para la misma carga de trabajo, pero usando varias distribuciones de momento de diseño. La Serie 2 consiste de tres vigas continuas con la intención de simular vigas

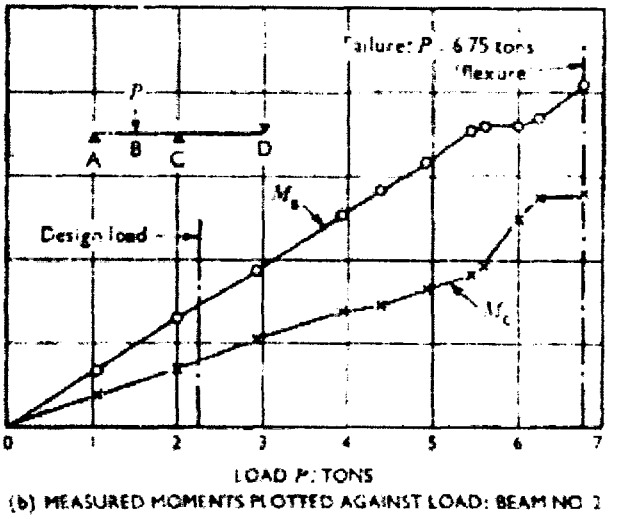
secundarias en un edificio con marcos de concreto reforzado. Una viga, reforzada con acero de baja resistencia fue diseñada para la distribución de momentos flectores según la teoría elástica. Dos vigas fueron diseñadas usando un 25% de reducción en los momentos de las secciones de los apoyos con un incremento apropiado de los momentos de diseño en los claros. De estas dos, una viga fue reforzada con acero de baja resistencia y la otra con acero de alta resistencia. En la Serie 2 se hicieron dos pruebas de carga sobre cada viga, la primera hasta la carga de diseño, y luego de descargarla, se llevó hasta la carga de falla. Mattock indica que la redistribución de momentos flectores de diseño en vigas continuas de concreto armado está ampliamente reconocida como una herramienta muy útil en manos del diseñador. La reducción arbitraria de los momentos de diseño en los apoyos, inicialmente calculados por teoría elástica, lleva a una reducción de la congestión del refuerzo en las secciones de los apoyos. A la vez se hace posible una mejor compactación del concreto y permite simplificar el detallado del refuerzo. Para vigas en las cuales la razón de carga viva a carga muerta es alta, y en las cuales la carga viva puede aplicarse sobre los claros de varias maneras, la redistribución de momentos de diseño puede resultar en una reducción de los momentos máximos de diseño tanto en los claros como en los apoyos. Esto lleva a tener secciones menores a lo largo de la viga. Al usarse con discreción, la redistribución arbitraria de momentos de diseño en vigas continuas de concreto armado puede resultar en estructuras mejores y más económicas. Menciona que la justificación para la redistribución arbitraria de momentos de diseño se basa en el comportamiento elasto-plástico de las secciones de concreto, demostrado en varios estudios previos. Este comportamiento asegura que la redistribución de momentos supuesta en el diseño ocurrirá realmente antes de la falla de la viga. Puede demostrarse que para vigas que fallan por cedencia del acero, el factor de seguridad contra el colapso de la viga no se ve afectado por una redistribución arbitraria de los momentos de diseño. Las limitaciones sobre la cantidad de redistribución de momentos permitidos bajo el reglamento británico B.S. C.P. 114 (1957), resultan de considerar el desempeño de las vigas en el rango de cargas de trabajo y no a la falla. Para que las estructuras sean adecuadas para cargas de servicio, se deben evitar grandes deflexiones y agrietamiento excesivo, a niveles de carga de servicio. La redistribución irrestricta de momentos puede llevar a sobresforzar el refuerzo en ciertas secciones a niveles de carga de servicio, y esto a su vez puede resultar en deflexiones y agrietamiento excesivo. El objetivo de estudios previos ha sido el demostrar que cierta redistribución de momentos flectores de hecho ocurrirá antes de la falla, y así asegurar un adecuado factor de seguridad. La investigación de Mattock se ocupa principalmente de la influencia de la redistribución arbitraria de momentos de diseño en el desempeño de vigas continuas de concreto reforzado a niveles de carga de diseño. Las figuras 3.1a a la 3.1d y las figuras 3.2a a la 3.2c., (Mattock, figs. 5 y 6) muestran el comportamiento de los momentos al centro y en el apoyo para las vigas de prueba, indicando el progreso de la

redistribución de momentos, es decir cuando las curvas inician una ruta de convergencia al mismo punto, cuando M_B disminuye su razón de cambio y M_C la aumenta.



(a) MEASURED MOMENTS PLOTTED AGAINST LOAD: BEAM NO. 1

Figura 3.1a Resultados de las pruebas: Viga No. 1



(b) MEASURED MOMENTS PLOTTED AGAINST LOAD: BEAM NO. 2

Figura 3.1b Resultados de las pruebas: Viga No. 2

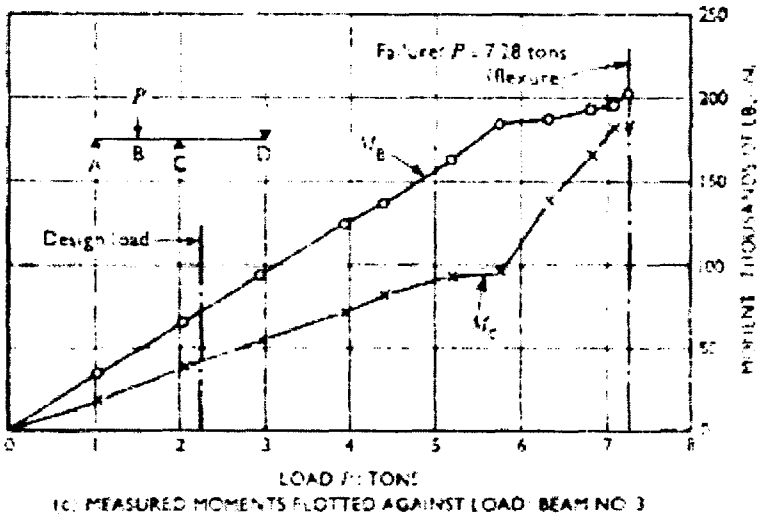


Figura 3.1c Resultados de las pruebas: Viga No. 3

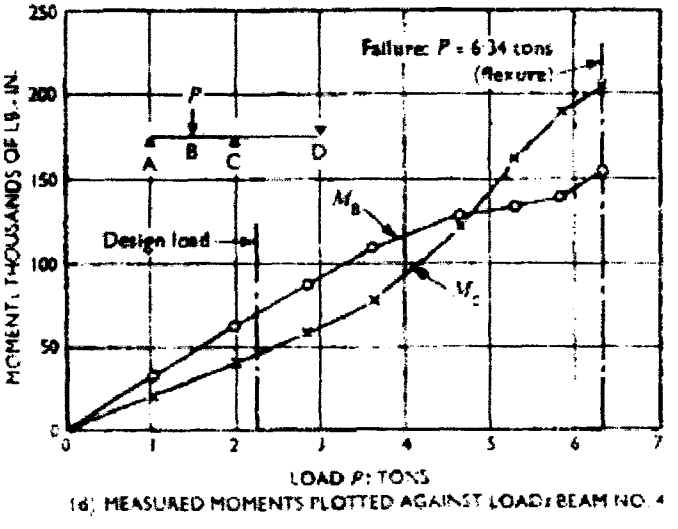


Figura 3.1d Resultados de las pruebas: Viga No. 4

Los resultados para la Serie 1 demostraron que en el rango de las cargas de servicio, la redistribución de momentos se dio a pesar de que los esfuerzos del acero estaban claramente por debajo del esfuerzo de cedencia. Se observó que existe una redistribución real de momentos en cargas de servicio que alcanzan un poco más de ¼ de la redistribución supuesta en el diseño.

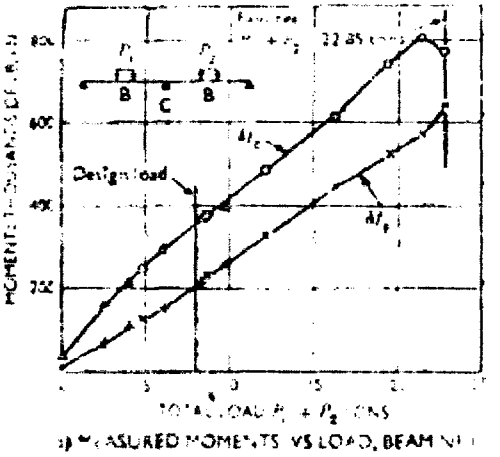


Figura 3.2a Resultados de las pruebas: Viga NR1

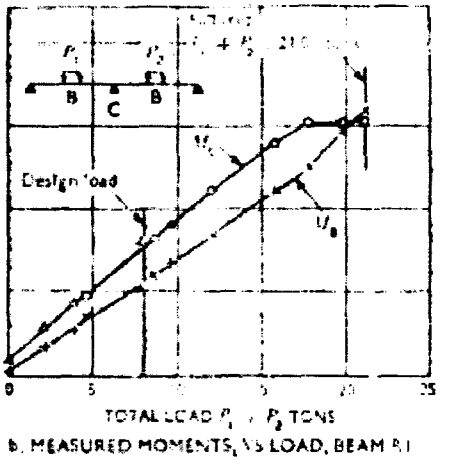


Figura 3.2a Resultados de las pruebas: Viga R1

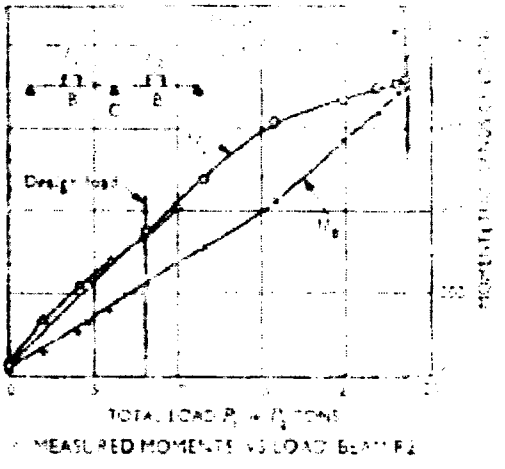


Figura 3.2a Resultados de las pruebas: Viga R2

Esta redistribución ocurre debido a que la relación momento-rotación para una sección de concreto no es lineal para bajos niveles de carga, como se supone en el análisis elástico, sino que es un poco curvada. De la curva de momento-rotación de la figura 3.3 (Mattock, fig.7) se observa que la rigidez de la sección disminuye a medida que el momento aplicado aumenta. Este comportamiento es típico de una sección de concreto reforzado que falla por cedencia del acero.

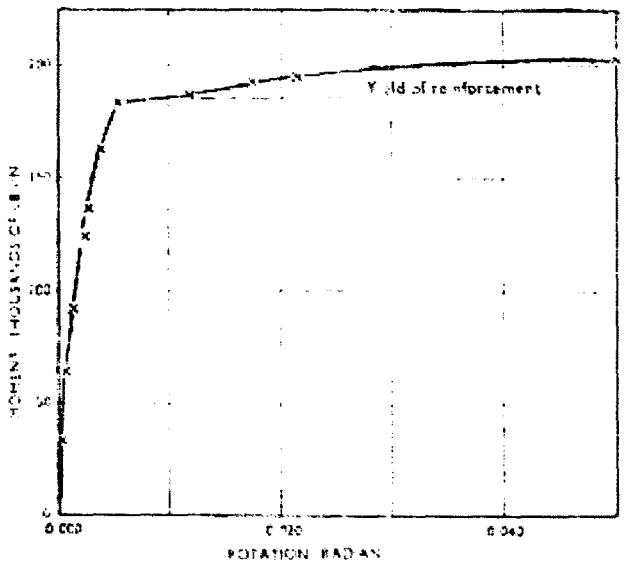


Figura 3.3 Curva momento-rotación, viga no. 3, sección B

En una viga continua, los momentos de diseño que han sido redistribuidos, las secciones para las cuales los momentos de diseño han sido reducidos, serán sobresforzados y tendrán una rigidez reducida. En contrario, las secciones subesforzadas serán más rígidas. Este cambio de rigidez automáticamente resulta en la redistribución de momentos sobre la viga. Los momentos se reducirán en la región de rigidez reducida y aumentarán en las regiones de mayor rigidez .

La redistribución parcial de momentos en cargas de diseño es apropiada ya que conduce a tener menores anchos de grietas y menores deflexiones. Se observó que para cargas de servicio las grietas y deflexiones en las vigas para las cuales se habían redistribuido los momentos de diseño, no eran más severas que para las vigas diseñadas para una distribución de momentos de la teoría elástica.

Para la Serie 2, al examinar las curvas momento-carga, éstas indican que la redistribución de momentos ocurrió en el rango de cargas de servicio para la primer viga (R1), pero no para la segunda (R2), quizá porque el refuerzo a compresión en esta viga en el apoyo central fue excesivo. La redistribución de momentos en la Serie 2 fue aproximadamente la misma que la de

la Serie 1. Las deflexiones fueron incluso más favorables que las de la Serie 1. El ancho máximo de las grietas fue prácticamente el mismo en las tres vigas para cargas de hasta 1.5 veces la de diseño. Al nivel de carga de diseño el ancho máximo de grietas fue muy cercano al límite aceptable.

A la falla, en ambas series de prueba las cargas de falla calculadas para las vigas, usando análisis límite y suponiendo la completa redistribución de momentos a la falla, se encontró que eran estimados seguros de las cargas de falla medidos realmente en las vigas fallando a flexión. Los momentos resistentes de las secciones críticas fueron calculados suponiendo a) que el refuerzo alcanza el punto de cedencia a la falla; b) que el esfuerzo promedio a compresión del concreto a la falla fue de 0.6 veces la resistencia de laboratorio; y c) que el centro de compresión del concreto estaba a 0.4 de la profundidad de la zona de concreto a compresión a la falla. En el caso de vigas con falla por flexión, el análisis límite da un estimado cercano y seguro de la carga de falla.

En resumen, Mattock concluye que la redistribución de momentos de diseño para vigas continuas de concreto reforzado de hasta un 25% no parece afectar negativamente el desempeño de la viga, ni en el rango de cargas de servicio ni a la falla. El agrietamiento y la deflexión de vigas con momentos de diseño redistribuidos no son más severos que aquellas vigas diseñadas usando la distribución predicha por la teoría elástica. El factor de seguridad a la falla no es afectado por la redistribución de momentos, tanto para vigas reforzadas con acero de baja resistencia, como de alta resistencia. El aumento de 15% a 25% al ajuste de momentos en los apoyos permitido por la cláusula 312 del B.S.C.P. 114 (1957) , conduce a lograr estructuras más económicas sin pérdida de desempeño estructural.

Por su parte, Cohn[16] publica en 1965 el desarrollo analítico que establece las condiciones de compatibilidad de rotación en el diseño límite de vigas continuas de concreto armado. Indica que el objetivo del artículo es el de dar una técnica racional simple para revisar la compatibilidad de rotación de las articulaciones plásticas en el diseño límite de vigas continuas de concreto armado con base en consideraciones óptimas. Se trata la relación entre la adaptabilidad plástica y la compatibilidad rotacional expresando convenientemente ambas, las rotaciones inelásticas y las capacidades rotacionales de las secciones críticas. Concluye que los requerimientos de compatibilidad implican solo una adaptabilidad limitada para usarse en el diseño de estructuras de concreto. Dado a que se puede derivar una conclusión similar con respecto a las condiciones de servicio de las estructuras diseñadas al límite, la adopción de límites superiores convenientes para los factores de redistribución (o límites inferiores para los parámetros de seguridad basados

en la cedencia) de las secciones críticas dará implícitamente soluciones adecuadas para la seguridad última, la compatibilidad, así como para las condiciones de servicio.

Para efectos prácticos, los resultados significativos indican que dados 1) las propiedades de los materiales, 2) las condiciones de carga, y 3) la cantidad de redistribución aceptada, se puede determinar la compatibilidad rotacional hasta un límite superior del porcentaje de acero en las secciones críticas.

En la introducción al artículo establece tres condiciones fundamentales que son específicas al diseño límite de estructuras de concreto reforzado, 1) el equilibrio al límite; 2) la compatibilidad de rotación; y 3) las condiciones de servicio. La primera condición postula la existencia de uno o más mecanismos de colapso. Esta configuración teóricamente puede alcanzarse debido a la adaptabilidad plástica de la estructura. La segunda condición implica que todas las articulaciones plásticas necesarias para el colapso de la estructura pueden realmente ocurrir, sin fractura local prematura del concreto. La compatibilidad de rotación es por tanto la propiedad de las articulaciones plásticas a través de la cuál la adaptabilidad plástica puede hacerse efectiva, conforme a las propiedades reales del acero y del concreto. La tercera condición requiere una razonable seguridad acerca de la cedencia en las secciones críticas, de lo que finalmente dependen la magnitud del ancho de las grietas y las deflexiones en cargas de servicio .

Como se muestra en el artículo, el diseño límite óptimo que implica una determinada cantidad de redistribución de momento, la condición de compatibilidad, conduce a un límite superior de los porcentajes de acero en las secciones críticas. El resultado principal de esa investigación, indica Cohn, es que una distribución plástica de momentos segura y apropiada en condiciones de servicio también es compatible, siempre que no se excedan ciertos límites superiores en el refuerzo de las secciones críticas.

Cohn señala algunos detalles de los estudios previos a este artículo, indicando que algunos autores usan las ecuaciones de compatibilidad como base general para el diseño por carga última. A.L.L. Baker extendió las ecuaciones del análisis estructural elástico obteniendo expresiones para las rotaciones plásticas. Guyon, Macchi y Jain también propusieron métodos de carga última para analizar vigas continuas basados en la capacidad de deformación de las secciones de concreto reforzado. Sawyer dio valores para las rotaciones plásticas para secciones críticas típicas junto con un procedimiento elasto-plástico para analizar vigas y marcos tomando en cuenta la capacidad de deformación disponible en las articulaciones plásticas del concreto reforzado. Generalmente, estos métodos se desarrollan adoptando varias idealizaciones de la relación momento-curvatura, como los que se muestran en la figura 3.4

(Cohn[16], fig.1). La figura 3.5 (Cohn[16], fig. 2) muestra las idealizaciones más comunes para la relación esfuerzo-deformación en el concreto. Una forma interesante de revisar la compatibilidad de rotación se sugiere por Carneiro[17], imponiendo un límite superior a la razón de peralte a longitud de los miembros. Desde el punto de vista estructural el tratamiento más general del problema lo propone Hangan[18]. Cohn usa esta formulación como base para su propuesta. Considerando el aspecto seccional del problema, la capacidad de rotación de las articulaciones plásticas depende esencialmente de las propiedades inelásticas de las secciones de concreto reforzado, es decir , las relaciones esfuerzo-deformación y momento-curvatura, los valores de los momentos, la rigidez flectora de las secciones críticas desde la primera cedencia hasta el colapso.

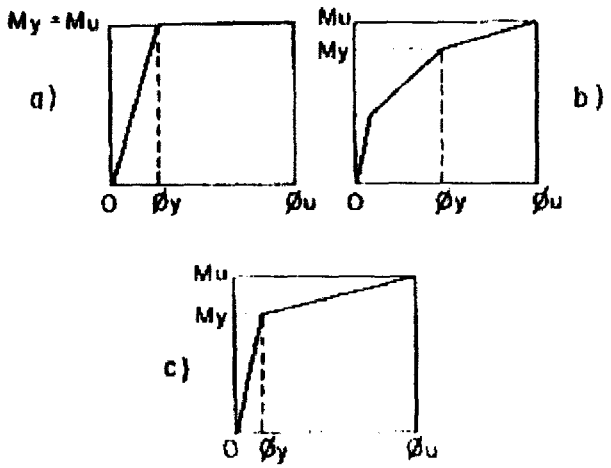


Figura 3.4 Idealizaciones de la relación momento-curvatura

Las contribuciones teóricas a la determinación de la capacidad de rotación de las articulaciones plásticas se deben a A.L.L. Baker, Ernst, Chan, Sawyer, Miraz, Yamada y otros. A.L.L. Baker, Chan, Sawyer, Wright y Berwanger, Petcu, Cohn y otros, han reportado estudios experimentales sobre el problema.

Como una evaluación general sobre la literatura revisada, Cohn hace las siguientes anotaciones:

1. La compatibilidad de las rotaciones es esencialmente un problema de análisis ya que implica que las dimensiones de los miembros y las propiedades de los materiales sean conocidas.
2. Los métodos comunes para revisar las condiciones de compatibilidad son procedimientos paso a paso, comenzando del estado límite de la estructura.
3. La determinación de las rotaciones inelásticas de las secciones críticas es una operación tediosa que requiere tiempo, habilidad y experiencia en el diseño límite.

4. La determinación de la capacidad rotacional de las articulaciones plásticas está sujeta a grandes aproximaciones, en vista de la incertidumbre respecto de las propiedades reales del acero y del concreto en el rango elástico y de la naturaleza empírica de los parámetros límite adoptados por las condiciones de seguridad.

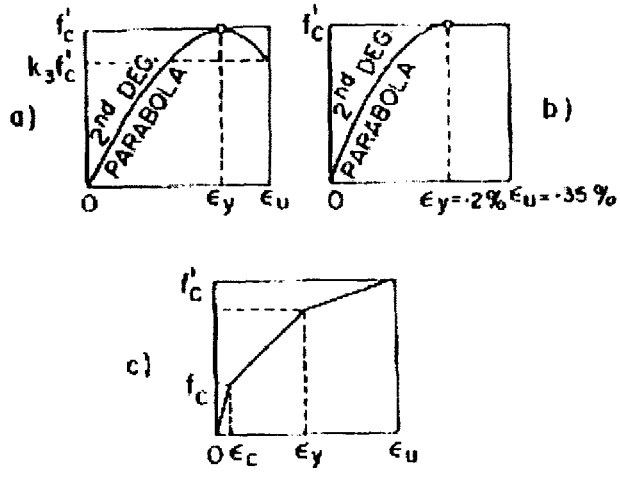


Figura 3.5 Idealizaciones de la relación esfuerzo-deformación del concreto

En el primer apartado del desarrollo analítico Cohn presenta lo que llama el ***estatuto general de la condición de compatibilidad***.

La condición básica expuesta en este apartado lleva a la siguiente consideración. Si para cualquier valor de θ_i, en $1 \leq i \leq u$, con

$$\theta_i \leq \theta_{pi}$$

donde θ_i =rotación efectiva de la articulación plástica i,

θ_{pi} = capacidad de rotación de la articulación plástica i, y

θ_1 = rotación efectiva en la primera articulación.

Si la condición se cumple, ocurre un *colapso completo* (o *redistribución completa*) para la carga última W_u, cumpliéndose la condición de compatibilidad de deformación. Si al menos un valor de θ_i sobrepasa la capacidad de rotación de la sección, es decir

$$\theta_i > \theta_{pi}$$

ocurre una fractura local en el concreto en i, y se tiene un *colapso incompleto o parcial* (o *redistribución parcial*) para la carga última W_u.

De este modo, Cohn establece los pasos para revisar los requerimientos de compatibilidad:

1. Determine el mecanismo de colapso y la carga última W_u,
2. Determine las cargas W_i correspondientes a la formación progresiva de las articulaciones plásticas en las secciones i,
3. Obtenga las rotaciones plásticas efectivas θ_i ($1 \leq i \leq u$),
4. Para todas las secciones críticas evalúe la capacidad disponible de rotación θ_{pi}, y
5. Revise la condición de compatibilidad en todas las articulaciones plásticas para cada nivel de carga W_u.

La carga real de colapso es el mayor valor de W_i para la cuál la condición se cumple al límite, es decir cuando $\theta_i = \theta_{pi}$. La evaluación exacta de W_i y θ_{pi} en todas las etapas de carga solo es posible a través del análisis histórico de la estructura, basado en consideraciones elásticas.

Cohn comenta que el procedimiento general es bastante difícil incluso para los casos más simples, y se complica excesivamente al aumentar el número de secciones críticas que forman parte del análisis histórico de estructuras altamente redundantes. Y si además le agregamos varios esquemas posibles de carga se vuelve complejo. En muchos casos, sin embargo, el trabajo que implica el procedimiento es innecesario, ya que las vigas colapsan cuando se forman a lo más 3 articulaciones plásticas, entonces será suficiente con revisar la capacidad de rotación de la primera articulación que se forme pues esta exhibirá la mayor rotación plástica.

En el siguiente apartado, Cohn evalúa la ***rotación inelástica de las secciones críticas***.

En este apartado inicia el análisis para una viga continua de 5 claros pero con una configuración de cargas que permiten extraer dos de los claros contiguos en donde se desarrollan los valores máximos de momento elástico y donde ocurren por primera vez las articulaciones plásticas. Dada la configuración simétrica de carga y condiciones de apoyo, y bajo la generación de una articulación plástica en el apoyo central de este segmento de viga, y de la formación simultánea de las articulaciones plásticas en los extremos del segmento de viga, como se muestra en la figura 3.6 (Cohn[16], fig. 3), el estudio de una viga empotrada-articulada en lugar de la viga de dos claros lleva a valores conservadores de las rotaciones inelásticas en las articulaciones plásticas.

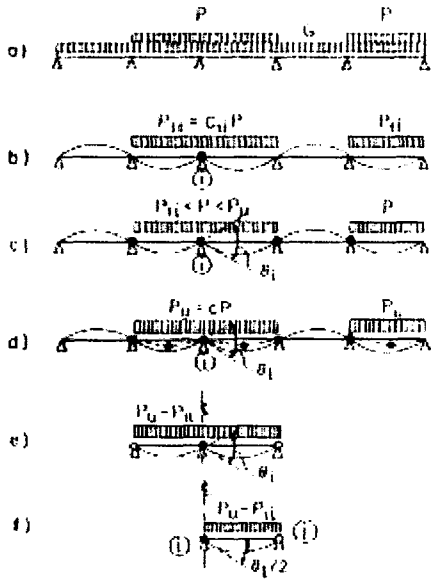


Figura 3.6 Simplificación del análisis

De esta consideración y suponiendo una rigidez constante, R_o , la rotación de la sección en el punto i , está dado por

$$\theta_i = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{M_0}{R_0}(L-z)dz$$

la cuál se reduce a

$$\theta_i = \frac{M_i L}{3R_0}(r_i - 1)$$

con

$$r_i = W_u / W_i$$

donde

θ_i = rotación plástica efectiva,

L = longitud del claro,

M_0 = ordenada del diagrama de momento,

z = distancia de la sección del apoyo a cualquier sección sobre la viga,

M_i = momento plástico de la sección i ,

r_i = factor de redistribución con respecto a la sección crítica i .

En un tercer apartado, Cohn evalúa ***la capacidad de rotación de las articulaciones plásticas en concreto reforzado.***

La capacidad de rotación de una articulación plástica puede ser expresada como la rotación total acumulada a lo largo de una pequeña distancia l_p , donde se ha desarrollado la cedencia cerca del apoyo en que se genera la articulación plástica. La capacidad de rotación esta dada por

$$\theta_p = \int_0^{lp} (\phi_Z - \phi_y) dz = A_\phi = \beta \cdot l_p \phi_p$$

De modo que la capacidad de rotación de la articulación puede evaluarse como el área de las curvaturas plásticas A_ϕ , la zona sombreada en la figura 3.7 (Cohn[16], fig. 6).

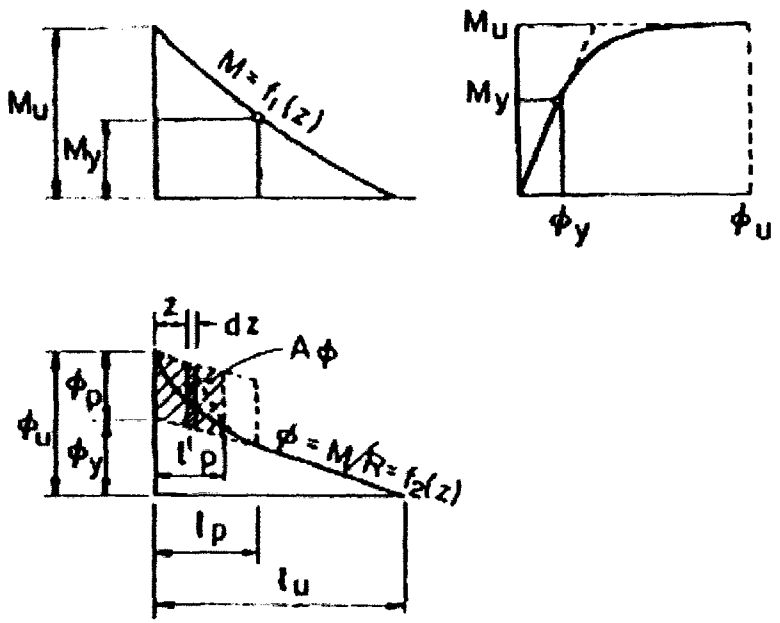


Figura 3.7 La capacidad de rotación de la articulación plástica como el área de las curvaturas plásticas A_ϕ

El factor adimensional $\beta < 1$ es un *factor de forma* del diagrama de curvaturas cerca del apoyo, que puede ser considerado como un factor de reducción de la longitud de la articulación plástica, de modo que $\beta\, l_p = l'_p$. O bien

$$\theta_p = l'_p \phi_p$$

donde

$$\phi_p = (\phi_u - \phi_y)$$

En el apartado analítico final, Cohn expresa la ***condición de compatibilidad de rotación***.

Al expresar la condición general de compatibilidad en términos de:

$$\theta_i = \frac{r_i - 1}{3} \cdot \frac{L}{d} \phi_y$$

y de

$$\theta_{pi} = \beta \cdot \lambda (\phi_u - \phi_y) \frac{L}{d}$$

se obtiene la relación

$$r_i \leq 1 + 3\beta \cdot \lambda \left(\frac{\phi_u}{\phi_y} - 1 \right)$$

donde $\lambda = l_p / L$.

Los valores de ϕ_u y ϕ_y dependen esencialmente de los porcentajes de acero en las secciones críticas. Por lo que se observa que para ciertos grados de concreto y relaciones de acero (cuantía), el problema de la compatibilidad de vigas diseñadas al límite está gobernada por el factor de redistribución y el porcentaje de acero de la articulación plástica considerada.

Una solución de diseño límite tendrá rotaciones plásticas compatibles en tanto los factores de redistribución correspondientes a las secciones críticas no excedan el límite indicado por el lado derecho de la expresión para r_i .

Cohn, sugiere valores para el factor $3\beta\lambda$ = 1/10 ... 1/20, dependiendo de la amplitud de la articulación plástica, del tipo de carga, y de las condiciones de apoyo. Sugiere emplear valores de $3\beta\lambda$=1/10 para una viga de concreto reforzado empotrada-articulada, y un valor de $3\beta\lambda$=1/15 para una viga doblemente empotrada. De modo que *r* sería:

Para viga empotrada-articulada:

$$r_i \leq 1 + \frac{1}{10}(u - 1)$$

Para viga empotrada-empotrada:

$$r_i \leq 1 + \frac{1}{15}(u-1)$$

donde $u = \phi_u / \phi_y$ = índice de ductilidad de la sección crítica (basado en curvatura).

Si se considera a *%r* , el factor porcentual de redistribución de momentos (cambio de momento en porcentaje), podemos escribir

$$\%r = \frac{M_u - M_y}{M_u} \cdot 100$$

Para el análisis elástico la relación anterior implica

$$\%r = \frac{W_u - W_y}{W_u} \cdot 100$$

Si consideramos $W_i = W_y$, para evaluar la redistribución desde el punto de cedencia, con

$$r_i = \frac{W_u}{W_y}$$

tenemos que el factor porcentual de redistribución de momentos está dado por

$$\%r = \left(1 - \frac{1}{r_i}\right) \cdot 100 = \frac{(r_i - 1)}{r_i} \cdot 100$$

En otro artículo publicado en 1979, Cohn[19] trata la *inelasticidad del concreto reforzado* y hace una revisión de los *estándares estructurales* (reglamentos de diseño).

Cohn indica que, el comportamiento inelástico de las estructuras de concreto reforzado ha sido reconocido desde hace tiempo, a la vez que varios de los esfuerzos de investigación que han sido realizados por medio siglo han clarificado un importante número de problemas. A pesar de la abundancia de datos teóricos y experimentales disponibles, la adopción de los conceptos inelásticos en el diseño estructural sigue siendo una meta lejana. Cohn sugiere que la principal razón para dejar de considerar los métodos relativamente simples basados en la teoría elástica

de uso general es la necesidad de considerar en forma realista todos (o la mayoría) de los factores que gobiernan el diseño en concreto reforzado. De hecho, un estudio cuidadoso de los más conocidos estándares y recomendaciones revela cuán contradictorios son los efectos de los criterios adoptados, los márgenes de seguridad, los efectos de la carga y las acciones inelásticas. Un método racional debe considerar todos estos efectos de una manera consistente, no conflictiva. Debe puntualizarse que la consideración del fenómeno inelástico es solo un primer paso hacia prácticas de diseño estructural más racionales. Una teoría óptima deberá incluir valores de carga más realistas, combinaciones y variaciones estadísticas, mejores factores de carga y estados límite adecuados, incluyendo condiciones de servicio. Todo el potencial del comportamiento inelástico del concreto reforzado puede lograrse solo por medio de métodos no-lineales o inelásticos, los cuales pueden ser agrupados en métodos de compatibilidad o métodos de equilibrio. El objetivo de Cohn en ese trabajo fue el de investigar la práctica de diseño en ese entonces basado en varios estándares (reglamentos) con respecto al comportamiento inelástico y explorar las posibilidades dadas por el desarrollo de los métodos inelásticos para estructuras de concreto.

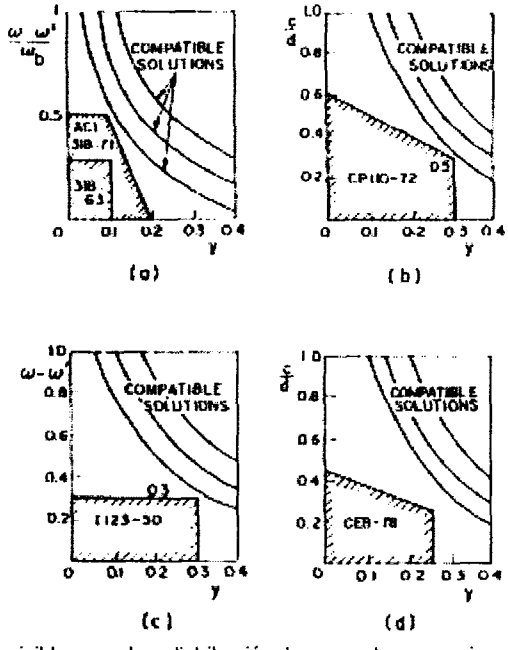


Figura 3.8 Regiones permisibles para la redistribución de momento para varios reglamentos de diseño

En su artículo presenta una comparación de los límites de redistribución de momentos según los reglamentos de varios países como se muestra en la figura 3.8 (Cohn[19], fig. 2). Los reglamentos mostrados son a) ACI-318-63 y ACI-318-71; b) código Británico CP110-72; c) El estándar ruso I123-50; d) La recomendación del CEB de 1972 y el código de 1978. También hace una revisión de los métodos basados en la compatibilidad y aquellos basados en el equilibrio, considerando diseños que emplean *redistribución completa* o los que usan

redistribución limitada (parcial). Menciona la complejidad práctica de los métodos de compatibilidad y les da mayores posibilidades a los métodos de equilibrio por su adaptación más conveniente a aplicaciones prácticas.

En 1992 Cohn y Riva[20] publicaron un artículo de un estudio paramétrico sobre *seguridad a la cedencia, el control de grietas y la redistribución de momentos.* El resumen indica, que la seguridad por cedencia se incorpora como una variable que controla ambos el agrietamiento bajo cargas de servicio y la redistribución permisible de estructuras dúctiles de concreto en el estado límite último. Los valores límite de la seguridad por cedencia que aseguran la satisfacción de los criterios de agrietamiento especificados por los reglamentos se derivan de resultados de estudios minuciosos hechos por computadora. Un estudio paramétrico del factor de seguridad a la cedencia contra el agrietamiento identifica al índice de refuerzo, ω, al ancho permisible de las grietas, w_a , (ó la resistencia a tensión del concreto f_r), y al grado de presfuerzo, como los factores que gobiernan el control de grietas. Estos factores, en conjunto con la razón de carga viva a carga total, W_L / W, el cuál afecta la seguridad general de la estructura, determinan la redistribución permisible de momentos.

En 1993, Scholz[21] reexamina aspectos relacionados con la redistribución de momentos en vigas continuas de concreto reforzado. Sugiere una nueva definición de la redistribución de momentos y discute sobre la influencia de la esbeltez de la viga así como de la rigidez. Una viga continua de concreto reforzado, completamente diseñada por análisis elástico, sería reforzada para ajustarse a la envolvente elástica de momentos. Sin embargo al reconocer el comportamiento inelástico de la viga, los máximos momentos de tal envolvente podrían ser redistribuidos sin detrimento de la capacidad de carga de la viga.

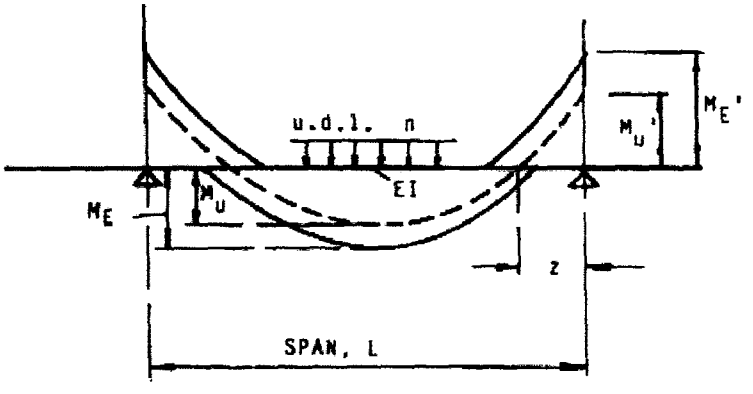


Figura 3.9 Momentos elásticos e inelásticos

La figura 3.9 (Scholz, fig. 1) muestra una viga interior con un claro L sujeta a una carga uniformemente distribuida n. Los valores del momento extremo y central por análisis elástico M'_E y M_E, provienen de varias cargas en los claros adyacentes y suman más de $wL^2/8$. Después de la redistribución el valor del máximo momento será de M'_U en el apoyo y M_U en el centro del claro. La suma de M'_U+M_U sería menor que M'_E+M_E, con un mínimo de $wL^2/8$. Varios reglamentos de diseño definen el porcentaje de redistribución de momentos β, usando el momento elástico como base, por ejemplo para el apoyo:

$$\beta = \frac{M'_E - M'_U}{M'_E} \cdot 100$$

Sin embargo, esta forma conduce a resultados que entran en conflicto con respecto al porcentaje posible de redistribución de momentos para un caso dado. Los reglamentos también limitan la cantidad de redistribución β, para evitar la falla frágil debida al aplastamiento del concreto y para asegurar un comportamiento satisfactorio en cargas de servicio. Uno de los límites indica

$$\beta = 30 - 50\frac{d}{c} \leq 20\%$$

donde c y d son la profundidad del eje neutro y el peralte efectivo de la sección, en condiciones de carga última.

En este artículo Scholz, trata con los conceptos de *demanda de ductilidad* y la *capacidad de ductilidad*. De acuerdo con sus deducciones la demanda de ductilidad está dada por:

$$\frac{\phi_u}{\phi_y} = 1 + \frac{L}{2L_p}\left[\frac{nL^2/12}{M'_E(1-\beta/100)} - 1\right]$$

y la capacidad de ductilidad estaría dada por:

$$\frac{\phi_u}{\phi_y} = \left(\frac{12}{0.1+9\frac{c}{d}} - 0.7\right)\frac{450}{f_y} \cdot \frac{\varepsilon_c}{0.0035}$$

Al igualar las expresiones anteriores obtenemos una relación entre el posible porcentaje de redistribución de momento β, y el cociente c/d. Sin embrago esta relación no es tan simple

como se indica en los reglamentos. La longitud del claro L , la longitud de la articulación plástica L_p , el momento elástico en el apoyo M'_E , el esfuerzo de fluencia del refuerzo f_y , y la deformación de ruptura a compresión del concreto ε_c , son variables independientes que participan en el fenómeno.

Para evaluar el efecto de la esbeltez de la viga, Scholz sugiere la expresión:

$$\frac{c}{d} \leq \frac{1.33K}{1+0.7K+\dfrac{\beta^*/(100-\beta^*)}{0.027+0.5/(L/d)}}$$

donde

K = ε_c / 0.0035 x 450 / f_y ,

β^* = porcentaje modificado de redistribución de momento = 100 [1 – M'_U / ($nL^2/12$)]

La evaluación de la expresión anterior se muestra en la Fig. (Scholz, fig. 4), para K= 1 y para un rango práctico de valores para la esbeltez L/d. Aparece el valor de β^* en el eje vertical junto con el valor de M'_U / ($nL^2/12$), y la variación de c/d sobre el eje horizontal. Para efectos de diseño los valores de L/d = 20 y de L/L_p = 38 son aceptables.

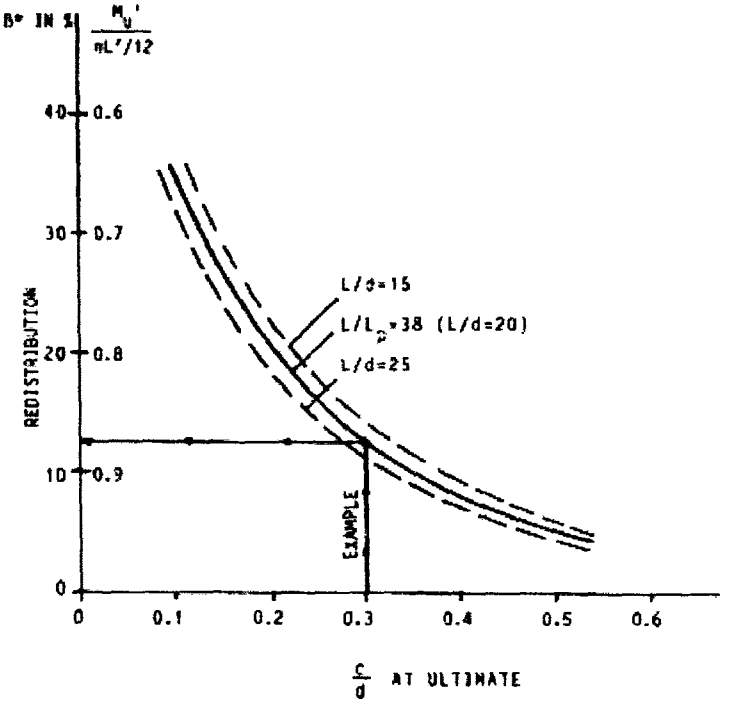


Figura 3.10 Redistribución modificada

Al considerar el efecto de la variación de la rigidez, Scholz reescribe la expresión anterior como

$$\frac{c}{d} \leq \frac{1.33\alpha}{1+0.7\alpha+\frac{19\beta^*}{100-\beta^*}}$$

donde

$\alpha = K \times C$,

$C = I_{AV} / I_{SU}$,

$I_{AV} = (I_{SU} + I_{SP}) / 2$,

I_{SU} = momento de inercia en el apoyo,

I_{SP} = momento de inercia en el claro.

La relación anterior se muestra gráficamente en la figura 3.11 (Scholz, fig. 6).

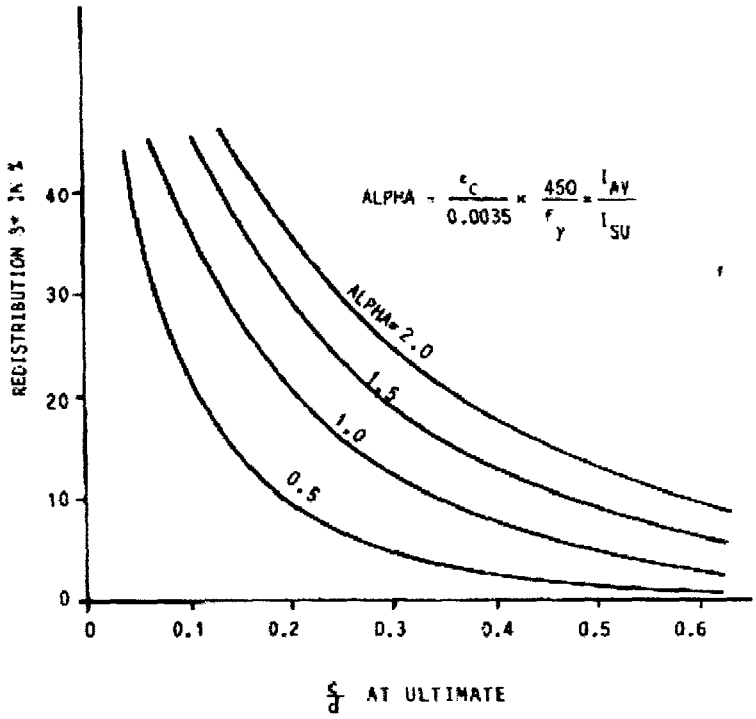


Figura 3.11 Gráfica de redistribución propuesta por Scholz

Scholz indica que los trabajos experimentales realizados por Cohn y Mattock sobre la capacidad de ductilidad, indican que la capacidad de ductilidad implicada en la formulación del ACI es conservadora. Se han hecho varios otros estudios, en los que se observaron numerosas mediciones experimentales, que mostraron que los mayores factores responsables de la variación de la ductilidad son, el patrón y nivel de los esfuerzos secundarios debidos a la

dilatación (creep) y encogimiento (shrinkage), a los trabajos de construcción, a las imperfecciones geométricas y del material, al comportamiento del endurecimiento por deformación y a aspectos relacionados con la carga.

Se llevaron a cabo experimentos por Scholz y da Silva[22] con el objetivo de confirmar la ductilidad de miembros viga presforzados usando los conceptos desarrollados en los párrafos anteriores. Dada la dificultad en el control de tantas variables, se obtuvieron resultados erráticos. El estudio paramétrico por computadora sería un método más apropiado que el trabajo de laboratorio. A este respecto, Campell y Moucessian[23] , concluyeron que las provisiones hechas por los reglamentos ACI-318 y CAN3-A23.3-M84, están del lado conservador. A la misma conclusión llegó Scholz[24] al comparar el Código Canadiense de Concreto y los conceptos propuestos en este artículo.

En un artículo publicado en 1997 por Lopes et al[25] en el ACI Journal of Structural Engineering, referente a un *estudio de redistribución de momentos en vigas de concreto presforzado*, los autores señalan el concepto de *grado de redistribución*. Indican que, en una relación momento-curvatura para una sección de concreto se da un comportamiento como el mostrado en la figura 3.12 (Lopes et al, fig. 2), donde M_{cr} es el momento de agrietamiento de la sección y M_u es el momento último. Para valores de momento mayores que M_{cr} , la rigidez es reducida considerablemente por el agrietamiento y por la deformación inelástica del acero y del concreto.

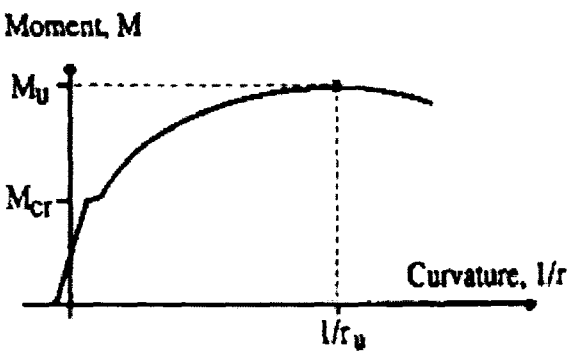


Figura 3.12 Relación momento-curvatura para una sección de concreto presforzado

Los momentos máximos se concentran normalmente sobre longitudes cortas en el miembro. Como resultado, antes de la falla tiende a haber concentración de curvatura sobre estos pequeños segmentos poco definidos. Estos pequeños segmentos pueden ser considerados como articulaciones plásticas en las cuales ocurre una rotación plástica, pero que pueden transmitir un pequeño incremento de momento hasta la falla.

Una vez que una articulación plástica se forma en una sección dada, el aumento de momento en esa sección bajo carga en aumento, es muy pequeño y otras secciones casi alcanzan su resistencia última que conduce a la formación de otra articulación plástica. Este proceso de formación progresiva de articulaciones plásticas continúa hasta que la estructura falla por la formación de un mecanismo. Este concepto puede ser mejor ilustrado si se considera una viga doblemente empotrada de sección constante con simetría doble, con un momento último constante a lo largo de la viga. Consideremos los tipos de carga mostrados en la figura 3.13 (Lopes et al, fig. 3). Según Tíchy y Rákosníc[26] , es posible tener tres diferentes tipos de relaciones momento-carga, como se muestra en la figura 3.14 (Lopes et al, fig. 4). En esta figura M_u es el momento último (igual para todas las secciones), M_{cr} es el momento de agrietamiento (igual para todas las secciones), F es una carga concentrada y q es una carga distribuida. Los índices r ó cr y u denotan estado de agrietamiento y estado último, respectivamente.

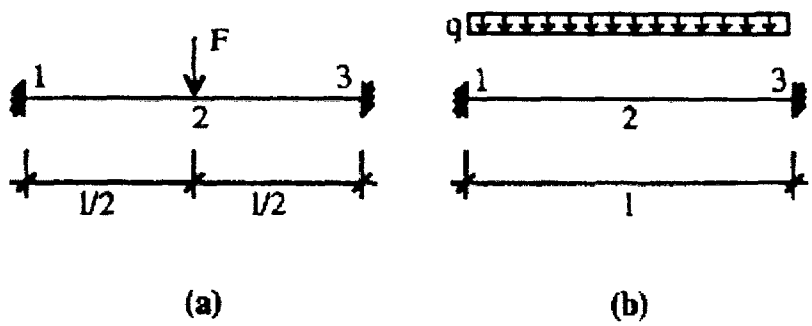


Figura 3.13 Configuraciones de carga: a) Tipo I; b) Tipo II

Para la carga Tipo I mostrada en la figura 3.13a (Lopes et al, fig. 3), $M_1 = M_2 = M_3$ de acuerdo con la teoría elástica y el agrietamiento se alcanza al mismo tiempo en las tres secciones críticas. La relación momento-carga es lineal durante la aplicación de la carga para todas las secciones, y no se da la redistribución de momentos pues los momentos flectores son iguales para todas las secciones críticas y se alcanza la última resistencia al mismo tiempo en todas ellas.

Para la carga Tipo II, figura 3.13b, la teoría elástica conduce a $M_1=M_3=2M_2$. Antes del agrietamiento la estructura se rige por la teoría elástica. El estado de agrietamiento se alcanza cuando $M_1=M_3=M_{cr}$ y $M_2=M_{cr}/2$. Entonces, una disminución en la rigidez asociada a la formación de grietas en las secciones 1 y 3 causa una disminución en la razón de incremento de los momentos en estas secciones y un consecuente aumento en la razón de incremento de los momentos en la sección 2 hasta que esta sección alcanza el estado de agrietamiento. Justo antes se cumple que $M_1=M_3 < 2M_2$. Después de que la sección 2 se agrieta, ocurre una

disminución en la razón de aumento de momentos en esta sección hasta una eventual recuperación.

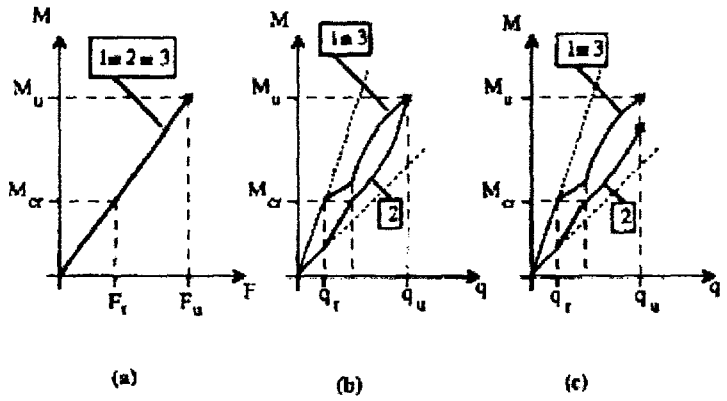


Figura 3.14 Redistribución de momentos en una viga empotrada-empotrada

Si las tres curvas momento-carga terminan en un punto (M_u , q_u), entonces se dice que ha ocurrido una redistribución *completa* de momentos. Si el momento último en la sección no se alcanza, entonces se dice que ocurre una redistribución *parcial* de momentos. La redistribución *cero* sólo es posible si la relación momento-carga siempre es lineal. En el caso de la carga distribuida de la figura 3.13 (Lopes, fig. 3), las secciones 1 y 3 alcanzarían el momento último mientras la sección 2 sólo la mitad de su capacidad última.

Los conceptos discutidos en los artículos revisados, conforman un conjunto de aspectos fundamentales que nos servirán de referencia a nuestra discusión sobre la redistribución de momentos más adelante, de acuerdo con lo planteado en el objetivo del presente trabajo.

Capítulo 3

DESARROLLO ANALÍTICO

En las siguientes secciones se presentan los fundamentos sobre los cuales se ha llevado a cabo esta investigación. En esencia presentan la base teórica y los procedimientos empleados en el desarrollo de los programas para la ejecución de las simulaciones que harán las veces de pruebas experimentales y que forman el núcleo de las herramientas empleadas en esta investigación. En el presente desarrollo analítico se presentan algunas de las consideraciones y formulaciones obtenidas de la revisión de la literatura, y que han sido presentadas en el capítulo 2. Así mismo se incluyen referencias a la teoría, los enfoques y métodos presentados por diversos autores en libros de texto, algunos de ellos de uso común en la academia y en la práctica de diseño en concreto.

3.1. Curva Momento-Rigidez a partir de la gráfica Momento-Curvatura

Para poder evaluar el comportamiento de cualquier miembro estructural, ya sea de material homogéneo, o bien compuesto, debemos poner atención, primero que nada a las *relaciones constitutivas* de los materiales, más específicamente a las relaciones *esfuerzo-deformación* de los materiales que conforman el miembro, en el caso de una viga de concreto reforzado, correspondería a las relaciones constitutivas de cada material. Debido a que nuestro estudio sobre la redistribución de momentos se centrará específicamente en el comportamiento por flexión de los miembros de concreto, los esfuerzos y deformaciones a ser considerados en el análisis serán exclusivamente aquellos que se desarrollan en la dirección paralela al eje del miembro. Lo que significa que nuestra evaluación dependerá de las propiedades de los materiales que se obtienen de pruebas estándar a tenso-compresión, tanto para el concreto como para el acero. Como se ha comentado antes, en el apartado de *estado del arte*, se han propuesto varios modelos orientados a idealizar el comportamiento del concreto y del acero cuando se someten a pruebas de tenso-compresión. Cabe mencionar que las idealizaciones resultan ser descripciones muy cercanas, y por tanto consideradas válidas, del comportamiento real, principalmente por el rango de deformación en el que trabajan los materiales en un análisis

convencional y debido a la simplicidad que aportan. Es claro que la evaluación de la redistribución de momentos en vigas no se considera un proceso de análisis *convencional*, sin embargo se han hecho consideraciones con la intención de reflejar lo mejor posible las propiedades de los materiales, sin perder el sentido práctico en el proceso de análisis; consideraciones que en el peor de los casos nos permiten mantenernos en una posición conservadora, tanto desde el punto de vista la capacidad de los materiales como de la seguridad estructural, acorde a las especificaciones marcadas en los reglamentos de diseño. Existen excepciones a esta regla, cuando nos interesa evaluar comportamientos sobre rangos más amplios, los cuales representan valores límite en el diseño convencional.

La relación *esfuerzo-deformación* en el concreto a compresión a emplear en este estudio, será basada en el trazo continuo de la curva de Hognestad[27], cuya expresión es

$$f_c(\varepsilon_c) = f_c''\left[\frac{2\varepsilon_c}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}\right)^2\right]$$

donde

$$\varepsilon_0 = \frac{2\sqrt{f_c''}}{E_c}$$

y f''_c es el esfuerzo máximo alcanzado en el concreto. En la figura 3.1 se presenta el comportamiento de la expresión de Hognestad para f'_c de 150, 200, 250, 300 y 350 kg/cm^2. Como se observa en la gráfica, el nivel máximo de deformación a emplearse en el análisis para este estudio será ε_{cu} = 0.003, que corresponde a la deformación máxima del concreto antes de iniciarse la fase de aplastamiento. Para hacer corresponder la fuerza del bloque rectangular equivalente de compresión sugerido por Whitney[28], con el bloque de compresión aplicado por la relación de Hognestad, se sugiere la relación $f''_c = 0.96 f'_c$. La capacidad del concreto a tensión será basada en la misma curva de Hognestad pero hasta el punto en el que se alcanza el esfuerzo de ruptura en el concreto sujeto a tensión, cuyo valor se obtiene de $f_r = 2\sqrt{f'_c}$.

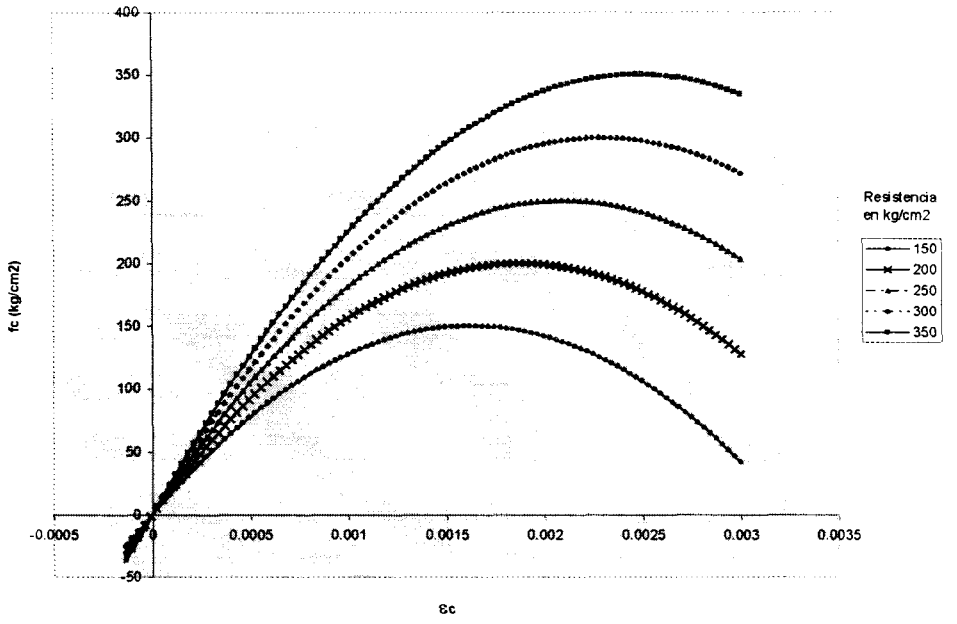


Figura 3.1 Gráfica esfuerzo-deformación del concreto

Para la curva esfuerzo-deformación en el acero de refuerzo se ha considerado la relación bilineal que se muestra en la figura 3.2. En ella se indica el comportamiento del acero en la zona elástica hasta el punto en el que se alcanza el esfuerzo-deformación de fluencia, y a partir de ahí se observa un esfuerzo constante para una deformación cualquiera, correspondiente a la zona plástica del acero. Obsérvese que esta curva no toma en cuenta el fenómeno de endurecimiento por deformación, considerando que esto representa un comportamiento válido para los rangos de deformación usados en el estudio, y que además implica una posición conservadora sobre la capacidad del acero de refuerzo.

A partir de estas relaciones constitutivas podemos proponer un método para el cálculo de los estados críticos de esfuerzo-deformación por los que pasa una sección de concreto en la historia de carga del miembro, como son el punto de agrietamiento del concreto a tensión, con su correspondiente valor de momento-curvatura (ϕ_{cr}, M_{cr}), el punto en el que el acero alcanza la fluencia, o bien el punto (ϕ_y, M_y), y finalmente, el punto de deformación máxima permisible en el concreto antes del aplastamiento, o bien el punto (ϕ_u, M_u).

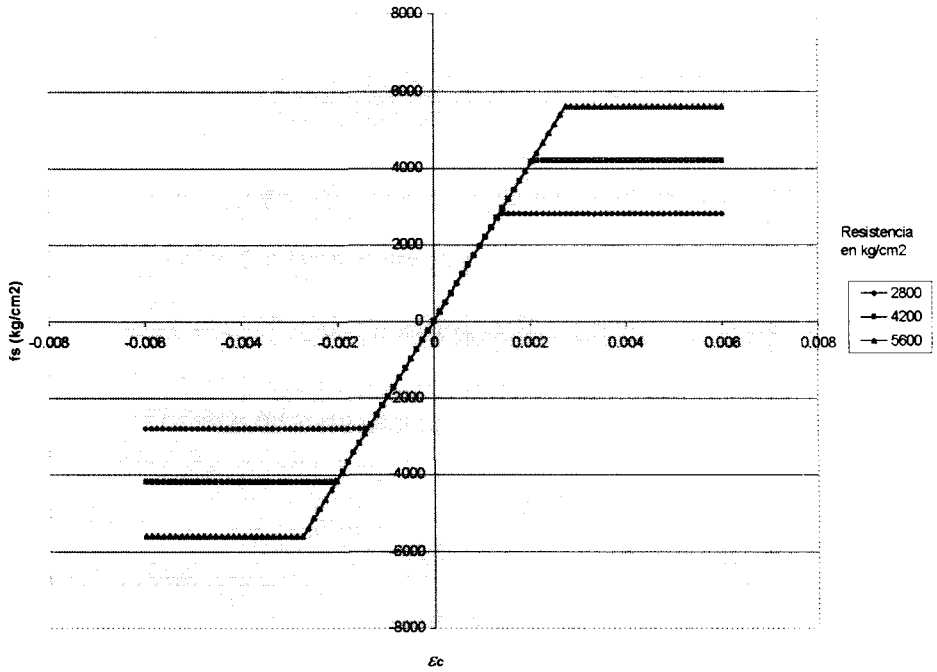


Figura 3.2 Gráfica esfuerzo-deformación para el acero

Es necesario también conocer puntos intermedios de la gráfica M-ϕ de modo que el método de cálculo a seleccionar debe ser de orden general. Bajo estos requerimientos, los métodos basados en el bloque rectangular equivalente de Whitney[28], el método propuesto por Alwis[6], o el propuesto por Mukai[11], carecen de representatividad, en particular al evaluar los puntos M-ϕ para carga de servicio, o en el rango de fluencia. De hecho la propuesta de Alwis implica una línea recta horizontal en la zona de fluencia para la gráfica M-ϕ, lo cuál supone una consideración aceptable para ciertas aplicaciones pero no para este estudio, en el que precisamente se desea evaluar la capacidad dúctil de una sección (*enfoque seccional*) o conjunto de secciones de concreto armado (*enfoque estructural*), lo que depende fuertemente del comportamiento característico de la curva M-ϕ en la zona plástica. La figura 3.3 muestra los estados de esfuerzo-deformación típicos para las tres *fases* en el comportamiento de una sección de concreto, la *fase I* de no-agrietamiento, la *fase II* de agrietamiento, y la *fase III* de fluencia ó fase *plástica*.

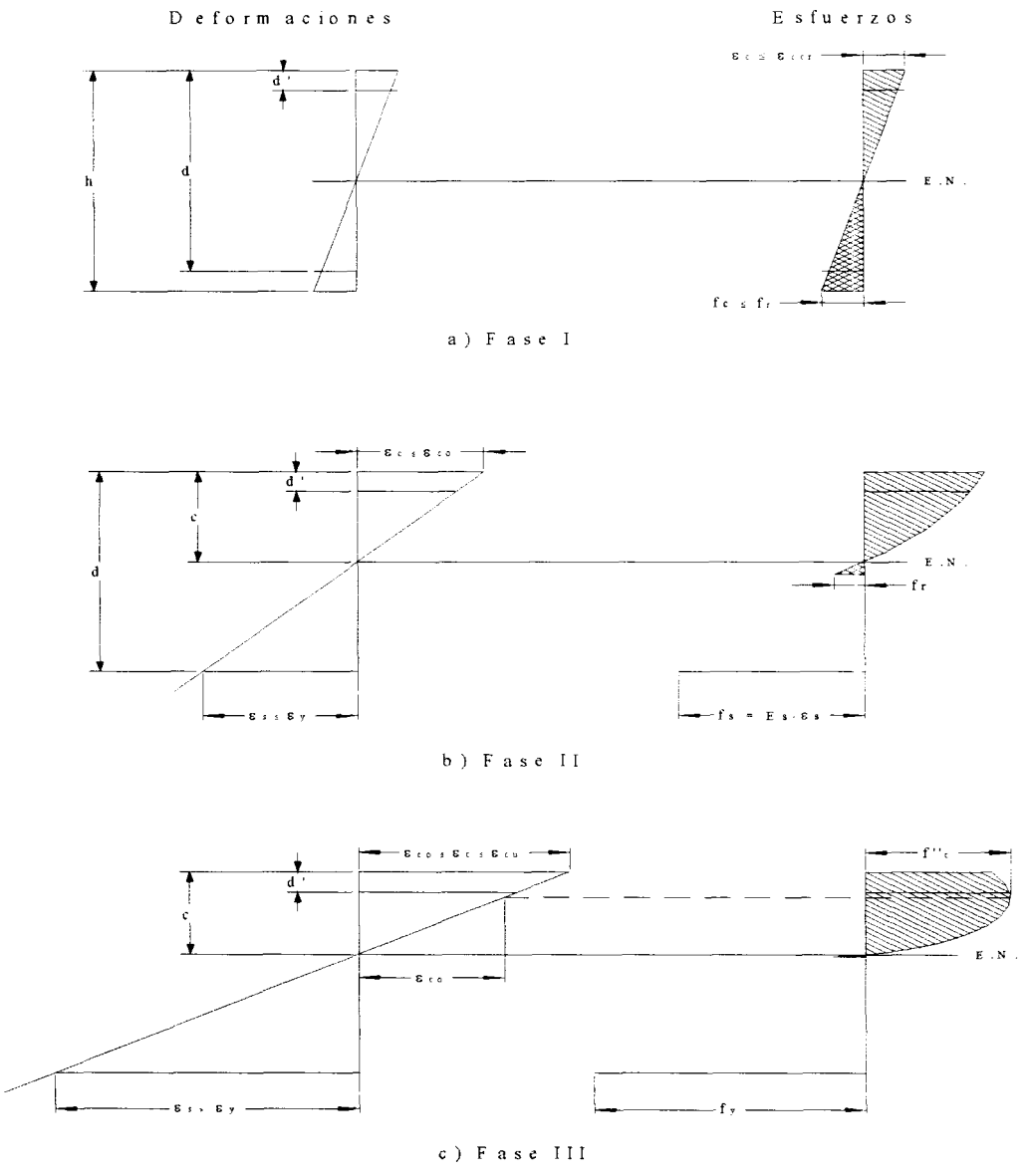


Figura 3.3 Fases de la historia de carga de una sección

Para efectos de lograr un método de orden general, el requerimiento se cumple si consideramos el uso del *procedimiento general* sugerido por González y Robles[13], o mejor conocido como el *método de fibras* o *método de franjas*. Como se ha mencionado antes, éste método constituye una alternativa viable pero costosa por el tiempo empleado en los cálculos. Desde luego esta desventaja se compensa por la posibilidad de tener toda la historia de carga-deformación de una sección de concreto armado, a través de su curva *M-ϕ*.

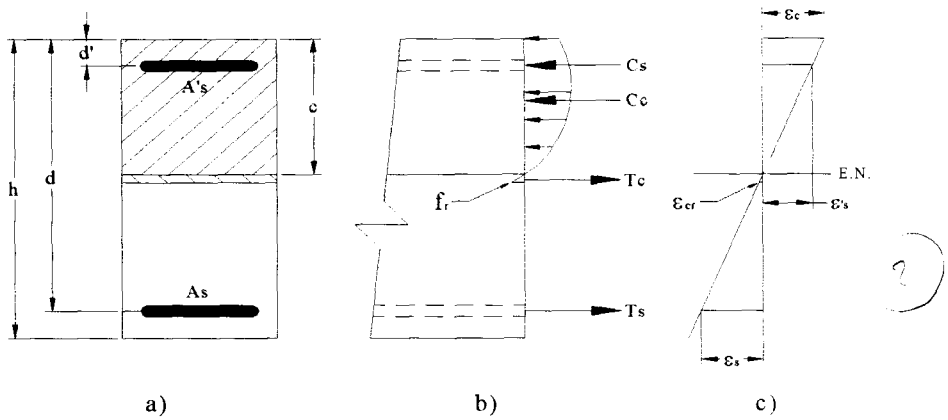


Figura 3.4 Esfuerzos y deformaciones en una sección típica de concreto reforzado

En el presente estudio y con la intención de reducir el trabajo de cálculo necesario en el proceso iterativo que implica cada punto de la curva M-ϕ se ha considerado conveniente calcular la fuerza resultante del bloque de esfuerzos de compresión en el concreto a partir de la integración de la curva de esfuerzo $f_c(\varepsilon_c)$, ya que el bloque de compresión a usarse será basado en la curva de Hognestad en el rango de 0 a 0.003 para la deformación unitaria en la fibra a compresión del concreto. Desde luego esta consideración evita la división de la zona de compresión en fibras, y por tanto reduce el tiempo de cálculo necesario. Considérese que, por el número de veces que se evalúa este bloque en un proceso iterativo, la reducción en tiempo es significativa. Adicionalmente, el hecho de usar la función de Hognestad a todo lo largo hasta la deformación última, constituye una medida conservadora, pero aún muy cercana al bloque de esfuerzos real.

El planteamiento del esquema de cálculo basado en el *procedimiento general* se presenta a continuación. El procedimiento general está fundamentado en la resolución de una ecuación no lineal de la forma

$$F_X(c) = 0$$

que representa una ecuación de equilibrio sobre una sección de concreto armado, en la que se consideran las fuerzas internas producidas por las resultantes de los esfuerzos en el acero a tensión y a compresión, y en el bloque de concreto a compresión, así como la pequeña fracción de esfuerzo a tensión resistida por el concreto.

La figura 3.4a muestra una sección rectangular típica de concreto armado. En la figura 3.4b se indican las fuerzas horizontales que participan en la ecuación de equilibrio, C_c, la fuerza del bloque de compresión del concreto, la fuerza T_c, del bloque de tensión en el concreto, C_s y T_s, la

fuerza de compresión y tensión debida al acero de refuerzo correspondientes a A'_s y a A_s. De modo que la ecuación de equilibrio horizontal típica sería

$$\sum F_X = C_C + C_S + T_C + T_S = 0$$

En el análisis de equilibrio seccional participan los parámetros geométricos constantes *d, d', As* y *A's*, así como los parámetros variables *c* y la deformación unitaria de referencia ε_r en alguna posición sobre el eje vertical, por ejemplo la deformación en la fibra extrema superior a compresión en el concreto ε_C. Para lograr el estado de equilibrio sobre la sección debemos fijar una de éstas variables, a modo de variar la otra por aproximación sucesiva hasta lograr que la expresión sume *cero*. Es claro que es conveniente fijar la variable ε_C para resolver, calculando el valor de *c* que hace *cero* la ecuación. De este modo la variable ε_C se vuelve una variable de control que en efecto representa una característica importante para un estado de deformación dado. Como se ha mencionado, y para efectos de generalizar el esquema de cálculo, podemos considerar que la deformación de referencia ε_r puede fijarse en cualquier posición del eje vertical sobre el plano de la sección, de modo que si medimos la posición vertical de la deformación a partir de la fibra extrema a compresión del concreto, la fijación de la deformación de referencia ε_r deberá ir acompañada de la posición vertical sobre la que se mide ésta deformación, es decir la pareja (ε_r, d_r), donde d_r es la distancia vertical desde la fibra extrema a compresión del concreto hasta la posición a la que se mide la deformación unitaria que se fijará. Obsérvese que de esta manera el proceso queda abierto para evaluar el equilibrio para estados específicos de esfuerzo-deformación, como lo son los estados críticos que esbozan la curva M-ϕ. Es decir, para efectos de evaluar los estados críticos podemos prestablecer la pareja (ε_{cr}, h), para considerar la deformación de agrietamiento en la fibra extrema a tensión del concreto como deformación de referencia, cuyo estado de equilibrio correspondería a las fuerzas internas actuantes justo al agrietarse el concreto en la fibra extrema en tensión, y por tanto a partir de éstas calcular el punto (ϕ_{cr}, M_{cr}) de la curva M-ϕ. Así, podemos hacer lo mismo con la pareja (ε_y, d), que corresponde al punto de inicio de la fluencia en el acero a tensión, o bien al punto (ϕ_y, M_y) en la curva M-ϕ. El punto (M_u, ϕ_u) se obtendría del estado de esfuerzo-deformación correspondiente a la pareja $(\varepsilon_u, d_r = 0.0)$, ver la figura 3.5.

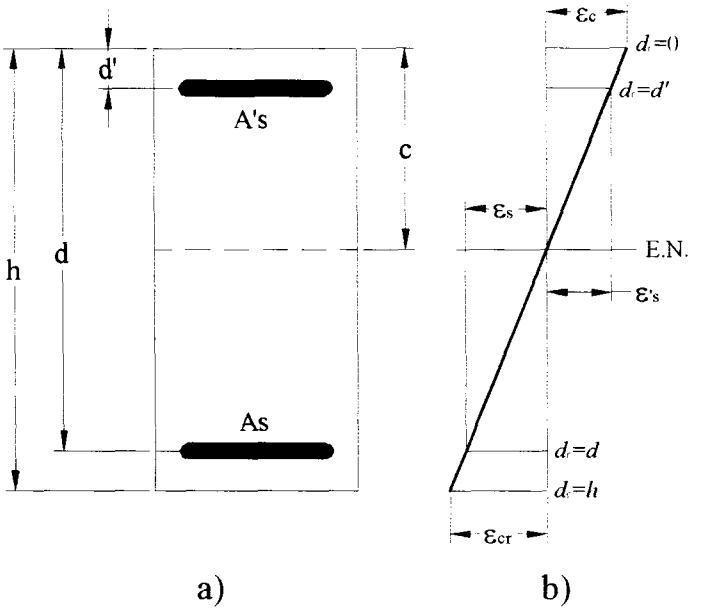


Figura 3.5 Deformaciones de referencia con sus correspondientes distancias verticales

Esta última pareja corresponde a la la forma más general y es útil en la evaluación de la historia de carga-deformación de la sección basada en la curva *M-ϕ* puesto que la pareja *(ε_c , d_r = 0.0)* permite evaluar los estados de esfuerzo-deformación para valores incrementales en ε_c , desde un valor de *cero*, pasando por el punto de agrietamiento inicial, el punto de inicio de la fluencia en el acero a tensión y finalmente el punto de falla. Obsérvese que en el proceso, d_r permanece con un valor de *0.0*, indicando que la deformación de referencia es la de la fibra extrema a compresión del concreto, en toda la historia de carga-deformación.

Volviendo a la ecuación de equilibrio horizontal, y debido a que todas las deformaciones dependen de los valores de ε_r y de *c*, si fijamos ε_r, el equilibrio sólo depende de *c*, por tanto las deformaciones en el acero a tensión y a compresión serían

$$\varepsilon_s(c) = \varepsilon_r \frac{c-d}{c-d_r}$$

y

$$\varepsilon'_s(c) = \varepsilon_r \frac{c-d'}{c-d_r}$$

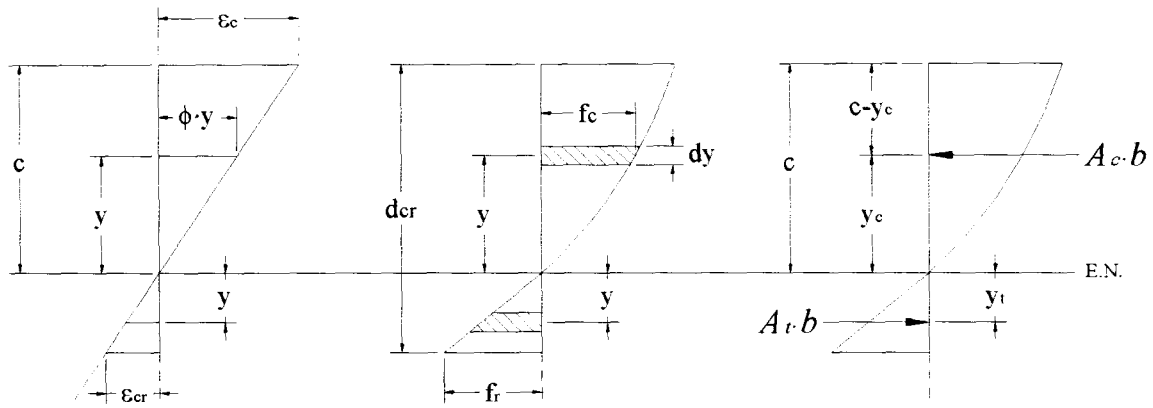


Figura 3.6 Relaciones deformación-esfuerzo-fuerza en los bloques compresión/tensión del concreto

Si consideramos que el esfuerzo al que está sujeto el acero se obtiene de una función $f_s(\varepsilon)$ que depende de la deformación unitaria, al nivel correspondiente del acero a tensión y a compresión, tenemos que las fuerzas horizontales en el acero serían

$$T_s = f_s(\varepsilon_s(c)) \cdot A_s$$

y

$$C_s = f_s(\varepsilon'_s(c)) \cdot A'_s$$

La figura 3.2 muestra la función $f_s(\varepsilon)$ para aceros de diferentes resistencias a la fluencia.

Por otro lado, las fuerzas internas de tensión y compresión aportadas por el concreto se obtienen por integración directa de la curva de Hognestad. La figura 3.6 presenta la curva de esfuerzo-deformación del concreto actuando sobre la sección para un estado de deformación dado. Para calcular la fuerza de compresión o tensión en el concreto para este estado de deformación, debemos integrar el área bajo la curva esfuerzo-deformación que corresponde a una superficie en un plano paralelo al plano X-Y o plano de flexión. Partiendo de la función de Hognestad

$$f_c(\varepsilon) = f_c''\left[\frac{2\varepsilon}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2\right]$$

de la figura 3.6 podemos escribir $\varepsilon = y \cdot \phi$, donde $\phi = \varepsilon_c/c$, es la curvatura correspondiente a un estado de deformación dado. De modo que el área bajo la curva esfuerzo-deformación del concreto representa la fuerza de compresión/tensión por unidad de longitud actuando sobre la

zona a compresión/tensión de la sección, y se muestra como una superficie paralela al plano de flexión del miembro. De modo que el área de compresión puede calcularse como

$$A_c(c) = \int_0^c f_c^{''}\left[\frac{2y\phi}{\varepsilon_0} - \left(\frac{y\phi}{\varepsilon_0}\right)^2\right]dy = f_c^{''}\left(\frac{\phi}{\varepsilon_0}c^2 - \frac{\phi^2}{3\varepsilon_0^2}c^3\right)$$

De la misma forma el área de tensión puede obtenerse de

$$A_t(c) = \int_0^{d_{cr}-c} f_c^{''}\left[\frac{2y\phi}{\varepsilon_0} - \left(\frac{y\phi}{\varepsilon_0}\right)^2\right]dy = f_c^{''}\left[\frac{\phi}{\varepsilon_0}(d_{cr}-c)^2 - \frac{\phi^2}{3\varepsilon_0^2}(d_{cr}-c)^3\right]$$

donde d_{cr} es la posición vertical a la que se da el esfuerzo de agrietamiento en la fibra a tensión para un estado de esfuerzo-deformación dado, y se obtiene de la relación

$$d_{cr} = \frac{c\varepsilon_r - (c-d_r)\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_r}$$

donde $\varepsilon_{cr} = f_r/E_c$ es la deformación unitaria que produce el agrietamiento en el concreto.

De modo que, tomando como base las expresiones anteriores podemos escribir las expresiones para las fuerzas resultantes de compresión/tensión ejercidas por el concreto como

$$C_c = A_c(c)\cdot b$$

y

$$T_c = A_t(c)\cdot b$$

así que podemos reescribir la expresión básica de equilibrio anterior como sigue

$$\sum F_x = F_x(c) = A_s f_s(\varepsilon_s(c)) + A_s^{'} f_s(\varepsilon_s^{'}(c)) + A_c(c)b + A_t(c)b = 0$$

De esta manera, dados los parámetros geométricos constantes y la deformación de referencia, la ecuación es solo función de c.

La resolución de la ecuación sugiere el empleo de un método iterativo que permita acotar el valor de *c* que hace la ecuación *cero*. En este estudio se usa el método de la *secante* para resolver la ecuación de equilibrio.

Una vez determinada *c* el momento resistente M_r puede ser calculado a partir de la expresión

$$M_r = A_s f_s(\varepsilon_s(c))d + A_s' f_s(\varepsilon_s'(c))d' + A_c(c)b(c - y_c) + A_t(c)b(c + y_t)$$

donde y_c y y_t son los brazos de palanca de la fuerza de compresión y de tensión en el concreto, respectivamente, calculados como

$$y_c = \frac{Q_c(c)}{A_c(c)}$$

y

$$y_t = \frac{Q_t(c)}{A_t(c)}$$

cuyos numeradores $Q_c(c)$ y $Q_t(c)$ son los momentos de área de la zona de compresión y de tensión en el concreto, respectivamente, los cuáles se obtienen de las expresiones

$$Q_c(c) = \int_0^c f_c''\left(\frac{2\phi}{\varepsilon_0}y - \frac{\phi^2}{\varepsilon_0^2}y^2\right)ydy = f_c''\left(\frac{2\phi}{3\varepsilon_0}c^3 - \frac{\phi^2}{4\varepsilon_0^2}c^4\right)$$

y

$$Q_t(c) = \int_0^{d_{cr}-c} f_c''\left(\frac{2\phi}{\varepsilon_0}y - \frac{\phi^2}{\varepsilon_0^2}y^2\right)ydy = f_c''\left[\frac{2\phi}{3\varepsilon_0}(d_{cr}-c)^2 - \frac{\phi^2}{4\varepsilon_0^2}(d_{cr}-c)^4\right]$$

Finalmente, una vez resuelto el valor de *c* y de M_r, se obtiene la curvatura correspondiente al estado de esfuerzos en cuestión a partir de la expresión

$$\phi_r = \frac{\varepsilon_r}{c}$$

De este modo, se logra la relación *momento-curvatura* para un estado de esfuerzos, o bien el punto (ϕ_r, M_r) de la curva *momento-curvatura* correspondiente.

Empleando las expresiones anteriores, podemos calcular parejas *(ϕ, M)* a todo lo largo de la historia de carga, pero como es evidente, en lugar de obtener la deformación a partir de la carga externa aplicada sobre la sección, calculamos la capacidad interna de resistir momento a partir de una deformación de referencia, como se sugiere por el procedimiento general para obtener la curva *momento-curvatura*. La figura 3.7 muestra una curva *momento-curvatura* típica, obtenida del empleo de las expresiones anteriores. En ellas se observa la *fase I* de no-agrietamiento, hasta el punto en el que se observa una pérdida súbita de rigidez y una eventual recuperación, como lo muestra el pequeño valle en la parte baja de cada curva. Esta pérdida de rigidez corresponde con el punto *(ϕ_{cr}, M_{cr})* en el que la sección pierde la capacidad de tomar tensión en la fibra extrema inferior, o bien el punto de agrietamiento inicial de la sección. A partir de este punto ocurre un descenso en la curva *M-ϕ* hasta un valor mínimo local a partir del cuál inicia la recuperación de la capacidad para tomar carga, o bien la recuperación de la rigidez, iniciando la *fase II* cuyo trazo se extiende hasta el punto en el que se alcanza el esfuerzo de fluencia del acero a tensión, o bien el inicio de la zona de fluencia o *fase III*, señalado por el punto *(ϕ_y, M_y)*, el cuál se distingue por otra súbita pérdida de rigidez, extendiéndose hasta el punto de falla indicado por el punto *(ϕ_u, M_u)* en el extremo de la curva.

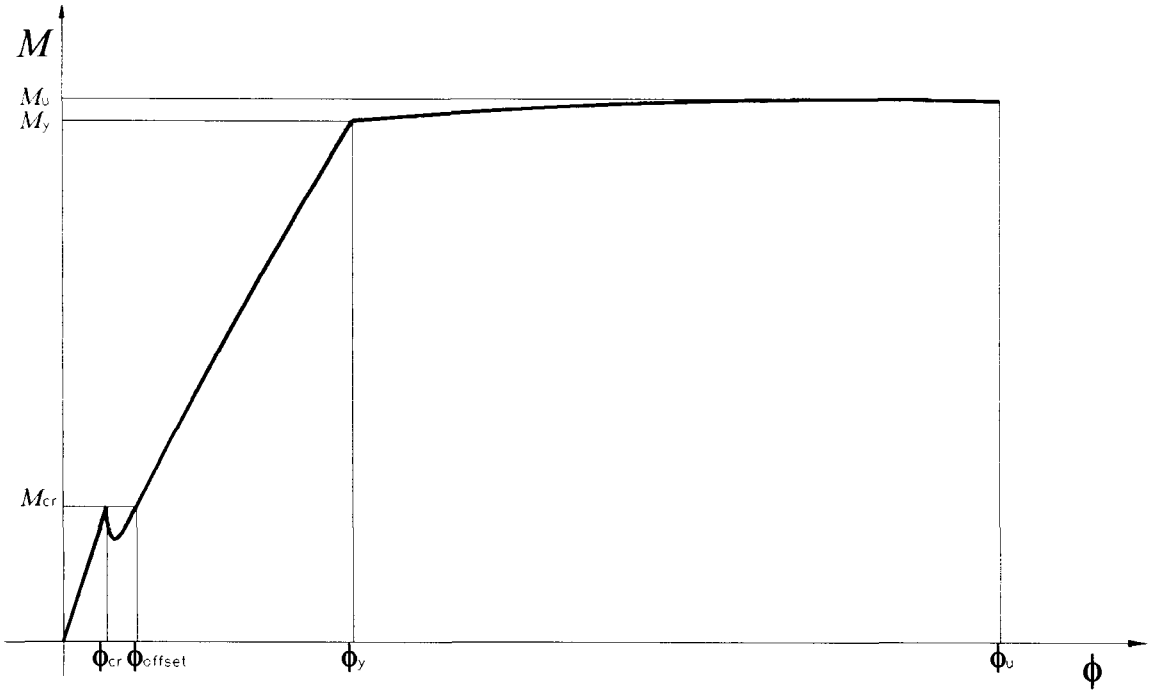


Figura 3.7 Curva momento-curvatura típica

En base a la curva M-ϕ es posible evaluar en forma directa la *ductilidad por curvatura* definida por la expresión

$$u = \frac{\phi_u}{\phi_y}$$

donde

ϕ_u = curvatura última, en el estado de falla,

ϕ_y = curvatura a la fluencia (en el acero a tensión).

La figura 3.8 muestra las curvas típicas de ductilidad para distintos valores del cociente A'_s/A_s cada curva variando en términos de la relación ρ/ρ_b.

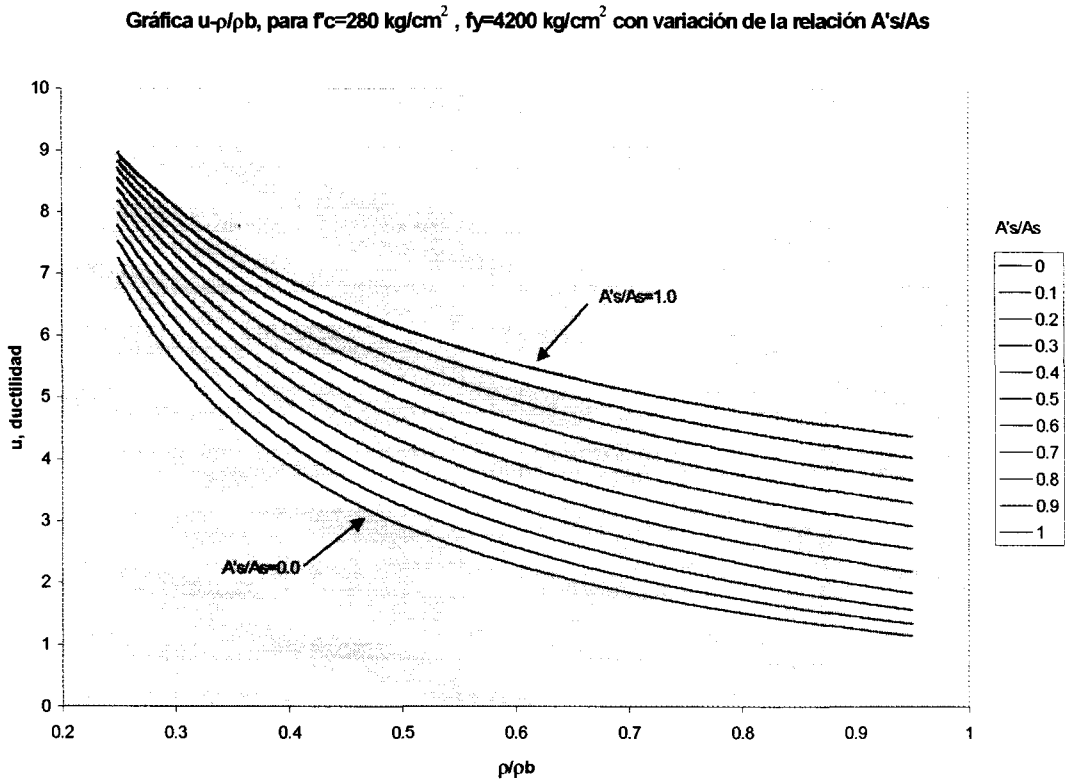


Figura 3.8 Curvas de ductilidad típicas para una sección de concreto

De este modo, el análisis bajo el *enfoque seccional* del concreto armado se resume en la evaluación de la curva M-ϕ , los estados críticos de la curva M-ϕ, y como más adelante será evidente, también es importante la evaluación de la ductilidad, u, de la sección.

Uno de los resultados más interesantes y obligados de este enfoque seccional para el análisis de la rigidez de una sección de concreto reforzado corresponde a la comparación de la curva

Momento-Rigidez, *EI-M*, para la rigidez calculada según el bloque de integración propuesto antes, en contraste con los valores obtenidos de la fórmula de Branson para secciones típicas. La figura 3.9 presenta una de estas evaluaciones comparativas para una sección dada, en las que se muestra la curva cúbica descrita por la fórmula de Branson sobrepuesta con la curva obtenida de la relación M-ϕ, cuyas pendientes instantáneas $dM/d\phi$ dan el valor de la rigidez flectora EI de la seccional para un momento interno M dado.

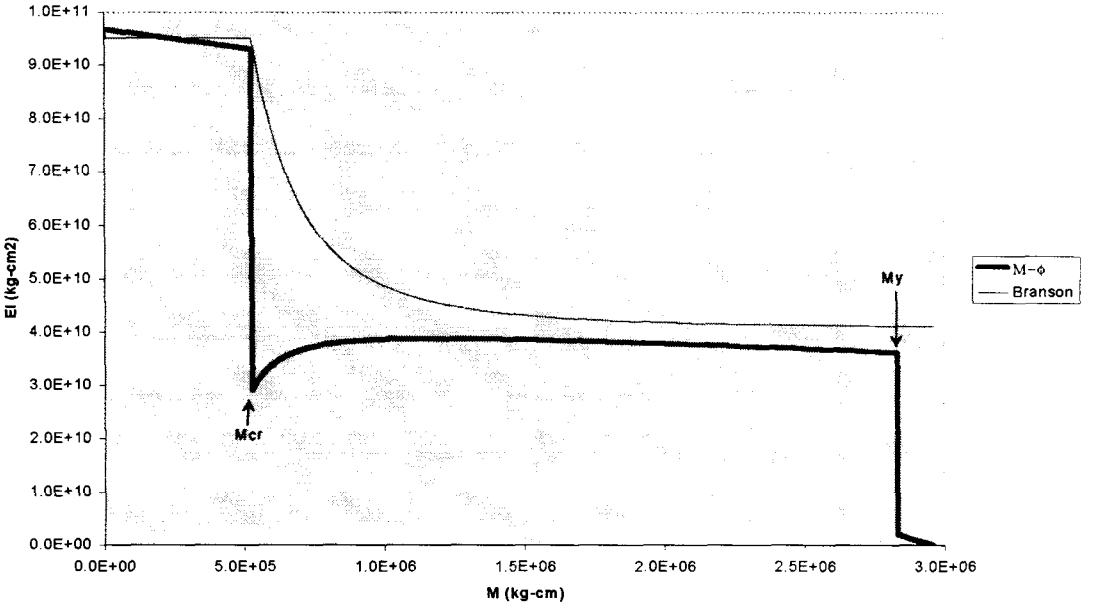


Figura 3.9 Gráfica comparativa EI-M según Branson versus EI-M obtenida de la curva M-ϕ

Sin embrago, como sabemos la fórmula de Branson fue obtenida de pruebas de deflexión para calcular una rigidez equivalente en vigas simplemente apoyadas de manera que fuera posible calcular la rigidez a partir de las características de la sección central de concreto armado, para que ésta rigidez equivalente fuese usada en la expresión

$$\Delta_{\max} = \frac{5wL^4}{384EI}$$

que corresponde a la deflexión máxima central de una viga simplemente apoyada sujeta a carga uniforme, para cargas de servicio. Esto supone un *enfoque estructural* más que *seccional* para el cálculo de la rigidez, por lo que implica la consideración de efectos adicionales, es decir no solo la capacidad de deformación una sección sujeta a un nivel de momento interno, sino además y especialmente efectos como la *rigidización por tensión* del concreto, que ocurre debido a la aportación de rigidez adicional por tensión del concreto en las secciones intermedias entre grieta

y grieta a lo largo de la zona agrietada, lo que provoca un aumento en la capacidad para tomar momento en las secciones intermedias que debe ser considerada. La fórmula de Branson considera este efecto de manera integral con otros efectos estructurales inherentes, de lo cuáles la rigidización por tensión del concreto en particular, es de interés para este estudio. De hecho, se puede considerar que, de alguna forma, la diferencia entre la rigidez dada por la fórmula de Branson y la obtenida de la curva M-ϕ representa una aproximación al nivel de rigidez adicional que se desarrolla tanto por la rigidización por tensión en el concreto como por otros efectos.

El énfasis de este estudio estará puesto en los resultados del enfoque seccional, pero serán presentadas algunas evaluaciones comparativas empleando la fórmula de Branson, como se detalla más adelante en el programa de pruebas. Es claro que aunque esta posición es conservadora, se requerirán mayores estudios para explicar la diferencia entre ambos métodos para la evaluación de la curva *EI-M*, de manera que se tomen en cuenta efectos importantes que se ignoran en ciertas aplicaciones. Sin embargo, la mejor razón para tomar el enfoque seccional en este estudio se basa en el objetivo inicial de evaluar el efecto específico de la capacidad de rigidez flectora de una sección, para luego bajo un enfoque estructural integrar de manera sumativa los efectos de cada sección en la rigidez global, particularmente en los coeficientes de rigidez y en los momentos de empotramiento perfecto del miembro.

3.2. Determinación de la redistribución de momentos en vigas

La *redistribución de momentos*, objeto principal de este estudio tiene que ver directamente con la capacidad de un elemento de concreto de *"rotar"* en cierta posición o en un segmento de la viga de concreto, es decir en la posición de los momentos críticos positivos o negativos. Si la viga por algún medio tiene esta capacidad de *rotar*, el efecto de esta rotación es la modificación de la curva de momentos o bien, una modificación de la distribución de los momentos a lo largo de la viga, a lo que llamamos *redistribución de momentos*. La capacidad de una sección o conjunto de secciones de producir un efecto de rotación en cierta posición del miembro de concreto depende directamente de la capacidad dúctil de la sección o secciones que contribuyen a la rotación. A su vez la ductilidad de una sección depende de la capacidad de ésta de tomar deformaciones más allá de la zona de servicio, de modo que la ductilidad, como se ha mencionado en el apartado anterior, se circunscribe al segmento de curva del punto (ϕ_y, M_y) al punto (ϕ_u, M_u) sobre la curva *momento-curvatura*. En tanto más se desarrolle este segmento en el sentido horizontal, se observará una mayor capacidad de tomar deformaciones, es decir curvaturas, y por ende se tendrá una mayor capacidad para *rotar*. Ésta capacidad de rotación de una sección induce la formación de lo que se llama una *articulación plástica* la cuál puede verse

como una articulación semirígida con cierta capacidad de momento, típicamente el momento resistente nominal M_n de la sección. La figura 3.9 muestra una viga empotrada-empotrada sujeta a carga uniforme a nivel de servicio, con su correspondiente diagrama de momentos obtenido de un análisis lineal, luego la misma viga sujeta a una sobrecarga que lleva a los extremos de la viga a generar un par de articulaciones plásticas, y finalmente la viga sujeta a la carga de colapso en la que se generan tres articulaciones plásticas, que finalmente producen la inestabilidad de la estructura y provocan el colapso de la viga. Se dice que se ha producido un *mecanismo* cuando se generan al menos tres articulaciones plásticas en el claro de una viga. Por ejemplo, en una viga empotrada-articulada, un mecanismo se genera al formarse solo dos articulaciones, una en el extremo empotrado y otra en algún punto intermedio entre los apoyos en donde ocurre el momento máximo. Esta alteración en las condiciones de una sección crítica de concreto produce un reacomodo de las fuerzas internas sobre la sección, de modo que los momentos resistentes de la sección crítica alcanzan un tope, idealmente el valor nominal del momento resistente M_n como se ha dicho, permaneciendo constante la capacidad de momento en tanto la sección tenga la capacidad de deformarse más allá de la zona de servicio, es decir en la zona plástica. Esto provoca que el momento o la carga en exceso necesarios para generar la deformación adicional sean tomados por secciones más rígidas en la vecindad de la articulación plástica. Este es un fenómeno que ocurre a nivel interno y desde la óptica de la conservación del equilibrio y la compatibilidad se traduce en una alteración en la curva de momentos del miembro, y dada la nueva distribución de momentos, al fenómeno se la llama *redistribución de momentos*.

La figura 3.11 muestra el concepto de redistribución a través de las curvas de momento para diferentes niveles de carga uniforme, en la que progresivamente se aumenta la carga en la zona de servicio hasta alcanzar el momento de fluencia M_y de la sección en cualquiera de los extremos empotrados, suponiendo que la configuración geométrica y el armado son simétricos. A partir del punto en el que se alcanza M_y, a un nivel de carga W_y, se observa una reducción drástica en la capacidad para tomar momento en las secciones empotradas. Si se aumenta la carga W_i en forma adicional, la redistribución se traduce en un reposicionamiento de la cresta de la curva de momentos que depende de dos factores: a) la capacidad de la sección en el empotramiento para tomar deformaciones adicionales antes de la falla; y b) la capacidad de la sección crítica central para alcanzar los niveles requeridos de momento, hasta el punto de generar una articulación central. Obsérvese que la posición de los momentos en el empotramiento prácticamente no cambia. Éste último aumento progresivo de la carga termina hasta que se alcanza la falla por la formación de tres articulaciones, es decir el colapso, o bien, si se trata de una *redistribución parcial*, hasta que la sección al centro alcance la falla por la generación de otra articulación, es decir cuando se alcance el momento M_y en la sección central.

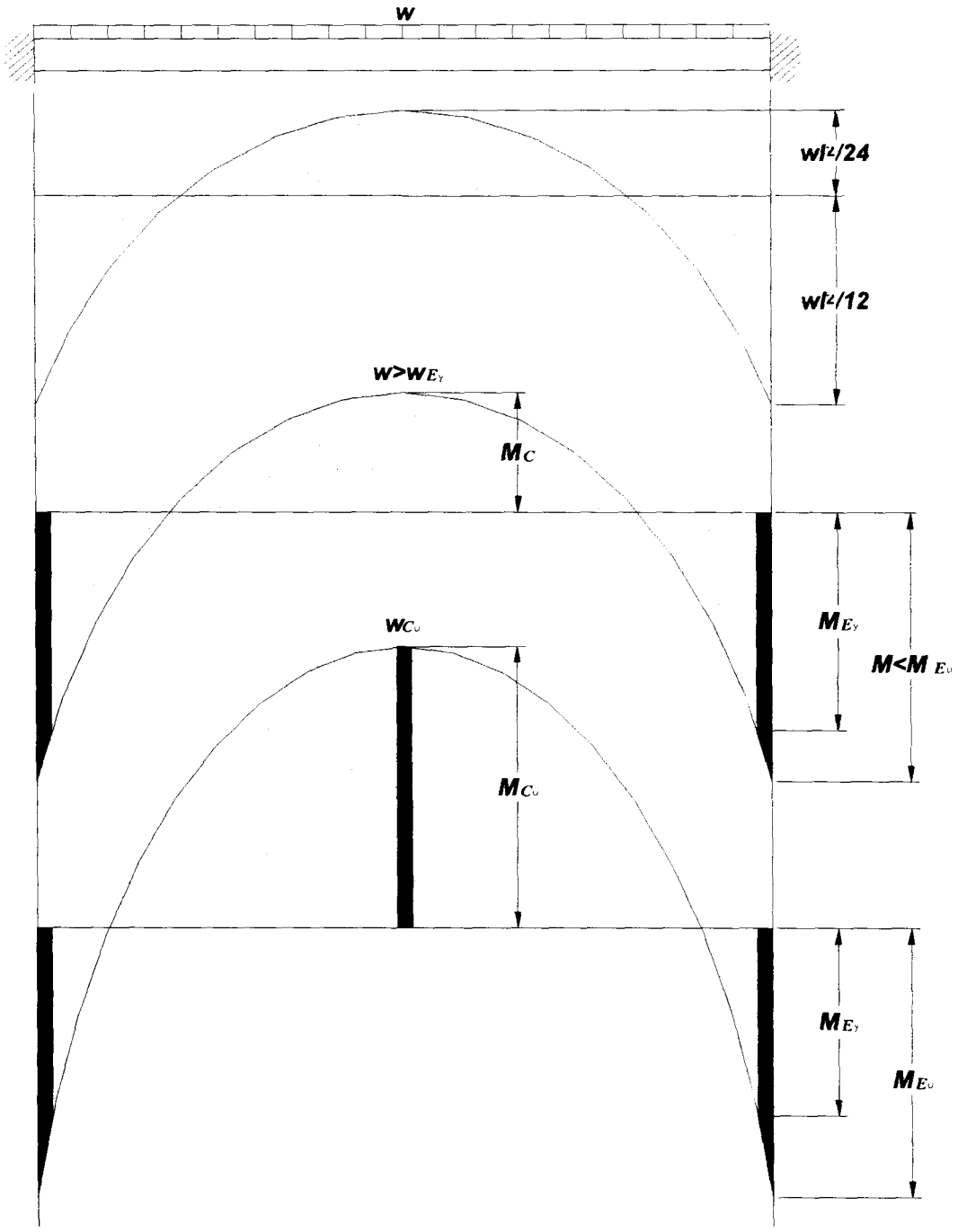


Figura 3.14 Proceso de formación de articulaciones sobre una viga empotrada-empotrada

Este último será el estado límite máximo considerado en este estudio. La *redistribución total* en una viga empotrada ocurre al diseñar con el mismo armado para los momentos positivos y negativos, de modo que, si se tiene una capacidad de redistribución suficiente, el momento central fallará al alcanzar el mismo nivel de momentos que para el momento negativo.

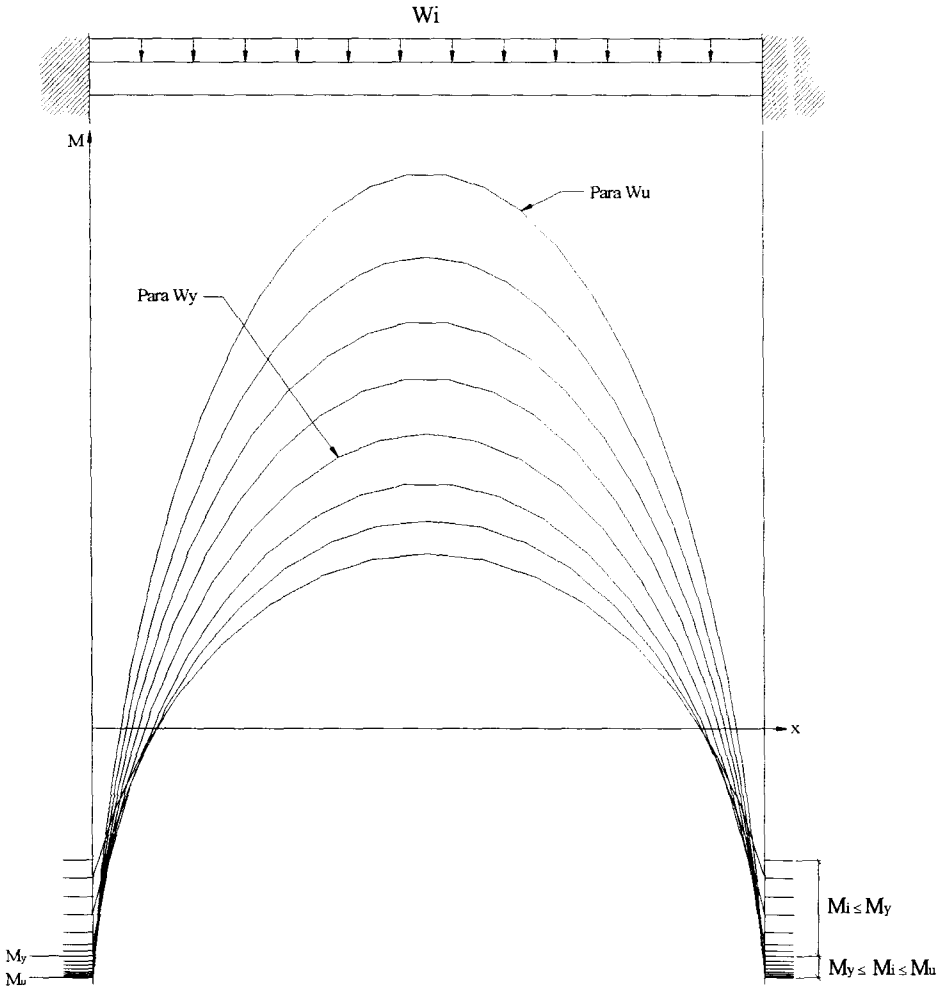


Figura 3.11 Efecto de la redistribución sobre el diagrama de momentos

En este trabajo el énfasis será puesto en la evaluación de la redistribución de momentos bajo un *enfoque estructural*, para vigas con apoyo empotrado-empotrado y con apoyo empotrado–articulado, considerando que éstas representan situaciones cercanas a las encontradas en la configuración de vigas continuas, y por tanto los resultados son más fácilmente transferibles a este tipo de análisis. Se presentará una evaluación del efecto de la redistribución en vigas continuas al final de este trabajo como preámbulo para un estudio posterior, en la que se muestra el fenómeno de modo ilustrativo.

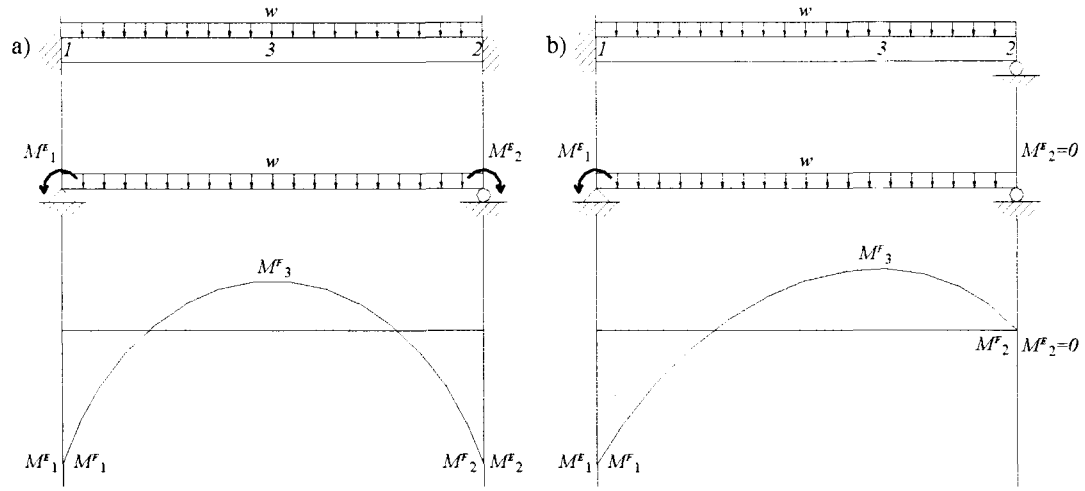


Figura 3.12 Vigas equivalentes y distribución de momentos para los casos estudiados

Para llevar a cabo el análisis de las vigas se recurrirá al método directo de rigideces para análisis por flexión. Si consideramos el análisis ya sea de la viga empotrada-empotrada o de la viga empotrada-articulada, éste se reduce a la solución de la ecuación matricial de la estructura

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1^E - M_1^F \\ M_2^E - M_2^F \end{Bmatrix}$$

donde los elementos de la matriz k_{11} , k_{12} , k_{21} y k_{22} son los coeficientes de rigidez del miembro, θ_1 y θ_2 son las rotaciones producidas en los extremos de la viga por efecto de una carga externa dada, M^E_1 y M^E_2 son los momentos externos a los que está sujeta la viga en los extremos de la viga, y finalmente M^F_1 y M^F_2 corresponden a los momentos de empotramiento perfecto generados por la carga impuesta sobre la viga.

De manera que los grados de libertad para el caso de la viga empotrada-empotrada (figura 3.12a) implican un valor de $\theta_1 = -\theta_2 = 0$, y dada la simetría geométrica y de carga, tenemos $M^E_1 = M^E_2 = M^E$, y también $M^F_1 = M^F_2 = M^F$. De esta manera, para el caso de la viga empotrada-empotrada la ecuación matricial original se reduce a

$$M^E - M^F = 0$$

que constituye la ecuación cuya solución representa el estado de equilibrio de la viga en uno o ambos nodos extremos, es decir el equilibrio entre las fuerzas actuantes externas y las fuerzas internas sobre la viga en los extremos.

Para el caso de la viga empotrada-articulada (figura 3.12b) los grados de libertad implican $\theta_1=0$ y $\theta_2 \neq 0$, y dada la condición de apoyo en el extremo derecho, se tiene $M^E{}_1 = M^E$ y $M^E{}_2 = 0$, y de forma similar $M^F{}_1 = M^F$ y $M^F{}_2 = 0$, de modo que la ecuación matricial original se reduce a

$$M^E - \left(1 + \frac{k_{12}}{k_{22}}\right) M^F = 0$$

que corresponde a la ecuación de equilibrio en el nodo empotrado.

Generalizando la ecuación de equilibrio de nodo podemos escribir

$$M^E - (1 + CR) M^F = 0$$

donde $CR = 0$, para viga empotrada-empotrada,

$CR = k_{12} / k_{22}$, para viga empotrada-articulada.

El análisis anterior corresponde a consideraciones elásticas, basadas en las siguientes suposiciones fundamentales (según Kassimali[29]):

1. Las estructuras están compuestas por material linealmente elástico, es decir que las relaciones esfuerzo-deformación del material estructural siguen la ley de Hooke.
2. La deformación de las estructuras son tan pequeñas que los cuadrados, o las potencias de orden superior de las pendientes, las rotaciones y las deformaciones axiales son despreciables en comparación con la unidad. De manera que, las ecuaciones de equilibrio pueden basarse en la geometría no-deformada de la estructura.

La intención de las suposiciones anteriores es la de obtener relaciones lineales entre las cargas aplicadas y las deformaciones estructurales resultantes. Una ventaja importante de este enfoque es que el principio de superposición puede ser empleado en el análisis.

Por otro lado, en un análisis *no-lineal*, las restricciones del análisis lineal son eliminadas al formular las ecuaciones de equilibrio a partir de la geometría deformada de la estructura que no se conoce con anticipación, y/o tomando en cuenta los efectos de la inelasticidad del material estructural. Las relaciones carga-deformación resultantes son entonces no-lineales, y normalmente se resuelven usando técnicas iterativas.

Una de las suposiciones básicas de este trabajo sugiere que es posible llevar a cabo el análisis no-lineal de las estructuras de concreto armado aún empleando relaciones esfuerzo-deformación que consideran rangos más allá de la zona elástica, y que por tanto no cumplen la ley de Hooke. Esta consideración se hace tomando en cuenta que los efectos no-lineales pueden ser descritos en forma aproximada por parámetros lineales como los desplazamientos y las fuerzas. Debido a la baja complejidad de las estructuras estudiadas, vigas empotrada-empotrada y empotrada-articulada, las deformaciones rotacionales y las deflexiones, aunque representan valores que sobrepasan los límites de proporcionalidad, se mantienen dentro de valores que suponen efectos mínimos, despreciables en las ecuaciones de equilibrio de la estructura. Asimismo, el análisis detallado del estado de esfuerzo-deformación permite considerar los efectos de la deformación a nivel seccional, representando por ejemplo los efectos de la alta o baja ductilidad de una sección, para de manera sumativa reflejar globalmente los cambios de rigidez que produce el agrietamiento de las secciones de concreto sobre un segmento dado de la viga. El rango de deformaciones considerado en el estudio se mantiene dentro de niveles aceptables si se considera que el concreto acepta deformaciones despreciables a tensión y bajas a compresión, que en contraste con las deformaciones encontradas en elementos de acero, se pueden considerar como *deformaciones pequeñas*, lo que permite mantenernos cerca de la segunda suposición para el análisis.

El efecto de los cambios de rigidez seccional sobre la rigidez global de la viga es tomado en cuenta a partir del mismo análisis empleado para calcular la rigidez o bien los coeficientes rotacionales de un miembro de sección variable sujeto a flexión. El análisis por *trabajo virtual* (Beaufait et al[40]) para encontrar las relaciones fuerza-desplazamiento sobre un miembro tipo viga sugiere el cálculo de los coeficientes de *flexibilidad* del miembro, según la siguiente ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Donde los coeficientes de flexibilidad serían:

$$f_{11} = \int_0^L \frac{\left(\frac{x}{L} - 1\right)^2}{EI} dx$$

$$f_{12} = f_{12} = \int_0^L \frac{\left(\frac{x}{L} - 1\right)\left(\frac{x}{L}\right)}{EI} dx$$

$$f_{22} = \int_0^L \frac{\left(\frac{x}{L}\right)^2}{EI} dx$$

Partiendo de que $[K] = [F]^{-1}$, tenemos

$$k_{11} = \frac{f_{22}}{f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}} \qquad k_{12} = -\frac{f_{12}}{f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}}$$

$$k_{12} = -\frac{f_{21}}{f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}} \qquad k_{11} = \frac{f_{11}}{f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}}$$

Similarmente los momentos de empotramiento perfecto pueden obtenerse de la expresión matricial

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1^F \\ M_2^F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^C \\ f_2^C \end{Bmatrix}$$

de modo que

$$\begin{Bmatrix} M_1^F \\ M_2^F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1^C \\ f_2^C \end{Bmatrix}$$

Donde f_1^C y f_2^C son los coeficientes rotacionales debidos a la carga, en este caso carga uniformemente distribuida, y están dados por

$$f_1^C = \int_0^L \frac{\left(\frac{wl}{2}x - \frac{wx^2}{2}\right)\left(\frac{x}{L} - 1\right)}{EI} dx$$

$$f_2^C = \int_0^L \frac{\left(\frac{wl}{2}x - \frac{wx^2}{2}\right)\left(\frac{x}{L}\right)}{EI} dx$$

de modo que los momentos de empotramiento serían

$$M_1^F = k_{11}f_1^C + k_{12}f_2^C$$
$$M_2^F = k_{21}f_1^C + k_{22}f_2^C$$

Como se observa de las expresiones anteriores, las integrales para los coeficientes rotacionales f , están conformados por expresiones de momento e incluyen un denominador

constante EI que sugiere que este producto, conocido como *rigidez a flexión*, toma el mismo valor sin importar la posición sobre el eje longitudinal del miembro. Esto sucede para cierto rango de carga, en la fase de servicio pero antes del agrietamiento, suponiendo que el armado de la viga produce una rigidez constante a todo lo largo, lo cuál no es típico del diseño convencional ya que en la fase de servicio la diferencia entre los momentos críticos positivos y negativos es importante. Al pasar a la fase de agrietamiento, desde el punto de vista de los valores calculados de EI, se presentan diferencias importantes por la pérdida de área seccional de concreto, y por tanto la rigidez flectora en una sección puede ser significativamente diferente que para una sección en otra posición sobre la longitud de la viga. En la fase de fluencia de una sección es claro que la rigidez se ve reducida fuertemente, y la variabilidad de la rigidez en este rango es baja comparada con el orden de magnitud de la rigidez en la fase de servicio, pero muestra una reducción importante conforme los momentos alcanzan el momento-curvatura últimos.

Así que, debemos considerar el efecto de estos cambios en las expresiones para los coeficientes rotacionales f, de modo que si tomamos como punto de partida la curva *momento-curvatura* de una sección, la rigidez *tangente* de la curva M-ϕ está determinada por la pendiente instantánea a partir de la relación (ver figura 3.13)

$$EI\big|_T = \frac{M}{\phi} = \frac{dM}{d\phi} = \frac{\Delta M}{\Delta \phi}$$

La figura 3.13 muestra tres puntos sobre la curva M-ϕ, para la fase no-agrietada, la fase de agrietamiento y para la fase plástica.

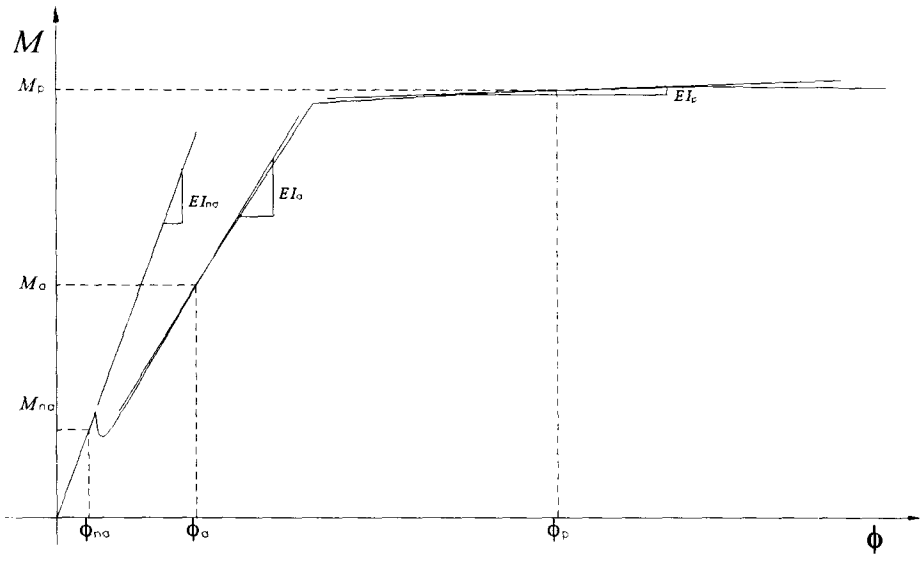


Figura 3.13 Puntos sobre la curva M-ϕ para las tres fases en la historia de carga-deformación

De este modo, para un momento interno M corresponde una curvatura ϕ y una rigidez EI tangente al punto (ϕ, M). Por otro lado, el momento interno a lo largo de una viga depende de la distribución de momentos descrita por la curva de momentos de la viga, así para una sección en una posición determinada sobre el eje del miembro, se puede calcular por equilibrio el momento interno al que está sujeta la sección. Enseguida, con el momento interno M podemos establecer el estado de esfuerzo-deformación de la sección o bien, la curvatura producida sobre la sección, y una vez localizado un punto (ϕ, M) sobre la curva M-ϕ, es posible establecer la rigidez tangente EI correspondiente. Por tanto, tomando en cuenta la variación de la rigidez seccional es posible calcular el efecto global que se produce sobre los coeficientes de flexibilidad f, y por tanto sobre los coeficientes de rigidez k, y finalmente sobre los momentos de empotramiento M^F. Así pues, todos éstos parámetros dependen del nivel de carga al que está sujeto el miembro en cuestión, es decir, para carga uniforme, el valor de w.

Las consideraciones anteriores nos permiten reescribir la ecuación de equilibrio de la estructura como

$$M^E - (1+CR)M^F(w) = 0$$

donde w = carga uniforme sobre el miembro,

$CR = k_{12}(w)/k_{22}(w)$, cociente de rigidez en función de la carga w,

$M^F(w)$ = el momento de empotramiento perfecto en función de la carga w.

Obsérvese que el valor de CR debe ser *cero* para una viga empotrada-empotrada como se indicó antes.

La expresión anterior constituye la ecuación fundamental sobre la que se basa la evaluación del porcentaje de redistribución de momentos, y la función

$$G(w) = M^E - (1+CR)M^F(w)$$

representa la *función de trabajo* para llevar a cabo un proceso de aproximación sucesiva hasta encontrar la raiz de $G(w)$, tal que el valor de w encontrado corresponde con el nivel de carga que equilibra el momento externo prescrito y el momento interno en el nodo extremo de una viga equivalente como se muestra en la figura 3.12. Así por ejemplo, si se desea conocer el nivel de carga correspondiente a un valor de M_y en el empotramiento, usamos M_y como valor de momento prescrito externo e iniciamos un proceso de aproximación sucesiva, variando la carga con incrementos apropiados hasta que el valor del momento interno (de empotramiento) iguale al momento externo aplicado, y en este punto, la carga correspondiente w, se convierte en w_y.

En la figura 3.11 se muestra el comportamiento sugerido por el proceso de aproximación sucesiva, en ella se muestra la variación de la carga w, así como la fijación de los valores del momento externo prescrito en los extremos de la viga que se toma como base para el cálculo de los niveles de momento M según el diagrama de momentos generado por w, para cada sección transversal de la viga, y a partir de éste se calcula el valor de rigidez EI correspondiente. Obsérvese que el valor de EI obtenido de la curva M-ϕ es una función de la carga a la que esta sujeto el conjunto, y por tanto se puede formular como una sola función que calcula la pendiente instantánea de la curva M-ϕ para un determinado punto (ϕ, M), o bien $EI(w)$.

Cuando evaluamos los valores de carga correspondientes a los valores de momento externo prescrito M_y y M_u es decir, los valores de w_y y w_u podemos calcular el porcentaje de redistribución sugerido por Cohn[16], como

$$\%r = \frac{w_u - w_y}{w_u} \times 100$$

El proceso descrito anteriormente, constituye la base fundamental para llevar a cabo la evaluación de los porcentajes de redistribución de momentos en vigas empotrada-empotrada y empotrada-articulada, y será la forma en que se llevarán a cabo las pruebas que se presentan en los capítulos siguientes.

Durante el proceso de redistribución de momentos es importante monitorear el comportamiento de los momentos máximos positivo y negativo (central y extremo) para el tipo de vigas analizadas, de modo que se tenga una clara definición gráfica de la fase de redistribución. Park y Paulay[30] presentan una curva de monitoreo similar a la presentada por Mattock[15] como resultado de pruebas experimentales, en la que es posible identificar claramente las fases elástica y de redistribución. La figura 3.10 muestra distintas etapas en la historia de carga de una viga empotrada-empotrada. Primero se muestra la viga con carga uniforme y su diagrama de momentos elásticos. Enseguida se presenta el punto en que se han generado las primeras articulaciones en los extremos, y por último se indica el estado en el que se genera un mecanismo de colapso.

En la figura 3.14 se muestra la variación de los momentos máximo positivo y negativo cuyo comportamiento hace evidente la fase de redistribución, para el caso de la viga de la figura 3.10.

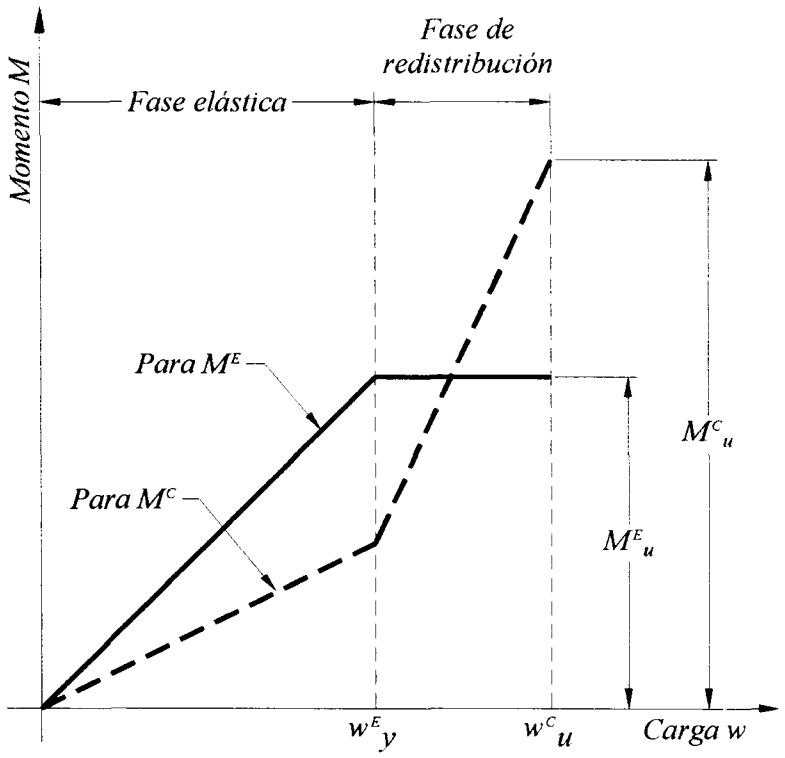


Figura 3.14 Curva de *carga-momento* para el momento extremo y central mostrando claramente la fase de redistribución de momentos

Este tipo de curvas será empleado en este estudio para apoyar la interpretación del fenómeno de redistribución, y servirán para aceptar o rechazar la redistribución de momentos para un miembro bajo ciertas condiciones de prueba.

Otro aspecto importante de este estudio, relacionado con la redistribución de momentos, es el concepto de *articulación plástica*, y más específicamente el concepto de *longitud de la articulación plástica* que corresponde a la longitud medida a partir de una sección crítica en un solo sentido, longitud sobre la que se desarrollan momentos en la fase plástica, y por tanto es un corto segmento de viga sobre el cuál se da un agrietamiento considerable de las secciones y una disminución importante de la rigidez de las secciones. La longitud de la articulación plástica puede ser calculada localizando el punto sobre el eje del miembro en el cuál se alcanza el momento de fluencia M_y en la vecindad de la zona crítica.

Por otro lado, la capacidad de rotación plástica de la articulación puede ser calculada usando la expresión

$$\theta_P = \int_0^{l_P} (\phi_z - \phi_y) dz$$

de esta manera es posible establecer relaciones de carga-deformación plástica para ser usadas en análisis elasto-plástico, por ejemplo idealizando las articulaciones plásticas como uniones semirígidas, o bien escribiendo relaciones fuerza-deformación para elementos tipo viga o marco, tal como lo propone Kassimali[29].

En este contexto, el cálculo de la longitud de la articulación plástica y por tanto de la rotación plástica, está basado en la determinación de la rigidez en las secciones en la vecindad de la sección crítica. Como se muestra en la figura 3.15, para una posición dada sobre el eje x_i del miembro, es posible calcular la rigidez EI_i correspondiente según el nivel de momento al que está sujeta la sección, y así para secciones anteriores y posteriores, separadas una distancia Δx.

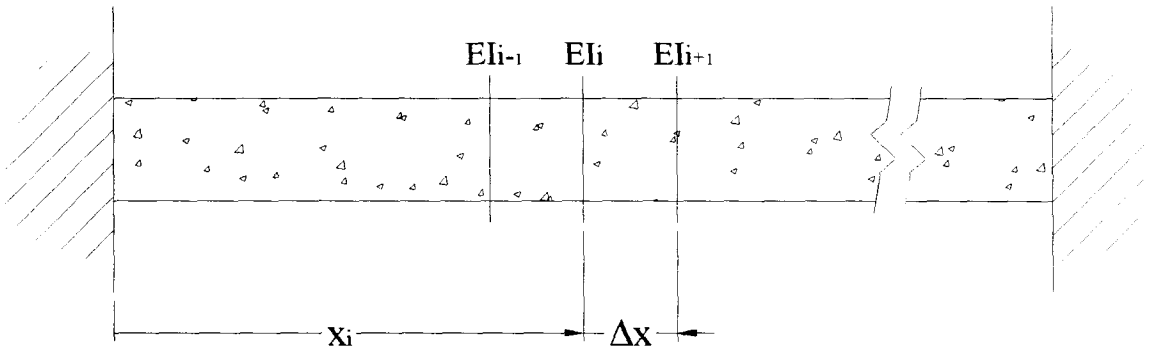


Figura 3.15 Discretización de la rigidez de un miembro a partir de secciones separadas a una distancia Δx

Para considerar el cálculo de la rigidez en las secciones cercanas a una sección crítica, digamos en un empotramiento, la figura 3.16 presenta una idealización de los valores de rigidez sobre un segmento en el que los momentos internos están por debajo de los momentos de fluencia M_y, y en secciones más cercanas a la sección crítica la rigidez disminuye progresivamente hasta que sobre la sección se alcanza el momento último M_u. Este segmento de viga en el que ocurre la disminución de la rigidez en la zona plástica delimita la longitud de la articulación plástica, y corresponde a la región de la viga en donde se vuelven críticas las

consideraciones acerca de la ductilidad, y la capacidad de deformación adicional aún para niveles elevados de momento cercanos al momento de falla. Es en esta región en la que se fundamentan enfoques tan poco comunes como el análisis y diseño límite, así como el efecto de redistribución de momentos, objeto del presente trabajo.

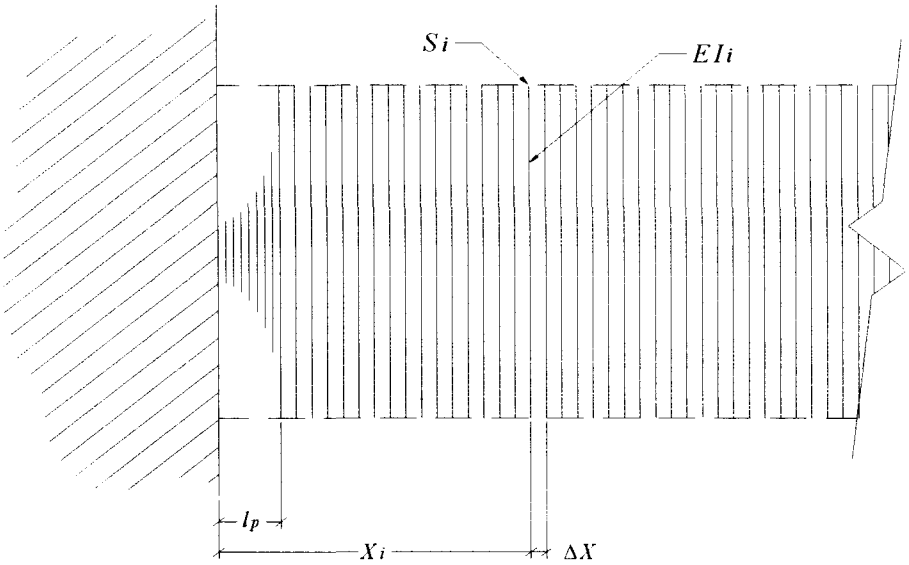


Figura 3.16 Idealización de la rigidez sobre un segmento de viga
y el concepto de Longitud de la articulación plástica

La determinación de la rotación plástica θ_p esta basada en Cohn[16], según la gráfica *curvatura-posición en X* de la figura 3.17. En ella se muestra la fracción de área que representa la capacidad de rotación plástica de la sección o secciones cercanas a una sección crítica.

En contraste con la evaluación de la capacidad de rotación plástica sugerida por Cohn, en este estudio se calcula la rotación tomando en cuenta la gráfica momento-curvatura para la serie de secciones en las que se da el comportamiento plástico, de modo que bajo la suposición de que el armado en todas ellas es el mismo debido a que típicamente la longitud de las articulaciones plásticas es pequeña, podemos aplicar la distribución de curvaturas a lo largo de la longitud de la articulación plástica según la curva momento-curvatura pero para cada posición en la dirección del eje de la viga. Esto permite calcular la rotación sin emplear la simplificación que propone Cohn, quien usa un factor de forma, a la vez que se calcula la rotación de una manera más cercana a la definición propuesta por la gráfica de la figura 3.17 (Hassoun y Mamlouk[31]).

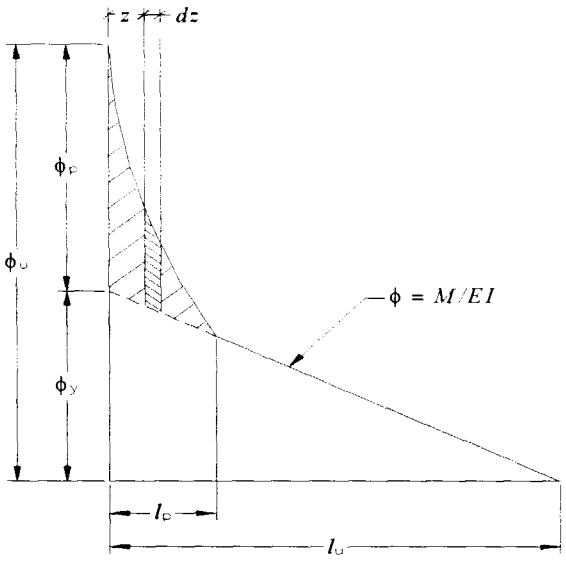


Figura 3.17 Representación gráfica de la determinación de la rotación plástica

La evaluación de la rotación plástica se lleva a cabo tomando el comportamiento de la gráfica momento-curvatura en la región plástica, de manera que se relaciona mediante una relación no lineal entre un valor de la curvatura en la región plástica de esta curva y un valor determinado de la posición sobre el eje de la viga dentro de la longitud de la articulación plástica, de tal forma que logramos plenamente el efecto de la integral mediante la suma de los segmentos de área sucesivos, según la precisión requerida.

Las discusiones presentadas en este capítulo tienen como propósito describir las consideraciones, los enfoques y los alcances de los procedimientos empleados en la presente investigación. El nivel de complejidad y el alcance propuestos pueden considerarse como básicos, dada la gran cantidad de parámetros que intervienen en el estudio, sin embargo los autores consideran el presente estudio como un primer paso hacia la evaluación detallada de la redistribución de momentos, bajo un enfoque encaminado a ampliar el estudio combinando tanto las herramientas computacionales disponibles como la serie de pruebas experimentales necesarias para una validación apropiada.

Capítulo 4

PLAN DE PRUEBAS Y RESULTADOS

Durante la fase de pruebas se llevó a cabo una serie de evaluaciones de los resultados obtenidos de la ejecución de los programas. A este tipo de ejecuciones o *corridas*, o más apropiadamente *simulaciones*, se les evaluó desde el punto de vista del comportamiento del fenómeno observado, pero desde luego también se les evaluó por su comportamiento estrictamente computacional, en cuanto a veracidad y eficiencia. En este apartado y en general, en el presente trabajo se hará referencia a las pruebas o *simulaciones* cuando nos refiramos solamente a la evaluación de los resultados desde el punto de vista del comportamiento del fenómeno observado. Más adelante se discute de forma general, la estructura, el entorno y recursos empleados en los programas desarrollados para ejecutar las simulaciones.

Partiendo de los planteamientos y discusiones de los capítulos anteriores, a continuación se presentan los resultados más relevantes de las pruebas y evaluaciones que se llevaron a cabo tanto durante el desarrollo de la investigación y por ende de la programación requerida para las simulaciones, como en la fase final de la investigación, es decir durante la evaluación del comportamiento de la redistribución de momentos.

Es indispensable señalar que algunas pruebas, por ejemplo ciertos análisis de sensibilidad respecto de algunos parámetros, no se presentan gráficamente pues solo ofrecen un valor intrínseco a la investigación, pero se comentan pues forman parte de la secuencia de pruebas realizadas durante la investigación.

Este capítulo está estructurado de modo que, primeramente se presenta la estructura y descripción breve de las pruebas y evaluaciones, y en una segunda parte se presentan en serie las gráficas resultantes de las pruebas en cada sección, identificadas por un número de figura o bien por un número de gráfica de prueba. La descripción en cada apartado hace referencia a la figura ó gráfica.

4.1. Evaluación de la curva Momento-Curvatura según el Modelo de Integración

A fin de determinar fielmente la capacidad rotacional de una sección, se dio gran importancia a la modelación de la gráfica Momento-Curvatura, empleando el método de integración (método de Fibras Modificado). En las figuras 4.1 a la 4.5 se presentan muestras de la gráfica Momento-Curvatura obtenida con variación en la cuantía a tensión respecto de la condición balanceada, cada gráfica para una relación determinada del área de acero a compresión respecto del área de acero a tensión. Estas gráficas fueron obtenidas para condiciones típicas en cuanto a resistencia de los materiales y geometría de las secciones.

Figura 4.1 Gráfica M-ϕ con variación de ρ/ρ_b para ρ'/ρ=0.0

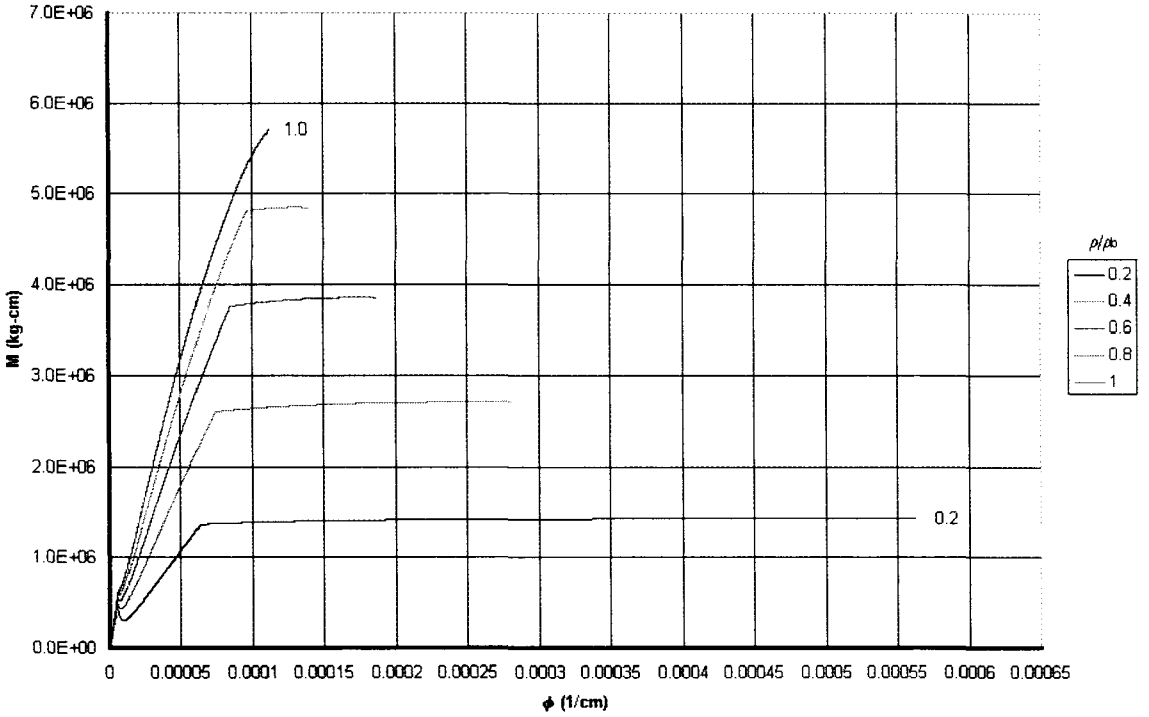


Figura 4.2 Gráfica M-ϕ con variación de ρ/ρ_b para ρ'/ρ=0.25

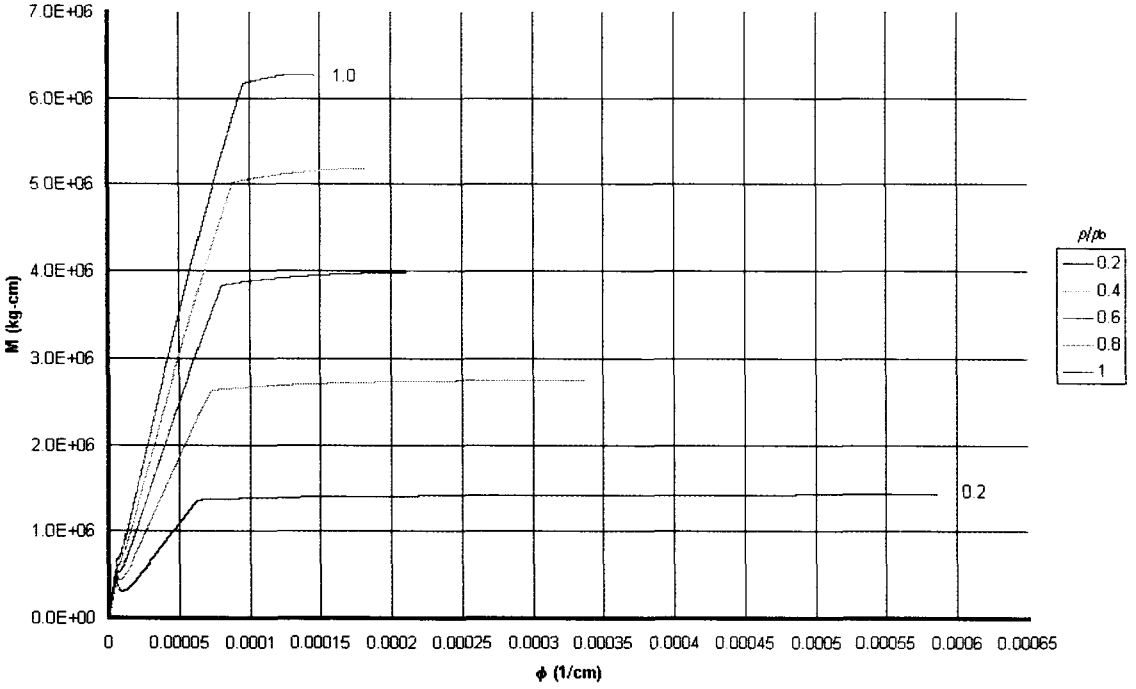


Figura 4.3 Gráfica M-ϕ con variación de ρ/ρ_b para ρ'/ρ=0.5

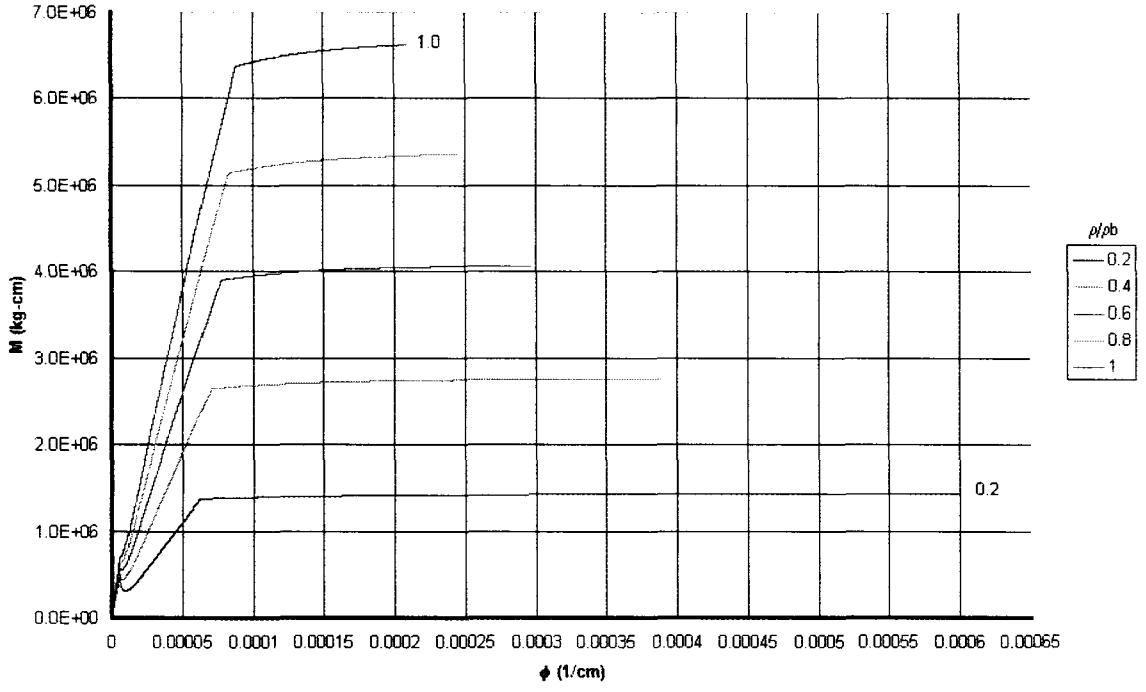


Figura 4.4 Gráfica M-ϕ con variación de ρ/ρ_b para ρ'/ρ=0.75

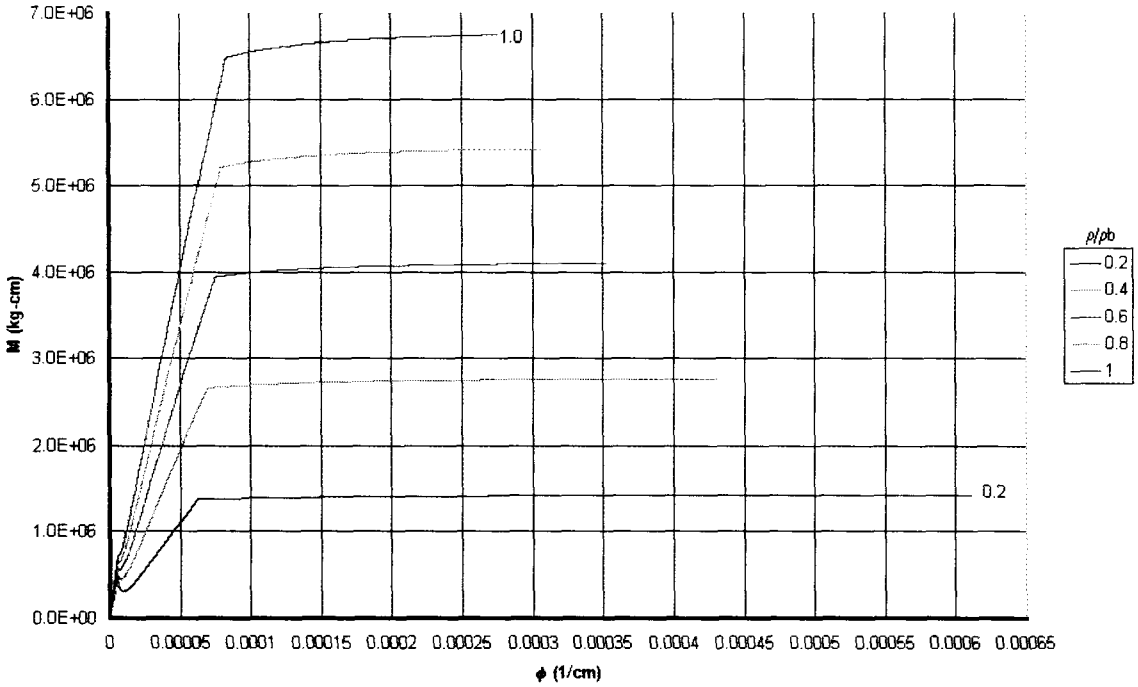
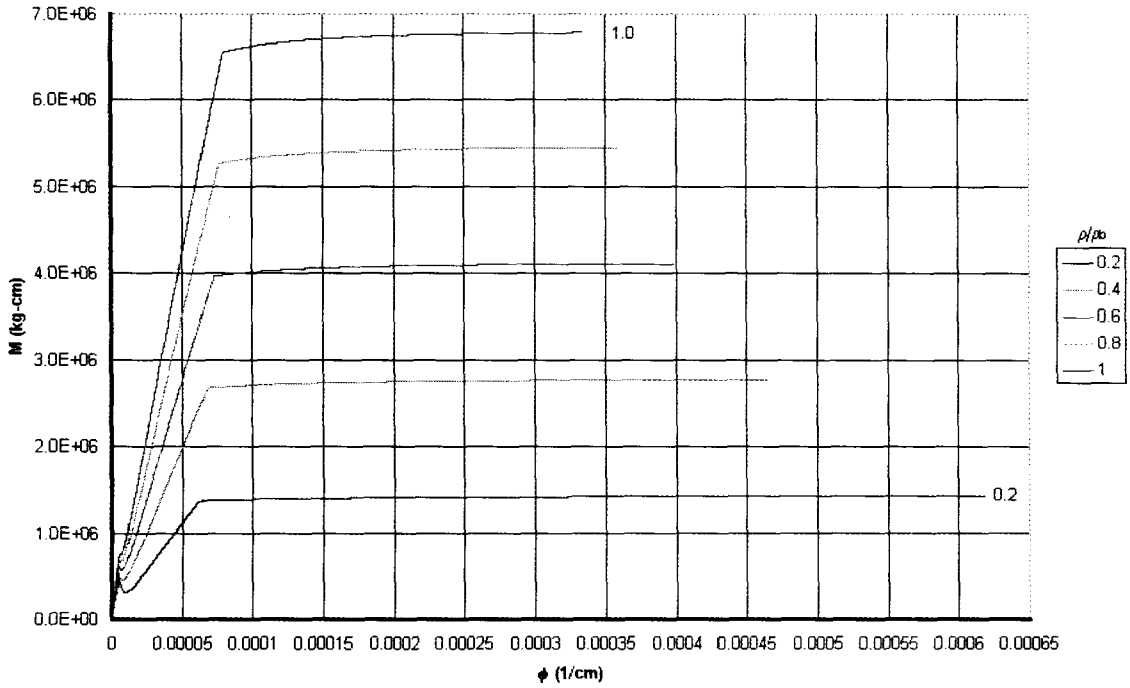


Figura 4.5 Gráfica M-ϕ con variación de ρ/ρ_b para ρ'/ρ=1.0



4.2. Evaluación de la curva de Ductilidad según el Modelo de Integración

Otro aspecto importante del comportamiento de la sección es la ductilidad, calculada en términos de la curvatura, como $u=\phi_u/\phi_y$. Los valores de ductilidad se obtienen directamente de las curvaturas a la fluencia y a la falla alcanzadas en la gráfica Momento-Curvatura. Las figuras 4.6, 4.7 y 4.8 presentan curvas de ductilidad para valores típicos de la resistencia del concreto y del acero y para secciones típicas en los elementos. El comportamiento dúctil de la sección de concreto está directamente relacionado con la curvatura y por ende con la capacidad de rotación de la sección. Estas curvas fueron de utilidad al permitir la comparación con las curvas de ductilidad obtenidas del empleo del bloque equivalente de esfuerzos, según la práctica convencional, obteniéndose una similitud excelente.

Figura 4.6 Gráfica de Ductilidad-Cuantía para f'c=250 kg/cm² y fy=2800 kg/cm² con variación de ρ'/ρ

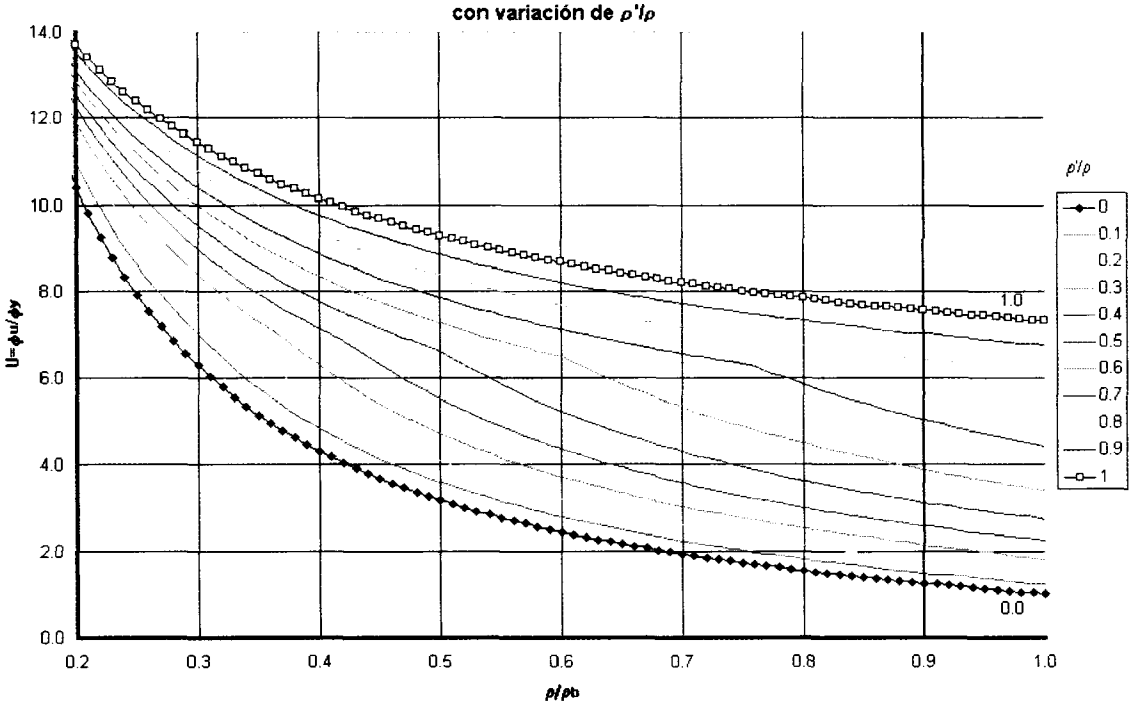


Figura 4.7 Gráfica de Ductilidad-Cuantía para f'c=250 kg/cm^2 y fy=4200 kg/cm^2 con variación de ρ'/ρ

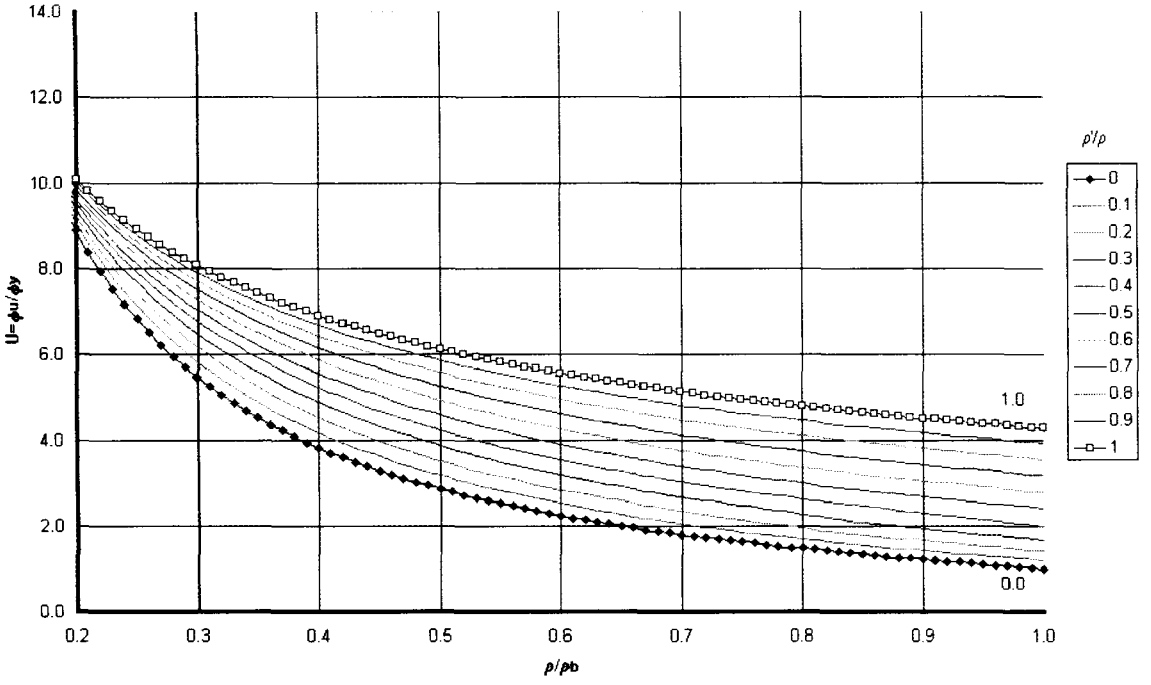
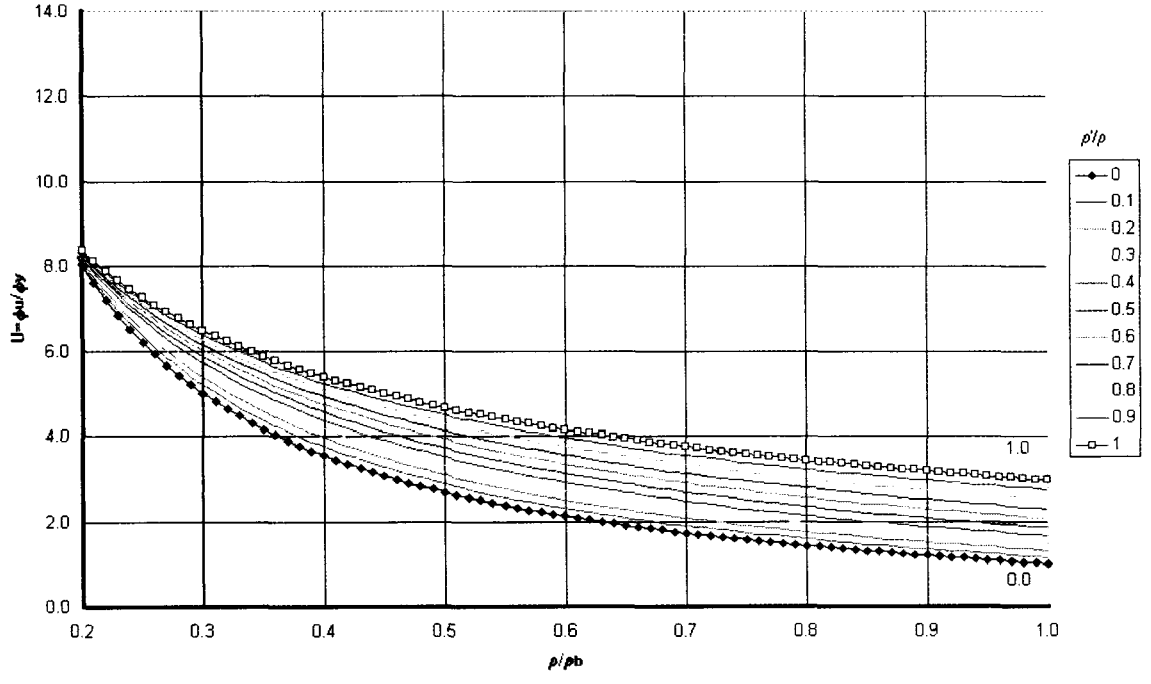


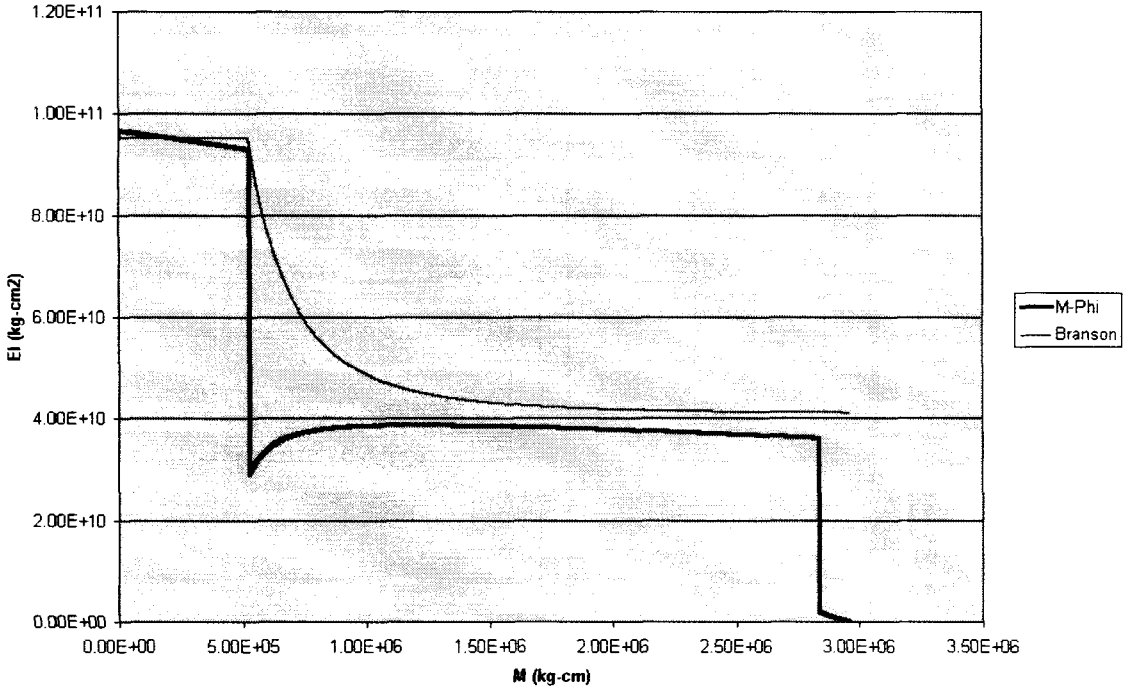
Figura 4.8 Gráfica de Ductilidad-Cuantía para f'c=250 kg/cm^2 y fy=5600 kg/cm^2 con variación de ρ'/ρ



4.3. Evaluación de la curva Momento-Rigidez a partir de la curva Momento-Curvatura versus el Modelo de Branson

Con la intención de evaluar el impacto del agrietamiento sobre la capacidad de la sección para resistir cargas de momento, se evaluó el comportamiento de la rigidez flectora de la sección, primero basado en la rigidez instantánea aportada por la pendiente de la recta tangente a la curva Momento-Curvatura en un punto determinado, como se ha planteado anteriormente. Posteriormente se ha contrastado este comportamiento con la forma de la curva según la ecuación de Branson. El comportamiento típico de ambas curvas se muestra en la figura 4.9 a modo de comparación, a partir de las cuales se pueden hacer observaciones importantes, como se discute más adelante.

Figura 4.9 Gráfica comparativa EI-M según Branson v.s. EI-M a partir de curva M-ϕ



4.4. Evaluación de la sensibilidad de la redistribución a las características geométricas de los elementos

Como parte importante del programa de pruebas en la fase inicial de la investigación se planteó una secuencia de pruebas para evaluar la sensibilidad de la redistribución de momentos a los cambios en la geometría de los elementos, observándose que el comportamiento es insensible a la longitud del elemento, *L*, a el ancho de la sección, *b*, y al peralte de la sección, *h* ó *d*. A partir de este hecho se ratificó el mismo comportamiento con la secuencia final de pruebas de redistribución de momentos presentadas en este trabajo

4.5. Evaluación de la redistribución de momentos versus la redistribución teórica según Cohn

La evaluación más importante de esta investigación corresponde al comportamiento del porcentaje de redistribución basado en la propuesta de Cohn, según la cuál la cantidad de redistribución de momentos puede ser evaluada en términos de la relación:

$$\%r = \frac{w_u - w_y}{w_u} \cdot 100$$

La simulación llevada a cabo en la fase de pruebas implica el cálculo de los valores de carga para la condición de fluencia, w_y, y para la condición de falla, w_u. Para mayores detalles refiérase al Capítulo 3. En las secciones siguientes se describe brevemente cada tipo de gráfica obtenida del programa de pruebas ejecutado. Para efectos de localización, se incluye una tabla mostrando por un lado, la combinación de resistencias del concreto *f'c* y del acero *fy*, para tres resistencias cada uno, es decir, considerando el concreto en resistencias de *f'c* de *210, 280* y *350 kg/cm*^{2}, y el acero en resistencias de *fy* de *2800, 4200* y *5600 kg/cm*^{2}. Por razones prácticas, algunas de las pruebas de la tabla de referencia aparecen vacías en razón de que, o fue una prueba no realizada o bien simplemente no fue incluida por no aportar mayor información para efectos de evaluación.

TABLA 4.1 Programa de pruebas y relación de figuras

f'c	fy	REE	LPE	CRE	REA	LPA	CRA
210	2800	P1.a	x	x	P10.a	x	x
210	4200	P2.a	P2.b	P2.c	P11.a	P11.b	P11.c
210	5600	P3.a	x	x	P12.a	x	x
280	2800	P4.a	P4.b	P4.c	P13.a	P13.b	P13.c
280	4200	P5.a	P5.b	P5.c	P14.a	P14.b	P14.c
280	5600	P6.a	P6.b	P6.c	P15.a	P15.b	P15.c
350	2800	P7.a	x	x	P16.a	x	x
350	4200	P8.a	P8.b	P8.c	P17.a	P17.b	P17.c
350	5600	P9.a	x	x	P18.a	x	x

NOTA: esfuerzos en kg/cm^2

Abreviaturas:

REE, redistribución en viga empotrada-empotrada
LPE, longitud de articulación plástica en viga empotrada-empotrada
CRE, capacidad rotacional de la articulación plástica para viga empotrada-empotrada

REA, redistribución en viga empotrada-articulada
LPA, longitud de articulación plástica en viga empotrada-articulada
CRA, capacidad rotacional de la articulación plástica para viga empotrada-articulada

x, resultados de prueba no presentados

4.6. Evaluación de viga empotrada-empotrada

Como se ha comentado en los capítulos anteriores, el plan de pruebas incluye la evaluación de dos tipos de vigas, en la primera secuencia se incluye el comportamiento de una viga tipo empotrada-empotrada. En estas pruebas se evalúa tanto la redistribución de momentos, como la longitud de la articulación plástica y la capacidad rotacional tomando como base la sección en el apoyo del extremo izquierdo de la viga, aplicando un momento negativo para calcular el nivel de carga correspondiente y obteniendo el momento central máximo positivo a partir del equilibrio. Con la curva de momentos resultante se evalúa el nivel de agrietamiento en cada sección considerada en el análisis y con ella se construyen los coeficientes rotacionales en un proceso de aproximación sucesiva hasta alcanzar el equilibrio para un estado de deformación y agrietamiento a lo largo de toda la viga. El punto en el que se alcanza la fluencia en el acero a tensión de la sección extrema izquierda corresponde a la carga w_y, y el punto en el que se genera un mecanismo de colapso o bien el punto en el que se alcanza el esfuerzo de aplastamiento del concreto corresponde a la carga última w_u. La ocurrencia de ambas condiciones simultáneamente representa la condición de redistribución más eficiente para una viga determinada. Lo anterior resume el proceso empleado para la evaluación de la redistribución de momentos en las pruebas. De forma paralela, en el proceso de cálculo se evalúa la longitud de la articulación plástica generada en el extremo izquierdo de la viga, y se calcula también la capacidad de rotación de la articulación, entendida como la capacidad rotacional requerida para lograr el grado de redistribución correspondiente. Los resultados de estos tres tipos de comportamiento para viga empotrada-empotrada se describen en las secciones siguientes y en las gráficas correspondientes.

4.6.1. Redistribución de momentos, Viga EE

La secuencia de figuras P1.a, P2.a, a la P9.a, muestra el comportamiento de la redistribución de momentos, *%r*, de vigas tipo empotrada-empotrada, con variación en la cuantía de la sección crítica positiva respecto de la condición balanceada, ρ^c/ρ_b, incluyendo valores de 0.25, 0.50 y 0.75. La cuantía de refuerzo a compresión ρ'/ρ para la sección crítica negativa en esta secuencia se mantuvo en 0.0. Cada gráfica en esta secuencia presenta una combinación de resistencias *f'c-fy* diferente. En contraste, en la misma gráfica se describe el comportamiento de la redistribución de momentos propuesta por Cohn para las mismas condiciones, y como referencia se indica la región de redistribución aceptada por el ACI-319-95.

Figura P1.a Redistribución de momentos con variación de la cuantía en la sección crítica positiva. Comparativa con la redistribución según Cohn y con la región propuesta por el ACI-318-95.

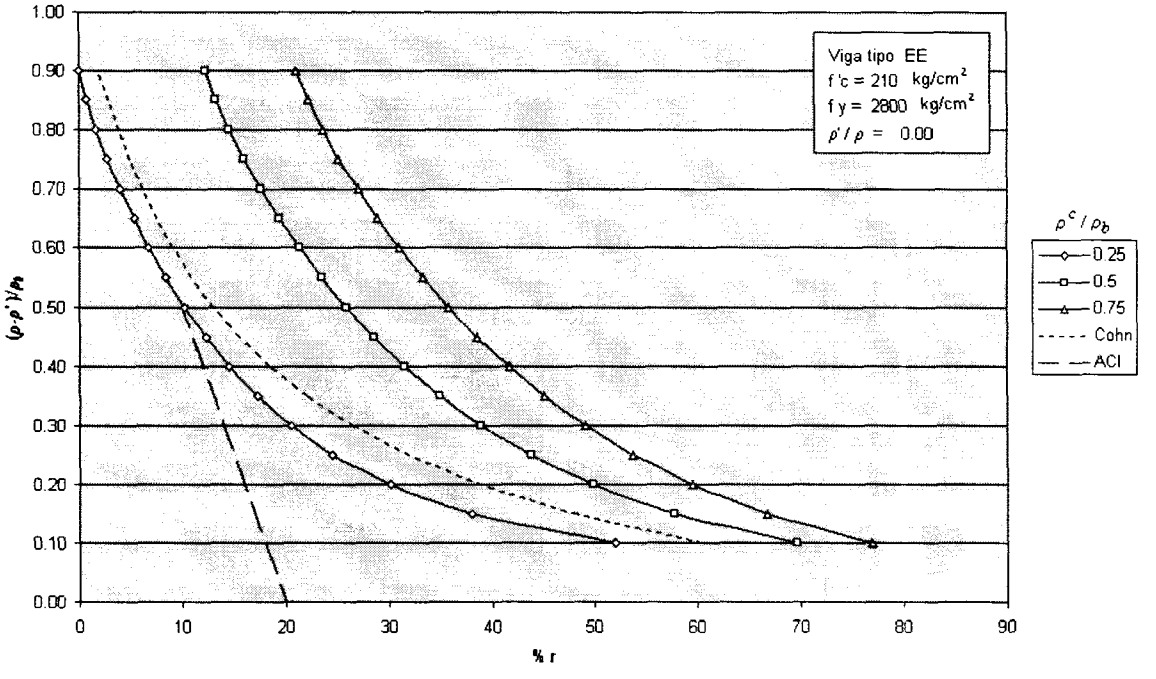


Figura P2.a Redistribución de momentos con variación de la cuantía en la sección crítica positiva. Comparativa con la redistribución según Cohn y con la región propuesta por el ACI-318-95.

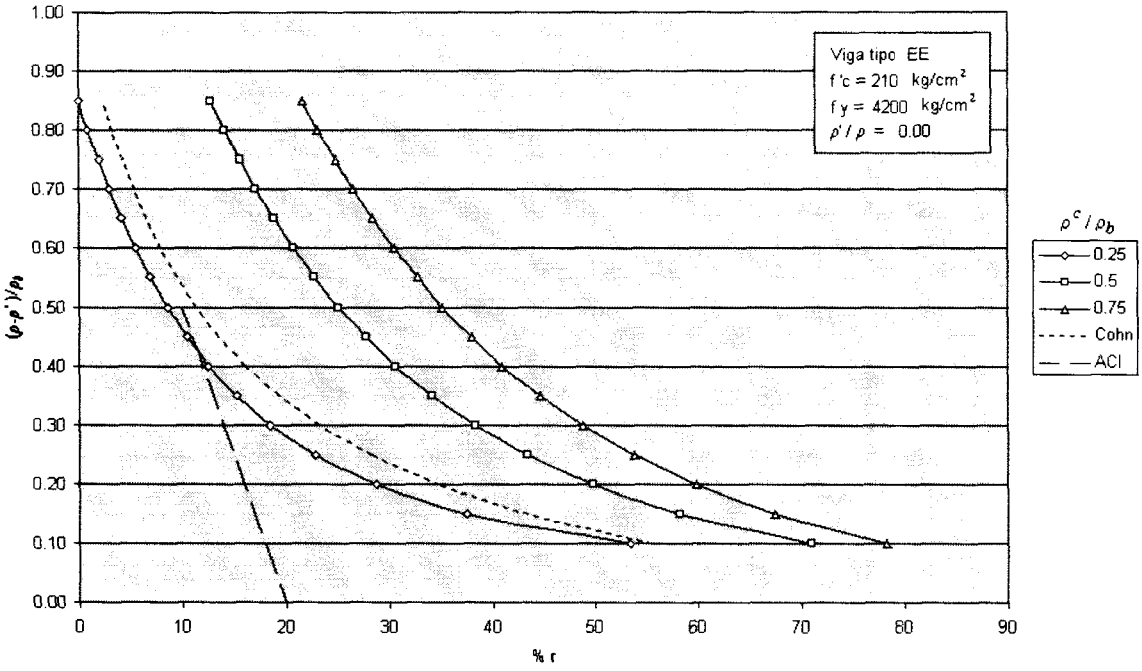


Figura P3.a Redistribución de momentos con variación de la cuantía en la sección crítica positiva. Comparativa con la redistribución según Cohn y con la región propuesta por el ACI-318-95.

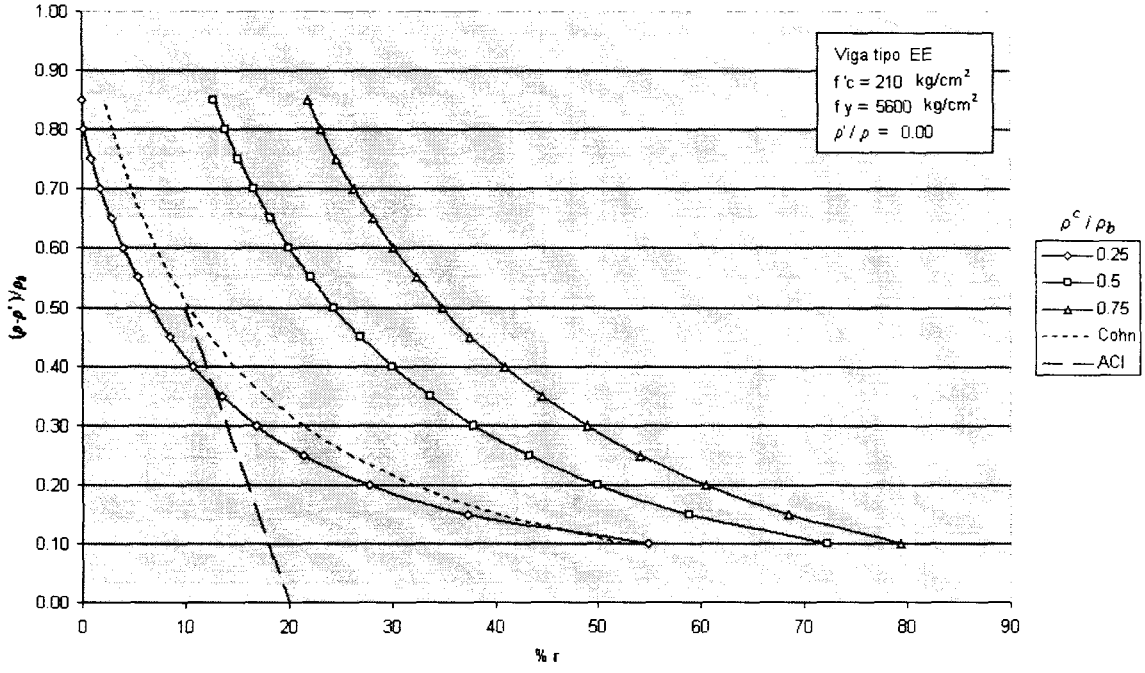


Figura P4.a Redistribución de momentos con variación de la cuantía en la sección crítica positiva. Comparativa con la redistribución según Cohn y con la región propuesta por el ACI-318-95.

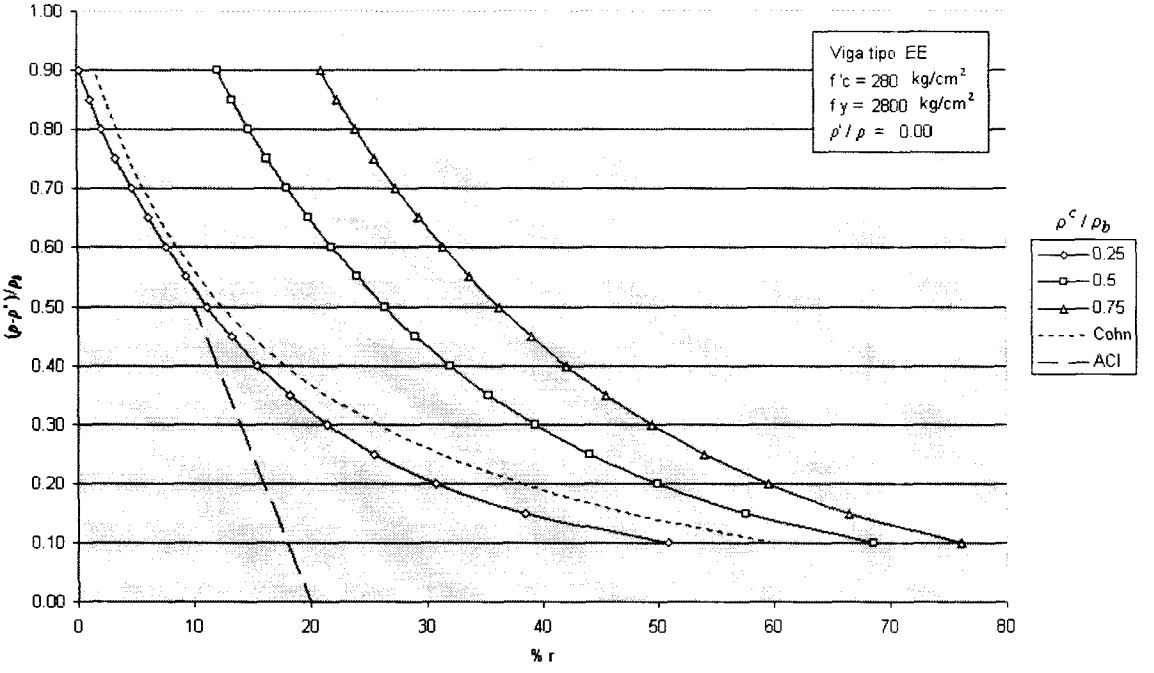


Figura P5.a Redistribución de momentos con variación de la cuantía en la sección crítica positiva. Comparativa con la redistribución según Cohn y con la región propuesta por el ACI-318-95.

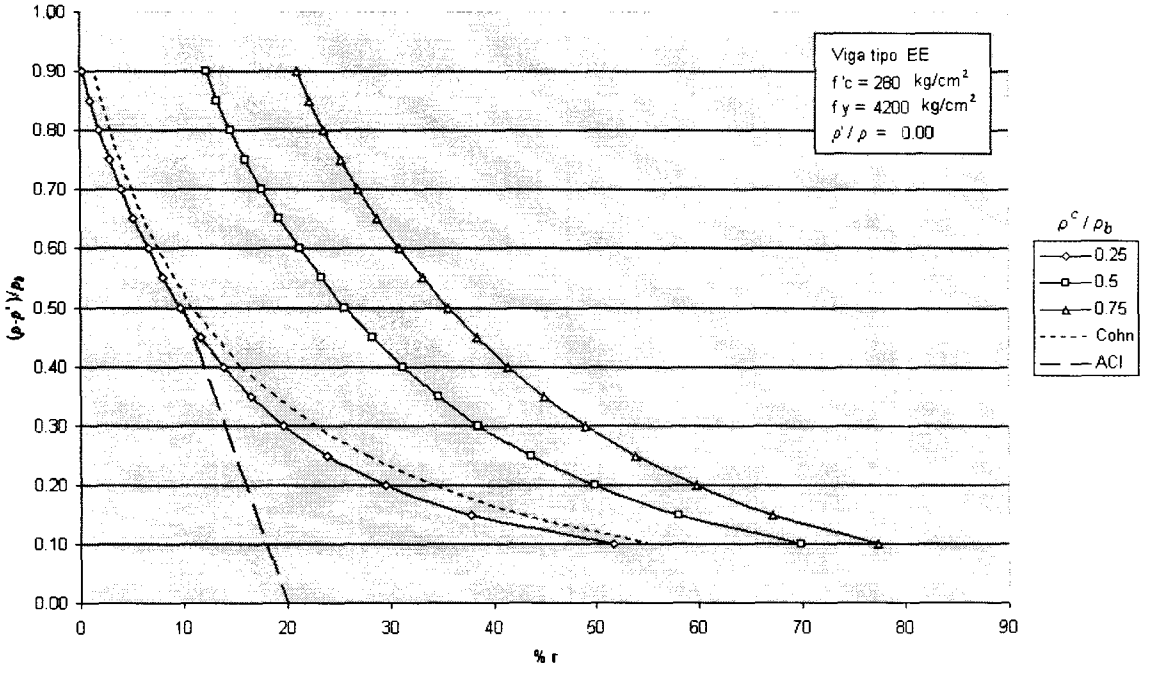


Figura P6.a Redistribución de momentos con variación de la cuantía en la sección crítica positiva. Comparativa con la redistribución según Cohn y con la región propuesta por el ACI-318-95.

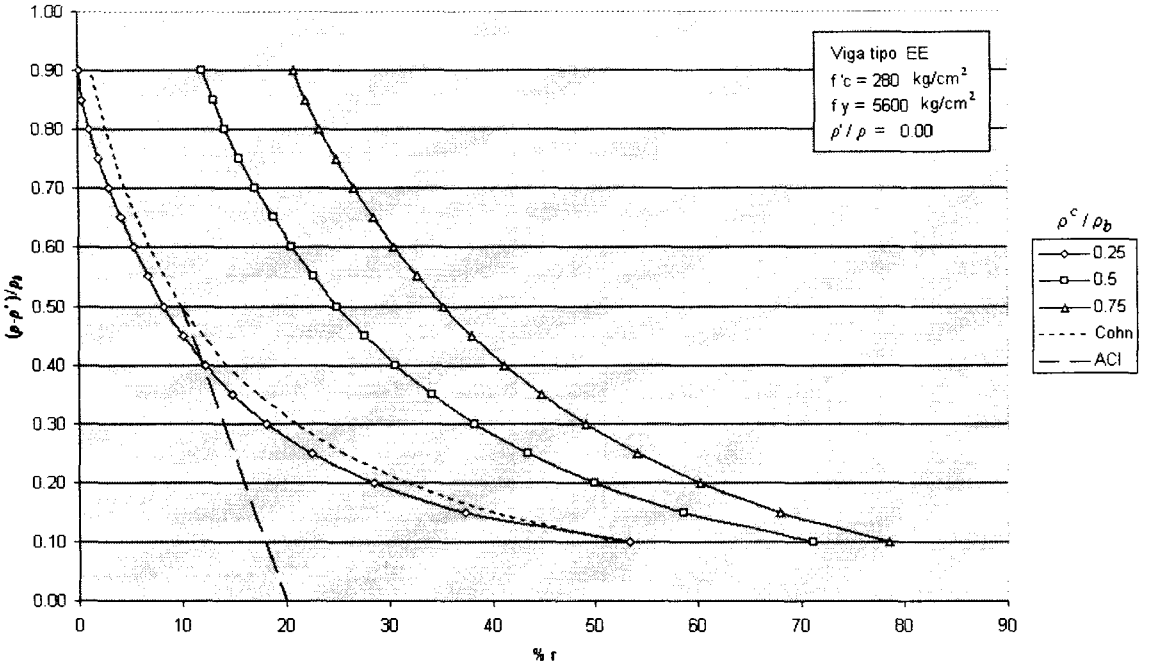


Figura P7.a Redistribución de momentos con variación de la cuantía en la sección crítica positiva. Comparativa con la redistribución según Cohn y con la región propuesta por el ACI-318-95.

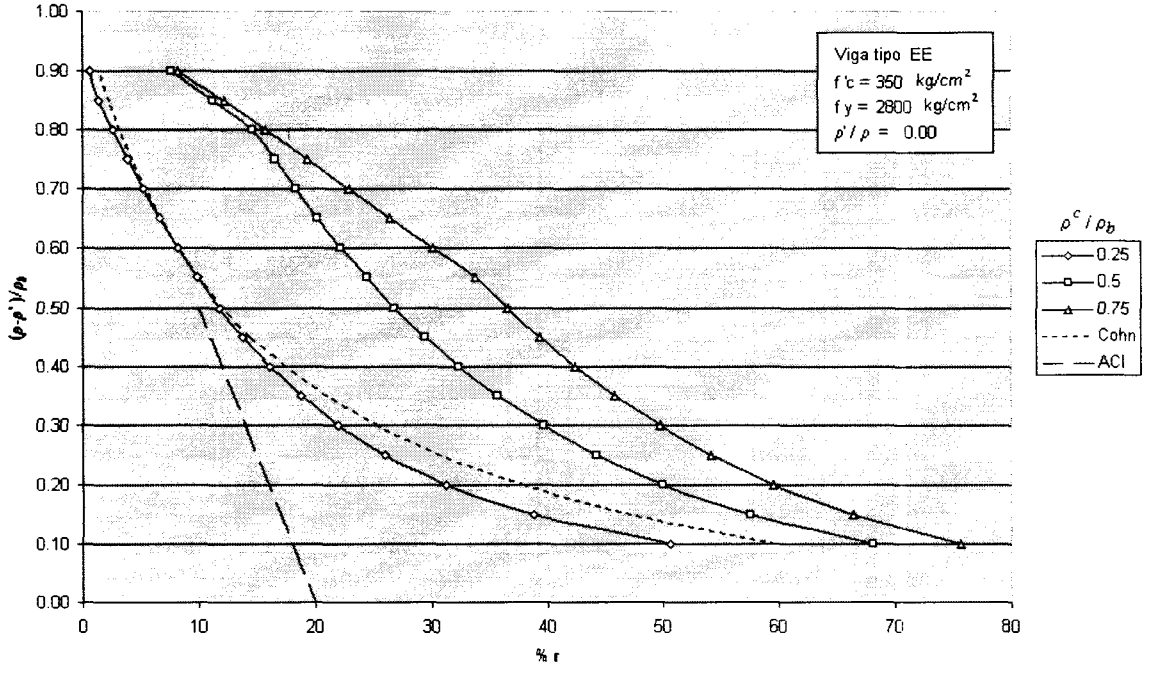


Figura P8.a Redistribución de momentos con variación de la cuantía en la sección crítica positiva. Comparativa con la redistribución según Cohn y con la región propuesta por el ACI-318-95.

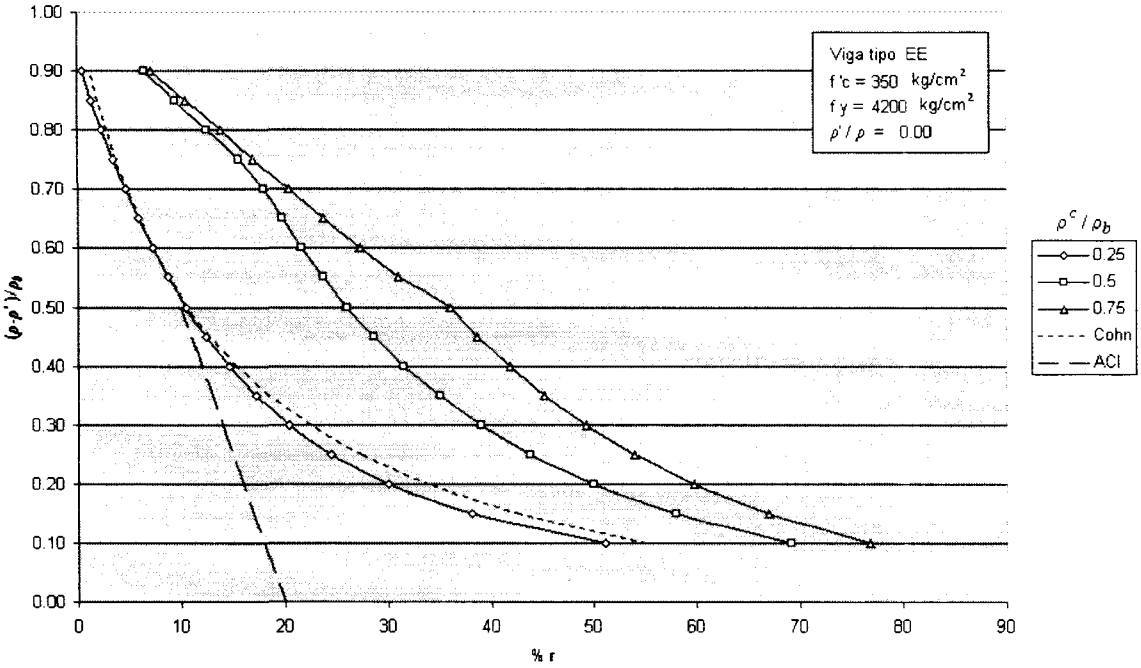
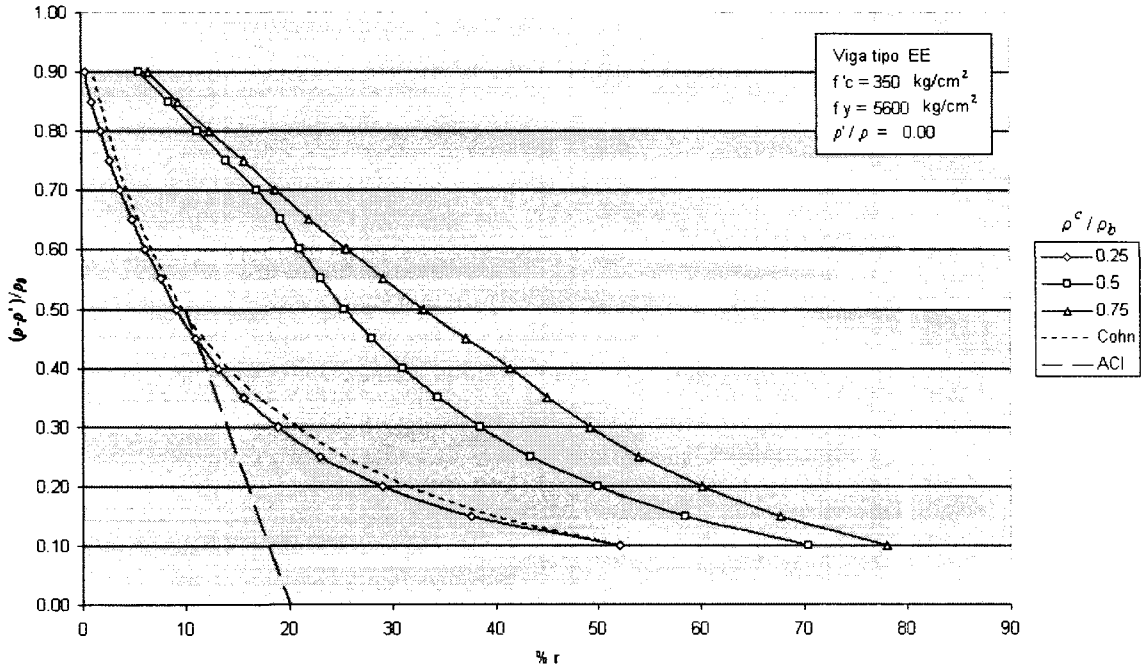


Figura P9.a Redistribución de momentos con variación de la cuantía en la sección crítica positiva. Comparativa con la redistribución según Cohn y con la región propuesta por el ACI-318-95.



4.6.2. Longitud de la articulación plástica, Viga EE

La secuencia de figuras P2.b, P4.b, P5.b, P6.b y P8.b, muestran el comportamiento de la longitud de la articulación plástica, ℓ_p , de la viga empotrada-empotrada según la combinación *f'c-fy* correspondiente, para las mismas condiciones descritas en la prueba PX.a.

Figura P2.b Longitud de la articulación plástica

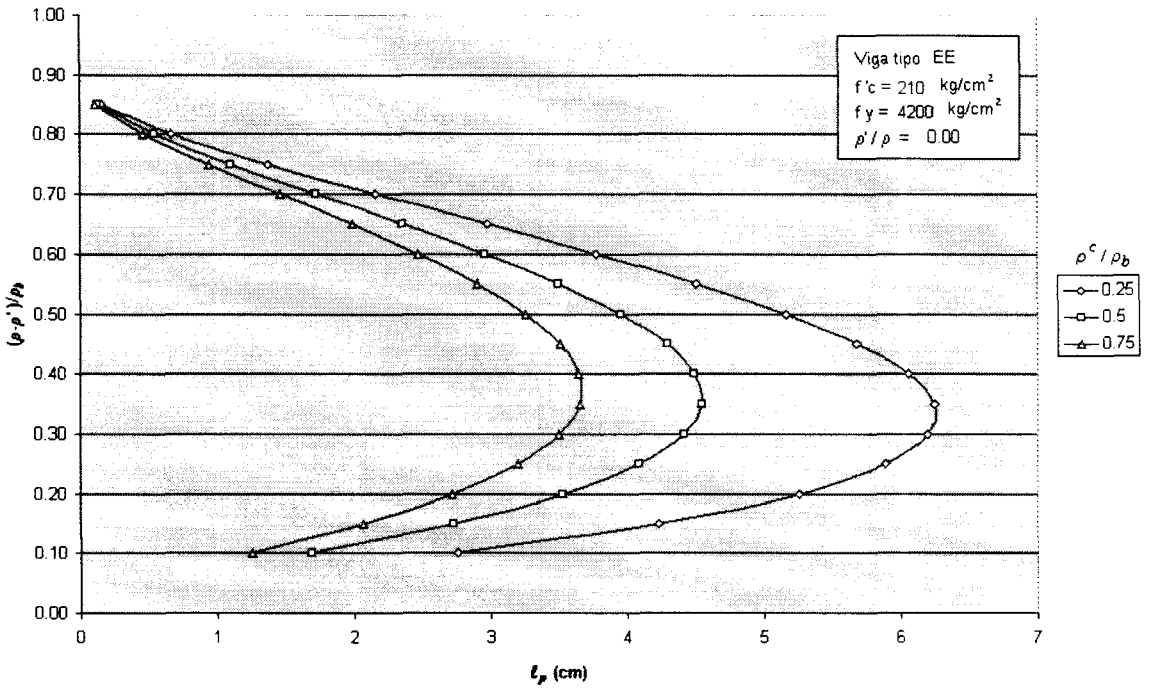


Figura P4.b Longitud de la articulación plástica

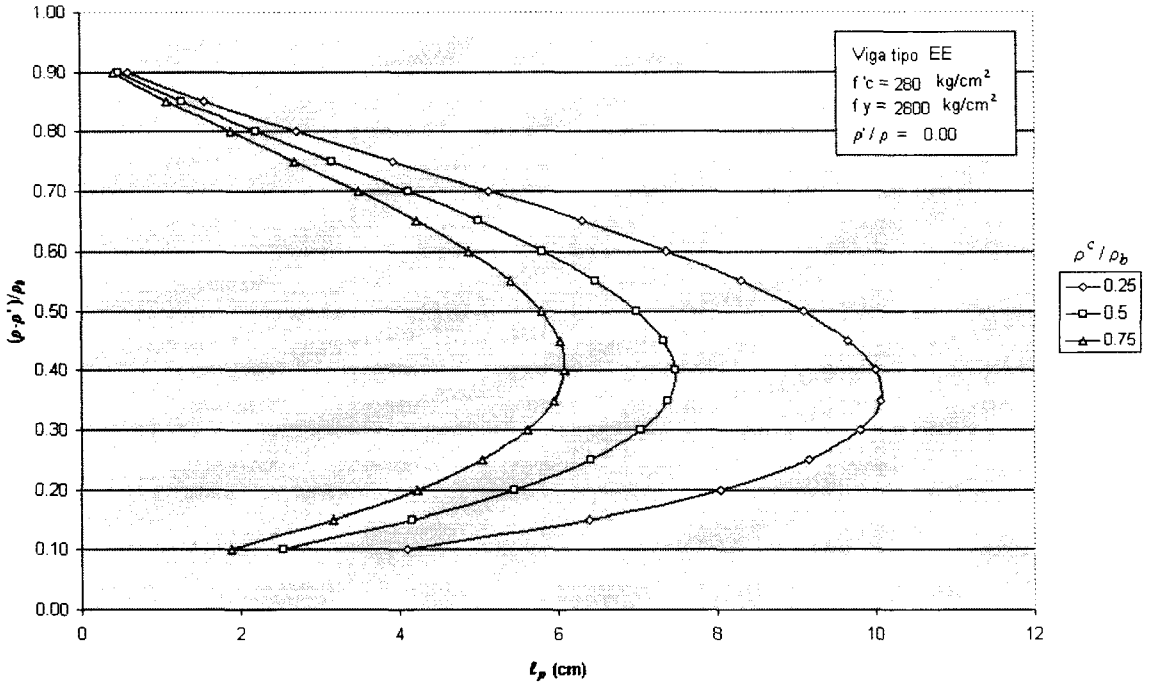


Figura P5.b Longitud de la articulación plástica

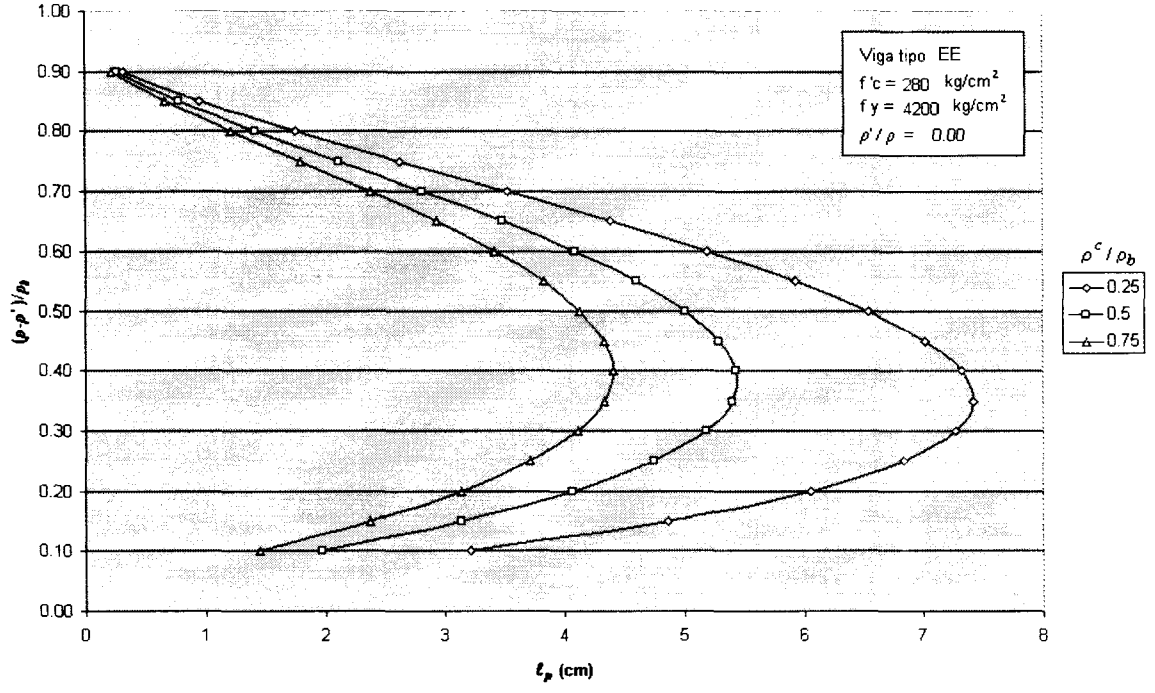


Figura P6.b Longitud de la articulación plástica

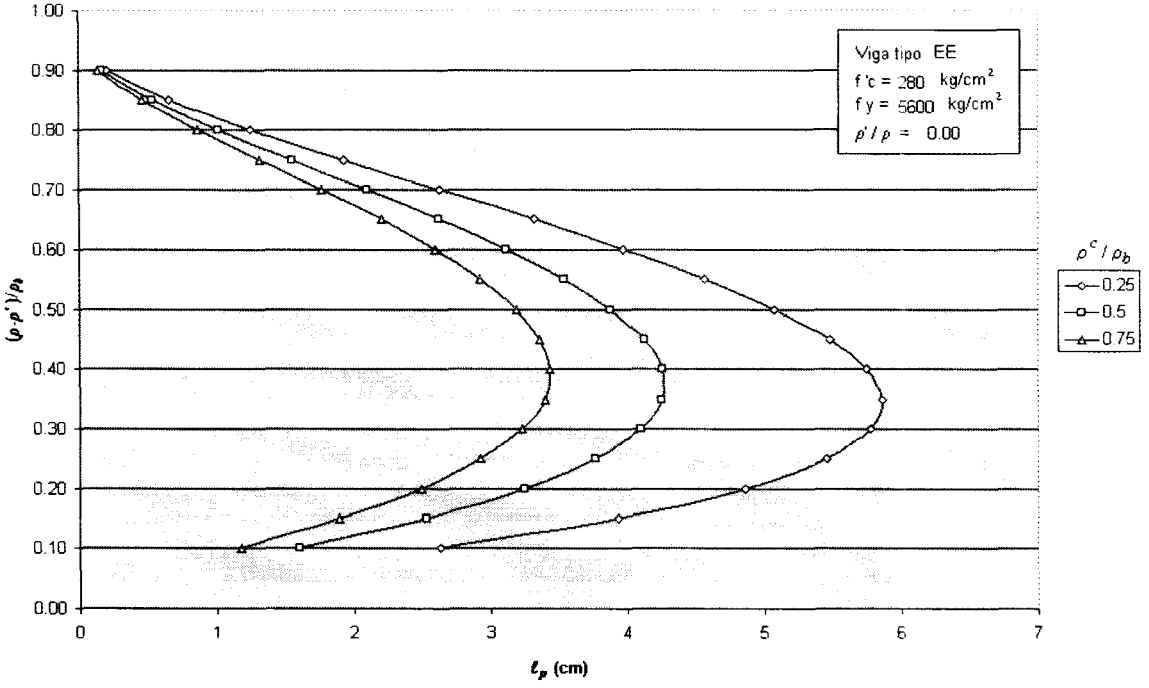
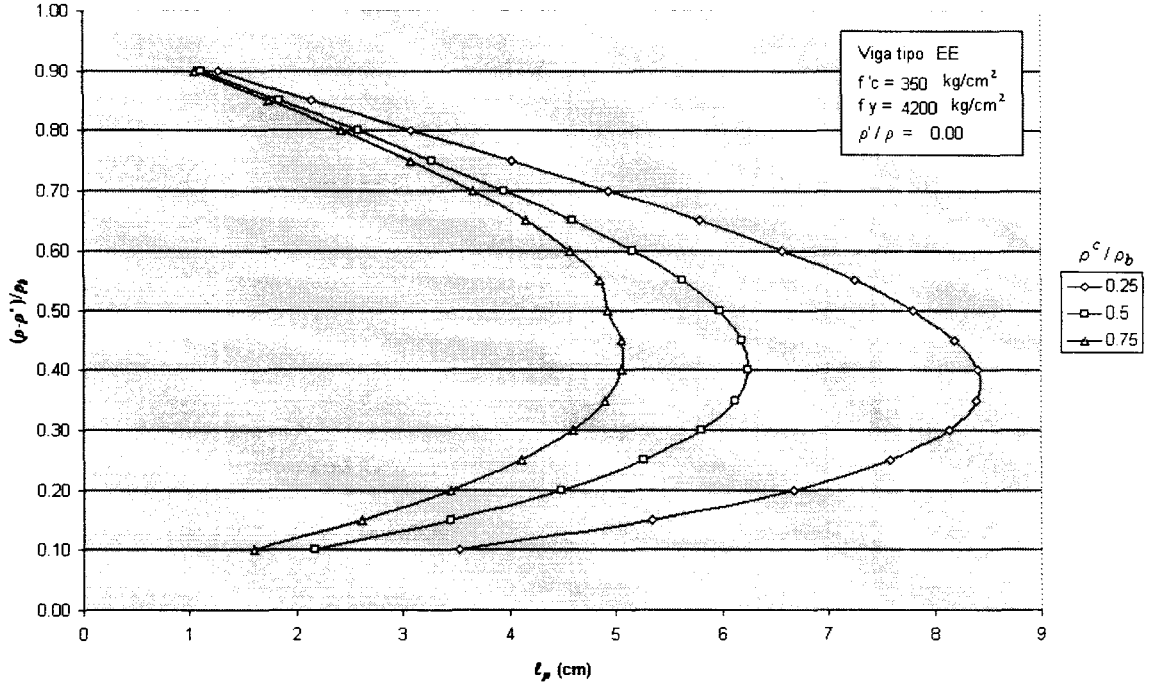


Figura P8.b Longitud de la articulación plástica



4.6.3. Capacidad rotacional de la articulación plástica, Viga EE

La secuencia de figuras P2.c, P4.c, P5.c, P6.c y P8.c, muestran el comportamiento de la capacidad rotacional de la articulación plástica, θ_p , de la viga empotrada-empotrada según la combinación *f'c-fy* correspondiente, para las mismas condiciones descritas en la prueba PX.a.

Figura P2.c Capacidad rotacional de la articulación plástica.

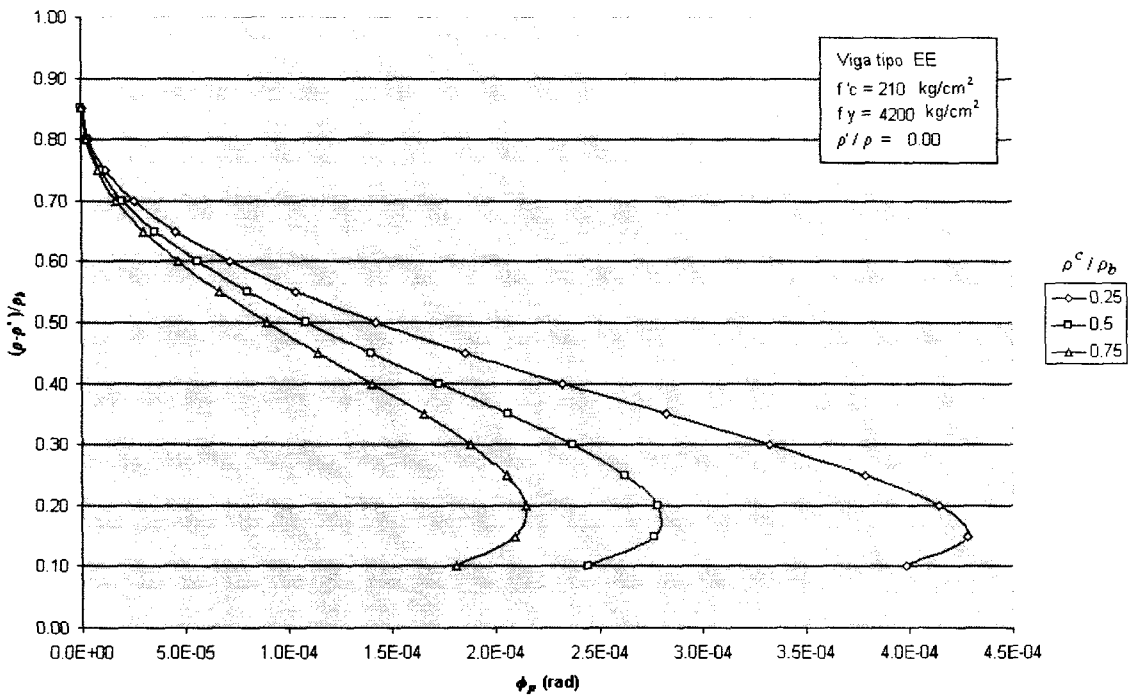


Figura P4.c Capacidad rotacional de la articulación plástica.

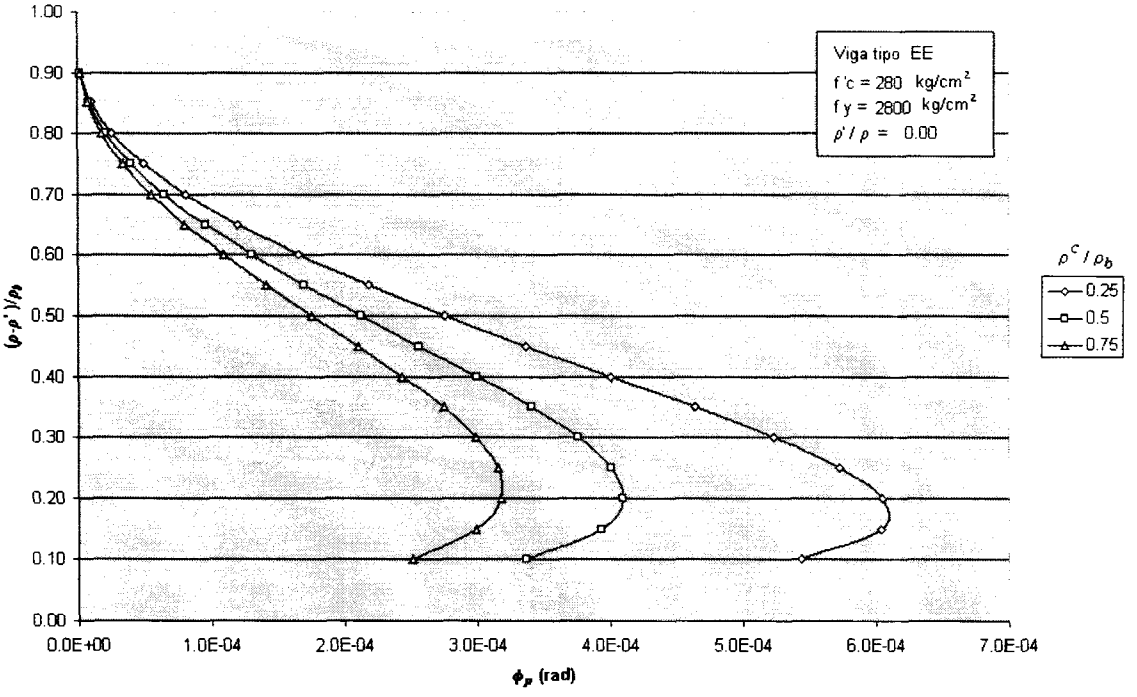


Figura P5.c Capacidad rotacional de la articulación plástica.

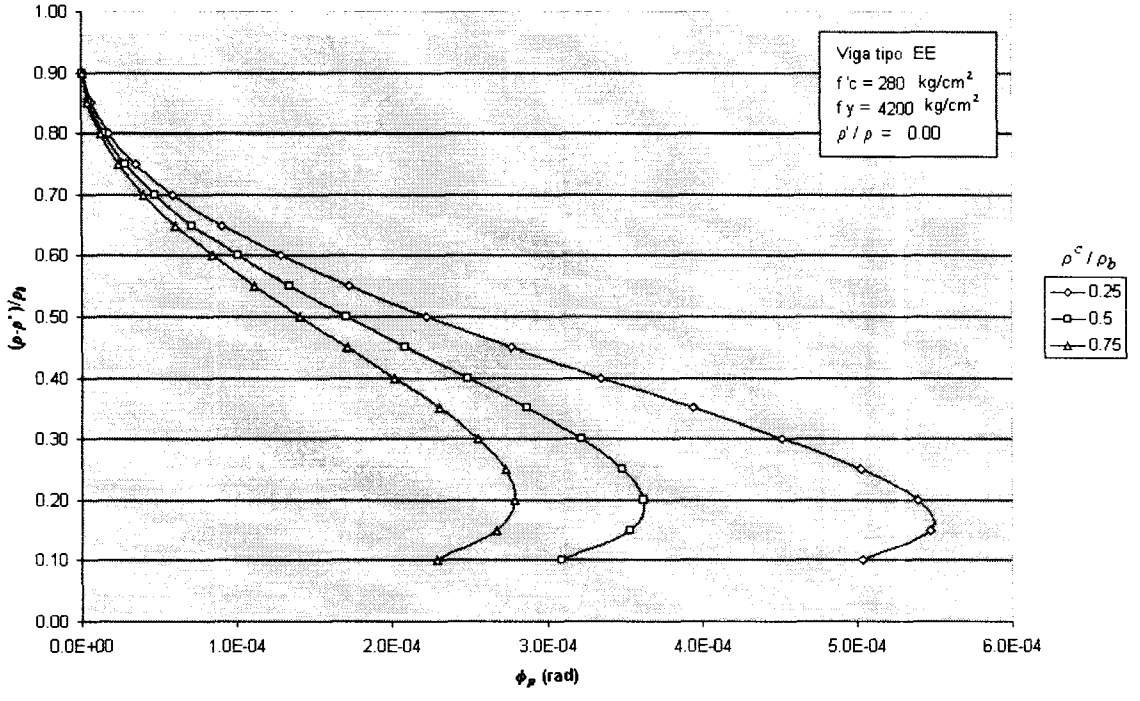


Figura P6.c Capacidad rotacional de la articulación plástica.

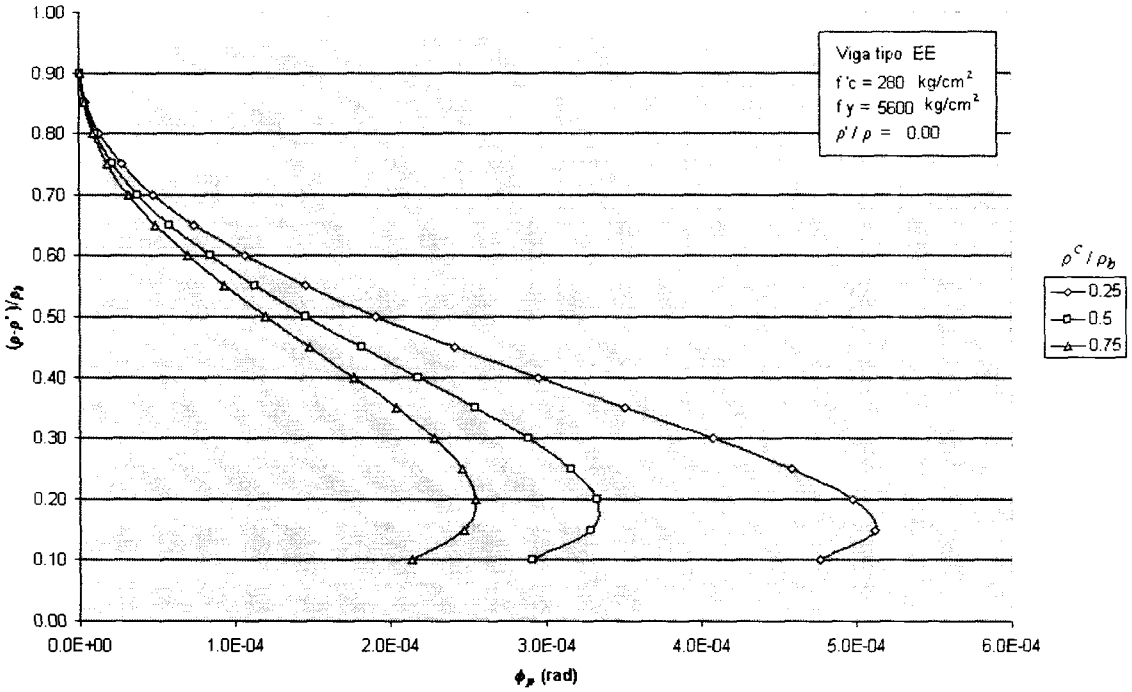
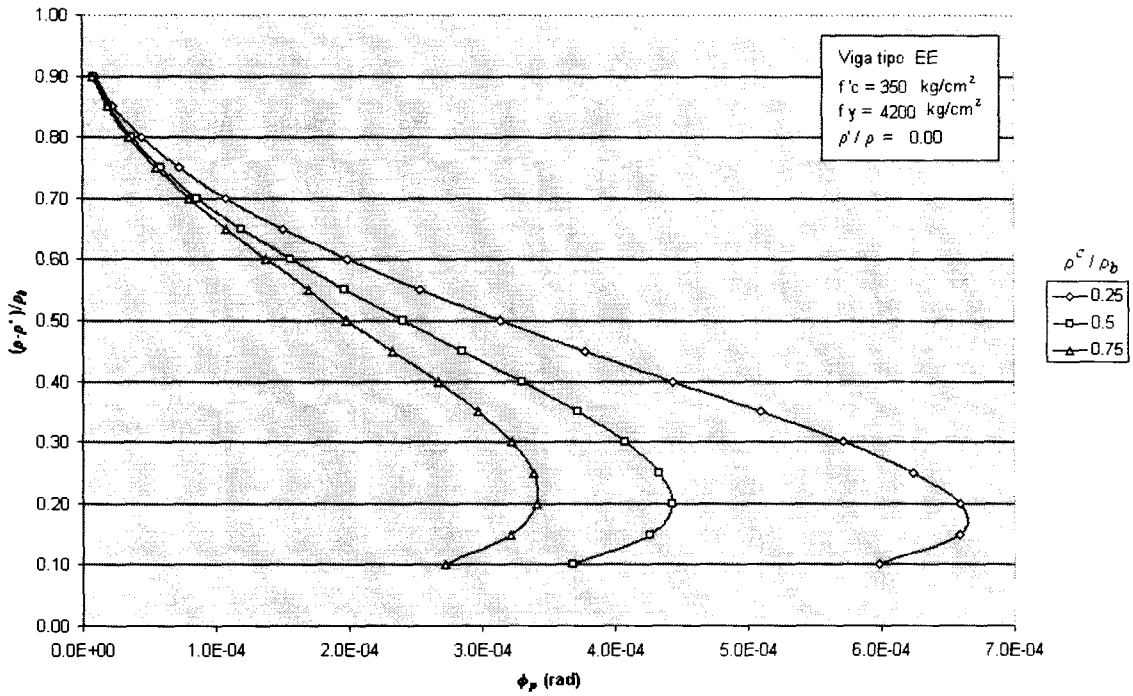


Figura P8.c Capacidad rotacional de la articulación plástica.



4.7. Evaluación de viga empotrada-articulada

Como se ha comentado en los capítulos anteriores y en la sección 4.6 para la primera secuencia, el plan de pruebas incluye la evaluación de dos tipos de vigas, en esta segunda secuencia se incluye el comportamiento de una viga tipo empotrada-articulada. En estas pruebas se evalúa tanto la redistribución de momentos, como la longitud de la articulación plástica y la capacidad rotacional tomando como base la sección en el apoyo del extremo izquierdo de la viga y manteniendo el extremo derecho articulado, se aplica un momento negativo en el extremo izquierdo para calcular el nivel de carga correspondiente y calculando el momento máximo positivo a partir del equilibrio. Con la curva de momentos resultante se evalúa el nivel de agrietamiento en cada sección considerada en el análisis y con ella se construyen los coeficientes rotacionales en un proceso de aproximación sucesiva hasta alcanzar el equilibrio para un estado de deformación y agrietamiento a lo largo de toda la viga. El punto en el que se alcanza la fluencia en el acero a tensión de la sección extrema izquierda corresponde a la carga w_y, y el punto en el que se genera un mecanismo de colapso o bien el punto en el que se alcanza el esfuerzo de aplastamiento del concreto corresponde a la carga última w_u. La ocurrencia de ambas condiciones simultáneamente representa la condición de redistribución más eficiente para una viga determinada. Lo anterior resume el proceso empleado para la evaluación de la redistribución de momentos en las pruebas. De forma paralela, en el proceso de cálculo se evalúa la longitud de la articulación plástica generada en el extremo izquierdo de la viga, y se calcula también la capacidad de rotación de la articulación, entendida como la capacidad rotacional requerida para lograr el grado de redistribución correspondiente. Los resultados de estos tres tipos de comportamiento para viga empotrada-articulada se describen en las secciones siguientes y en las gráficas correspondientes.

4.7.1. Redistribución de momentos, Viga EA

La secuencia de figuras P10.a, P11.a, a la P18.a, muestra el comportamiento de la redistribución de momentos, *%r*, de vigas tipo empotrada-articulada, con variación en la cuantía de la sección crítica positiva respecto de la condición balanceada, ρ^c/ρ_b, incluyendo valores de 0.25, 0.50 y 0.75. La cuantía de refuerzo a compresión ρ'/ρ para la sección crítica negativa en esta secuencia se mantuvo en 0.0. Cada gráfica en esta secuencia presenta una combinación de resistencias *f'c-fy* diferente. En contraste, en la misma gráfica se describe el comportamiento de la redistribución de momentos propuesta por Cohn para las mismas condiciones, y como referencia se indica la región de redistribución aceptada por el ACI-319-95.

Figura P10.a Redistribución de momentos con variación de la cuantía en la sección crítica positiva. Comparativa con la redistribución según Cohn y con la región propuesta por el ACI-318-95.

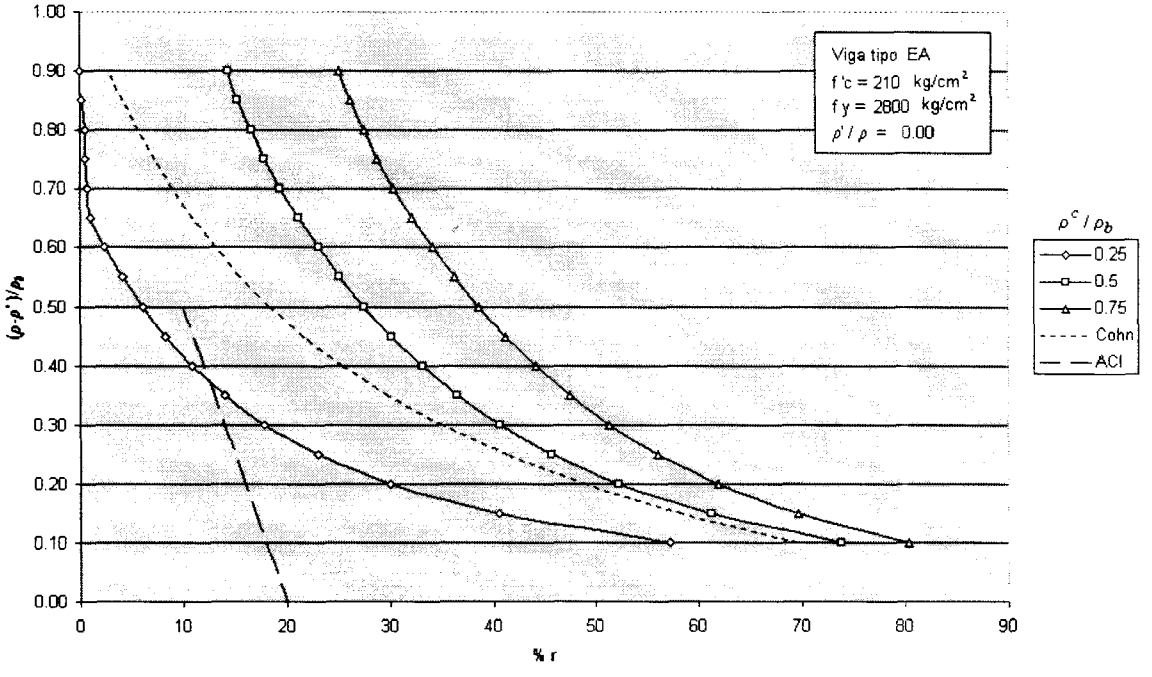


Figura P11.a Redistribución de momentos con variación de la cuantía en la sección crítica positiva. Comparativa con la redistribución según Cohn y con la región propuesta por el ACI-318-95.

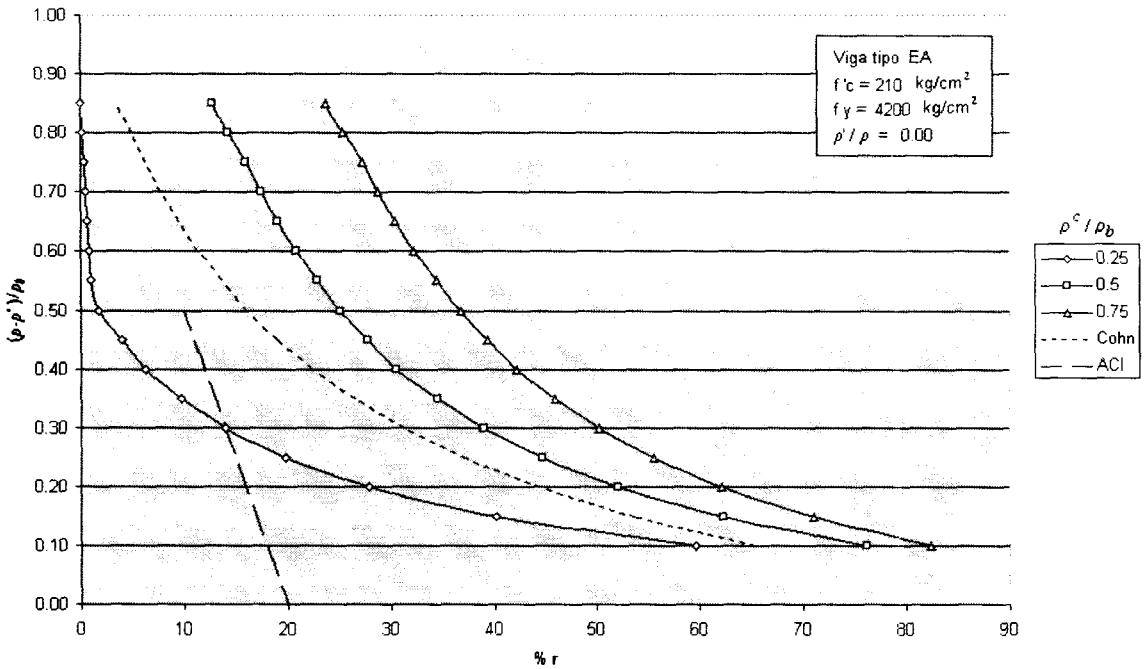


Figura P12.a Redistribución de momentos con variación de la cuantía en la sección crítica positiva. Comparativa con la redistribución según Cohn y con la región propuesta por el ACI-318-95.

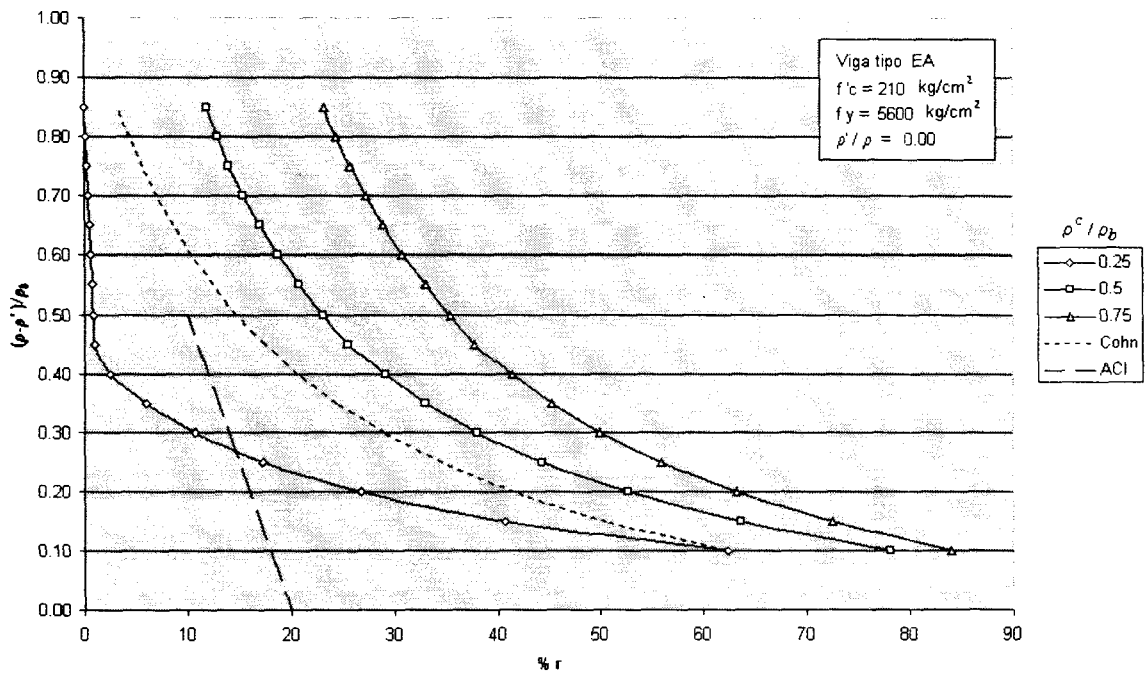


Figura P13.a Redistribución de momentos con variación de la cuantía en la sección crítica positiva. Comparativa con la redistribución según Cohn y con la región propuesta por el ACI-318-95.

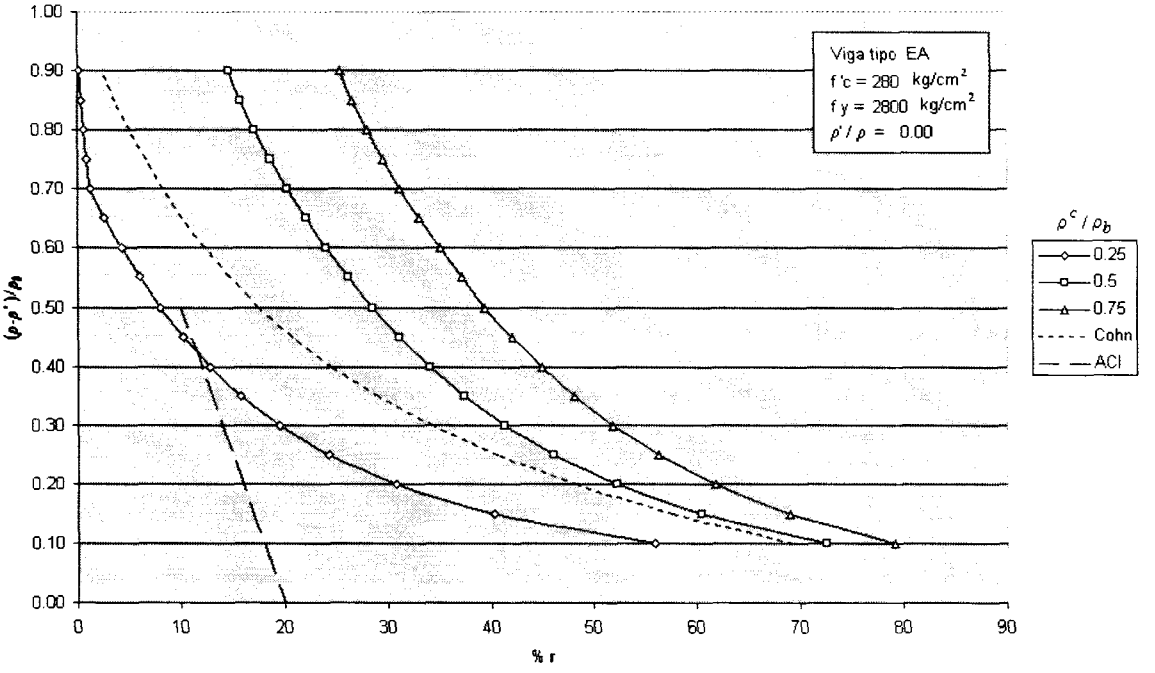


Figura P14.a Redistribución de momentos con variación de la cuantía en la sección crítica positiva. Comparativa con la redistribución según Cohn y con la región propuesta por el ACI-318-95.

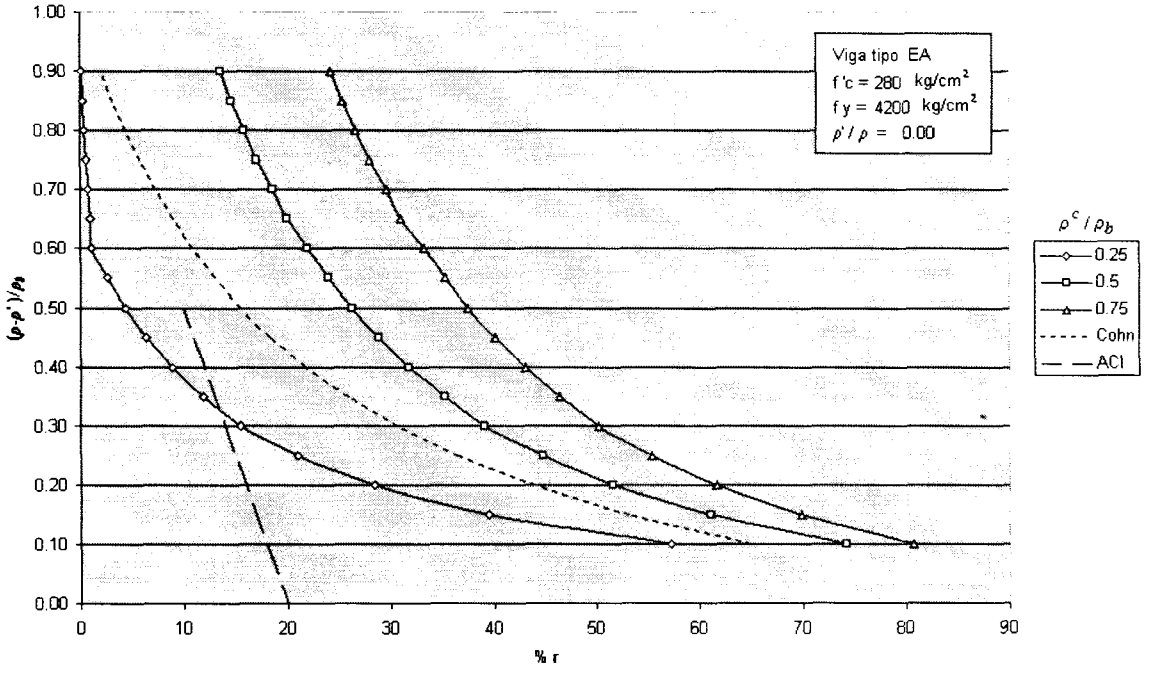


Figura P15.a Redistribución de momentos con variación de la cuantía en la sección crítica positiva. Comparativa con la redistribución según Cohn y con la región propuesta por el ACI-318-95.

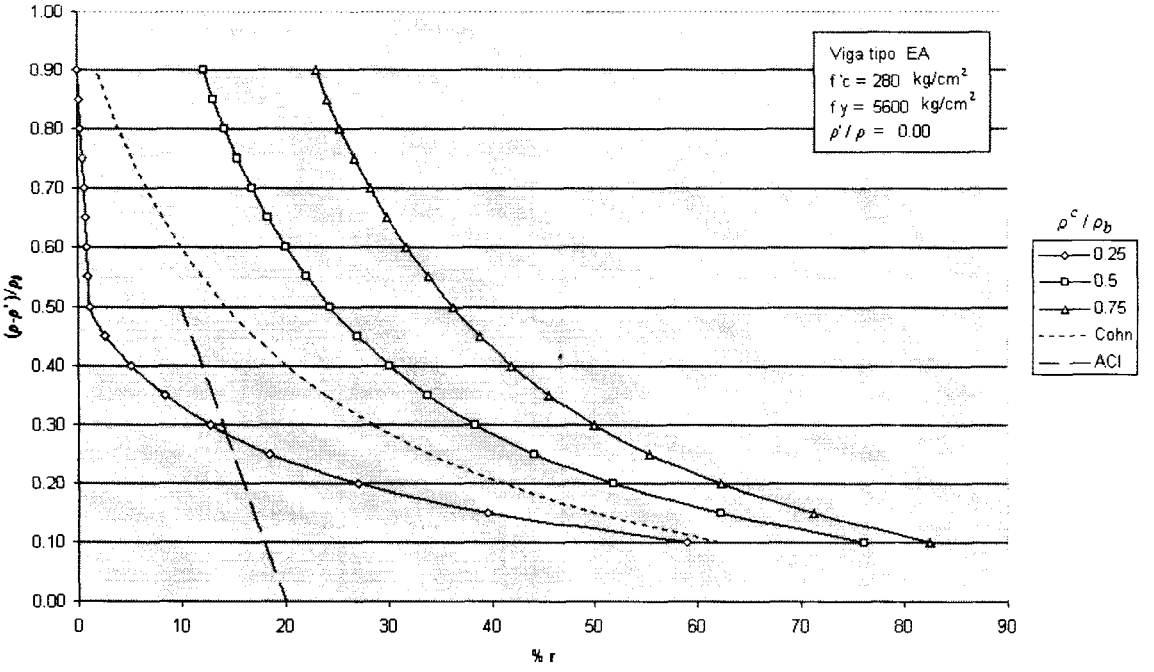


Figura P16.a Redistribución de momentos con variación de la cuantía en la sección crítica positiva. Comparativa con la redistribución según Cohn y con la región propuesta por el ACI-318-95.

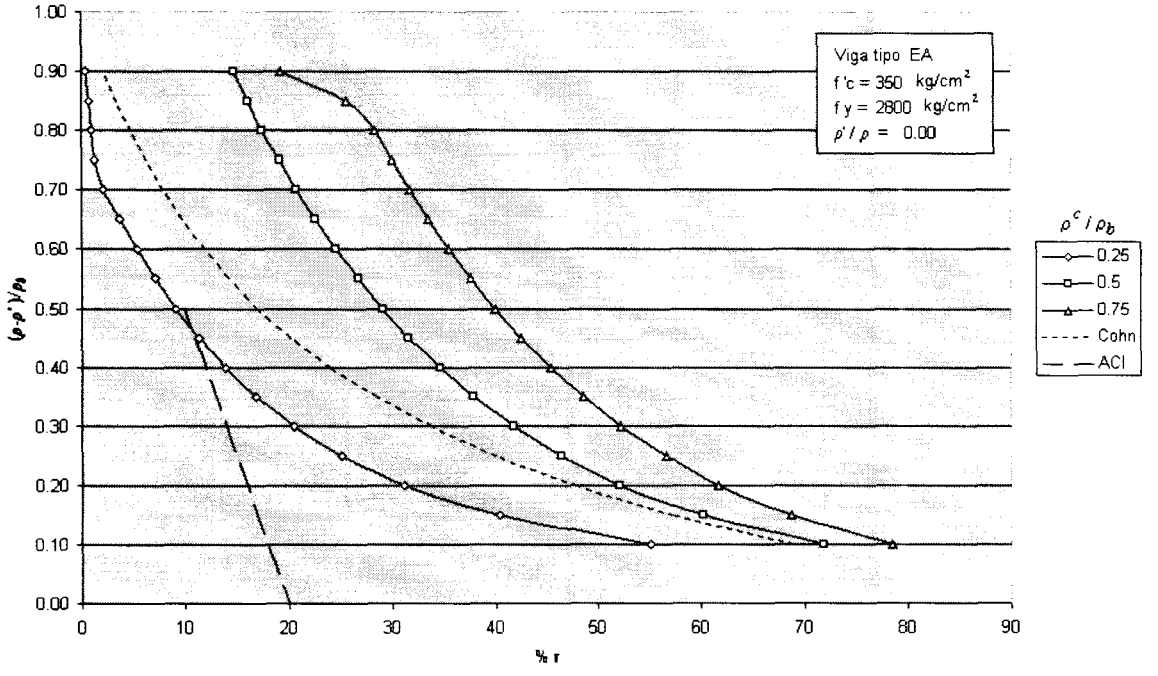


Figura P17.a Redistribución de momentos con variación de la cuantía en la sección crítica positiva. Comparativa con la redistribución según Cohn y con la región propuesta por el ACI-318-95.

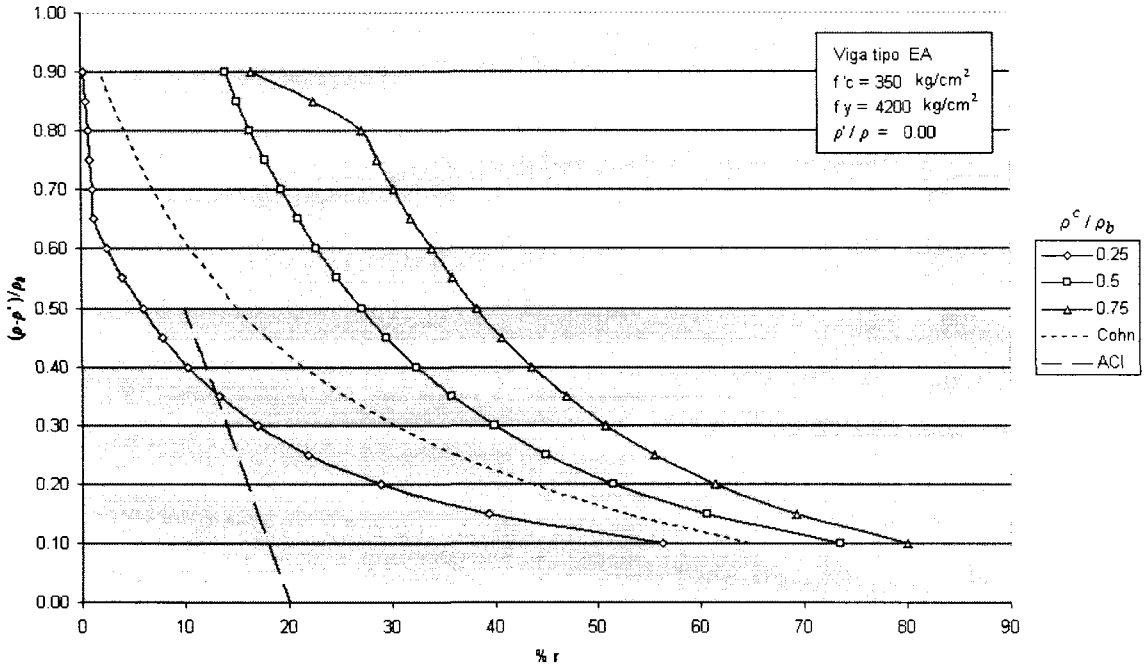
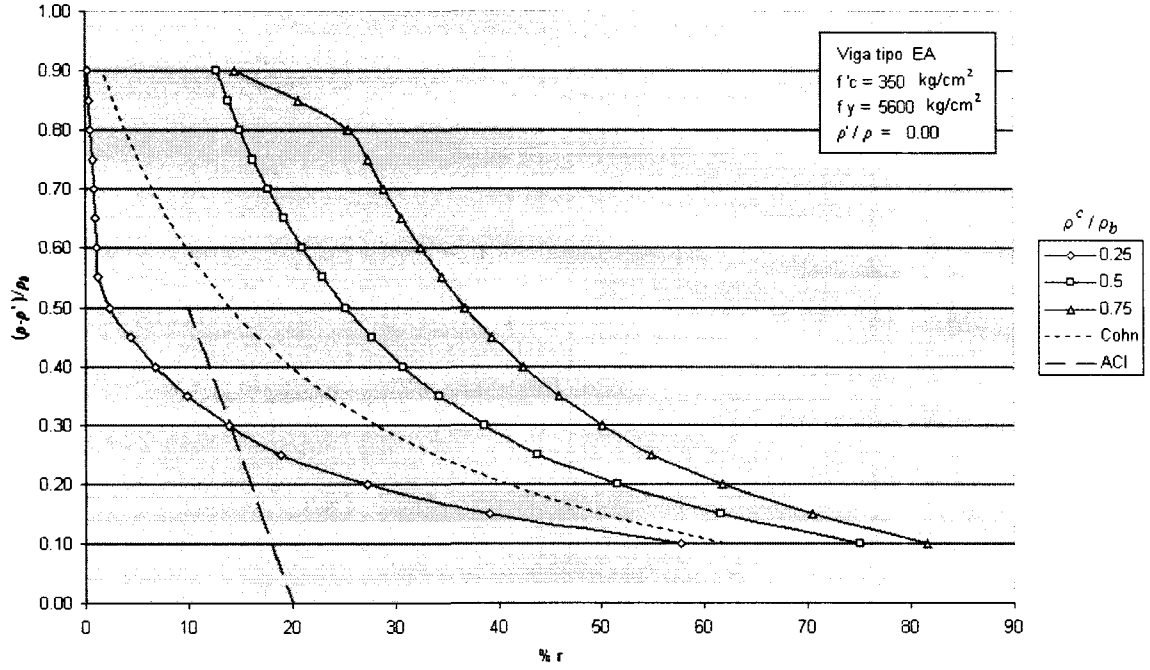


Figura P18.a Redistribución de momentos con variación de la cuantía en la sección crítica positiva. Comparativa con la redistribución según Cohn y con la región propuesta por el ACI-318-95.



4.7.2. Longitud de la articulación plástica, Viga EA

La secuencia de figuras P11.b, P13.b, P14.b, P15.b y P17.b, muestran el comportamiento de la longitud de la articulación plástica, ℓ_p , de la viga empotrada-articulada según la combinación *f'c-fy* correspondiente, para las mismas condiciones descritas en la prueba PX.a.

Figura P11.b Longitud de la articulación plástica

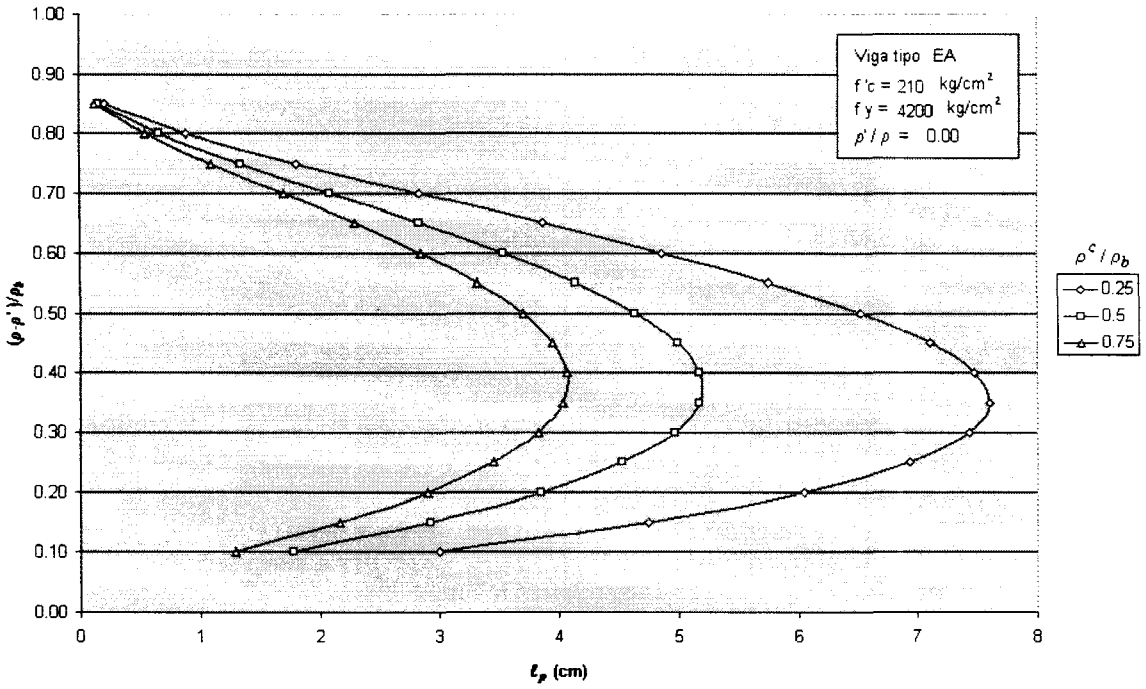


Figura P13.b Longitud de la articulación plástica

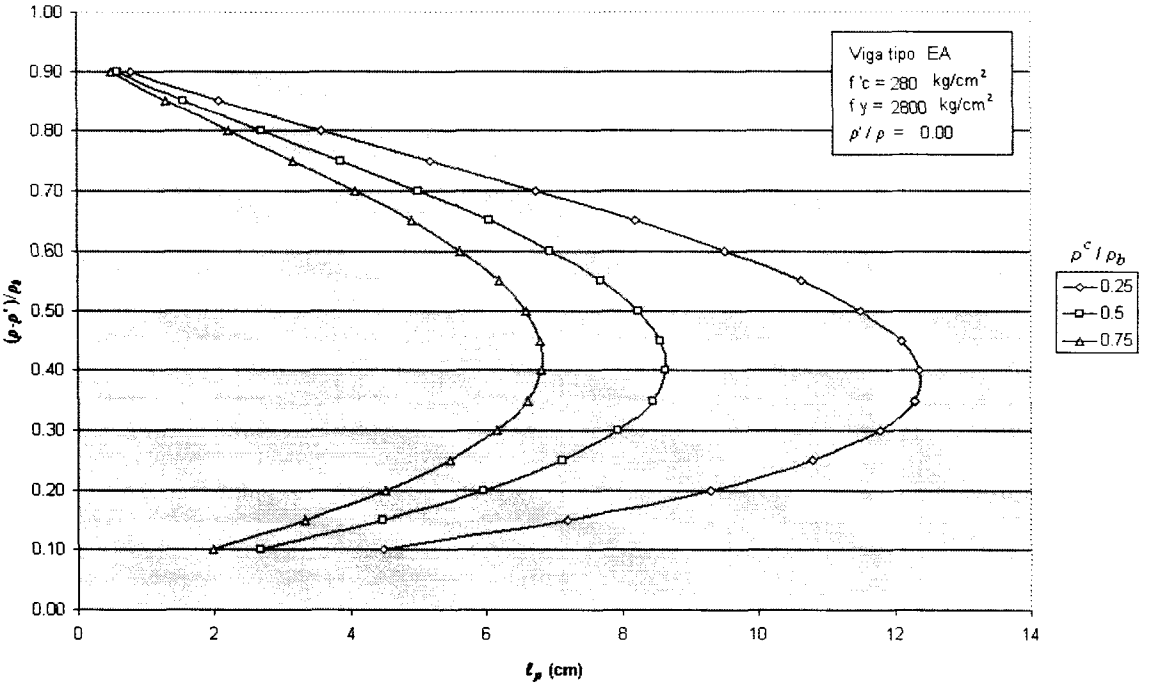


Figura P14.b Longitud de la articulación plástica

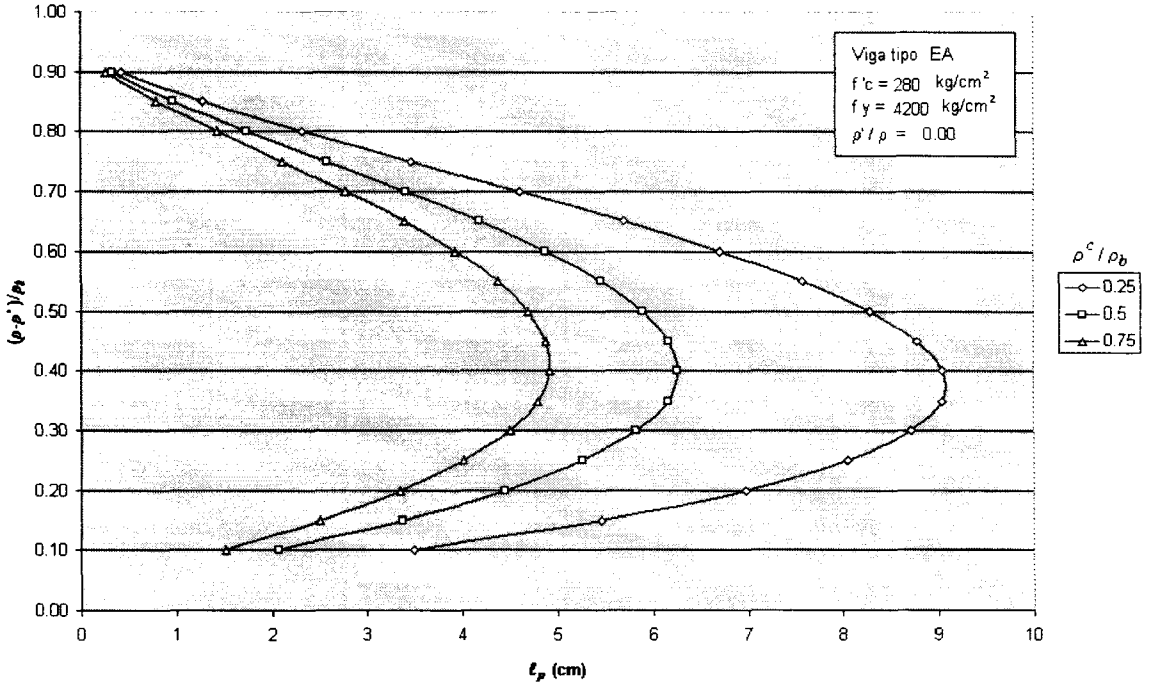


Figura P15.b Longitud de la articulación plástica

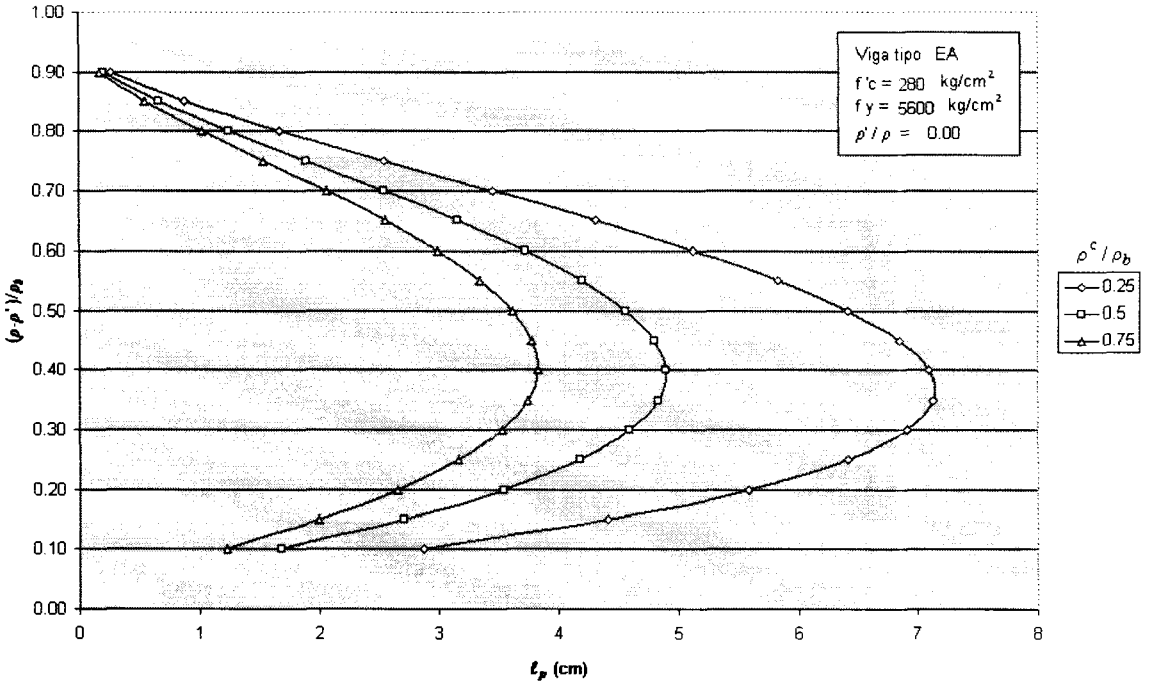
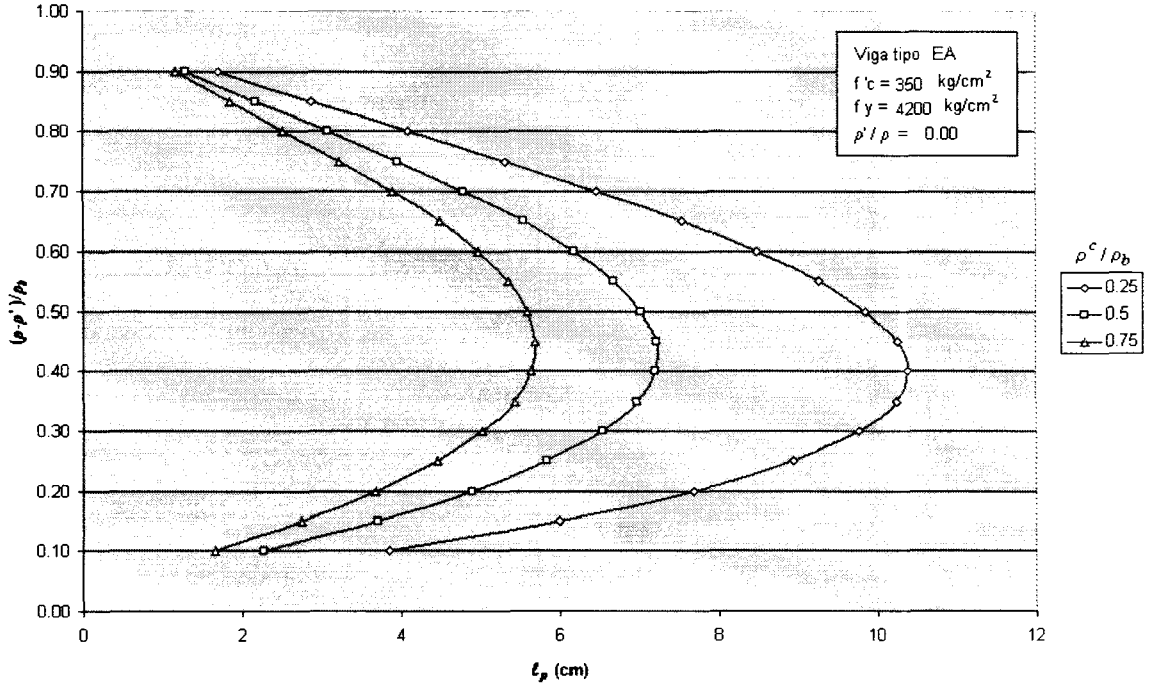


Figura P17.b Longitud de la articulación plástica



4.7.3. Capacidad rotacional de la articulación plástica, Viga EA

La secuencia de figuras P11.c, P13.c, P14.c, P15.c y P17.c, muestran el comportamiento de la capacidad rotacional de la articulación plástica, θ_p , de la viga empotrada-articulada según la combinación *f'c-fy* correspondiente, para las mismas condiciones descritas en la prueba PX.a.

Figura P11.c Capacidad rotacional de la articulación plástica.

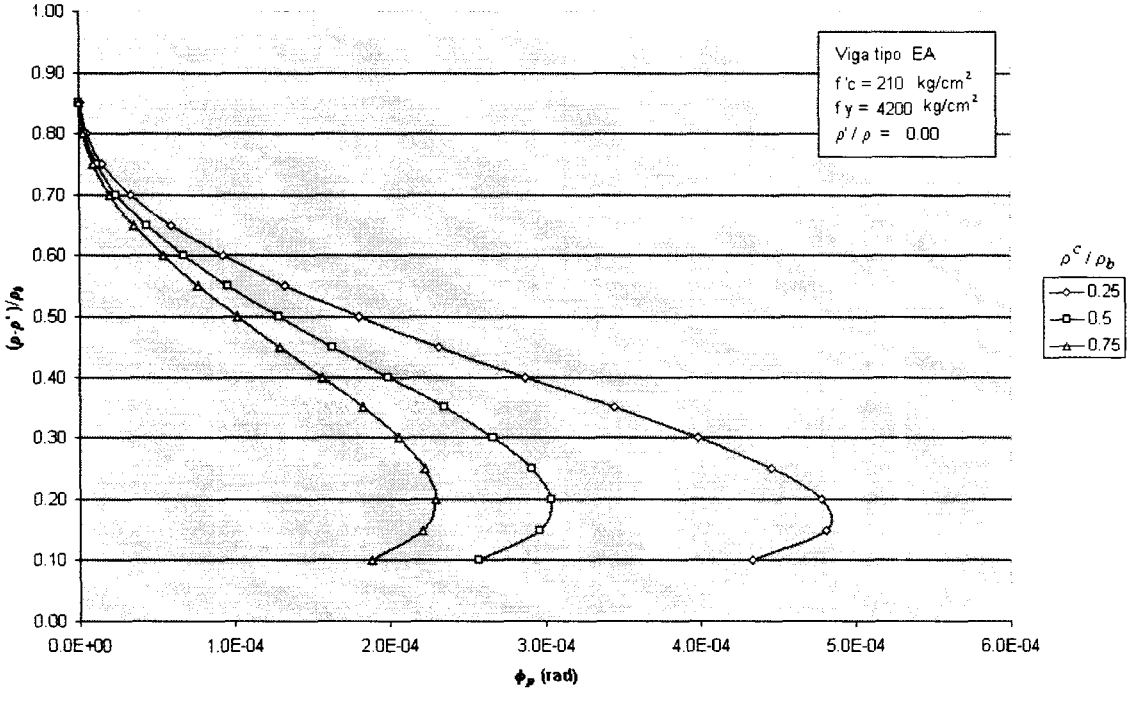


Figura P13.c Capacidad rotacional de la articulación plástica.

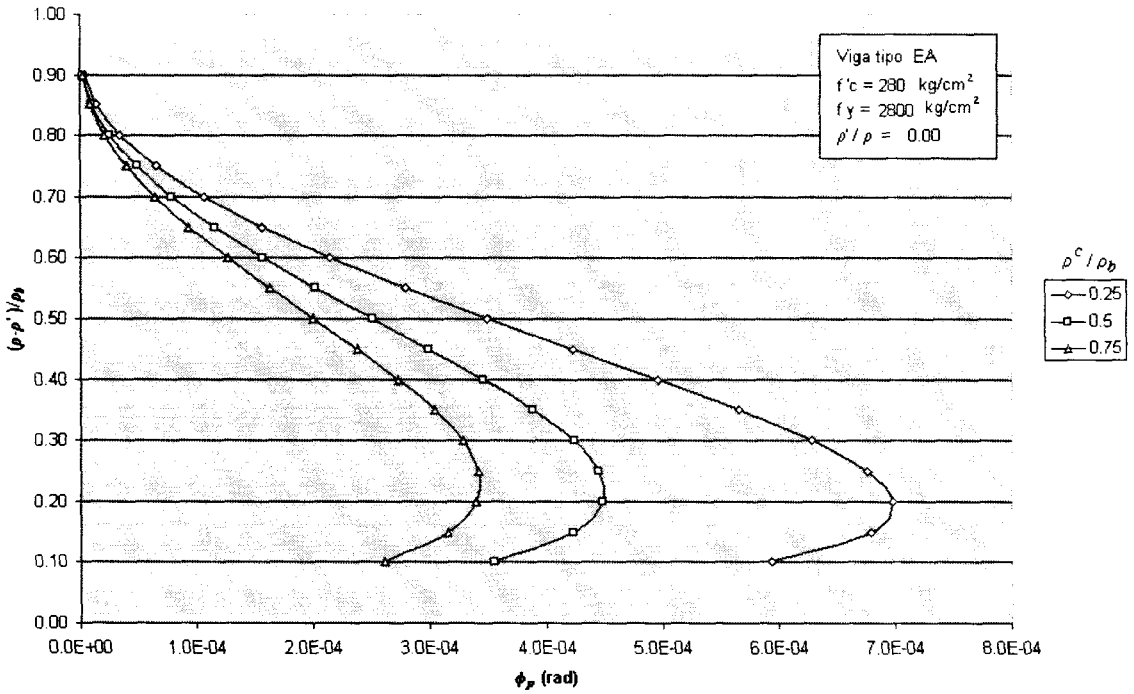


Figura P14.c Capacidad rotacional de la articulación plástica.

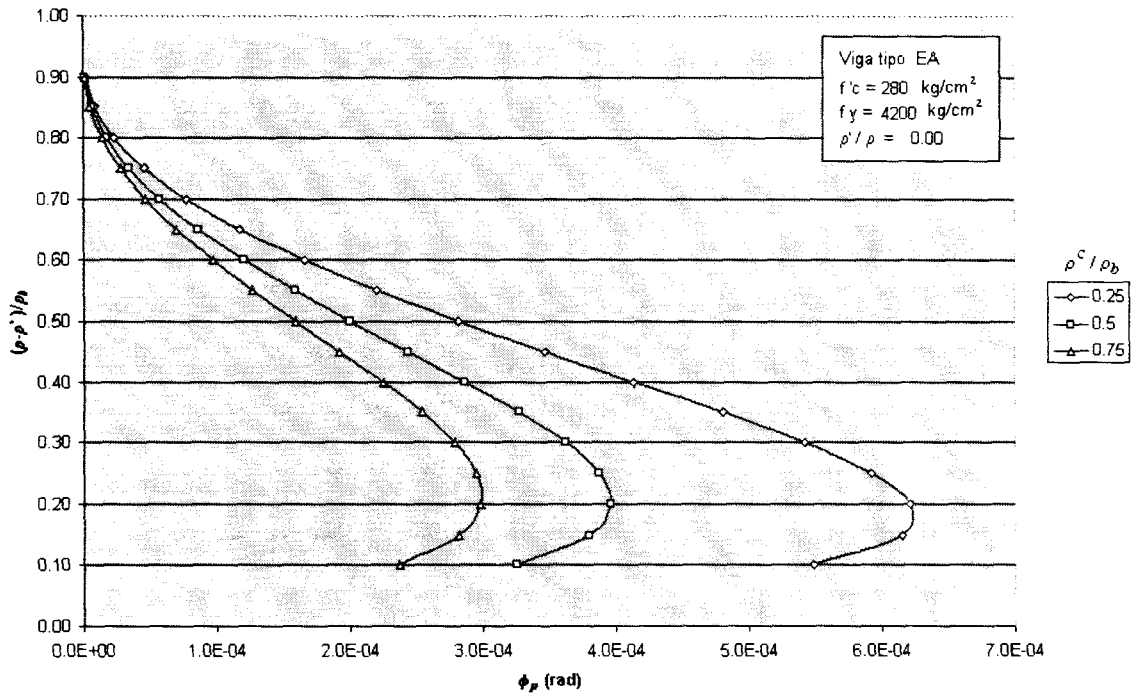


Figura P15.c Capacidad rotacional de la articulación plástica.

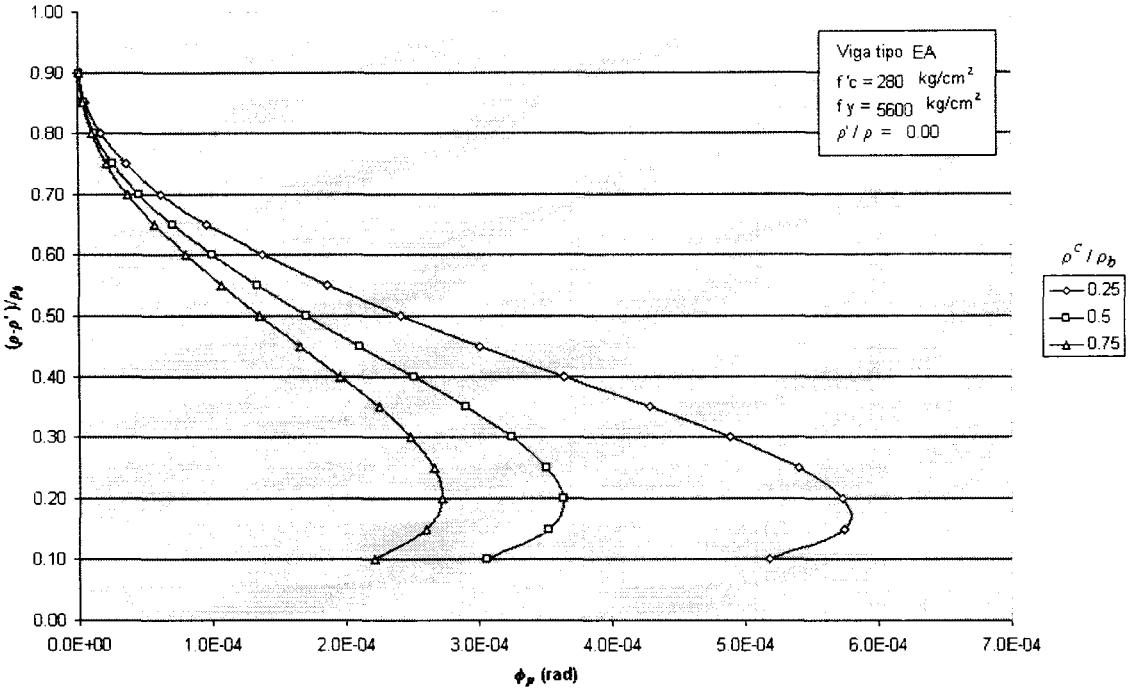
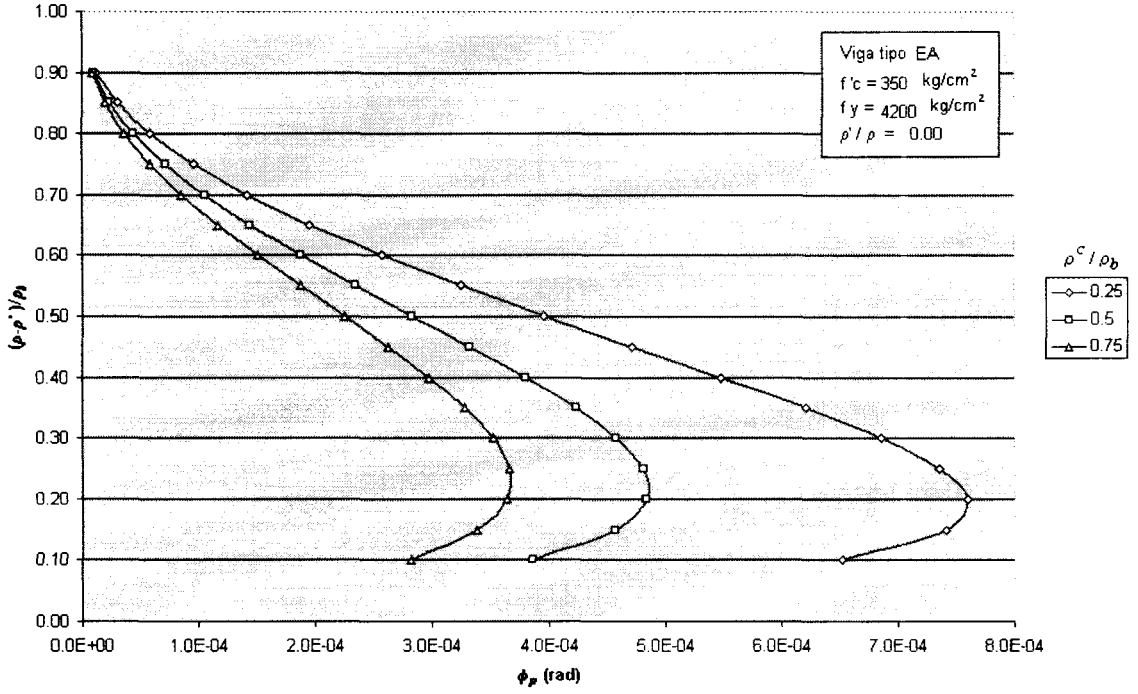


Figura P17.c Capacidad rotacional de la articulación plástica.



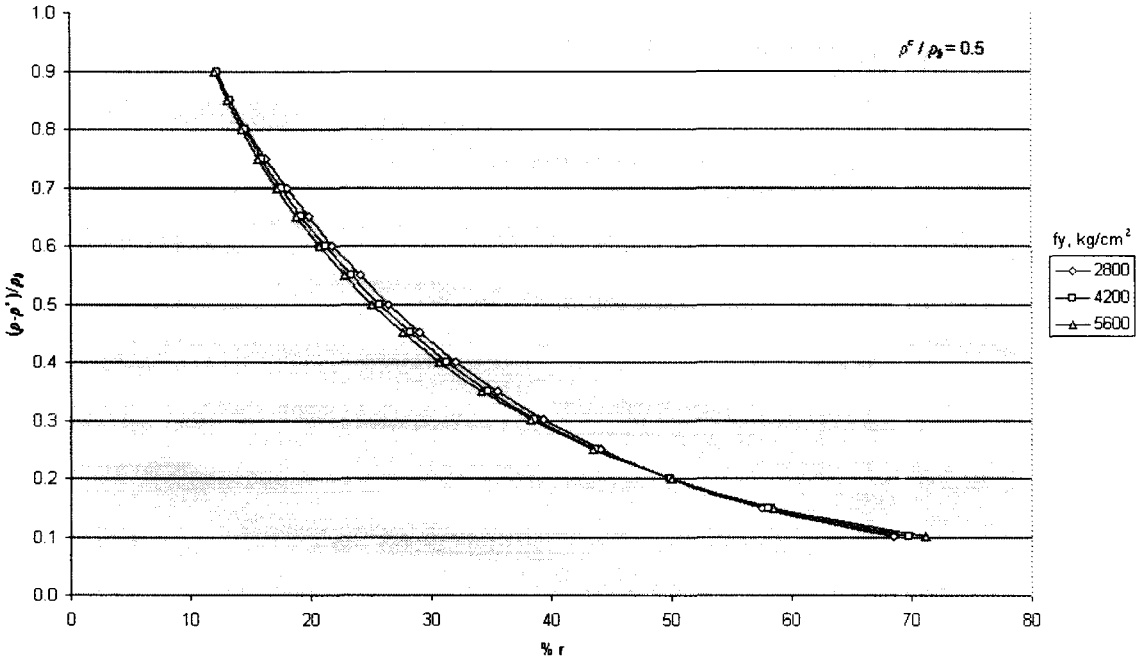
4.8. Evaluación de la sensibilidad de la redistribución de momentos a la variación en la resistencia del acero y a la variación en la resistencia del concreto

En la figura P19. se muestra la redistribución de momentos con variación en la resistencia del acero *fy*, para una resistencia constante del concreto, para una viga empotrada-empotrada. La figura P21. muestra una gráfica similar para una viga empotrada-articulada.

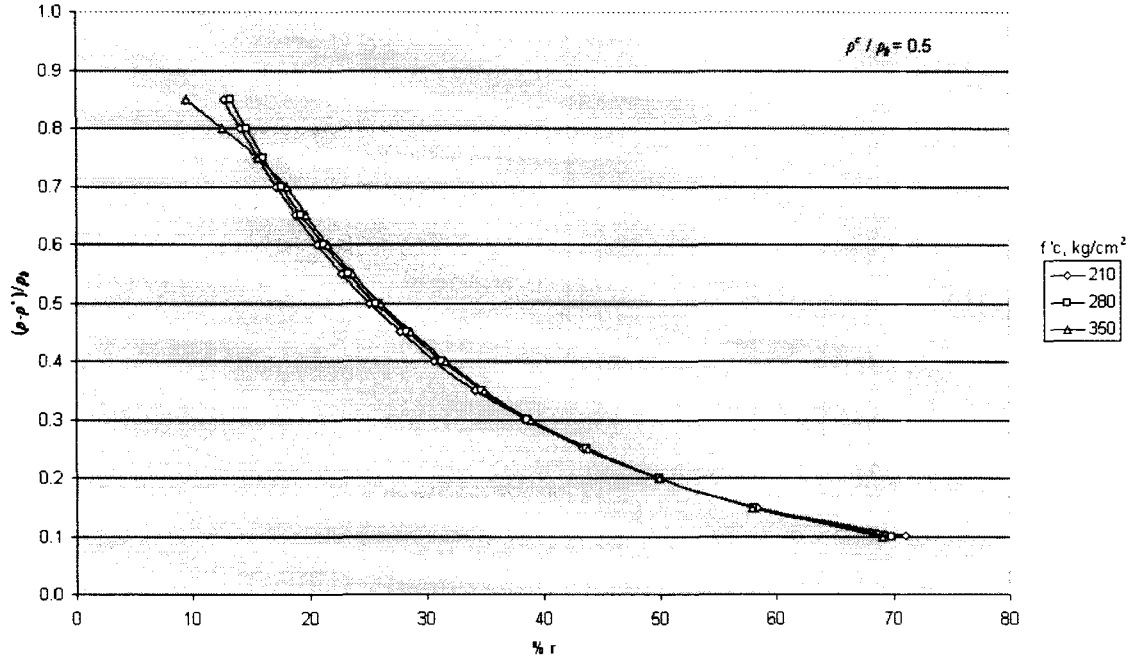
En la figura P20. se muestra la redistribución de momentos con variación en la resistencia del concreto *f'c*, para una resistencia constante del acero, para una viga empotrada-empotrada. La figura P22. muestra una gráfica similar para una viga empotrada-articulada.

Las gráficas de esta sección se presentan para valores centrales de la resistencia del concreto y del acero, y para una cuantía en la sección crítica central de $\rho^c/\rho_b = 0.5$.

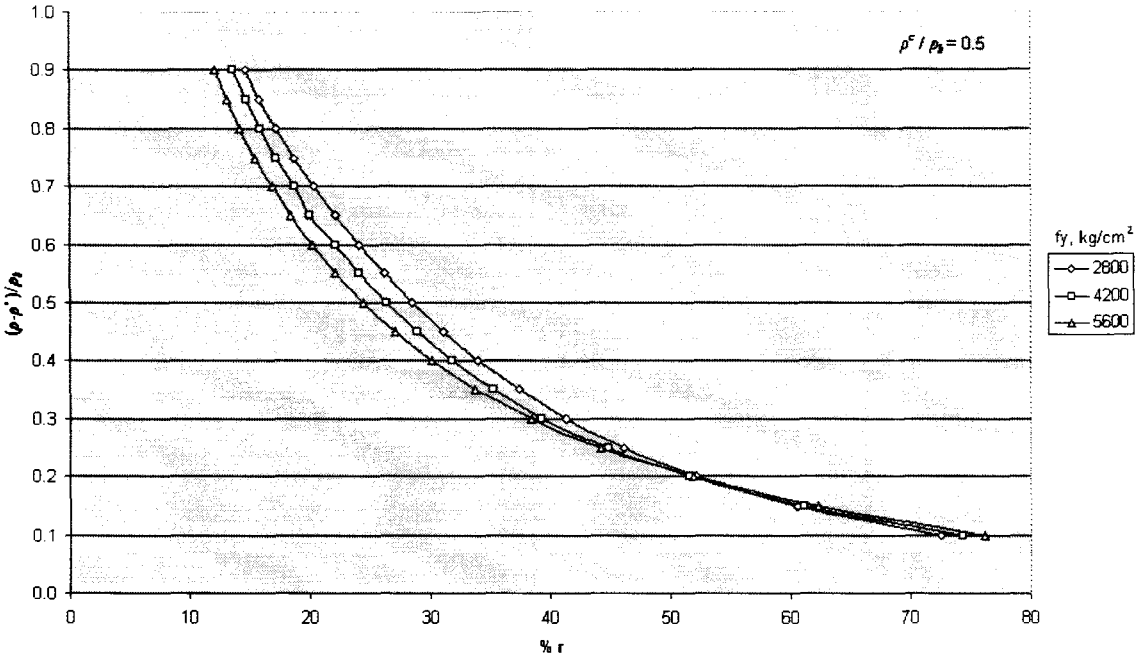
P19. Redistribución de momentos para f'c=280 kg/cm² con variación en fy.
Viga empotrada-empotrada.



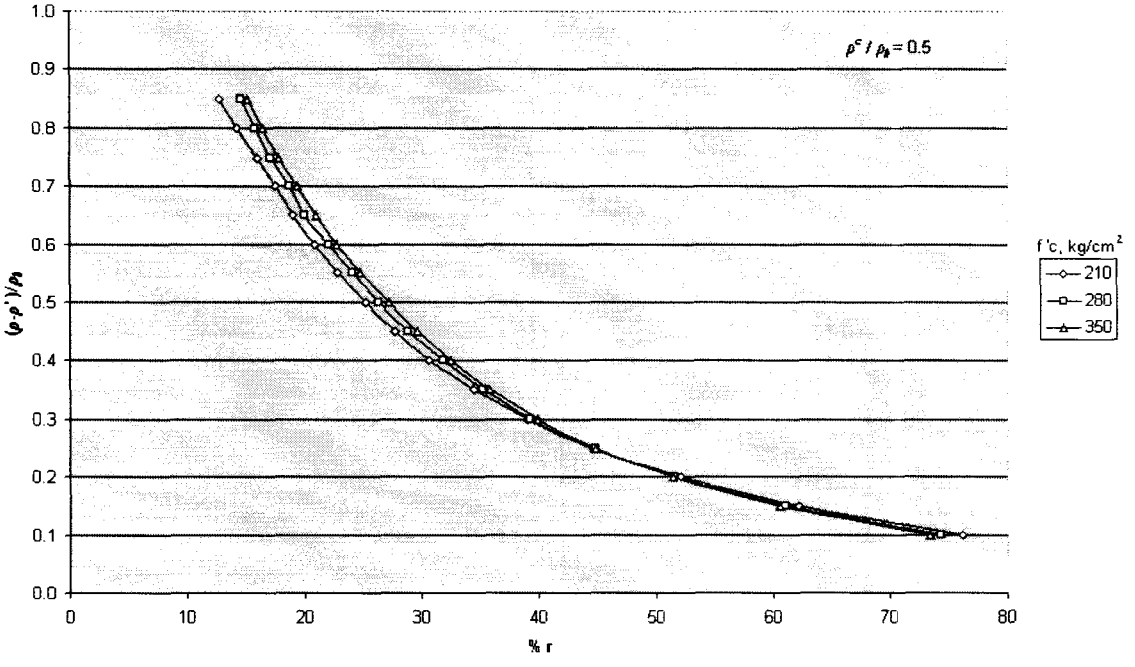
P20. Redistribución de momentos para fy=4200 kg/cm² con variación en f'c.
Viga empotrada-empotrada.



P21. Redistribución de momentos para f'c=280 kg/cm² con variación en fy.
Viga empotrada-articulada.



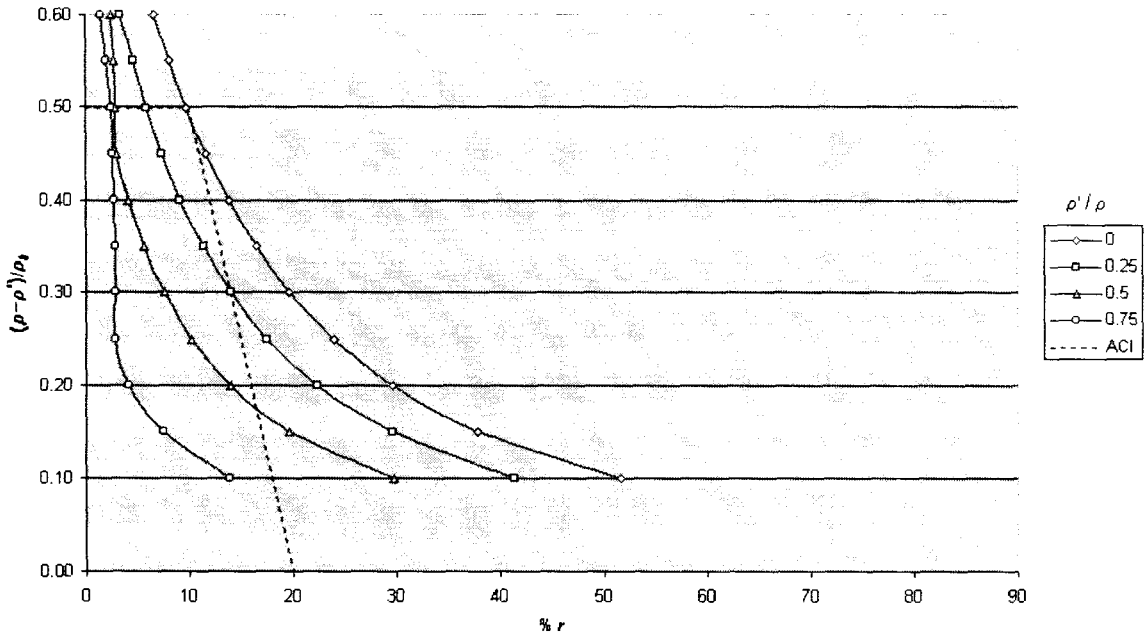
P22. Redistribución de momentos para fy=4200 kg/cm² con variación en f'c.
Viga empotrada-articulada.



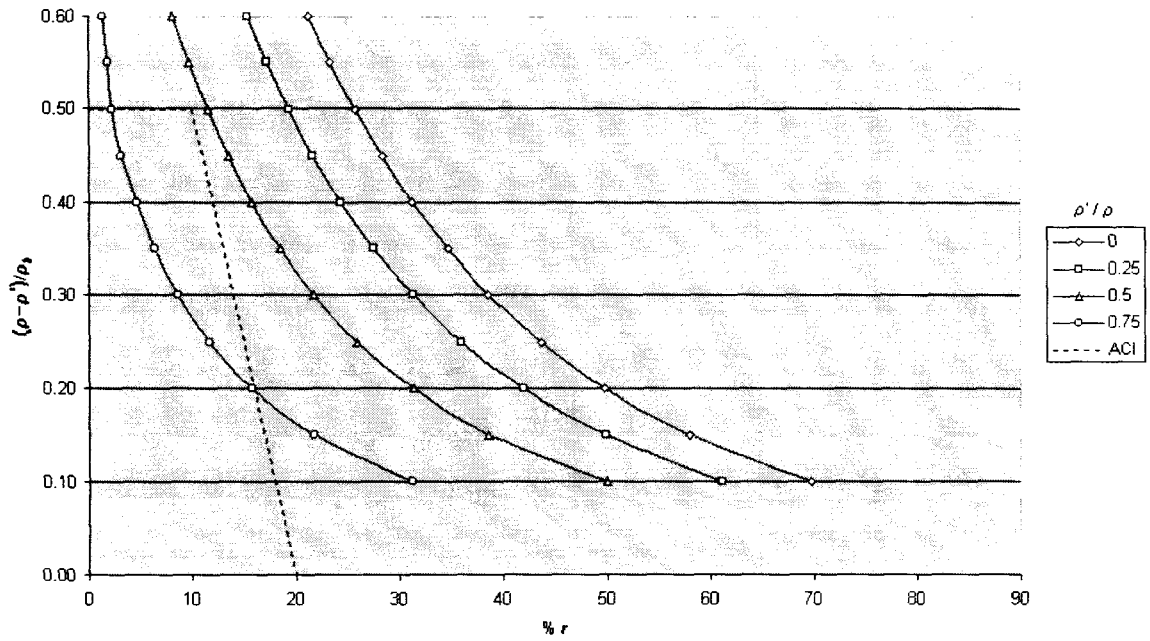
4.9. Evaluación de la sensibilidad de la redistribución de momentos a la cuantía de acero a compresión

En la secuencia de figuras P23.a, P23.b y P23.c se muestra la redistribución de momentos para una variación de la cuantía de acero a compresión en la sección crítica negativa, es decir al extremo de una viga empotrada-empotrada. Cada gráfica en esta secuencia presenta un valor constante de la cuantía de acero a tensión en la sección crítica positiva, a saber 0.25, 0.50 y 0.75, respectivamente. De igual forma la secuencia de figuras P24.a, P24.b y P24.c muestra la redistribución de momentos bajo las mismas condiciones que las figuras P23.x pero para una viga empotrada-articulada.

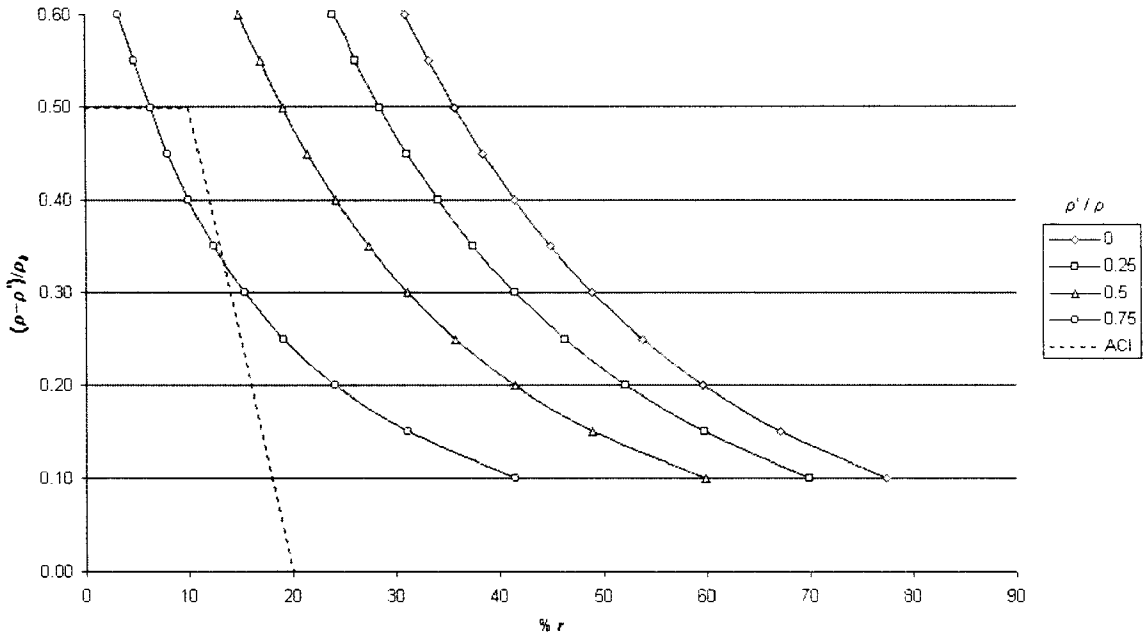
P23.a Redistribución de momentos para f'c=280 kg/cm^2 y fy=4200 kg/cm^2 con variación en ρ'/ρ para una viga empotrada-empotrada. ρ^c/ρ_b=0.25



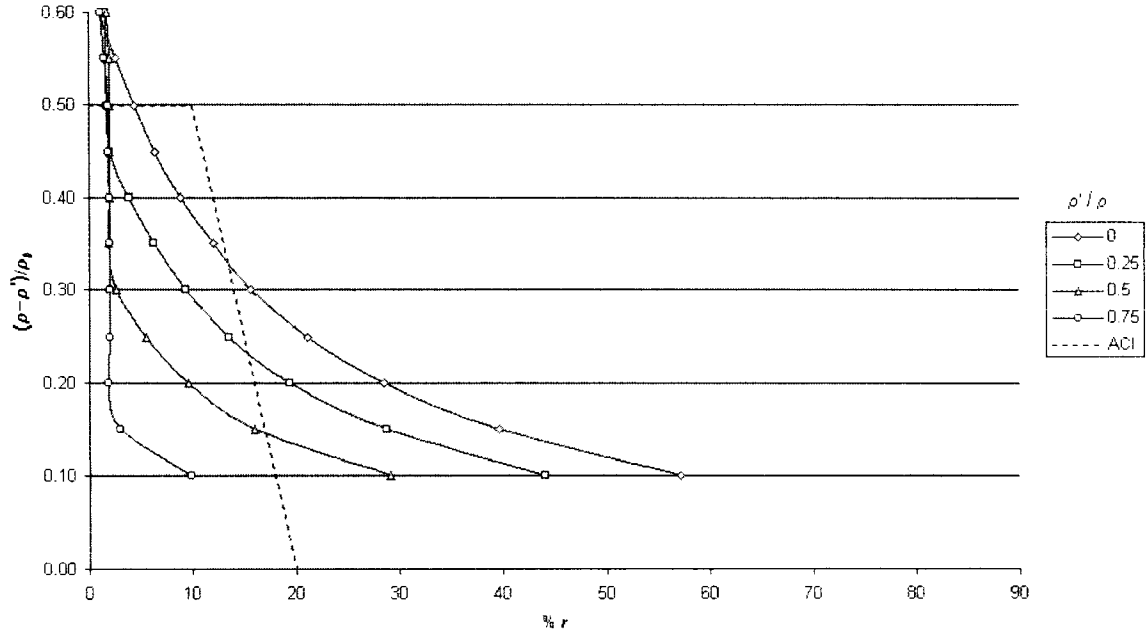
P23.b Redistribución de momentos para f'c=280 kg/cm^2 y fy=4200 kg/cm^2 con variación en ρ'/ρ para una viga empotrada-empotrada. ρ^c/ρ_b=0.5



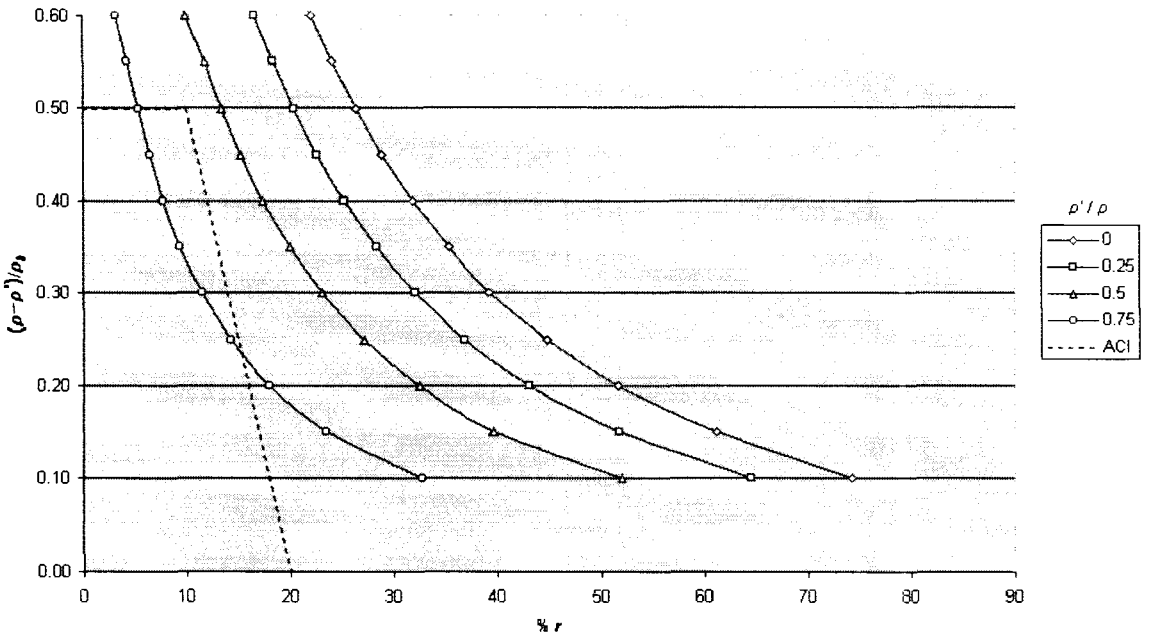
P23.c Redistribución de momentos para f'c=280 kg/cm^2 y fy=4200 kg/cm^2 con variación en ρ'/ρ para una viga empotrada-empotrada. ρ^c/ρ_b=0.75



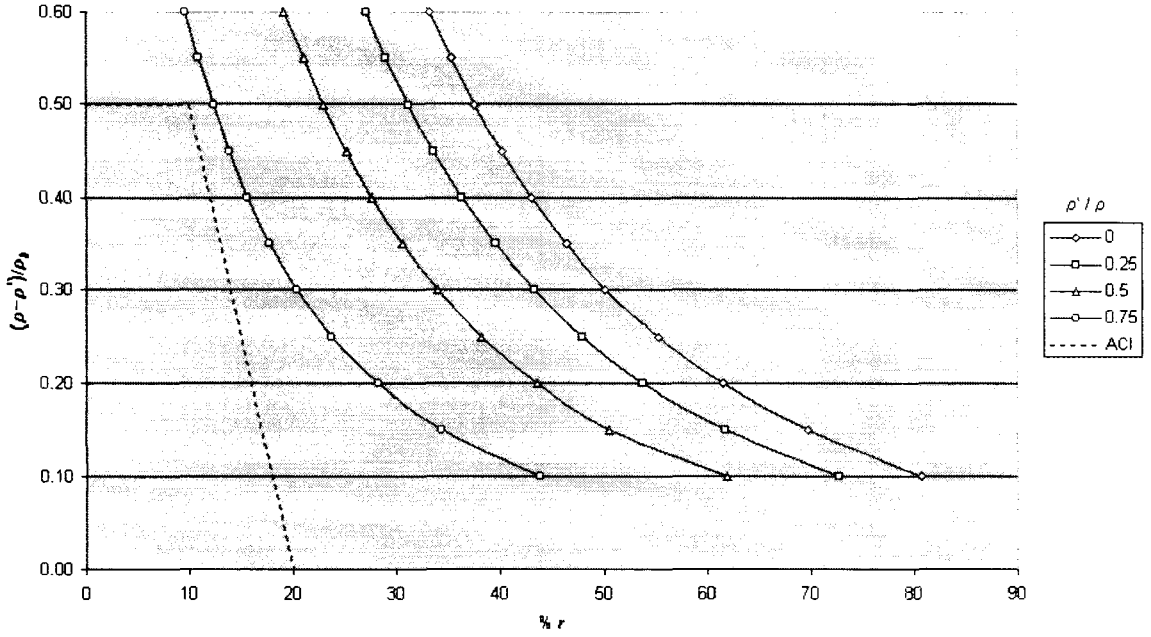
P24.a Redistribución de momentos para f'c=280 kg/cm^2 y fy=4200 kg/cm^2 con variación en ρ'/ρ para una viga empotrada-articulada. ρ^c/ρ_b=0.25



P24.b Redistribución de momentos para f'c=280 kg/cm^2 y fy=4200 kg/cm^2 con variación en ρ'/ρ para una viga empotrada-articulada. ρ^c/ρ_b=0.5



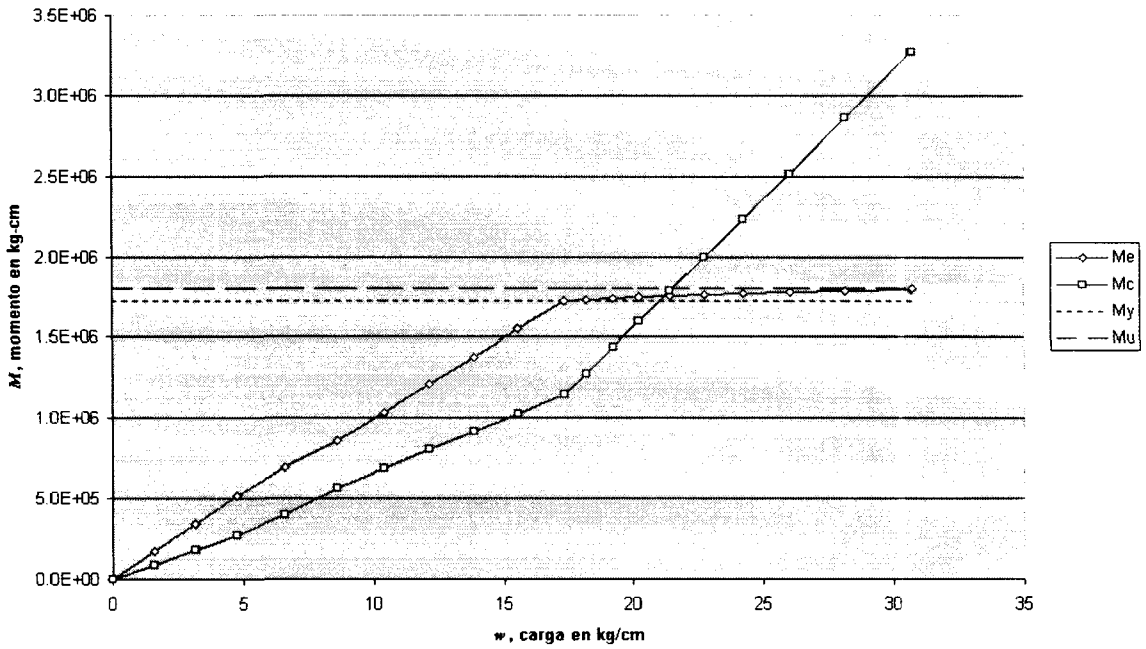
P24.c Redistribución de momentos para f'c=280 kg/cm^2 y fy=4200 kg/cm^2 con variación en ρ'/ρ para una viga empotrada-articulada. ρ^c/ρ_b=0.75



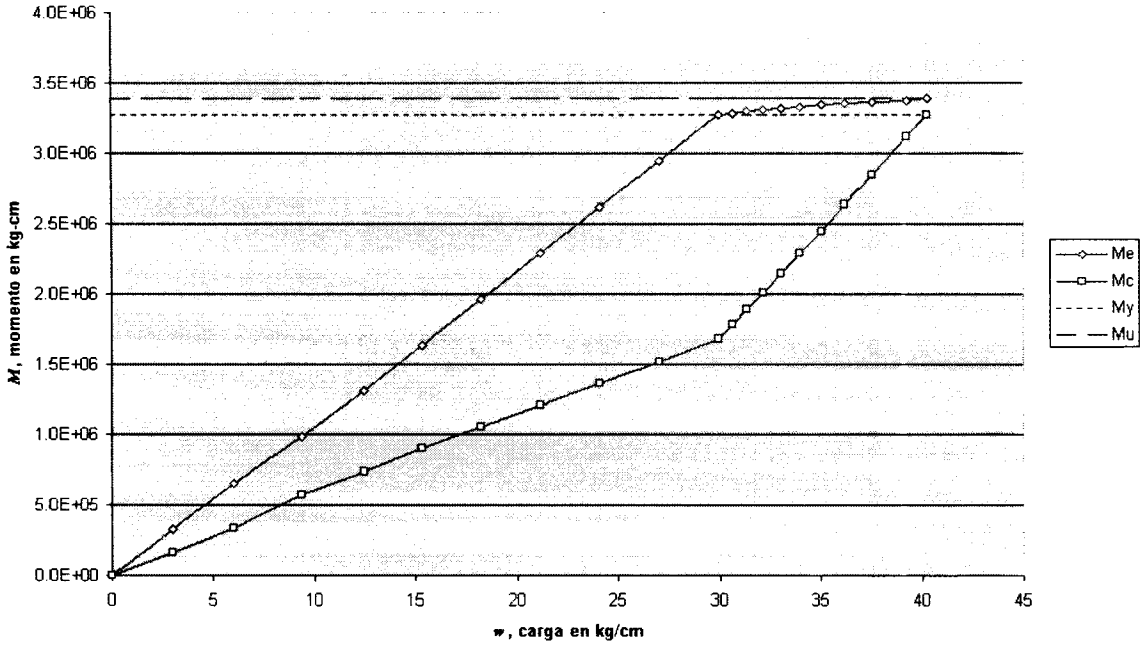
4.10. Evaluación de la curva *w-Me*, Carga versus Momento Crítico Extremo, en contraste con la curva *w-Mc*, Carga versus Momento Crítico Central

La secuencia de figuras P25.a, P25.b y P25.c, presenta las gráficas *w-M* para los casos de *redistribución pronunciada, redistribución completa y redistribución parcial*, para valores de ρ/ρ_b de 0.25, 0.50 y 0.75, respectivamente. Esta secuencia se obtuvo al calcular la curva de redistribución de momentos para una relación ρ^c/ρ_b de 0.5, con *f'c=280 kg/cm*^{2} y *fy=4200 kg/cm*^{2}, sobre una viga empotrada-empotrada. Obsérvese que en cada gráfica se muestra la evolución comparativa de los momentos negativos de extremo, *Me*, y positivo central máximo, *Mc*. Como referencia se presentan los momentos de fluencia, *My*, y el momento último, *Mu*, correspondientes a la sección en el empotramiento.

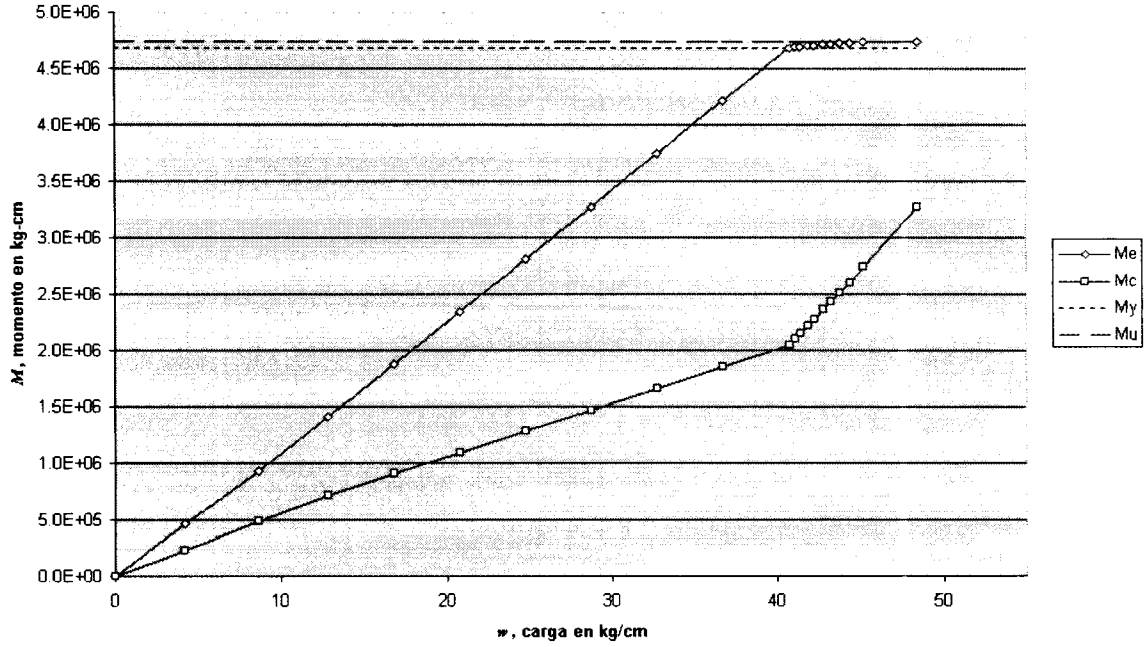
P25.a Gráfica comparativa *w-Me* y *w-Mc* de la historia de carga sobre una viga tipo EE para un caso de *redistribución pronunciada*, con ρ/ρ_b=0.25 y ρ^c/ρ_b=0.50



P25.b Gráfica comparativa *w-Me* y *w-Mc* de la historia de carga sobre una viga tipo EE para un caso de *redistribución completa*, con ρ/ρ_b=0.50 y ρ^c/ρ_b=0.50



P25.c Gráfica comparativa *w-Me* y *w-Mc* de la historia de carga sobre una viga tipo EE para un caso de *redistribución parcial*, con ρ/ρ_b=0.75 y ρ^c/ρ_b=0.50



Capítulo 5

DISCUSION DE RESULTADOS

En el capítulo 4 se presentaron el plan de pruebas y los resultados más relevantes obtenidos de la simulación por computadora para evaluar el comportamiento de la redistribución de momentos en vigas de un claro, de sección rectangular, con apoyos empotrado-empotrado y empotrado-articulado. En los apartados siguientes se discuten los resultados mostrados en el capítulo anterior, siguiendo una estructura y secuencia similar a la presentada antes, con la intención de describir y ampliar las observaciones y conclusiones a las que condujo el presente estudio.

5.1. Sobre la curva Momento-Curvatura

La determinación de la curva Momento-Curvatura según el procedimiento descrito en el capítulo 3 muestra un comportamiento esperado para la historia de carga de una sección de concreto armado según lo indican la secuencia de figuras 4.1 a la 4.5. En ellas se muestra el comportamiento de la curva para distintos niveles de cuantía del acero a tensión respecto del acero para la condición balanceada, ρ/ρ_b de 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 y 1.0, y cada secuencia (cada gráfica) para un valor constante de la relación ρ'/ρ de 0.0, 0.25, 0.5, 0.75 y 1.0.

Al concentrarnos en una de las curvas, podemos observar claramente el comportamiento lineal de la curva en la región *no-agrietada*, hasta el punto en el que se muestra una súbita pérdida de capacidad de deformación al iniciarse un descenso en la curva que se extiende hasta un mínimo local a partir del cuál se recupera la capacidad para resistir momento. La diferencia de curvaturas entre el punto de inicio del descenso y el punto en el que se alcanza el mismo nivel de momento resistente antes del agrietamiento describe la pequeña rotación que sufre la sección al agrietarse. A partir del punto de recuperación se inicia la región *agrietada* en la que se observa un comportamiento en forma de *"s"* hasta el punto en el que se alcanza la fluencia del acero, indicado por el fuerte cambio de pendiente en el punto de quiebre más evidente de la curva poco antes de alcanzar su máximo valor de momento. En este punto se inicia la región final o región

plástica del comportamiento de la sección antes de la falla, representada por el punto extremo derecho de la curva. El comportamiento obtenido es muy típico del análisis de la historia de carga de una sección de concreto.

Por otro lado, al considerar el conjunto de curvas dentro de una figura podemos observar el claro contraste entre curva y curva, es decir para una mayor cuantía de acero a tensión una menor ductilidad, entendida como el cociente de la curvatura a la falla y la curvatura a la fluencia del acero a tensión. Es de comentarse que cuando no existe acero a compresión la ductilidad general mostrada es menor que cuando se incrementa progresivamente el acero a compresión, y también vale la pena observar que la mejoría en ductilidad es más significativa para valores altos de ρ/ρ_b que para valores menores, pues existe muy poca diferencia entre la ductilidad para la curva con $\rho/\rho_b = 0.2$ y $\rho'/\rho = 0.0$ y la ductilidad para la curva con $\rho/\rho_b = 0.2$ y $\rho'/\rho = 1.0$, pero existe una diferencia marcada en ductilidad para la curva con $\rho/\rho_b = 1.0$ y $\rho'/\rho = 0.0$ y la curva con $\rho/\rho_b = 1.0$ y $\rho'/\rho = 1.0$.

Obsérvese también que el aumento en el momento resistente debido a un aumento de la cuantía de acero a compresión (ρ'/ρ) es marginal, pero el aumento en ductilidad es significativo mientras más alta sea la cuantía de acero a tensión, ρ/ρ_b.

Los curvas Momento-Curvatura obtenidas forman la base para la determinación de los niveles de ductilidad de la sección, como se indica en la siguiente sección.

5.2. Sobre la curva de Ductilidad

La ductilidad calculada como la relación de curvaturas a la falla y a la fluencia, $u = \phi_u/\phi_y$, se determina claramente de los valores aportados por la curva Momento-Curvatura, de modo que en la secuencia de figuras 4.6 a la 4.8 se muestra de manera ilustrativa el comportamiento descrito por la ductilidad de una sección típica de concreto. Este comportamiento replica el comportamiento de la ductilidad mencionado antes, mostrando una mayor ductilidad mientras mayor sea la cuantía de acero a compresión para una cuantía constante a tensión. Sin embargo, es de observarse la diferencia en el comportamiento para valores bajos de resistencia en el acero, para los cuales se dan mayores valores de ductilidad, mientras que para resistencias bajas en el acero se muestran bajos valores de ductilidad. Estos resultados fueron contrastados con los mismos cálculos pero usando el bloque equivalente de esfuerzos propuesto por Whitney (Mattock el al[28]) obteniéndose valores con un excelente nivel de concordancia.

La determinación de los valores de ductilidad de una sección es crucial en este estudio pues el buen comportamiento de la ductilidad seccional valida e implica un buen comportamiento de la curva Momento-Curvatura, la cual es fundamento para la simulación de la redistribución de momentos, así como la determinación de la longitud de la articulación plástica y su capacidad de rotación.

5.3. Sobre la gráfica de Momento-Rigidez

En el capítulo 4 también se incluyó una gráfica para la evaluación del comportamiento de la curva Momento-Rigidez (M-EI) de una sección, como lo es la figura 4.9, sobre la cuál se observa una diferencia mínima en el comportamiento de las curvas M-EI según Branson y según la curva M-Φ a lo largo de la región *no-agrietada*, pero una diferencia importante sobre la región *agrietada*. Desde luego en la zona *plástica*, como sabemos la curva de Branson no describe el comportamiento seccional.

En cuanto a la menor discrepancia de las curvas en la región *no-agrietada* podemos concluir que el comportamiento de la curva Momento-Curvatura en esta región no es lineal sino que describe una curva ligeramente descendente. El descenso abrupto mostrado por la curva M-EI a partir de la curva M-Φ representa la súbita pérdida de rigidez al agrietarse la sección, de modo que el punto mínimo local de la curva M-EI corresponde con el punto sobre la curva M-Φ para el cuál ocurre la recuperación del momento resistente, pero que indica una pérdida importante de la rigidez flectora seccional pues muestra una disminución fuerte con respecto a la rigidez descrita en la fase previa a la ruptura. A partir de este punto y debido al comportamiento en "s" de la curva M-Φ en la región agrietada, la rigidez flectora seccional describe un comportamiento ascendente hasta un máximo local y luego un descenso hasta el punto en el que ocurre la fluencia del acero, punto en el que se observa un nuevo descenso abrupto de la rigidez hasta un punto relativamente cercano a *cero* a partir del cual inicia el descenso final de la curva hasta alcanzar una rigidez flectora nula, es decir el punto en el que ocurre el aplastamiento del concreto al tiempo que el acero a tensión se encuentra en pleno estado de fluencia.

Es importante hacer notar que la diferencia entre el comportamiento de la curva M-EI a partir de Branson y a partir de la curva M-Φ tiene que ver con las condiciones bajo las cuales se determinan estas, es decir, la expresión de Branson proviene de una serie de pruebas experimentales para determinar la rigidez de vigas bajo carga distribuida para ser empleada en el cálculo de deflexiones, lo que implica un enfoque estructural de la curva, mientras que la curva M-EI basada en la curva M-Φ proviene de la determinación de la rigidez flectora calculada como rigidez tangente de la curva, lo que implica un enfoque seccional. Esto implica que la falta de

acoplamiento entre las secciones adyacentes y la sección en cuestión. La idea del *acoplamiento* no es nada simple, pues implica que deben existir un conjunto de condiciones de compatibilidad y equilibrio entre las secciones adyacentes que describan el efecto de la conformación de un segmento de viga por la sucesión de secciones aisladas de concreto. En pocas palabras, si consideramos efectos como la rigidización por tensión del concreto, efecto que tiene que ver con un aumento de la capacidad de momento resistente en un segmento de viga formado por la aparición de dos grietas adyacentes, podemos justificar la diferencia entre estas dos curvas, pero no solo sería este efecto sino algunos otros efectos del acoplamiento menos evidentes.

Esta consideración condujo a considerar la curva M-EI para el proceso de simulación considerando la curva de Branson en la región *no-agrietada* y en la región *agrietada*, y la curva basada en la curva M-Φ para la región *plástica*.

5.4. Sobre las curvas de redistribución de momentos

La secuencia de pruebas relacionadas con la redistribución de momentos, la longitud de la articulación plástica y la capacidad de rotación de la articulación plástica, forman la secuencia de pruebas más importantes según los objetivos de la presente investigación. En los siguientes comentarios se hablará de los resultados indistintamente del tipo de viga, empotrada-empotrada o empotrada-articulada, y en su momento se harán notar las diferencias entre ellas.

Primero, si consideramos las secuencia de figuras de la P1.a a la P9.a (ó de la P10.a a la P18.a), y si nos concentramos en una de ellas, por ejemplo la P5.a (ó P14.a) que corresponde la posición central, observamos que cada figura describe el comportamiento de la redistribución de momentos para una serie de tres curvas cada una para un valor diferente de la relación de cuantía del acero a tensión en la sección crítica sujeta a momento positivo (sección central), es decir con variación en ρ^c/ρ_b para valores de 0.25, 0.5 y 0.75. El contraste muestra un comportamiento consistente entre las tres curvas, en lo que parecen diferenciarse por un corrimiento de cada curva respecto de las demás. Se observa que a mayor cuantía a tensión en la sección central mayor capacidad de redistribuir momentos. En comparación, se presenta la curva descrita por las expresiones propuestas por Cohn para la redistribución, para las mismas condiciones de prueba, en la que se puede observar una concordancia satisfactoria, a veces muy certera de la forma de la curva con las curvas obtenidas de la simulación. A la vez, se nota una clara posición segura para valores de ρ^c/ρ_b de 0.5 y 0.75, y muy comprometedora para valores de ρ^c/ρ_b de 0.25, pues en la mayoría de los casos esta curva cae dentro de la región permisible para la relación entre ρ/ρ_b y la redistribución límite según el ACI318-95. Cabe señalar que en todos los casos la curva de ρ^c/ρ_b = 0.25 queda por debajo y a la izquierda del *límite*

indicado por Cohn, pero en el caso de la viga empotrada-articulada la diferencia entre las curvas es más drástica. De las gráficas se puede deducir que para valores por encima de ρ^c/ρ_b = 0.35, podríamos dar por seguro el cumplimiento de los límites del ACI318-95, pero desde luego implica que manteniendo un control adecuado de la cuantía de acero a tensión en la sección central podríamos obtener niveles de redistribución mucho mayores.

Primero que nada, el desfasamiento denota un comportamiento claramente regido por la capacidad de la estructura para generar el mecanismo de colapso, y por tanto proviene de una interacción estrictamente estructural, es decir depende fuertemente de la capacidad de momento de la sección central. Por otro lado, la forma de la curva denota el comportamiento inducido por la ductilidad y por ende por la capacidad de rotación de la articulación plástica una vez generada ésta. Es claro a partir de las curvas de las figuras PX.c que muestran la capacidad rotacional de la articulación plástica, que en un buen rango del comportamiento descrito se produce una capacidad de rotación importante, excepto para valores altos de la cuantía del acero a tensión, digamos para valores por encima de ρ/ρ_b = 0.5.

Lo anterior indica que la historia de la redistribución de momentos está lejos de quedar contada a partir de las consideraciones hechas en el reglamento ACI318-95, y que hay mucho más que decir en cuanto a la interacción estructural, como bien lo sugiere Cohn desde la década de los 60's.

Por otro lado, es interesante observar que para valores altos de la resistencia del concreto, las curvas de redistribución describen un comportamiento casi lineal en la región superior, es decir para valores altos de ρ/ρ_b, por ejemplo para valores de ρ/ρ_b por encima de 0.4 con $f'c=350$ kg/cm^2 y $fy=5600$ kg/cm^2. Esto implica la pérdida de ductilidad por la formación de secciones que tienden a ser más frágiles que las formadas por aceros y concretos de resistencias más bajas. Es preciso señalar que este efecto es menos evidente en el comportamiento de la redistribución de momentos para una viga empotrada-articulada, debido a que bajo esta configuración tanto la longitud como la capacidad de rotación de la articulación plástica son mayores que para la empotrada-empotrada, de modo que permite un rango mayor de redistribución cercano al comportamiento típico.

Desde el punto de vista de las gráficas tanto de longitud como de capacidad rotacional de las articulaciones plástica cabe observar que las máximas longitudes ocurren para valores digamos centrales de ρ/ρ_b digamos alrededor de 0.35 a 0.40, mientras que la capacidad rotacional tiene valores máximos para valores bajos de ρ/ρ_b alrededor de 0.15 a 0.20. Otro aspecto importante a partir de estas curvas es el comportamiento de ambas para valores bajos de ρ/ρ_b, pues desde el

punto de vista estructural se esperaría que ambas curvas desarrollaran tanto una longitud como una capacidad rotacional mayores conforme disminuye ρ/ρ_b, pero debido a la interacción estructural-seccional podemos observar una clara disminución en ambas curvas al disminuir ρ/ρ_b a pesar de que en esta zona se registran los mayores valores de la redistribución de momentos.

5.5. Sobre la sensibilidad de la redistribución a la variación en la resistencia de los materiales

En este estudio resulta valioso revisar qué tan importante es el cambio en la resistencia de los materiales sobre el comportamiento de la redistribución de momentos. En las figuras P19 a P22, se presenta el comportamiento de la redistribución para contrastar las curvas para diferentes valores de resistencia del acero por ejemplo, para un valor constante de la resistencia del concreto. En la gráfica P19 se deduce una leve variabilidad, prácticamente nula de los valores de redistribución al variar la resistencia del acero para un valor de *f'c* de 280 kg/cm^2 para una viga empotrada-empotrada. Similarmente, la figura P20 muestra muy poca variabilidad de la redistribución para una variación de la resistencia del concreto para una resistencia constante del acero de *fy* de 4200 kg/cm^2 para una viga empotrada-empotrada.

De igual forma, las figuras P21 y P22, presentan las mismas pruebas pero para una viga empotrada-articulada, en este caso obteniéndose una diferencia apreciable en la redistribución de momentos, resultando más sensible a la variación de la resistencia del acero. Sin embargo, ambas muestran una mayor sensibilidad a los cambios en las resistencias de los materiales.

5.6. Sobre la sensibilidad de la redistribución a la variación en la cuantía del acero a compresión

Otro aspecto muy importante en la presente investigación se refiere a la revisión del comportamiento de la redistribución de momentos para una variación de la cuantía del acero a compresión. En las figuras 23.a a la 23.c, y de la 24.a a la 24.c se muestra el contraste en el comportamiento de las curvas de redistribución con variación en ρ'/ρ para valores de 0.0, 0.25, 0.5 y 0.75, y para un valor constante de ρ^c/ρ_b. Esto permite dar un vistazo al comportamiento para las variaciones invertidas.

De estas curvas podemos deducir la grave dependencia sobre los valores de ρ'/ρ pues es claro que para valores altos, por ejemplo de 0.75, y para valores de ρ^c/ρ_b de por ejemplo, 0.25, se describen curvas que caen peligrosamente en la zona indicada como segura por el ACI318-95, para ambas vigas empotrada-empotrada y empotrada-articulada. Este comportamiento se

atenúa conforme se tienen valores de ρ^c/ρ_b mayores, por ejemplo de 0.5, para el cuál solo una curva, la de ρ'/ρ = 0.75 invade la región segura según el ACI318-95. Sin embargo, incluso para ρ^c/ρ_b = 0.75 en la viga empotrada-empotrada, la curva de redistribución para ρ'/ρ = 0.75 invade la región segura. Por otro lado, y tal vez más sorprendente, el hecho de reforzar fuertemente las secciones a compresión aumentando la relación ρ'/ρ conduce a comprometer de forma importante la redistribución de momentos.

5.7. Sobre el comportamiento de la curva Carga-Momento

En las figuras 25.a, 25.b y 25.c se presenta el comportamiento de los momentos de extremo, Me (negativo) y central Mc (positivo) a lo largo del proceso de carga de una viga empotrada-empotrada. En ellas se observa claramente la región bajo un comportamiento elástico, descrito por el comportamiento lineal de las curvas en la primera parte de la historia de carga. En esta región se puede observar la relación entre momentos que sugiere $Me=2Mc$ debido a la distribución de momentos según la teoría elástica. Al alcanzar la fluencia el acero a tensión de la sección de extremo se reduce la capacidad de la sección para tomar más momento como resultado de un incremento de carga, por lo que el momento adicional se redistribuye hacia secciones más resistentes en la vecindad de la sección de extremo y hacia las secciones centrales, de modo que si se tiene la suficiente capacidad de rotación, que depende de una adecuada ductilidad, el momento en exceso será resistido por el resto de las secciones menos solicitadas, por lo tanto produciendo un cambio en la forma de la curva de momentos. Este efecto se muestra en el comportamiento de la curva w-Me y w-Mc, en el cuál se describe claramente el intercambio de momentos, cuando la pendiente de la recta de la curva para el momento de extremo cambia abruptamente, haciéndose menor, mientras la pendiente de la curva para el momento central cambia de la misma manera pero haciéndose mayor. Es interesante que cuando existe capacidad rotacional suficiente en la sección de extremo (suponiendo el mismo armado en ambos extremos en una viga empotrada-empotrada) y también capacidad para resistir altos niveles de momento en la sección central, es posible alcanzar redistribuciones de momentos *pronunciadas* como lo muestra la figura 25.a, de la misma manera cuando se tiene una capacidad limitada en cualquiera de los dos requerimientos anteriores se tiene lo que se llama una redistribución de momentos *parcial,* en tanto que una redistribución de momentos *completa* implica que existe la capacidad rotacional suficiente y la resistencia seccional central apropiada para que, dada la formación de la articulación plástica en los extremos, el momento central alcance el mismo o casi el mismo valor que el momento de extremo, de modo que las curvas carga-momento de la sección de extremo y central convergen hacia un mismo valor cercano a los valores de momento a la falla para la sección de extremo. Es interesante observar también que para el caso de una viga empotrada-empotrada como ésta, la

suma de las magnitudes de los momentos $|Me| + |Mc|$ para cualquier valor de carga w es igual al momento estático $wl^2/8$. Otro comentario importante tiene que ver con el comportamiento de las curvas en la fase de redistribución, pues aunque no es evidente, el comportamiento es no-lineal. Finalmente, se observa una leve imperfección en el trazo de las curvas en la región elástica, que se atribuye al agrietamiento de las secciones en una etapa temprana de la historia de carga.

Capítulo 6

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Como en todo cierre de una etapa de cualquier estudio o investigación, enseguida se comenta la esencia de las aportaciones del presente trabajo y las etapas que le sucederán, de ser esto posible.

6.1. Aspectos relevantes del estudio

Como resultado de la evaluación de la redistribución de momentos llevada a cabo y descrita en los apartados anteriores, se puede hacer énfasis en los siguientes aspectos, vistos como los hallazgos más importantes:

a) La hipótesis que motivó el estudio resulta ser cierta de acuerdo con este estudio, es decir, la capacidad de redistribución de momentos en vigas continuas puede ser mayor que la permitida por el reglamento ACI318-95. Sin embargo, las consideraciones necesarias para lograr una mayor redistribución implican consideraciones estructurales que van más allá de la descripción de una curva como la propuesta por Cohn, y presentada en el reglamento. En esencia, la capacidad de redistribución puede ser aumentada o reducida sobre la base del diseño apropiado de las secciones que tomarán la diferencia de momentos inducida por la redistribución, o sea, la sección crítica positiva o central. Por otro lado, la interacción estructural que conduce al fenómeno de redistribución depende claramente de la ductilidad y por tanto de la capacidad de rotación de la articulación plástica.

b) Como consecuencia del punto anterior, es de observarse que la forma típica de la curva de redistribución de momentos depende en mayor medida de la relación $(\rho-\rho')/\rho$ y por tanto de la capacidad rotacional de las articulaciones plásticas, independientemente de la capacidad de momento de las secciones centrales. Mientras que el corrimiento o la posición de las curvas en el plano esta regida mayormente por la capacidad de las secciones centrales para resistir momentos.

c) La sensibilidad de la curva de redistribución de momentos a los cambios en la resistencia del acero o del concreto es muy evidente para una viga empotrada-articulada a raíz de una mayor solicitación sobre la articulación plástica en el extremo empotrado. Sin embargo, para una viga empotrada-empotrada se registra una variabilidad muy baja.
d) La sensibilidad de la redistribución a la variación de la relación ρ'/ρ para un valor constante de la relación ρ^c/ρ_b indica que contrario a lo esperado a partir de las curvas de ductilidad, el empleo de valores altos de la cuantía del acero a compresión sobre la sección crítica en la articulación plástica no mejora sino que daña la capacidad de redistribución.
e) La diferencia entre el comportamiento de la curva de rigidez en función del momento actuante sobre una sección de concreto obtenida de la curva momento-curvatura y entre la curva descrita por el modelo de Branson se puede interpretar como el efecto adicional inducido por el acoplamiento de las secciones en la vecindad de los planos de agrietamiento.

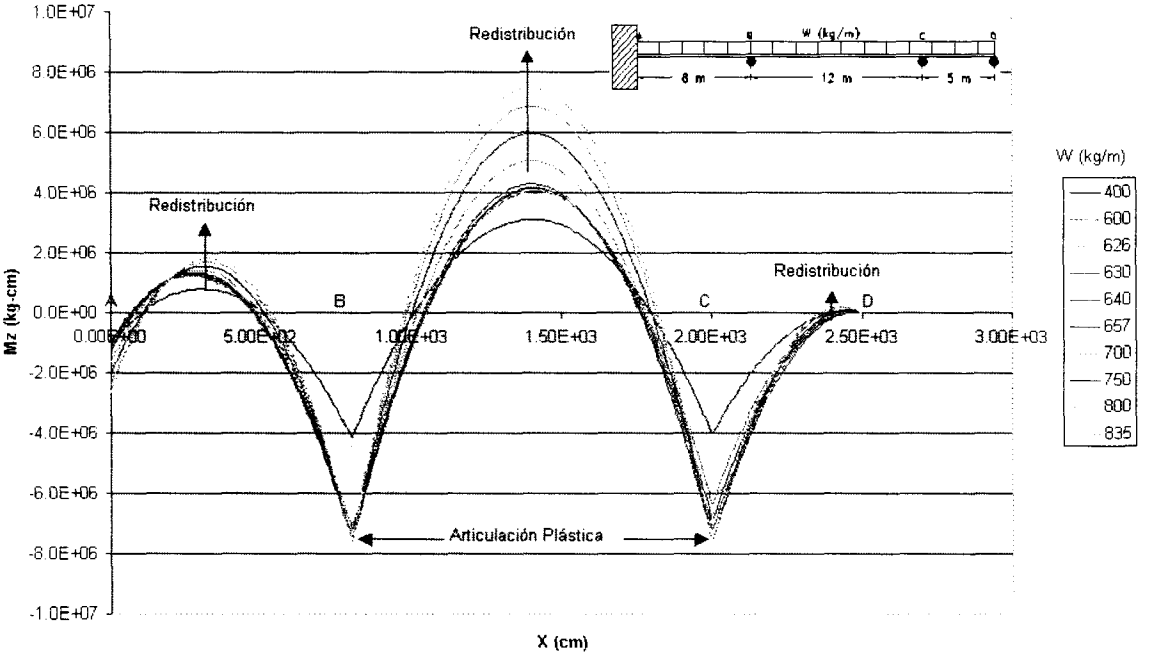
6.2. Recomendaciones

Como todo esfuerzo de investigación, el desarrollo así como los resultados representan un avance marginal, y por tanto requieren de una estructura consistente y con posibilidades de ser continuada a modo de permitir algún desarrollo posterior del tema objeto de estudio. Por lo que toca a este trabajo, enseguida se presentan las recomendaciones que los autores consideran como actividades viables a desarrollar para dar seguimiento al presente estudio:

a) El estudio sugiere una evaluación seria de los requerimientos para el acondicionamiento de la redistribución de momentos incluidos en el reglamento ACI318-95. Esto implica tomar en cuenta con mayor detalle los aspectos estructurales indicados en este estudio, así como las características del segmento de viga a diseñar incluyendo las condiciones de apoyo y la resistencia de las secciones más solicitadas por el fenómeno de redistribución de momentos. Esto podría conducir a un aumento de la redistribución permitida por el reglamento vigente imponiendo las consideraciones y requerimientos estructurales apropiados.
b) Los resultados obtenidos en el presente estudio deberán ser avalados por un estudio concienzudo basado en pruebas experimentales para determinar primero los comportamientos descritos así como los niveles numéricos sugeridos por los resultados.
c) El comportamiento de la capacidad de rotación de las articulaciones plásticas, así como el modelo de análisis de segundo orden propuesto, pueden ser empleados para la

evaluación de los niveles de redistribución reales en vigas continuas de varios claros, como se muestra en la figura 6.1 que corresponde a los resultados del análisis de segundo orden sobre una viga de tres claros obtenido de un programa que considera simplificaciones mecánico-estructurales importantes y que fue desarrollado como un esfuerzo preliminar al presente estudio.

Figura 6.1 Redistribución de momentos a partir del análisis de segundo orden empleando la ecuación de Branson



d) En otro orden, se sugiere llevar a cabo el análisis de segundo orden para la evaluación de la redistribución de momentos haciendo uso de paquetes computacionales basados en el Método del Elemento Finito, para ser contrastados con los resultados obtenidos de este estudio.

e) Un aspecto importante a evaluar como resultado de este estudio es la diferencia que muestran las curvas momento-rigidez de la sección, M-EI, es decir entre la curva basada en la gráfica momento-curvatura y la obtenida del modelo de Branson, pues según se menciona en la literatura, el modelo de Branson no es representativo del comportamiento real para casos típicos del diseño en concreto. Algunos sugieren que el exponente $m=3$ debe fluctuar entre un valor de 3 a un valor de 5, o incluso mayor, lo que implica valores más conservadores de la rigidez en la fase de agrietamiento. Esto cerraría un tanto la diferencia entre los comportamientos observados en este estudio, pero aún existiría una diferencia debido a los efectos causados por el acoplamiento de las secciones.

Capítulo 7

PROGRAMAS EMPLEADOS PARA LA SIMULACIÓN

Un aspecto muy importante del presente trabajo se refiere a la herramientas empleadas para las simulaciones y más importante, al desarrollo del *software* que nos ha colocado en este punto en el presente estudio. Gran parte del trabajo realizado en esta investigación tiene que ver con el esfuerzo de programación, pues es un requerimiento el que ésta refleje los resultados del planteamiento de la modelación matemática del fenómeno y de los procedimientos numéricos correspondientes según se ha descrito en capítulos anteriores. Cabe mencionar que gran parte del trabajo reflejado en esta tesis tiene que ver con el desarrollo de la programación necesaria.

En los siguientes apartados se describen los aspectos relacionados con las herramientas computacionales empleadas en el estudio, así como la descripción general del programa más significativo de los usados en las simulaciones.

7.1. Recursos computacionales empleados

La programación necesaria para este estudio fue desarrollada bajo el lenguaje Fortran 90/95, empleando el compilador Digital Visual Fortran 6.0. La especificación 90/95 corresponde a la revisión llevada a cabo por el ANSI para el lenguaje Fortran y que denota dos etapas de revisión cuyos resultados fueron publicados en el año de 1990 y de 1995. Este lenguaje en su última revisión ofrece una gran capacidad de programación acorde con los requerimientos de los lenguajes actuales. La definición y el manejo de los datos se ha convertido en un elemento crucial y poderoso del lenguaje. El uso de las estructuras de datos y de los elementos de programación permiten un desarrollo modular de fácil administración y mantenimiento. Adicionalmente, el lenguaje ha mejorado su capacidad para la manipulación numérica, permitiendo escribir programas bien estructurados y al mismo tiempo eficientes.

Un elemento importante de mencionar es el uso de las librerías numéricas IMSL en el desarrollo de los programas, principalmente en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y en el cálculo de modelos polinomiales ajustados a series de puntos para representar funciones que permitan determinar parámetros en un continuo, en lugar de hacerlo punto a punto con la consabida pérdida de precisión y eficiencia.

Otra de las herramientas empleadas en este trabajo es el programa para manejo de hojas de cálculo Microsoft Excel 2000, el cuál ha sido empleado como plataforma de cálculo en menor grado y también como principal paquete para la generación de gráficas, como lo demuestran las gráficas presentadas a lo largo de los capítulos anteriores.

7.2. Descripción general de los programas

La programación desarrollada para este estudio esta basada en una estructura modular que incluye la definición de interfases, rutinas y funciones que permiten programar cada módulo como una tarea específica, en una descomposición descendente de lo más general a lo más particular a la tarea, permitiendo que cada componente atienda los aspectos relevantes a la ejecución de su tarea sin considerar efectos o interacciones mas allá de su alcance. Esto permite aislar cada módulo por tareas específicas para luego llevar a cabo un proceso de ensamblado que permita cumplir la función del programa como un todo a partir de la prueba a conciencia de cada elemento. Además, esta forma de estructurar la programación permite una lectura y comprensión de la lógica del programa que resulta más fácil que para una estructura no modular, permitiendo la reutilización conveniente de la programación, aspecto que resulta importante para una investigación como esta.

En el apéndice, al final de este volumen se presenta el listado del programa que se utilizó para la *simulación de la redistribución de momentos*. A partir de este programa es fácil escribir códigos fuente para calcular y graficar la curva momento-curvatura, así como las curvas de ductilidad, e incluso las rutinas pueden ser usadas para incluirse en programas de diseño.

Referencias

1. Branson, Dan E., *Instantaneous and Time-Dependent Deflections of Simple and Continuous Reinforced Concrete Beams, HPR Report No. 7*, Part 1, Alabama Highway Department/U.S. Bureau of Public Roads, Agosto. 1963 (1965), p. 78

2. Branson, Dan E., *Deformation of Concrete Structures*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1977, p.546

3. Branson, Dan E. y Trost, Heinrich, *Unified Procedures for Predicting the Deflection and Centroidal Axis Location of Partially Cracked Nonprestressed and Prestressed Concrete Members*, ACI Journal, Proceedings V. 79, No. 2, Marzo-Abril 1982, p. 119-130

4. Bazant, Zdenek P. y Oh, Byung H., *Deformation of Progressively Cracking Reinforced Concrete Beams*, ACI Journal, Proceedings V. 81, No. 3, Mayo-Junio 1984, pp. 268-278

5. Resheidat, Musa R., *Deflections of Reinforced Concrete Slabs*, Deflections of Concrete Structures, SP-86, ACI Detroit, 1985, p. 407-418

6. Alwis, W.A.M., *Trilinear Moment-Curvature Relationship for Reinforced Concrete Beams*, ACI Structural Journal, V. 87, No. 3, Mayo-Junio 1990, p. 276-283

7. Al-Zaid, Rajeh Z., Al-Shaikh, Abdulrahman H. y Abu-Hussein, Mustafa M., *Effect of Loading Type on the Effective Moment of Inertia of Reinforced Concrete Beams*, ACI Structural Journal, V. 88, No. 2, Marzo-Abril 1991, p. 184-190

8. Al-Shaikh, Abdulrahman H. y Al-Zaid, Rajeh Z., *Effect of Reinforcement Ratio on the Effective Moment of Inertia of Reinforced Concrete Beams*, ACI Journal, V. 90, No. 2, Marzo-Abril 1993, p. 144-149

9. Fikry, Abdullah M. y Thomas Cledwyn, *Development of a Model for the Effective Moment of Inertia of One-Way Reinforced Concrete Beams*, ACI Structural Journal, V. 95, No. 4, Julio-Agosto 1998, p. 444-455

10. Gilbert, R. Ian, *Deflection Calculation for Reinforced Concrete Structures-Why We Sometimes Get It Wrong*, ACI Structural Journal, V. 96, No. 6, Noviembre-Diciembre 1999, p. 1027-1032

11. Mukai, David J., *Efficient Representation of Concrete Constitutive Data for Moment Capacity Calculations*, ACI Structural Journal, V. 96, No. 5, Septiembre-Octubre 1999, p. 720-727

12. Ibrahim, H. H. H. y MacGregor, J. G., *Tests of Eccentrically Loaded High-Strength Concrete Columns*, ACI Journal, V. 93, No. 5, Septiembre-Octubre 1996, p. 585-594

13. González, Oscar M. y Robles, Francisco, *Aspectos Fundamentales del Concreto Reforzado, Tercera Edición,* Editorial LIMUSA, 1997, p. 124

14. ACI-ASCE Committee 428, *Progress Report on Code Clauses for Limit Design*, ACI Journal, V. 65, No. 9, Septiembre 1968, p. 713-720

15. Mattock, A. H., *Redistribution of Bending Design Moments in Reinforced Concrete Continuous Beams*, *Proceedings*, Institution of Civil Engineers, London, V. 13, 1959, p. 35-46

16. Cohn, M. Z., *Rotational Compatibility in the Limit Design of Reinforced Concrete Continuous Beams*, Flexural Mechanics of Reinforced Concrete (SP-12), ACI / ASCE, Detroit, 1965, p. 359-382

17. Carneiro, F.L.L., *Analysis of Redundant Reinforced Concrete Structures in the Plastic Range*, Estructura, Brasil, No. 31, 1960, p. 386-430

18. Hangan, M.D., *Order of Apparition and Rotation of Plastic Hinges in Structures Acted Simultaneously by Permanent and Proporcionally Increasing Loads*, Studii si Cercetari de Macanica Aplicata, Bucarest, V. 11, No. 6, 1960, p. 1445-1457

19. Cohn, M. Z., *Inelasticity of Reinforced Concrete and Structural Standards*, Journal of the Structural Division, ASCE, Noviembre 1979, p. 2221-2241

20. Cohn, M. Z. y Riva Paolo, Journal of Structural Engineering, V. 118, No. 2, Febrero 1992, p. 447-468

21. Scholz, H., *Contribution to Redistribution of Moments in Continuous Reinforced Concrete Beams*, ACI Journal, V. 90, No. 2, Marzo-Abril 1993, p. 150-155

22. Scholz, H. y da Silva, J., *Ultimate Strength of Partially Prestressed Members – Experimental Work*, Proceedings, International Symposium on Modern Applications of Prestressed Concrete, Beijing, Septiembre 1991, V. 2, p. 180-187

23. Campbell, T. I. y Moucessian, A., *Prediction of the Load Capacity of Two-Span Continuous Prestressed Concrete Beams*, PCI Journal, V. 33, No. 2, Marzo-Abril 1988, p. 130-151

24. Scholz, H., *Discussion of Paper: Ductility, Redistribution and Hyperstatic Moments in Partially Prestressed Members*, ACI Structural Journal, V. 88, No. 2, Marzo-Abril 1991, p. 241-246

25. Lopes, Sergio M. R., Harrop, J. y Gamble, A. E., *Study of Moment Redistribution in Prestressed Concrete Beams*, Journal of Structural Engineering, ASCE New York, V. 123, No. 5, Mayo 1997, p. 561-566

26. Tíchy, M. y Rákosník, J., *Plastic Analysis of Concrete Frames (with particular reference to limit states design)*. Collet (Publishers) Ltd., Londres, 1977

27. Hognestad, E., *A study of Combined Bending and Axial Load in reinforced Concrete Members*, University of Illinois Engineering Experimental Station, Serie de Boletín No. 399, Noviembre 1951, p. 128

28. Mattock, A. H., Kriz, L. B., y Hognestad, E., *Rectangular Concrete Stress Distribution in Ultimate Strength Design*, ACI Journal, V. 32, No. 8, 1961, p. 875-928

29. Kassimalli, A., *Matrix Analysis of Structures*, Brooks-Cole, Pacific Grove, CA, 1999

30. Park, R. y Paulay, T., *Reinforced Concrete Structures*, Wiley-Inter-Science, Nueva York, 1975

31. Hassoun, M. N. y Mamlouk, M. S., *Structural Concrete: Theory and Design*, Addison-Wesley Pub Co., 1998

32. Leet, K. M. y Bernal, D., *Reinforced concrete design: conforms to 1995 ACI codes*, McGraw-Hill Co., New York, 1997

33. Collins, M. P. y Mitchell, D., *Prestressed Concrete Structures*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1991

34. MacGregor, J. G., *Reinforced Concrete Mechanics and Design*, 3rd. Edition, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1996

35. Nilson, A. H. y Winter, G., *Design of Concrete Structures*, 11th Edition, McGraw-Hill, New York, 1994

36. Beaufait, F. W., *Basic Concepts of Structural Analysis,* Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1977

37. Gere, J. M. y W. Weaver Jr., *Analysis of Framed Structures*, Van Nostrand Co., Princeton, N.J., 1965

38. Boresi, A. P. y Sidebottom, O. M., *Advanced Mechanics of Materials*, Wiley, New York, 1985

39. *Reglamento para las Construcciones de Concreto Estructural y Comentarios (Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI318-95) and Commentary (ACI-318R-95), American Concrete Institute),* Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto, A.C., 1997

40. Beaufait, F. W., Rowan, W. H. Jr., Hoadley, P. G., Hackett, R. M., *Computer Methods of Structural Analysis*, Dept. of Civil Eng., Vanderbilt University, Nashville, Tennessee, 1975

41. Harrison, H.B., *Computer Methods in Structural Analysis*, Prentica-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1973

Apéndice

Programa para la simulación y determinación de la Redistribución de Momentos

```
MODULE Global
  IMPLICIT NONE
  SAVE

  INTEGER,PARAMETER:: NCRig=3,NFz=2,Nseg=2,Npi=3,NDEG=10,NOBS=100,CS=14,NPTOS=50
  LOGICAL,PARAMETER:: Graf=.TRUE.,NoGraf=.FALSE.,InSec=.TRUE.,NoInSec=.FALSE.
  REAL*8, PARAMETER:: Ecu=0.003,FRed=0.962988,Es=2.04E+6,dlc=0.,CERO=0.,FMues=1.0,FacDis=0.75

  TYPE::SecT
    REAL*8:: b,h,d,dp,As,Aps,Igt,Icr,Mcr
    REAL*8:: My, Mu, Mmax, Phiy, Phiu, Phimax, Ecy, Ecu
    REAL*8:: A(NDEG+1),Phi(NPTOS),Mi(NPTOS)
  END TYPE SecT

  TYPE(SecT)::SecPos,SecNeg

  INTEGER:: Ns
  REAL*8:: L,b,h,de,dpe,d_h,DeltaSeg
  REAL*8:: Fpc,Fy,Ec,Ey,Esu,Ecr,Eco,Asb,ApseAse,AscAsb,ApscAsc,Art
! Fpc: Esfuerzo máximo del concreto
! Fy:  Esfuerzo de fluencia del acero
! Ec:  Deformación de control en la fibra extrema de concreto
! Ey : Deformación de fluencia en el acero
! Ecu: Deformación última en el concreto
! Esu: Deformación última en el acero en la zona de fluencia (relación bilineal)
! Ecr: Deformación de ruptura del concreto
! Eco: Deformación correspondiente al esfuerzo máximo del concreto

  CHARACTER(20)::ArchE,A_RE,A_WM,A_LP,A_RO
  CHARACTER(2):: SFc,SFy,SAscAsb
  CHARACTER(80)::Str

END MODULE Global

PROGRAM GrafRed
USE Global
IMPLICIT NONE

INTEGER::Sta,I,K,N,M,NCeros,II
INTEGER::Falla1,Falla2,No,Narg,NARGS,Err,StrToInt
REAL*8:: W,dW,Mp,Fi,Fs,fM,Wa,Wp,Fa,Fp,Calc_W,Fx,Wy,Wi,DeltaT,TIMEF,Mi,EI,My,Mu,fW,dM
REAL*8:: C,Fxbal,Asc,Apsc,Ase,Apse,Robc,ROb,RelRo,FAP,Func,B1,Fpps
REAL*8:: Xi,Md,Ma,c_d,Mc,pcRed_Wy,pcRed_My,pcRed_Wu,pcRed_Mu
REAL*8:: As,dAs,FMto,EIe,SEIe,Mcy,Mcu,Wu,Ca,Cb,Cc,Lp,CapRot,ValAscAsb(3),Xmax
REAL*8,DIMENSION(NFz):: Fzi
CHARACTER(2):: TV

 Narg=NARGS()
 IF (Narg.NE.5) THEN
```

```
  WRITE(*,*) 'Error en los argumentos del programa ...'
  STOP
ELSE
  CALL GETARG(1,ArchE,Err)
  CALL GETARG(2,SFc,Err)
  CALL GETARG(3,SFy,Err)
  CALL GETARG(4,SAscAsb,Err)
ENDIF

Fpc=StrToInt(2,SFc)*10.
Fy =StrToInt(2,SFy)*100.
AscAsb=StrToInt(2,SAscAsb)/100.

DATA ValAscAsb /0.25, 0.5, 0.75/
OPEN(1,FILE=ArchE)
CALL Lectura(Sta)
CLOSE(1)

! INICIALIZACION DE CONSTANTES PARA ANALISIS
  Ec=15100*SQRT(Fpc); Ey=-Fy/Es; Esu=12*Fy/Es; Ecr=-2*SQRT(Fpc)/Ec; Eco=2.*Fpc/Ec
! Inicialización del registro
  SecPos%b=b; SecPos%h=h; SecPos%d=de; SecPos%dp=dpe; SecPos%As=0.; SecPos%Aps=0.
  SecNeg%b=b; SecNeg%h=h; SecNeg%d=de; SecNeg%dp=dpe; SecNeg%As=0.; SecNeg%Aps=0.
! Calculo de la Ro balanceada
  C=Ecu/(Ecu-Ey)*de
  Fxbal=Fx(SecPos,C,Ecu,dlc,Fpps)
  Asb=Fxbal/Fy
  ROb=Asb/b/de
  Robc=0.85*B1(Fpc)*Fpc*6100/Fy/(Fy+6100)

IF (Sta==0) THEN

 IF (Art==0) TV='EE'
 IF (Art==1) TV='EA'
 A_RE='RE'//SFc//SFy//SAscAsb//TV//'.txt'
 A_WM='WM'//SFc//SFy//SAscAsb//TV//'.txt'
 A_LP='LP'//SFc//SFy//SAscAsb//TV//'.txt'
 A_RO='RO'//SFc//SFy//SAscAsb//TV//'.txt'

 OPEN(2,FILE=A_RE)
 OPEN(3,FILE=A_WM)
 OPEN(4,FILE=A_LP)
 OPEN(5,FILE=A_RO)
 OPEN(6,FILE='Err.txt')

 write(*,*)
 write(*,*) 'AscAsb=',AscAsb
 write(*,*)
 write(2,*)
 write(2,'(3(1X,E17.10),2X,A)')  Fpc,Fy,AscAsb,TV
 write(2,*)
 write(3,*)
 write(3,'(3(1X,E17.10),2X,A)')  Fpc,Fy,AscAsb,TV
 write(3,*)
 write(4,*)
 write(4,'(3(1X,E17.10),2X,A)')  Fpc,Fy,AscAsb,TV
 write(4,*)
 write(5,*)
 write(5,'(3(1X,E17.10),2X,A)')  Fpc,Fy,AscAsb,TV
 write(5,*)

! Inicialización de área de acero en sección positiva
 Asc=AscAsb*Asb
 Apse=0.
 Apsc=0.
! Inicialización de sección positiva
 SecPos%As=Asc ; SecPos%Aps=Apsc
 CALL IniSec(SecPos,Fpps)
 DeltaT=TIMEF()
 DO n=5,90,5
! Inicializacion de área de acero en sección negativa
```

```
  Ase=n/100.*Asb
  SecNeg%As=Ase ; SecNeg%Aps=Apse
  CALL IniSec(SecNeg,Fpps)
  My=SecNeg%My
  Mu=SecNeg%Mmax
  write(*,'(A12,F6.2)') 'Para As/Asb=',n/100.
  write(3,*)
  write(3,'(A12,F6.2)') 'Para As/Asb=',n/100.
  write(3,*)
  write(3,'(5(1X,E17.10))') 0.0,0.0,0.0,My,Mu
  Mi=0. ; dM=My/10.
  DO K=1,10
    Mi=Mi+dM
    Fzi(1)= Mi
    Fzi(2)=-Mi
    IF (Art==1) Fzi(2)=0.
    Wi=0.
    Wi=Calc_W(Wi,Fzi)
    IF (Art==1) THEN
     Xmax=L/2.-(Fzi(1)+Fzi(2))/Wi/L
     Mc=(Fzi(1)*(Xmax-L)+Fzi(2)*Xmax)/L+Wi*Xmax*(Xmax-L)/2.
    ELSE
     Mc=-Wi*L**2./8.-Mi
    ENDIF
    write(3,'(5(1X,E17.10))') -Wi,Mi,Mc,My,Mu
  ENDDO
  Wy=-Wi
  Mcy=Mc
  write(*,*) 'Wy=',Wy
  Mi=My ; dM=(Mu-My)/10.
  DO K=1,9
    Mi=Mi+dM
    Fzi(1)= Mi
    Fzi(2)=-Mi
    IF (Art==1) Fzi(2)=0.
    Wi=0.
    Wi=Calc_W(Wi,Fzi)
    IF (Art==1) THEN
     Xmax=L/2.-(Fzi(1)+Fzi(2))/Wi/L
     Mc=(Fzi(1)*(Xmax-L)+Fzi(2)*Xmax)/L+Wi*Xmax*(Xmax-L)/2.
    ELSE
     Mc=-Wi*L**2./8.-Mi
    ENDIF
    write(3,'(5(1X,E17.10))') -Wi,Mi,Mc,My,Mu
  ENDDO
  Mi=Mu
  Fzi(1)= Mi
  Fzi(2)=-Mi
  IF (Art==1) Fzi(2)=0.
  Wi=0.
  Wi=Calc_W(Wi,Fzi)
  IF (Art==1) THEN
    Xmax=L/2.-(Fzi(1)+Fzi(2))/Wi/L
    Mc=(Fzi(1)*(Xmax-L)+Fzi(2)*Xmax)/L+Wi*Xmax*(Xmax-L)/2.
  ELSE
    Mc=-Wi*L**2./8.-Mi
  ENDIF
  write(3,'(5(1X,E17.10))') -Wi,Mi,Mc,My,Mu
  Wu=-Wi
  Mcu=Mc
  write(*,*) 'Wu=',Wu
  pcRed_Wu=abs((Wu-Wy)/Wu)*100.
  RelRo=(Ase-Apse)/Asb
  write(2,'(4(1X,E17.10))') pcRed_Wu,RelRo

! Calculo de Lp
  Ca=-Wu/2.
  Cb=(Fzi(1)+Fzi(2))/L+Wu*L/2.
  Cc=-Fzi(1)+My
  Lp=(-Cb+DSQRT(Cb*Cb-4*Ca*Cc))/Ca/2.
  write(4,'(4(1X,E17.10))') Lp,RelRo
```

```
! Calculo de la Capacidad de rotación
   dM=Mu-My
   CapRot=0.
   DO I=1,(NPTOS-1)
      CapRot=CapRot+(SecNeg%Mi(I+1)-
      SecNeg%Mi(I))*Lp/dM*((SecNeg%Phi(I)+SecNeg%Phi(I+1))/2.-SecNeg%Phiy)
   ENDDO
   write(5,'(4(1X,E17.10))') CapRot,RelRo

  ENDDO
  DeltaT=TIMEF()
  write(*,*) 'Tiempo de ejecucion:',DeltaT
  CLOSE(2)
  CLOSE(3)
  CLOSE(4)
  CLOSE(5)
  CLOSE(6)
  CALL Beeper()
 ELSE
  WRITE(*,*) 'No fue posible leer los datos de entrada ...'
 ENDIF
END

REAL*8 FUNCTION Calc_W(W,Fzi)
USE Global
IMPLICIT NONE
INTEGER,PARAMETER:: MaxDiv=100
REAL*8:: W,dW,Wi,Wc,Ws,Fi,Fc,Fs,FAP,Sec_FAP
REAL*8,DIMENSION(NFz):: Fzi
INTEGER:: Div

   Div=1
   dW=-1.
   Wi=W
   Fi=FAP(Wi,Fzi,NoGraf)
   DO WHILE (.TRUE.)
    Ws=Wi+dW
    Fs=FAP(Ws,Fzi,NoGraf)
    IF (Fi*Fs <= 0.) THEN
       IF (Div == MaxDiv) THEN
        Calc_W=Ws-Fs*(Wi-Ws)/(Fi-Fs)
        RETURN
       ENDIF
       Div=Div*10
       dW=dW/Div
    ELSE
      Wi=Ws
      Fi=Fs
    ENDIF
   ENDDO
END

SUBROUTINE Beeper()
USE DFLIB
INTEGER(4):: frequency, duration,I

    frequency = 1000
    duration  = 1000
    DO I=1,2
      CALL BEEPQQ(frequency, duration)
    ENDDO
   RETURN
END

REAL*8 function Sec_FAP(Xi,Xj,Fzi)
USE Global
IMPLICIT NONE
TYPE(SecT):: S
REAL*8:: Xi,Xj,M,Xk,TOL,Fi,Fj,FAP
REAL*8,DIMENSION(NFz)::Fzi
```

```
INTEGER:: N,I

   N=100
   TOL=0.5E-2
    Fi=FAP(Xi,Fzi,NoGraf)
    do I=1,N
!    write(*,*) 'Sec_FAP: W=',Xi,' M=',Fi
      Fj=FAP(Xj,Fzi,NoGraf)
     if ((Fi-Fj)/=0.0) then
        Xk=Xj-Fj*(Xi-Xj)/(Fi-Fj)
     else
       exit
     endif
      if (ABS((Xk-Xj)/Xk*100) < TOL) exit
      Xi=Xj
      Xj=Xk
     Fi=Fj
    enddo
   if (I > N) then
     write(*,*) 'SEC_FAP: se excedio el numero de ciclos'
     Sec_FAP=Xk
   else
     Sec_FAP=Xk
   endif
    RETURN
END

SUBROUTINE Lectura(St)
USE Global
IMPLICIT NONE
INTEGER::St

   St=0
   READ(1,*,IOSTAT=St) Str
   READ(1,'(/)',IOSTAT=St)
   READ(1,*,IOSTAT=St) b,h,L,d_h,Ns,Art
   DeltaSeg=L/Ns
   de=d_h*h
   dpe=(1.-d_h)*h
END

REAL*8 FUNCTION FAP(W,Fzi,Grafica)
USE Global
IMPLICIT NONE
INTEGER::I
LOGICAL:: Grafica
REAL*8::W,Dxi,Xi,CF1,CF2,CF3,f11,f12,f22,EIs,SEIe,FE1,FE2,DET,Ma,Mi,Md,CR
REAL*8,DIMENSION(NCRig)::CRig
REAL*8,DIMENSION(NFz)::Fzi,Fep

   Dxi=L/Ns
   f11=0.0; f12=0.0; f22=0.0; FE1=0.0; FE2=0.0
   Mi=Fzi(1)
   Md=Fzi(2)
   IF (Grafica) THEN
    write(4,*)
     write(4,*) 'Para W =',W
    write(4,*)
   ENDIF
   DO I=0,Ns
     Xi=I*DeltaSeg
     IF ((I==0).OR.(I==Ns)) Dxi=Dxi/2.
     CF1=Xi/L
     CF2=CF1-1.0
     CF3=W*Xi*(L-Xi)/2.0
     Ma=(Mi*(Xi-L)+Md*Xi)/L+W*Xi*(Xi-L)/2.
     IF (Ma>=0.) THEN
      EIs=SEIe(SecPos,Ma)
       IF (Ma > SecPos%My) EIs=1.
     ELSE
      EIs=SEIe(SecNeg,Ma)
```

```
    ENDIF
     IF (Grafica) write(4,'(3(2X,E20.10))') I*DeltaSeg,EIs,Ma*1.E5
     f11=f11+CF2*CF2*Dxi/EIs
     f12=f12+CF1*CF2*Dxi/EIs
     f22=f22+CF1*CF1*Dxi/EIs
     FE1=FE1+CF2*CF3*Dxi/EIs
     FE2=FE2+CF1*CF3*Dxi/EIs
    IF (I==0) Dxi=2.*Dxi
   ENDDO
   DET=f11*f22-f12*f12
   CRig(1) = f22/DET
   CRig(2) =-f12/DET
   CRig(3) = f11/DET
   Fep(1) = (CRig(1)*FE1+CRig(2)*FE2)
   Fep(2) = (CRig(2)*FE1+CRig(3)*FE2)
   CR=0.
   IF (Md == 0.) CR=CRig(2)/CRig(3)
   FAP=Fzi(1)-(1.+CR)*Fep(1)
 RETURN
END

REAL*8 FUNCTION SEIe(St,Ma)
USE Global
IMPLICIT NONE
TYPE (SecT)::St
REAL*8:: Ma,Mapos,M,Ie,Phi,Calc_Phi,df

 Mapos=ABS(Ma)
 IF (Mapos<=St%My) THEN
   M=St%Mcr/Mapos
   Ie=(St%Igt-St%Icr)*M**3.+St%Icr
   IF (Ie>St%Igt) Ie=St%Igt
   SEIe=Ec*Ie
 ELSE
   Phi=Calc_Phi(St,Mapos)
   IF (Phi == 0.) THEN
     SEIe=0.
   ELSE
     SEIe=df(St%A,Phi)
   ENDIF
 ENDIF
 IF (SEIe < 1.) SEIe=1.
RETURN
END

REAL*8 FUNCTION Fc(E)
USE Global
IMPLICIT NONE
REAL*8:: E

   IF ((E > 0.0).and.(E <= Ecu)) THEN
     Fc=Fpc*(2.*E/Eco-(E/Eco)**2.)
   ELSE
     Fc=0.0
   ENDIF
 RETURN
END

REAL*8 FUNCTION Fs(E)
USE Global
IMPLICIT NONE
REAL*8:: E

   IF (ABS(E)<(Fy/Es)) THEN
     Fs=E*Es
   ELSE
     Fs=ABS(E)/E*Fy
   ENDIF
 RETURN
END
```

```
REAL*8 function Fx(S,C,Ep,di,Fps)
USE Global
IMPLICIT NONE
TYPE(SecT):: S
REAL*8:: C,Ep,di,Fps,Ct,PhiC,E,Fc,Fs,dcr,As,Aps,d,dp

  As=S%As;Aps=S%Aps;d=S%d;dp=S%dp
  Fps=Fy

  PhiC=Ep/(C-di)
  dcr=(C*Ep-(C-di)*Ecr)/Ep
  if (dcr>h) dcr=h
  Ct=dcr-C
  Fx=b*Fpc*((PhiC*C**2./Eco-(PhiC/Eco)**2.*C**3./3)-(PhiC*Ct**2./Eco-
     (PhiC/Eco)**2.*Ct**3./3.))
  E=Ep*(C-dp)/(C-di)
  Fps=0.
  if (Aps > 0.) Fps=Fs(E)
  Fx=Fx+(Fps-Fc(E))*Aps
  E=Ep*(C-d)/(C-di)
  Fx=Fx+Fs(E)*As
  IF (Fps > Fy) Fps=Fy
 RETURN
END

REAL*8 function SMn(S,Ep,di,C,E)
USE Global
IMPLICIT NONE
TYPE(SecT):: S
REAL*8:: C,Ep,di,Ct,PhiC,E,Fc,Fs,SFcx,Q,r,dcr,Calc_C,As,Aps,d,dp

  As=S%As;Aps=S%Aps;d=S%d;dp=S%dp
  C=Calc_C(S,Ep,di)
  if (C <= 0.0) then
    write(*,*) 'SMn: C es menor o igual a CERO'
    C=0.
    return
  endif

  PhiC=Ep/(C-di)
  dcr=(C*Ep-(C-di)*Ecr)/Ep
  if (dcr>S%h) dcr=S%h
  Ct=dcr-C
  SFcx= S%b*Fpc*(PhiC*C**2./Eco-(PhiC/Eco)**2.*C**3./3.)
  Q= S%b*Fpc*(2.*PhiC*C**3./Eco/3.-(PhiC/Eco)**2.*C**4./4.)
  r=Q/SFcx
  SMn=SFcx*(C-r)
  SFcx=-S%b*Fpc*(PhiC*Ct**2./Eco-(PhiC/Eco)**2.*Ct**3./3.)
  Q=-S%b*Fpc*(2.*PhiC*Ct**3./Eco/3.-(PhiC/Eco)**2.*Ct**4./4.)
  r=Q/SFcx
  SMn=SMn+SFcx*(C+r)
  E=Ep*(C-dp)/(C-di)
  SMn=SMn+(Fs(E)-Fc(E))*Aps*dp
  E=Ep*(C-d)/(C-di)
  SMn=SMn+Fs(E)*As*d
  E=Ep*C/(C-di)
  SMn=-SMn
 return
end

REAL*8 function Calc_C(S,Ep,di)
USE Global
IMPLICIT NONE
TYPE(SecT):: S
REAL*8:: Ep,di,C,Cant,Fant,Fact,Fx,SECFx,Dy,Fps

    Dy=S%h/1000.
    C=Dy
   Cant=C
   Fant=Fx(S,C,Ep,di,Fps)
   do while (C > 0.0)
```

```
      C=C+Dy
      Fact=Fx(S,C,Ep,di,Fps)
      if (Fant*Fact <= 0.0) then
        C=SECFx(S,Cant,C,Ep,di)
        exit
      else
        Cant=C
        Fant=Fact
      endif
    enddo
    if (C <= 0.0) then
      write(*,*) 'Calc_C: Se ha excedido el no. de ciclos'
      Calc_C=0.0
    else
      Calc_C=C
    endif
    return
end

REAL*8 function SECFx(S,Xi,Xj,Ep,di)
USE Global
IMPLICIT NONE
TYPE(SecT):: S
REAL*8:: Xi,Xj,Ep,di,Xk,TOL,Fi,Fj,Fx,Fps
INTEGER:: N,I

    N=100000
    TOL=0.5E-4
     Fi=Fx(S,Xi,Ep,di,Fps)
     do I=1,N
       Fj=Fx(S,Xj,Ep,di,Fps)
      if ((Fi-Fj)/=0.0) then
         Xk=Xj-Fj*(Xi-Xj)/(Fi-Fj)
      else
        exit
      endif
       if (ABS((Xk-Xj)/Xk*100) < TOL) exit
       Xi=Xj
       Xj=Xk
      Fi=Fj
     enddo
    if (I > N) then
      write(*,*) 'SECFx: se excedio el numero de ciclos'
      SECFx=0.0
    else
      SECFx=Xk
    endif
     RETURN
END

SUBROUTINE IniSec(Stp,Fpps)
USE Global
USE Numerical_Libraries
IMPLICIT NONE
TYPE(SecT):: Stp
REAL*8:: X(NOBS),Y(NOBS),SSPOLY(NDEG+1),STAT(10)
REAL*8:: f,df,f1,Phimax,Fp,Fa,dfp,dfa,Sec_df
REAL*8:: SMn,Fx,C,Ecomp,Fxu,Fpps,E,IncE,Igt,Icr,Mcr,InM,SEIe,IncM
INTEGER:: I

  IF (Stp%As > 0.) THEN
    CALL CalcIgtIcr(Stp,Igt,Icr,Mcr)
    Stp%Igt=Igt; Stp%Icr=Icr; Stp%Mcr=Mcr
    Stp%My=SMn(Stp,Ey,Stp%d,C,Ecomp)
    Stp%Ecy=Ecomp
    Stp%Phiy=Ecomp/C
    Stp%Mu=SMn(Stp,Ecu,dlc,C,Ecomp)
    Fxu=Fx(Stp,C,Ecu,dlc,Fpps)
    Stp%Ecu=Ecomp
    Stp%Phiu=Ecomp/C
    X(1)=Stp%Phiy; Y(1)=Stp%My
```

```
   IncE=(Stp%Ecu-Stp%Ecy)/(NOBS-1)
   E=Stp%Ecy
   DO I=2,(NOBS-1)
     E=E+IncE
     Y(I)=SMn(Stp,E,dlc,C,Ecomp)
     X(I)=Ecomp/C
   ENDDO
   X(NOBS)=Stp%Phiu; Y(NOBS)=Stp%Mu
   CALL DRCURV(NOBS,X,Y,NDEG,Stp%A,SSPOLY,STAT)
   Phimax=0.
   Fp=X(NOBS)
   dfp=df(Stp%A,Fp)
   IncE=1.E-10
   DO WHILE ((Fp-IncE)>=X(1))
     Fa=Fp-IncE
     dfa=df(Stp%A,Fa)
    IF (dfp*dfa < 0.) THEN
       Phimax=Fa
      EXIT
    ENDIF
    Fp=Fa
    dfp=dfa
   ENDDO
   IF (Phimax <> 0.) THEN
     Stp%Mmax=f(Stp%A,Phimax)
     Stp%Phimax=Phimax
   ELSE
     Stp%Mmax=f(Stp%A,X(NOBS))
     Stp%Phimax=X(NOBS)
   ENDIF
   Stp%Phi(1)=Stp%Phiy
   Stp%Mi(1)=f(Stp%A,Stp%Phiy)
   Stp%My=Stp%Mi(1)
   IncE=(Stp%Phimax-Stp%Phiy)/(NPTOS-1)
   DO I=2,NPTOS-1
     Stp%Phi(I)=Stp%Phi(I-1)+IncE
     Stp%Mi(I)=f(Stp%A,Stp%Phi(I))
   ENDDO
   Stp%Phi(NPTOS)=Stp%Phimax
   Stp%Mi(NPTOS)=Stp%Mmax
 ENDIF
100 FORMAT(4(E24.16,2X))
END

REAL*8 FUNCTION Sec_df(Stp,X1,X2)
USE Global
IMPLICIT NONE
TYPE(SecT):: Stp
REAL*8:: X1,X2,df,Xi,Xj,Xk,Esp,Fi,Fj
INTEGER N,I

 N=100
 Esp=0.5*10.**(2.-CS)
 Xi=X1
 Xj=X2
 Fi=df(Stp%A,Xi)
 DO I=1,N
   Fj=df(Stp%A,Xj)
   Sec_df=Xj-Fj*(Xi-Xj)/(Fi-Fj)
   IF (ABS((Sec_df-Xj)/Sec_df).LT.Esp) EXIT
   Xi=Xj
   Xj=Sec_df
   Fi=Fj
 ENDDO
RETURN
END

real*8 function f(A,Xi)
use GLOBAL
implicit none
integer:: I
```

```
real*8:: A(NDEG+1),Xi,prod

  prod=1.
  f=A(1)
  do I=2,NDEG+1
    prod=prod*Xi
   f=f+A(I)*prod
  enddo
return
end

real*8 function df(A,Xi)
use GLOBAL
implicit none
integer:: I
real*8:: A(NDEG+1),Xi,prod

  prod=1.
  df=A(2)
  do I=3,NDEG+1
    prod=prod*Xi
   df=df+(I-1)*A(I)*prod
  enddo
return
end

REAL*8 FUNCTION Calc_Phi(St,M)
USE Global
IMPLICIT NONE
TYPE(SecT):: St
REAL*8:: M,Inc,Phip,Phia,Fp,Fa
REAL*8:: Mi(NPTOS),Phi(NPTOS)
INTEGER:: I

 Calc_Phi=0.
 IF (St%Mi(1) < M .AND. M <= St%Mi(NPTOS)) THEN
  DO I=2,NPTOS
   IF ( St%Mi(I-1) < M .AND. M <= St%Mi(I) ) THEN
     IF ( M == St%Mi(I) ) THEN
       Calc_Phi=St%Phi(I)
     ELSE
       Calc_Phi=St%Phi(I-1)+(M-St%Mi(I-1))*(St%Phi(I)-St%Phi(I-1))/(St%Mi(I)-St%Mi(I-1))
     ENDIF
     EXIT
   ENDIF
  ENDDO
 ENDIF
RETURN
END

REAL*8 FUNCTION Mcr(S,Igt,Icr,Ycr)
USE Global
IMPLICIT NONE
TYPE(SecT)::S
REAL*8:: Igt,Icr
REAL*8:: n,Ycr,Ygt,C2,C3
REAL*8:: Asc,Ast,dc,dt,bb,hh

  Asc=S%Aps; Ast=S%As
  dc=S%dp; dt=S%d; bb=S%b; hh=S%h

  n = Es/Ec
  Ygt = (bb*hh**2./2.+(n-1)*(Ast*dt+Asc*dc))/(bb*hh+(n-1)*(Ast+Asc))
  Igt = bb*hh**3./12.+bb*hh*(Ygt-hh/2.)**2.+(n-1)*(Ast*(Ygt-dt)**2.+Asc*(Ygt-dc)**2.)
  Mcr= 2*SQRT(Fpc)*Igt/(hh-Ygt)
  C2 = n*Ast+(n-1)*Asc
  C3 = (n-1)*Asc*dc+n*Ast*dt
  Ycr = (SQRT(C2**2.+2*b*C3)-C2)/bb
  Icr = bb*Ycr**3./3+n*Ast*(Ycr-dt)**2.+(n-1)*Asc*(Ycr-dc)**2.
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE EscSecT(S)
USE Global
IMPLICIT NONE
TYPE (SecT):: S

   write(*,*) 'S:b h d dp As Aps'
   write(*,*) S%b,S%h,S%d,S%dp,S%As,S%Aps
   write(*,*) 'S:My Mu Ecy Ecu Phiy Phiu'
   write(*,*) S%My,S%Mu,S%Ecy,S%Ecu,S%Phiy,S%Phiu
   write(*,*) 'S:Mmax Phimax'
   write(*,*) S%Mmax,S%Phimax
   write(*,*) 'S: Igt Icr Mcr'
   write(*,*) S%Igt,S%Icr,S%Mcr
END

REAL*8 FUNCTION B1(fc)
REAL*8:: fc

  B1=0.85-0.05*(fc-280.)/70.
  IF (B1<0.65) B1=0.65
  IF (B1>0.85) B1=0.85
END

SUBROUTINE SEIeB(Ma,Se,EIe)
USE Global
IMPLICIT NONE
TYPE (SecT)::Se
REAL*8::Ma,EIe,Mcr,Igt,Icr,M,Ie
REAL*8::n,Y,C2,C3
REAL*8::Asc,Ast,dc,dt

 Asc=Se%Aps; Ast=Se%As; dc=Se%dp; dt=Se%d

 n = Es/Ec
 Y = (b*h*h/2.+(n-1.)*(Ast*dt+Asc*dc))/(b*h+(n-1.)*(Ast+Asc))
 Igt = b*h**3./12.+b*h*(Y-h/2.)**2.+(n-1)*(Ast*(Y-dt)**2.+Asc*(Y-dc)**2.)
 Mcr= 2.*SQRT(Fpc)*Igt/(h-Y)
 C2 = n*Ast+(n-1.)*Asc
 C3 = (n-1.)*Asc*dc+n*Ast*dt
 Y = (SQRT(C2**2.+2.*b*C3)-C2)/b
 Icr = b*Y**3./3.+n*Ast*(Y-dt)**2.+(n-1.)*Asc*(Y-dc)**2.
 M=ABS(Mcr/Ma)

 Ie=(Igt-Icr)*M**3.+Icr
 IF (Ie>Igt) Ie=Igt

 EIe=Ec*Ie
RETURN
END

SUBROUTINE CalcIgtIcr(Se,Igt,Icr,Mcr)
USE Global
IMPLICIT NONE
TYPE (SecT)::Se
REAL*8::Ma,EIe,Mcr,Igt,Icr,M,Ie
REAL*8::n,Y,C2,C3
REAL*8::Asc,Ast,dc,dt

 Asc=Se%Aps; Ast=Se%As; dc=Se%dp; dt=Se%d
 n = Es/Ec
 Y = (b*h*h/2.+(n-1.)*(Ast*dt+Asc*dc))/(b*h+(n-1.)*(Ast+Asc))
 Igt = b*h**3./12.+b*h*(Y-h/2.)**2.+(n-1)*(Ast*(Y-dt)**2.+Asc*(Y-dc)**2.)
 Mcr= 2.*SQRT(Fpc)*Igt/(h-Y)
 C2 = n*Ast+(n-1.)*Asc
 C3 = (n-1.)*Asc*dc+n*Ast*dt
 Y = (SQRT(C2**2.+2.*b*C3)-C2)/b
 Icr = b*Y**3./3.+n*Ast*(Y-dt)**2.+(n-1.)*Asc*(Y-dc)**2.
RETURN
END
```

```
INTEGER FUNCTION StrToInt(StrDim,Str)
INTEGER:: StrDim,Dec,I
CHARACTER:: Str(StrDim)

 Dec=1
 StrToInt=0
 DO I=StrDim,1,-1
   StrToInt=StrToInt+(ICHAR(Str(I))-48)*Dec
   Dec=Dec*10
 ENDDO
RETURN
END
```